Métodos Numéricos - 2014
OBLIGATORIO 1 (3 puntos)

Políticas de Incentivo en Redes de Pares

Las Redes de Pares (o redes P2P) son comunidades virtuales autogestionadas, montadas sobre la infraestructura de Internet, donde los usuarios (denominados pares), tienen un fin común, que es compartir un archivo o recursos de cómputo. Los protocolos de incentivo en estas redes promueven a que los pares cooperen efcientemente, brindando de forma altruista los recursos, y evitando así la presencia de pares "párasitos" en el sistema, que consumen recursos sin compartir. Estos protocolos de incentivo usualmente castigan a pares que no cooperan, premian o generan créditos a quienes sí lo hacen. En esta oportunidad veremos un modelo matemático que permite entender la estabilidad y dinámica de los pares en la red, bajo distintas estrategias de cooperación e incentivos. Cada par puede elegir en cada instante de tiempo t, una de n políticas de incentivos diferentes. Un par está en la clase $s_i(t)$ cuando elige la política i en el tiempo t. Sea $m_i(j)$ la probabilidad de que un par del tipo s_i provea servicio a otro de tipo s_j. Cuando un par recibe servicio de otro, gana $\alpha > 0$ puntos, y cuando lo ofrece pierde $\beta = 1$. Los pares aprenden las mejores estrategias, siguiendo un modelo de aprendizaje. Si $G_i(t)$ es la ganancia esperada conseguida al usar la estrategia s_i en tiempo t, y s_h es la mejor estrategia al final del tiempo t, entonces un par de s_i se mudará a la estrategia s_h con probabilidad $\gamma(G_h(t) - G_i(t))$, siendo γ la tasa de aprendizaje. Sea $x_i(t)$ la proporción de pares siguiendo la estrategia s_i en tiempo t. La cantidad esperada de servicios recibida es:

$$E(R_i)(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t) m_j(i), i = 1, ..., n \tag{1}$$

Asumiendo una cantidad de pares suficientemente grande y una selección aleatoria con equiprobabilidad, la cantidad esperada de servicios ofrecidos es, aproximadamente:

$$E(S_i)(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t) m_i(j), i = 1, ..., n \tag{2}$$

Luego $G_i(t) = \alpha E(R_i)(t) - E(S_i)(t)$. En forma matricial:

$$G(t) = (\alpha - 1) x^T(t) M x(t) \tag{3}$$

donde $M(i,j) = m_i(j)$ y $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Entonces:

- Dadas las políticas de incentivos, podemos conocer las probabilidades de cooperación $m_i(j)$, y armar la matriz M.
- Dado el modelo de aprendizaje, podremos obtener el vector de evolución $x(t)$, como también las ganancias individuales G_i y la ganancia total del sistema.

Dado el anterior modelo de aprendizaje, los pares cambian a la mejor estrategia en forma probabilística. Asumiendo tasas de arribo Poisson se puede aproximar el modelo discreto a uno continuo en el tiempo:

$$\dot{x}_h(t) = \gamma \sum_{i \neq h} x_i(t)(G_h(t) - G_i(t)) = \gamma[G_h(t) - G(t)] \tag{4}$$

$$\dot{x}_i(t) = -\gamma x_i(t)(G_h(t) - G_i(t)), \forall i \neq h \tag{5}$$

Consideremos ahora un sistema simplificado, con tres clases de pares:

1. Altruista: sirve al par solicitante en forma incondicional.
2. Justo: sirve con reciprocidad, de acuerdo con la amabilidad del par solicitante. En este obligatorio estudiaremos la interacción entre las tres políticas de incentivos anteriores.
3. Parásito: siempre se niega a servir.

En la política espejo, manteniendo el orden de estrategias antes indicado, se tiene que $m_1(j) = 1$, $m_3(j) = 0$, $m_2(1) = 1$, $m_2(3) = 0$, y por Bayes $m_2(2) = \frac{x_1(t)}{1-x_2(t)}$.

Por más información sobre el problema y su modelo recomendamos leer [ZHAO2008]. Fundamentar detalladamente todas las respuestas.

Parte 1: Problema de valores iniciales

1. Expresar un problema de valores iniciales con pares altruistas, justos, y parásitos utilizando la política reflejo.

Parte 2: Resolución del sistema

Consideremos de ahora en más la política espejo con las tres clases anteriores en idénticas proporciones $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1/3$.

1. Implementar el método de Euler hacia adelante.
2. Implementar el método del Trapecio.
3. Discutir resultados de ambos métodos en funcíon del parámetro de entrada $\alpha \in [0, 2]$, atendiendo poblaciones límite, ganancias individuales y ganancia neta en el sistema.
4. ¿Qué pares son los que más ganan en este sistema? ¿Existirán políticas mejores?

Bibliografía

[ZHAO2008] Zhao, Bridge Q. and Lui, John C.S. and Chiu, Dah-Ming. Mathematical Modeling of Incentive Policies in P2P Systems. Proceedings of the 3rd International Workshop on Economics of Networked Systems (NetEcon '08), pp 97–102, ISBN 978-1-60558-179-8.