

Métodos Numéricos - 2014 OBLIGATORIO 2 (3 puntos)

Descomposición en valores singulares aplicada al Tratamiento de Imágenes

La Descomposición de matrices en valores singulares tiene aplicaciones notables en muchas ramas de la ingeniería. En este obligatorio se presenta su aplicación a la compresión de imágenes.

Fundamentar detalladamente todas las respuestas.

El paquete de Octave *image* es necesario en algunas partes del obligatorio.

Parte 1: Descomposición en valores singulares

1. Demostrar el Teorema de Descomposición en valores singulares (SVD). Basarse en el esquema de demostración presentado en [GOLUB2013].
2. Implementar en Octave/Matlab la función *mysvd()* que realiza la descomposición SVD mediante el algoritmo de Golub-Kahan-Reinsch, presentado en [GOLUB2013] o [QUARTERONI2007]. Nota: puede utilizarse librerías para calcular las descomposiciones de bidiagonalización y QR.
3. Utilizando matrices de ejemplo, comparar en tiempo y precisión la función desarrollada, *mysvd()*, con la función nativa de Octave, *svd()*.
4. Discutir sobre escalabilidad de las funciones *mysvd()* y *svd()* al crecer la matriz.

Parte 2: Uso en Tratamiento de Imágenes

1. Descargar y desplegar la imagen *fing.bmp* en Octave.
2. Descomponer la imagen en sus valores singulares, y reconstruir la imagen a partir de su descomposición.
 - ¿Se ha perdido calidad en la imagen? Nota: Utilizar *MSE* (mean squared error) para medir la pérdida de calidad entre la imagen original y la imagen reconstruida.
 - ¿Obtendríamos una reducción de tamaño si guardáramos la descomposición en lugar de la imagen?
3. Reconstruir la imagen utilizando solamente los $k \in 1, 10, 20, 30, \dots, 100$ valores singulares más significativos. En cada caso: ¿se ha perdido calidad en la imagen?, ¿se ha ahorrado espacio?
4. Encontrar la representación de la imagen en valores singulares que logra una calidad al menos de $MSE = 0,0028$ respecto a la original.

- ¿Qué compresión se logra para dicha calidad? Discutir según calidad versus compresión.
- ¿Esto se cumple para otras imágenes?, ¿Esto depende de la dimensión de la imagen y de su complejidad?

Bibliografía

[GOLUB2013] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. Matrix Computations (4th edition). Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. ISBN 9781421407944. Johns Hopkins University Press. 2013

[QUARTERONI2007] Quarteroni, A. and Sacco, R. and Saleri, F. Numerical Mathematics. ISBN 9783540346586. Texts in Applied Mathematics. 2007