



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

طراحی الگوریتم

تمرین سوم

موعد تحویل: ۵ اسفند ۱۳۹۴

پاسخ ها را در کلاس تدریس یار تحویل دهید

بهمن ماه ۱۳۹۴

۱. با استفاده از قضیه اصلی روابط زیر را حل کنید:

$$۱. \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + n$$

$$۲. \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + n^{\log_۲ ۵}$$

$$۳. \quad t(n) = ۸t\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱۸\left(\frac{n}{۲}\right)^۲$$

$$۴. \quad t(n) = ۷t\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱۸\left(\frac{n}{۲}\right)^۲$$

۲. با استفاده از روش حل درختی به سوالات زیر پاسخ دهید: (فرض کنید که $t(۰) = ۰, t(۱) = ۱$)

$$۱) \quad t(n) = t(n-۱) + n$$

$$۲) \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱$$

$$۳) \quad t(n) = ۲t(\sqrt{n}) + ۱$$

$$۴) \quad t(n) = ۴t\left(\frac{n}{۴}\right) + n$$

$$۵) \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + n^۲$$

۳. **حداقل** تعداد عناصر یک درخت AVL به ارتفاع h از رابطه زیر پیروی می کند. زیرا هر درخت AVL به ارتفاع h **حداقل** یک فرزند به ارتفاع $h-۱$ دارد که آن درخت **حداقل** $f(h-۱)$ عنصر دارد و یک فرزند به ارتفاع $h-۲$ که آن درخت نیز **حداقل** $f(h-۲)$ عنصر دارد. همچنین این درخت یک ریشه نیز دارد.

$$f(h) = f(h-۱) + f(h-۲) + ۱$$

$$f(۱) = ۱$$

به روش بازگشتی، مقدار $f(h)$ را بدست آورید.

۴. توابع f و g را به صورت صریح بیابید:

راهنمایی: برای محاسبه $f(n)$ سعی کنید $g(n-۱)$ را برحسب $f(n-۱), f(n-۲)$ بنویسید. شاید تفاضل دو رابطه کمک خوبی به حل مساله کند!

$$f(n) = f(n-۱) + g(n-۱)$$

$$g(n) = ۲f(n-۱) + g(n-۱)$$

$$f(۱) = ۱$$

$$g(۱) = ۱$$

۵. رابطه زیر را با استفاده از اثبات قضیه اصلی حل کنید (امتیازی).
توجه: استفاده از روش درخت بازگشتی مجاز نیست.

$$t(n) = 3t\left(\frac{n}{4}\right) + 2t\left(\frac{n}{8}\right) + n$$

$$t(1) = 1, t(2) = 3$$

۶. رابطه بازگشتی ای بنویسید که $t(n) \in \theta(n^{\lg n})$ باشد. (همچنین درستی ادعای خود را اثبات کنید)
(حذف شد)

۷. معادله ناهمگن زیر را حل کنید. توضیح دهید به چه دلیل نمی‌توان به پاسخ دقیق این معادله دست پیدا کرد.

$$t(n) = t\left(\frac{n}{4}\right) + t\left(\frac{n}{8}\right) + n^2$$

۸. با در نظر گرفتن معادله زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید.

$$a(n) = 8a(n-1) - 16a(n-2) + F(n)$$

رابطه صحیح

الف) جواب معادله همگن همبسته را در رابطه بالا بیابید.

ب) فرم کلی پاسخ ویژه را در هریک از حالات زیر بیابید.

- $F(n) = n \cdot 4^n$
- $F(n) = n^2 \cdot 2^n$
- $F(n) = 4^n$
- $F(n) = n^2 \cdot 2^n$

موفق و پیروز باشید.