



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
( پلی تکنیک تهران )

طراحی الگوریتم

تمرین پنجم

اسفندماه ۱۳۹۴

## سوال ۱:

در این سوال برنامه ای بنویسید که پیچیدگی زمانی اش  $O(n)$  باشد.

پرویز یک جواهر فروشی دارد که چند وقت پیش توسط گروه ناشناسی از دزدان، بخش مهمی از جواهرآلات آن به سرقت رفت. متأسفانه هویت دزدان تاکنون مشخص نشده است. پرویز از این موضوع بسیار ناراحت بود.

پرویز که پس از ماجرای دزدی، جواهر فروشی خود را تعطیل کرده بود، تصمیم گرفت به جواهرفروشی بازگردد. و دوباره شروع به کار بکند. به جواهرفروشی خود رفت و تصمیم گرفت، جواهرفروشی خود که هم اکنون تبدیل به یک ویرانه شده بود را تمیز کند. و مانند روز اولش بکند. درحین تمیز کردن جواهرفروشی متوجه شد که دزد دقیقا مسیری که در آن بیشترین طلا و جواهرات است را طی کرده است و تمام جواهرات موجود در این مسیر را مانند یک جارو برقی خالی کرده است!

پرویز بسیار افسوس می خورد و به اثرات دزدی نگاه می کرد. در حین راه رفتن از بین شیشه خورده ها، ناگهان پایش به یک چراغ طلایی خورد.

پرویز با تعجب به چراغ نگاه کرد. او این چراغ را از چین با قیمت مناسبی خریده بود. حالا دیگر آن زرق و برق قدیمی را نداشت. چراغ را از روی زمین برداشت؛ و چند ثانیه ای به چراغ نگاه کرد.

ناگهان در کمال تعجب، دودی از چراغ بیرون زد و یک غول که بسیار شبیه غول چراغ جادو بود از آن بیرون آمد و گفت: فرمانبردارم سرورم! یک آرزو بکن تا برآورده بکنم.

پرویز از دیدن غول چراغ بسیار خوشنود شد و کمی فکر کرد که چه آرزویی بکند.

پس از اندکی تأمل گفت: می خواهم به گذشته بروم. به یک سال پیش.

و غول چراغ آرزوی پرویز رو برآورده کرد.

پرویز که به یک سال قبل برگشته بود، سیستم های امنیتی طلا و جواهرات خود را بسیار مجهز کرد تا این بار کسی نتواند از مغازه سرقت کند.

چند روز بعد از این ماجرا، پرویز یادش آمد که نمودار نرخ تغییرات قیمت سکه طلا را به ترتیب روز می داند. زیرا به یک سال قبل بازگشته است. در نتیجه تصمیم گرفت که در این سال، در زمان بهتری طلا بخرد.

از آنجا که خرید طلا و جواهرات هزینه های جانبی فراوانی دارد، او تصمیم می گیرد که در کل این سال، در یک روز تمام سکه های طلا را بخرد. و در یک روز تمام آنها را بفروشد. با توجه به اینکه مردم شهر پرویز در گرانی به بازار حمله می کنند، مطمئناً پرویز می تواند تمام سکه های طلا را در یک روز بفروشد.

برنامه ای برای پرویز بنویسید که در آن با توجه به نرخ تغییرات قیمت در طول سال، مشخص کند بهترین زمان خرید طلا و بهترین زمان فروش طلا چه روزی است.

خط اول تعداد روز های سال را به شما میدهد. (تو دنیایی که غول چراغ داریم، انتظار نداشته باشید که طول سال هم ۳۶۵ باشد!)

در خط بعدی نرخ تغییرات قیمت سکه طلا به شما داده می شود.

در خط اول باید بیشترین سود به ازای هر سکه را چاپ کنید.

در خط دوم خروجی باید بهترین روز خرید و بهترین روز فروش سکه های طلا را به ترتیب چاپ کنید.

ورودی نمونه:	4 1 2 -1 -5
خروجی نمونه:	3 0 2

در مثال بالا، در صبح روز صفرم، قیمت سکه ی طلا برای مثال برابر با 100 تومان است. صبح روز اول قیمت طلا +1 می شود. یعنی 101 تومان. در صبح روز دوم قیمت طلا 2+101 می شود. در صبح روز سوم قیمت طلا یک واحد کاهش پیدا می کند و برابر با 103-1 است. در روز بعدی نیز با کاهش قیمت سکه طلا مواجه هستیم و قیمت طلا 5-102 می شود. در نتیجه اگر پرویز در روز 0 ام، طلای خود را بخرد و در روز 2 ام تمام سکه های خود را بفروشد به ازای هر سکه، ۳ تومان سود کرده است.

ورودی نمونه:	7 -1 3 4 2 -1 3 -2
خروجی نمونه:	11 1 6

در مثال بالا، در روز اول، پس از کاهش ۱ تومانی قیمت طلا، سکه ها را می خریم. سپس در روز ششم نیز تمام سکه ها را می فروشیم. بدین ترتیب، به ازای هر سکه طلا ۱۱ تومان سود کرده ایم.

ورودی نمونه:	4 1 1 0 2
خروجی نمونه:	4 0 4

## سوال ۲

در این سوال، با استفاده از DP مساله را به صورتی حل کنید که پیچیدگی زمانی اش  $O(n^2)$  باشد.

در امتحان عملی آزمایشگاه فیزیک ۱، استاد به کسانی که امتحان می دادند گفت پس از انجام آزمایش و محاسبات اولیه، نمودار آونگ کاتر  $f(x)$  را به ازای مقادیر مختلف  $x$  روی نمودار بکشید. پژمان یکی از شرکت کنندگان در این آزمون بود. پژمان پس از انجام آزمایشات و محاسبات اولیه، شروع به کشیدن نمودار آونگ کاتر کرد. او با توجه به تجربیات گذشته اش در کلاس آزمایشگاه فیزیک ۱، می دانست که نمودار باید شکل "غیر نزولی" داشته باشد. پژمان پس از کشیدن نمودار  $f(x)$  بر حسب  $x$  متوجه شد نمودارش به "غیرنزولی" نیست!

از آنجا که پژمان انسان متقلبی بود اعتقاد داشت باید آزمایشگاه فیزیک ۱ از چارت کامپیوتری ها حذف شود، تصمیم گرفت نتایج آزمایش را طوری تغییر دهد که نمودار نهایی "غیر نزولی" شود.

از طرفی، پژمان مقدار  $f(x)$  به ازای  $x$  های مختلف را با خودکار روی برگه آزمون نوشته بود.

او به ازای بعضی از  $x$  ها،  $f(x)$  را تغییر دهد به نحوی که در نهایت  $f(x)$  صعودی شود. پژمان برای تغییر اعداد آزمایش، مجبور بود روی عدد قبلی خط بزند و عدد جدید را وارد کند.

توجه کنید پژمان فقط می تواند  $f(x)$  را تغییر بدهد و اجازه ندارد  $x$  را تغییر دهد.

برنامه ای بنویسید که بگوید حداقل تعداد خط خوردگی های لازم برای آنکه نمودار  $f(x)$  غیر نزولی شود، چیست؟

وروی مساله جدول آزمایش پژمان است. خط اول تعداد سطر های جدول است. سپس در هر خط به ترتیب  $x$  و  $f(x)$  نوشته شده است. تضمین می کنیم که اعداد  $x$  به ترتیب از ۱ تا  $n$  هستند.

خروجی مساله تعداد کمترین خط خوردگی در برگه امتحانی برای آنکه نمودار غیر نزولی باشد، است.

توجه کنید که شما می توانید بعد از خط خوردگی هر عددی که دوست داشتید را وارد کنید. و **کمترین تعداد خط خوردگی** در این مساله مهم است نه چیز دیگری.

ورودی نمونه:	7 1 4 2 6 3 5 4 9 5 12 6 2 7 20
خروجی نمونه:	2

در این مثال می توانیم با دو تغییر نمودار حاصل را غیر نزولی بکنیم. برای مثال کافیت مقدار  $f(2)=4.1$  و  $f(6)=12.8$  را تغییر بدهیم.

توجه کنید که مقادیر  $f(x)$  اعداد حقیقی هستند. و شما می توانید جای  $f(x)$  فعلی، هر مقداری را قرار دهید.  
در ضمن توجه کنید که ما جدول جدید را از شما **نمی خواهیم**. ما صرفاً تعداد کمترین خط خوردگی لازم را از شما می خواهیم.  
و اینکه دوباره تکرار می کنیم که اعداد ورودی به ترتیب از  $x=1$  تا  $x=n$  هستند. نیازی به مرتب کردن آنها نیست.

ورودی نمونه:	3 1 0.5 2 0.7 3 0.9
خروجی نمونه:	0

ورودی نمونه:	3 1 6 2 5 3 4
خروجی نمونه:	2

ورودی نمونه:	3 1 8 2 8 3 8
خروجی نمونه:	0

ورودی نمونه:	10 1 5 2 5 3 4 4 5 5 4 6 4 7 4 8 4 9 4 10 4
خروجی نمونه:	3

## سوال ۳

در این سوال، با استفاده از DP مساله را به صورتی حل کنید که پیچیدگی زمانی اش  $O(n^2)$  باشد.

چنگیز به تازگی به تصمیم گرفته است که معلم مهدکودک بشود. در یکی از روزهای کاری اش، متوجه می شود که  $n$  جعبه در اتاق اسباب بازی ها وجود دارد. تمام جعبه ها دارای طول و عرض متفاوت ولی ارتفاعی برابر ۱ هستند. او تصمیم می گیرد برای اینکه پیش کودکان محبوب شود برایشان یک برج بسازد. در صورتی که برج سقوط کند، محبوبیت چنگیز از بین می رود. برای همین او می خواهد طوری جعبه ها را روی هم بگذارد که هر جعبه از جعبه زیر خود کوچک تر باشد.

یعنی اگر جعبه  $i$  ام، طول ۱۰ و عرض ۸ داشته باشد، جعبه  $i+1$  ام باید طولش کمتر مساوی ۱۰ و عرضش کمتر مساوی ۸ باشد.

از آنجا که جعبه ها رنگی هستند، و چنگیز اعتقاد دارد ترتیب مناسب رنگ ها، تاثیر مثبتی در روحیه کودکان دارد، نمی خواهد جعبه ها را بچرخاند. برای مثال جعبه ای با طول ۱۰ و عرض ۸، با چرخشی ۹۰ درجه تبدیل به جعبه ای با طول ۸ و عرض ۱۰ میشود.

ولی چنگیز نمی خواهد که جعبه ها را بچرخاند.

او از شما می خواهد برنامه ای بنویسد که بگوید حداکثر ارتفاع برج چه مقداری می تواند باشد.

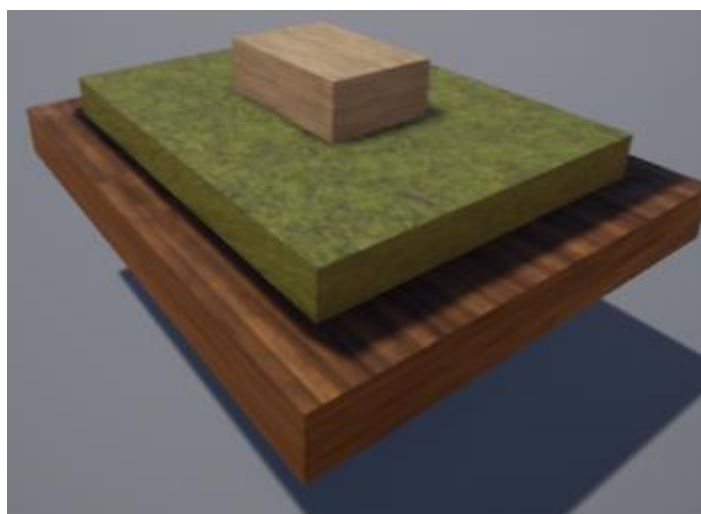
ورودی مساله در خط اول تعداد جعبه ها است. سپس در خط بعدی، طول و عرض جعبه ها داده می شود.

توجه کنید که شما نباید جعبه ها را بچرخانید.

طول لزوما از عرض بیشتر نیست. می تواند کمتر نیز باشد.

ورودی نمونه:	
3	
8 10	
2 3	
7 9	
خروجی نمونه:	
3	





(اینطوری دیگه. می خواهیم این جعبه ها رو بگذاریم روی هم. البته جعبه های مهدکودک چنگیز اینا رنگی هست. و بخاطر همین چنگیز اجازه نداره جعبه ها رو بچرخونه چون ترتیب رنگ هاش عوض میشه.)

ورودی نمونه:	3 7 5 8 10 5 7
خروجی نمونه:	2

ورودی نمونه:	4 8 10 8 10 8 10 10 8
خروجی نمونه:	3

توجه کنید که ما مجاز نیستیم جعبه آخر را بچرخانیم.