TRABAJO FIN DE GRADO

INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

Pensar las máquinas. Maquinar los problemas.

Repercusión de los desarrollos de Gödel y Turing en Informática y Matemáticas

Autor
Francisco Vázquez Escobar

Directores
Miguel Delgado Calvo Flores

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

—

Granada, Septiembre de 2022

Pensar las máquinas. Maquinar los problemas.

Repercusión de los desarrollos de Gödel y Turing en Informática y Matemáticas.

Autor
Francisco Vázquez Escobar

Directores
Miguel Delgado Calvo Flores

Repercusión de los desarrollos de Gödel y Turing en Informática y Matemáticas

Francisco Vázquez Escobar

Palabras clave: Metamatemática, Decidibilidad, Formalización, Axiomatización, Máquina de Turing, Demostrabilidad, Consistencia, Completitud.

Resumen

Este trabajo consiste en un desarrollo de los trabajos de los matemáticos Alan Turing y Kurt Gödel, no solamente desde la perspectiva de su tiempo, sino también desde la visión de las causas pasadas que llevaron a la escuela matemática a hacerse esas preguntas. También profundiza en los trabajos futuros que partieron de la repercusión que ellos dos tuvieron en sus respectivos campos.

Para ello se ha realizado un recorrido histórico desde las disputas a finales del siglo XIX entre la visión naturalista de la matemática y los incipientes formalistas puros, la cual culminó en la presentación de los Problemas del Siglo de Hilbert, concretamente centrándonos en el Problema número 2 sobre la axiomatización matemática, el cual fue resuelto con los Teoremas de Incompletitud de Gödel, y esto se continúa con los trabajos de Alan Turing al respecto, cuna indudable de la computación moderna, terminando con los distintos trabajos posteriores y actuales que partieron de estas tesis.

Todo esto, además de estar contextualizado históricamente, secomplementa con las distintas preguntas filosóficas y, en esencia, epistemológicas que supusieron el motor de estas investigaciones.

Repercussion of the developments of Turing and Gödel in Mathematics and Computer Science

Francisco, Vázquez Escobar (student)

Keywords: Decidability, Turing Machine, Demonstrability, Axiomatization, Formalization, Metamathematics, Completeness, Consistency.

Abstract

This work consists of a development of the works of mathematicians Alan Turing and Kurt Gödel, not only from the perspective of their time, but also from the perspective of the past causes that led the mathematical school to ask these questions. It also delves into future works that stemmed from the repercussion that these two had in their respective fields.

For this, a historical journey has been made from the disputes at the end of the 19th century between the naturalistic vision of mathematics and the incipient pure formalists, which culminated in the presentation of Hilbert's Problems of the Century, specifically focusing on Problem number 2 on mathematical axiomatization, which was resolved with Gödel's Incompleteness Theorems, and this continues with Alan Turing's work on the matter, the undoubted cradle of modern computing, ending with the different subsequent and current works that departed from these theses .

All this is crossed not only by the historical events that occurred in this story, but also by the different philosophical and, essentially, epistemological questions that were the driving force behind these investigations.

Yo, **Francisco Vázquez Escobar**, alumno de la titulación Ingeniería Informática y Matemáticas de la **Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación de la Universidad de Granada**, con DNI 20099401T, autorizo la ubicación de la siguiente copia de mi Trabajo Fin de Grado en la biblioteca del centro para que pueda ser consultada por las personas que lo deseen.

Fdo: Francisco Vázquez Escobar

Granada a 3 de Septiembre de 2022 .

D. **Miguel Delgado Calvo Flores**, Profesor del Área de Ciencias de la Computacion del Departamento Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada.

Informa:

Que el presente trabajo, titulado ***Repercusión de los desarrollos de Gödel y Turing en Informática y Matemáticas***, ha sido realizado bajo su supervisión por **Francisco Vázquez Escobar**, y autorizamos la defensa de dicho trabajo ante el tribunal que corresponda.

Y para que conste, expiden y firman el presente informe en Granada a 30 de Agosto de 2022 .

Los directores:

Firmado por DELGADO CALVO-FLORES MIGUEL - ***8436** el día 31/08/2022
con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Miguel Delgado Calvo Flores

Índice general

1. Epistemología de las Matemáticas. ¿Qué es verdad? 17
1.1. Mientras la Física observa, la Matemática convence 18
1.2. Los axiomas. En algún punto hay que empezar 21
1.3. Poincaré vs Hilbert. Lo verdadero frente a lo coherente 23
1.3.1. El método formalista hasta sus últimas consecuencias 24
1.3.2. La importancia de la representación 26

2. El problema II de Hilbert 27
2.1. La conferencia de Hilbert 28
2.2. Cuestiones previas sobre la formalización 29
2.3. Intentos de axiomatización completa 32
2.3.1. La paradoja Richardiana 33

3. Los Teoremas de Incompletitud de Gödel 37
3.1. Cuestiones previas 37
3.2. Sobre sentencias formalmente indecidibles del *Principia Mathematica* y sistemas afines. 39
3.3. Consecuencias de los Teoremas de Incompletitud de Godel. . 43
3.4. Un paso más allá de los Teoremas. La versión de Turing . . . 46

4. Algoritmos vs Conjuntos 49
4.1. La Máquina de Turing. El culmen de la representación 50
4.1.1. El problema de la Parada 52
4.2. Teoría algorítmica de la información. 53
4.2.1. Probabilidad de Detencion de un programa 56
4.2.2. Conway y el Juego de la Vida 60

5. Desarrollos posteriores a los trabajos de Turing y Gödel 63
5.1. Shannon y la Teoría de la Información 63
5.1.1. La información es entropía negativa 65
5.2. El nacimiento de la Inteligencia Artificial 66
5.2.1. Redes Neuronales 66
5.3. Reflexión sobre el legado de Gödel 68

6. Conclusiones **71**
6.1. La obsesión objetivista en la ciencia 71

Bibliografía **73**

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el tremendo apoyo por parte de mi familia, en especial a mis tíos Araceli y Javier por asumir los costes académicos, y a mis padres, Javier y Maria Teresa, por los costes de estancia en la ciudad de Granada, de la cual me llevo mucho más que mi experiencia académica.

Además es de mención un recuerdo a todas aquellas que dejaron su vida y su salud en pelear una educación pública de calidad que me ha permitido realizar mis estudios, y a las generaciones que vienen la promesa de que venga quien venga no la dejaremos caer.

A los profesores Javier Meri, Rafael Payá Albert, Juan Antonio Maldonado, Serafín Morales y José Soto Hidalgo, por mostrarme en todo su esplendor la belleza de las materias que aquí se tratan desde una profesionalidad y pasión envidiables.

A mi tutor Miguel Delgado por ayudarme a desarrollar este trabajo y compartir conmigo su pasión por la temática que el mismo contiene.

A Samuel, Maxi, Laura y Paula. Por mostrarme que la mejor manera de estudiar es disfrutando del proceso, y de que ni el día, ni la ciudad, ni nuestra vida se acaban al salir del aula. Y que esto no está reñido con haber sido unos compañeros y estudiantes brillantes.

A Ángela, Carmen y Víctor, por demostrarme que cuando uno no puede hay gente para levantarte, que todo es más fácil entre todos y que el saber ayudar a quien nos rodea es lo que nos hace personas.

A Clo y Marta, por convencerme de que era capaz de esto y mucho más cuando ni yo mismo me lo creía.

A Julia y Javi, por jugar siempre conmigo a esto de los numeritos, lo que por suerte aún llevo conmigo y hace de esta pasión algo más sencillo.

Al Real Colegio Mayor de San Bartolomé y Santiago, para todos nosotros el Bartolo, (como bien nos dijo siempre el jefe, la institución la hacen las personas, y aquí me acuerdo de todos vosotros), por acogerme como parte de su familia y hacerme sentir como en casa desde que llegué a esta ciudad.

A los dos David, Iñaki, Pedro, Sergio, Álvaro y Raquel, por acogerme este último año con ellos en el cual pensaba que la soledad iba a invadirme. No han sido solo unos bolazos.

A Alan Turing, por encontrarse con una sociedad que únicamente fue capaz de darle desprecio, marginación y represión por ser quien era. Una sociedad a la que él le devolvió su ingenio, pasión y esfuerzo para, entre otras cosas, librarnos del fantasma del fascismo.

A vosotros, Abuela Lola y Tito Juanfer, porque os echo muchísimo de menos.

Introducción

Como resumen máximo para entender la temática de este trabajo sirve su título, *Consecuencias de los trabajos de Turing y Gödel en Matemáticas e Informática.* Con esto el lector puede intuir que se centrará en todos los estudios posteriores al desarrollo de estos dos importantes matemáticos. Nada más lejos de la realidad.

Esto es debido a que, para entender las consecuencias de algo en toda su complejidad, y sobretodo si tratamos con trabajos de semejante calado, es fundamental entender también su presente y pasado, cuáles fueron las condiciones que se dieron para que tantísimas personas dejaran su impronta en lo que acabó culminando en estas dos trayectorias individuales. Estos trabajos dejaron tal legado no solo por la construcción de sus teoremas y máquinas, sino porque las preguntas que estas resolvieron llevaban obsesionando (y obsesionan) a la comunidad científica mucho tiempo. Porque la meta no se entiende sin el camino, un camino que dejó por medio muchas de las grandes pulsiones dentro de las matemáticas; pulsiones y enfrentamientos que, como defiende la dialéctica, resultan ser el motor de la historia.

La temática que me llegó para comenzar a desarrollar esta tesis se puede entender como una cima, y una cima es inentendible sin darse aunque sea un paseo por los cimientos.

El mayor legado de Kurt Gödel fueron sus dos Teoremas de Incompletitud que sirvieron para tumbar las pretensiones de David Hilbert y otros formalistas de axiomatizar de manera completa las matemáticas, enunciado este propósito de manera formal en su Problema número 2. Los trabajos de Alan Turing sirvieron entre otras cosas para profundizar en esta cuestión bajo el concepto de indecibilidad fundamentalmente, con lo que se separaba definitivamente la veracidad de una afirmación o resolución de un problema de las vías mecánicas y puramente lógicas que llevaban a la consecución de esta solución, vías que resultan básicas en la matemática axiomática.

Pero como ya se ha mencionado, para ello es necesario desentrañar las discusiones que llevaron a la construcción y defensa de estos conceptos que hoy resultan hegemónicos en nuestra rama, y las preguntas, algunas de ellas aún abiertas, que las hicieron nacer. Es por ello que este trabajo, aunque su título no lo demuestre, trata sobre un abanico mucho más amplio que abarca toda la epistemología de la matemática moderna, entre ellas las preguntas que llevaron al nacimiento de la informática que hoy conocemos.

Objetivos

Los objetivos que se persiguen en este trabajo tienen que ver sobre todo con la divulgación de las bases de las matemáticas e informática. No es tanto una profundización sobre algún desarrollo concreto de nuestra rama, sino un paseo por sus bases con el objetivo de cuestionarlas y reflexionarlas, entendiendo los momentos históricos en los que se volvieron fuertes y pasaron sus dificultades.

Creo que este trabajo toma su utilidad máxima en manos precisamente de alguien poco versado en la materia, ya que en casi ningún momento se ahonda en cuestiones excesivamente técnicas, mientras que sí que cuestiona en profundidad cuáles son las bases de nuestra rama del saber. En este trabajo hay filosofía, hay ciencia, sociología, historia... Por eso creo que sirve para defender la utilidad de mezclarlas, sumarlas, restarlas y enfrentarlas, con el fin de llegar hasta donde ninguna de ellas por sí solas puede hacerlo.

Entiendo que este trabajo cueste entenderse como una profundización en matemáticas o informática por sí mismos. Por eso pido al lector, y sobretodo al corrector, que lo lea bajo los ojos de quien no sabe lo que sabe, y busque en él más preguntas que respuestas.

Capítulo 1

Epistemología de las Matemáticas. ¿Qué es verdad?

El primer paso en esta tesis será sentar las bases de cuál es la fuente desde la cual la escuela matemática busca presentar a la sociedad el conocimiento que va adquiriendo conforme avanza en su trabajo.

Para hacerlo, una buena manera es compararlo con otra rama del saber, como en este caso puede ser la física (en realidad, sirve cualquier ciencia natural como la química o la biología).

Cuando la física presenta un nuevo descubrimiento, cuando quiere convencer a la sociedad de que ha sido capaz de generar nuevo conocimiento tiene que, como cualquiera, presentar esta nueva tesis junto con la base que la sustenta, exponiendo de dónde proviene.

La sentencia "el Universo tiene 15.000 millones de años"por sí sola no es conocimiento. No se diferencia mucho de la sentencia "Federico García Lorca nació en Ciudad Real" o "Los hobbits vienen de la Tierra Media". Luego, ¿Cómo se procede para tratar de separar ficción, donde todo lo escrito es válido en el momento que se escribe, de conocimiento?

En el caso de la física, esta es considerada una ciencia empírica porque la fuente de la que bebe su conocimiento es la observación. Yo observo que algo pasa, y trato primero de comprobar si cualquier persona que lo observa lo percibe de la misma manera. La velocidad de un móvil, la cantidad de objetos que tengo delante o la carga eléctrica que tiene un determinado circuito. En el momento que se percibe que el observador que tenga delante nuestro suceso a estudiar es indiferente, podemos empezar a hablar de objetividad frente a subjetividad.

De hecho, esta podría ser por sí misma una buena definición de lo objetivo. Lo objetivo es lo que se presenta de la misma forma independientemente del observador. De ahí que digamos que la belleza o los sentimientos que aflora una obra artística son subjetivos, precisamente porque varían en función del observador (incluso las mismas obras se construyen y completan bajo las diferentes observaciones de la misma), mientras que la longitud o el voltaje, por ejemplo, (no entramos en cuestiones más complejas como la relatividad, estamos centrándonos en el modelo de la física clásica) es igual independientemente del observador. Aquí de hecho podemos ir un paso más allá y afirmar que ya no necesitamos en muchos casos un observador humano, sino que hemos sido capaces de desarrollar máquinas que miden la velocidad o el voltaje por sí solas.

Esta palabra, medir, es importante. La medición es la técnica más importante en la historia de la ciencia. Es lo que la ha permitido presentar conceptos y verdades ajenas al observador que las generó o presenció. Es el mejor medio que tenemos para acercarnos a la objetividad, y en ella los escalares y otras herramientas matemáticas han resultado fundamentales en su desarrollo.

Uno de los grandes complejos, o más bien limitaciones, que han alejado a las ciencias sociales de las ciencias naturales, teniendo mucha menor capacidad de predicción y análisis objetivo es precisamente por no tener magnitudes escalares bajo las que medir los procesos que estudian, viéndose obligados a moverse en análisis más cualitativos. Porque, por ahora, no tienen la capacidad de medir.

La física ha invertido mucho esfuerzo en plantear un modelo que se aleje lo más posible de la subjetividad humana a la hora de dar como válidas estas observaciones, desarrollando una herramienta fundamental para su formalización y prestigio a ojos de la sociedad como es la del experimento, el cual concluye con el modelo general que actualmente considera que es el que debe seguir para proceder en su objetivo de producir cada vez más conocimiento, y es lo que se conoce como modelo experimental.

Las particularidades de este modelo no interesan demasiado para nuestra tesis, lo que queremos dejar constancia es que la base del mismo es la observación. La fuente de verdad en la que se apoya la física, su argumento fundamental, es la observación. Algo es verdad porque se ha observado de forma continuada que así sucede en nuestra realidad.

1.1. Mientras la Física observa, la Matemática convence

Ahora pasemos a las matemáticas para intentar ver si es así. Durante muchos años, y esto es algo que se desarrolla en el siguiente punto, las matemáticas han sido consideradas (de hecho aún se escucha alguna vez) "el lenguaje de la ciencia", es decir, la rama que consiste en desarrollar un lenguaje de números y otras estructuras abstractas que permita a las demás ciencias presentar de forma objetiva sus tesis, pero lo cierto es que ya desde hace más de un siglo sabemos que la potencialidad de las matemáticas es mucho mayor. Utilizarlas sólo para hablar de "lo real" es quedarse corto en todo lo que pueden plantear.

Además, volviendo al tema que nos ocupa, argumentar que las matemáticas beben de la observación de la realidad complicaría enormemente su desarrollo por la naturaleza de las tesis que intenta plasmar. Para hablar de las "certezas" del conocimiento matemático, la observación no nos sirve de mucho.

La primera piedra con la que uno se encontraría al tratarlas como una ciencia empírica es que muchas de las tesis que plantea (de hecho las más importantes) hablan de infinitas cosas a la vez, luego la única manera de probarlas sería comprobarlo para los infinitos números, espacios, funciones de los que la tesis trata, y esto es imposible. Por definición de infinito, nunca tendría fin.

Por ejemplo, para probar que la conjetura de Goldbach es verdad para los primeros 10^{80} números bastaría con fabricar un ordenador lo suficientemente potente como para realizar los cálculos pertinentes, y si comprueba que es verdad, podemos afirmarlo con todas las garantías, y ponerle el prefijo de Teorema sin ningún problema a nuestra tesis. Pero es que la conjetura de Goldbach dice que es verdad para todos los números pares, luego da igual que lo hagamos para 10^{80} o para $10^{10^{80}}$, no habríamos ni empezado.

Luego, las matemáticas tuvieron que buscarse una forma de hablar de todos los números a la vez, y buscar fórmulas tan ingeniosas como el argumento por inducción [1] para poder probar (más adelante trataremos de desgranar qué es esto de probar) sus afirmaciones.

A finales del siglo XIX, un momento histórico fundamental en el desarrollo de esta tesis, se empiezan a abrir de forma explícita estas discusiones. Dejamos como ejemplo la siguiente reflexión, perteneciente a la introducción de *Ciencia e Hipótesis*, de Henri Poincaré, un matemático cuyo nombre también será fundamental en esta introducción. Esta discusión en concreto llega a su culmen con la disputa entre Cantor, autor intelectual de los transfinitos y Kronecker, su maestro y ferviente adversario en esta cuestión.

"En matemática, el último tercio del siglo XIX ve la constitución de un nuevo modo de hacer, con una inversión radical respecto del hacer matemático anterior, inversión epistemológica que convierte en punto de partida la

[1] El método por inducción completa es uno de los más usados en matemáticas a la hora de probar en el acto una propiedad para todos los elementos de cualquier conjunto numerable totalmente ordenado, en el que podamos hablar de un siguiente y un primero. Por ejemplo, los números naturales. Consiste en demostrar nuestra propiedad para el 1, por ejemplo. Tras esto, lo suponemos cierto para n y debemos llegar a su veracidad para $n+1$. Con esto, dado que la implicación es una propiedad transitiva, aunque los naturales sean infinitos, llegar a cada número natural desde 1 se hace en un número finito de pasos, luego está probado para todo $n \in \mathbb{N}$. Dicho de forma más visual, si tiramos la primera ficha de una ristra infinita de dominó, aunque no lleguen a caer nunca todas, todas caerán en algún momento. Verdad para 1 $\Rightarrow$ para 2 $\Rightarrow$ para 3 $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ para 437.000.000 $\Rightarrow$ ...

noción de conjunto, sistema o multiplicidad. Conjunto discreto de elementos cuya naturaleza no importa y que entraña, como consecuencia, el manejo de totalidades infinitas dadas en acto, y otra consecuencia, los números cardinales transfinitos creados por Cantor. Punto de partida que obliga a los matemáticos a establecer nuevas formas de definición, como la implícita por postulados, por abstracción, por recursión...; nuevos métodos demostrativos como la inducción completa, los indirectos o existenciales, el método de la diagonal..., y nuevos modos de expresión que requieren el manejo de los cuantificadores y una ideografía o lógica especial. Inversión epistemológica que parte no del elemento existente y dado y del cual se buscan sus propiedades, sino de un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera y que, por ello, elimina cualquier ayuda de la intuición y obliga a la búsqueda de un nuevo tipo de rigor demostrativo que, de modo tradicional, se asocia a la lógica." [1] (Lorenzo, 2002, pg 13).

Es en este punto donde definitivamente la matemática se da el lujo a sí misma de escaparse por completo de los límites de la observación. Mientras que la escuela conservadora trataba de seguir manteniendo a la matemática ligada a la necesidad de argumentarse en base a la realidad y en consonancia con el resto de las ciencias, la potencia tanto lógica como intelectual (e incluso filosófica) de los nuevos conceptos planteados por Cantor, Hilbert o Gauss dieron carta blanca para "jugar" a salirse completamente de la realidad observable, con el inconveniente de que a partir de este momento era necesario ser completamente rigurosos y objetivos a la hora de definir estos conceptos, pues la realidad visible ya no nos servía como argumento.

Esto implica que los principios básicos sobre los que se sustenta cualquier argumentación, y es el punto al que queríamos llegar, tienen que definirse como una serie de supuestos escritos en algún lenguaje, los cuales no pueden tener argumentación, pues entraríamos en una recursión infinita, y es lo que se conoce como axiomas, los cuales son, literalmente, las bases de las matemáticas.

Hay un apunte histórico que es conveniente resaltar. Los axiomas no nacen como concepto a partir de estas discusiones. El primer sistema axiomático que se conoce son *Los Elementos* de Euclides, obra que tiene ya unos 2300 años de antigüedad. Pero es en este momento donde definitivamente se asientan como base formal y reconocida hegemónicamente de cualquier trabajo considerado de la rama de las matemáticas.

De hecho ya previamente a Euclides, unos 50 años antes, Aristóteles jugó con estos conceptos. Pero como señala Roberto Torretti, estos no se formalizaron y asentaron hasta bien entrado el siglo XIX.

"La primera vez que nos encontramos con este concepto es ya en la antigua Grecia, de la mano de Aristóteles.

La idea de una teoría axiomática procede de Aristóteles, para quien todo conocimiento científico propiamente tal ($\epsilon\pi i\sigma\tau\eta\mu\eta$) se establece por inferencia deductiva a partir de principios ($\alpha\rho\chi\alpha\iota$) de dos clases, a saber, conceptos que no se definen y aseveraciones que no se demuestran. En la literatura filosófica posterior se los llama, respectivamente, 'primitivos' y 'axiomas'. Los primitivos no tienen que definirse porque cualquiera los entiende. No es posible, pero tampoco es preciso, demostrar los axiomas, porque son de suyo evidentes[2]. Tradicionalmente se ha visto en los Elementos de Euclides (publicados alrededor de un cuarto de siglo después de muerto Aristóteles) una realización ejemplar de esta idea de ciencia. No comparto esta opinión.

A mi modo de ver, la concepción aristotélica de una ciencia edificada por deducción rigurosa sobre principios de suyo inteligibles o evidentes no vino a realizarse hasta 1882, en las Lecciones sobre geometría moderna de Moritz Pasch." [2] (Torretti, 1998, pg 71)

1.2. Los axiomas. En algún punto hay que empezar

En cualquier argumentación debemos sostener nuestra afirmación en otras. Sin querer parecer repetitivos, cualquier argumentación basada en un por qué, tiene que tener un por qué, luego si entramos en esta recursividad en algún momento tenemos que parar si no se quiere caer en una cadena infinita sin sentido o un argumento circular. Esta discusión es, por ejemplo, un clásico de la filosofía donde autores como Tomás de Aquino lo utilizaron para argumentar la existencia de Dios como "causa eficiente"(la primera causa de la que sale cualquier consecuencia, el inicio del por qué). Como hemos visto, en la física es la observación, ¿y en las matemáticas?

Es aquí donde nace uno de los conceptos más importantes de la escuela matemática, el cual es además fundamental para nuestra tesis. El axioma.

Definimos un axioma como una tesis que no necesita demostración, se da por supuesta para poder empezar a trabajar. Normalmente, por lo menos en las ramas más importantes de las matemáticas, los axiomas son sentencias absurdamente obvias, las cuales se asume que cualquier lector, por el hecho de ser un ser humano y pertenecer a la misma realidad que nosotros, no va a tener la osadía de cuestionar.

En mi caso en particular, el primer axioma que dimos en la carrera, en la asignatura de Cálculo I fue la propiedad conmutativa de la suma.

En realidad, en su afán de presentarse como algo externo a la realidad visible, en ningún momento de la carrera se asocia la suma con la acción de sumar, dado que simplemente necesita adecuarse a las propias normas que previamente ha definido (esta es la forma de operar de las matemáticas) pero en lo que se avanza un poco resulta obvio que la función de dos variables en una, junto con el resto de propiedades como la asociativa que le dan

[2]Aristóteles explica su idea de una ciencia deductiva en los Segundos Analíticos. Scholz (1930) ofrece una interpretación de esa obra a la luz de la axiomática moderna (en el estilo de Hilbert)

la categoría de grupo conmutativo, y denotada por el símbolo $+$, a lo que quiere hacer referencia es a la acción de sumar que todos conocemos, y aquí resulta difícil de creer que alguien vaya a cuestionar que si reorganizamos un saco de manzanas vamos a tener un número diferente de las mismas.

De hecho si se piensa un poco, la propiedad conmutativa del producto por ejemplo no es tan obvia, hay que pararse en cada grupo de elementos a separar cada uno, numerarlos y reagruparlos para visualizarla, pero al final se acaba argumentando con un simple juego de bolas de colores, y la tomamos como axioma para construir los números reales, por ejemplo, donde el producto (y su propiedad conmutativa) ya sí que escapa bastante de la intuición humana primaria.

Si se vuelve un par de párrafos más arriba, es importante resaltar que, precisamente porque solo nos sirven como suelo para nuestro modelo, los axiomas no tienen por qué ser ciertos, simplemente deben cumplir tres cualidades que permitan al castillo que queramos construir tener algo de sentido.

- Independencia
- Consistencia
- Completitud

La cualidad de *independencia* significa que ninguno de los axiomas es deducible de los demás. Si lo pensamos un poco incumplirla no es especialmente grave, simplemente significa que estamos metiendo más axiomas de los necesarios para construir lo mismo. Dado que, mientras el número sea finito, no nos importa el número de pasos que tengamos que dar para llegar a una tesis a partir de las hipótesis, y que la implicación lógica cumple la propiedad de transitividad, si podemos llegar a B a partir de A, A es un axioma, y A puede ser deducido de C y D, entonces B es "alcanzable"desde C y D y no necesitamos a A para nada, además no tenemos que pedir al lector que se crea A porque es deducible de C y D.

Por hacer una analogía con el Álgebra lineal, podríamos decir que incluyendo A tendríamos un Sistema de Generadores, cuando lo que queremos es una Base.

Visto de otro modo, como un grafo en el que las afirmaciones son nodos, si unimos cada afirmación con las afirmaciones previas necesarias para probarla por aristas orientadas, la independencia sería no tener ciclos cerrados. Nuestro castillo debe ser un árbol, algo unidireccional. De esta cuestión viene el término *argumento circular*.

La *consistencia* significa que los axiomas deben ser en origen coherentes entre sí. Es decir, no tiene sentido que A sea un axioma y no A sea otro. Además para cualquier sentencia P deberíamos ser capaces de asegurar que sólo P o no P son demostrables a partir de los axiomas. Como veremos más adelante, esto tiene que ver con la tercera cualidad.

La *completitud*, por relacionarlo con la consistencia, significa que dado que ya sabemos que ambos no pueden ser demostrables (P y no P) al menos alguno de los dos sí debería serlo, teniendo en cuenta obviamente que P hable únicamente sobre conceptos relacionados con lo que dice nuestro sistema axiomático. En esto también se profundizará más adelante, pero el lector ya puede intuir que esto no es para nada obvio ni de conseguir, ni de demostrar que se ha conseguido, ya que versa sobre cualquier afirmación que podamos construir entorno a nuestros conceptos primarios.

Llegados a este punto podemos afirmar que la construcción de un sistema axiomático no tiene nada que ver con que éste hable de la realidad que nos rodea. No tiene demasiado sentido pedirle a este que sea verdadero en tanto que real, sino simplemente que no caiga en absurdos producidos por su propia construcción. Por decirlo en una frase, y esta es además la clave del desarrollo histórico que haremos en el siguiente punto, no tiene que ser verdadero, basta con que sea coherente consigo mismo.

1.3. Poincaré vs Hilbert. Lo verdadero frente a lo coherente

A partir de este punto se expone una de las grandes discusiones de la historia de las matemáticas.

Por un lado tenemos tenemos a Poincaré, Kronecker. Dos de las grandes mentes del siglo XIX. En lo que se podría llamar la vanguardia formalista, que se acabaría imponiendo, podemos destacar a Cantor, Gauss, Russell y, sobretodo, Hilbert.

El siguiente fragmento ilustra muy bien la posición del francés entorno a dónde colocaba el suelo epistemológico que debía sostener a la escuela matemática.

"A partir de las paradojas conjuntistas y los intentos de Frege, Russell, Couturat... de reducir la matemática a la lógica formal, como si ya estuviera constituida de modo definitivo y sólo hubiera que ir descubriendo lo contenido en esa lógica formal, Poincaré insistirá en que la matemática no tiene como misión "mirarse el ombligo", sino que es un hacer de la razón humana siempre abierto al conocimiento de la naturaleza, de la *physis*, conocimiento clave para la misma y donde las teorías pueden ir transformándose, aunque siempre quedará algo de ellas: al menos, han posibilitado ser superadas o trascendidas. Desde esta posición, para Poincaré no hay una "matemática pura"dada de una vez para siempre y encerrada en una torre de marfil, porque el hacer matemático es, en el fondo, uno de los elementos clave construidos por la razón humana para captar y transformar la naturaleza y es, por ello, un saber en permanente creación y transformación, siempre abierto, cuyo único fundamento es la razón humana.

"Posición opuesta, ciertamente, a la mantenida por los matemáticos alemanes como Frege o los del círculo de Göttingen, con Hilbert a la cabeza, y por filósofos como Russell, que se centraban de modo exclusivo en la matemática *pura* o en la lógica formal. Lógica formal que estimaban del pensamiento puro al que cabía reducir toda la matemática. (...). Posición de logicistas y formalistas opuesta a la de un matemático creador que, como Poincaré, cometía errores en las demostraciones mientras que en su trabajo matemático no iba guiado ciertamente por regla o principio lógico-formal alguno, sino por *ideas felices*, por captaciones fulgurantes de analogías insospechadas entre campos dispares.

Poincaré (...) aunque reconoce que es por lógica como se demuestra, insistirá en que es por intuición por lo que se inventa."(Lorenzo, 2002, pg. 18)

Cabe destacar que Poincaré nunca rechazó la lógica formal como método para llegar de unas afirmaciones a otras y construir más conocimiento, simplemente negaba que esta fuera la única manera de hacer en matemáticas, lo cual es la tesis fundamental tanto de los trabajos de Hilbert como el propio Teorema de Gödel.

Podemos mencionar además que esta tampoco es herramienta exclusiva de las matemáticas. Actualmente a la física se la considera una ciencia *hipotético-deductiva* donde la lógica formal es fundamental en su hacer, sobretodo en la rama de la física teórica. Lo que la diferencia de las matemáticas es que mientras que la física sostiene sus afirmaciones sobre leyes dadas por válidas a partir de la observación de las mismas, de forma empírica, en matemáticas partimos de los axiomas.

1.3.1. El método formalista hasta sus últimas consecuencias

Una de las grandes cualidades que demostró tener la matemática formal es la de sacar conclusiones o información de cosas que en realidad no conoce su forma, muchas veces ni siquiera su existencia, y aquí se abre una de las grandes discusiones de la matemática la cual se encargó de pelear Hilbert al comienzo de su carrera, y es la de si la matemática está "legitimada"para utilizar sus reglas formales entorno a elementos que no llega del todo a comprender. Esto que suena a filosofía vacía a primera vista se resume perfectamente en la siguiente pregunta, cuestión verdaderamente central del debate que se plantea en este punto.

¿Debe ser una demostración de existencia necesariamente por construcción?

En 2022 puede parecer una cuestión trivial, ya que desde primero de carrera tenemos ejemplos negativos de esto, pero lo cierto es que esto fue prácticamente un dogma (o axioma) en toda la academia científica (no porque a la ciencia le guste tener dogmas, huye siempre de ellos, más bien porque simplemente nadie había salido aún de ese marco mental) hasta la llegada de Hilbert, que decidió tomarlo como una lucha casi política, lo cual es perfectamente entendible ya que la reacción de sus compañeros más conservadores fue furibunda.

Saltando de nuevo al plano más general de la cuestión, efectivamente lo que esconde esta pregunta es si tiene algún sentido afirmar que hemos demostrado (recordemos que demostrar es poco más que convencer) la existencia de algo (un espacio, una base, un problema, un número) si somos absolutamente incapaces de decir casi nada sobre él, ni su forma, ni siquiera una notación formal desde la que definir de forma medianamente objetiva estos conceptos; pero por otro lado ya a día de hoy tenemos decenas de ejemplos (dejamos al final del párrafo algunos) donde si revisamos las demostraciones, llegamos a callejones sin salida y a absurdos bastante grandes sólo si tomamos como hipótesis la no-existencia de estos conceptos, lo cual es ya una forma completamente aceptada de trabajar en matemáticas.

- Demostracion de la existencia de Base en cualquier espacio de Banach (Banach).

- Demostracion de que la inmensa mayoría (desde un punto de vista topológico) de funciones continuas no tienen ningún punto derivable en su dominio. Formalmente, se enuncia como que las funciones derivables en algún punto forman un conjunto escaso (también llamado no magro) en las funciones continuas. Curiosamente, tras esta demostración vendría la construcción de algunas de estas funciones de la mano de Weierstrass.

No se pretende ni mucho menos dejar a Poincaré o Kronecker bajo una imagen de reaccionarios, ambos fueron matemáticos brillantes que contribuyeron enormemente a nuestro desarrollo pero lo cierto es que el ser humano, sobretodo a cierta edad, sólo sabe trabajar con las herramientas que le son conocidas. Basta leer mínimamente a Poincaré para notar que su visión de las matemáticas está demasiado atada a ese mantra de "el lenguaje de la naturaleza" y por tanto debe limitarse a estudiar estos procesos reales, empíricos, que se dan en nuestra realidad, mientras que Hilbert y Gauss defendían una matemática que estuviera al servicio de cualquier realidad imaginable, siempre y cuando esta no se saliera de sus propias reglas predefinidas.

Este tipo de discusiones históricas en nuestra materia, aunque a día de hoy se encuentren bastante cerradas, son una muestra de hasta qué punto la búsqueda de objetivación obsesiva de la comunidad matemática es casi un sin sentido, y cómo mas tarde o más temprano surgirán cuestiones más filosófico/políticas que puramente técnico/formales, probablemente porque se ponen en cuestión precisamente cuáles son o deberían ser esos cimientos formales, y esto pasa en todas las ramas del saber.

Problemas del ámbito, por ejemplo, de la matemática aplicada o del álgebra de todos los días, se resuelven perfectamente dentro del marco matemático en el que vivan en cada época histórica porque están pensados para sujetarse en estos principios. Precisamente el elegir entre resolver un problema desde el álgebra o el análisis consiste en decidir quién me da mejores herramientas, qué campo de juego es ya, siendo ya lo que es y sin tocarlo, más favorable o fácil para mi problema. Pero cuando nuestro problema es una pregunta a esas bases, es bastante fácil argumentar por qué no nos podemos apoyar en las mismas para resolverlos, sería un argumento circular. Tenemos que sacarlo de ahí, y escribirlo de una forma que nos permita usar unas herramientas ya existentes y cerradas (conocidas ya a día de hoy como metamatemática) para resolverlo, por ejemplo una de las reconocidas genialidades de Godel fue la de "aritmetizar un problema metamatemático", es decir, moverse muy bien en el campo de la representación.

1.3.2. La importancia de la representación

Antes de pasar al siguiente capítulo, y aunque aún queda bastante para llegar a Turing y Gödel como tal, es importante para entender el siguiente apartado qué es esto de la representación.

La representación, por lo menos dentro del campo de las matemáticas, se define como la capacidad de presentar un problema bajo un lenguaje o marco conceptual diferente del mismo en el que fue planteado inicialmente con el objetivo de facilitar su resolución. Las herramientas matemáticas, en tanto que no están obligadas como hemos visto a adecuarse a ninguna realidad, permiten mucha flexibilidad en esta cuestión, y es un trabajo intelectual para cualquier matemático no solo la capacidad de resolver un problema dado, sino la de "mover"su enunciado a algún terreno menos árido, incluso inventando un terreno nuevo.

Por ejemplo, uno de las victorias del trabajo de Turing es la de poder codificar algunos problemas planteables por las matemáticas como problemas resolubles dentro de otro marco, pero que éste nuevo sea aritmetizable de alguna forma, por lo que desde los teoremas o desde las concepciones de Turíng podemos tratar de resolver la decibilidad de los propios problemas que nos estamos planteando. Como optativa en el Grado de Ingeniería Informática una asignatura entera llamada Modelos Avanzados de Computación en la cual la mayoría de los enunciados versan sobre calcular la dificultad de problemas en sí, no el resolverlos propiamente, y esto es en parte gracias al esfuerzo de Turing por construir un lenguaje, *representar* estos problemas como datos de un enunciado y no enunciados en sí.

En el momento en que estos conceptos empezaron a aflorar en matemáticas y en donde la representación de problemas clásicos como entradas de un lenguaje computable (incluso por no-humanos) se volvió una realidad, es donde nace la pregunta que a todos les generaba más curiosidad. Si dentro de esta caja de símbolos podíamos meter toda la matemática.

Capítulo 2

El problema II de Hilbert

Vayámonos ahora a los primeros comienzos del siglo XX. En 1897 se había celebrado en Zurich el I Congreso Internacional de Matemáticos. En él, una de las voces más potentes había sido la de Poincaré, donde marcó su programa para lo que el francés creía que debía ser el posterior desarrollo de las matemáticas.

Poincaré se esforzó en mostrar la relación entre la ciencia pura y sus aplicaciones, entre el análisis y la física.

Una muy buena forma de comprobar cuál fue la opinión de la nueva escuela formalista frente al programa del francés es leer la carta que, a petición de Hilbert, Minkowski le escribió comentando su visión.

"He releído la conferencia de Poincaré y encuentro que todas sus afirmaciones están expresadas de un modo tan vago que no se pueden contradecir (...). Más atractivo sería que intentes mirar hacia el futuro, enumerando los problemas a los cuales deberían dedicarse los matemáticos en adelante. Así podrías crear las circunstancias para que se siga hablando de tu charla en las décadas venideras. Eso sí, debes tener en cuenta que la profecía tiene sus dificultades" [3].(Minkowski, 1897, pg 50).

Y este fue exactamente el reto en el que se centró el alemán, con todas sus dificultades.

Tomando los consejos de su amigo Minkowski, Hilbert se propuso generar su propio programa, defender sin complejos cuál cree que debería ser el rumbo que tomaran las matemáticas, y mas concretamente, las bases de las matemáticas, por lo menos durante el siglo que iba a comenzar. Su trabajo tomó tal magnitud que a día de hoy la trascendencia de este primer congreso matemático es una migaja en comparación con la dimensión que tomó el II Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en la Sorbona, París. Y más concretamente, la ponencia de Hilbert durante el mismo.

"Con esta nueva fundamentación de las matemáticas persigo un fin importante: Al hacer de cada enunciado matemático una fórmula que pueda exhibirse en concreto y derivarse con rigor y al darle así a las conceptualizaciones e inferencias matemáticas una forma tal que resulten irrefutables y a la vez proporcionen una representación de la ciencia [matemática] entera, yo quisiera eliminar definitivamente del mundo la cuestión de los fundamentos de las matemáticas.” [2] (Hilbert, 1931, pg 121)

2.1. La conferencia de Hilbert

Muy recordadas fueron las palabras con las que comenzó esta ponencia, precisamente porque muestra cuál es la intención de la misma. Para nada es sentar cátedra, sino plantear preguntas.

”¿Cuáles serán los objetivos concretos por los que se esforzarán las mejores mentes matemáticas de las próximas generaciones? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depararán las centurias por venir en el amplio y rico campo del pensamiento matemático?”

Hilbert tenía delante una oportunidad única de revalorizar la lógica en el mundo matemático. Estaba en medio de una guerra en la cual chocaban las visiones conservadoras de la matemática naturalista con la visión más formalista de la misma. Como en otras muchas cuestiones, esta discusión trascendió incluso fronteras. Se hablaba (y se habla) de la escuela francesa encabezada por Poincaré frente a un nuevo resurgir de la matemática alemana encarnada en el mismo Hilbert o Gauss, otro gran defensor de esta visión.

Podríamos hablar en términos gramscianos de periodo de crisis (el político y escritor italiano Antonio Gramsci definía los periodos de crisis precisamente como esos momentos donde lo antiguo no ha acabado de irse, y lo nuevo no ha terminado de llegar).

Siguiendo este camino, el de preguntar más que responder, Hilbert planteó los que hoy se conocen como los Problemas de Hilbert o Problemas del Siglo. 23 problemas en cuya resolución el alemán creía que se concentraba (o debía concentrarse) el esfuerzo de la comunidad matemática en el siglo que comenzaba. Todos ellos, en mayor o menor medida, tienen relación con lo que aquí se comenta, pero hay uno que resume tanto la discusión previa con los que fueron sus mentores como el abanico lógico-formal que se abrió tras su resolución: el problema Número 2.

Este problema se puede resumir en dos puntos centrales

1) Construir un sistema axiomático completo para todo el conocimiento matemático existente y demostrar su completitud. Digamos axiomatizar toda la matemática, o por lo menos, demostrar la completitud de alguno de los sistemas previos (*Principia Mathematica*, *Peano*, *Geometria Euclidiana...*)

2) Demostrar desde dentro de un sistema su propia consistencia, para asegurar que un sistema axiomático podía ser autosuficiente.

Problemas y soluciones que rondaban alrededor de esta cuestión se daban casi cada año en estos momentos de fervor episteológico en las matemáticas, que como hemos visto en el anterior capítulo generó discusiones históricas.

El mismo Hilbert por ejemplo se encargó de axiomatizar de manera mucho más formal la geometría euclidiana en 1899. Además, estos años fueron claves para corroborar que las leyes lógicas y el hacer matemático servían para resolver estos problemas. Por ejemplo se dieron muchas demostraciones más relativas que absolutas en este sentido. Dejamos dos ejemplos.

1) Lobachevsky demostró que las fórmulas trigonométricas bajo su sistema de geometría no-euclidiana eran inconsistentes si y solo si la trigonometría euclidiana esférica lo era.

2) El propio Hilbert, también en 1899, demostró que su axiomatización de la geometría euclidiana era consistente si su construcción de los números reales también lo era.

Con esto vemos que la tarea simplemente tenía que subir un escalón de nivel, pero que se podían establecer relaciones y jerarquías lógicas entre los distintos sistemas axiomáticos.

Aun así, seguía siendo fundamental ser capaces de construir estos castillos argumentativos desde cero y, sobretodo, desde fuera de los propios sistemas.

Pero para tratar de cerrar de una vez la cuestión de las bases de las matemáticas era necesario terminar de argumentar la validez de los conceptos y argumentaciones que comenzaban a tomar peso en el mundo matemático, ya que la importancia de estos residía no solo en los conceptos en sí, sino en la forma de trabajar que de ellos se derivaba. Y esta, aún naciente, presentó numerosas paradojas y discusiones filosóficas que no acabaron de cerrar la cuestión. Conceptos como conjunto, cardinal, axioma o demostración estaban aún lejos de asentarse bajo una definición hegemónica dentro de la comunidad matemática. Algunos de estos problemas se presentan a continuación.

2.2. Cuestiones previas sobre la formalización

Otra de las cuestiones clave para entender este trabajo reside en la definición de muchos de los conceptos que marcaron la matemática del Siglo XX; en este caso, no por la potencia o utilidad de los conceptos en sí, sino por las discusiones epistemológicas que generaron.

Para ilustrar esto se presenta a continuación una de las grandes "paradojas"que siguen aún vigentes en la literatura matemática, formulada por primera vez por el matemático Bertrand Russell.

A partir de este momento, como se ha mencionado en el capítulo anterior, ya se ha abierto la puerta a definir conceptos matemáticos no solo de manera constructiva, sino utilizando las definiciones de los mismos más las reglas lógicas que se derivan de su naturaleza. De ahí que coja aún mas fuerza la noción de conjunto.

La noción matemática de conjunto se asemeja mucho a la noción de la palabra conjunto dentro del imaginario social general. Un conjunto es un "saco"que nos sirve para enunciar una serie de objetos con una naturaleza similar con el fin de poder trabajar con todos a la vez.

Los primeros que saltan a la vista al iniciarse en la comunidad matemática son los conjuntos de números. De sobra son conocidos ejemplos como $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}$.

Pero además de esto es sabido que en matemáticas se usan conjuntos de funciones como $C([0,1])$ en el que se encuentran todas las funciones continuas cuyo dominio es el intervalo [0, 1] y su co-dominio es un escalar $\mathbb{K}$ que suele ser $\mathbb{R}$. También se usan por ejemplo, y es lo que interesa en este caso, conjuntos de conjuntos.

Una vez definidos conjuntos de números o funciones, podemos pensar por ejemplo en el conjunto de todos los conjuntos que contiene únicamente elementos de $\mathbb{N}$, que se nota como $P(\mathbb{N})$.

Es además importante a la hora de definir la noción de conjunto, que dado que estos se utilizan para denotar a elementos de la misma naturaleza (aunque si utilizamos la operación unión se podría definir perfectamente $\mathbb{N} \bigcup P(\mathbb{N})$) se consideraba que un conjunto no puede contenerse a sí mismo, dado que entonces la naturaleza de este objeto y esta recursión infinita haría del mismo algo sin sentido para la utilidad que tienen.

Es en este punto donde Russell se preguntó qué forma tendría el conjunto de todos los conjuntos.

Una vez definida la noción de conjunto, y dado que el mismo sirve precisamente para agrupar categorías de la misma naturaleza, entre ellas los conjuntos, y un conjunto de ciertos conjuntos es algo que se usa en matemáticas a diario, cabe la posibilidad de preguntarse por este conjunto.

Pero dado que un conjunto no puede contenerse a sí mismo, este conjunto, llámese C, no puede pertenecer a C, luego ya existe un conjunto que no está en el conjunto de todos los conjuntos, y por tanto C ya no es el conjunto de todos los conjuntos.

Esta fue una de las cuestiones que, de nuevo Poincaré, utilizó para descalificar esta tendencia formalista hasta el extremo de las matemáticas. Además intentó llegar más lejos, argumentando que esta forma de trabajar con objetos únicamente conociendo su pertenencia o no a un determinado conjunto caía muchas veces en un argumento circular, ya que se definían los elementos como pertenecientes a un conjunto, y a ese conjunto como el "saco" de todos sus elementos, llegando así a acuñar el término de "impredicativo"para nombrar a todos los argumentos que no se basaran en la construcción.

"Más significativa que la objeción de Peano me parece la de Poincaré. En una serie de tres artículos sobre "Las matemáticas y la lógica" (1905/1906), el gran matemático y filósofo francés descargó el peso de su autoridad y el fuego de su elocuencia a la vez sobre el conjuntismo de Cantor y sobre el logicismo de Peano, Russell y Couturat. Poincaré estima que estos programas de fundamentación de las matemáticas andan completamente extraviados. De ahí las paradojas que, a su modo de ver, aquejan a ambos por igual. Según Poincaré, las paradojas nacen del empleo de términos cuya definición envuelve una forma de circularidad qué él juzga viciosa. Así, el término conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos supuestamente denota un objeto caracterizado mediante una alusión a la totalidad de los conjuntos, uno de los cuales es precisamente ese objeto. Asímismo el ordinal de todos los ordinales, nombrado en la paradoja de Burali-Forti, se define por la expresión todos los ordinales, cuya extensión lo contiene. Caracterizar el término t nombrando un determinado conjunto K tal que t $\in$ K es como repetir el definiendum en el definiens, puesto que cualquier expresión que nombre a K = $\{x : x \in K\}$ denota, entre otros, al objeto que se busca designar con t. Poincaré objetó a la primera prueba del Teorema del Buen Orden por Zermelo (1904) que la caracterización de los γ-conjuntos, que figuran decisivamente en ella, peca de este vicio. Zermelo (1908a) no sólo reconoce que ello es así, sino que para explicar a sus lectores la objeción de Poincaré, cita un ejemplo tomado de su segunda prueba, a saber, el término M que designa la intersección de todas las f-cadenas de M, la cual es ella también una de esas f-cadenas.

Debido a un desplazamiento semántico que ya se manifiesta en este texto de Zermelo, las definiciones que Poincaré juzga circulares y los términos definidos por ellas suelen distinguirse con el epíteto no predicativo o impredicativo. Zermelo observa que el uso de términos no predicativos es endémico en el análisis: ellos figuran en cada demostración "en que el máximo o el mínimo de un conjunto numérico cerrado definido previamente se utiliza para llegar a nuevas conclusiones. Así ocurre, por ejemplo, en la conocida prueba del Teorema Fundamental del Álgebra por Cauchy, sin que hasta ahora se le haya ocurrido a nadie hallar en ella algo ilógico" (Zermelo 1908) Y la verdad es que nadie reconocería un procedimiento falaz en la descripción de diciembre como "el último mes del año" o del perihelio de Mercurio como "el punto de la órbita de Mercurio que está más cerca del sol". En un diccionario filosófico reciente, Christian Thiel, que milita entre los enemigos de la impredicatividad, amaña su definición para evitar los contraejemplos de este género. Impredicativo, según Thiel, es "un procedimiento para delimitar o caracterizar un objeto, que en la descripción del mismo hace referencia a una totalidad de objetos que. . . comprendería al propio objeto en cuestión, y cuyos elementos no pueden todos generarse constructivamente" (cursiva mía). Conforme a esta nueva definición, claro está, el vicio de impredicatividad no consiste en que se aduzca "circularmente", para fijar la referencia a cierto objeto, una totalidad que lo presupone, sino más bien en que la totalidad en cuestión no satisface un requisito de construibilidad que habría que especificar y justificar. Como la matemática conjuntista no se deja imponer tales requisitos, el desacuerdo entre Poincaré y Zermelo nos sitúa, de hecho, en la línea divisoria entre dos grandes vertientes del pensamiento matemático del siglo XX." [2](Torretti, 1998, pg 71)

2.3. Intentos de axiomatización completa

Comencemos planteándonos este problema desde cero.

Nuestro objetivo es construir una serie de sentencias finitas desde las que, usando únicamente las reglas lógicas de la implicación, podamos llegar a una demostración formal de cualquier sentencia matemática verdadera, además de la demostración de la negación de cualquier sentencia matemática falsa.

Partiendo de que esta debe cumplir con las 3 cualidades ya recopiladas en el capítulo I sobre qué debe cumplir un sistema axiomático, ya entonces mencionábamos que la más difícil de conseguir, o siendo más precisos, la más difícil de probar que se ha conseguido, es la tercera, la cual era la que obsesionaba a Hilbert al plantear este problema.

Para ello podríamos decir que nuestras sentencias deben cumplir una cualidad que podríamos llamar potencialidad. Los axiomas deben ser potentes en tanto que se presupone que son sentencias simples, con una longitud razonable, y el número de todas ellas debería ser cuanto más pequeño mejor, un número razonable para ser por ejemplo aprendido de memoria por cualquier ser humano y quedar como un clásico del conocimiento de la sociedad. Actualmente, por ejemplo, el sistema axiomático para la construcción de los números reales consta de 12 axiomas, algo aceptable. Pero siendo así de simples y breves, deberían contener toda la información imaginable que verse sobre matemáticas, para poder inferir cualquier sentencia de los mismos. No parece una tarea fácil.

Además, recordemos que si queremos demostrar que nuestro sistema "alberga" toda la matemática, esta no puede usar las reglas matemáticas pues si estas son consecuencia de nuestro axioma estaríamos demostrando la potencia de nuestro sistema con nuestro sistema mismo, un argumento circular, luego resulta clave de nuevo recurrir al concepto de representación para "sacar" nuestro problema del marco conceptual matemático habitual.

"Hay aquí dos aspectos. Por un lado, el terreno del matemático que, marginado a las posibles "crisis" de fundamentos, trabaja en el interior del *hacer matemático*: por otro, cuando ese mismo matemático vuelve su mirada a los fundamentos de su hacer y los analiza como matemático y no ya como filósofo". (Lorenzo, 1998, pg 14)

Este "mirar el hacer matemático desde fuera" que comenta Javier de Lorenzo es exactamente a lo que habíamos llegado, lo que actualmente conocemos como metamatemática.

Se trata de aritmetizar de alguna forma las mismas reglas de las matemáticas para poder trabajar con ellas. Para hacer entender la magnitud de la dificultad de esta cuestión, vamos a presentar algunos intentos previos de personajes matemáticos importantes como Richard que finalmente fueron rechazados, pero abrieron el camino a la forma de plantear este problema.

2.3.1. La paradoja Richardiana

Para presentar este problema primero tenemos que presentar una función que será clave de aquí al resto de nuestra tesis, la cual se encarga de relacionar las sentencias planteables dentro de un lenguaje con números con los que poder trabajar, y resulta clave en este proceso al que tratamos de llegar de "aritmetizar la metamatemática".

La función es muy simple, de hecho tiene más sentido describirla de palabra, para resumir su potencialidad y utilidad, que formalizarla simbólicamente.

Si lo pensamos un poco, desde que nos enseñaron a contar, sumar o sumar con llevada en el colegio, estos procesos automáticos están más centrados en la representación alfa-numérica de los números (bajo base 10 siempre) que en la acción de sumar en sí. Pongo este simbolo aquí, este lo muevo encima de este, y al final abajo tengo la representación del número solución. Y esto es porque para comunicarnos necesitamos un lenguaje, en este caso formado por 10 símbolos: $\{0, 1, ..., 9\}$

Ahora pensemos en escribir los números, pero en este caso en base 27. Y cada símbolo será, sorpresa, cada una de las letras del abecedario castellano.

En este caso, si nuestra función la llamamos f, la cual es sólo una biyección entre escribir un número en base 27 a pasarlo a base 10, $f(a) = 0, f(b) = 1, f(ab) = 28$...etc.

Si en vez de 27 símbolos escribimos por ejemplo cada uno de los símbolos pertenecientes a la variante utf-8 (la del teclado castellano) de la tabla ASCII, tenemos asignado un único número a cada una de las cadenas de símbolos dentro de las cuales está cada una de las sentencias con un sentido semántico, sintáctico y morfológico que se pueden escribir en castellano. Entre ellas, por ejemplo, el Quijote, el cual evidentemente sería un número gigantesco, pero un número natural.

Esto es un esbozo de la prueba, por ejemplo, de que el número de programas informáticos escritos en un lenguaje dado, ya sea Python, Bash o una máquina de Turing en general es numerable. Que sea fácil no quita que sea tremendamente útil, porque si se pueden numerar se pueden ordenar para decirle a un ordenador que vaya probando, lo cual es clave para muchas demostraciones de semidecidibilidad de problemas que el propio Alan Turing desarrolló, pero esto ya nos ocupará más adelante.

Como vemos, si el número de cadenas de símbolos es numerable, el número de sentencias con un sentido semántico y sintáctico que versan sobre, por ejemplo, las propiedades de los números, también lo es, y esto es lo que usó Richard.

Pensemos en la sentencia "ser primo". Es una sentencia que versa sobre la propiedad de un número en concreto la cual además es binaria. Todo número natural o es primo o no lo es, sin medias tintas. Se puede construir una función booleana entorno a cumplir esta propiedad con sólo dos valores en el co-dominio. 1 y 0. Y además, y esto es lo interesante, como hemos visto esa cadena de números tiene un número asignado, luego podemos preguntarnos por si el número asociado por nuestra funcion f a ser primo cumple la propiedad asociada a su anti-imagen.

Podríamos formalizarlo con una función llamada R de dos variables, una sentencia y un número, la cual devuelve 1 si la sentencia lo cumple y 0 si no es así, luego nuestra pregunta es algo del estilo.

P = "ser primo". Cuánto vale $R(P, f(P))$. 0 ó 1.

O dicho de otra forma, si f(P) = m. Cuánto vale $R(f^{-1}(m), m)$.

Llegados a este punto el siguiente paso es, precisamente, tomar esta propiedad como una más de los números. Es preguntarse ¿Cumple un número con la propiedad asignada a ese mismo número?.

Esta propiedad en su versión negativa es lo que se conoce como ser Richardiano. Un número es Richardiano cuando **no** cumple con la propiedad asignada a ese número.

Luego aquí es donde llega la paradoja. Si esta propiedad es una propiedad más de los números, llamémosla Rich, podemos pensar en $f(Rich) = N$ y preguntarnos, es ¿N richardiano?.

Escrito de manera algo más formal.

N es Richardiano $\Rightarrow R(f^{-1}(N), N) = 0 \Rightarrow$ N no cumple $f^{-1}(N) =$ "Ser Richardiano"$\Rightarrow$ N no es Richardiano.

Por otro lado:

N no es Richardiano $\Rightarrow R(f^{-1}(N), N) = 1 \Rightarrow$ N cumple $f^{-1}(N) =$ "Ser Richardiano"$\Rightarrow$ N es Richardiano.

Luego N es Richardiano si y solo si no es Richardiano, y aquí estaría la contradicción.

Este argumento se usó para argumentar que esto de asignar propiedades a los números y números a las propiedades no podía hacerse tan a la ligera, y que en esta función f que hacemos entre números y propiedades sólo se puede hacer con sentido si las propiedades que consideramos versan exclusivamente sobre cuestiones aritméticas de los números, y no sobre propiedades relacionadas con esta función f.

La clave está en que la propiedad de ser Richardiano está incluida como variable en la función que comprueba si un número es Richardiano, luego es un argumento circular que al expresarse en negativo entra en contradicción consigo mismo. De nuevo, en términos poincarianos, podríamos decir que ser Richardiano es una propiedad impredicativa, ya que se define a partir de la misma función que comprueba si un número lo es o no lo es.

Luego tenemos dos salidas, si queremos hablar de propiedades de los números, estas deben versar sobre propiedades exclusivamente aritméticas, que relacionen los números consigo mismos y no con estas mismas propiedades. O dos, si queremos asignar números a las propiedades, estos números no pueden ser los mismos que los números de los que hablan las propiedades. Esta segunda, mucho más complicada, es la que se encargó de llevar a cabo Gödel.

(Newman, pp 31-34) [4]

Es fundamental para entender el trabajo de Gödel y sus contemporáneos, y es algo que habrá apreciado el lector como los errores fundamentales de los intentos previos, separar de manera tremendamente rigurosa las reglas que rigen (ya predefinidas) las estructuras matemáticas que nos sirven para demostrar cosas dentro de las matemáticas, que las reglas que rigen el hacer matemático en sí, que como en cualquier concepto, deben ser analizadas, reflexionadas, discutidas y demostradas desde fuera del mismo, pues si las damos por supuestas para tratar de defenderlas caemos en un argumento circular. De hecho la paradoja Richardiana entre otras cosas, abrió la puerta a la posibilidad, si se conseguía "cuadrar" correctamente, a aritmetizar no sólo los objetos sino las relaciones entre sí, de nuevo haciendo uso de la representación.

"La característica fundamental de la representación es que puede demostrarse que una estructura abstracta de relaciones existente en un campo de «objetos» existe también entre «objetos» (generalmente de un tipo distinto que los del primer grupo) pertenecientes a otro campo diferente. Esta característica es lo que impulsó a Gödel a construir sus pruebas. Si, como él esperaba, unas complicadas proposiciones metamatemáticas acerca de un sistema formalizado de aritmética pudiesen ser traducidas a (o reflejadas por) proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema, se habría dado un gran paso en el camino de facilitar las demostraciones metamatemáticas" [4] (Newman, pg. 34)

Luego si Gödel, Russell o Hilbert se planteaban cuestiones relacionadas con la base misma lógica de las matemáticas, estas solo podían ser estudiadas con nuevos conceptos que no pertenecieran a la escuela lógica matemática ya conocida. Había que adentrarse en este nuevo campo de la metamatemática.

Capítulo 3

Los Teoremas de Incompletitud de Gödel

3.1. Cuestiones previas

Como habrá apreciado ya el lector, dado que nuestro objetivo es generalizar cualquier sistema axiomático posible, es importante asumir que la semántica interior a nuestro sistema axiomático de ejemplo no es relevante, luego tiene sentido tratar de simplificar el problema intentando primero jugar con sistemas simples, ya que trabajar con toda su simbología ya se complica de por sí bastante, y ver si estos razonamientos se pueden extender a cualquier sistema posible.

"El programa formalista de Hilbert requería la completa formalización de la matemática clásica. Sus conceptos habían de ser reemplazados por signos gráficos, sus ideas por hileras de signos, el razonamiento por la mera manipulación combinatoria de las hileras y la demostración por la deducción formal conforme a reglas mecánicas.

Con esto podríamos olvidarnos del contenido transfinito presuntamente problemático de la matemática clásica y limitarnos a inspeccionar desde fuera el juego con hileras de signos, restringiendo ahora nuestros razonamientos a lo más evidente y menos problemático, a lo finitario.

Mediante razonamientos externos y Unitarios acerca de las posibilidades combinatorias de las hileras finitas de signos había que probar que el juego no era peligroso, es decir, que jugando a él no podía caerse en contradicción alguna. En resumen, el programa formalista de Hilbert requería dos cosas: (1) construir sistemas formales completos para las principales teorías de la matemática clásica, y (2) probar la consistencia de dichos sistemas formales.

En un sistema formal tenemos en primer lugar un conjunto enumerable de signos primitivos, que determina el conjunto de sus hileras o secuencias finitas de signos (con posibles repeticiones). En segundo lugar tenemos ciertas reglas combinatorias, que determinan cuáles hileras son fórmulas. El conjunto de las fórmulas constituye el lenguaje formal del sistema. En tercer lugar tenemos otras reglas combinatorias, que determinan cuáles secuencias de fórmulas constituyen deducciones. Una sentencia es una fórmula sin variables libres. Una sentencia es deducible si constituye el último miembro de (una secuencia de fórmulas que es) una deducción. El conjunto de las sentencias deducibles constituye una teoría formalizada.

Un sistema formal S es *completo* si y sólo si para cada sentencia φ de su lenguaje formal ocurre que φ es deducible en S o que $\neg\varphi$ es deducible en S. Así pues, un sistema formal completo no deja pregunta (representanle en su lenguaje formal) sin respuesta. Con su ayuda pueden decidirse todas las cuestiones pertinentes. Basta con deducir y deducir... hasta llegar a φ o a no-φ. Es seguro que a una de las dos llegaremos. Todos los problemas planteados en un sistema formal completo son decidibles.

Un sistema formal S es *incompleto* si y sólo si hay alguna sentencia φ, tal que ni φ es deducible en S, ni tampoco lo es no-φ. Por tanto, hay problemas planteables en S para los que S no ofrece solución, hay problemas indecidibles en S.

Un sistema formal S es *consistente* si y sólo si hay alguna sentencia de su lenguaje formal que no es deducible en S (o, equivalentemente, si para ninguna sentencia φ ocurre que tanto φ como no-φ sean deducibles en S).

Un sistema formal S es *inconsistente* o *contradictorio* si y sólo si toda sentencia del lenguaje formal de S es deducible en S (o, equivalentemente, si hay alguna sentencia φ del lenguaje formal de S, tal que tanto φ como no-φ son deducibles en S)." [5] (Mosterín, 1981, pg 44)

Esto es, en resumen, la idea del trabajo de Gödel. Tratar de ver hasta dónde llegaba la concatenación de símbolos por sí mismos con el objetivo, suponemos en su comienzo, de probar entre otras cosas su propia consistencia, pero al encontrarse que de sí mismo se podían construir sentencias sobre su demostrabilidad, bastó construir la paradoja del mentiroso para concluir la imposibilidad de la tarea buscada.

Del fragmento anterior cabe comentar de dónde proviene que un sistema inconsistente es aquel en el que todo puede demostrarse. Esto en realidad viene de una intuición bastante humana.

Las reglas de implicación establecen claramente que ésta no es simétrica. Como enseña la lógica elemental una sentencia implicatoria sólo es falsa cuando tiene la forma $1 \Rightarrow 0$, pero una sentencia de la forma $0 \Rightarrow 1$ es cierta a todos los efectos. A partir de aquí, utilizando la operación AND, que nos dice que nuestra sentencia es verdadera si lo son las dos que lo componen, una sentencia y su negación no pueden ser ambas verdaderas, luego $Q \wedge \neg Q$ nunca puede ser cierto. Esto nos lleva, y así aparece en numerosos manuales de lógica básica, la sentencia $Q \wedge \neg Q \implies 1$. Dicho de otro modo, si la hipótesis es falsa, y algo y su negación siempre lo es, en la conclusión cabe todo. Por ejemplo "Todos los elementos del vacío tienen cuernos verdes". Luego si existe una sentencia S en nuestro sistema axiomático de forma que podemos demostrar S y $\neg S$ basta escribir $S \wedge \neg S \implies P$ para argumentar la veracidad de cualquier sentencia P.

3.2. Sobre sentencias formalmente indecidibles del *Principia Mathematica* y sistemas afines.

Este fue el título del artículo con el que en el año 1931 Gödel demostró sus dos teoremas de Incompletitud, los cuales no sólo fueron claves por cumplir con su propósito inicial, cerrar la discusión de uno de los problemas del siglo de Hilbert, sino porque constituyen el culmen del desarrollo metamatemático y sienta las bases de la epistemología matemática y lógica en nuestros días.

Godel comienza su artículo con la siguiente introducción:

"Como es sabido, el progreso de la matemática hacia una exactitud cada vez mayor ha llevado a la formalización de amplias partes de ella, de tal modo que las deducciones pueden llevarse a cabo según unas pocas reglas mecánicas. Los sistemas formales más amplios construidos hasta ahora son el sistema de Principia Mathematica (PM) y la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (desarrollada aún más por J. von Neumann). Estos dos sistemas son tan amplios que todos los métodos usados hoy día en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir todas las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas.

En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas)." [6] (Gutiérrez, pg 3)

Para empezar, se destaca que es importante tener en mente un sistema axiomático concreto para entender la demostración, entendido como la lista de axiomas que lo forman, más el enunciado de cada uno de estos axiomas como una lista ordenada de símbolos, más el lenguaje en el que este está escrito. Al igual que en Teoría de la Computación, el lenguaje será el conjunto de símbolos posibles, que tienen un significado en nuestro sistema, ya sea de manera aislada o en conjunción con otros símbolos.

Gödel en su prueba utiliza el *Principia Mathematica*, nosotros trabajaremos en un sistema que llamaremos N.

Suponemos que tenemos un sistema de axiomas que sumados a las reglas de implicación, inducción y deducción nos permiten llegar a otras afirmaciones en N.

Teorema 1 (Gödel, 1931). *Supuesto de N un sistema ω-consistente* [1],

[1] La ω-consistencia es una condición más fuerte que la consistencia, pero que Gödel necesitó para llevar a cabo su demostración. Básicamente significa que si tengo un conjunto K cualquiera, si una propiedad ϕ es demostrable $\forall x \in K$ por separado, entonces

existen sentencias dentro de N que son indecidibles. No se puede demostrar ni su veracidad ni la de su negación.

La demostración, por construcción en este caso, consiste en fabricar una oración F que depende únicamente de N, con la propiedad de que ni ella ni su negación, $\neg F$, son deducibles en N.

La demostración de esto, la construcción de dicha sentencia, la dividiremos en este caso en 9 pasos.

1. Nuestro lenguaje, como hemos adelantado, consta de un conjunto finito de símbolos. Gödel utiliza 25 en su prueba como ejemplo, pero lo importante es que sea cualquier número finito y asi generalizar a cualquier sistema axiomático posible. Podemos mencionar variables, constantes lógicas como $\neg$, $\wedge$, $\forall$. También existen paréntesis, para encapsular sentencias y encadenarlas, y constantes no lógicas, que para simplificar y no tener que poner varios números, el lector entenderá que usando 1 y + se puede llegar a cualquiera.

2. Las fórmulas, concepto clave en la demostración, son sucesiones finitas de estos símbolos. Algunas tendrán sentido como $\forall x \neg(x = 1 + 1)$ pero otras no tienen por qué como $\wedge\neg 11+$. Dado que construiremos una en concreto, esto no nos importa.

3. Utilizando el concepto de numeración de Gödel[2], parecido al usado en la paradoja Richardiana para asignar números a sentencias pero con algo más de cuidado, es posible codificar todas las fórmulas de tal forma que a cada fórmula F le corresponda un número natural diferente, el *código* de F, que denotaremos por $[F]$.

4. Las fórmulas con una variable libre (fórmulas a las que les falta una constante para ser oraciones concretas, verdaderas o falsas, y cuya constante se sustituye por una variable, como "x es un número par" en lugar de "5 es un número par") juegan un papel importante. Lo que hace Gödel es ordenarlas en una lista.

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x)...$$

la sentencia $\neg\phi\forall x \in K$ es indemostrable. Dicho más coloquial, el todo es la suma de sus partes, y la propiedad de cada elemento es coherente con la de todos tratados como infinito en acto.

[2]En su trabajo Gödel usa un método ingenioso que aprovecha ciertas propiedades de los números primos. Le asigna un número a cada uno de los signos primitivos, por ejemplo al 1 le asignamos el 1 (no confundir el primer 1, un símbolo, con el segundo, un número), al símbolo + le asignamos el 3, al símbolo = le asignamos el 5, a la variable x el 7 y así sucesivamente. A continuación le asignamos números a cada una de las fórmulas (que son sucesiones de signos), interpretando la sucesión de números (que corresponde a la fórmula) como potencias de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . Por ejemplo, a la fórmula x = 1 + 1 (la sucesión 7,5,1,3,1) le correspondería el número $2^7 3^5 5^1 7^3 11^1 = 586776960$. De esta forma cada fórmula representa un único número, y viceversa, cada número, debido a la descomposición única en los números primos, representaría una única sucesión de símbolos.

Es digno de destacar que las fórmulas en el lenguaje N con una variable libre codifican conjuntos de números. La idea es sencilla: la fórmula $F(x)$ representará al conjunto de todos los números n para los cuales $F(n)$ es deducible en N.

5. Este es el punto en el que Gödel emplea más esfuerzo en demostrar, la parte más técnica y ocupa la mayoría de las 25 páginas, ya que es clave para el razonamiento. Gödel demuestra que también los conceptos meta-matemáticos como "ser deducible en N", "fórmula" o "sustitución de variable" se pueden codificar con su propio número de Gödel, o dicho de otro modo, son alcanzables desde los símbolos de N.

Es importante, al igual que hizo el alemán, centrarnos algo más en este punto.

La numeración de Gödel no sólo permite asignar números a cadenas de caracteres, mostrando sólo su forma, sino que permite saber si esa cadena es una sentencia deducida de unos axiomas concretos. Luego a partir de un número natural concreto, podemos saber si la anti-imagen por este isomorfismo es una consecuencia, y de qué axiomas iniciales lo es, luego desde aquí fue desde donde Gödel demostró que estas sentencias eran alcanzables desde los axiomas.

"Así, a la propiedad metamatemática de ser un axioma corresponde la propiedad numérica de ser el número de Gódel de un axioma. A la relación metamatemática en que está una fórmula con otras dos cuando es inferible de ellas mediante la regla del textitmodus ponens (que permite inferir β de $\alpha \Rightarrow \beta$ y α) corresponde la relación numérica en que está un número natural n con otros dos m y p cuando n es el número de Gódel de una fórmula inferible por modus ponens de otras dos fórmulas cuyos números de Gódel son m y p." [5] (Mosterín, 1981, pg 48).

6. En particular, se demuestra que existe una fórmula, que llamaremos $Dem(x)$, que codifica en N el conjunto de todas las oraciones que son deducibles en N. $Dem(x)$ tiene la propiedad de que si F es una oración en N, entonces la oración $Dem([F])$ es deducible en N si y sólo si F es deducible en N. Llegamos a un punto importante al afirmar que Gödel ya había construido fórmulas hablando de fórmulas.

7. Definimos ahora un conjunto de números, que denotaremos por K. Este conjunto, el cual es subconjunto de los naturales, se define de la siguiente manera.

$$n \in K \Longleftrightarrow \neg Dem([F_n(n)])$$

Recordemos que el subíndice de F hace referencia a la ordenación de las fórmulas enunciadas en (4), las cuales son numerables.

Se observa además, y de ahi la importancia de definir este conjunto, que $n \in K$ si y sólo si la oración $F_n(n)$ no es deducible en N.

8. Puesto que todos los conceptos que aparecen en la definición en (7)

son tanto codificables como formalizables en N, también lo es el conjunto K. Por tanto, hay una fórmula en la lista de (4) que codifica al conjunto K. Supongamos que es la q-ésima de la misma. Tenemos entonces que $\forall n \in \mathbb{N}$. $n \in K \iff F_q(n)$ es deducible en N.

Si es verdad para todos los n, concretamente también para q, lo que nos lleva al último punto.

9. Consideramos ahora la fórmula $F_q(q)$.

Si suponemos que $F_q(q)$ es deducible en N, entonces por (7), $q \notin K$. Pero esto significa, por (8), que $F_q(q)$ no es deducible en N.

De la misma forma, si suponemos que $F_q(q)$ no es deducible en N, por (7) tenemos que $q \in K$. Pero entonces, por (8), $F_q(q)$ es dedudible en N.

Luego $F_q(q)$ deducible en N nos lleva a contradicción.

Además $\neg F_q(q)$ tampoco podría serlo, pues si lo fuera, por la consistencia supuesta de N, $F_q(q)$ sería indeducible, lo que llevaría a que $F_q(q)$ es deducible. De nuevo contradicción.

De hecho lo que demuestra Gödel, y así lo enuncia, no es tanto ”es imposible hacer un sistema completo” sino ”tu sistema puede ser completo o consistente, pero no ambas”.

Gödel en este punto añade unos comentarios interesantes a su demostración.

”La analogía de esta argumentación con la antinomia de Richard salta a la vista; también está íntimamente relacionada con la paradoja del “mentiroso”, pues la oración indecidible $F_q(q)$ dice que q pertenece a K, es decir según (7), que $F_q(q)$ no es deducible. Así pues, tenemos ante nosotros una oración que afirma su propia indeducibilidad. Evidentemente el método de prueba que acabamos de exponer es aplicable a cualquier sistema formal que, en primer lugar, interpretado naturalmente, disponga de medios de expresión suficientes para definir los conceptos que aparecen en la argumentación anterior especialmente el concepto de “fórmula deducible” y en el cual, en segundo lugar, cada fórmula deducible sea verdadera en la interpretación natural”.

Con este resultado Gödel echa por tierra el famoso “axioma de la solubilidad de todo problema matemático” que postulaba Hilbert [3] (y en su corazoncito cada matemático). Pero las sorpresas no acaban aquí. De hecho, el resultado más importante desde el punto de vista de los fundamentos de los sistemas formales es la “sorprendente consecuencia” del resultado anterior,

[3] En las palabras de su famoso discurso de 1900: “Es probablemente este importante hecho [se refiere a que importantes y viejos problemas finalmente han encontrado completa y rigurosa solución] junto a otras razones filosóficas lo que da origen la convicción —que todo matemático comparte, pero nadie hasta el momento ha apoyado con una demostración— de que todo problema matemático definido debe necesariamente ser susceptible de una exacta solución, ya sea en la forma de una respuesta concreta a la cuestión planteada, o por la demostración de la imposibilidad de su solución y por consiguiente el necesario fracaso de todos los intentos.”

que Gödel agrega inmediatamente al final de su trabajo (con el ofrecimiento nunca cumplido de demostrarlo rigurosamente más adelante) y expresada en su Teorema II, que dice esencialmente que no es posible demostrar la consistencia de un sistema formal en su propio marco.

Teorema 2 (Gödel, 1931) *Sea A un sistema consistente de axiomas que sea mínimamente expresivo* [4] *Entonces la consistencia de A no es demostrable en A.*

Este Teorema es un corolario bastante sencillo del Teorema 1, pero con grandes implicaciones. Veamos cómo probar esto para el sistema N.

Se demuestra que la oración "N es consistente" se puede codificar con una oración de N, llamémosla $Cons$. Consideremos entonces la fórmula $Cons \Rightarrow F_q(q)$, la cual versa "Si N es consistente, entonces $F_q(q)$ es deducible en N". Tenemos que escribir "deducible en N" y no simplemente "cierta" porque lo que nos interesa es su demostrabilidad dentro de N, luego la implicación se entiende como algo alcanzable únicamente dentro de N. Supongamos entonces que N pueda demostrar su propia consistencia, que $Cons$ es deducible en N. Entonces, por modus ponens, $F_q(q)$ sería deducible en N, contradiciendo en Teorema 1. Por tanto N no puede demostrar su propia consistencia.

Después de todo esto Gödel comenta:

"La prueba entera del teorema XI [nuestro Teorema 2] puede trasladarse a la teoría axiomática de conjuntos M y a la matemática clásica axiomática A, y también aquí obtenemos el mismo resultado: No hay prueba alguna de la consistencia de M (de A) que pueda ser formalizada en M (en A), suponiendo que M (A) sea consistente."

[6]. (Gutiérrez, pp 4-8)

3.3. Consecuencias de los Teoremas de Incompletitud de Godel.

"Sus resultados mostraban la imposibilidad de llevar a cabo el programa de Hilbert. En primer lugar Gödel probaba que todos los sistemas formales de la matemática clásica (incluidos el de Principia Mathematica, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos, etcétera, y, en general, cualquier sistema formal que cumpliese ciertas condiciones de aceptabilidad) son incompletos, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente

[4]De aquí surgen las condiciones mínimas que debe cumplir el sistema N para que todo el argumento funcione. Gödel usó el poderoso sistema de PM, pero de hecho ocupó esencialmente aspectos elementales de la teoría de números. Por ejemplo N puede ser la aritmética de Peano. De hecho estas condiciones se pueden debilitar un poco más aún. Por supuesto que se necesita también que la teoría N sea consistente. De hecho, en su demostración Gödel necesita algo más: ω-consistencia. Este segundo teorema, con un poco más de trabajo (Rosser en 1936 consiguió demostrarlo usando sólo consistencia), se puede demostrar sin esa hipótesis.

construirse una sentencia indecidible (tal que ni ella ni su negación es deducible). Además, esta incompletud no tiene remedio. Por muchos axiomas que añadamos, los sistemas formales siguen siendo incompletos. En segundo lugar Gödel demostraba que es imposible probar la consistencia de un sistema formal (que cumpla ciertas mínimas condiciones de aceptabilidad) de la matemática clásica, incluso utilizando todos los recursos y razonamientos incorporados en el sistema, es decir, que es imposible demostrar la consistencia de un sistema formal dentro del mismo. Naturalmente, sigue siendo posible probar su consistencia desde una teoría más potente que el propio sistema formal, pero eso sería de dudosa utilidad. Los resultados de Gódel cayeron como una bomba, a pesar de que él mismo trató de dorar la pildora, indicando posibles salidas.

Además, el carácter efectivo y constructivo de sus pruebas, admisibles para todos los lógicos y matemáticos, incluso para los intuicionistas, hizo que éstas fueran aceptadas de inmediato. Ni la lógica ni la filosofía de la matemática volverían ya nunca a ser lo que fueron. Una cierta ingenuidad y un cierto optimismo habían desaparecido para siempre. La formalización y los sistemas formales dejaban de ser una panacea filosófica y sus posibilidades y limitaciones intrínsecas pasaban a convertirse en objeto de estudio riguroso para una metamatemática que acababa de alcanzar su madurez. Gódel llevó a cabo sus pruebas planteando y resolviendo los problemas metamatemáticos dentro de la aritmética.” [5] (Mosterín, 1981, pp 45-46)

Por otro lado, uno de los caminos que alumbraba el problema 2 de Hilbert era si existía la posibilidad de que las demostraciones matemáticas pasaran a ser más terreno de las máquinas que de los seres humanos. Una de las intenciones primarias del problema, dicho a modo de enunciado, era resolver la decibilidad(y por tanto computabilidad) del problema de la consistencia para un sistema simbólico/axiomático cerrado, con el fin entre otras cosas de abrir la vía a la automatización y computación de las matemáticas. Dicho teorema tumba de un plumazo estas esperanzas.

La resolución, en su versión negativa, de dicho problema desemboca en una imposibilidad de una computación absoluta y completa de las matemáticas, lo que nos lleva a la necesidad de la mano e intuición humana en la producción de estas verdades, pero ni mucho menos desmonta los esfuerzos de las ciencias exactas por formalizar saberes comunes y producir nuevos espacios de pensamiento teórico propios. Podríamos decir que el conocimiento producido por las matemáticas bajo el sistema axiomático sigue siendo ”puro” pero siempre limitado. Existirán conceptos o preguntas que nazcan de sus propias definiciones que no se puedan alcanzar únicamente desde sus axiomas.

Volviendo de nuevo a los intuicionistas del siglo XIX, ya Henri Poincaré presintió algunos de los caminos que podían conducir el desarrollo epistemólogico de la lógica formal tras estos teoremas. Podríamos decir que tras tumbar el camino lógico puro, se volvía a la vía clásica decimonónica. Tras todas las discusiones ganadas por los formalistas, esta pelea podría volver a estar en el aire.

"Incluso la demostración requiere de la intuición porque no es lo mismo una simple verificación, proceso estrictamente sintáctico formal, maquinal, que una auténtica demostración. Pero, hasta la verificación sintáctica puede hacerse imposible cuando lo que está en juego es una infinidad de pasos. La demostración exige tanto para su construcción como para su posterior reelaboración, o para su comprensión, de la captación de la idea directora de la misma: en la demostración el matemático va guiado no por regla lógica alguna sino por aquello que se pretende demostrar. En términos actuales, la demostración posee un contenido semántico imprescindible y no puede reducirse a su aspecto estrictamente sintáctico.(...). De ahí la posibilidad e importancia de realizar varias demostraciones de un mismo teorema, porque lo esencial es que en cada demostración el matemático consigue diferentes enlaces y analogías entre nociones, entre campos aparentemente muy distintos del hacer matemático. La demostración es algo más que una sucesión de fórmulas sintácticas que satisfacen unas reglas lógico-formales dadas de antemano. La demostración constituye un mecanismo creador.

Pensamiento crítico de Poincaré opuesto a las esperanzas que, a comienzos del siglo XX, se depositaron en la formalización a ultranza y que dominó el enfoque de fundamentos bajo las escuelas logicista y, fundamentalmente, formalista. Formalización a ultranza como criterio para superar las dificultades que las paradojas de la teoría intuitiva de conjuntos planteaba, así como para vencer las dificultades que encerraba la aceptación de un principio como el axioma de elección, esencialmente no constructivo porque no hay forma de dar la función de la que en principio se afirma la existencia.

(...) No implica que, al pensar en los fundamentos, Poincaré no estudie la posible causa de las paradojas. En este estudio, y analizando especialmente la paradoja de Richard, diagnostica que la causa es la existencia de un círculo vicioso o impredicativismo. Discutiendo la paradoja de Richard acerca de la indefinibilidad de los números reales establece dos definiciones de lo que se ha denominado *principio del círculo vicioso*, principio que expresa la causa de las paradojas o antinomias conjuntistas." [1] (Lorenzo, 1998, pg 20)

En el primer párrafo es muy interesante lo que plantea Poincaré al hablar de la aportación que supone para las matemáticas dar distintas demostraciones al mismo Teorema (entendiendo Teorema como hipótesis mas tesis). Por un lado, en cualquier ciencia se rige el principio tan arraigado en el refranero español de que "el saber no ocupa lugar", y que toda investigación o reflexión nueva, aunque nos lleve a decepciones como el propio Teorema de Gödel, abren nuevas puertas inimaginables a priori. De ahí la importancia para la sociedad, por ejemplo de la investigación ciega. Pero si se trata desde un punto de vista más lógico-formal, varias demostraciones de un mismo Teorema en principio no aportan información nueva alguna, dado que se asume que si la demostración es ”pura”, la información ya estaba.

Desarrollando esto último, se podría argumentar que en un sistema matemático perfecto desde el punto de vista de los formalistas, donde todo conocimiento nuevo surge de demostraciones impolutas a partir de los axiomas, estos nuevos Teoremas tampoco aportan información. Aportan información a nivel humano porque hasta el momento que se encuentra la demostración no conocíamos la veracidad de dicha afirmación, pero si hemos probado que esa afirmación es cierta es porque ya lo era incluso si el ser humano nunca hubiese existido, luego en los axiomas ya está el castillo entero y nuevos Teoremas no serían más que reestructuraciones del lenguaje.

3.4. Un paso más allá de los Teoremas. La versión de Turing

La figura de Alan Turing será siempre recordada por sentar las bases de la computación moderna, dando los primeros pasos en el diseño y desarrollo de los ordenadores. Es conocido que este desarrollo se vio motivado no sólo por las necesidades geopolíticas de su país a la hora de tener que ganar una guerra, sino sobretodo como consecuencia de las discusiones epistemológicas que se desarrollaban en su tiempo entorno a las matemáticas. El computador como concepto se creó, entre otras cosas, para tratar de profundizar en la resolución del Problema II de Hilbert y definir de forma más concreta la noción de decibilidad entorno a los problemas matemáticos y la imposibilidad de su axiomatización completa.

”Yo prefiero el enfoque de Turing. Turing profundiza más en esto. Él empieza a hablar acerca de computadores. ¡Este es el punto donde ocurre!

Turing tiene que inventar el computador, porque Hilbert dice que debería haber una procedimiento mecánico para decidir si una demostración es correcta o no. Turing dice que lo que Hilbert realmente quiere decir es que debería haber un programa de computador para chequear demostraciones. Pero primero Turing tiene que decir lo que es un computador, es una máquina de Turing, y todo esto en un artículo de Turing de 1936, cuando no había computadores, así que es una pieza fantástica de trabajo. Y me gustaría afirmar que esta es la invención del computador. Estos eran computadores de propósito general, esa era la idea sobre el papel. Lo que Turing demuestra de hecho es que hay una afirmación relativamente concreta que escapa al poder de la matemática. Ahora pensamos en los computadores como dispositivos físicos, así que son algo casi del dominio de la física. Es una máquina trabajando, es una idealización de eso, usted tiene esta máquina trabajando, y Turing descubre por ejemplo el problema de la detención.

Creo que el trabajo de Turing hace parecer los limites de las matemáticas mucho mas naturales, porque estamos hablando de una pregunta acerca de un dispositivo físico, un computador.

Y esta es la invención del computador, para esta loca clase de argumento teórico! Usted no ve millones y millones de dólares de tecnología en este artículo de 1936, pero todo estaba allí en forma embrionaria, como von Neumann sigue enfatizando: la máquina universal de Turing es realmente la noción de computador programable de propósito general.[5] Usted tenia máquinas que hacían cálculos antes, pero hacían cálculos específicos, eran máquinas sumadoras, máquinas mecánicas de cálculos, y yo las usé cuando era un niño. Pero la noción de computador es la noción de Turing de una máquina que puede hacer lo que cualquier máquina calculadora puede hacer, y esa es la idea de software: es una máquina de un gran propósito general, es una máquina flexible. Así que esta realmente ahí, von Neumann seguía diciendo, muy claramente en este articulo de Turing. Así que usted tiene toda esta tecnología entera allí!

Pensé que quizás el problema es mucho mas grande y que Gödel y Turing eran solo la punta del iceberg. Quizás las cosas eran mucho peor y lo que tenemos aquí en la matemática pura es aleatoriedad. En otras palabras, quizás algunas veces la razón por la que usted no puede probar algo no es porque usted es estúpido o no lo ha trabajado lo suficiente, la razón por la cual usted no puede probar algo es porque no hay nada ahí! Algunas veces la razón por la cual usted no puede resolver un problema matemático no es porque usted no es lo suficientemente listo, o porque no es lo suficientemente resuelto, es porque no hay solución. Porque quizás la pregunta matemática no tiene estructura, quizás la respuesta no tiene patrón, quizás no hay orden o estructura que usted pueda tratar de entender en el mundo de la matemática pura. Quizás algunas veces la razón por la que usted no ve un patrón o estructura es porque no hay patrón o estructura! Una de mis motivaciones eran los números primos. Hay algún trabajo en los números primos que dice que en algunas maneras los números primos pueden ser observados estadísticamente. Parece haber una cierta cantidad de aleatoriedad en la distribución de los primos. Y esto incluso ocurre en la teoría de números, la reina de la matemática pura! Entonces en una mano yo oía esta charla acerca de formas probabilísticas de pensar sobre los números primos - esto era heurístico - y esta cosa de que Dios juega a los dados en la física fundamental - lo que ocurre en los átomos es aleatorio - y empecé a pensar, bien, quizás esto es lo que ocurre en los fundamentos de la matemática. Esto es lo que empecé a hacer, y este proyecto tomó mucho tiempo. Uno de los primeros

[5] Que esta persona alegue esto de la Máquina de Turing es especialmente importante porque fue quien dirigió el salto de la abstracción de máquina a su construcción. Estamos hablando del ingeniero que se encargó de diseñar y desarrollar la arquitectura bajo la cual se construyen la inmensa mayoría de computadores actuales, quien puso los cables en su sitio y argumentó "hace falta una memoria intermedia, un disco duro, una CPU, unos buses de datos y de direcciones. Los registros, los periféricos, las cachés...". Casi cada ordenador que existe hoy en día se construye bajo la arquitectura que lleva su nombre: La Arquitectura von Neumann.

pasos es aclarar lo que usted quiere decir por aleatoriedad. ¿Que significa falta de estructura, falta de orden, ausencia de patrón?". [7] (Chaitin, 2000, pp. 8-9)

Aquí Chaitin plantea dos cuestiones importantes. La primera es que la Máquina de Turing se concibió en su inicio como forma de resolver, o ampliar la resolución, del Problema II de Hilbert, ya que en la forma en la que se trataba la cuestión el mismo Hilbert asumía que para ser resuelto de forma positiva la construcción de esta axiomática debía ser en esencia computable, que se podían alcanzar demostraciones hechas por ordenador, y la generalización de cualquier máquina posible permite construir demostraciones de que esto no puede ser. Aun así, su legado más importante sigue siendo la invención del computador.

En segundo lugar, los desarrollos de Turing también abren la puerta, como se ha comentado, a la diferencia sustancial entre demostrabilidad o veracidad y decibilidad, en tanto que un problema planteado o resuelto desde la lógica no significa que esté "verdaderamente" resuelto desde el punto de vista de su cálculo efectivo.

Por ello, al tratar de preguntarse cuestiones entorno a si las matemáticas son decidibles o computables, a veces la inclusión llega a invertirse, se encuentran callejones sin salida en las que aunque existan estructuras con capacidad de ser calculadas o descubiertas, no parece haber un patrón detrás que permita generalizarlas y tratar con ellas desde la matemática clásica. Un ejemplo de esto son por ejemplo los números primos.

Y en el momento en el que la única manera de tratar con algo es tratar con ello directamente, sin capacidad de abstracción a una capa superior surge un nuevo tipo de aleatoriedad. Ya no en la física o en el mundo natural, sino en la matemática misma. Esto lo desarrolla sobretodo Chaitin y es algo que se tratará en profundidad en el siguiente capítulo.

Ahora nos preguntamos por tratar de diferenciar de una manera más formal estas dos capas de las matemáticas. La del cálculo y la del razonamiento.

Capítulo 4

Algoritmos vs Conjuntos

Para intentar explicar el desarrollo de Alan Turing, se utilizará de nuevo contraposición con la visión clásica o anterior de las matemáticas, a través de una de sus herramientas más conocidas. Las funciones.

Una función es una transformación de un conjunto a otro, caracterizada por un conjunto de entrada llamada dominio, el cual es el conjunto de los elementos susceptibles de ser transformados por esta función, los elementos que tienen sentido ser transformados por la misma. Un co-dominio, véase un conjunto de elementos donde "caen" los elementos transformados, y una expresión, normalmente simbólica, pero se puede definir de muchas maneras, que define la forma que tiene la transformación.

Como hemos visto, las matemáticas ya son capaces de trabajar desde un punto de vista simbólico, de representación en muchos casos de símbolos que representen infinitas cosas, infinitas transformaciones o la tranformación de infinitas cosas al instante. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, expresiones del tipo $f(\mathbb{N})$.

Pero un problema diferente es el pensar en el cálculo efectivo de estas funciones, en si en todos los casos tenemos para todo x en nuestro dominio, el valor concreto de x al instante. Ser capaz de calcular estos valores para cualquier entrada x, o mejor dicho, ser capaz de construir una máquina que dentro de sí construya máquinas capaces de resolver esto para cualquier f y para cualquier x sería una máquina capaz de resolver de forma autónoma cualquier problema planteable por un ser humano, y esta era en definitiva la tarea que trataba de resolver de forma primigenia la idea de la Máquina de Turing.

Pongamos un ejemplo más práctico. Un Teorema interesante de Álgebra, probablemente el más famoso, el Teorema Fundamental del Álgebra de Gauss, afirma que cualquier polinomio de grado n tiene n raíces diferentes (contando multiplicidad). Luego, desde el punto de vista puramente matemático, sabemos que existen diferentes funciones de grado 5 que poseen 5 raíces diferentes dentro de los números complejos, de hecho para cualquier conjunto de números es fácil construir un polinomio que sólo los tenga a ellos como raíces, incluso por un computador. Y se habla de inmediato del conjunto de las raíces, o incluso una función R que a cada polinomio le asigna el conjunto de sus raíces.

Sin embargo hay otro Teorema, desarrollado a partir de la teoría de Galois, que afirma que no se puede construir un proceso algorítmico, una fórmula general, para calcular las raíces de un polinomio de grado 5 o mayor que 5. En definitiva, esto es un problema indecidible, irresoluble por un computador de forma automática. En algunos casos obvios como x^5 se ve que tiene una única raíz, el 0, de multiplicidad 5, pero si nos planteáramos el problema de calcular una fórmula que nos dijera las raíces para cualquiera de ellos, como la tenemos ya para polinomios de grado 2, 3 y 4, no es que hasta ahora no hayamos podido calcularla, es que está demostrado que es imposible.

Luego lo que interesa de esto es que el concepto de definición es diferente del concepto de cálculo. Podemos definir pensar algo y razonar hasta donde podamos sobre él pero no tener manera efectiva de calcularlo. Aquí es donde nace el concepto de decibilidad. Ya no basta con conocer algo, existe un grado mayor de comprensión o de conocimiento sobre un problema, y es en esencia el concepto de poder resolverlo.

Para saber cuándo un problema es efectivamente resoluble, sería interesante poder formalizarlo de una manera más exacta, objetiva. Esto es en esencia lo que consigue la Máquina de Turing. Un problema resoluble es una función f tal que para cualquier entrada x que tenga sentido –que x pertenezca al dominio de f– existe una máquina que acaba su ejecución en un momento en el que en su cinta se encuentra escrito f(x). Dicho de otro modo, f es resoluble por nuestra Máquina de Turing concreta. Un problema es resoluble cuando es computable.

4.1. La Máquina de Turing. El culmen de la representación

”*Un concepto abstracto no es más que la síntesis de sus múltiples determinaciones”.* Karl Marx

La Máquina de Turing es, básicamente, la abstracción que se encuentra encima de cualquier ordenador. Es lo mínimo desde el punto de vista conceptual, esencial, que tienen en común todas las máquinas que existen.

Los más arcaicos intentos de dar una definición formal de lo que puede hacer una máquina (digamos una definición de computar o computación, o ligándolo con los párrafos anteriores, una definición de ”pensar para las máquinas”) corresponden a los lógicos Alonzo Church y Jacques Herbrand. Este trabajo fue tomado con mucho interés por Kurt Gödel, quien corrigió unos cuantos errores de la versión de Herbrand. Tras esto, el mismo Church demostró ante sus estudiantes que su versión y la de Gödel-Herbrand llevaban a la misma clase de funciones computables. Es decir, la definición de computación o computables, en ambas versiones, eran idénticas desde el punto de vista conjuntista.

En este punto es donde toma el relevo de este esfuerzo el británico Alan Turing, quien desarrollando este trabajo llegó a, posiblemente, el concepto más universal en Teoría de la Computación, la Máquina de Turing. Este concepto es tremendamente potente porque permite abstraer cualquier determinación concreta de una máquina (un servidor, un móvil, The Bombe [1]...) para poder hablar sobre el papel de la potencialidad real de computación que puede tener una máquina, hasta sus últimas consecuencias.

En esta rama de la computación tenemos que olvidarnos de cuestiones fundamentales en todo el desarrollo ingenieril de la informática como la eficiencia o la escalabilidad. No nos importa si el programa tarda 3 segundos o 10 millones de años, si necesita 1GB de RAM o 2TB, estamos hablando con una máquina que ni siquiera tiene cables, que ninguna de estas preguntas tiene sentido, sólo nos interesa si al final es un sí o es un no. Si es que no, es que no para cualquier máquina imaginable que se parezca a un ordenador (determinista, lenguaje finito... las restricciones son francamente mínimas) por muy potente que esta sea y si es que sí, aunque tarde un tiempo absurdamente grande, sabemos previamente que es que sí, lo cual por supuesto que es información relevante.

Alan Turing la definió de manera más puramente formal como una séptupla donde intervienen un alfabeto de entrada, una función de transición, un conjunto de estados y otro de estados finales y otros tecnicismos para hacerlo funcionar desde el papel como un autómata que salta de un estado a otro hasta llegar a un final, pero lo que nos interesa aquí es:

1. "Funciona" sobre el papel, no tiene una implementación en cables como tal, sirve para pensar y probar cosas, no para computar.

2. Cualquier componente electrónico que cumpla la función de un ordenador, desde una CPU a un PC pasando por un teléfono móvil, podría ser escrito como una MT que realiza las mismas funciones que él. Toda máquina tiene una MT "equivalente", luego si pruebo una propiedad para toda MT, es como si lo hiciese para toda máquina, y aquí la clave de su potencia.

[1] Bombe fue el nombre que recibió la máquina construida por Alan Turing y otros matemáticos, conocida por las implicaciones políticas que tuvo al permitir deshacer el sistema de cifrado utilizado por las fuerzas del eje durante la II Guerra Mundial, dando una ventaja impagable a los aliados para vencer esta guerra. Este trabajo no fue reconocido hasta varias décadas después, con Turing ya fallecido. Se le considera el primer ordenador de la historia.

4.1.1. El problema de la Parada

Este Problema de la Parada es un ejemplo bueno del uso de la representación para probar algo *para todas las máquinas*. Sabemos cómo es la naturaleza de un programa según la definición de Turing, incluso usando código de alto nivel podríamos demostrar la imposibilidad de existencia de dicha máquina M que calculase este problema, sólo usando como condición inicial su existencia y llegando a una contradicción, de la siguiente manera.

Suponemos que existe dicha máquina, a la que llamaremos *Parará*, con dos entradas. La codificación de una Máquina de Turing en un alfabeto A y una entrada en el mismo alfabeto. Como sabemos un programa puede aceptar perfectamente el código de otro programa como entrada, por ejemplo los compiladores son un buen ejemplo de ello.

Ahora, construimos otra máquina P muy simple, con una única entrada w, de forma que para ejecutarse escribiríamos P(w)

u = w
if Parará(u, w) **then**
    While(True):
else
    Return "Acabada la ejecución"
    Halt
end if

Y pensemos en qué pasa si ejecutamos la siguiente Rutina. P([P]), siendo [P] la codificación de nuestra máquina P.

Al entrar al If, se ejecuta *Parará([P], [P])*, la cual debería devolvernos si P ciclará con esa entrada o no. Si devuelve sí, entra en un bucle infinito, luego tenemos que P cicla con la entrada [P]. Si por el contrario devuelve No, P, con entrada [P], resulta en el mensaje "Acabada la ejecución".

Luego:

Parará([P], [P]) $\Longrightarrow$ P([P]) entra en bucle infinito.

$\neg$Parará([P],[P]) $\Longrightarrow$ P([P]) devolverá "Acabada la ejecución" y finalizará.

Luego, según la función *Parará*, P parará si y solo si no para. Contradicción.

Como vemos únicamente se ha usado como condición que nuestro programa P tenga una codificación como Máquina de Turing, cosa que el británico se encargó de demostrar que era posible para cualquier Máquina de Computación, codificando esta como se ha dicho en una séptupla donde cada elemento es representable por símbolos. Cada máquina construible tiene una MT equivalente. De hecho hoy en día sabemos que una máquina de computación no es más que un software, y un software no es más que una consecución de símbolos, luego la existencia de *Parará* es lógicamente imposible. No es ningún problema de carácter ingenieril, no es que "hasta ahora no hayamos sido capaces de construirlo". Al igual que en el Teorema de Gödel, no es que aún no sepamos, es que sabemos que nunca podremos.

4.2. Teoría algorítmica de la información.

Chaitin

"La idea normal es que si algo es verdadero, lo es por una razón". Leibniz

"Algunas de ellas son verdades matemáticas que son verdaderas sin ninguna razón, son verdaderas por accidente". Chaitin

Existe un concepto fundamental en ciencia que es el de aleatoriedad. Esto se corresponde con los procesos, sobre todo relacionados con la física, en los que las condiciones iniciales no determinan el resultado, o por lo menos, que al no tener todas las condiciones iniciales conocidas tenemos que asumir un grado de incertidumbre en el resultado.

La misma existencia de la aleatoriedad en la naturaleza es un debate amplísimo donde entra el determinismo como base de la física clásica durante siglos, por ejemplo actualmente se habla de que los procesos cuánticos son la única fuente de aleatoriedad existente en la naturaleza, ya que no se trata de una limitación técnica en las herramientas de medición ni de procesos internos desconocidos, sino de pura aleatoriedad en el resultado a mismas condiciones.

Las matemáticas también han aportado su granito a la hora de modelizarla con toda la axiomática probabilística de Kolmogorov, por ejemplo.

Además, en tanto que los ordenadores son por definición máquinas deterministas, en ellas la aleatoriedad es imposible y hay toda una rama, sobretodo en criptografía, que trata de simularla dentro de las máquinas con lo que se conoce como algoritmos pseudo-aleatorios.

En este caso la palabra toma un significado bastante diferente. Pero se utiliza la palabra porque guarda cierta relación. Como se adelantaba en el punto anterior, en este caso se llaman estructuras aleatorias a aquellas que, básicamente, poseen una información dentro que no se puede expresar de forma más general, no se pueden abstraer en, por ejemplo, estructuras algebraicas más pequeñas o manejables. Lo aleatorio es, en esencia, incomprimible.

"Esta es una clase de noción lógica de aleatoriedad en vez de una noción estadística. No es como en física donde usted dice que un proceso físico es aleatorio como el lance de monedas. No me importa de donde vienen las cosas. Solo miro algo y digo si tiene estructura o patrón o no. Esta es una aleatoriedad lógica o estructural contraria a la imprevisibilidad y aleatoriedad física, es diferente. están relacionadas muy cercanamente, pero son diferentes. Y la idea que tuve - y Kolmogorov la tuvo al mismo tiempo independientemente - es la idea de que algo es aleatorio si no puede ser comprimido en una descripción mas corta, si esencialmente usted tiene que escribirlo tal como es. En otras palabras, no hay una teoría concisa que lo produzca. Por ejemplo, un conjunto de datos físicos serian aleatorios si la única forma de publicarlo es en una tabla, pero si hay una teoría usted comprime mucha información en un pequeño número de principios físicos o leyes. Y cuanto mayor la compresión, mejor la teoría: de acuerdo con la navaja de Occam, la mejor teoría es la mas simple. Yo diría que una teoría es un programa - también Ray Solomonoff hizo algo en esta línea para hacer inducción, el no definió la aleatoriedad, ¡pero debió hacerlo!- Si usted piensa en una teoría como en un programa que calcula las observaciones, la pequeñez del programa es relativa a la salida, las observaciones, cuanto mejor sea la teoría. A propósito, eso es también lo que hacen los axiomas. Yo diría que los axiomas son la misma idea. Usted tiene un montón de teoremas o verdad matemática y los comprime en un conjunto de axiomas. ¿Por qué es bueno esto? Porque entonces hay menos riesgo. Porque los axiomas son hipótesis que usted tiene que hacer y cada vez que usted hace una hipótesis tiene que tenerle fe y hay riesgo. Usted no la esta probando a partir de nada, la esta tomando como dada, y cuanto menos asuma más seguro se esta. Entonces cuantos menos axiomas se tengan, usted está mejor. Así que cuanto mayor compresión haya de un montón de teoremas, de un cuerpo de una teoría, en un pequeño conjunto de axiomas, mejor está usted, yo diría esto en matemáticas tanto como en física. Okey, entonces esta es la noción de falta de estructura o aleatoriedad. ¡Usted tiene que definirla primero! Si voy a encontrar falta de estructura, falta de patrón, en la matemática pura, primero tengo que decir lo que quiero decir por eso. Y yo llamo a este tema teoría algorítmica de la información. Trata con esta información algorítmica. O usted puede llamarla complejidad si le gusta, complejidad del tamaño de programas". [7] (Chaitin, 2000, pp 12-13)

Pero una vez que tenemos esta noción de aleatoriedad, un punto interesante sería cuestionarse si tenemos forma de saber que nuestra información es aún más comprimible o no. Para ello deberíamos saber cuánta información "útil" hemos sido capaces de almacenar en cuánta información real, como conjunto de símbolos. Aquí Chaitin vuelve a formalizar esto a su manera.

"El concepto básico es mirar al tamaño del programa mas conciso, el menor programa - no me importa su tiempo de ejecución - es el programa mas conciso que calcula algo. Este es el número de bits que tengo que darle al computador a fin de producir este objeto. Esa es mi descripción algorítmica mas concisa de algo, y así es como mido su complejidad, su contenido de información algorítmica o la complejidad del tamaño de su programa. Esto es como la teoría de funciones recursivas: no me importa el tiempo de ejecución - ¡así que esto es muy impráctico! En ese sentido también yo estoy haciendo las cosas de 1930, lanzando esta idea extra del tamaño de programas, de mirar al tamaño de los programas. ¿Qué pasa cuando usted empieza a mirar el tamaño de los programas? - y entonces algo es aleatorio si el menor programa que lo calcula tiene el mismo tamaño, y no hay compresión. Entonces la idea completa es, mire al tamaño de programas de computador, no importa su tiempo de ejecución, ¡No me importa si toma un billón de años! La información es la única cosa en la que estoy pensando, bits de información, tamaño de programas de computador. ¿Qué pasa cuando usted empieza a jugar con esta idea? Lo que ocurre es que, donde quiera que mire, se obtiene incompletitud e indecidibilidad, y usted se adentra en el peor camino posible. Por ejemplo esto pasa con la primera cosa que usted desea hacer: usted nunca puede decidir que una cadena individual de dígitos satisface esta definición de aleatoriedad. ¡Imposible! Usted nunca puede calcular la complejidad del tamaño del programa de ninguna cosa. Usted nunca puede determinar cual es el tamaño del menor programa. Si usted tiene un programa que calcula algo, esto le da un limite superior, su tamaño es un limite superior de la complejidad del tamaño del programa de lo que calcula. Pero usted nunca puede demostrar que hay un limite inferior. Y ese es mi primer resultado de incompletitud en este área y creo que Jack Schwartz se entusiasmó mucho con esto. En la teoría normal, práctica, útil de la complejidad usted habla de tiempo en vez de bits de información, los limites inferiores son mucho mas difíciles que los limites superiores. Obtener limites inferiores en complejidad es mucho mas difícil que obtener limites superiores. Porque si usted encuentra un algoritmo inteligente obtiene un limite superior en el tiempo que toma calcular algo; si usted encuentra una forma de hacerlo eso es lo mas rápido que usted ha demostrado que puede hacerse así de rápido. El problema es demostrar que usted ha obtenido el algoritmo mas rápido posible, eso es mucho mas difícil. Pero puede hacerse en algunos casos, dentro de una clase de algoritmos posibles. Bien, en la teoría algorítmica de la información usted no puede probar ningún limite inferior!" [7] (Chaitin, 2000, pg 13)

Aquí Chaitin lo que plantea básicamente es que una vez que tenemos un programa capaz de resolver una tarea, en cualquier lenguaje de programación, cabe preguntarse si este es el programa más corto capaz de realizar esta tarea.

Dado que ya hemos argumentado, por ejemplo en la explicación de la paradoja Richardiana, que el número de programas escribibles en un lenguaje es numerable, este programa nuestro tendría un número asignado, y dado que el orden en el que los numeramos tiene que ver con su longitud, todos los programas "menores" que él son finitos, ordenados y computables. Luego, ¿Podríamos construir un programa capaz de demostrar que nuestro programa P es el más corto para la tarea requerida?.

Un pseudo-código podría ser:

for todo (w < P): **do**

```
    if (Comparar(P, w)): then
        Terminar: "Tenemos un nuevo w"
    else
        "Es el más corto".
    end if
end for
```

¿Dónde está el problema? En la función Comparar.

Para saber si dos programas realizan esta tarea, tenemos que "rebajar"los mismos a sus dos máquinas de Turing correspondientes y ver si aceptan el mismo lenguaje. Dado que tienen que comparar todas las entradas posibles, las cuales son infinitas, éste es un problema semi-decidible [2].

Además, alejándonos un poco de lo que plantea Chaitin, lo que nos interesa como informáticos no es tanto la longitud del programa en sí como su complejidad. A la hora de hablar de aleatoriedad algorítmica este autor lo plantea a partir de la información comprimida en ese programa, el número de bits del código, pero como sabemos un programa puede ser relativamente corto de escribir y a la vez tremendamente ineficiente. Por ejemplo, un programa para calcular un resultado del problema de las torres de Hanoi [3] se puede escribir en unos cuantos cientos de líneas de código, sin embargo su complejidad es (por ahora) exponencial.

4.2.1. Probabilidad de Detencion de un programa

Volvamos otra vez al problema de la Parada. Ya ha quedado claro que no puede existir una Máquina de Turing que resuelva este problema en tiempo finito. Siendo más precisos, este es un problema semi-decidible. Pero en relación con esto Chaitin, en vez de centrarse en una cuestión binaria de Sí o No, intentó meterse en los grises. Cambiemos la pregunta de saber previamente si parará o no a una que nos dé aún mas información, saber cuál es la probabilidad de que éste pare.

[2] Un problema semi-decidible es aquel que, teniendo como únicas salidas Sí o No, se puede implementar una MT que pare en un tiempo finito únicamente si la entrada resulta en respuesta negativa, pero donde esto no se puede asegurar para entradas positivas. En el caso de comparar lenguajes, es fácil ver que para dos que no lo cumplan, nuestro programa parará al llegar a la primera palabra que sea aceptada por una pero no por la otra. Sin embargo, si efectivamente ambas son equivalentes, el programa nunca acabará.

[3] Las torres de Hanoi es un ejercicio clásico de inteligencia. Consiste en colocar tres palos y rellenar uno de ellos con anillos de diferentes tamaños, colocados en orden decreciente. Hay que construir esta misma pirámide en otro palo, moviendo los aros de uno en uno, sin colocar nunca uno mayor que otro por encima. La clave del problema es que sabiéndolo resolver para n anillos, al añadir otro se resuelve resolviéndolo para n anillos dos veces y un movimiento más, luego el tiempo de ejecución al aumentar anillos crece de forma exponencial. Hasta ahora se considera un problema de eficiencia exponencial, pero como señala Chaitin, siempre tendremos una cota superior, nunca inferior.

Suena difícil creer que pudiera existir una máquina que calcule esto para cualquier programa, ya que en ese caso (por el argumento de reducción[4]) podríamos resolver el problema de la Parada, pero por ejemplo desde el punto de vista matemático, usando la axiomática de Kolmogorov, se puede construir una variable aleatoria entorno a esta cuestión. De hecho el mismo Kolmogorov desarrolló muchas de estas cuestiones en paralelo a Chaitin. Éste problema, aunque no se pueda construir una MT que lo resuelva generalmente, nos da mucha información sobre la estructura aleatoria de algunas preguntas matemáticas. Basta con intentar resolverlo, sacar esta probabilidad, para un programa y una entrada en concreto.

”Y mi peor resultado de incompletitud, donde usted obtiene una total ausencia de estructura en la matemática pura, tiene que ver con un número que definí como la probabilidad de detención.

$$\Omega = \text{probabilidad de detención}$$

¿Como se define este número? Es muy simple. Turing dijo que usted no puede decidir si un programa se detiene, no hay procedimiento mecánico para hacer eso. Y yo digo, considere un número real Ω que es la probabilidad de que un programa generado lanzando una moneda al aire se detenga. Entonces estoy promediando sobre el problema de detención de Turing, diciendo que si genero un programa lanzando monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de que se detenga, sin limite de tiempo? Entonces esto me dará un número real determinado si usted me dice – hay un subíndice – cuál es el lenguaje de programación.

$$\Omega_{computador} = \text{probabilidad de detención del computador}$$

Una vez que usted decide, entonces Ω es un número real bien definido. Matemáticamente no es una cosa muy sofisticada. Compárelo con los grandes cardinales, con matemáticas sofisticadas, este es claramente un objeto de bajo perfil. Sin embargo resulta que, ¡Este objeto es máximamente incognoscible!

Ω es **máximamente incognoscible**

¿Que es esto de ser máximamente incognoscible? Bien, son los dígitos o bits de este número. Una vez que fijo el lenguaje de programación esta probabilidad de detención es un número real específico, que depende del

[4]El argumento de reducción es muy usado en teoría de la computación. Sabiendo que un programa no es decidible P, y teniendo otro Q que no sabemos su decidibilidad, si conseguimos demostrar que resolviendo Q podríamos resolver P, por contrarrecíproco, llegamos a que Q tampoco es resoluble

computador que se escoja, o el lenguaje de programación en el cual genero un programa lanzando monedas al aire. Así esto genera número real específico, y digamos que lo escribo en binario, así que obtengo una secuencia de 1's y 0's, es una definición muy simple. Bien, resulta que esos 0's y 1's no tienen estructura matemática. No pueden ser comprimidos. Para calcular los primeros N bits de este número se requiere un programa de N bits. Para ser capaz de probar lo que son los primeros N bits de este número se requieren N bits de axiomas. Esta es información matemáticamente irreducible, esa es la idea clave.

Ω es **información irreducible**

Esto debería ser una idea chocante, información matemáticamente irreducible, porque la idea general normal de la matemática, la idea Hilbertiana, la idea clásica de la matemática, es que toda la verdad matemática puede ser reducida a un pequeño conjunto de axiomas sobre los cuales podemos ponernos de acuerdo, que ojalá sean "auto-evidentes". Pero si usted desea determinar lo que son los bits de la probabilidad de detención, esto es algo que no puede ser reducido a nada más simple. Ω tiene una definición con una estructura más bien simple una vez que especifico el computador, o el lenguaje de programación. Yo he escrito incluso un programa en LISP que calcula este número en un sentido débil. Usted no puede calcular este número. Si pudiera calcularlo, entonces no seria incognoscible. Usted puede obtener un límite por debajo, pero converge muy, muy lentamente - nunca puede saber que tan cerca está - no hay un regulador computable de convergencia, no hay forma de decidir que tan lejos ir para obtener los primeros N bits de Ω correctos. Para obtener Ω en el limite por abajo, usted mira más y más programas, durante más y más tiempo, y cada vez que que un programa de K bits se detiene, eso contribuye en $1/2K$ a la probabilidad de detención.

$$\Omega = \sum_{p \; se \; detiene} 2^{-|p|}$$

Así que el tiempo que usted necesita para obtener los primeros N bits de Ω correctos crece como el tiempo de ejecución más largo posible de un programa de N bits, lo cual es una versión de la función Busy-Beaver.

Entonces, ¿Cuál es la definición precisa de Ω? Genere un programa lanzando una moneda por cada bit, esas son lanzadas independientes de una moneda no cargada. El punto clave es que el programa tiene que ser "auto-delimitado". El computador tiene que preguntar por cada bit uno por uno. Cada vez que el computador dice que desea otro bit del programa, usted lanza la moneda. Y el computador tiene que decidir por si mismo si tiene suficientes bits, que tiene el programa completo. El programa tiene que ser auto-delimitante para definir esta medida de probabilidad correctamente. Entonces no hay marcador para indicar dónde finaliza un programa: un programa debe indicar dentro de sí mismo su longitud por medio de algún truco, algún truco de codificación. Este es el problema técnico para obtener esta probabilidad bien definida. Ese es el punto técnico en mi teoría. Así que este número Ω es un número real entre 0 y 1. Es la probabilidad de que un programa cuyos bits han sido generados por lanzadas independientes de una moneda eventualmente se detenga. Y estoy fijando el lenguaje de programación, escojo la máquina universal de Turing, hay un subíndice, es Ω_{MUT}, es la probabilidad de detención de una máquina universal de Turing particular. Y realmente escojo una MUT que programé en LISP, para aterrizar las ideas. Pero usted podría hacerlo esencialmente con cualquier máquina universal de Turing con programas auto-delimitantes, también funcionaría. Entonces Ω es máximamente incognoscible. Este es un caso donde la verdad matemática no tiene estructura o patrón y es algo que nunca vamos a saber. Déjenme decirles lo que he obtenido aquí. He obtenido máxima aleatoriedad como lances independientes de una moneda al aire - en la matemática pura. De hecho, puedo hacerlo incluso en la teoría de números elemental, como Gödel lo hizo. Puedo convertir el determinar los bits de Ω en una proposición acerca de una ecuación diofántica. El punto es, aquí usted ha obtenido una pregunta matemática simple - cuales son los bits individuales de Ω – es el primer bit 0 o 1, el segundo bit 0 o 1, el tercer bit 0 o 1 - pero las respuestas no tienen estructura, son como lances independientes de una moneda al aire, incluso aunque cada respuesta está bien definida matemáticamente, porque es un bit específico de un número real específico y tiene que ser un 0 o un 1. De hecho, nunca vamos a saber: esta es mi versión de lances independientes de una moneda en la matemática pura. Incluso si usted conociera todos los bits pares de Ω esto no le ayudaría a obtener ninguno de los bits impares. Incluso si usted conociera el primer millón de bits, esto no le ayudaría a obtener el siguiente millón. Esto realmente luce como lances independientes de una moneda no cargada, es máximamente aleatorio, tiene entropía máxima. Los físicos se sienten confortables con la aleatoriedad, pero este es el mundo blanco o negro de la matemática pura - como es posible, ¿Cómo puede ser? Cada uno de estos bits está bien definido, es un 0 o un 1 específico, porque Ω es un número real específico una vez que determino la máquina universal de Turing o el lenguaje de programación con que voy a trabajar. Pero resulta que la forma correcta de pensar acerca de cada bit es que no es blanco o negro, que no es 0 o 1, esto está tan bien balanceado, esta tan delicadamente balanceado, que es **gris**!" [7] (Chaitin, 2000, pp 14-16)

Esto es el culmen, argumentado teóricamente de manera completamente formal, de las dos citas que abrían este punto. Históricamente se han tratado de buscar las estructuras intelectuales que sostenían las matemáticas no sólo como forma de abreviarlas, de ser capaces de explicarlas en pocas fórmulas o axiomas, sino como forma de darles un sentido.

Esto, desde un punto de vista filosófico, o incluso teológico, guarda relación con la búsqueda en el mundo de un creador consciente detrás de la inmensa complejidad de los procesos naturales, las fuerzas físicas y en este caso las matemáticas.

Al igual que Darwin supuso un hito en su rama al descubrir que nadie había creado la variada fauna que habita nuestro planeta, sino que esta era un resultado simplemente del paso del tiempo y la lucha por la supervivencia en un auto-desarrollo, volviendo su historia mucho más gris, la aleatoriedad en matemáticas supone que no todo tiene una razón detrás, que no hay un mundo perfecto y ordenado que tenemos que descubrir, sino que las matemáticas se van generando conforme se calcula y se indaga en ellas mismas.

4.2.2. Conway y el Juego de la Vida

Todo se entiende mejor con un ejemplo, y para ello vamos a utilizar un clásico dentro de los programas indecidibles. El Juego de la Vida.

En 1970, el británico John Corton Conway desarrolló un autómata celular[5] donde definimos un estado inicial, mediante un número de habitantes y su posición, y este va avanzando en base a unas reglas predefinidas de proximidad con otros habitantes. Técnicamente no es un juego, ya que una vez definido el estado inicial, este va avanzando por si mismo.

El tablero consiste en una matriz infinita, tanto en anchura como en altura. Por tanto cada casilla, al igual que por ejemplo en el buscaminas, tiene 8 vecinos. Cada casilla se encuentra viva o muerta, o si se quiere, encendida o apagada. En su versión original se generó el comportamiento de la siguiente forma.

Dado un estado concreto:

- Si la casilla tiene exactamente 3 vecinas vivas, la casilla se enciende o nace.
- Si el número de casillas vivas es menor que 2 o mayor que 3 (desigualdad estricta), la casilla muere, ya sea por soledad o por sobrepoblación.

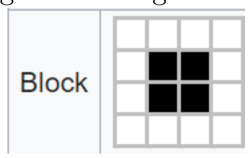
La gracia del juego es que éste, tomando la definición de Chaitin, toma un **comportamiento aleatorio**. Aunque todos los estados hasta el infinito

[5]Un autómata celular, ante todo, es un autómata. Esto significa que es una Máquina de Turing muy simple, que se puede representar a partir de un grafo, en el que partimos de un estado inicial y las distintas transiciones que definamos nos llevan de un estado o nodo a otro. En los que tienen intención de parar, se definen unos estados finales, luego si en alguno de nuestros saltos llegamos a un estado final, la máquina se detiene. Cada salto se produce leyendo el siguiente símbolo de entrada. En el caso de los autómatas celulares, son modelos donde un sistema cerrado avanza en pasos discretos. Se usa, por ejemplo, para modelizar poblaciones año a año en un eco-sistema bajo un modelo poblacional concreto. Así, sabiendo como cambian las poblaciones de un año a otro, una máquina puede simular estas poblaciones y predecir su futuro. Desde el punto de vista matemático, se puede entender como una cadena de Markov.

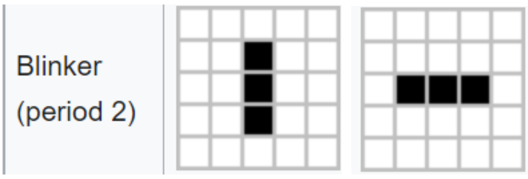
están definidos desde el inicial, la única manera de saberlos es ejecutando la máquina hasta un estado dado, no se puede conocer previamente.

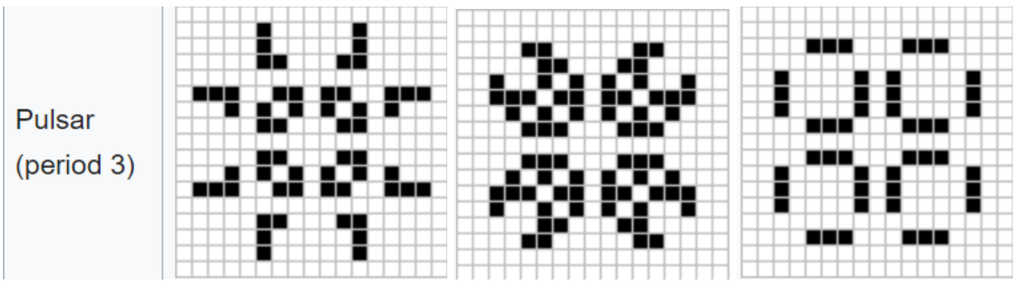
Esto es teniendo en cuenta todas las poblaciones iniciales posibles, en algunos casos concretos si se puede demostrar un comportamiento predecible. Mencionamos los tipos más conocidos.

1. Estáticos: Son sistemas que, ya sea desde el estado inicial, o desde un estado en adelante, han llegado a un punto en el que no variarán más. Por ejemplo, en un momento en el que hay una cuadrícula de 4 casillas vivas y ninguna más lo está. Todas tienen 3 vecinos y solo 3 vivos, luego seguirán vivas, ninguna casilla de la que colinda con ellos tiene más de 2 vecinas vivas, luego nunca llegarán a encenderse.



2. Osciladores: Son sistemas en los que varían las casillas de un estado al siguiente, pero tras un número determinado de estados, se vuelve a uno previo. Dado que un estado está determinado por el anterior, repetir un estado lleva inevitablemente a un bucle de esos n estados, girando entre ellos hasta el infinito. Este número n se conoce como periodo del oscilador. Se puede construir un juego de la vida para cualquier n. En las imágenes siguientes se observa uno de periodo 2 más simple donde se puede demostrar fácilmente el periodo, y uno más complejo pero muy famoso, el pulsar, de periodo 3.





[8]

3. Navegantes (spaceships): Consisten en sistemas que, tomando una foto de las casillas vivas, parecen osciladores, pero estas casillas van variando su posición a lo largo del tablero en una dirección fija, dando la sensación de ser una nave viajando por el plano infinito. Según el tamaño de las casillas que mueva se habla de navegantes ligeros (LWSS), medianos (MWSS) o pesados

(HWSS).

Este problema guarda relación directa con la cuestión que tratábamos ya que se puede visualizar – se adjunta en la bibliografía una página donde se puede simular estos juegos [9] – cómo las poblaciones cambian, y saber que cada población no sólo es que genere una dinámica única, sino que la única manera de conocerlo es mirarlo nosotros mismos, y dejar pasar el tiempo hasta que ocurra. Es la idea esencial de la teoría de Chaitin. La única manera de saber algo aleatorio es saberlo en toda su magnitud, hay que dejarle que ocurra, no se puede predecir.

Capítulo 5

Desarrollos posteriores a los trabajos de Turing y Gödel

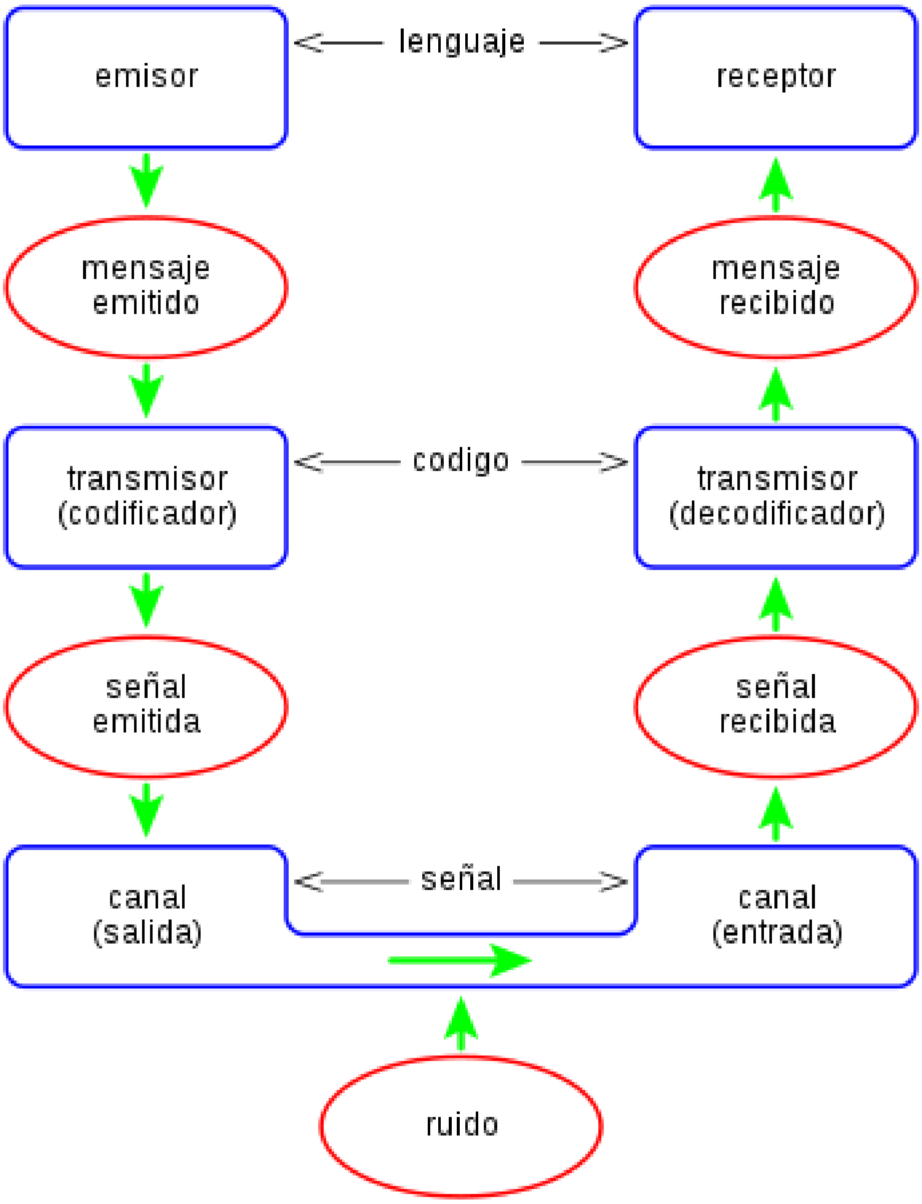
En este punto se afrontarán distintos campos en los que los trabajos de los dos autores significaron un punto de inicio desde el que poder desarrollar su área del saber. Desde la biología hasta la lingüística, pasando por las telecomunicaciones y por supuesto la computación y la lógica, estos dos científicos supusieron un avance impagable a la hora de cerrar algunas puertas, pero abrir muchas otras que hoy en día nos han facilitado la vida de forma inimaginable.

5.1. Shannon y la Teoría de la Información

"La información se define como aquello que nos quita incertidumbre". Javier López Gijón, profesor de Biblioteconomía de la Universidad de Granada.

En 1948, de la mano de un ingeniero en telecomunicaciones estadounidense llamado Claude E. Shannon, nace lo que hoy se conoce como *Teoría de la Información*. A raíz de todo lo que hemos desarrollado sobre los trabajos de Chaitin y Turing, además sobretodo de la creciente demanda y desarrollo ingenieril entorno a las comunicaciones tras la Segunda Guerra Mundial, surge la necesidad de estandarizar los métodos de comunicación y modelizar las herramientas que se usarían entorno a esta.

Esta teoría trata de abstraer cualquier medio posible de comunicación para tratar de ver qué es lo mínimo que debe tener para ser considerado como tal. Un esquema del mismo sería el siguiente.



[10]

En él tenemos elementos muy interesantes, casi parece más un esquema de una clase de lingüística que de telecomunicaciones. Pero supuso un hito en el desarrollo de las mismas ya que fue capaz de definir de forma muy precisa las necesidades y particularidades de cada uno de los elementos del esquema como qué debía ser un emisor, un codificador o un canal. De hecho el esquema nos recuerda un poco (y de hecho tienen una relación histórica estrechísima) con cada uno de los 7 niveles del protocolo TCP/IP, el estándar más importante de la comunicación por Internet.

Pero en este esquema, los elementos lenguaje, código, señal e incluso podríamos decir que ruido toman un papel fundamental, y es en el que nos centraremos, ya que son la información que estamos enviando. Y a la hora de enviar información, cuanto menos necesitemos para mandar lo mismo más barato será de llevar a cabo, luego aquí se vuelve más práctico el problema que planteó Chaitin de hasta dónde podemos comprimir una información.

5.1.1. La información es entropía negativa

En 1943 el físico Erwin Schrödinger propuso una idea muy interesante relacionada con el orden intrínseco que presentaban algunos sistemas vivos. En un libro de divulgación titulado *What is Life?*, publicado en 1943, acuñó el término *Neguentropía* que significa, básicamente, entropía negativa.

Sin entrar demasiado en su definición física, la idea de entropía hace referencia a que los sistemas cerrados tienden al desorden, a igualar las fuerzas en todo el espacio que generan disipando así cualquier estructura diferente o especial que se encuentre en ellos. Los gases tienden a disiparse, las estrellas a unirse, y los sistemas estelares a comerse a sus planetas o a que éstos escapen de sus órbitas. Sin embargo en los sistemas vivos, por ejemplo los eco-sistemas, este proceso parece contenerse o incluso darse la vuelta, generando sistemas ordenados capaces de ser sostenibles en el tiempo.

A partir de este concepto el propio Shannon habló de entropía estadística, o en este caso, entropía negativa para hacer referencia a la capacidad que se tenía bajo su modelo de calcular por ejemplo mensajes más probables que otros y así ser capaz de comprimir la información en menos bits, lo que hoy se conoce también directamente como compresión, dejando cadenas de más bits a los mensajes menos probables.

Podemos calcular, para una fuente F, la longitud esperada de sus mensajes (H) con tal de intentar minimizarlo, haciendo simplemente una media ponderada de la longitud de los mensajes posibles por la probabilidad de que estos sean emitidos. Sea i un índice que numera los mensajes posibles en una fuente, P_i la probabilidad de que este ocurra y L_i la longitud de cada mensaje.

$$H = \sum P_i L_i$$

Usando esto, en 1988 Mario Ludovico dio una definición formal de neguentropía como el grado de organización existente en un sistema con elementos que interactúan entre sí. Es el nivel de orden que hay dentro de algo. Y en este sistema, la información hace el papel de **medio neguentrópico** porque es el que nos permite reducir la incertidumbre (usada en física como sinónimo precisamente de entropía) y mantener el orden de nuestro sistema.

En gestión de riesgos por ejemplo, se habla de neguentropía a la capacidad de llevar a un sistema a un estado lo más estacionario posible. Sin tranformación, sin cambios, no hay incertidumbre.

Cabe destacar que la modelización teórica de la información, algo que en estos puntos parecen más reflexiones vacías que ingeniería de diario, fueron claves para poder estandarizar y así llevar a las grandes masas los medios de comunicación que hoy conocemos. Detrás de Internet, sobretodo en las capas más bajas del modelo TCP/IP, existen problemas de fallos de transmisión, organización de paquetes y envío a grandes distancias que habrían sido imposibles de resolver sin estos trabajos.

Algunos puntos que hacen referencia a la continuación de estos trabajos podrían ser:

- Algoritmos de Compresión de datos (zip, rar, etc)
- Algoritmos de Control de Errores (ARQ, Parada y Espera, etc)
- Algoritmos de Detección de Errores (Códigos Cíclicos, Paridad, etc)

5.2. El nacimiento de la Inteligencia Artificial

En este punto, ya que el término es bastante conocido en nuestros días, deberíamos pararnos un momento a reflexionar entorno a lo que significa la palabra pensar. Si lo dejamos en su definición menos restrictiva, es evidente que una máquina es capaz de realizar cálculos y ejecutar algoritmos muchas veces de forma infinitamente más rápida y eficiente que cualquier ser humano. De hecho una de las "batallas"que aún el ser humano podía ganar, como la de jugar al ajedrez, ya desde hace al menos una década se sabe como imposible que el campeón del mundo le gane a un teléfono móvil.

Para tratar de afinar algo más en definir un concepto de pensar que pudiera abtraerse por encima de toda máquina implementada, para ver lo que tenían todas en común, como hemos visto previamente, el británico inventó la Máquina de Turing.

En este momento en el que se empezaba a volver cada vez más fina la línea entre el pensamiento humano y la teoría de la computación, en ella empezaron a abrirse puertas en ambos sentidos.

5.2.1. Redes Neuronales

Los avances en el conocimiento anatómico y neurológico acercaban la teoría de que el cerebro humano se parecía mucho a una Máquina de Turing, y este enfoque permitió empezar a construir ordenadores cuyo funcionamiento se basara en el de las conexiones sinápticas neuronales que forman nuestra máquina personal de pensar.

"En 1950 Turing publicó un trabajo titulado *Computing Machinery and intelligence* en la que describió una prueba conocida como *Test de Turing*[1],

[1] Este test se volvió muy conocido, entre otras cosas, por la intriga que presenta. Ha

que dio lugar al nacimiento de una disciplina apasionante, la Inteligencia Artificial. (...)

La pregunta formulada por Turing planteaba la posibilidad de diseñar maquinaria inteligente, es decir, un ordenador que exhibiera IA. Con el fin de indagar en ese campo, por ejemplo, programó el ordenador MADAM con el fin de que escribiera cartas de amor por sí mismo.

Los avances experimentados por la biología en los años 50 permitieron a los científicos confeccionar un modelo del cerebro humano que influyó decisivamente en la forma en que Turing abordó la cuestión de la Inteligencia Artificial. Su finalidad era explicar lo que actualmente las ciencias cognitivas –lógica, lingüística, psicología y neurociencia– denominan *mente*, concepto que engloba varias facetas del cerebro, que abarcan desde la memoria o las habilidades cognitivas hasta la capacidad del cerebro para reunir información, razonar y llegar a una conclusión.

Gracias al trabajo de Santiago Ramón y Cajal, sus sucesores intelectuales pudieron descubrir a mediados del siglo XX que la neurona es la unidad funcional del cerebro (el equivalente al transistor de un ordenador), y a raíz de las investigaciones llevadas a cabo durante la segunda mitad del siglo XIX por Paul Broca, que el cerebro reparte sus funciones entre diversas áreas. Así mismo, era conocido que las señales que se transmiten por las neuronas se pueden modelizar bajo un modelo matemático, el modelo de Hodgkin-Huxley.

"Una computadora puede ser llamada inteligente si logra engañar a una persona haciéndole creer que es un humano". Alan Turing

Estos hallazgos llevaron a Turing a pensar que el cerebro humano debía de funcionar de manera muy similar a como lo hacía un ordenador, o lo que es lo mismo, como una Máquina de Turing universal, que él veía como una "máquina desorganizada" cuando nacemos. A media que el ser humano crece, el cerebro va organizándose paulatinamente, aprendiendo, hasta constituirse en una "máquina universal" adulta. El resultado de estas conjeturas fue un modelo de neurona artificial a la que Turing denominó *máquina desorganizada de tipo B*. Esta clase de neurona podía ser entrenada, es decir, que un circuito neuronal formado por estas neuronas podía aprender a reconocer objetos, letras, números, etc. Por el contrario, había otras redes neuronales a las que bautizó como *máquina desorganizada de tipo A*, que carecían de esa capacidad de entrenamiento, y por tanto de aprendizaje, ya que en las

sido por ejemplo muy utilizado en el cine, ayudando a plantear futuros distópicos como Blade Runner. El Test consiste en una serie de preguntas y unas respuestas asociadas, de forma que un juez externo que pregunta a "algo" estas preguntas y apunta sus respuestas, puede determinar si está hablando con un ser humano o con una máquina. A día de hoy es comprobable cómo esta línea cada vez se está volviendo más fina, y existen asistentes de conversación cuyo grado de humanidad a veces asusta, como Siri por ejemplo.

conexiones entre neuronas faltaba el planificador de conexión.

El punto de vista de Turing sobre cómo funcionaba el cerebro, la mente, coincidía en general con las ideas del neurofisiólogo y cibernético Warren McCulloch y del lógico especialista en psicología cognitiva Walter Pitts, quienes en 1943 propusieron un modelo de neurona artificial, el modelo Walter-Pitts. Una peculiaridad muy interesante de este modelo es que demostraba que las células, en particular las neuronas del cerebro, eran capaces de hacer operaciones booleanas, por ejemplo, comportarse como si fueran una puerta AND, OR, etc., así como lo hacían las Máquinas de Turing.

Con estos modelos de las neuronas Turing, McCulloch y Pitts fueron precursores de lo que con el paso del tiempo ha terminado llamándose *enfoque conexionista o subsimbólico* en IA." [11] (Beltra, 2012, pp 101-104)

Como hemos visto en este fragmento, la ingeniería informática comenzaba a apoyarse en los avances de las ciencias naturales, entendiendo que la naturaleza era un aliado que nos llevaba millones de años de ventaja a la hora de construir máquinas lo más eficientes posibles.

El ejemplo más conocido de cómo la ingeniería puede mirar a su alrededor cuando se queda atascado y simplemente copiar modelos naturales podrían ser las redes neuronales. Pero hay otros tremendamente interesantes como los algoritmos genéticos[2] o el modelo maestro-esclavo.

Con esto vemos cómo cada vez se acercaban más los conceptos cerebro y máquina. El conocimiento del primero nos ayudaba en la construcción del segundo pero también en el sentido opuesto, la pérdida del miedo a construir "cerebros artificiales" nos acercó mucho a indagar en el conocimiento del cerebro.

5.3. Reflexión sobre el legado de Gödel

Después de darle muchas vueltas a este punto, he llegado a la conclusión de que inevitablemente versaría mucho más sobre Turing que sobre Gödel.

Esto se debe fundamentalmente a que gran parte del trabajo de Turing fue completar el de Gödel, luego todo desarrollo que queramos hacer de los trabajos de Gödel tiene más sentido empezarlo en el británico que en el alemán. Aun así me parece importante hacer algunos apuntes explícitos sobre el legado que nos dejó Kurt Gödel, a veces mucho más en la sombra.

[2] Esta clase de algoritmos (o más bien, técnica para construir algoritmos) se llaman así porque se supone que se programan para resolver problemas de los que se conoce un algoritmo para una solución óptima pero éste es tremendamente ineficiente, y para ahorrar el tiempo de computación u otros recursos, se recurre a generar poblaciones de soluciones, que emparejándose entre sí y cogiendo "genes"de cada uno de los padres y mezclándose, tras pocas generaciones se consiguen resultados sorprendentemente buenos. No se puede asegurar optimalidad, pero tardando mucho menos nos dan soluciones casi óptimas. Para estos padres, descendencia y demás se definen funciones de mezcla, comprobadores de optimalidad y construcción de generaciones iniciales

Normalmente, los trabajos que versan sobre cuestiones más teóricas no tienen la repercusión social que pueden alcanzar otros que nos faciliten "utilidades" más directas, e incluso son despreciados por quienes no entienden que lo segundo es imposible sin explorar en lo primero, pero hasta en los campos donde no se vislumbre ninguna mejora ingenieril ni utilidad práctica, la búsqueda del saber, además de una pulsión humana inevitable, debería ser cultivada de manera consciente y planificada tanto en el plano personal como el comunitario.

Desde la explosión de la técnica en la producción de la Revolución Industrial, incluso antes, desde el ascenso de la Burguesía y el modo de producción capitalista frente al desfasado feudalismo del Antiguo Régimen, la búsqueda del conocimiento ha estado financiada, apoyada y concebida bajo la base de conseguir un rédito, aunque no económico inmediato necesariamente, si en aras de aumentar la producción y la organización del trabajo humano para la misma. Es por ello que algo de la magnitud de la invención del computador fagocita de inmediato todos los relatos que bordean la figura de Alan Turing y el nacimiento de la informática.

Pero mientras que el británico abrió la puerta a una cuestión fundamental como el desarrollo de las máquinas inteligentes, creo que Gödel hizo algo mucho más difícil. En vez de abrir una puerta, la cerró.

Y esta era una puerta que, por lo menos hasta donde llegamos a conocer de la historia, llevaba abierta 2300 años. Es verdad que con muchos años de bastante inactividad, pero todo el desarrollo de la ciencia a lo largo de la historia ha ido encaminada siempre a tratar de objetivizarla, a tratar de sacar al ser humano, con todas sus pasiones e imperfecciones, de su propia creación. Se ha intentado, con las mejores intenciones, dejar a la ciencia como una serie de postulados, una especie de cuaderno inmaculado, en la que millones de años después de nuestra extinción, quién sabe si alguna otra especie consciente, o extraterrestre, pudiera aprender de ella y no tener que recorrer nuestro camino.

Los dos Teoremas de Gödel, aunque su autor se esfuerce en presentarlos con la mayor humildad posible, suponen un hito inigualable porque es la ruptura de ese sueño milenario. Suponen un bofetón a la soberbia si se quiere, en mi caso prefiero ingenuidad, de la ciencia de creer que la sociedad podía salirse de sí misma. Que podía dejar un legado que no tuviera nada que ver con su propia historia, sólo con el mundo de ahí afuera, y la realidad es que las consecuencias de estos teoremas, aunque los mismos estén completamente formalizados matemáticamente hablando, poco tienen que ver con matemáticas y sí con la propia filosofía de la ciencia. Se podría decir, retrocediendo a Nietzsche, que estos teoremas supusieron la muerte de un Dios, uno que en realidad nunca llegó a existir, el de la formalización pura.

El mismo Poincaré, si se vuelve al Capítulo 1, se aprecia que ya supo ver esto al decir que las matemáticas, y cualquier ciencia, siempre iban a tener algo de naturaleza, o en este caso, algo de humanidad.

Una lectura interesante que se puede hacer es que la intención del Problema II de Hilbert era la de sentar una Base, en este caso en el sentido literal desde el punto de vista geométrico, del conocimiento matemático. Una serie de elementos finitos que aglutinaran en sí toda la información, que combinándolos, pudiéramos llegar a cualquier lado.

Lo que tenemos en realidad es un "espacio" cuya dimensión, volviendo a usar jerga geométrica, no es finito. Al igual que en los espacios de Banach "interesantes", la base sobre la que se sustenta la verdad de nuestra afirmaciones existe, pero esta base no es finita. Podemos usar axiomas y trabajar con ellos para apoyar nuestras afirmaciones, pero la noción completa de verdad, todos los elementos de la base, siempre será algo desconocido para nosotros mismos. Estaremos eternamente convenciendo a nuestros amigos, familiares, adversarios de porqué lo que creemos que es verdad lo es, pero en el fondo tenemos que asumir que habrá criterios de verdad, relacionados con nuestra educación, nuestra moral, nuestros miedos, que nunca vamos a poder comprimir en unas líneas. La verdad es verdad, pero tiene siempre un toque de misterio.

Capítulo 6

Conclusiones

Tras haber recorrido el trazo histórico que bordeó el trabajo de estos dos autores, tanto pasado como futuro, se antoja complicado ser capaz de generar una tesis concreta entorno a ella. La historia fue la que fue.

Aun así es cierto que se pueden dejar, al estilo de Hilbert, algunas preguntas más que respuestas en el aire que busquen profundizar en cuáles fueron verdaderamente los legados que nos dejaron, además de ciertas puertas a las que en la actualidad aún se puede llamar, a ver qué nos encontramos.

6.1. La obsesión objetivista en la ciencia

En esta cuestión creo sinceramente que la filosofía ha llegado mucho más lejos que nosotros. La discusión entre objetivismo y subjetivismo probablemente nunca se cierre, pero el materialismo dialéctico, por ejemplo, creo que ha sabido llevar la discusión a un nivel que, en mi humilde opinión, ser aceptado por la ciencia le haría mucho bien. No sólo se trata de argumentar que ambos aspectos el subjetivo y objetivo, se encuentran en nuestra realidad, sino que se retro-alimentan de forma que, bajo las palabras por ejemplo de Karl Marx, ”*Lo subjetivo existe objetivizado, en tanto que nuestra acción está mediada por el mundo que nos encontramos. Lo objetivo está subjetivizado, en tanto que lo que nos encontramos no es más que el resultado de la acción de quienes nos precedieron*”

Una de las más interesantes conversaciones que surgen cuando uno empieza a estudiar matemáticas es si éstas se descubren o se crean. Personalmente he pasado por todos los estados de la misma durante mi formación, y durante muchos años fui un firme defensor de que éstas se descubren, pero trabajos como este inevitablemente hacen que uno se replantee muchas cosas.

Al profundizar en matemáticas hay momentos donde el orden que se esconde detrás de cosas que a primera vista ”se nos presentan” sin que toquemos, ni cambiemos nada, genera una tremenda pulsión de que esto estaba ahí independientemente de que el ser humano nunca hubiese existido, pero es inevitable también el admitir que hemos sido criados por otros seres humanos que nos han enseñado el mundo, y que todas estas cosas que se nos presentan en algún momento han sido "descubiertas" por otro ser humano, luego el nivel de importancia que tiene en ello la estructuración concreta que tiene nuestra mente a la hora de concebir esos conceptos no se puede saber, ni mucho menos decir que sea 0. Todo lo que conocemos, desde el número π hasta el Gernika de Picasso, tiene algo de humano por mucho que a veces ciertos círculos científicos traten de "presentarlo" como algo ajeno a sus descubridores.

No tiene sentido presentar un cierre que deje a la ciencia como algo menos serio o más flexible en sus afirmaciones de lo que realmente es, sería en cierto punto no valorar el trabajo de tantos científicos, entre ellos los que aquí se mencionan.

La labor de millones de investigadores durante la historia de la humanidad por dejar saberes más importantes que ellos mismos es encomiable, y tambíén fundamental es que lo preservemos como patrimonio propio, sin dudar de sus hallazgos. Simplemente no hay nada de malo en sentir a la ciencia como algo humano, como algo que forma parte de quien la hace.

Con nuestras pasiones y nuestros errores seguiremos haciendo ciencia, aunque como demostraron estos autores, la ciencia perfecta, como nada en la vida, existe ni existirá.

Bibliografía

[1] Henri Poincaré. Ciencia e Hipótesis, Colección Austral, 2002.

[2] Roberto Torretti. El Paraiso de Cantor. 1998. .

[3] Editorial RBA. Hilbert, Las bases de la matemática. En el principio fue el axioma.

[4] Ernest Nagel y James R. Newman. El teorema de Gödel.

[5] Jesús Mosterín. Kurt Gödel. Obras Completas. Alianza Editorial. 1981.

[6] Claudio Gutierrez. Dpto. de Ciencias de la Computación. Universidad de Chile. El teorema de incompletitud de gödel (versión para no iniciados).

[7] G.J. Chaitin. Un Siglo de Controversia sobre los Fundamentos de la Matemática.

[8] Conway's Game of Life. `https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life`.

[9] Simulador del juego de la vida. `https://troytae.github.io/game-of-life/`.

[10] Teoría de la Información de Shannon. `https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_informaci%C3%B3n`.

[11] Rafael Lahoz-Beltra. Alan Turing. La computación. Pensando en máquinas que piensan. Editorial RBA. 2002.