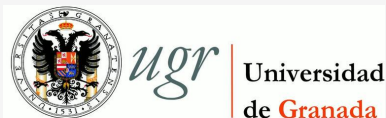


Repercusión de los desarrollos de Alan Turing y Kurt Gödel

Francisco Vázquez Escobar



7 de Septiembre, 2022

Índice

- Bases de la matemática formal
 - Bases del conocimiento científico
 - Salto a la formalidad
 - Hilbert vs Poincaré
- Resolución a los Problemas de Hilbert
 - Problemas de incompletitud y consistencia
 - Consecuencias de los TI.
 - Problema de la computabilidad
 - Máquina Universal de Turing
- Desarrollos posteriores
 - Teoría algorítmica de la Información.
 - Shannon y la teoría cibernética.
- Conclusiones

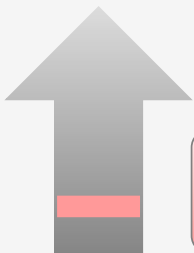
Contents

1 Las bases de la matemática formal

2 Problemas de Hilbert

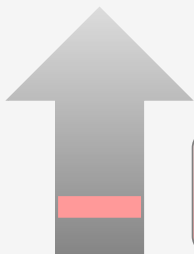
3 Desarrollos posteriores

Bases de la matemática formal



Observación

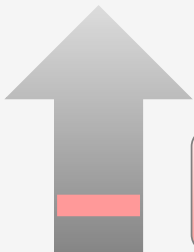
Bases de la matemática formal



Observación

- El conocimiento es un resultado obtenido directamente de la observación y el razonamiento inductivo.

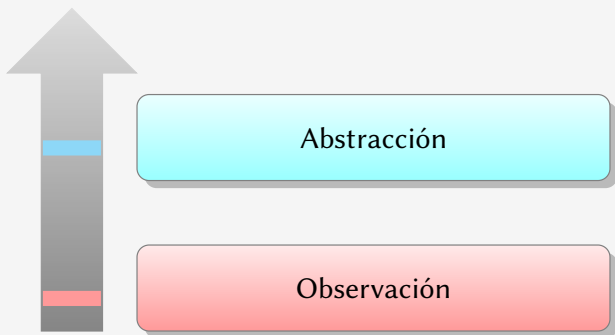
Bases de la matemática formal



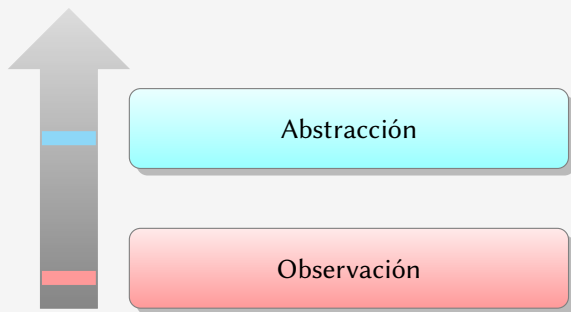
Observación

- El conocimiento es un resultado obtenido directamente de la observación y el razonamiento inductivo.
- No va más allá del apunte más o menos abreviado de las distintas observaciones.

Bases de la matemática formal

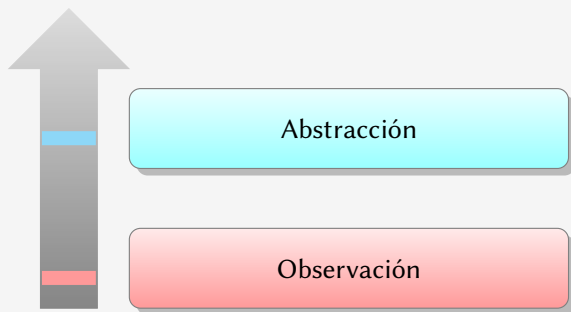


Bases de la matemática formal



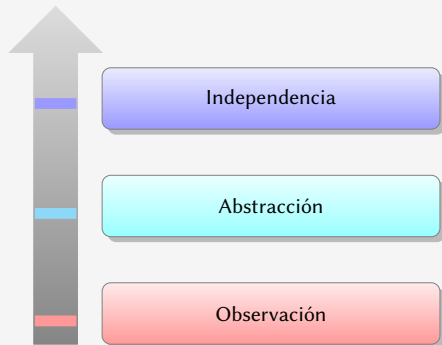
- Salto a método hipotético deductivo.

Bases de la matemática formal

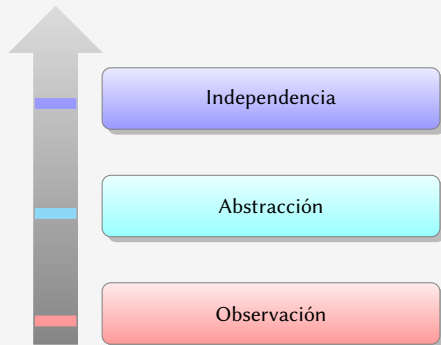


- Salto a método hipotético deductivo.
- Axiomática primaria. Ligada a lo natural.

Bases de la matemática formal

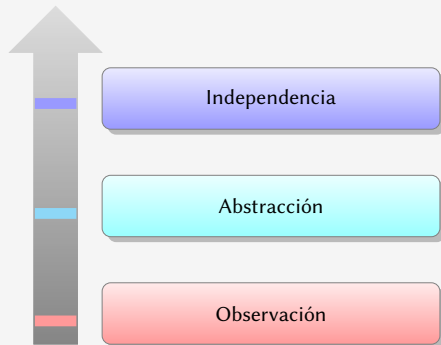


Bases de la matemática formal



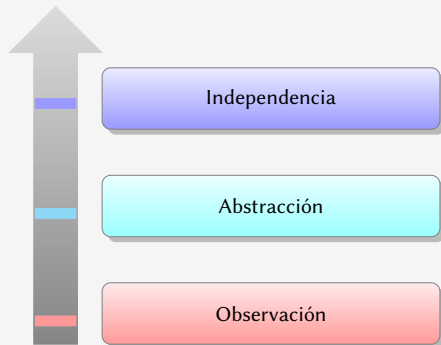
- Nuevos conceptos matemáticos

Bases de la matemática formal



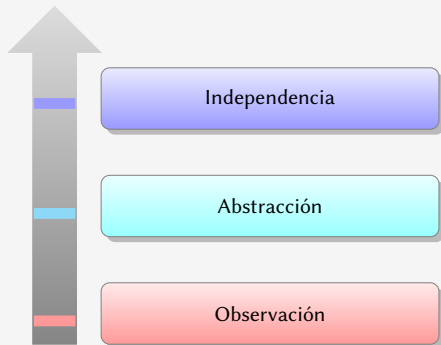
- Nuevos conceptos matemáticos
 - Transfinitos

Bases de la matemática formal



- Nuevos conceptos matemáticos
 - Transfinitos
 - Axioma de Selección

Bases de la matemática formal



- Nuevos conceptos matemáticos
 - Transfinitos
 - Axioma de Selección
- Ningún nexo que las ligue necesariamente con las ciencias naturales. Conexión únicamente con las leyes de la lógica.

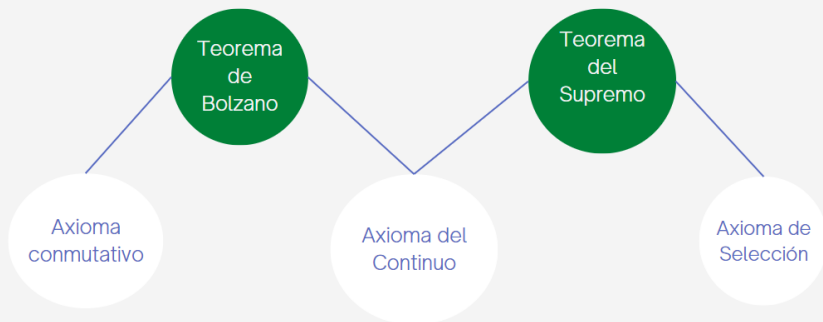
Bases de la matemática formal

Axioma
conmutativo

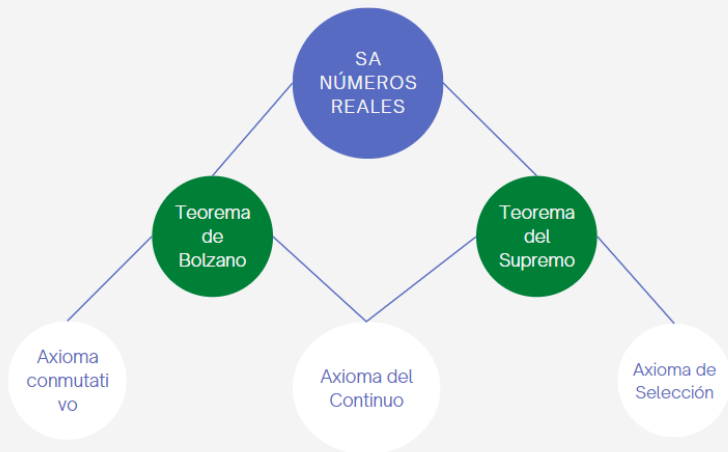
Axioma del
Continuo

Axioma de
Selección

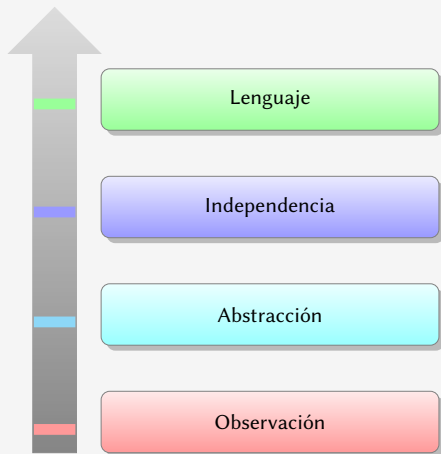
Bases de la matemática formal



Bases de la matemática formal



Bases de la matemática formal



- Matemática simbólica. Por tanto computable.
- Problema II de Hilbert.
 - Problema sobre la incompletitud de las matemáticas.
 - Problema sobre la computabilidad de las matemáticas.

Contents

1 Las bases de la matemática formal

2 Problemas de Hilbert

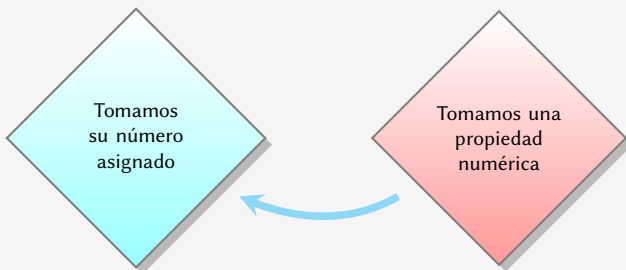
3 Desarrollos posteriores

Algunas paradojas



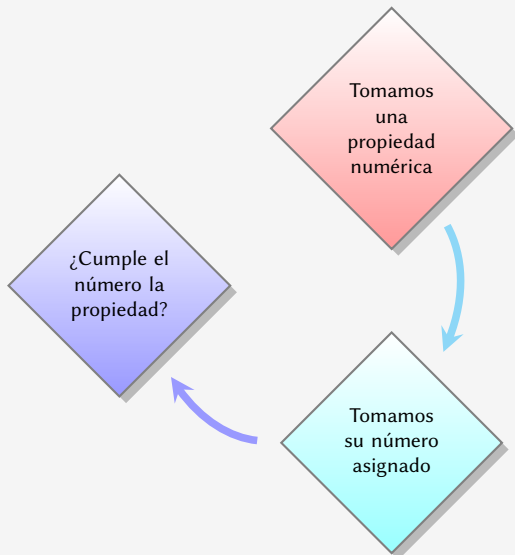
$P = \text{"ser primo"}$

Algunas paradojas



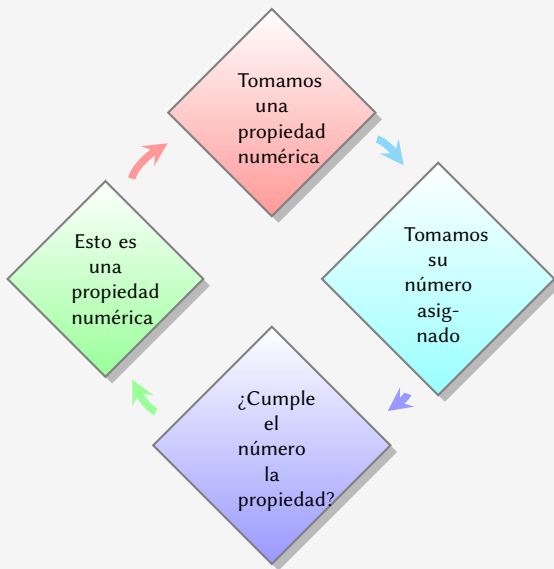
$$P = \text{"ser primo"} = 16 * 25^4 + 5 * 25^3 + \dots = 1789$$

Algunas paradojas



En este caso sí. 1789 es primo.

Algunas paradojas



Algunas paradojas

¿Dónde está entonces la paradoja?

Algunas paradojas

¿Dónde está entonces la paradoja?

- Pensar en repetir el proceso pero con la propiedad de ser Richardiano.

Algunas paradojas

¿Dónde está entonces la paradoja?

- Pensar en repetir el proceso pero con la propiedad de ser Richardiano.
- El número asociado es richardiano y no a la vez.

Retos a superar

- Separar las herramientas matemáticas, puestas ahora a prueba, de sus respectivas representaciones.

Retos a superar

- Separar las herramientas matemáticas, puestas ahora a prueba, de sus respectivas representaciones.
- Aritmetizar las estructuras lógicas tras cualquier sistema axiomático.

Retos a superar

- Separar las herramientas matemáticas, puestas ahora a prueba, de sus respectivas representaciones.
- Aritmetizar las estructuras lógicas tras cualquier sistema axiomático.
- Separar los conceptos de decibilidad y demostrabilidad.

Numeración de Gödel

Codificación de Gödel

Símbolos	Predicados	Variables	Proposiciones
1. \neg	13. P	14. n	15. E
2. \forall	16. Q	17. m	18. F
3. \Rightarrow	19. R	20. x	21. G
4. \vee	22. T	23. y

Número de Gödel

6. (

7.)

8. S

9. 1

10. =

11. .

12. +

$$\forall n \neg (Sn = 1)$$

$$2^2 3^{14} 5^{17} 6^{11} 8^{13} 13^{14} 17^{10} 19^9 23^7$$

Decodificación:

$$3280500000000 = 2^8 3^8 5^9$$

que corresponde a SS1 ó 3

Claves de la Demostración

- La asignación de sentencias formales a números naturales es inyectiva
 - Incluso sentencias semánticamente iguales o equivalentes pueden venir de distintos axiomas.
 - La sentencia "P es indecidible" tiene un número asignado, (que depende de P)
- En este punto se consigue separar veracidad de demostrabilidad.

Consecuencias de los TI de Gödel

- Ningún modelo matemático es completo.

Consecuencias de los TI de Gödel

- Ningún modelo matemático es completo.
- La consistencia no se puede probar a sí misma.

Consecuencias de los TI de Gödel

- Ningún modelo matemático es completo.
- La consistencia no se puede probar a sí misma
- Las matemáticas pueden no ser decidibles.

Problema de la Computabilidad.

- Ya que puedo pensar en funciones y definirlas, ¿Puedo calcularlas?

Problema de la Computabilidad.

- Ya que puedo pensar en funciones y definirlas, ¿Puedo calcularlas?
- Para mi conjunto X y mi función f , una máquina en la que entre una representación de $x \in X$ y me devuelva una representación de $f(x)$

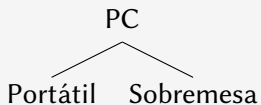
Motivación de Máquina de Turing

- Generalizar y teorizar el concepto de máquina de computación.

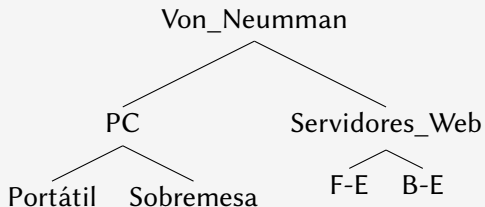
Motivación de Máquina de Turing

- Resolver el problema de la computabilidad de Hilbert.
- Generalizar y teorizar el concepto de máquina de computación.

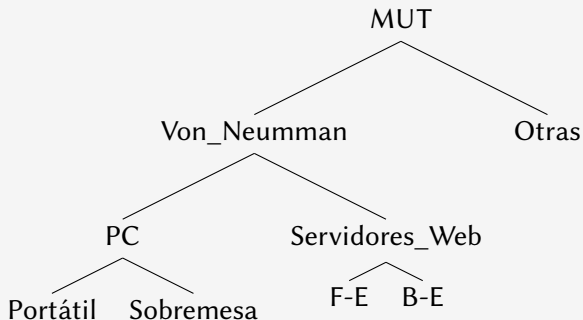
Idea de la Máquina de Turing



Idea de la Máquina de Turing



Idea de la Máquina de Turing



Contents

1 Las bases de la matemática formal

2 Problemas de Hilbert

3 Desarrollos posteriores

Teoría Algorítmica de la Información

- Las verdades matemáticas comprobables no siempre están sujetas a estructuras de orden más simplificables.

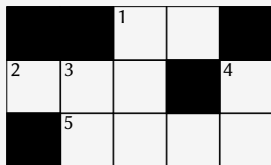
Teoría Algorítmica de la Información

- Las verdades matemáticas comprobables no siempre están sujetas a estructuras de orden más simplificables.
- Existen problemas del puro terreno matemático que son indecidibles.

Teoría Algorítmica de la Información

- Las verdades matemáticas comprobables no siempre están sujetas a estructuras de orden más simplificables.
- Existen problemas del puro terreno matemático que son indecidibles.
- La eficiencia es un límite siempre superior.

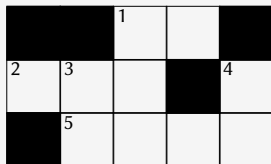
El Juego de la Vida de Conway



Normas:

- 1. Dos vecinos vivos exactos te hacen nacer o renacer.
- 2. Menos de 2 o más de 3 vecinos vivos te matan

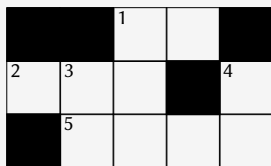
El Juego de la Vida de Conway



Normas:

- 1. Dos vecinos vivos exactos te hacen nacer o renacer.
- 2. Menos de 2 o más de 3 vecinos vivos te matan
- No se puede saber por adelantado el resultado del juego.

El Juego de la Vida de Conway



Normas:

- 1. Dos vecinos vivos exactos te hacen nacer o renacer.
- 2. Menos de 2 o más de 3 vecinos vivos te matan
- No se puede saber por adelantado el resultado del juego.
- El resultado del juego sólo se encuentra en su propio desarrollo.

Shannon y la teoría de la Información

- Entropía como sinónimo de desorden, de incertidumbre.
- La información es una fuerza de cohesión.
- Definición de potencia informativa.

Conclusiones

- Los TI son un hito en la epistemología matemática.

Conclusiones

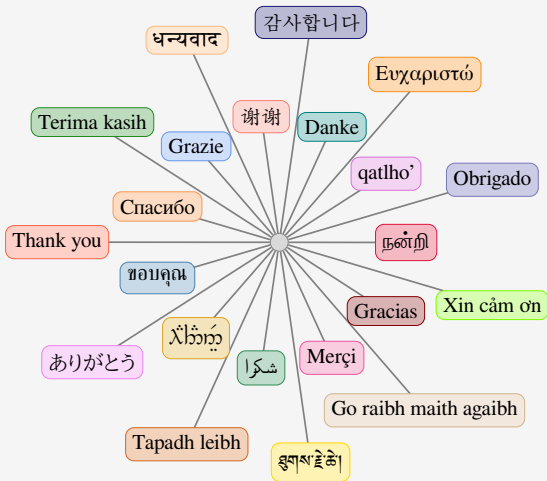
- Los TI son un hito en la epistemología matemática.
- El desarrollo de estos problemas supusieron el nacimiento de la computación.

Conclusiones

- Los TI son un hito en la epistemología matemática.
- El desarrollo de estos problemas supusieron el nacimiento de la computación.
- La objetivización pura no existe. Sólo puede existir considerando lo objetivo como abstracción que englobe a todas las distintas subjetividades.

Bibliografía

- Roberto Torretti. El paraíso de Cantor. 1998.
- Henri Poincaré. Ciencia e Hipótesis. Edición Austral. 2002
- Antonio Mosterín. Gödel. Obras Completas. Alianza Editorial. 1981
- G.J. Chaitin. Un Siglo de Controversia sobre los Fundamentos de la Matemática.



Preguntas?