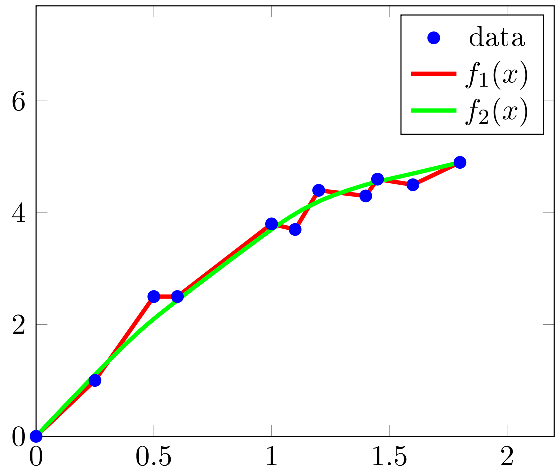
13. Среднеквадратичная аппроксимация (дискретный случай). Понятие веса

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

1 Постановка задачи



Маловероятно, что кривая $f_1(x)$, получившаяся в результате интерполирования по эксперементальных данным (точки на рисунке), имеет вид исходной зависимости. Скорее вид кривой $f_2(x)$ отвечает этой зависимости, а отклонение экспериментальных данных обусловлено сравнительно большой погрешностью измерений. В таком случае или, если аппроксимируемая функция задана на промежутке $[a, b]$ непрерывно, используют *среднеквадратичный критерий.*

Задача среднеквадратичной аппроксимации (или "метода наименьших квадратов"): так подобрать аппроксимирующую функцию $Q(x)$

- чтобы квадрат расстояния между $Q(x)$ и $f(x)$ был минимальным

$$\rho^2 = \| Q(x) - f(x) \|^2 = (Q(x) - f(x), Q(x) - f(x)) \to min$$

Линейное пространство со скалярным произведением

- $Q(x)$ выбирается в виде обобщенного многочлена:

$$Q_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x) \qquad (1)$$

φ_k - заданный набор линейно независимых функций,
коэффициенты a_k подлежат определению

2 Дискретный случай

Коэффициенты a_k выбираются из условия минимума ρ^2

$$\rho^2 = (Q(x) - f(x), Q(x) - f(x)) = \sum_{i=1}^{N} (Q_m(x_i) - f(x_i))^2 \to min. \qquad (2)$$

Три варианта соотношения чисел N и m:

1. $N = m + 1$. Число коэффициентов a_k равно числу точек таблицы, через которые проходит интерполяционный полином, являющийся *единственным решением*; $\rho^2_{min} = 0$.

2. $N < m + 1$. Задача имеет *бесконечное множество решений*, при этом $\rho^2_{min} = 0$.

3. $N > m + 1$. Задача имеет *единственное решение*, но $\rho^2_{min} \neq 0$. Это типичный случай среднеквадратичной аппроксимации, на практике $N \gg m + 1$.

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial a_k} = 0, \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Система из $m + 1$ уравнения с $m + 1$ неизвестными

Дифференцируем (2):

$$0 = \frac{\partial \rho^2}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^{N} (Q_m(x_i) - f(x_i)) \varphi_k(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N} Q_m(x_i) \varphi_k(x_i) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \varphi_k(x_i), \quad \text{при этом } Q_m(x_i) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i)$$

$$\Rightarrow a_0 \sum_{i=1}^{N} \varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^{N} \varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i) + \cdots +$$
$$+ a_m \sum_{i=1}^{N} \varphi_m(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\varphi_k(x_i)$$
$$k = 0, 1, \ldots, m.$$

Решаем систему уравнений и находим коэффициенты a_k.

3 Понятие веса

На практике возникает ситуация, когда различным экспериментальным точкам доверяют в разной степени, это можно учесть введением весовых коэффициентов

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{p_i}_{p_i > 0} \left(Q_m(x_i) - f(x_i) \right)^2 \to min. \tag{3}$$

Для тех точек, которым мы доверяем больше и к которым аппроксимирующую функцию хотим провести ближе, весовые коэффициенты нужно выбирать больше.
Обращаясь к практике, положительные весовые коэффициенты p_i часто задают так, чтобы их сумма была равна, например, 1 или 100. Важным является отношение p_i друг к другу.