

14. Среднеквадратичная аппроксимация
(непрерывный случай). Понятие
ортогональности

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

February 28, 2020

Продолжение вопроса "13. Среднеквадратичная аппроксимация..."

1 Непрерывный случай

Функция задана непрерывным образом на промежутке $[a, b]$. В среднеквадратичном критерии вместо суммы возникает определенный на промежутке интеграл

$$\rho^2 = \int_a^b p(x) \left(Q_m(x) - f(x) \right)^2 dx \rightarrow \min$$

$$x \in [a, b], p(x) - \text{весовая функция,} \\ Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x)$$

Необходимое условие экстремума: $\frac{\partial \rho^2}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 \int_a^b p(x) \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx + \dots + a_m \int_a^b p(x) \varphi_m(x) \varphi_k(x) dx = \\ = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

Решаем систему (1) и находим коэффициенты a_k .

2 Понятие ортогональности

Система резко упрощается, если функции $\varphi_k(x)$ ортогональные. Последовательность функций $\varphi_k(x)$ называется *ортогональной* на промежутке $[a, b]$ с весом $p(x)$, если

$$\left(\varphi_k(x), \varphi_i(x) \right) = \int_a^b p(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ A > 0, & i = k \end{cases} \quad (2)$$

Если $A = 1$, то функции называются *ортонормированными*. В этом случае все, кроме одного, интегралы в левой части (1) обращаются в 0, и для a_k получается готовое выражение:

$$a_k = \frac{\int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b p(x) \varphi_k^2(x) dx}$$

Если функции еще и *нормированные*, то знаменатель равен 1.