07. Выбор узлов интерполирования. Интерполяционный полином Ньютона для равно- и неравноотстоящих узлов.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

February 28, 2020

1 Выбор узлов интерполирования

Реально повлиять на величину погрешности можно только минимизируя величину $|\omega(x)|$, что делается выбором узлов интерполирования.

$$|\omega(x)| = |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)| \to \min$$

1.1 Случай 1

- Задана степень полинома m
- Есть таблица большой длины ($> (m+1)$)
- *Задана* точка x^*, в которой оценивается погрешность

Очевидно, что лучший выбор - узлы, ближайшие к x^*.

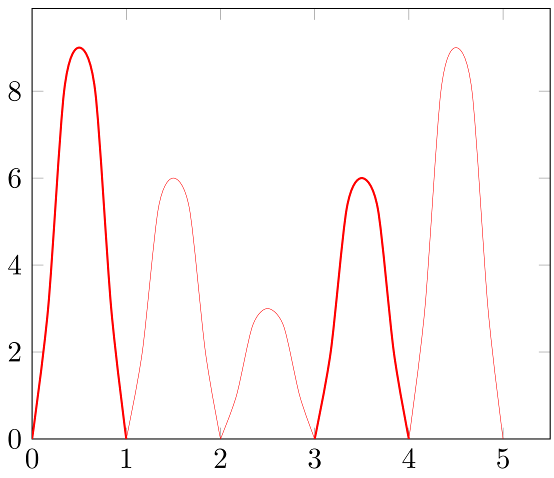
1.2 Случай 2

- Задан промежуток интерполирования $[a, b]$
- Задана степень полинома m
- Точка x^* заранее *неизвестна*

Требуется выбрать узлы так, чтобы в худшем случае погрешность была бы минимальной.

$$\max |\omega(x)| \to \min, \ x \in [a, b]$$

Интуитивно ясно, что узлы следует располагать симметрично относительно середины промежутка.
Рассмотрим случай равноотстоящих узлов:



Для уменьшения погрешности узлы интерполирования необходимо сместить ближе к краям промежутка, чтобы "колокольчики" стали примерно одинаковой высоты.
Оптимальный выбор узлов отвечает нулям ортогональных полиномов Чебышёва.

1.3 Как на практике оценивается погрешность

Непосредственно оценивают погрешность по формуле выше редко, т.к. трудно оценивать производную. В инженерной практике часто используется следующий пример:

1. Строим $Q_m(x)$
2. Добавляем x_{m+1}, ещё один узел
3. Строим $Q_{m+1}(x)$
4. Оцениваем погрешность по разности значений этих полиномов в нужной точке

Использовать для этих целей полином Лагранжа неэффективно. На практике хотелось бы построить интерполяционный полином так, чтобы полином степени m+1 получался добавлением к нему какого-то слагаемого степени m, как это происходило в построении степенного ряда Тейлора.

2 Полином Ньютона

Рассмотрим первую разделённую разность:

$$f(x;x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{Q_0} + \underbrace{(x-x_0)(f(x;x_0))}_{R_0} \tag{1}$$

Рассмотрим вторную разделенную разность:

$$f(x;x_0;x_1) = \frac{f(x;x_0)-f(x_0;x_1)}{x-x_1}$$

Выразим первую разделённую разность через вторую и подставим в формулу (1):

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{Q_0} + (x-x_0)f(x_0;x_1)}_{Q_1} + \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)f(x;x_0;x_1)}_{R_1}$$

Продолжая этот процесс, и выражая вторую разделённую разность через третью, третью через четвертую и т.д., получаем:

$$f(x) = Q_m(x) + \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)f(x;x_0;x_1;\dots;x_m)}_{R_m}$$

$$
\begin{aligned}
Q_m(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \\
+ \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{m-1})f(x_0; x_1; \dots; x_m)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Полином Ньютона для неравноотстоящих узлов

Если узлы интерполирования равноотстоящие, то в формуле (2) можно заменить разделённые разности на конечные. С этой целью выполним замену переменных:

$$
\begin{cases} x = x_0 + ht \\ x_k = x_0 + kh \end{cases} \quad \text{, в узлах } t \text{ - целое}
$$

$$
f(x_0; \dots; x_m) = \frac{\Delta^m f(x_0)}{m!\ h^m} \tag{3}
$$

$$
(x - x_k) = h(t - k)
$$

Знаем, что $x = x_0 + ht$
$x - x_1 = x - x_0 - h = th - h = h(t-1)$
Тогда $x - x_k = h(t - k)$
$\Rightarrow (x - x_0)(x - x_1) = t(t-1)h^2$

Тогда формула (2) при подставновке (3) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
Q_m(x_0 + ht) = f(x_0) + \frac{t}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \\
+ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-m+1)}{m!}\Delta^m f(x_0)
\end{aligned}
$$

Полином Ньютона для равноотстоящих узлов

Полиномы строятся последовательно в соответствии со следующей таблицей:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\underline{\Delta f(x)}$	$\underline{\underline{\Delta^2 f(x)}}$
x_1	$\underline{f(x_1)}$	$\underline{\underline{\Delta f(x_1)}}$	
x_2	$\underline{\underline{f(x_2)}}$		

Каждая новая степень полинома требует построения очередной диагонали в таблице.