

## 26. Методы Рунге-Кутты. Подпрограмма **RKF45**

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

Недостатком методов Адамса является то, что они не самостартующие, и их разностные уравнения имеют порядок выше первого. От этого недостатка свободны методы Рунге-Кутты.

## 1 Методы Рунге-Кутты

Разностные уравнения этих методов имеют первый порядок<sup>1</sup>, и степень точности повышается за счет увеличения объёма работы на каждом шаге.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (2)$$

Воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\begin{cases} x_{n+\frac{1}{2}}^* = x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)^{(*)} \\ x_{n+1} = x_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, x_{n+\frac{1}{2}}^*) \end{cases} \quad (3)$$

(\*) явный  
метод  
ломаных  
Эйлера

Модифицированный метод ломаных Эйлера или метод Гойна

Воспользуемся неявным методом трапеций:

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n + h f(t_n, x_n)^{(*)} \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^*)) \end{cases} \quad (4)$$

Метод Эйлера-Коши

Оба метода имеют вторую степень точности, но функцию в этих методах мы вычисляем не один, а два раза.

Эту идею можно обобщить в следующем виде:

$$\begin{cases} k_1 = h f(t_n, x_n) \\ k_2 = h f(t_n + \alpha h, x_n + \beta k_1) \\ x_{n+1} = x_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 \end{cases} \quad (5)$$

Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  выбираются так, чтобы получить наибольшую степень точности.

<sup>1</sup>Одношаговые методы, one-step methods

$$\begin{aligned}
F(u(h), v(h)) &= F(u(0), v(0)) \\
&+ \frac{h}{1!} \frac{dF}{dh}(u(0), v(0)) \\
&+ \frac{h^2}{2!} \frac{d^2F}{dh^2}(u(0), v(0)) \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

$$\frac{dF}{dh} = \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{du}{dh} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{dv}{dh}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{1!} x'(t_n) + \frac{h^2}{2!} x''(t_n) + \dots \\
&= x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{df(t, x)}{dt}(t_n) + \dots \\
&= x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2!} \left( \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_1 \times \underbrace{\frac{dt}{dt}}_f + \frac{\partial f}{\partial x} \times \underbrace{\frac{dx}{dt}}_f \right) \Big|_{t=t_n} + \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Раскладываем в ряд формулу (5) и сравниваем коэффициенты с формулой (6):

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + p_1 hf(t_n, x_n) + p_2 hf(t_n + \alpha h, x_n + \beta h f_n) = \\
&= x_n + p_1 hf(t_n, x_n) + p_2 h \left( f(t_n, x_n) + \frac{h}{1!} \frac{df}{dh}(t_n) + \dots \right) = \\
&= x_n + p_1 hf_n + p_2 h \left( f_n + h \left( \frac{\partial f}{\partial t} \alpha + \frac{\partial f}{\partial x} \beta f \right) \Big|_{t=t_n} + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_2 \alpha = \frac{1}{2} \\ p_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Для второй степени точности получаем 3 уравнения с 4 неизвестными  $\Rightarrow$  мы имеем бесконечное множество методов Рунге-Кутты второй степени точности.

Например:

$$p_1 = 0, p_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

Модифицированный метод ломаных Эйлера

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1$$

Метод Эйлера-Коши

Эта идея может быть продолжена для построения методов семейства Рунге-Кутты более высокой степени точности:

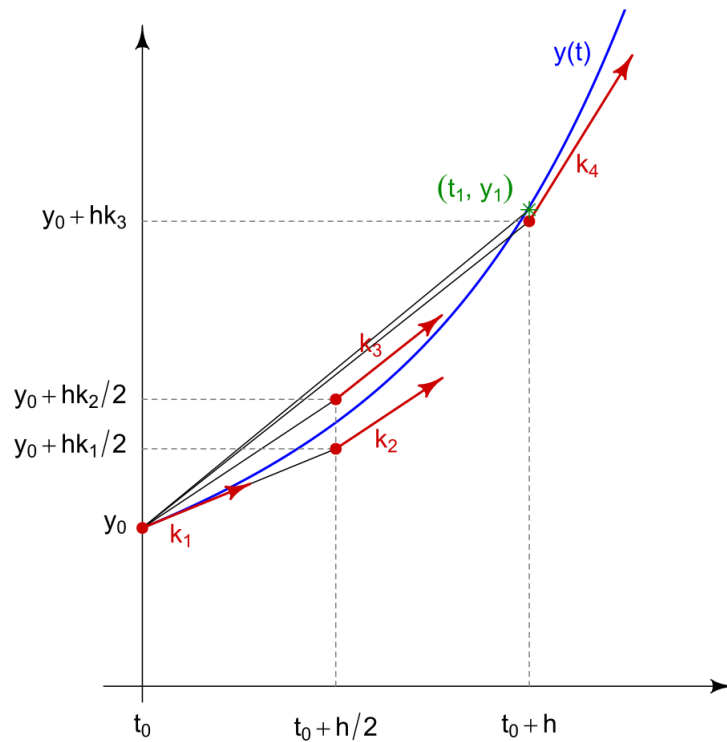
$$k_1 = hf(t_n, x_n), \dots, k_r = hf\left(t_n + \alpha_r h, x_n + \sum_{i=1}^{r-1} \beta_{ri} k_i\right), r = 1, 2, \dots, s,$$

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{r=1}^s p_r k_r$$

Наибольшую популярность получил метод Рунге-Кутты *четвертой степени* точности:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \quad (7)$$

Геометрическая интерпретация:



Именно параметров на изображении можно заменить в соответствии с используемыми в формулах нашего вида.

Рассмотрим частный случай:

$$f(t, x) = f(t), \quad k_2 = k_3$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(f(t_n) + 4f(t_n + \frac{h}{2}) + f(t_n + h))$$

Всё превратилось в квадратурную формулу Симпсона.

## 2 Программа RKF45

Программа построена на методах Рунге-Кутты четвертой и пятой степеней, при этом для получения решения по обоим методам используются одни и те же  $k_i$ .

$$x_{n+1}^{(IV)} = x_n + \sum_{i=1}^6 p_i k_i^{[2]}$$

$$x_{n+1}^{(V)} = x_n + \sum_{i=1}^6 p_i^* k_i$$

Программа реализует переменный шаг интегрирования. Локальная погрешность оценивается по разности двух решений:

$$x_{n+1}^{(V)} - x_{n+1}^{(IV)} = \sum_{i=1}^6 (p_i^* - p_i) k_i$$

Если погрешность оказалась больше требуемой величины, то шаг уменьшается, а если меньше, то следующий шаг увеличивается.<sup>3</sup>

$$\mathbf{RKF45}(\underbrace{N}_{\text{порядок системы}}, X, T, TOUT, \underbrace{EA, ER}_{\text{погрешности}}, \dots)$$

На входе в векторе  $X$  размещается решение в точке  $T$ . На выходе в этом же векторе размещается решение в точке  $TOUT$ . Если интегрирование прошло успешно, то  $T == TOUT$ .

$HPRINT$  - шаг визуализации решения/шаг печати

$TOUT = TOUT + HPRINT$

---

<sup>2</sup>здесь  $p_5$  и  $p_6 = 0$

<sup>3</sup>погрешность IV метода  $\sim h^5$ . Например, если погрешность в 29 раз больше требуемой, шаг уменьшается в 2 раза