14. Среднеквадратичная аппроксимация (непрерывный случай). Понятие ортогональности

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

Продолжение вопроса "13. Среднеквадратичная аппроксимация..."

1 Непрерывный случай

Функция задана непрерывным образом на промежутке $[a, b]$. В среднеквадратичном критерии вместо суммы возникает определенный на промежутке интеграл

$$\rho^2 = \int_a^b p(x)\Big(Q_m(x) - f(x)\Big)^2 dx \to min$$

$x \in [a, b]$, $p(x)$ – весовая функция,
$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k\varphi_k(x)$

Необходимое услвоие экстремума: $\frac{\partial\rho^2}{\partial a_k} = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.
Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0\int_a^b p(x)\varphi_0(x)\varphi_k(x)dx + \cdots + a_m\int_a^b p(x)\varphi_m(x)\varphi_k(x)dx = \\ = \int_a^b p(x)f(x)\varphi_k(x)dx \end{aligned} \quad (1)$$

Решаем систему (1) и находим коэффициенты a_k.

2 Понятие ортогональности

Система резко упрощается, если функции $\varphi_k(x)$ ортогональные. Последовательность функций $\varphi_k(x)$ называется *ортогональной* на промежутке $[a, b]$ с весом $p(x)$, если

$$\Big(\varphi_k(x), \varphi_i(x)\Big) = \int_a^b p(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ A > 0, & i = k \end{cases} \quad (2)$$

Если $A = 1$, то функции называются *ортонормированными.* В этом случае все, кроме одного, интегралы в левой части (1) обращаются в 0, и для a_k получается готовое выражение:

$$a_k = \frac{\int_a^b p(x)f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b p(x)\varphi_k^2(x)dx}$$

Если функции еще и *нормированные*, то знаменатель равен 1.