

06. Интерполяционный полином Лагранжа.
Остаточный член полинома Лагранжа.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

1 Интерполяционный полином Лагранжа

$$Q_m(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, m \quad (1)$$

Построить интерполяционный полином можно и в явном виде, не решая систему (1).

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m) \\ \omega_k(x) &= \frac{\omega(x)}{x - x_k} = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m) \end{aligned}$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k) \quad (2)$$

Уравнение (2) - интерполяционный полином (в форме) Лагранжа. По построению очевидно, что $Q_m(x)$ - полином степени m .

$$Q_m(x_i) = \frac{\omega_i(x_i)}{\omega_i(x_i)} f(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, m$$

$\omega_k(x_i) = 0$, если $k \neq i$

1.1 Алгоритм построения полинома Лагранжа

1. Числитель с пропущенной точкой.
2. Знаменатель - числитель, где вместо x подставляем пропущенную точку.
3. Значение функции в пропущенной точке.

Пример для полинома Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= f(x_0) \\ Q_1(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ Q_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \end{aligned}$$

2 Остаточный член интерполяционного полинома Лагранжа

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x) \quad (1)$$

$R_m(x)$ - остаточный член интерполяционного полинома или погрешность интерполяционного полинома.

$$\varphi(z) = f(z) - Q_m(z) - k\omega(z) \quad (2)$$

x_0, x_1, \dots, x_m
- узлы; k -
нек. пост.

Пусть $(.)x$ - точка в которой оценивается погрешность, не совпадающая с узлами интерполирования.

$$\varphi(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, m$$

Выберем k таким образом, чтобы $\varphi(z)$ в этой точке была равна 0.

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow k = \frac{f(x) - Q_m(x)}{\omega(x)} \quad (3)$$

Таким образом, $\varphi(z)$ имеет по меньшей мере $m+2$ нуля: x_0, x_1, \dots, x_m, x .

Теорема Ролля. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет первую производную в каждой точке внутри этого отрезка, и значения функции на концах этого промежутка равны, т.е. $f(a) = f(b)$, то внутри отрезка найдется, по крайней мере, одна такая точка $x = c$, что $f'(c) = 0$.

Тогда по теореме Ролля:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &\rightarrow m+1 \text{ нуль} \\ \varphi''(z) &\rightarrow m \\ &\dots \\ \varphi^{(m+1)}(z) &\rightarrow 1 \Rightarrow \varphi^{(m+1)}(\eta) = 0 \end{aligned}$$

Произв. \rightarrow
мин. кол-во
нулей

Точку, где
($m+1$)-я
произв. 0,
об. за η .

Продифференцируем $\varphi(z)$ $m+1$ раз и подставим η :

$$0 = \varphi^{(m+1)}(\eta) = f^{(m+1)}(\eta) - 0 - k * (m+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}$$

Подставляем выражение для k в (3):

$$f(x) = Q_m(x) + \boxed{\frac{\omega(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\eta)}$$

Выделенная часть и является погрешностью интерполяционного полинома.

Точка η зависит от:

- вида функции f ,
- выбора узлов интерполирования,
- точки, в которой оценивается погрешность.