03. Разностное уравнение, его порядок. Линейные разностные уравнения первого порядка и порядка выше первого.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

February 28, 2020

1 Разностное уравнение. Его порядок

Первоначально остановимся на дифференциальном уравнении. Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое связывает исходную функцию и ее проиводную.

$$y^s(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{s-1}(t)) \tag{1}$$

Разрешенное относительно старших производных

- **Порядок дифференциального уравнения** определяется порядком старшей производной
- Порядок уравнения определяет *количество начальных условий*, необходимых для однозначного решения задачи, а если уравнеие является линейным относительно функции $y(t)$ и ее производных, то - *количество линейно независимых решений.*

По аналогии можно было бы ввести понятие **порядка разностного уравнения**

$$2\Delta^3 x_n + 3\Delta^2 x_n - x_n = 0 \tag{2}$$

Логично ожидать, что уравнение 2 имеет 3-й порядок, *однако*

Из вывода конечных разностей высшего порядка

$$2(x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n) + 3(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - x_n = 0$$
$$2x_{n+3} - 3x_{n+2} = 0 \Rightarrow x_{n+3} = 1.5x_{n+2}$$

Порядок этого уравнения: $n + 3 - (n + 2) = 1$

> Для определения порядка разностных уравнений необходио выразить все конечные разности через значения функций и привести подобные. Тогда разность между наибольшим и наименьшим значением аргумента определяет порядок разностного уравнения.

$$F(k, f(k), f(k+1), ..., f(k+s)) = 0$$
$$f(k+s) = F(k, f(k), ..., f(k+s-1))$$

Второе уравнение в виде, разреш. отн. фу-ии с наибольшим знач. арг.

Порядок обоих уравнений $s = (k+s)-k$, таким образом для их однозначного решения необходимо задать s начальных условий $f(0), f(1), ...f(s-1)$

1.1 Пошаговый метод решения разностного уравнения

Рассмотрим общий вид разностного уравнения, разрешенного относительно функции с наибольшим аргументом

$$x_{n+s} = F(n, x_{n+s-1}, x_{n+s-2}, ..., x_n) \tag{3}$$

Это уравнение порядка $s \Rightarrow$ необходимо задать
s начальных условий $x_0, x_1, ..., x_{s-1}$

Полагаем в уравнении 3 $n = 0, 1, 2, ...$

$$x_{0+s} = F(0, x_{s-1}, x_{s-2}, ..., x_0)$$
$$x_{s+1} = F(1, x_s, x_{s-1}, ..., x_1)$$
$$x_{s+2} = ...$$

Пошаговый метод совместно с начальными условиями всегда дает решение и обеспечивает существование и единственность решения начальной задачи для разностного уравнения.

В некоторых случаях возможно получить выражение $x(n)$ в явном виде, *не используя пошаговый метод.*

2 Линейное разностное ур-ие 1-го порядка

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \varphi(n) \tag{1}$$

α - const,
$\varphi(n)$ - ф-ия,
x_0 - нач.усл

Применим пошаговый метод:

$$x_1 = \alpha x_0 + \varphi_0$$
$$x_2 = \alpha x_1 + \varphi_1 = \alpha^2 x_0 + \alpha\varphi_0 + \varphi_1$$
$$x_3 = \alpha x_2 + \varphi_2 = \alpha^3 x_0 + \alpha^2\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \varphi_2$$
$$...$$

По индукции можно показать, что

$$x_n = \alpha^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \varphi_{n-1-k} \tag{2}$$

точное решение уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(n) = \beta$ - *const*

$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$
См. "02. Сумм. по частям"

$$x_n = \alpha^n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k\right)\beta = \alpha^n x_0 + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\beta \tag{3}$$

3 Линейное разностное ур-ие порядка *выше 1-го*

$$\alpha_0 x_{n+s} + \alpha_1 x_{n+s-1} + ... + \alpha_s x_n = \varphi(n) \tag{1}$$

$x_0, x_1, ..., x_{s-1}$ - s начальных условий

Линейное *неоднородное* уравнение порядка s с постоянными коэффициентами.

> Уравнение (1) называется *однородным*, если правая часть тождественно равна 0 и *неоднородным* в противном случае.

3.1 Решение

Решение уравнения 1 начинаем с решения *однородного* уравнения

$$\alpha_0 x_{n+s} + \alpha_1 x_{n+s-1} + ... + \alpha_s x_n = 0 \tag{2}$$

Будем искать **решение в виде**:

$$\boxed{x_n = C\gamma^n} \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и сократим на $C\gamma^n$

$$\boxed{\alpha_0 \gamma^s + \alpha_1 \gamma^{s-1} + ... + \alpha_s = 0} \tag{4}$$

Характеристическое уравнение для уравнений (1) и (2), а его корни $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$- характеристические корни.

Первоначально положим, что все корни уравнения (4) различны $\boxed{i}$.

Пусть x_n^*, x_n^{**} - 2 любых решения уравнения (2). Тогда любая их линенйная комбинация $(D_1 x_n^* + D_2 x_n^{**})$ также является решением уравнения (2). В этом <u>можно убедиться</u>, подставив эту линейную комбинацию в уравнение (2) и сгруппировав однородные слогаемые:

$$\alpha_0 x_{n+s}^* + \alpha_1 x_{n+s-1}^* + ... + \alpha_s x_n^* = 0$$
$$\alpha_0 x_{n+s}^{**} + \alpha_1 x_{n+s-1}^{**} + ... + \alpha_s x_n^{**} = 0$$

Тогда

$$\alpha_0(D_1 x_{n+s}^* + D_2 x_{n+s}^{**}) + \alpha_1(D_1 x_{n+s-1}^* + D_2 x_{n+s}^{**-1}) + ... + \alpha_s(D_1 x_n^* + D_2 x_n^{**}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$D_1(\alpha_0 x_{n+s}^* + \alpha_1 x_{n+s-1}^* + ... + \alpha_s x_n^*) + D_2(\alpha_0 x_{n+s}^{**} + \alpha_1 x_{n+s-1}^{**} + ... + \alpha_s x_n^{**}) \stackrel{?}{=} 0$$

Выражения в скобках равны 0 по условию, поэтому $D_1 \times 0 + D_2 \times 0 = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow (D_1 x_n^* + D_2 x_n^{**})$ является решением уравнения (2).

Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$x_n = \sum_{k=1}^{s} C_k \gamma_k^n \tag{5}$$

Решение однородного уравнения

Перейдем к неоднородному уравнению.

Пусть $\widetilde{x_n}$ - любое частное решение уравнения (1) (необязательно совпадающее с начальными условиями).
Тогда *общее решние неоднородного уравнения* имеет вид:

$$\boxed{x_n = \widetilde{x_n} + \sum_{k=1}^{s} C_k \gamma_k^n} \tag{6}$$

Далее для нахождения C_k запишем формулу (6) для $n = 0, 1, ..., s-1$, используя начальные условия, получив линейную систему из s уравнений относительно s неизвестных коэффициентов C_k.

- Если же в правой части исходного уравнения стоит линейная комбинация полиномов, экспонент, синусов и косинусов, то $\widetilde{x_n}$ подбирается в том же виде.
- В общем случае для поиска $\widetilde{x_n}$ используется :
  метод Лагранжа в вариации произвольных коэффициентов.

$\boxed{i}$ Если в уравнении (4) есть кратные корни, например, $\gamma_1 \to r$ (встречается r раз). Тогда в формулах (5) и (6) этому корню отвечает следующая комбинация линейно независимых решений:

$$\gamma_1^n = P_{r-1}(n)$$
P_{r-1} - произвольный полином в степени $r-1$