

03. Разностное уравнение, его порядок.
Линейные разностные уравнения первого
порядка и порядка выше первого.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

1 Разностное уравнение. Его порядок

Первоначально остановимся на дифференциальном уравнении. Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое связывает исходную функцию и ее производную.

$$y^s(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{s-1}(t)) \quad (1)$$

Разрешенное относительно старших производных

- **Порядок дифференциального уравнения** определяется порядком старшей производной
- Порядок уравнения определяет *количество начальных условий*, необходимых для однозначного решения задачи, а если уравнение является линейным относительно функции $y(t)$ и ее производных, то - *количество линейно независимых решений*.

По аналогии можно было бы ввести понятие **порядка разностного уравнения**

$$2\Delta^3 x_n + 3\Delta^2 x_n - x_n = 0 \quad (2)$$

Логично ожидать, что уравнение 2 имеет 3-й порядок, *однако*

$$\begin{aligned} 2(x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n) + 3(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - x_n &= 0 \\ 2x_{n+3} - 3x_{n+2} &= 0 \Rightarrow x_{n+3} = 1.5x_{n+2} \end{aligned}$$

Из вывода конечных разностей высшего порядка

Порядок этого уравнения: $n + 3 - (n + 2) = 1$

Для определения порядка разностных уравнений необходимо выразить все конечные разности через значения функций и привести подобные. Тогда разность между наибольшим и наименьшим значением аргумента определяет порядок разностного уравнения.

$$\begin{aligned} F(k, f(k), f(k+1), \dots, f(k+s)) &= 0 \\ f(k+s) &= F(k, f(k), \dots, f(k+s-1)) \end{aligned}$$

Второе уравнение в виде, разреш. отн. фу-ии с наибольшим знач. арг.

Порядок обоих уравнений $s = (k+s) - k$, таким образом для их однозначного решения необходимо задать s начальных условий $f(0), f(1), \dots, f(s-1)$

1.1 Пошаговый метод решения разностного уравнения

Рассмотрим общий вид разностного уравнения, разрешенного относительно функции с наибольшим аргументом

$$x_{n+s} = F(n, x_{n+s-1}, x_{n+s-2}, \dots, x_n) \quad (3)$$

Это уравнение порядка $s \Rightarrow$ необходимо задать s начальных условий x_0, x_1, \dots, x_{s-1}

Полагаем в уравнении $\exists n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_{0+s} &= F(0, x_{s-1}, x_{s-2}, \dots, x_0) \\ x_{s+1} &= F(1, x_s, x_{s-1}, \dots, x_1) \\ x_{s+2} &= \dots \end{aligned}$$

Пошаговый метод совместно с начальными условиями всегда дает решение и обеспечивает существование и единственность решения начальной задачи для разностного уравнения.

В некоторых случаях возможно получить выражение $x(n)$ в явном виде, *не используя пошаговый метод*.

2 Линейное разностное ур-ие 1-го порядка

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \varphi(n) \quad (1)$$

α - const,
 $\varphi(n)$ - ф-ия,
 x_0 - нач. усл

Применим пошаговый метод:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x_0 + \varphi_0 \\ x_2 &= \alpha x_1 + \varphi_1 = \alpha^2 x_0 + \alpha \varphi_0 + \varphi_1 \\ x_3 &= \alpha x_2 + \varphi_2 = \alpha^3 x_0 + \alpha^2 \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \varphi_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

По индукции можно показать, что

$$x_n = \alpha^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \varphi_{n-1-k} \quad (2)$$

точное решение уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(n) = \beta$ - const

$$x_n = \alpha^n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \right) \beta = \alpha^n x_0 + \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \beta$$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

См.
"02. Сумм.
по частям"

3 Линейное разностное ур-ие порядка *выше 1-го*

$$\alpha_0 x_{n+s} + \alpha_1 x_{n+s-1} + \dots + \alpha_s x_n = \varphi(n) \quad (1)$$

x_0, x_1, \dots, x_{s-1} - s начальных условий

Линейное *неоднородное* уравнение порядка s с постоянными коэффициентами.

Уравнение (1) называется *однородным*, если правая часть тождественно равна 0 и *неоднородным* в противном случае.

3.1 Решение

Решение уравнения 1 начинаем с решения *однородного* уравнения

$$\alpha_0 x_{n+s} + \alpha_1 x_{n+s-1} + \dots + \alpha_s x_n = 0 \quad (2)$$

Будем искать **решение в виде**:

$$\boxed{x_n = C\gamma^n} \quad (3)$$

Подставим (3) в (2) и сократим на $C\gamma^n$

$$\boxed{\alpha_0 \gamma^s + \alpha_1 \gamma^{s-1} + \dots + \alpha_s = 0} \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для уравнений (1) и (2), а его корни $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ - характеристические корни.

Первоначально положим, что все корни уравнения (4) различны \boxed{i} .

Пусть x_n^*, x_n^{**} - 2 любых решения уравнения (2). Тогда любая их линейная комбинация $(D_1 x_n^* + D_2 x_n^{**})$ также является решением уравнения (2). В этом можно убедиться, подставив эту линейную комбинацию в уравнение (2) и сгруппировав однородные слагаемые:

$$\begin{aligned} \alpha_0 x_{n+s}^* + \alpha_1 x_{n+s-1}^* + \dots + \alpha_s x_n^* &= 0 \\ \alpha_0 x_{n+s}^{**} + \alpha_1 x_{n+s-1}^{**} + \dots + \alpha_s x_n^{**} &= 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_0 (D_1 x_{n+s}^* + D_2 x_{n+s}^{**}) + \alpha_1 (D_1 x_{n+s-1}^* + D_2 x_{n+s-1}^{**}) + \dots + \alpha_s (D_1 x_n^* + D_2 x_n^{**}) &\stackrel{?}{=} 0 \\ D_1 (\alpha_0 x_{n+s}^* + \alpha_1 x_{n+s-1}^* + \dots + \alpha_s x_n^*) + D_2 (\alpha_0 x_{n+s}^{**} + \alpha_1 x_{n+s-1}^{**} + \dots + \alpha_s x_n^{**}) &\stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

Выражения в скобках равны 0 по условию, поэтому $D_1 \times 0 + D_2 \times 0 = 0 + 0 = 0$

$$\Rightarrow (D_1 x_n^* + D_2 x_n^{**}) \text{ является решением уравнения (2).}$$

Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$x_n = \sum_{k=1}^s C_k \gamma_k^n \quad (5)$$

Решение однородного уравнения

Перейдем к неоднородному уравнению.

Пусть \widetilde{x}_n - любое частное решение уравнения (1) (необязательно совпадающее с начальными условиями).

Тогда *общее решение неоднородного уравнения* имеет вид:

$$x_n = \widetilde{x}_n + \sum_{k=1}^s C_k \gamma_k^n \quad (6)$$

Далее для нахождения C_k запишем формулу (6) для $n = 0, 1, \dots, s-1$, используя начальные условия, получив линейную систему из s уравнений относительно s неизвестных коэффициентов C_k .

- Если же в правой части исходного уравнения стоит линейная комбинация полиномов, экспонент, синусов и косинусов, то \widetilde{x}_n подбирается в том же виде.
- В общем случае для поиска \widetilde{x}_n используется :
метод Лагранжа в вариации произвольных коэффициентов.

[i] Если в уравнении (4) есть кратные корни, например, $\gamma_1 \rightarrow r$ (встречается r раз). Тогда в формулах (5) и (6) этому корню отвечает следующая комбинация линейно независимых решений:

$$\gamma_1^n = P_{r-1}(n)$$

P_{r-1} - произвольный полином в степени $r-1$