21. Метод последовательных приближений для решения линейных систем

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

Методы последовательных приближений (*итерационные* методы) дают возможность для системы $Ax = b$ строить последовательность векторов $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, пределом которой должно быть точное решение x^*:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$$Ax = b, \quad det(A) \neq 0. \tag{1}$$

Эквивалентными преобразованиями система (1) сводится к виду

$$x = Cx + d. \tag{2}$$

Точное решение системы (2) имеет вид:

$$x^* = (E - C)^{-1} d, \tag{3}$$

$$x^* = x_n + \varepsilon_n.$$

Вместо системы (2) будем решать систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = Cx_n + d \tag{4}$$

пошаговым методом, при $x_n \to x^*(n \to \infty)$.

Система (4) имеет вид системы линейных разностных уравнений (вопрос "18. Решение систем..."), поэтому ее решение записывается в виде

$$x_n = C^n x_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} d. \tag{5}$$

Из (3) вычитаем (5)

$$\begin{aligned} x^* - x_n = \varepsilon_n &= -C^n x_0 + C^n \underbrace{(E - C)^{-1} d}_{x^*} \\ &= C^n (x^* - x_0) = C^n \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Для обеспечения условия сходиомости для точного решения ($\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$) необходимо, чтобы элементы матрицы C^n при $n \to \infty$ стремились бы к 0. Для этого необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы C^n были по модулю меньше единицы.
Если все собственные значения матрицы различны, то по *теореме 7*:

$$C^n = \sum_{k=1}^{N} T_k \lambda_k^n,$$

Условие сходиомости:

$$|\lambda_k| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{6}$$

Из *следствия 2* к *теореме 5*

$$|\lambda_k| \leq \parallel C \parallel,$$

поэтому на практике вместо необходимого и достаточного условия (6) используют достаточное условие

$$\parallel C \parallel < 1. \tag{7}$$

Процесс сходится тем быстрее, чем меньше λ_k. Выбор x_0 не влияет на факт сходимости, но его удачный выбор сокращает количество итераций.

> Искусство пользователя заключается в том, чтобы перейти от системы (1) к системе (2) так, чтобы выполнялись условия (6) и (7).

Универсального алгоритма малой трудоемкости нет, поэтому используют различные приемы для конкретного вида матриц.

Пример.

$$Ax = b, \tag{1}$$

Пусть диагональные элементы матрицы A по модулю значительно превышают остальные элементы соответствующих строк.
Разделим каждое уравнение на диагональные элементы

$$A^* x = b^*, \tag{1*}$$
$$x = \underbrace{(E - A^*)}_{C} x + b^*.$$

$\parallel C \parallel \ll 1$, потому что на главной диагонали матрицы A^* стоят единицы, а у матрицы $(E - A^*)$ расположены нули. Вне главной диагонали у обеих матриц находятся малые по модулю элементы, что вместе и обеспечивает условия (6) и (7).