29. Метод стрельбы для решения краевых задач. Сведение дифференциального уравнения выского порядка к системе уравенний первого порядка

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

1 Методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \in [a, b].$$

В *задаче Коши* все начальные условия задаются в точке a. В общем случае они могут задаваться в любой точке на промежутке $[a, b]$, чаще всего их задают на концах (краях) промежутка - такие задачи называются *краевые*.

Методы решения краевых задач делится на две группы, когда исходная задача сводится к

- многократному решению зачачи Коши;
- решению систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений.

Типичным представителем первой группы является *метод стрельбы*.

1.1 Метод стрельбы (пристрелки)

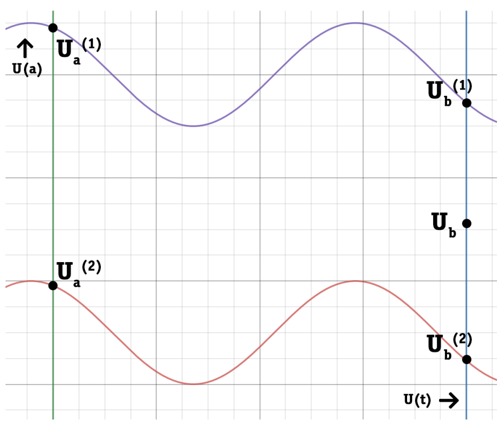
Проиллюстрируем на примере уравнения 2-го порядка:

$$x = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \qquad \frac{dU}{dt} = f_1(t, U, V), \qquad \frac{dV}{dt} = f_2(t, U, V), \qquad t \in [a, b],$$

с граничными условиями

$$\underbrace{U(a) = U_a, V(a) = V_a}, \qquad \underbrace{U(b) = U_b, V(b) = V_b}.$$

Выразим через U_a из левого краевого условия правое условие. Затем методом подбора находим такие значения $U_a^{(1)}$ и $U_a^{(2)}$, что $U_b^{(1)} > U_b$, $U_b^{(2)} < U_b$, и реализуем метод бисекции, секущих и т.д. для решения нелинейного уравнения.



$$F(U_a) = \underbrace{U(b)}_{compute} - U_b = 0$$

$U(b)$ получается решением системы уравнений при помощи `RKF45`, для этих целей еще можно использовать `ZEROIN`. Тогда последовательность вызова процедур следующая:

$$\begin{array}{c} \texttt{MAIN} \\ | \\ \texttt{ZEROIN} \\ | \\ F(U_a) \\ | \\ \texttt{RKF45} \\ | \\ f_1(t, U, V),\ f_2(t, U, V) \end{array}$$

1.1.1 Линейный случай

Если исходная система является линейной, то решение линейно зависит от краевых начальных условий (функция $F(U_a)$ является линейной).

Строим интерполяционный полином первой степени:

$$F(U_a) = \frac{U_a - U_a^{(2)}}{U_a^{(1)} - U_a^{(2)}} F(U_a^{(1)}) + \frac{U_a - U_a^{(1)}}{U_a^{(2)} - U_a^{(1)}} F(U_a^{(2)}) = 0,$$

нужное значение U_a получаем как корень этого полинома.

2 Сведение дифференциального уравнения высокого порядка к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^N y}{dt^N} = F\left(t, \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}}, \frac{d^{N-2} y}{dt^{N-2}}, \cdots, \frac{dy}{dt}, y\right)$$

Выполним замену переменных, введя вектор$z = \begin{pmatrix} z^{(1)}, \\ z^{(2)}, \\ \dots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}$

Компоненты вектора выглядят следующим образом:

$$z^{(1)} = \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}},$$
$$z^{(2)} = \frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}},$$
$$\dots$$
$$z^{(N-1)} = \frac{dy}{dt},$$
$$z^{(N)} = y.$$

Решаем систему ДУ при помощи `RKF45`

$$\begin{cases} \frac{dz^{(1)}}{dt} = F(t, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(N)}), \\ \frac{dz^{(2)}}{dt} = z^{(1)}, \\ \frac{dz^{(3)}}{dt} = z^{(2)}, \\ \dots \\ \frac{dz^{(N)}}{dt} = z^{(N-1)}. \end{cases}$$