24. Задача Коши решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Явный и неявный методы ломаных Эйлера, метод трапеций

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

February 28, 2020

Интегрируемых в явном виде дифференциальных уравнений чрезвычайно мало. Поэтому столь важны численные методы.

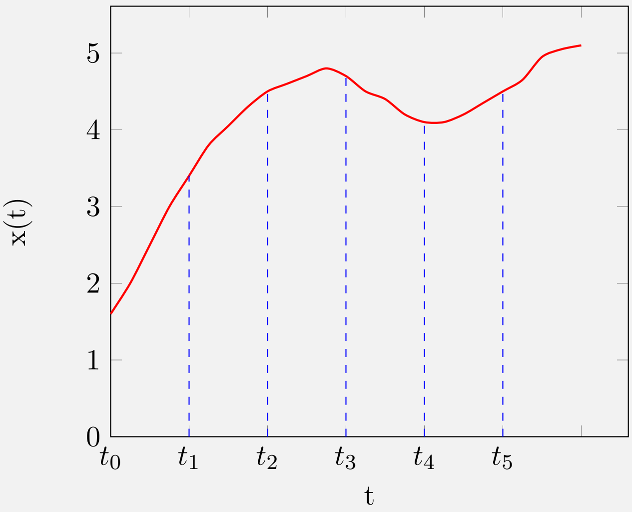
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

t – независимая переменная, x – вектор искомых функций,

$x(t_0) = x_0$ – начальная точка Задачи Коши.

Первоначально рассмотрим одно уравнение, хотя все полученные методы сохраняют свой внешний вид и для случая, когда x - вектор. Численное решение характеризируется *устойчивостью* (характер изменения решения при внесении в него изменений) и *точностью* (отличие приближенного решения от точного).

Задача Коши или задача с начальными условиями:



Исходное дифференциальное уравнение сводится к некоторому разностному, которое потом решается пошаговым методом.

$$t_n = t_0 + n \times h^{[a]}$$

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} x(n), \quad f_n \stackrel{\text{def}}{=} f(t_n, x_n)$$

[a] шаг интегрирования или шаг дискретности

Проинтегрируем уравнение (1) на промежутке $[t_n, t_{n+1}]$:

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \tag{2}$$

Различные методы отличаются друг от друга способом вычисления интеграла в формуле (2). Применяем формулу *левых прямоугольников*:

$$\int_a^b G(x)\,dx \approx (b-a)G(a)$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)}$$

Явный метод ломаных Эйлера

Применяем формулу *правых прямоугольников*:

$$\int_a^b G(x)\,dx \approx (b-a)G(b)$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})}$$

Неявный метод ломаных Эйлера

Применяем формулу *трапеций*:

$$\int_a^b G(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(G(a)+G(b))$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}))}$$

Неявный метод трапеций

В неявных методах на каждом шаге приходится решать нелинейное уравнение относительно x_{n+1}. Дальнейшее же использование квадратичных формул непосредственно затруднено, т.к. они трубуют знания $x(t)$ внутри промежутка t_n, t_{n+1}.