

09. Квадратурные формулы левых, правых, и
средних прямоугольников, трапеций, Симпсона.
Малые и составные формулы, их остаточные
члены.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

1 Квадратурные формулы

Так называются формулы для вычисления определённых интегралов.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

дан интеграл, точное значение которого получить крайне сложно,

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b Q_m(x) dx$$

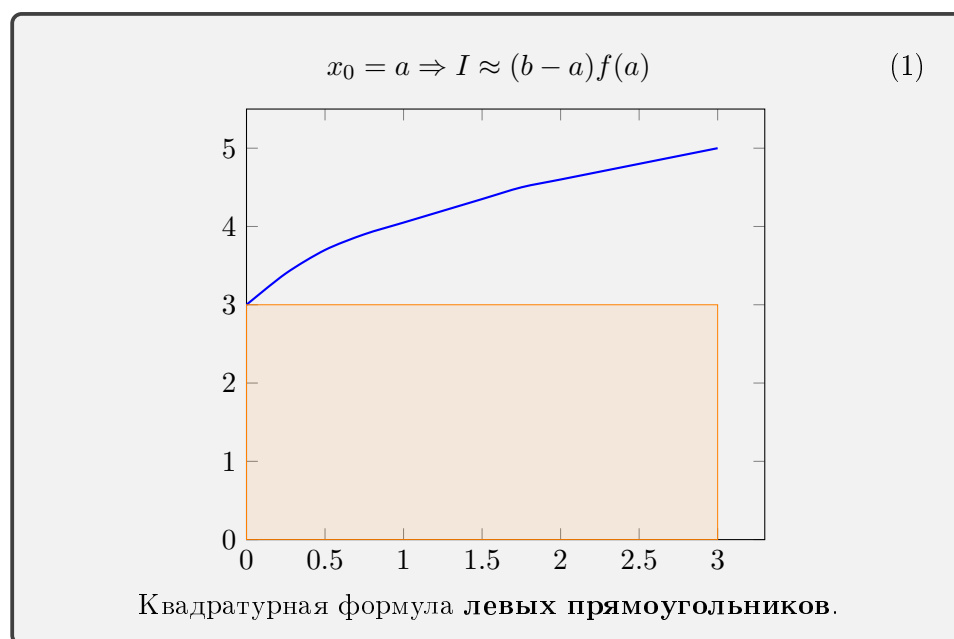
некоторая квадратурная формула,

$$\varepsilon = \int_a^b R_m(x) dx \quad - \text{ее погрешность.}$$

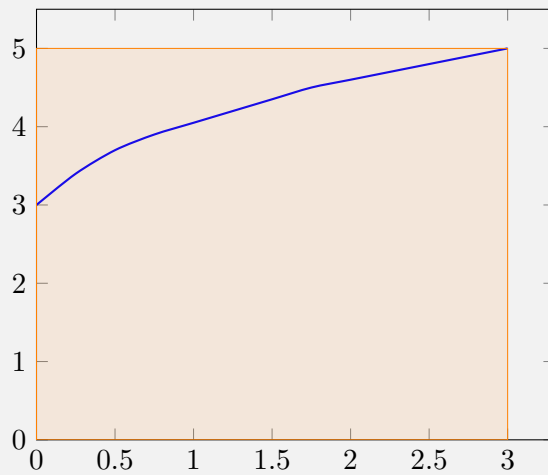
Полином 0-й степени:

$$Q_0(x) = f(x_0)$$

$$I \approx \int_a^b f(x_0) dx = (b-a)f(x_0)$$

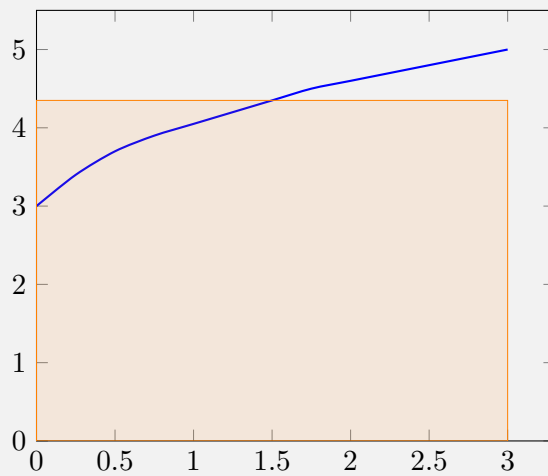


$$x_0 = b \Rightarrow I \approx (b - a)f(b) \quad (2)$$



Квадратурная формула **правых** прямоугольников.

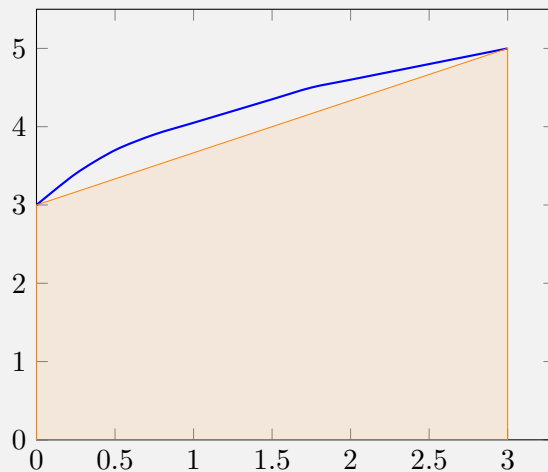
$$x_0 = \frac{a + b}{2} \Rightarrow I \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \quad (3)$$



Квадратурная формула **средних** прямоугольников.

$$Q_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \text{ - полином 1-й степени.}$$

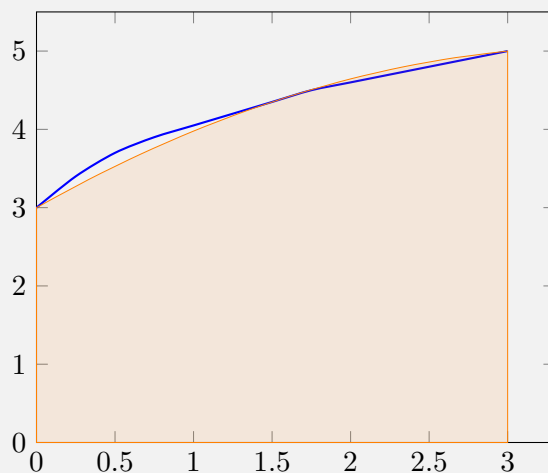
$$I \approx \int_a^b Q_1(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (4)$$



Квадратурная формула **трапеций**.

$$Q_2(x) \quad x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$$

$$I \approx \int_a^b Q_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (5)$$



Метод параболы *или* квадратурная формула **Симпсона**.

Для повышения точности исходный промежуток разбивается на участки, на каждом из них применяется какая-то квадратурная формула, а результаты складываются. Эти квадратурные формулы получили название составные квадратурные формулы.

2 Составные квадратурные формулы

Разобьём исходный промежуток на N участков одинаковой длины: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{N-1}, x_N]$. На каждом участке вычисляем интеграл:

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} f(x_k)$$

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + k \frac{b-a}{N} \\ x_0 &= a, x_N = b \\ x_{k+1} - x_k &= \frac{b-a}{N} \end{aligned}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \quad (1^*)$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \quad (2^*)$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(x_k + \frac{b-a}{2N}\right) \quad (3^*)$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{2N} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

$$I \approx \frac{b-a}{2N} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right) \quad (4^*)$$

В формуле Симпсона выберем N чётным, количество промежутков будет $N^* = N/2$, каждый промежуток будет вдвое большей длины, чем в предыдущих формулах.

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{3N} \left(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) \right) \quad [x_k, x_{k+2}] = \frac{2(b-a)}{N}$$

$$I = \sum_{k=0}^{N^*-2} I_k$$

Итерация суммы происходит по вдвое большим промежуткам,
поэтому от x_0 мы перейдем сразу к x_2

$$I \approx \frac{b-a}{3N} \left(f(a) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}) + f(b) \right) \quad (5^*)$$

3 Погрешности квадратурных формул

Теорема о 'средней' точке:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(c) \int_a^b f(x) dx, c \in [a, b]$$

Чтобы теорема работала, функция, стоящая под знаком интеграла, должна быть *знакопостоянна*. Теорема о 'средней' точке-2:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) = f(\eta)$$

3.1 Погрешности несоставных формул

$$\varepsilon = \int_a^b R_m(x) dx$$

Погрешность равна интегралу от остаточного члена интерполяционного полинома.

$$R_0(x) = \frac{x-a}{1!} f'(\eta)$$

$$\varepsilon_{\text{л.пр.}} = \int_a^b \frac{x-a}{1!} f'(\eta) dx = \int_a^b (x-a) dx f'(\eta^*) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta^*) \quad \eta \rightarrow \eta(x)$$

$$\varepsilon_{\text{пр.пр.}} = \int_a^b \frac{x-b}{1!} f'(\eta) dx = -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{трап.}} = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!} f''(\eta) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \int_a^b \frac{x - \frac{a+b}{2}}{1!} f'(\eta) dx$$

Теорема о 'среднем' здесь не работает, используется другой способ. Рассмотрим разложение функции в степенной ряд Тейлора до $2^{\text{ой}}$ в точке $\frac{a+b}{2}$:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{x - \frac{a+b}{2}}{1!} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2!} f''(\eta)$$

Проинтегрируем слева и справа на $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathbf{0} + \underbrace{\int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2!} f''(\eta) dx}_{\varepsilon_{\text{ср.пр.}}}$$

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2!} f''(\eta) dx = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{симп.}} = \int_a^b \frac{(x-a)(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{3!} f'''(\eta) dx$$

Теорема о 'среднем' не работает, погрешность выводится по другому.

$$\varepsilon_{\text{симп.}} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f'''(\eta^*)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{л.пр.}} &= \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta^*) \\ \varepsilon_{\text{пр.пр.}} &= -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta^*) \\ \varepsilon_{\text{трап.}} &= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta^*) \\ \varepsilon_{\text{ср.пр.}} &= \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta^*) \\ \varepsilon_{\text{симп.}} &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f'''(\eta^*) \end{aligned}$$

3.2 Погрешности составных формул

Погрешность составной формулы равна сумме погрешностей, допущенных на отдельных участках.

$$\boxed{\varepsilon_{\text{л.пр.}}^{\text{сост.}} :}$$

$$[x_k, x_{k+1}] \rightarrow \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} f'(\eta_k^*) = \frac{(b-a)^2}{2N^2} f'(\eta_k^*)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{л.пр.}}^{\text{сост.}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(b-a)^2}{2N^2} f'(\eta_k^*) = \\
&= \frac{(b-a)^2}{2N} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f'(\eta_k^*) = \\
&= \frac{(b-a)^2}{2N} f'(\eta^{**})
\end{aligned} \tag{1**}$$

Аналогично:

$$\varepsilon_{\text{пр.пр.}}^{\text{сост.}} = -\frac{(b-a)^2}{2N} f'(\eta^{**}) \tag{2**}$$

$\varepsilon_{\text{трап.}}^{\text{сост.}}$:

$$[x_k, x_{k+1}] \rightarrow -\frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{12} f''(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^3}{12N^3} f''(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon_{\text{трап.}}^{\text{сост.}} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f''(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta^{**}) \tag{4**}$$

Аналогично:

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}}^{\text{сост.}} = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\eta^{**}) \tag{3**}$$

$\varepsilon_{\text{симп.}}^{\text{сост.}}$:

$$[x_k, x_{k+2}] \rightarrow -\frac{(x_{k+2} - x_k)^5}{2880} f^{(4)}(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^5}{90N^5} f^{(4)}(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon_{\text{симп.}}^{\text{сост.}} = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} \times \frac{1}{N/2} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} f^{(4)}(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\eta^{**}) \tag{5**}$$

Если продолжать увеличивать степень интерполяционного полинома, то погрешность составных формул имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \alpha \frac{(b-a)^{S+1}}{N^S} f^{(S)}(\eta), \alpha = \text{const}$$

На практике погрешность оценивается одним из следующих способов:

1. По формулам выше (используется крайне редко).
2. Наиболее популярный - вычисляют интеграл по

какой-то квадратурной формуле для N и $2N$, результаты сравнивают. Если погрешность велика, N удваивается.

3. В тех случаях, когда увеличение N невозможно, сравнивают две разные квадратурные формулы с одним N .