

28. Метод Ньютона в неявных алгоритмах решения дифференциальных уравнений

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

Методы, пригодные для решения жёстких систем, как правило, являются неявными. Для нахождения x_{n+1} на каждом шаге решаются нелинейные уравнения методом Ньютона.

В качестве примера рассмотрим неявный метод ломаных Эйлера:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \\ F(z) &= z - x_n - hf(t_{n+1}, z) = 0 \\ \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} z_k \varepsilon_k = -F(z_k) \\ z_{k+1} = z_k + \varepsilon_k \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Решение системы (2) это x_{n+1} . Применяем к уравнению (2) метод Ньютона:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = E - h \frac{\partial f(t_{n+1}, z)}{\partial z}$$

z_k - это k -тое приближение к x_{n+1} .

В качестве начального приближения z_0 можно выбрать решение на предыдущем шаге x_n .

Второй способ - сделать один шаг явного метода ломаных Эйлера:
 $z_0 = x_n + hf(t_n, x_n)$.

Большую популярность получил модифицированный метод Ньютона. $\frac{dF}{dz}(x_0)$ вычисляется *однократно* в начальной точке. Однократно выполняется её *LU*-разложение программой *DECOMP*, и на последующих шагах в методе Ньютона используется только *SOLVE*. Матрица вычисляется заново только когда метод Ньютона перестаёт сходиться за три итерации.

Увеличение объёма работы на одном шаге в неявных методах по сравнению с явными полностью окупается выигрышем в величине шага для жёстких систем.