

16. Обратная матрица, собственные числа и  
векторы. Задачи на матрицы. Норма матрицы,  
сходимость матричного степенного ряда,  
функции от матрицы

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

February 3, 2020

# 1 Элементы теории матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(A), \quad \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\text{норма матрицы}} \quad \text{определитель матрицы.}$$

## 1.1 Определения

- Транспонированная матрица  $B = A^T$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$ .
- $X = 0$  - нулевая матрица, все ее элементы равны 0.
- Матрица называется левый (нижний) треугольник, если все ее элементы *выше* главной диагонали равны 0.
- Соответственно - правый (верхний) треугольник, если элементы *ниже* главной диагонали равны 0.
- Диагональная матрица - все элементы, кроме диагональных, равны 0:  $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{mn})$ .  
Диагональная матрица называется *единичной*, если все диагональные элементы равны 1

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Операции

1.  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .
2.  $C = \alpha A$ ,  $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ ,  $\alpha$  - скаляр.
3.  $C = AB$ ,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$AB \neq BA$ , если же  $AB = BA$ , то такие матрицы называются коммутирующие или перестановочные.

4. Вместо операции деления вводится *умножение на обратную матрицу*;  
Обратная матрица:

$$X = A^{-1},$$

$$AX = E, XA = E$$

Пусть  $x_k$  -  $k$ -й столбец обратной матрицы, а  $e_k$  -  $k$ -й столбец единичной матрицы, тогда  $Ax_k = e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Если  $\det(A) \neq 0$ , то система имеет единственное решение, если  $\det(A) = 0$ , то матрица называется особенной.

## 2 Собственные значения и векторы

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

$\lambda$  - собственные значения, вектор  $x$  - собственный вектор.

$$(A - \lambda E)x = 0 \quad (2)$$

Пусть  $\det(A - \lambda E) \neq 0$ , тогда система (2) имеет единственное решение  $x = 0$ .

Чтобы найти вектор  $x$ , отличный от нулевого, нужно потребовать, чтобы определитель

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (3)$$

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0$$

характеристическое уравнение, его  $n$  корней - собственные значения.

Для каждого  $\lambda_i$  можно найти решение  $x_i$  однородной системы  $Ax_i = \lambda_i x_i$ , т.е. собственный вектор.

Таким образом, для матрицы малой размерности может быть предложен следующий алгоритм:

- из уравнения (3) находим все собственные значения,
- для каждого собственного значения из системы (2) находим собственный вектор.

## 3 Задачи на матрицы

1.  $(AB)^T = B^T A^T$
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
3.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.  $DA$  - при умножении на диагональную матрицу *слева* все *строки* матрицы умножаются на соответствующие диагональные элементы.
5.  $AD$  - при умножении на диагональную матрицу *справа* все *столбцы* матрицы умножаются на соответствующие диагональные элементы.
- 6.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{получили тот же тип.}$$

7.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

8. Собственные значения диагональной матрицы равны ее диагональным элементам.
9. Собственные значения треугольной матрицы тоже равны ее диагональным элементам.
10. Сумма собственных значений матрицы равна сумме ее диагональных элементов

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = \underbrace{\sum_{k=1}^N a_{kk}}_{\text{след матрицы}},$$

а произведение - ее определителю

$$\prod_{k=1}^N \lambda_k = \det(A).$$

Если матрица особенная ( $\det(A) = 0$ ), то хотя бы одно собственное значение равно 0.

#### 4 Дифференцирование и интегрирование матриц по параметру

$$B(t) = \frac{d}{dt} A(t), \quad b_{ij}(t) = \frac{d}{dt} a_{ij}(t),$$

$$F = \int_a^b A(t) dt, \quad f_{ij} = \int_a^b a_{ij}(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A^2(t), & \quad A^k = \underbrace{AA \dots A}_k, \quad A^0 \equiv E \\ B(t) = A^2(t), \quad b_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)a_{kj}(t), \\ \frac{d}{dt}B(t) &= \frac{dA}{dt}A + A\frac{dA}{dt}, \\ \text{для } A^{17}: \frac{d}{dt}B(t) &= A\frac{dA}{dt}A^{15} + A^2\frac{dA}{dt}A^{14} + \dots \end{aligned}$$

Найдем производную от обратной матрицы

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= E, \\ \frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{d}{dt}A^{-1} &= 0, \quad \frac{d}{dt}A^{-1} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}. \end{aligned}$$

## 5 Норма матрицы $\|A\|$

Нормой матрицы называется число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1. норма матрицы не отрицательна  $\|A\| > 0, \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$ ,
2.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ ,
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Норма называется *канонической*, если дополнительно выполняются еще две аксиомы:

$$5. \|A\| \geq |a_{ij}|, \quad 6. |b_{ij}| > |a_{ij}| \Rightarrow \|B\| > \|A\|.$$

Все 3 следующие нормы являются каноническими:

$$\begin{aligned} \|A\|_I &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \\ \|A\|_{II} &= \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \\ \|A\|_{III} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}. \end{aligned}$$

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \|A\|_I &= 24, \\ \|A\|_{II} &= 18, \\ \|A\|_{III} &\approx 16.9. \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \|A\|_I &= 1, \\ \|A\|_{II} &= 1, \\ \|A\|_{III} &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Знак сравнения между нормами  $I - III$  ставить *нельзя*.

## 6 Матричный ряд

$$P_m(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m = \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k,$$

$\alpha$  - скалярный коэффициент, как и прочие строчные греческие буквы,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k \text{ - матричный степенной ряд,}$$

Матричный ряд будет сходящимся, если сойдутся все  $n^2$  скалярных рядов для элементов матрицы  $P(A)$ .

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k, \quad p_{ij},$$

$$\text{Введем матрицу } U^{(k)} = \alpha_k A^k, \quad u_{ij}^{(k)},$$

$$\begin{aligned} |p_{ij}| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_{ij}^{(k)} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| u_{ij}^{(k)} \right| \stackrel{5}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \|U^{(k)}\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k A^k\| \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \|A^k\| \stackrel{4}{\leq} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \|A\|^k}_{\text{скалярный степенной ряд}}. \end{aligned}$$

В результате *достаточным* условием сходимости матричного ряда является выполнение условия

$$\boxed{\|A\| < R}$$

являющегося, в свою очередь, условием абсолютной сходимости скалярного степенного ряда.  $R$  - радиус сходимости скалярного степенного ряда.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \quad \|A\|_I = 24, \|A\|_{II} = 18, \|A\|_{III} = 16.9,$$

$R = 17.5$  - ряд сходится,

$R = 16.7$  - достаточное условие не выполняется, сходится ли ряд - не знаем.

Если матричный ряд сходится, то его сумму будем называть *матричной функцией*.

Примеры матричных функций:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad R = \infty,$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}, \quad R = \infty,$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{\text{геом. прогрессия}} \Rightarrow (E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad R = 1.$$