

15. Ортогонализация по Шмидту. Примеры ортогональных полиномов

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

Перейти от линейно независимой функции к ортогональной позволяет метод ортогонализации Грама-Шмидта.

1 Метод Ортогонализации Грама-Шмидта

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \quad [a, b], p(x) > 0$$

Требуется построить новый набор функций $g(x)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- функции ортогональны на промежутке $[a, b]$ с весом $p(x)$,
- функции являются линейной комбинацией $\varphi_k(x)$.

\tilde{g}_k - функция ортогональная, но не нормированная.
 $g_k(x)$ строится так, чтобы она была ортогональна всем функциям $g_i(x)$, построенным до нее.

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0(x) &= \varphi_0(x) \\ \int_a^b \underbrace{p(x)}_{>0} \underbrace{\tilde{g}_0^2(x)}_{>0} dx &= \alpha_0^2 \\ \text{нормируем} \Rightarrow g_0(x) &= \frac{\tilde{g}_0(x)}{\alpha_0} \text{ и дальше по индукции} \end{aligned}$$

$$\widetilde{g}_m(x) = \varphi_m(x) - \sum_{k=0}^{m-1} C_{m,k} \times g_k(x) \quad \left| g_i(x), p(x), \int_a^b \right.$$

$C_{m,k}$ - коэффициенты, подлежащие определению,
 $g_k(x)$ - функции, построенные до $\widetilde{g}_m(x)$,
 $[i = 0, 1, \dots, m-1]$, определяют те же функции, что и в сумме.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b p(x) \widetilde{g}_m(x) g_i(x) dx = \int_a^b p(x) \varphi_m(x) g_i(x) dx - \\ &\quad - C_{m,i} \times \int_a^b p(x) g_i^2(x) dx \end{aligned}$$

$$C_{m,i} = \frac{\int_a^b p(x) \varphi_m(x) g_i(x) \times dx}{\underbrace{\int_a^b p(x) g_i^2(x) dx}_{=1, \text{ т.к. } g_i(x) \text{ нормированы}}}$$

$$\int_a^b p(x) \widetilde{g}_m^2(x) dx = \alpha_m^2$$

$$g_m(x) = \frac{\widetilde{g}_m(x)}{\alpha_m} - \text{нормируем.}$$

2 Примеры ортогональных полиномов

Различные семейства ортогональных полиномов главным образом отличаются друг от друга весовой функцией $p(x)$.

Ортогональные полиномы строят для стандартного промежутка (чаще всего $[-1, 1]$, $[0, 1]$), а затем при необходимости переходят к произвольному промежутку $[a, b]$ при помощи замены переменных:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \times t$$

$$t \in [-1, 1], x \in [a, b].$$

2.1 Ортогональные полиномы Лежандра

$$[-1, 1], \quad p(x) \equiv 1$$

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n} \times \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \right]$$

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = x, L_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$L_n(x)$ ортогональны, но не нормированы.

Для полиномов Лежандра имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0.$$

Разностное уравнение второго порядка относительно n

Нули полиномов Лежандра являются нулями (узлами) квадратурных формул Гаусса.

2.2 Ортогональные полиномы Чебышёва

$$[-1, 1], \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \times \arccos(x))}$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Получим рекуррентное соотношение для полиномов Чебышёва:

$$\varphi = \arccos(x)$$

$$\cos((n+1)\varphi) + \cos((n-1)\varphi) = 2\cos\varphi \times \cos(n\varphi)$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Разностное уравнение второго порядка относительно n