18. Решение систем линейных дифференциальных и разностных уравнений с постоянной матрицей.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

1 Системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),\ x(0) = x_0 \tag{1}$$

A - заданная постоянная квадратная матрица,
$f(t)$ - заданная вектор-функция,
$x(t)$ - вектор-решение.

Начинаем решать с однородной системы:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2}$$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{вектор}} = \underbrace{e^{At}}_{\text{матрица}} \times \underbrace{C}_{\text{вектор}} \tag{3}$$

$x' = \alpha x$
$\Rightarrow x(t) = e^{\alpha t} \times C$

Подставляем уравнение (3) в уравнение (2):

$$Ae^{At} \times C = Ae^{At} \times C$$

Решение неоднородной системы (1) в соответствии с методом Лагранжа будем искать в виде:

$$x(t) = e^{At} \times C(t) \tag{4}$$

Подставляем уравнение (4) в уравнение (1):

$$\underline{Ae^{At} \times C(t)} + e^{At}\frac{dC(t)}{dt} = \underline{Ae^{At} \times C(t)} + f(t)$$

Умножим на обратную матрицу слева:

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-At}f(t)$$

$$C(t) = C(0) + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

Подставляем уравнение (5) в уравнение (4):

$$x(t) = e^{At}C(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{At}C(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

Полагаем, что $t = 0$:

$$x(0) = E \times C(0) + \underbrace{\int_0^0}_{0} \Rightarrow C(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{At} \times x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \tag{6}$$

Формула (6) - точное решение системы (1).

2 Системы линейных разностных уравнений

$$x_{n+1} = Bx_n + \varphi(n),\ x_n|_{n=0} = x_0 \qquad (1)$$

B - заданная постоянная квадратная матрица,
$\varphi(n)$ - заданная вектор-функция,
x_n - вектор-решение.

$$x_1 = Bx_0 + \varphi_0$$
$$x_2 = Bx_1 + \varphi_1 = B^2x_0 + B\varphi_0 + \varphi_1$$
$$x_3 = Bx_2 + \varphi_2 \dots$$

по индукции:

$$x_n = B^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^k \varphi_{n-1-k} \qquad (2)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда $\varphi(n) = \alpha - const$:

$$x_n = B^n x_0 + (\sum_{k=0}^{n-1} B^k) \times \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B^{k\,[1]} \begin{array}{l} \nearrow (E - B^n)(E - B)^{-1} \ ^{(*)} \\ \searrow (E - B)^{-1}(E - B^n) \end{array}$$

(*) на осн. теор. 4 о МФ возм. оба варианта.

$$x_n = B^n x_0 + (\sum_{k=0}^{n-1} B^k) \times \alpha = B^n x_0 + (E - B^n)(E - B)^{-1}\alpha \qquad (2^*)$$

[1] $\sum_{k=0}^{n-1} B^k = \frac{1-B^n}{1-B}$