25. Методы Адамса. Локальная и глобальная погрешности, степень метода

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

June 26, 2020

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{2}$$

Основные формулы

1 Методы Адамса

По предыдущим точкам строится интерполяционный полином для $f(\tau, x(\tau))$, подставляется под знак интеграла в формуле (2) и интегрируется. Так, например, по двум точкам строится полином:

$$f(\tau, x(\tau)) \approx Q_1(\tau) = \frac{\tau - t_n}{t_{n-1} - t_n} f_{n-1} + \frac{\tau - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f_n,$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}). \tag{3}$$

Аналогично по четырём точкам $(t_n, \dots, t_{n-3})$ строится полином третьей степени, и после интегрирования получаем:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \tag{4}$$

Достоинства и недостатки

+ на каждом шаге функция f вычисляется только один раз. Остальные значения берутся с предыдущих шагов.

- методы Адамса не самостартующие. Так, например, метод (4) - разностное уравнение четвертого порядка, а начальное условие только одно. Для старта необходимо рассчитать три дополнительных начальных условия какими-то другими методами, а затем перейти к методу Адамса.

2 Локальная и глобальная погрешность

Локальная погрешность - погрешность, допущенная на одном шаге при условии, что все предыдущие точки были получены точно.
Глобальная погрешность - разность между точным и приближенным

решением на n-м шаге.

Истинной погрешностью является именно глобальная, но в общем случае ее оценка затруднена, поэтому оценивают локальную. В качестве примера рассмотрим явный метод ломаных Эйлера.

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n). \tag{5}$$

I.

$$f(t, x) = f(t)$$

Формула (5) превращается в квадратурную формулу левых прямоугольников.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(t_0), \\ x_2 &= x_1 + hf(t_1), \\ x_3 &= x_2 + hf(t_2). \end{aligned}$$

Общая (глобальная) погрешность равна сумме погрешностей (локальных), допущенных на предыдущих шагах.
II. Общий случай

$$f(t, x) = f(t, x)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0), \\ \underbrace{x_2}_{\text{погр.}} &= \underbrace{x_1}_{\text{погр.}} + hf(t_1, \underbrace{x_1}_{\text{погр.}}), \\ x_3 &= x_2 + hf(t_2, x_2). \end{aligned}$$

В общем случае глобальная погрешность является очень сложной функцией, зависящей от всех погрешностей, допущенных на предыдущих шагах.

2.1 Устойчивые и неустойчивые методы

Методы делятся на *устойчивые* и *неустойчивые*. Если локальная погрешность, допущенная на одном шаге, резко возрастает на последующих шагах (чаще всего экспоненциально), то говорят о *неустойчивых* методах.

То, как будет накапливаться погрешность, зависит от:

1. вида функции $f(t, x)$,
2. величины h,
3. выбранного метода.

Для обеспечивания*малой глобальной погрешности* необходимо выполнить два условия:

1. Обеспечить малую локальную погрешность на каждом шаге,
2. Обеспечить устойчивость метода.

Для характеристики локальной погрешности вводится понятие *степень(порядок) точности метода.*

3 Степень/порядок точности метода[1]

Все ранее рассмотренные методы могут быть записаны в следующем виде:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + hF(t_n, h, x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-S})} \tag{6}$$

См. примеры методов, чтобы понять общность формулы.

Разложим правую часть формулы (6) в ряд по степеням h в точке t_n

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h^k \cdot \frac{d^k x(t_n)}{dt^k}} \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Разложение в ряд выбранного метода,
коэффициенты α_k зависят от метода.

С другой стороны, x_{n+1} можно разложить в ряд по степеням h в точке t_n:

$$\boxed{x_{n+1} = x(t_n + h) = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{d^k x(t_n)}{dt^k}} \tag{8}$$

$$x_{n+1} = x(t_{n+1}),$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Точное разложение в ряд.

Локальная погрешность будет тем меньше, чем больше первых слагаемых в разложениях (7) и (8) совпадают. Если коэффициенты разложений совпадают до h^S включительно, то говорят, что метод имеет степень или порядок точности S, тогда главный член погрешности $\sim h^{S+1}$.

Установим степень точности для всех ранее полученных методов:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n(t_n + h) = x_n + hx' + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + \frac{h^3}{3!}x'''(t_n) + \cdots}$$

сравним *точное разложение* с *разложением методов.*

[1]При переводе на русский данных терминов может произойти проблема с пониманием. Так, в английском языке методы по точности разделяют на first-order, second-order, etc., а по степени разностного уравнения - one-step, two-step, etc. При переводе оба понятия можно назвать степенью метода, что может вызвать затруднение.

3.1 Явный метод Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + \underline{hx^{'}(t_n)},$$

метод **первой** степени.

3.2 Неявный метод Эйлера

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n + hx^{'}(t_n + h) \\ &= x_n + h(\underline{x^{'}(t_n)} + \frac{h}{1!}x^{''}(t_n) + \dots), \end{aligned}$$

метод **первой** степени.

3.3 Неявный метод трапеции

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) = x_n + \frac{h}{2}(x^{'}(t_n + h) + x^{'}(t_n)) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}(x^{'}(t_n) + \frac{h}{1!}x^{''}(t_n) + \frac{h^2}{2!}x^{'''}(t_n) + \dots + x^{'}(t_n)) = \\ &= x_n + \underline{hx^{'}} + \underline{\frac{h^2}{2}x^{''}(t_n)} + \cdots, \end{aligned}$$

метод **второй** степени.

3.4 Метод Адамса (формула (3))

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) = x_n + \frac{h}{2}(3x^{'}(t_n) - x^{'}(t_n - h)) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}(3x^{'}(t_n) + \frac{h}{1!}x^{''}(t_n) - \frac{h^2}{2!}x^{'''}(t_n) + \dots - x^{'}(t_n)) = \\ &= x_n + \underline{hx^{'}} + \underline{\frac{h^2}{2}x^{''}(t_n)} + \cdots, \end{aligned}$$

метод **второй** степени.

Можно показать, что метод Адамса, формула (4), имеет четвертую степень точности.