06. Интерполяционный полином Лагранжа. Остаточный член полинома Лагранжа.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

February 28, 2020

1 Интерполяционный полином Лагранжа

$$Q_m(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, m \tag{1}$$

Построить интерполяционный полином можно и в явном виде, не решая систему (1).

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m)$$

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} = (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_m)$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k) \tag{2}$$

Уравнение (2) - интерполяционный полином (в форме) Лагранжа.
По построению очевидно, что $Q_m(x)$ - полином степени m.

$$Q_m(x_i) = \frac{\omega_i(x_i)}{\omega_i(x_i)} f(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, m$$

$\omega_k(x_i) = 0$, если $k \neq i$

1.1 Алгоритм построения полинома Лагранжа

1. Числитель с пропущенной точкой.
2. Знаменатель - числитель, где вместо x подставляем пропущенную точку.
3. Значение функции в пропущенной точке.

Пример для полинома Q_2:

$$Q_0(x) = f(x_0)$$

$$Q_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$Q_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

2 Остаточный член интерполяционного полинома Лагранжа

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x) \tag{1}$$

$R_m(x)$ - остаточный член интерполяционного полинома или погрешность интерполяционного полинома.

$$\varphi(z) = f(z) - Q_m(z) - k\omega(z) \quad (2)$$

$x_0, x_1, \ldots, x_m$ - узлы; k - нек. пост.

Пусть (.)x - точка в которой оценивается погрешность, не совпадающая с узлами интерполирования.

$$\varphi(x_i) = 0, \; i = 0, 1, \ldots, m$$

Выберем k таким образом, чтобы $\varphi(z)$ в этой точке была равна 0.

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow k = \frac{f(x) - Q_m(x)}{\omega(x)} \quad (3)$$

Таким образом, $\varphi(z)$ имеет по меньшей мере $m+2$ нуля: $x_0, x_1, \ldots, x_m, x$.

Теорема Ролля. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет первую производную в каждой точке внутри этого отрезка, и значения функции на концах этого промежутка равны, т.е. $f(a) = f(b)$, то внутри отрезка найдется, по крайней мере, одна такая точка $x = c$, что $f^{'}(c) = 0$.

Тогда по теореме Ролля:

Произв. $\rightarrow$ мин. кол-во нулей

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(z) &\rightarrow m+1 \quad \text{нуль} \\ \varphi^{''}(z) &\rightarrow m \\ &\ldots \\ \varphi^{(m+1)}(z) &\rightarrow 1 \Rightarrow \varphi^{(m+1)}(\eta) = 0 \end{aligned}$$

Точку, где $(m+1)$-я произв. 0, об. за η.

Продифференцируем $\varphi(z)$ $m+1$ раз и подставим η:

$$0 = \varphi^{(m+1)}(\eta) = f^{(m+1)}(\eta) - 0 - k * (m+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}$$

Подставляем выражение для k в (3):

$$f(x) = Q_m(x) + \boxed{\frac{\omega(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\eta)}$$

Выделенная часть и является погрешностью интерполяционного полинома.
Точка η зависит от:

- вида функции f,
- выбора узлов интерполирования,
- точки, в которой оценивается погрешность.