

Tópicos Especiais em Algoritmos – Lista 1

1) Sejam X_1, X_2, \dots, X_k subconjuntos (não necessariamente disjuntos) de $V = \{1, 2, \dots, n\}$ escolhidos por um algoritmo de Las Vegas de forma aleatória, uniforme e independente dentre os 2^n subconjuntos distintos de V . Se a união dos subconjuntos escolhidos contém todos os elementos de V , o algoritmo para; caso contrário, refaz a escolha dos k subconjuntos. Determine:

- Em cada escolha aleatória de subconjuntos, $\Pr\{i \text{ pertence a } X_1\}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
- O número esperado de vezes que se deve repetir a escolha aleatória dos subconjuntos até que $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = V$.

2) Seja um algoritmo de Monte Carlo de erro bilateral que responde SIM para entradas SIM com probabilidade 90%, e responde NÃO para entradas NÃO com probabilidade 75%. Sabendo-se que 60% das entradas são SIM, e que o algoritmo respondeu NÃO duas vezes seguidas em execuções independentes para a mesma entrada, qual a probabilidade de a resposta correta ser NÃO?

3) Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas. Escreva um algoritmo de Las Vegas para encontrar um corte de G , isto é, uma bipartição (A, B) dos vértices de V , com tamanho maior ou igual a $m/2$. PS.: O tamanho do corte é o número de arestas que ligam um vértice de A a um vértice de B . Não é preciso analisar seu tempo de execução.

4) Considere a distribuição uniforme e independente de n bolas em m latas.

- Qual o número esperado de latas vazias?
- Qual a ordem de grandeza do número esperado de lançamentos até que não haja mais latas vazias?

5) Encontrar o maior conjunto independente de um grafo G (um subgrafo sem qualquer par de vértices adjacentes em G) é problema NP-difícil. Seja o seguinte algoritmo randomizado para encontrar conjuntos independentes em grafos *cúbicos* (também conhecidos como 3-regulares, isto é, grafos em que todos os vértices são adjacentes a 3 outros vértices):

- Passo 1: para cada vértice v do grafo G dado, remova v com probabilidade $2/3$;
- Passo 2: enquanto houver aresta e no grafo, remova a aresta e e um dos vértices incidentes a ela (escolhido aleatória e uniformemente dentre os dois vértices possíveis);
- Passo 3: retorne o conjunto C formado pelos vértices que permaneceram no grafo.

a) Por que C é um conjunto independente de G ?

b) Qual a esperança do número de vértices X que permanece no grafo ao final do primeiro passo do algoritmo?

c) Qual a esperança do número de arestas Y que permanece no grafo ao final do primeiro passo do algoritmo?

d) Qual o número máximo de vértices que serão removidos no Passo 2?

e) O que o algoritmo acima nos permite concluir sobre o tamanho do conjunto independente máximo de G , para todo grafo G cúbico?