TÓPICOS ESPECIAIS EM ALGORITMOS - 2012/2
Prof. Vinícius Gusmão

LISTA 1

Obs.1: Você pode fazer o número q *de questões que desejar, e eu corrigirei todas. Pontuarei, no entanto, exatamente* min{q, *5} questões, escolhidas aleatória e uniformemente dentre as que você fizer, com pontuação máxima = 2.0.*

Obs.2.: Questões de implementação podem ser resolvidas em qualquer linguagem[1]*. As soluções devem ser enviadas para o e-mail vigusmao@dcc.ufrj.br até as 23:59 da data limite, e com o seguinte título:* [TEA-2012-2] Lista 1.

QUESTÃO 1: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ subconjuntos de $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ escolhidos aleatória, uniforme e independentemente dentre os 2^n subconjuntos de V. Determine:

a) $\Pr\{i$ pertence a $X_1\}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$

b) O número esperado de vezes que se deve repetir a escolha aleatória dos subconjuntos até que $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = V$

QUESTÃO 2: A probabilidade de se ter pelo menos um pneu furado numa viagem Rio - São Paulo de bicicleta é de 15/64. Determine:

a) em 64 viagens, o número esperado de viagens em que algum pneu fura;

b) os limites superiores dados pelas desigualdades de Markov e Chebyshev para a probabilidade de haver furo de pneu em pelo menos a metade de *n* viagens feitas;

c) o número esperado de viagens até aquela que será a terceira viagem em que fura o pneu traseiro, supondo independentes e equiprováveis os eventos de furo em qualquer dos pneus.

Se optar por uma linguagem totalmente obscura, desenvolvida no mês passado por graduandos de lógica do Sri Lanka, ajude o pobre professor disponibilizando o link para o compilador/interpretador da dita cuja.

QUESTÃO 3: Seja um algoritmo de Monte Carlo de erro unilateral com taxa de erro menor ou igual a ε, ε inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho n da entrada do problema. Para instâncias onde $n = 64$, o algoritmo acerta com probabilidade 39/40. Quantas vezes, no máximo, é preciso executar esse algoritmo, para garantir probabilidade de acerto tão boa quanto $1 - 10^{-8}$ para instâncias de tamanho $n = 400$?

QUESTÃO 4: Um mico de circo, bêbado, golpeia furiosamente um teclado com as 28 teclas abaixo

q w e r t y u i o p a s d f g h j k l z x c v b n m , .

mais o <enter> e o <espaço>, totalizando 30 teclas.

a) Quantos caracteres, no total, precisa ter o texto digitado pelo macaco para que seja maior ou igual a 1 o número esperado de vezes em que se lê a palavra "circo"?

b) Quantas teclas, em média, o macaco precisa apertar, até que se leia pela primeira vez a palavra "circo"?

QUESTÃO 5: Considere a distribuição uniforme e independente de n bolas em m latas.

a) Qual o número esperado de latas vazias?

b) Mostre que, para n grande e $m = n$, o número esperado de latas vazias converge para n/e, onde e é a base dos logaritmos naturais.

QUESTÃO 6: Implemente uma simulação para a questão 1.

Entrada: os inteiro n e k;
o número t de vezes que se deve repetir a simulação.

Para cada simulação i (de 1 a t), o programa deve imprimir a quantidade de vezes X_i que precisou repetir a escolha aleatória dos subconjuntos até conseguir que a união deles cobrisse todo o conjunto V. No final das t simulações, deve apresentar a média dos X_i como uma aproximação para a solução do item 1b.

QUESTÃO 7: Em certa aplicação, gostaríamos de obter, para um grafo $G(V,E)$ dado, um corte com grande número de arestas.

a) Implemente um algoritmo que obtenha, por força bruta, o maior corte do grafo.

b) Implemente um algoritmo randomizado de Las Vegas que retorne um corte de tamanho pelo menos $|E| / 2$.

Entrada de ambos os algoritmos: inteiro positivo n, que definirá $V = \{1, ..., n\}$;
conjunto E de arestas do grafo.

QUESTÃO 8: Implemente uma simulação para as questões 4a e 4b.

Entrada: o problema desejado: a ou b;
o número t de simulações;
a palavra p desejada.

Funcionamento para a simulação da questão 4a: para cada valor q a partir do tamanho da palavra p, deve-se gerar t textos de q caracteres, onde cada caracter é escolhido aleatoriamente, uniformemente e independentemente dos demais. Para cada texto produzido, registra-se a quantidade de vezes em que p ocorre naquele texto. Ao final dos t textos de tamanho q, registra-se a média das ocorrências daquela palavra em textos de tamanho q, passando-se para o próximo valor de q. O programa acaba quando a média, para um certo valor de q, resultou maior ou igual a 1, retornando q.

Funcionamento para a simulação da questão 4b: para cada simulação i de 1 a t, deve-se simular a ação do macaco, acrescentando-se novos caracteres aleatórios (com probabilidade uniforme) até que, pela primeira vez, a palavra p possa ser lida. Neste momento, registra-se a quantidade de caracteres q_i digitados nesta i-ésima simulação, passando-se para uma nova simulação, totalmente independente da anterior. Ao fim das t simulações, deve-se retornar a média dos q_i.