

# Co można znaleźć w potęgach dwójką?

dr Piotr Idzik  
vil02@o2.pl

Karlsruhe, Katowice, 15.03.2021



ver. 27.08.2021 19:42:17

- └ Sformułowanie problemu
- └ *Zawieranie się liczb*

## Definicja 1

Niech  $a, b \in \mathbb{N}$ . Mówimy, że liczba  $a$  *zawiera* liczbę  $b$ , jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby  $b$  jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby  $a$ .

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Sformułowanie problemu
- └ *Zawieranie się liczb*

## Definicja 1

Niech  $a, b \in \mathbb{N}$ . Mówimy, że liczba  $a$  *zawiera* liczbę  $b$ , jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby  $b$  jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby  $a$ .

## Przykład 2

- ▷ liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,

└ Sformułowanie problemu

└ *Zawieranie się liczb*

## Definicja 1

Niech  $a, b \in \mathbb{N}$ . Mówimy, że liczba  $a$  *zawiera* liczbę  $b$ , jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby  $b$  jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby  $a$ .

## Przykład 2

- ▷ liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,
- ▷ liczba 128 nie zawiera liczby 18.

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

└ Sformułowanie problemu

└ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

▷ 28 zawiera się w  $2^7 = 128$ ,

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

└ Sformułowanie problemu

└ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

- ▷ 28 zawiera się w  $2^7 = 128$ ,
- ▷ 314 zawiera się w  $2^{74} = 18889465931478580854784$ ,

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

- ▷ 28 zawiera się w  $2^7 = 128$ ,
- ▷ 314 zawiera się w  $2^{74} = 18889465931478580854784$ ,
- ▷ 31415 zawiera się w  $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$ ,

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

- ▷ 28 zawiera się w  $2^7 = 128$ ,
- ▷ 314 zawiera się w  $2^{74} = 18889465931478580854784$ ,
- ▷ 31415 zawiera się w  $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$ ,
- ▷ 70000000 zawiera się w  $2^{9452}$ ,

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

- ▷ 28 zawiera się w  $2^7 = 128$ ,
- ▷ 314 zawiera się w  $2^{74} = 18889465931478580854784$ ,
- ▷ 31415 zawiera się w  $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$ ,
- ▷ 70000000 zawiera się w  $2^{9452}$ ,
- ▷ 2000000000 zawiera się w  $2^{100824}$ .

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

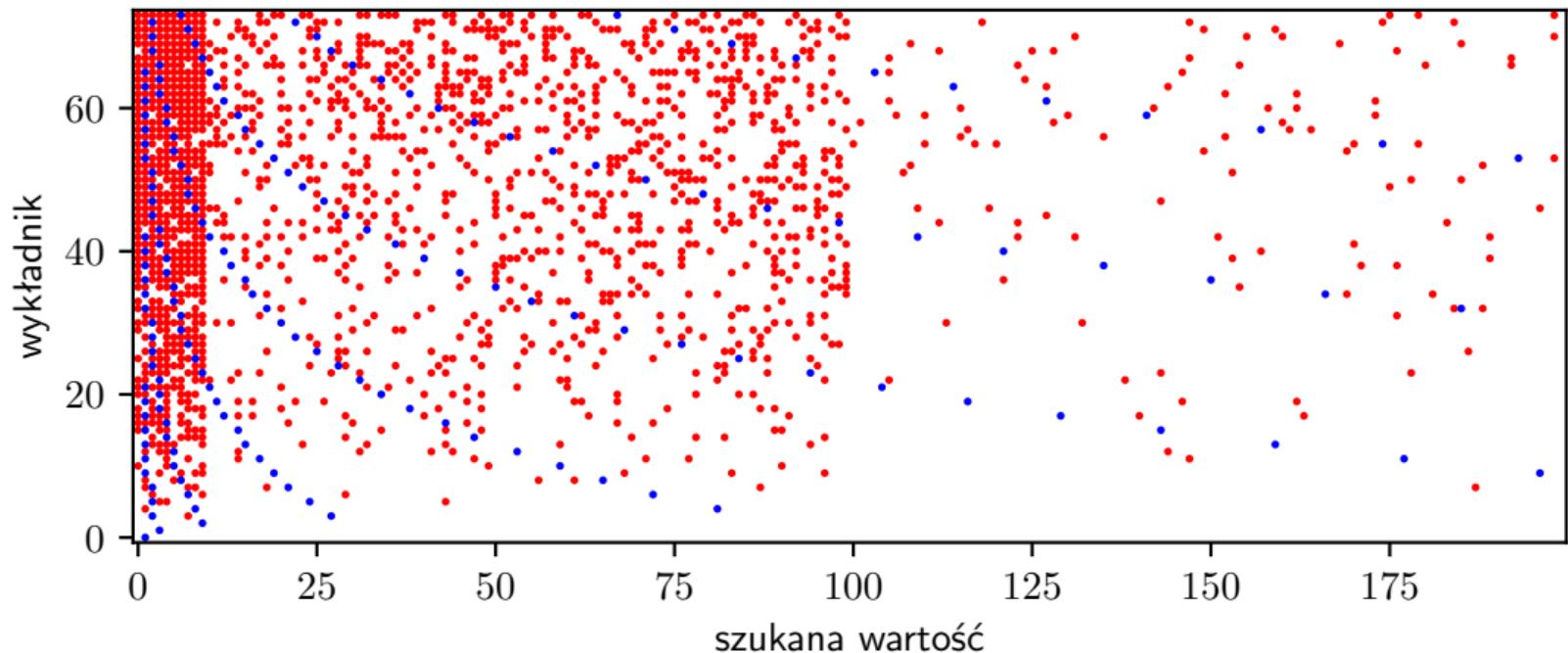
Rozważmy ciąg  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... .

- ▷ 28 zawiera się w  $2^7 = 128$ ,
- ▷ 314 zawiera się w  $2^{74} = 18889465931478580854784$ ,
- ▷ 31415 zawiera się w  $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$ ,
- ▷ 70000000 zawiera się w  $2^{9452}$ ,
- ▷ 2000000000 zawiera się w  $2^{100824}$ .

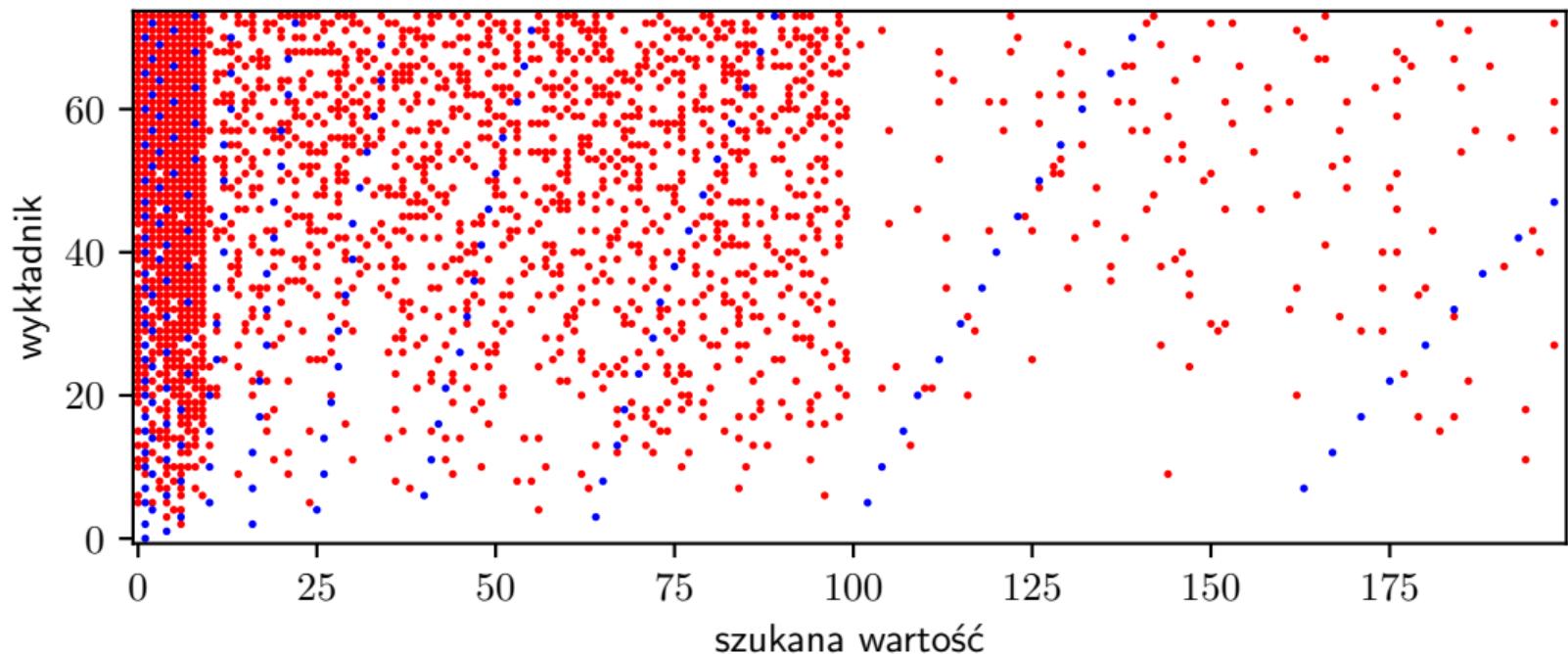
Czy prawdą jest, że dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje taki wykładnik  $w \in \mathbb{N}$ , że liczba  $2^w$  zawiera liczbę  $n$ ?



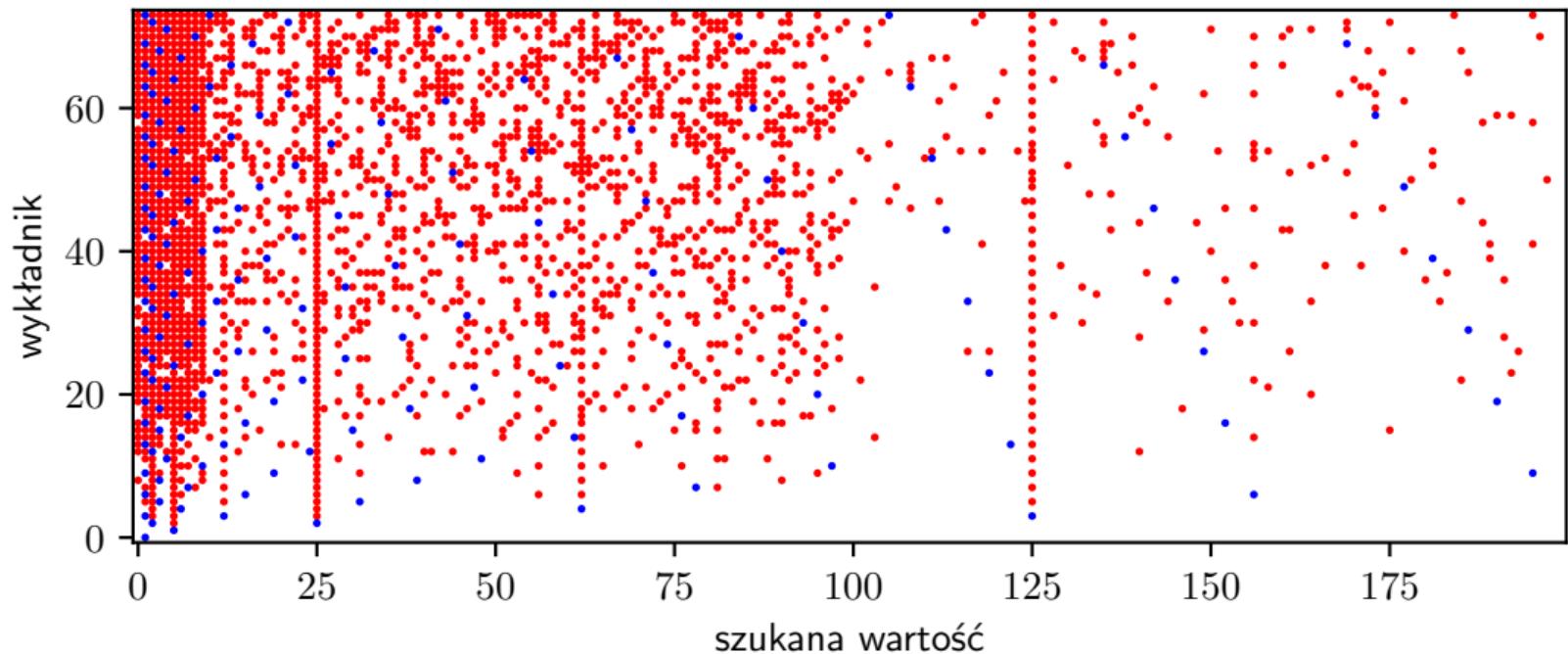
Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $2^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $2^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $3^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $3^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $4^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $4^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $5^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $5^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .



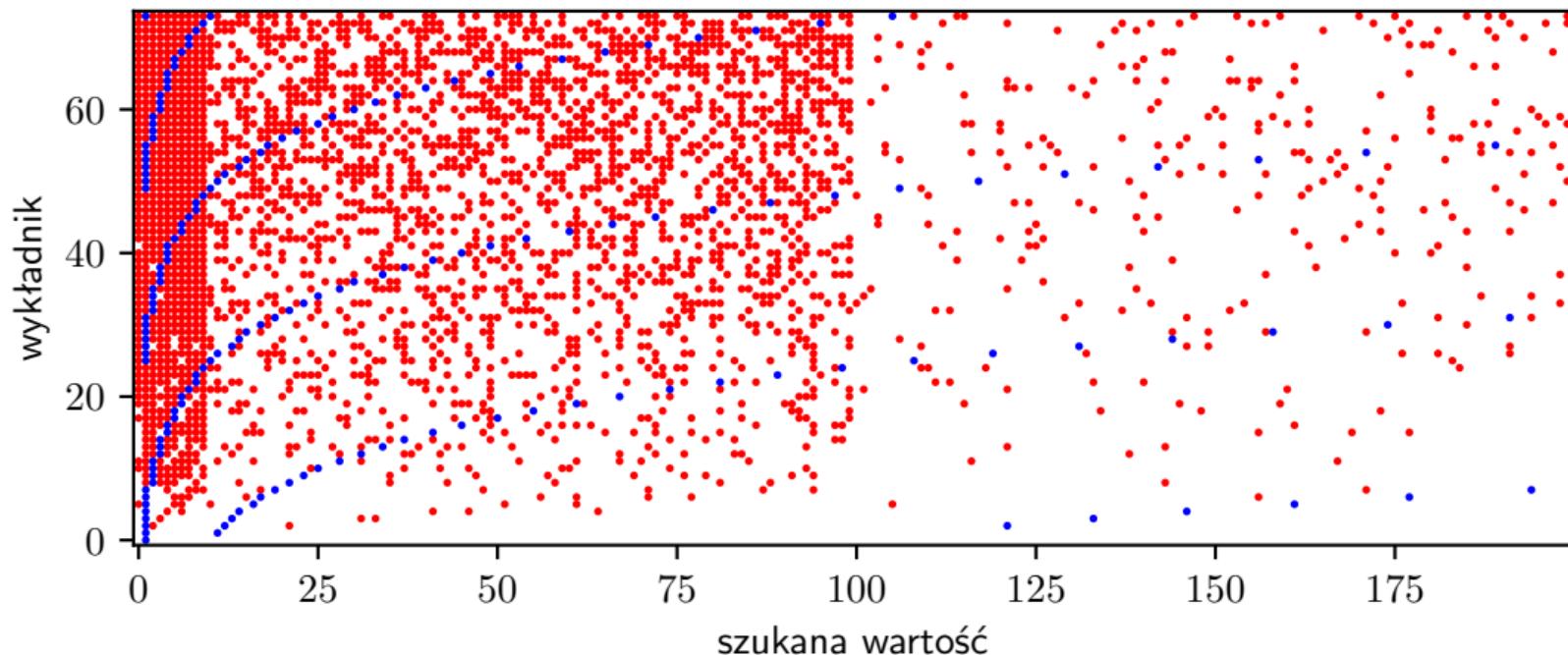
Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $9^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $9^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .

## └ Symulacje komputerowe



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $10^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $10^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .

└ Symulacje komputerowe



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $11^y$ . Kolor niebieski oznacza, że  $11^y$  zaczyna się liczbą  $x$ .

└ Główne twierdzenie

---

└ Główne twierdzenie

---

### Twierdzenie 3

Niech  $p \in \mathbb{N}$  będzie takie, że  $p \neq 10^r$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ . Wówczas dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje taki wykładnik  $w \in \mathbb{N}$ , że liczba  $p^w$  zawiera liczbę  $n$ .

└ Główne twierdzenie

---

### Twierdzenie 3

Niech  $p \in \mathbb{N}$  będzie takie, że  $p \neq 10^r$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ . Wówczas dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje taki wykładnik  $w \in \mathbb{N}$ , że liczba  $p^w$  zawiera liczbę  $n$ .

### Lemat 4

Niech  $p \in \mathbb{N}$  będzie takie, że  $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Wówczas dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje taki wykładnik  $w \in \mathbb{N}$ , że liczba  $p^w$  zaczyna się liczbą  $n$ .



└ Główne twierdzenie

---

### Twierdzenie 3

Niech  $p \in \mathbb{N}$  będzie takie, że  $p \neq 10^r$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ . Wówczas dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje taki wykładnik  $w \in \mathbb{N}$ , że liczba  $p^w$  zawiera liczbę  $n$ .

### Lemat 4

Niech  $p \in \mathbb{N}$  będzie takie, że  $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Wówczas dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje taki wykładnik  $w \in \mathbb{N}$ , że liczba  $p^w$  zaczyna się liczbą  $n$ . 

### Lemat 5

$\log_{10} p \in \mathbb{Q}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p = 10^r$ , dla pewnego  $r \in \mathbb{N}_0$ . 

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Liczby wymierne i niewymierne

## Twierdzenie 6

Jeżeli  $\frac{r_A}{r_B} = \frac{a}{b}$ ,  $\text{NWD}(a, b) = 1$ , to po wykonaniu  $b$  obrotów przez koło A (a obrotów przez koło B) **znaczniki** będą w tym samym położeniu.

Co można znaleźć w potęgach dwójką?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
  - └ Liczby wymierne i niewymierne

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Część ułamkowa liczby

## Definicja 7

Niech  $x \in \mathbb{R}$ . *Częścią całkowitą liczby*  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy symbolem  $\lfloor x \rfloor$ .

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Część ułamkowa liczby

## Definicja 7

Niech  $x \in \mathbb{R}$ . *Częścią całkowitą liczby*  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy symbolem  $\lfloor x \rfloor$ .

## Przykład 8

- ▷  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,
- ▷  $\lfloor 15 \rfloor = 15$ ,

## Definicja 7

Niech  $x \in \mathbb{R}$ . *Częścią całkowitą liczby*  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy symbolem  $\lfloor x \rfloor$ .

*Część ułamkową liczby*  $x$  definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad (1)$$

## Przykład 8

- ▷  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,
- ▷  $\lfloor 15 \rfloor = 15$ ,

## Definicja 7

Niech  $x \in \mathbb{R}$ . *Częścią całkowitą liczby*  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy symbolem  $\lfloor x \rfloor$ .

*Część ułamkową liczby*  $x$  definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1). \quad (1)$$

## Przykład 8

- ▷  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,
- ▷  $\lfloor 15 \rfloor = 15$ ,

## Definicja 7

Niech  $x \in \mathbb{R}$ . *Częścią całkowitą liczby*  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy symbolem  $\lfloor x \rfloor$ .

*Część ułamkową liczby*  $x$  definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1). \quad (1)$$

## Przykład 8

- ▷  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\{\pi\} = 0,14159265\dots$ ,
- ▷  $\lfloor 15 \rfloor = 15$ ,  $\{15\} = 0$ ,

## Definicja 7

Niech  $x \in \mathbb{R}$ . *Częścią całkowitą liczby*  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy symbolem  $\lfloor x \rfloor$ .

*Część ułamkową liczby*  $x$  definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1). \quad (1)$$

## Przykład 8

- ▷  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\{\pi\} = 0,14159265\dots$ ,
- ▷  $\lfloor 15 \rfloor = 15$ ,  $\{15\} = 0$ ,
- ▷  $\lfloor -4,25 \rfloor = -5$ ,  $\{-4,25\} = 0,75$ .

### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .



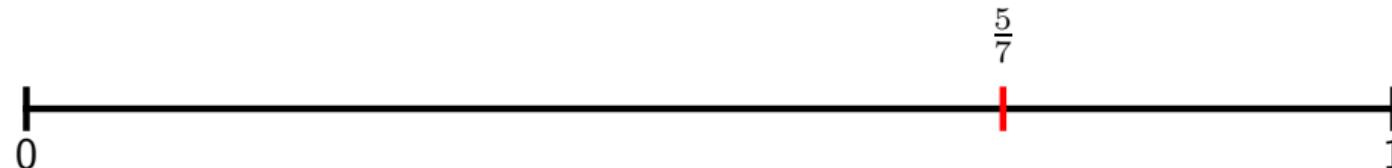
Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
- └ O ciągach  $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{ \frac{5}{7} \right\} = \frac{5}{7}$$



Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

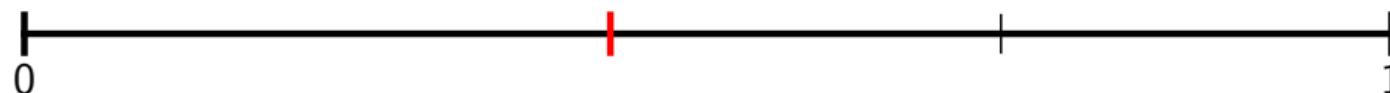
└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ O ciągach  $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{2 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$



### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{3 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{1}{7}$$



Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
- └ O ciągach  $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{ 4 \cdot \frac{5}{7} \right\} = \frac{6}{7}$$

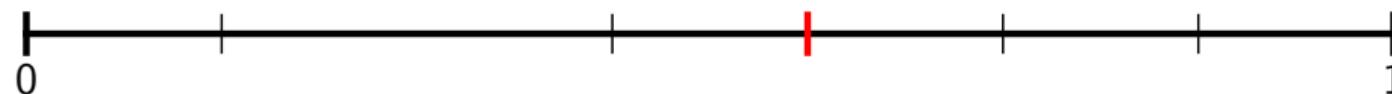


### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{ 5 \cdot \frac{5}{7} \right\} = \frac{4}{7}$$

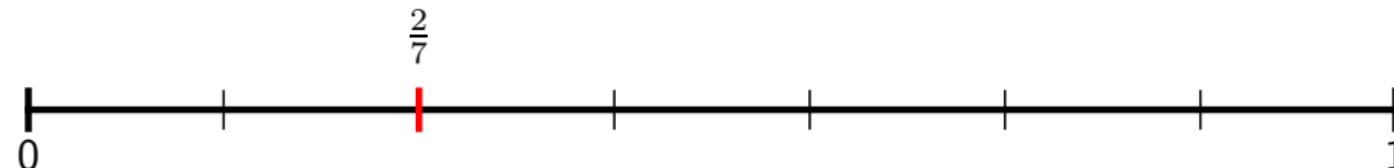
$$\frac{4}{7}$$



### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{ 6 \cdot \frac{5}{7} \right\} = \frac{2}{7}$$



### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{7 \cdot \frac{5}{7}\right\} = 0$$



Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

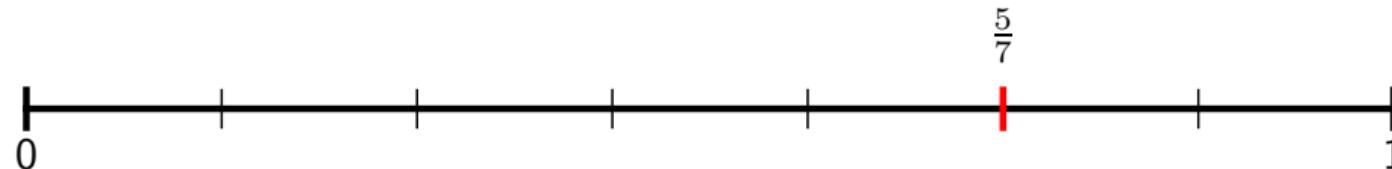
└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ O ciągach  $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{8 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$



### Przykład 9

Rozważmy ciąg  $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\left\{9 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$



## Przykład 10

Rozważmy ciąg  $(\{n\pi\})_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Twierdzenie 11 ([2, 4])

Jeżeli  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , to ciąg  $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , tzn. dowolny punkt przedziału  $[0, 1]$  może zostać dowolnie dokładnie przybliżony wyrazami ciągu  $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
  - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,
- ▷  $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,
- ▷  $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,
- ▷  $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
  - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,
- ▷  $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- ▷  $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$  ( $x_1, x_2 > 0$ ),

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
  - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷  $\log_{10} 100 = 2$ , bo  $10^2 = 100$ ,
- ▷  $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- ▷  $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,
- ▷  $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- ▷  $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$  ( $x_1, x_2 > 0$ ),
- $\log_{10} p^w = w \log_{10} p$  ( $p, w \in \mathbb{N}$ ). (4)

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

$$p^w$$

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w}$$

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p}$$

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$

└ Dowód lematu 4

## Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

└ Dowód lematu 4

## Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

$$\triangleright 10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$$

└ Dowód lematu 4

## Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

- ▷  $10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$
- ▷  $10^{\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l} = c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l.$

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned}
 p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\
 &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.
 \end{aligned}$$

- ▷  $10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$
- ▷  $10^{\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l} = c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l.$

Niech  $n = c_1 c_2 c_3 \dots c_l,$

└ Dowód lematu 4

---

## Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned}
 p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\
 &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.
 \end{aligned}$$

- ▷  $10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$
- ▷  $10^{\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l} = c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l.$

Niech  $n = c_1 c_2 c_3 \dots c_l$ , wobec twierdzenia 11 istnieje  $w > \frac{l}{\log_{10} p}$  takie, że  $\{w \log_{10} p\}$  jest wystarczająco dobrym przybliżeniem  $\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l$ . □

└ Uwagi końcowe

---

## Twierdzenie 12

*Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.*

└ Uwagi końcowe

---

## Twierdzenie 12

Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.

## Przykład 13

$$\triangleright (\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

└ Uwagi końcowe

---

## Twierdzenie 12

Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.

## Przykład 13

- ▷  $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷  $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$

└ Uwagi końcowe

---

## Twierdzenie 12

Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.

## Przykład 13

- ▷  $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷  $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$
- ▷  $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$  gdzie  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),

└ Uwagi końcowe

## Twierdzenie 12

Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.

## Przykład 13

- ▷  $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷  $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$
- ▷  $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$  gdzie  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- ▷  $(\{k \log_{10} n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$

└ Uwagi końcowe

## Twierdzenie 12

Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.

## Przykład 13

- ▷  $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷  $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$
- ▷  $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$  gdzie  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- ▷  $(\{k \log_{10} n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$
- ▷  $(\{\log_{10} n!\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n \in \mathbb{N}}$  (zob. [1]),

└ Uwagi końcowe

## Twierdzenie 12

Jeżeli  $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  jest gęsty w przedziale  $[0, 1]$ , to ciąg  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zawiera wszystkie liczby.

## Przykład 13

- ▷  $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷  $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$
- ▷  $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$  gdzie  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- ▷  $(\{k \log_{10} n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}},$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N},$
- ▷  $(\{\log_{10} n!\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n \in \mathbb{N}}$  (zob. [1]),

Prezentacja: <https://github.com/vil02/pi2021/>



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $y^2$ . Kolor niebieski oznacza, że  $y^2$  zaczyna się liczbą  $x$ .



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $y^3$ . Kolor niebieski oznacza, że  $y^3$  zaczyna się liczbą  $x$ .

└ Symulacje komputerowe dla innych ciągów

└  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad 0! = 1$



Rysunek: Punkt  $(x, y)$  jest zaznaczony na czerwono, jeżeli  $x$  zawiera się w  $y!$ . Kolor niebieski oznacza, że  $y!$  zaczyna się liczbą  $x$ .

## └ Dowód lematu 5

### Dowód lematu 5.

Założmy, że  $\log_{10} p = \frac{a}{b}$ , dla pewnych  $a, b \in \mathbb{N}$ . Wówczas  $10^{\frac{a}{b}} = p$ , stąd  $10^a = p^b$ , i ponadto  $2^a 5^a = p^b$ . Zatem  $p = 2^r 5^s$ , dla pewnych  $r, s \in \mathbb{N}$ . Pozostaje pokazać, że  $r = s$ . Istotnie,  $2^{rb} 5^{sb} = 2^a 5^a$ , skąd  $a = rb = sb$ , więc  $r = s$ . A zatem  $p = 2^r 5^r = 10^r$ .



 Persi Diaconis.

The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1.

*The Annals of Probability*, 5(1):72–81, Feb 1977.

 Wacław Sierpiński.

O wartości asymptotycznej pewnej sumy.

*Rozprawy Akademii Umiejętności w Krakowie, Wydział mat. przyrod.*, 50:1–10, 1910.

 Ivan. M. Vinogradov.

On the distribution of products of prime numbers and the numerical function of Möbius.

*Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 12:341–350, 1948.

 Hermann Weyl.

Über die gleichverteilung von zahlen mod. eins.

*Mathematische Annalen*, 77(3):313–352, Sep 1916.