# Co można znaleźć w potęgach dwójki?

Piotr Idzik
vil02@o2.pl

Karlsruhe, Katowice, 15.03.2021

## Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba $a$ *zawiera* liczbę $b$, jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby $b$ jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby $a$.

## Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba $a$ *zawiera* liczbę $b$, jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby $b$ jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby $a$.

## Przykład 2

- liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,

## Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba $a$ *zawiera* liczbę $b$, jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby $b$ jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby $a$.

## Przykład 2

- liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,
- liczba 128 nie zawiera liczby 18.

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, . . . .

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, . . . .

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, . . . .

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, . . . .

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, . . . .

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- 70000000 zawiera się w $2^{9452}$,

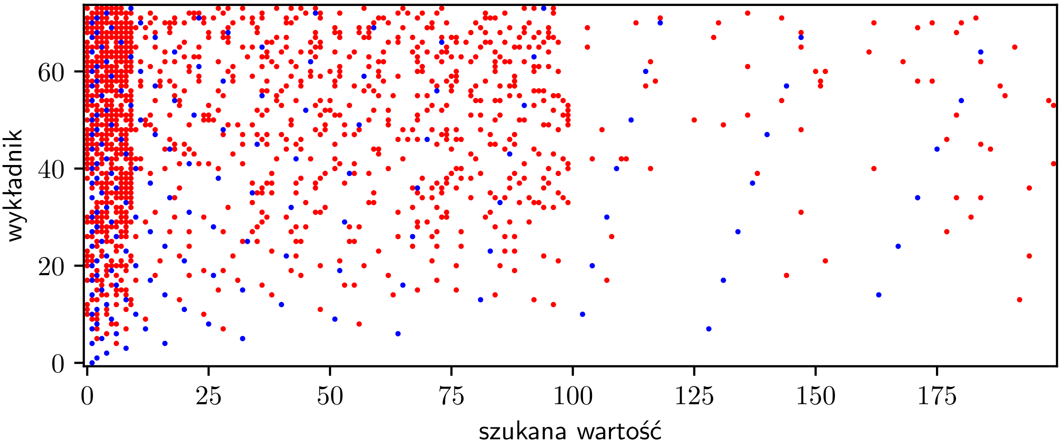
Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, . . . .

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- 70000000 zawiera się w $2^{9452}$,
- 2000000000 zawiera się w $2^{100824}$.

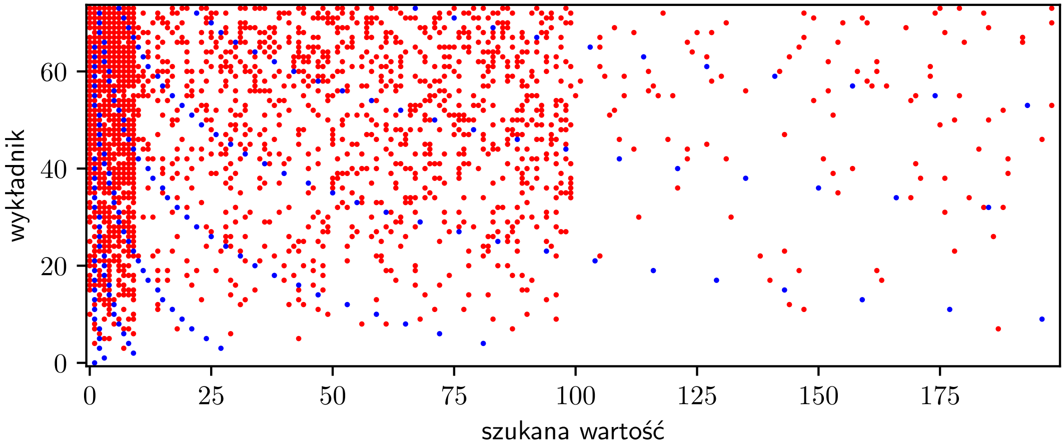
Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ....

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- 70000000 zawiera się w $2^{9452}$,
- 2000000000 zawiera się w $2^{100824}$.

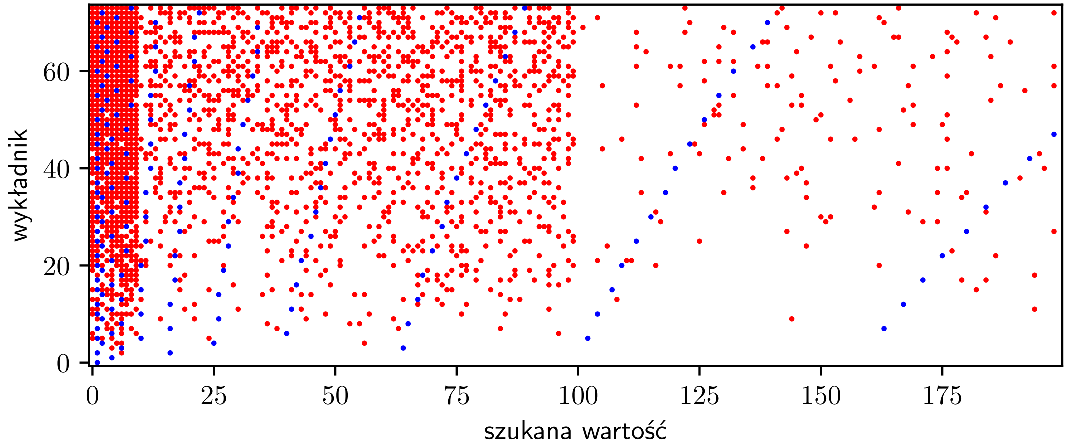
Czy prawdą jest, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba $2^w$ zawiera liczbę $n$?



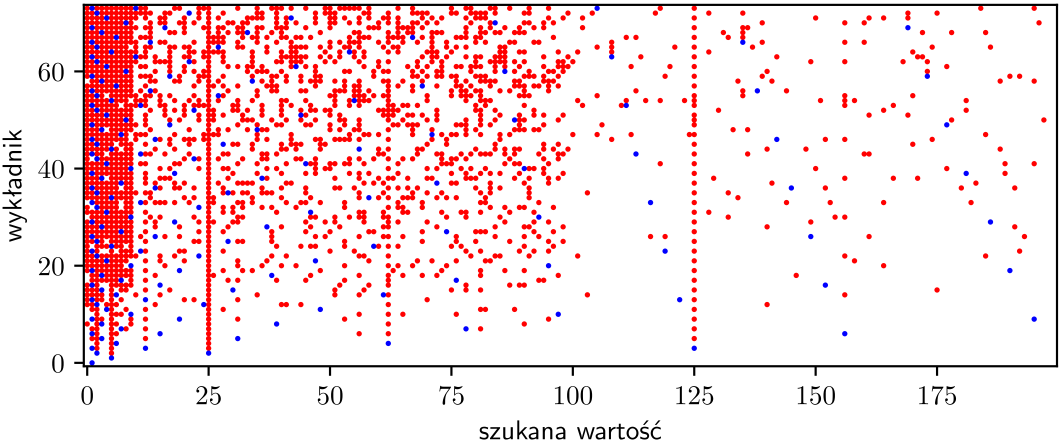

Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $2^y$. Kolor niebieski oznacza, że $2^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.



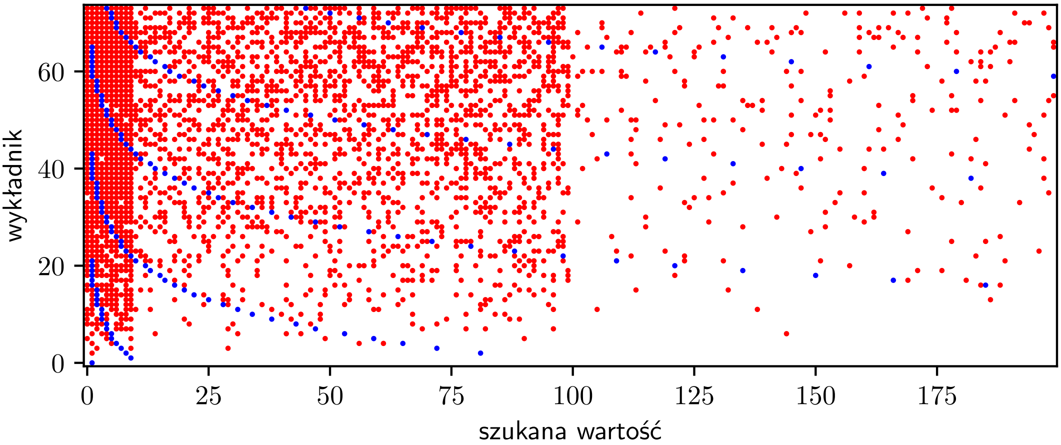

Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $3^y$. Kolor niebieski oznacza, że $3^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.



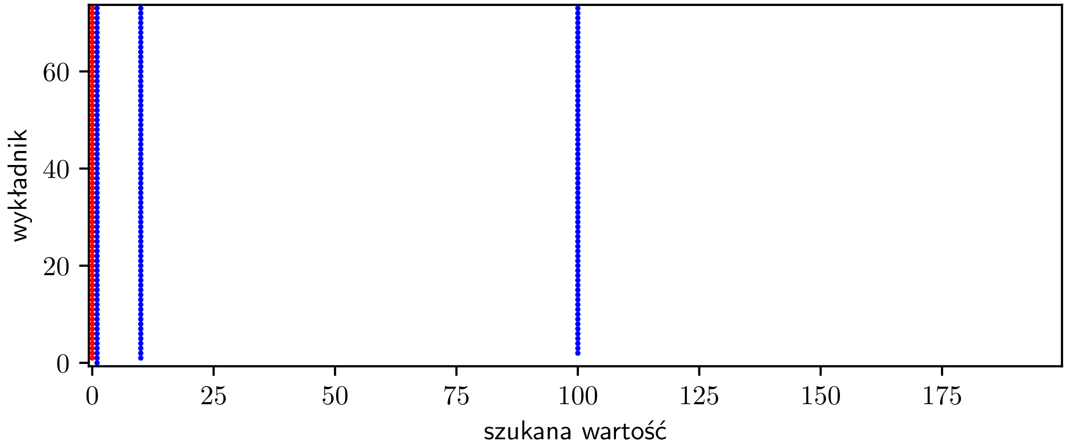

Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $4^y$. Kolor niebieski oznacza, że $4^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.



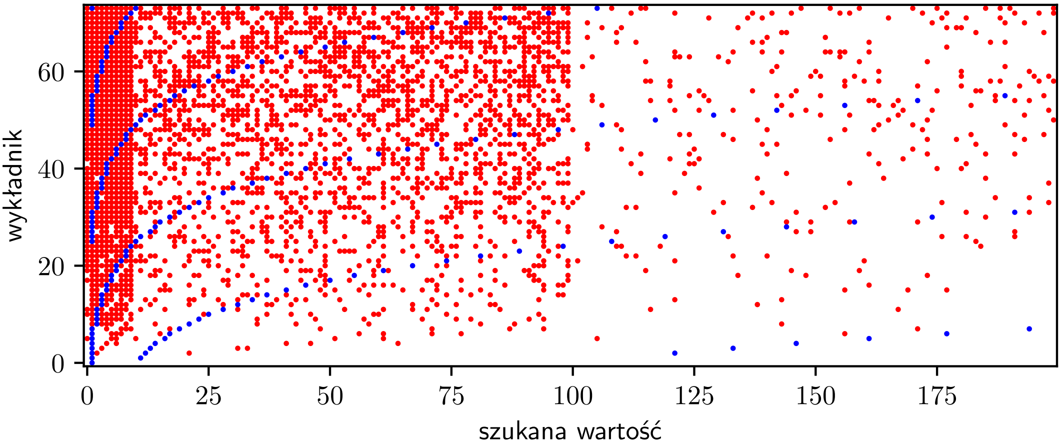

Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $5^y$. Kolor niebieski oznacza, że $5^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.




Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $9^y$. Kolor niebieski oznacza, że $9^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.




Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $10^y$. Kolor niebieski oznacza, że $10^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.




Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $11^y$. Kolor niebieski oznacza, że $11^y$ *zaczyna się* liczbą $x$.

## Twierdzenie 3

*Niech* $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* $p^w$ *zawiera liczbę* $n$.

### Twierdzenie 3

*Niech* $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* $p^w$ *zawiera liczbę* $n$.

### Lemat 4

*Niech* $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* $p^w$ *zaczyna się liczbą* $n$.

## Twierdzenie 3

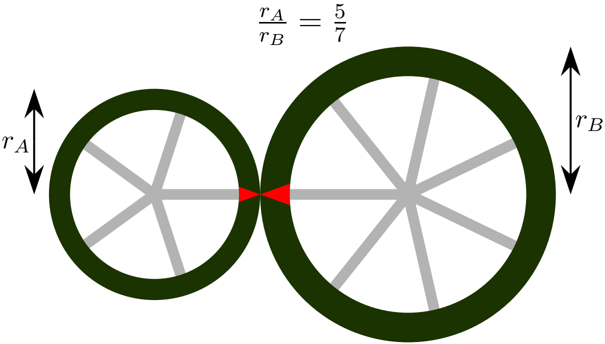
*Niech* $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* $p^w$ *zawiera liczbę* $n$.

## Lemat 4

*Niech* $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* $p^w$ *zaczyna się liczbą* $n$.

## Lemat 5

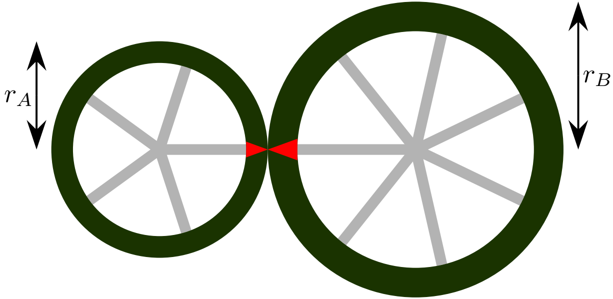
$\log_{10} p \in \mathbb{Q}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $p = 10^r$, *dla pewnego* $r \in \mathbb{N}_0$.




## Twierdzenie 6

*Jeżeli* $\frac{r_A}{r_B} = \frac{a}{b}$, $\mathtt{NWD}(a, b) = 1$, *to po wykonaniu* $b$ *obrotów przez koło* $A$ *(*$a$ *obrotów przez koło* $B$*) znaczniki będą w tym samym położeniu.*

$$\frac{r_A}{r_B} = \sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$



## Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* $x$ nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$ i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

## Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* $x$ nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$ i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

## Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

## Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* $x$ nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$ i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
*Część ułamkową liczby* $x$ definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \tag{1}$$

## Przykład 8

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

## Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* $x$ nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$ i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
*Część ułamkową liczby* $x$ definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)\,. \tag{1}$$

## Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

## Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* $x$ nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$ i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
*Część ułamkową liczby* $x$ definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1) . \tag{1}$$

## Przykład 8

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\{\pi\} = 0{,}14159265\ldots$,
- $\lfloor 15 \rfloor = 15$, $\{15\} = 0$,

## Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* $x$ nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$ i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
*Część ułamkową liczby* $x$ definiujemy wzorem

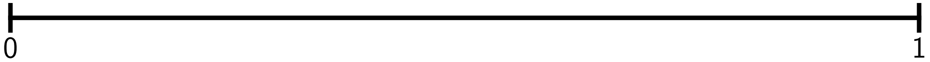
$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1) \,. \tag{1}$$

## Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\{\pi\} = 0{,}14159265\ldots$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$, $\{15\} = 0$,
- ▷ $\lfloor -4{,}25 \rfloor = -5$, $\{-4{,}25\} = 0{,}75$.

## Przykład 9

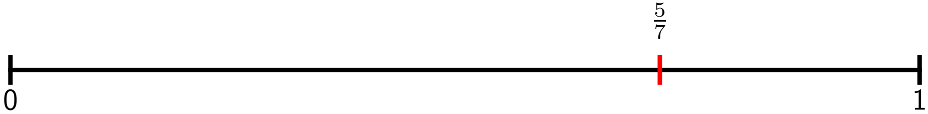
Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.



## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{\frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$



### Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n\cdot\frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{2\cdot\frac{5}{7}\right\}=\frac{3}{7}$$

## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{3 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{1}{7}$$

## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n\cdot\frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{4\cdot\frac{5}{7}\right\}=\frac{6}{7}$$

## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{5 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{4}{7}$$

## Przykład 9

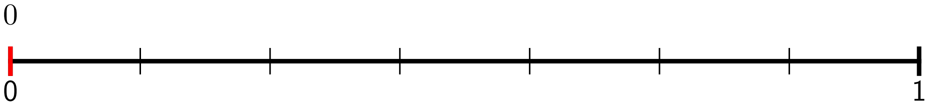
Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{6 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{2}{7}$$

## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{7 \cdot \frac{5}{7}\right\} = 0$$



## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{8 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$

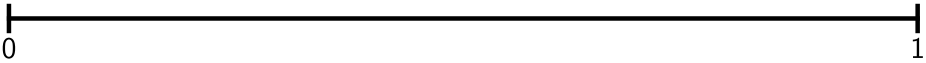
## Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{9 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$

## Przykład 10

Rozważmy ciąg $(\{n\pi\})_{n\in\mathbb{N}}$.




## Twierdzenie 11 ([2, 4])

*Jeżeli $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to ciąg $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, tzn. dowolny punkt przedziału $[0, 1]$ może zostać dowolnie dokładnie przybliżony wyrazami ciągu $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N})\,, \tag{2}$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- ▷ $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ▷ $10^{\log_{10}\alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- ▷ $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$,

$$\log_{10} p^w = w \log_{10} p \quad (p, w \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

# Dowód lematu 4.

# Dowód lematu 4.

$$p^w$$

## Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w}$$

## Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p}$$

# Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$

# Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w\log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w\log_{10} p\rfloor + \{w\log_{10} p\}}$$

$$\overset{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w\log_{10} p\rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w\log_{10} p\}}.$$

# Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$
$$\overset{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.$$

- $10^{\log_{10} 1{,}2345} = 1{,}2345,$

## Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$
$$\overset{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.$$

- ▷ $10^{\log_{10} 1{,}2345} = 1{,}2345,$
- ▷ $10^{\log_{10} c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l} = c_1{,}c_2c_3c_3 \ldots c_l.$

## Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$
$$\overset{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.$$

- $10^{\log_{10} 1{,}2345} = 1{,}2345$,
- $10^{\log_{10} c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l} = c_1{,}c_2c_3c_3 \ldots c_l$.

Niech $n = c_1c_2c_3 \ldots c_l$,

# Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$
$$\overset{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.$$

- $10^{\log_{10} 1{,}2345} = 1{,}2345$,
- $10^{\log_{10} c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l} = c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l$.

Niech $n = c_1c_2c_3\ldots c_l$, wobec twierdzenia 11 istnieje $w > \frac{l}{\log_{10} p}$ takie, że $\{w \log_{10} p\}$ jest *wystarczająco dobrym* przybliżeniem $\log_{10} c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l$. $\square$

## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby*.

## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby*.

## Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$*, to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby*.

## Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$*, to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

## Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $p_n$ oznacza $n$-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),

## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$*, to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

## Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $p_n$ oznacza $n$-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- $(\{k \log_{10} n\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby*.

## Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $p_n$ oznacza $n$-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- $(\{k \log_{10} n\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,
- $(\{\log_{10} n!\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n\in\mathbb{N}}$ (zob. [1]),

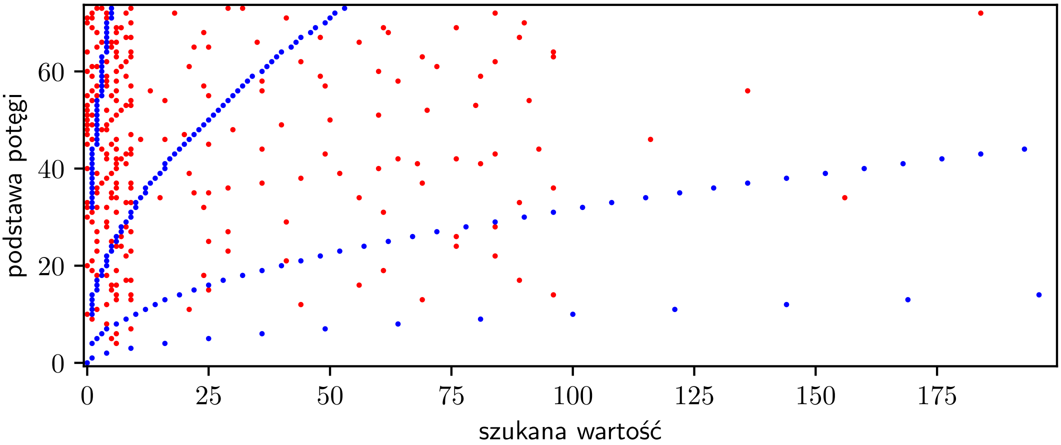
## Twierdzenie 12

*Jeżeli* $(\{\log_{10} a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby*.

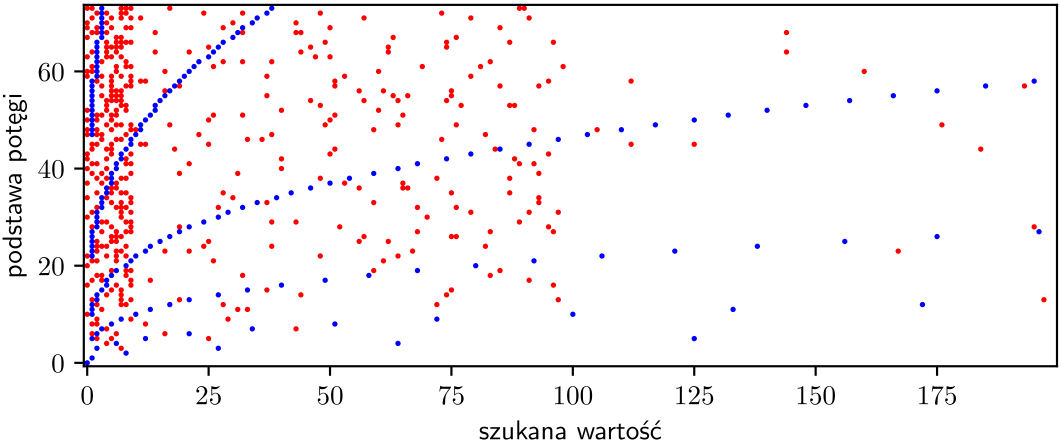
## Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $p_n$ oznacza $n$-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- $(\{k \log_{10} n\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,
- $(\{\log_{10} n!\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n\in\mathbb{N}}$ (zob. [1]),

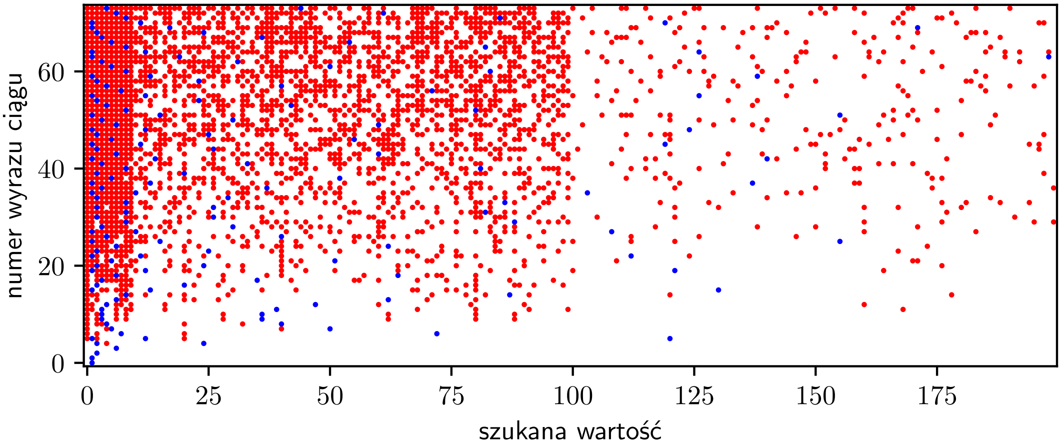
Prezentacja: `https://github.com/vil02/pi2021/`




Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $y^2$. Kolor niebieski oznacza, że $y^2$ *zaczyna się* liczbą $x$.




Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $y^3$. Kolor niebieski oznacza, że $y^3$ *zaczyna się* liczbą $x$.




Rysunek: Punkt $(x, y)$ jest zaznaczony na czerwono, jeżeli $x$ zawiera się w $y!$. Kolor niebieski oznacza, że $y!$ *zaczyna się* liczbą $x$.

## Dowód lematu 5.

Załóżmy, że $\log_{10} p = \frac{a}{b}$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas $10^{\frac{a}{b}} = p$, stąd $10^a = p^b$, i ponadto $2^a 5^a = p^b$. Zatem $p = 2^r 5^s$, dla pewnych $r, s \in \mathbb{N}$. Pozostaje pokazać, że $r = s$. Istotnie, $2^{rb} 5^{sb} = 2^a 5^a$, skąd $a = rb = sb$, więc $r = s$. A zatem $p = 2^r 5^r = 10^r$. $\square$

Persi Diaconis.
The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1.
*The Annals of Probability*, 5(1):72–81, Feb 1977.

Wacław Sierpiński.
O wartości asymptotycznej pewnej sumy.
*Rozprawy Akademii Umiejętności w Krakowie, Wydział mat. przyrod.*, 50:1–10, 1910.

Ivan. M. Vinogradov.
On the distribution of products of prime numbers and the numerical function of Möbius.
*Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 12:341–350, 1948.

Hermann Weyl.
Über die gleichverteilung von zahlen mod. eins.
*Mathematische Annalen*, 77(3):313–352, Sep 1916.