Co można znaleźć w potęgach dwójki?

Piotr Idzik
vil02@o2.pl

Karlsruhe, Katowice, 15.03.2021

ver. 07/03/2021 00:50:49

Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba a *zawiera* liczbę b, jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby b jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby a.

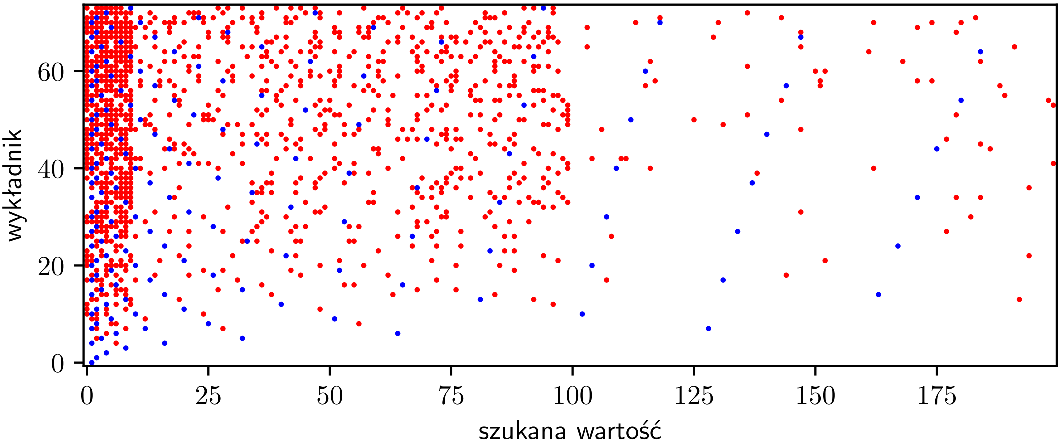
Przykład 2

- liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,
- liczba 128 nie zawiera liczby 18.

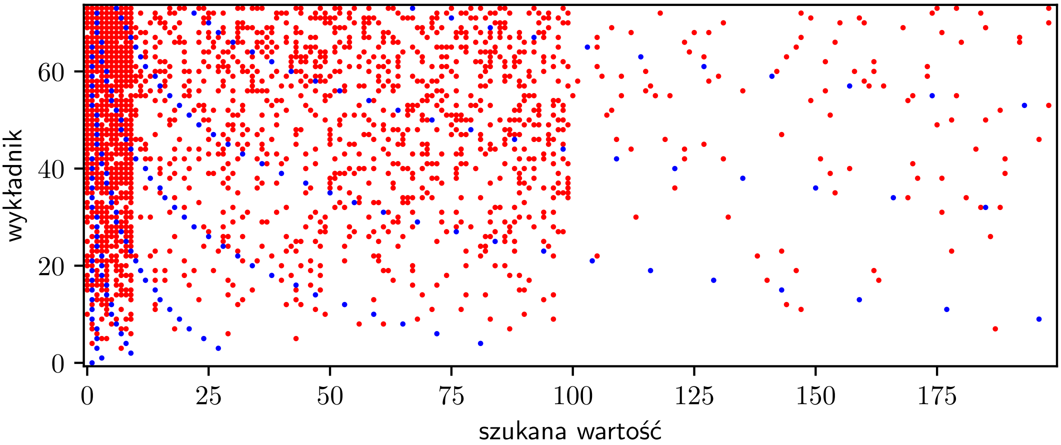
Rozważmy ciąg $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ...
Zauważmy, że

- 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- 70000000 zawiera się w 2^{9452},
- 2000000000 zawiera się w 2^{100824}.

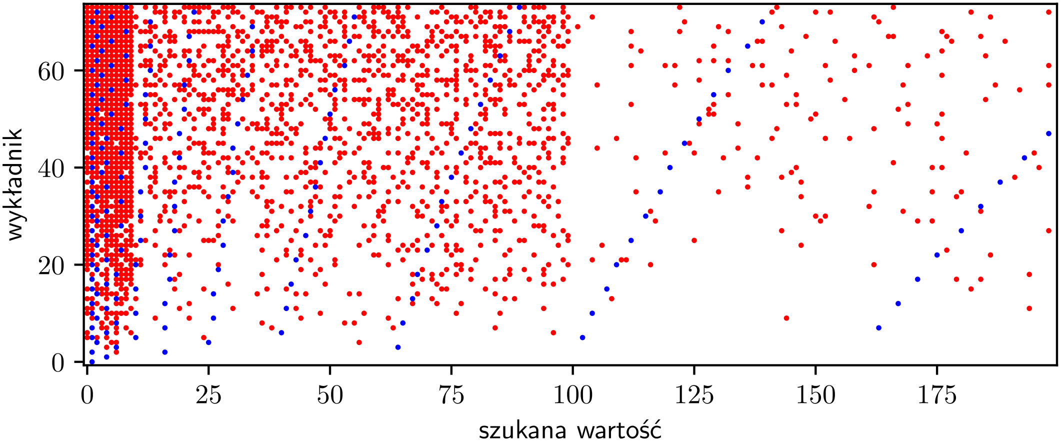
Czy prawdą jest, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba 2^w zawiera liczbę n?



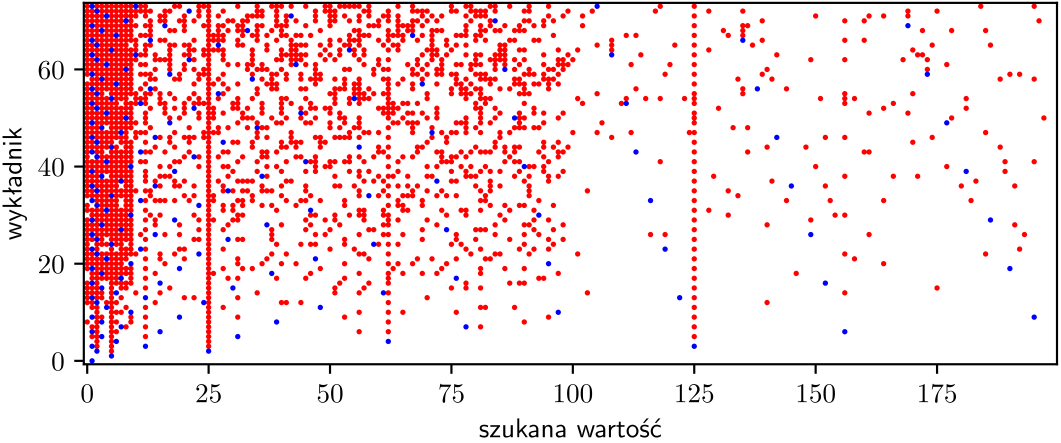
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 2^y. Kolor niebieski oznacza, że 2^y *zaczyna się* liczbą x.



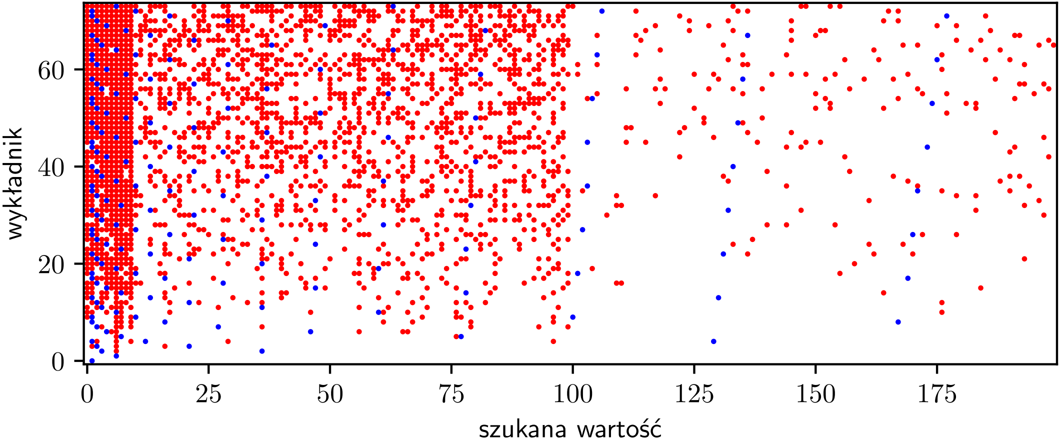
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 3^y. Kolor niebieski oznacza, że 3^y *zaczyna się* liczbą x.



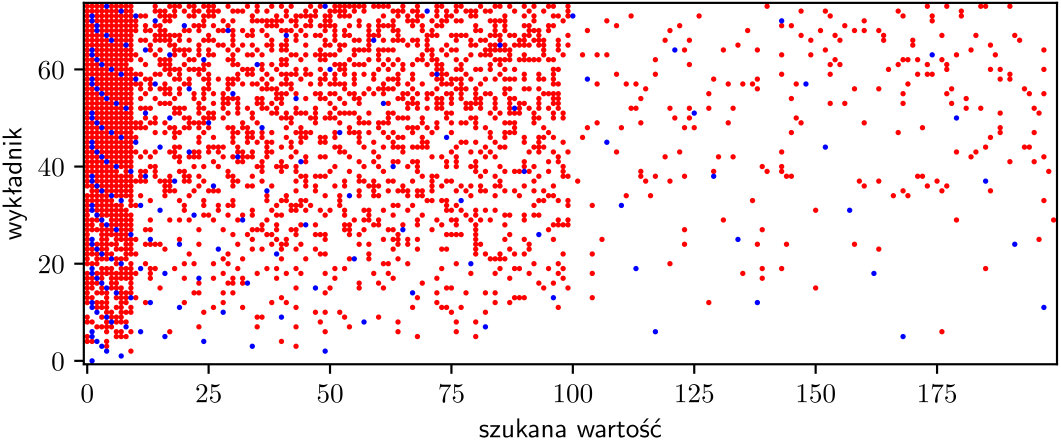
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 4^y. Kolor niebieski oznacza, że 4^y *zaczyna się* liczbą x.



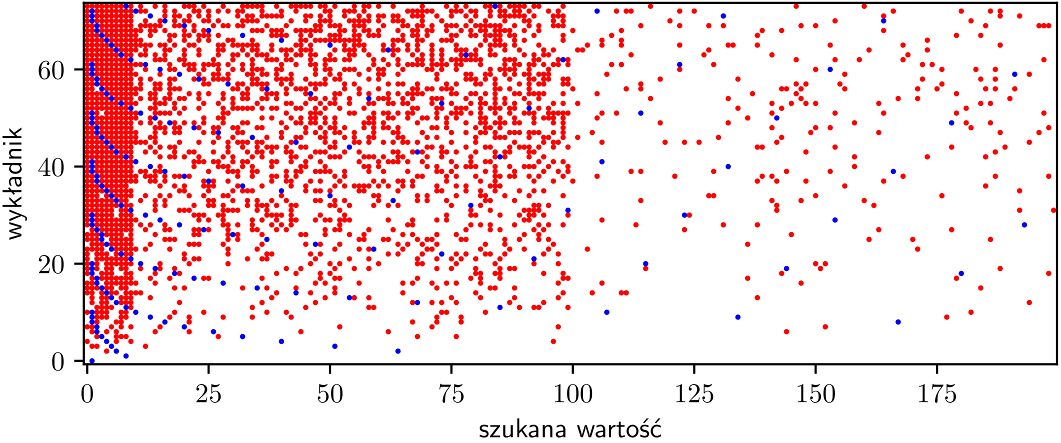
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 5^y. Kolor niebieski oznacza, że 5^y *zaczyna się* liczbą x.



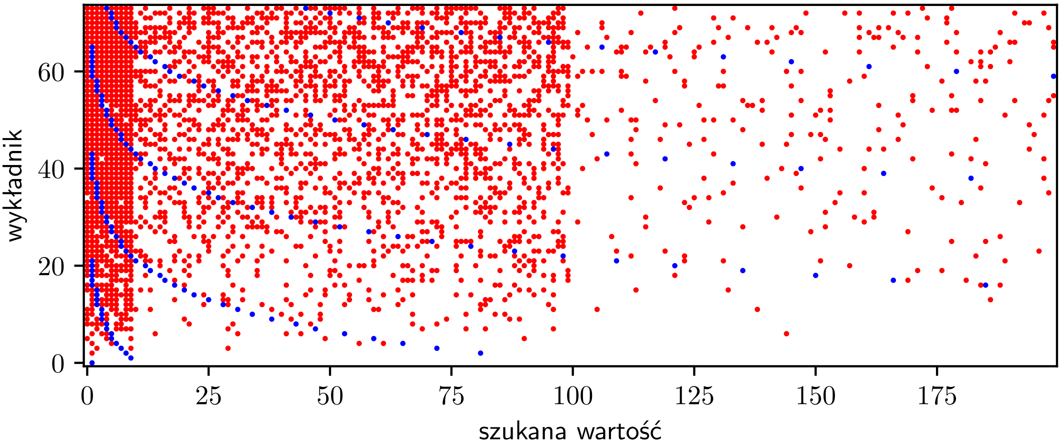
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 6^y. Kolor niebieski oznacza, że 6^y *zaczyna się* liczbą x.



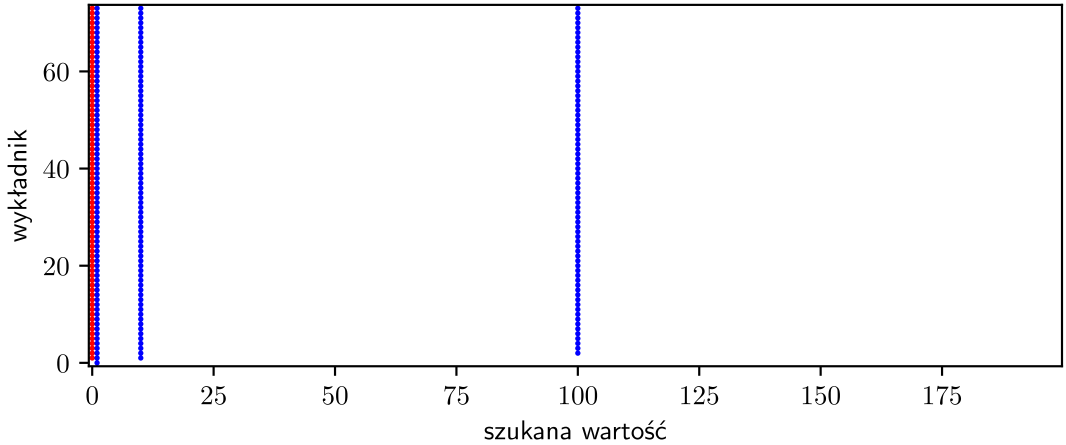
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 7^y. Kolor niebieski oznacza, że 7^y *zaczyna się* liczbą x.



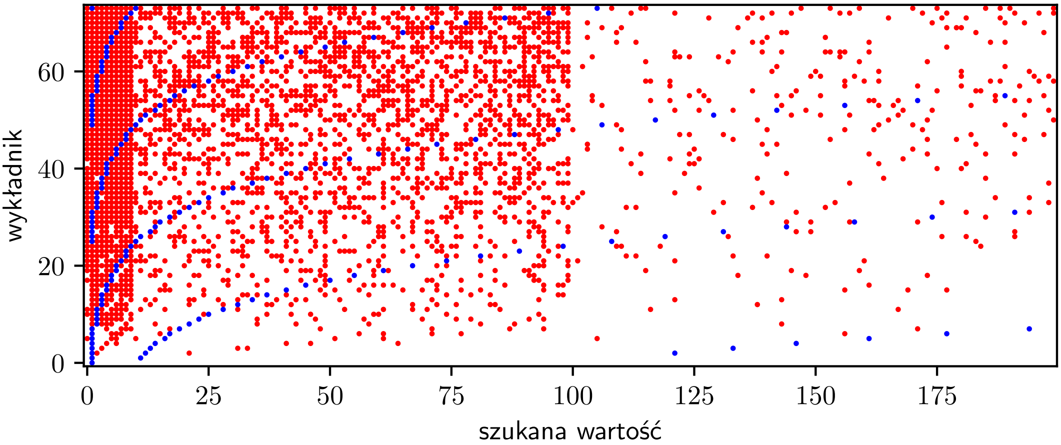
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 8^y. Kolor niebieski oznacza, że 8^y *zaczyna się* liczbą x.



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 9^y. Kolor niebieski oznacza, że 9^y *zaczyna się* liczbą x.



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 10^y. Kolor niebieski oznacza, że 10^y *zaczyna się* liczbą x.



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 11^y. Kolor niebieski oznacza, że 11^y *zaczyna się* liczbą x.

Twierdzenie 3

Niech $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* p^w *zawiera liczbę* n.

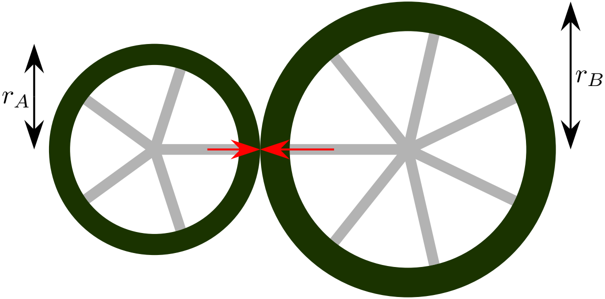
Lemat 4

Niech $p \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że* $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Wówczas dla dowolnej liczby* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje taki wykładnik* $w \in \mathbb{N}$, *że liczba* p^w *rozpoczyna się liczbą* n.

Lemat 5

$\log_{10} p \in \mathbb{Q}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $p = 10^r$, *dla pewnego* $r \in \mathbb{N}_0$.

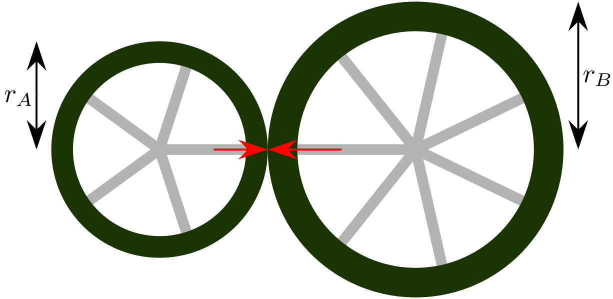
$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{5}{7}$$



Twierdzenie 6

Jeżeli $\frac{r_A}{r_B} = \frac{a}{b}$, $\mathtt{NWD}(a, b) = 1$, *to po wykonaniu* b *obrotów przez koło* A *(*a *obrotów przez koło* B*)* *znaczniki* *będą w tym samym położeniu.*

$$\frac{r_A}{r_B} = \sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$



Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Przykład 8

- $\lfloor \pi \rfloor = 3,$
- $\lfloor 15 \rfloor = 15,$

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \tag{1}$$

Przykład 8

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)\,. \tag{1}$$

Przykład 8

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)\,. \tag{1}$$

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\{\pi\} = 0{,}14159265\ldots$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$, $\{15\} = 0$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.
Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

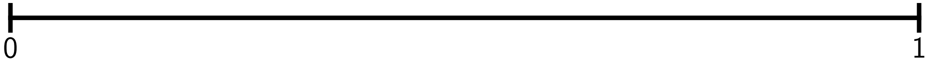
$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1) . \tag{1}$$

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\{\pi\} = 0{,}14159265\ldots$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$, $\{15\} = 0$,
- ▷ $\lfloor -4{,}25 \rfloor = -5$, $\{-4{,}25\} = 0{,}75$.

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{\frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{2 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{3 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{1}{7}$$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{4 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{6}{7}$$

Przykład 9

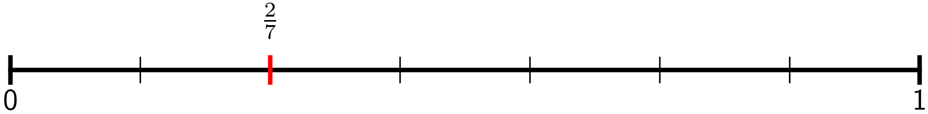
Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{5 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{4}{7}$$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

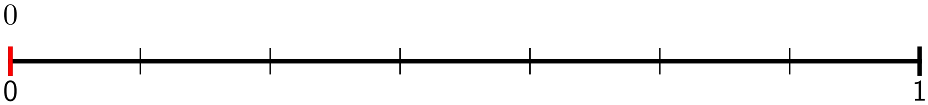
$$\left\{6 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{2}{7}$$



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{7 \cdot \frac{5}{7}\right\} = 0$$



Przykład 9

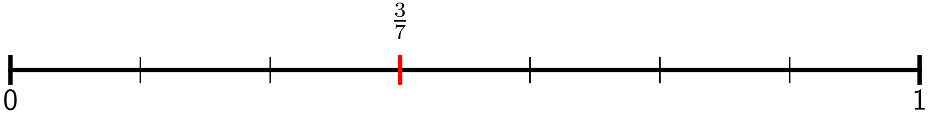
Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{8 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$

Przykład 9

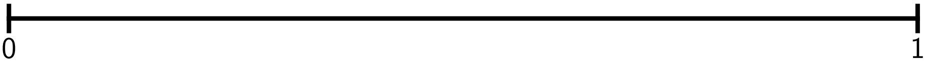
Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left\{9 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$



Przykład 10

Rozważmy ciąg $(\{n\pi\})_{n\in\mathbb{N}}$.



Twierdzenie 11 ([2, 4])

Jeżeli $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *to ciąg* $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *tzn. dowolny punkt przedziału* $[0,1]$ *może zostać dowolnie dokładnie przybliżony wyrazami ciągu* $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$.

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N})\,, \tag{2}$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N})\,, \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R})\,, \tag{3}$$

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$,

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- $\log_{10} 10^\alpha = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
- $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ldots, \log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots, \log_{10} 4 = 0{,}60205\ldots \overset{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1 + w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$,

$$\log_{10} p^w = w \log_{10} p \quad (p, w \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Dowód lematu 4.

$$p^w \overset{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \overset{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \overset{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$
$$\overset{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.$$

- $10^{\log_{10} 1{,}2345} = 1{,}2345$,
- $10^{\log_{10} c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l} = c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l$.

Niech $n = c_1c_2c_3\ldots c_l$, wobec twierdzenia 11 istnieje $w > \frac{l}{\log_{10} p}$ takie, że $\{w \log_{10} p\}$ jest *wystarczająco dobrym* przybliżeniem $\log_{10} c_1{,}c_2c_3c_3\ldots c_l$. $\square$

Twierdzenie 12

Jeżeli $\{\log_{10} a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

Twierdzenie 12

Jeżeli $\{\log_{10} a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

Twierdzenie 12

Jeżeli $\{\log_{10} a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

Przykład 13

- $(\{n\log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k\log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

Twierdzenie 12

Jeżeli $\{\log_{10} a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),

Twierdzenie 12

Jeżeli $\{\log_{10} a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

Przykład 13

- $(\{n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- $(\{k \log_{10} n\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

Twierdzenie 12

Jeżeli $\{\log_{10} a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$, *to ciąg* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zawiera wszystkie liczby.*

Przykład 13

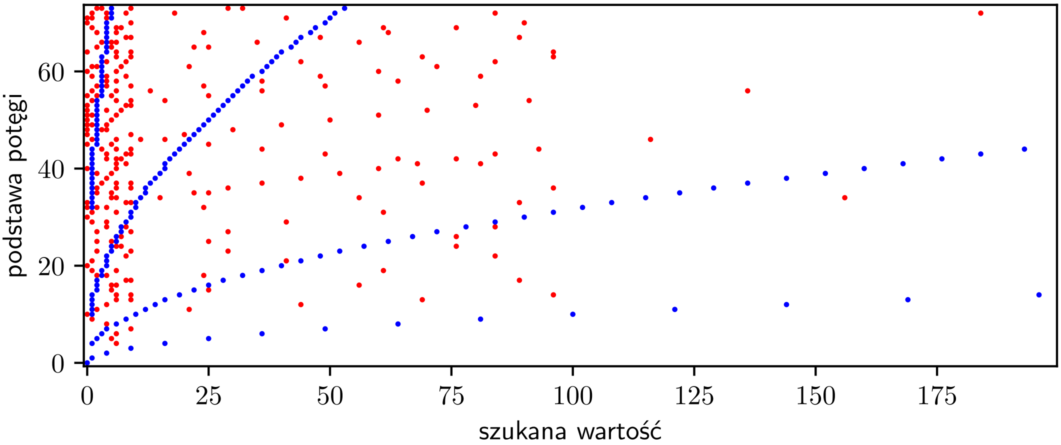
- $(\{n\log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(\left\{n^k\log_{10} 2\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(\{p_n\log_{10} 2\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- $(\{k\log_{10} n\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$,
- $(\{\log_{10} n!\})_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n\in\mathbb{N}}$ (zob. [1]),

Persi Diaconis.
The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1.
The Annals of Probability, 5(1):72–81, Feb 1977.

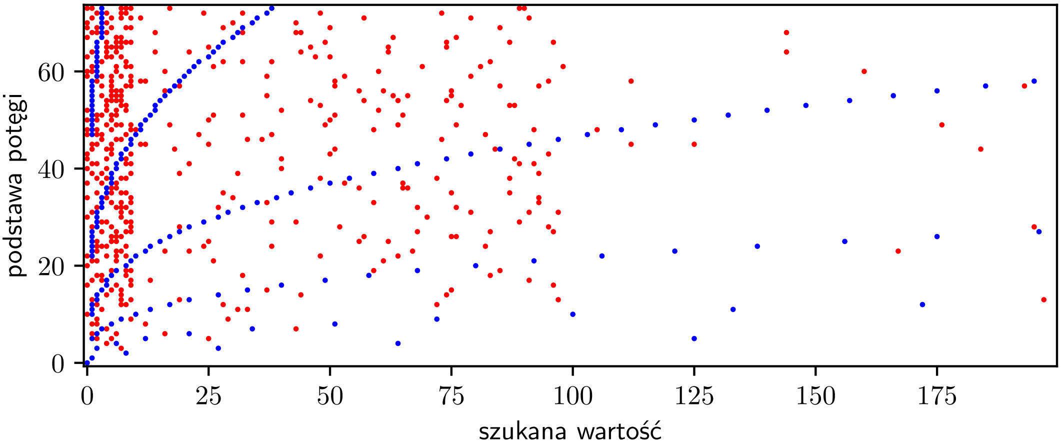
Wacław Sierpiński.
O wartości asymptotycznej pewnej sumy.
Rozprawy Akademii Umiejętności w Krakowie, Wydział mat. przyrod., 50:1–10, 1910.

Ivan. M. Vinogradov.
On the distribution of products of prime numbers and the numerical function of Möbius.
Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 12:341–350, 1948.

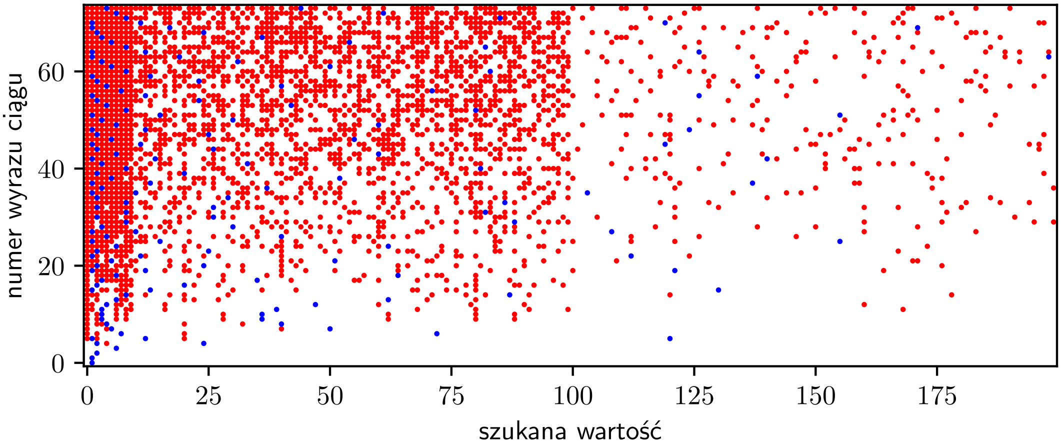
Hermann Weyl.
Über die gleichverteilung von zahlen mod. eins.
Mathematische Annalen, 77(3):313–352, Sep 1916.



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w y^2. Kolor niebieski oznacza, że y^2 *zaczyna się* liczbą x.



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w y^3. Kolor niebieski oznacza, że y^3 *zaczyna się* liczbą x.



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w $y!$. Kolor niebieski oznacza, że $y!$ *zaczyna się* liczbą x.

Dowód lematu 5.

Załóżmy, że $\log_{10} p = \frac{a}{b}$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas $10^{\frac{a}{b}} = p$, stąd $10^a = p^b$, i ponadto $2^a 5^a = p^b$. Zatem $p = 2^r 5^s$, dla pewnych $r, s \in \mathbb{N}$. Pozostaje pokazać, że $r = s$. Istotnie, $2^{rb} 5^{sb} = 2^a 5^a$, skąd $a = rb = sb$, więc $r = s$. A zatem $p = 2^r 5^r = 10^r$. $\square$