

Co można znaleźć w potęgach dwójką?

dr Piotr Idzik
vil02@o2.pl

Karlsruhe, Katowice, 15.03.2021



ver. 13.08.2021 17:52:37

- └ Sformułowanie problemu
- └ *Zawieranie się liczb*

Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba a *zawiera* liczbę b , jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby b jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby a .

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Sformułowanie problemu
- └ *Zawieranie się liczb*

Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba a *zawiera* liczbę b , jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby b jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby a .

Przykład 2

- ▷ liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,

└ Sformułowanie problemu

└ *Zawieranie się liczb*

Definicja 1

Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba a *zawiera* liczbę b , jeżeli reprezentacja dziesiętna liczby b jest podłańcuchem reprezentacji dziesiętnej liczby a .

Przykład 2

- ▷ liczba 128 zawiera liczby 12 oraz 28,
- ▷ liczba 128 nie zawiera liczby 18.

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

└ Sformułowanie problemu

└ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

└ Sformułowanie problemu

└ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

▷ 28 zawiera się w $2^7 = 128$,

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

- ▷ 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- ▷ 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

- ▷ 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- ▷ 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- ▷ 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

- ▷ 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- ▷ 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- ▷ 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- ▷ 70000000 zawiera się w 2^{9452} ,

- └ Sformułowanie problemu
- └ Potęgi dwójkii

Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

- ▷ 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- ▷ 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- ▷ 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- ▷ 70000000 zawiera się w 2^{9452} ,
- ▷ 2000000000 zawiera się w 2^{100824} .

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

└ Sformułowanie problemu

└ Potęgi dwójkii

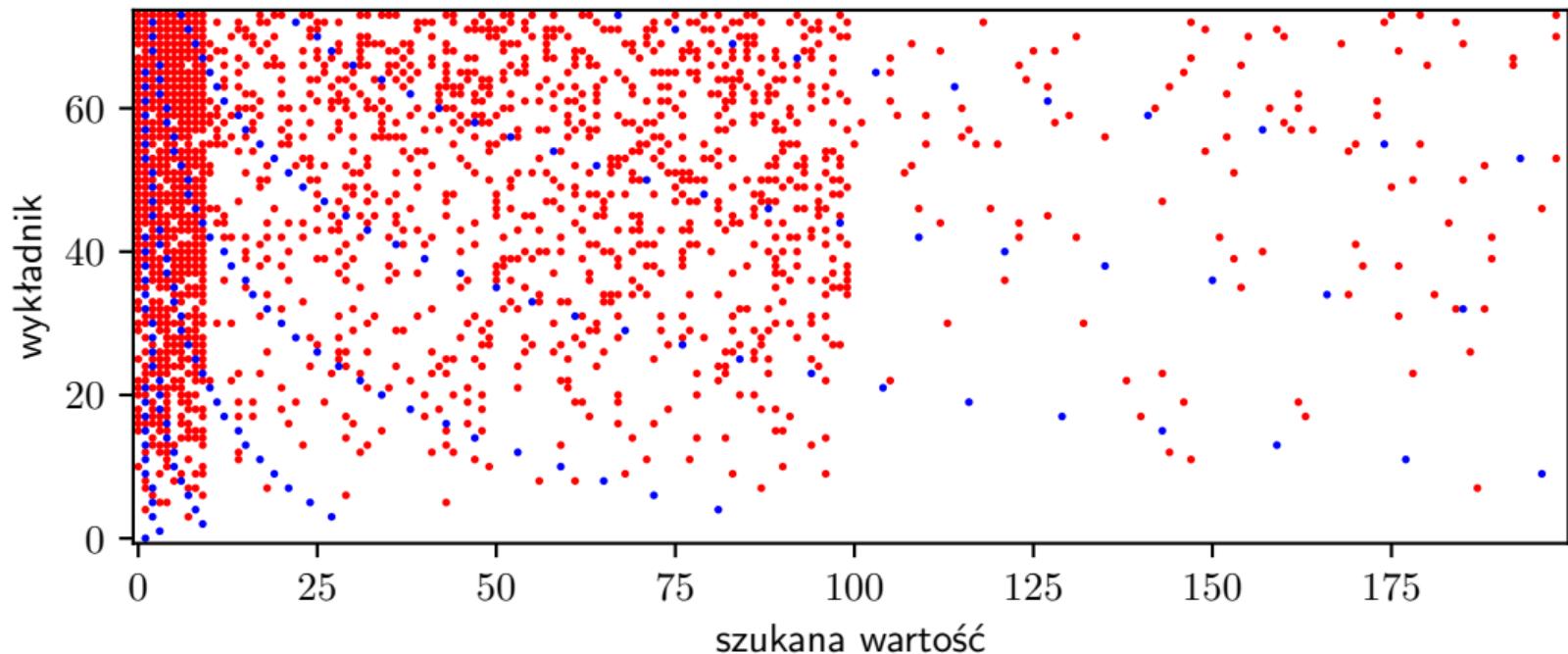
Rozważmy ciąg $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, tzn. liczby 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

- ▷ 28 zawiera się w $2^7 = 128$,
- ▷ 314 zawiera się w $2^{74} = 18889465931478580854784$,
- ▷ 31415 zawiera się w $2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416$,
- ▷ 70000000 zawiera się w 2^{9452} ,
- ▷ 2000000000 zawiera się w 2^{100824} .

Czy prawdą jest, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba 2^w zawiera liczbę n ?



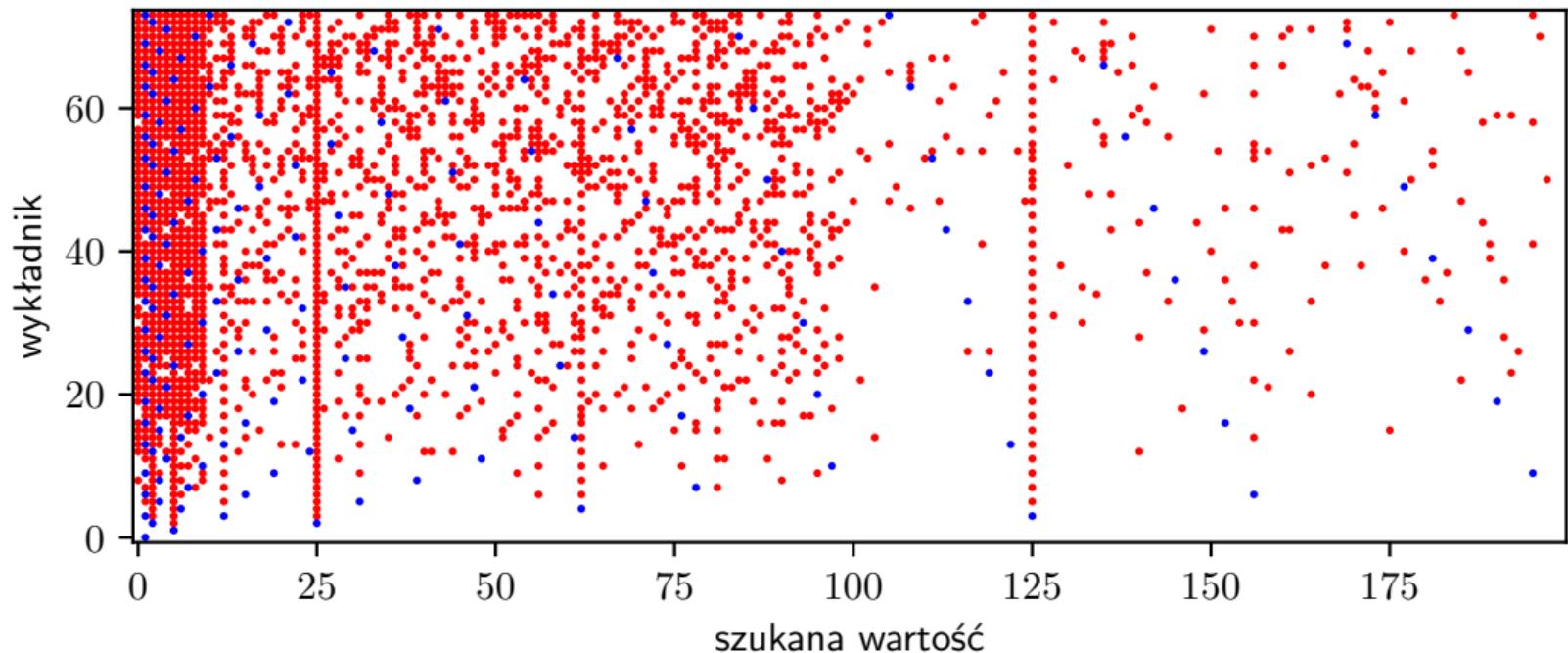
Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 2^y . Kolor niebieski oznacza, że 2^y zaczyna się liczbą x .



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 3^y . Kolor niebieski oznacza, że 3^y zaczyna się liczbą x .



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 4^y . Kolor niebieski oznacza, że 4^y zaczyna się liczbą x .



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 5^y . Kolor niebieski oznacza, że 5^y zaczyna się liczbą x .



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 9^y . Kolor niebieski oznacza, że 9^y zaczyna się liczbą x .

└ Symulacje komputerowe



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na **czerwono**, jeżeli x zawiera się w 10^y . Kolor **niebieski** oznacza, że 10^y **zaczyna się** liczbą x .

└ Symulacje komputerowe



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w 11^y . Kolor niebieski oznacza, że 11^y zaczyna się liczbą x .

└ Główne twierdzenie

└ Główne twierdzenie

Twierdzenie 3

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}_0$. Wówczas dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba p^w zawiera liczbę n .

└ Główne twierdzenie

Twierdzenie 3

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}_0$. Wówczas dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba p^w zawiera liczbę n .

Lemat 4

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba p^w zaczyna się liczbą n .



└ Główne twierdzenie

Twierdzenie 3

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $p \neq 10^r$, $r \in \mathbb{N}_0$. Wówczas dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba p^w zawiera liczbę n .

Lemat 4

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\log_{10} p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki wykładnik $w \in \mathbb{N}$, że liczba p^w zaczyna się liczbą n . 

Lemat 5

$\log_{10} p \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 10^r$, dla pewnego $r \in \mathbb{N}_0$. 

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Liczby wymierne i niewymierne

Twierdzenie 6

Jeżeli $\frac{r_A}{r_B} = \frac{a}{b}$, $\text{NWD}(a, b) = 1$, to po wykonaniu b obrotów przez koło A (a obrotów przez koło B) znaczniki będą w tym samym położeniu.

Co można znaleźć w potęgach dwójką?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
 - └ Liczby wymierne i niewymierne

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Część ułamkowa liczby

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Część ułamkowa liczby

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad (1)$$

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1). \quad (1)$$

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1). \quad (1)$$

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\{\pi\} = 0,14159265\dots$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$, $\{15\} = 0$,

Definicja 7

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Częścią całkowitą liczby* x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Część ułamkową liczby x definiujemy wzorem

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1). \quad (1)$$

Przykład 8

- ▷ $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\{\pi\} = 0,14159265\dots$,
- ▷ $\lfloor 15 \rfloor = 15$, $\{15\} = 0$,
- ▷ $\lfloor -4,25 \rfloor = -5$, $\{-4,25\} = 0,75$.

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.



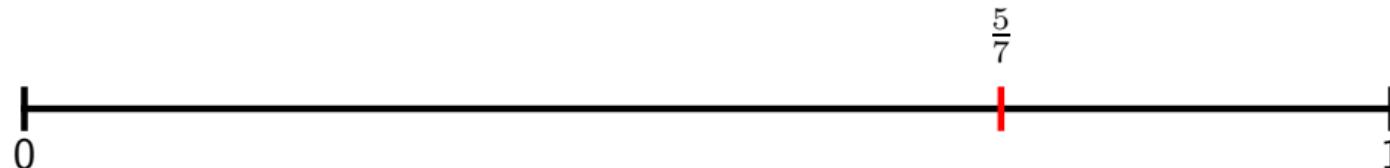
Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
- └ O ciągach $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{ \frac{5}{7} \right\} = \frac{5}{7}$$



Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

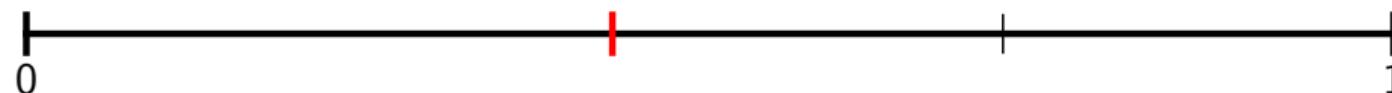
└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ O ciągach $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

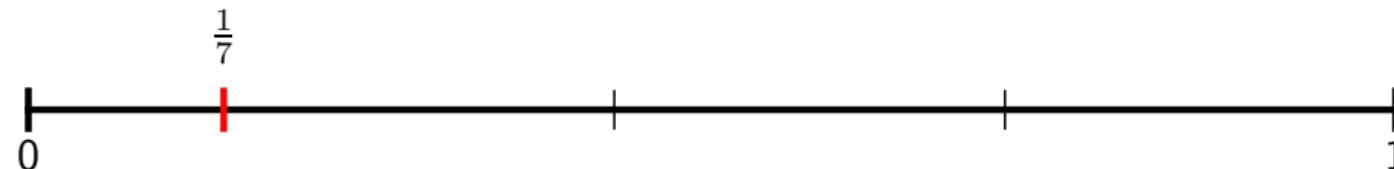
$$\left\{2 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{3 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{1}{7}$$



Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

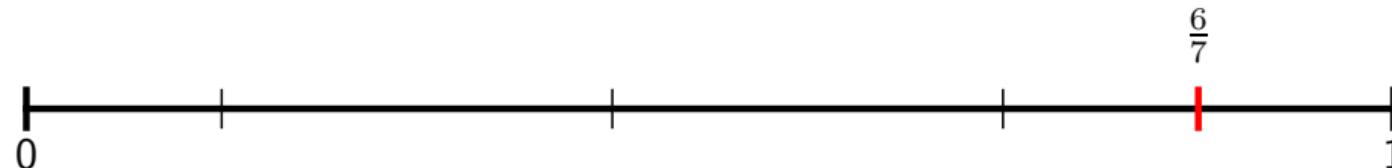
└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ O ciągach $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{ 4 \cdot \frac{5}{7} \right\} = \frac{6}{7}$$



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{ 5 \cdot \frac{5}{7} \right\} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{4}{7}$$



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{ 6 \cdot \frac{5}{7} \right\} = \frac{2}{7}$$



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{7 \cdot \frac{5}{7}\right\} = 0$$



Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

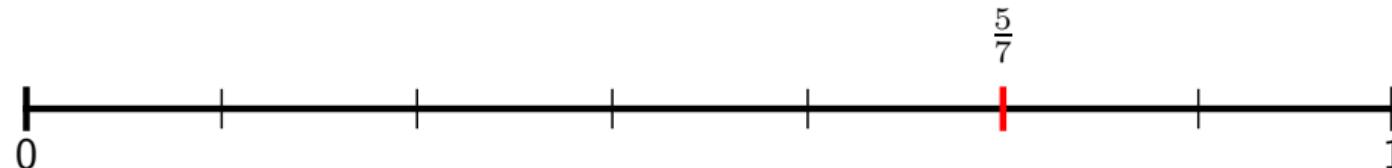
└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ O ciągach $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$

Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{8 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$



Przykład 9

Rozważmy ciąg $\left(\left\{n \cdot \frac{5}{7}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{9 \cdot \frac{5}{7}\right\} = \frac{3}{7}$$



Przykład 10

Rozważmy ciąg $(\{n\pi\})_{n \in \mathbb{N}}$.

Twierdzenie 11 ([2, 4])

Jeżeli $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to ciąg $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, tzn. dowolny punkt przedziału $[0, 1]$ może zostać dowolnie dokładnie przybliżony wyrazami ciągu $(\{n\gamma\})_{n \in \mathbb{N}}$.

Co można znaleźć w potęgach dwójkii?

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
 - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots$

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ▷ $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

└ Przygotowania do dowodu lematu 4

└ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ▷ $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
 - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ▷ $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
 - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ▷ $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- ▷ $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$ ($x_1, x_2 > 0$),

- └ Przygotowania do dowodu lematu 4
 - └ Logarytmy dziesiętne

$$10^w = s \iff \log_{10} s = w,$$

- ▷ $\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$,
- ▷ $\log_{10} 10^\alpha = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- ▷ $\log_{10} 2 = 0,30102\dots$, $\log_{10} 3 = 0,47712\dots$, $\log_{10} 4 = 0,60205\dots \stackrel{\text{Lemat 5}}{\in} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ▷ $10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

$$10^{\log_{10} p^w} = p^w \quad (p, w \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

$$10^{w_1+w_2} = 10^{w_1} \cdot 10^{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

- ▷ $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$ ($x_1, x_2 > 0$),
- $\log_{10} p^w = w \log_{10} p$ ($p, w \in \mathbb{N}$). (4)

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$p^w$$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w}$$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p}$$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$p^w \stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}}$$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

$$\triangleright 10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

- ▷ $10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$
- ▷ $10^{\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l} = c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l.$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned} p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\dots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}. \end{aligned}$$

- ▷ $10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$
- ▷ $10^{\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l} = c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l.$

Niech $n = c_1 c_2 c_3 \dots c_l,$

└ Dowód lematu 4

Dowód lematu 4.

$$\begin{aligned}
 p^w &\stackrel{(2)}{=} 10^{\log_{10} p^w} \stackrel{(4)}{=} 10^{w \log_{10} p} \stackrel{(1)}{=} 10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor + \{w \log_{10} p\}} \\
 &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{10^{\lfloor w \log_{10} p \rfloor}}_{10\ldots0} \cdot 10^{\{w \log_{10} p\}}.
 \end{aligned}$$

- ▷ $10^{\log_{10} 1,2345} = 1,2345,$
- ▷ $10^{\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l} = c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l.$

Niech $n = c_1 c_2 c_3 \dots c_l$, wobec twierdzenia 11 istnieje $w > \frac{l}{\log_{10} p}$ takie, że $\{w \log_{10} p\}$ jest wystarczająco dobrym przybliżeniem $\log_{10} c_1, c_2 c_3 c_3 \dots c_l$. □

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

Przykład 13

$$\triangleright (\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

Przykład 13

- ▷ $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷ $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

Przykład 13

- ▷ $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷ $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$
- ▷ $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$ gdzie p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

Przykład 13

- ▷ $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷ $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$
- ▷ $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$ gdzie p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- ▷ $(\{k \log_{10} n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

Przykład 13

- ▷ $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷ $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$
- ▷ $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$ gdzie p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- ▷ $(\{k \log_{10} n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$
- ▷ $(\{\log_{10} n!\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n \in \mathbb{N}}$ (zob. [1]),

└ Uwagi końcowe

Twierdzenie 12

Jeżeli $(\{\log_{10} a_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$, to ciąg $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zawiera wszystkie liczby.

Przykład 13

- ▷ $(\{n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}},$
- ▷ $\left(\left\{n^k \log_{10} 2\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(2^{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$
- ▷ $(\{p_n \log_{10} 2\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (2^{p_n})_{n \in \mathbb{N}},$ gdzie p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą (zob. [3]),
- ▷ $(\{k \log_{10} n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}},$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N},$
- ▷ $(\{\log_{10} n!\})_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow (n!)_{n \in \mathbb{N}}$ (zob. [1]),

Prezentacja: <https://github.com/vil02/pi2021/>



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w y^2 . Kolor niebieski oznacza, że y^2 zaczyna się liczbą x .



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w y^3 . Kolor niebieski oznacza, że y^3 zaczyna się liczbą x .

└ Symulacje komputerowe dla innych ciągów

└ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad 0! = 1$



Rysunek: Punkt (x, y) jest zaznaczony na czerwono, jeżeli x zawiera się w $y!$. Kolor niebieski oznacza, że $y!$ zaczyna się liczbą x .

└ Dowód lematu 5

Dowód lematu 5.

Założmy, że $\log_{10} p = \frac{a}{b}$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas $10^{\frac{a}{b}} = p$, stąd $10^a = p^b$, i ponadto $2^a 5^a = p^b$. Zatem $p = 2^r 5^s$, dla pewnych $r, s \in \mathbb{N}$. Pozostaje pokazać, że $r = s$. Istotnie, $2^{rb} 5^{sb} = 2^a 5^a$, skąd $a = rb = sb$, więc $r = s$. A zatem $p = 2^r 5^r = 10^r$.



 Persi Diaconis.

The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1.

The Annals of Probability, 5(1):72–81, Feb 1977.

 Wacław Sierpiński.

O wartości asymptotycznej pewnej sumy.

Rozprawy Akademii Umiejętności w Krakowie, Wydział mat. przyrod., 50:1–10, 1910.

 Ivan. M. Vinogradov.

On the distribution of products of prime numbers and the numerical function of Möbius.

Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 12:341–350, 1948.

 Hermann Weyl.

Über die gleichverteilung von zahlen mod. eins.

Mathematische Annalen, 77(3):313–352, Sep 1916.