Algoritmos em Grafos

Particionamento

Coberturas

Emparelhamento

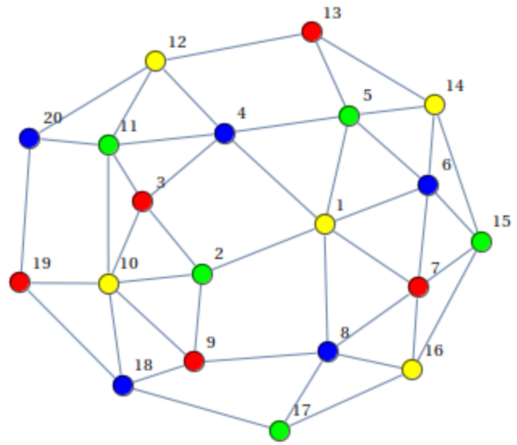
Prof. Alexei Machado

PUC MINAS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Conjuntos independentes

- Uma coloração de um grafo induz a um ***particionamento*** dos vértices em subconjuntos de vértices chamados de **conjuntos independentes**



Conjuntos independentes

- Conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente

Conjuntos independentes

- Conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente
- **Conjunto independente máximo**: conjunto independente V_i tal que não exista V_i' sendo

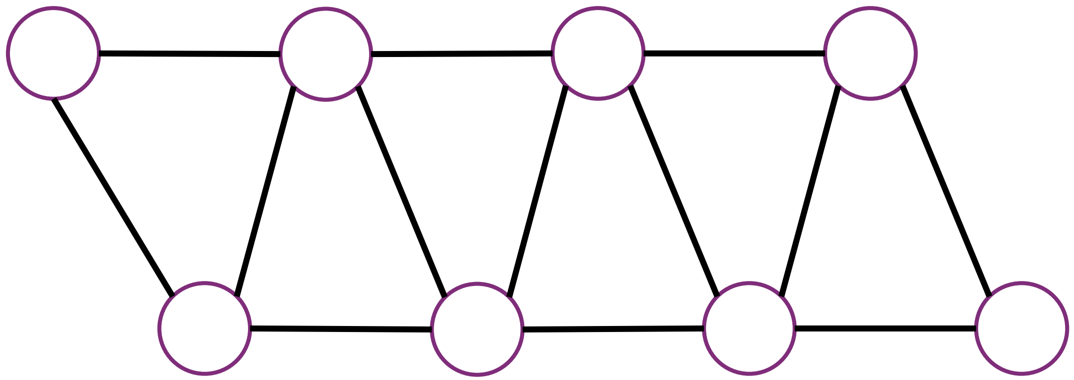
$$|V_i'| > |V_i|$$

Conjuntos independentes

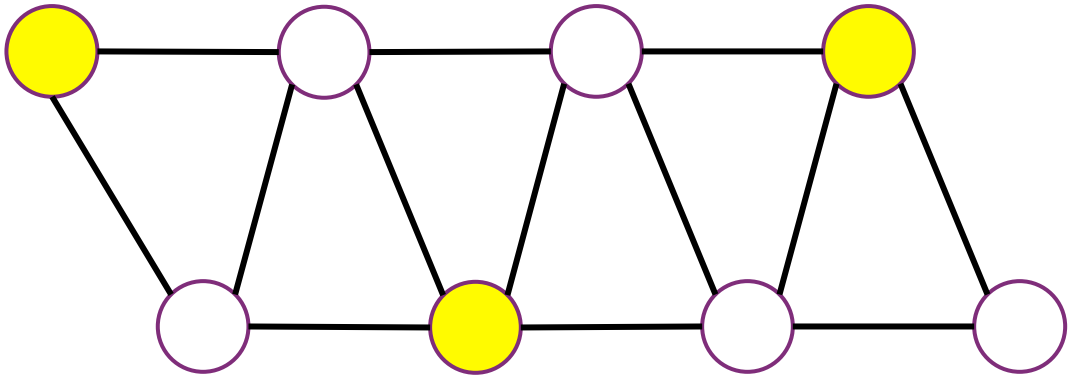
- **Conjunto independente máximo**: conjunto independente V_i tal que não exista V_i' sendo

$$|V_i'| > |V_i|$$

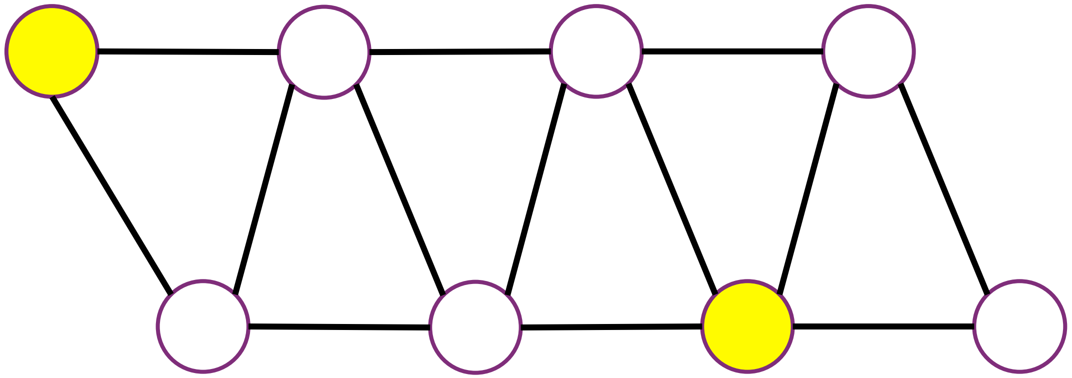
- **Conjunto independente maximal**: conjunto independente V_i tal que não exista V_i' que contenha V_i , ou seja, $V_i \not\subset V_i'$



- É máximo? É maximal?



- É máximo? É maximal?



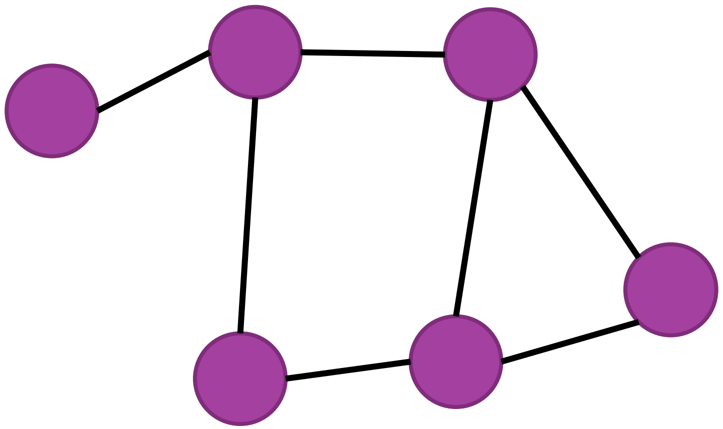
Número de independência

- Número de vértices do conjunto independente máximo do grafo.

$$ß(G)$$

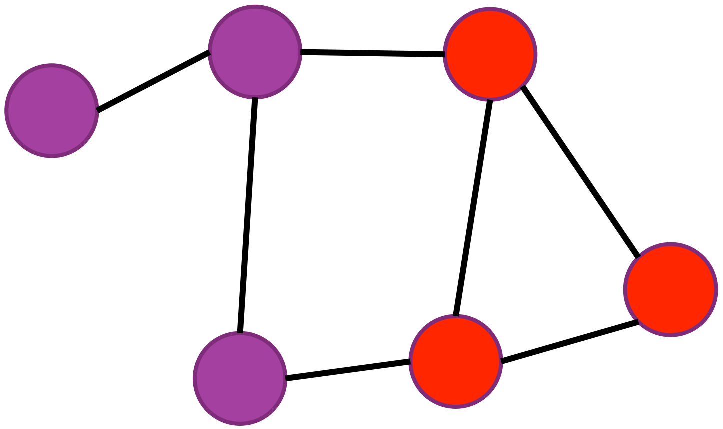
Clique

- Seja G=(V,E). Um subconjunto C $\subseteq$ V é uma **clique** de G se C é um subgrafo completo de G



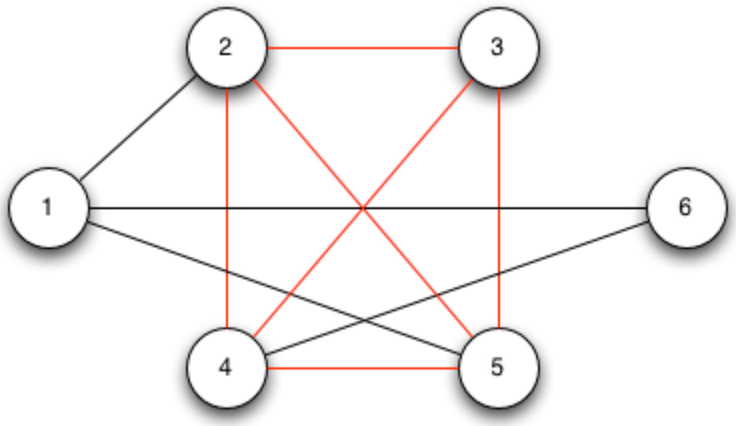
Clique

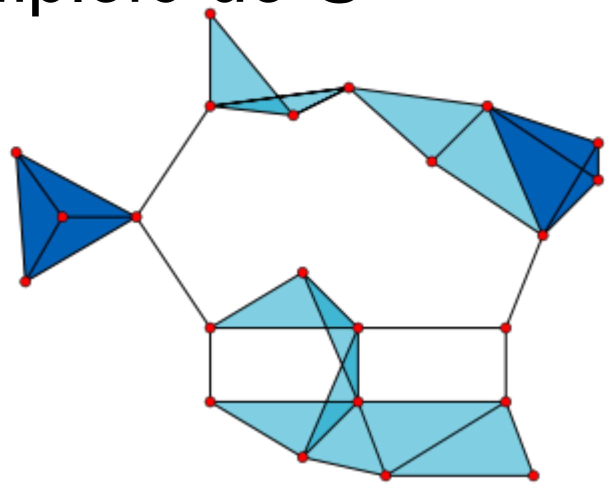
- Seja G=(V,E). Um subconjunto C $\subseteq$ V é uma **clique** de G se C é um subgrafo completo de G



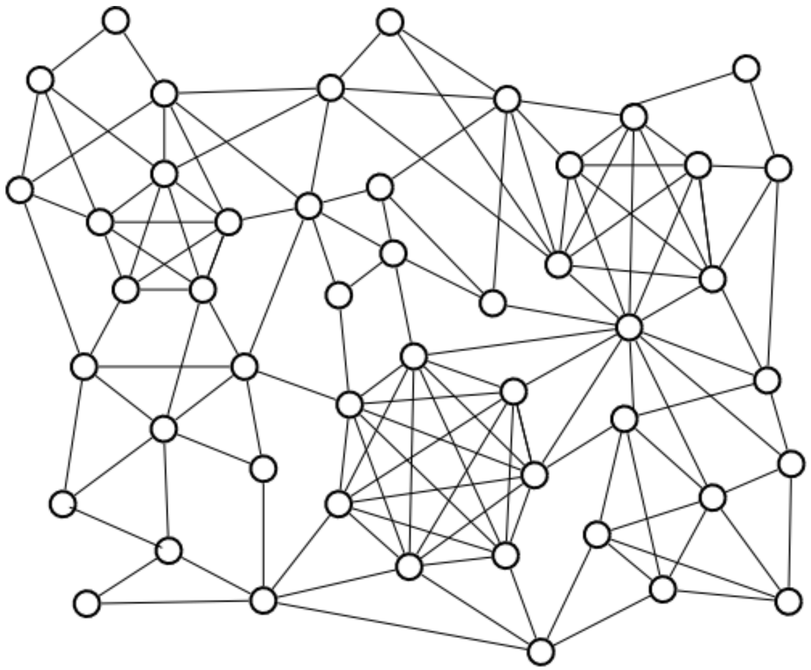
Clique

- Seja G=(V,E). Um subconjunto C $\subseteq$ V é uma **clique** de G se C é um subgrafo completo de G



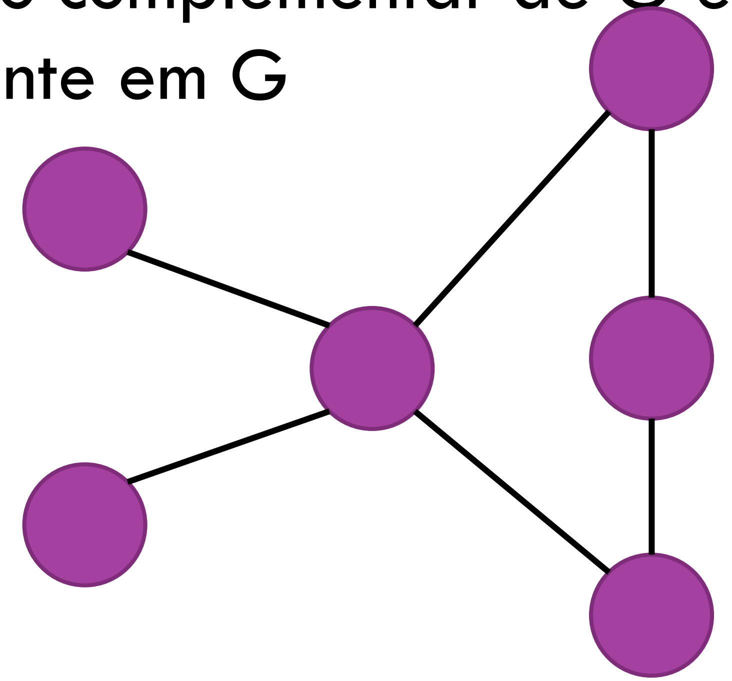


Clique



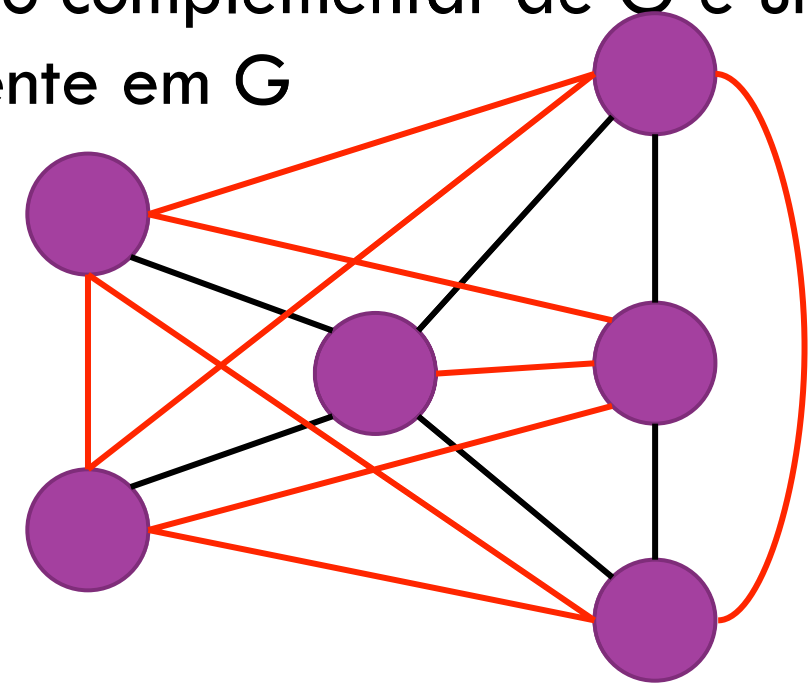
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



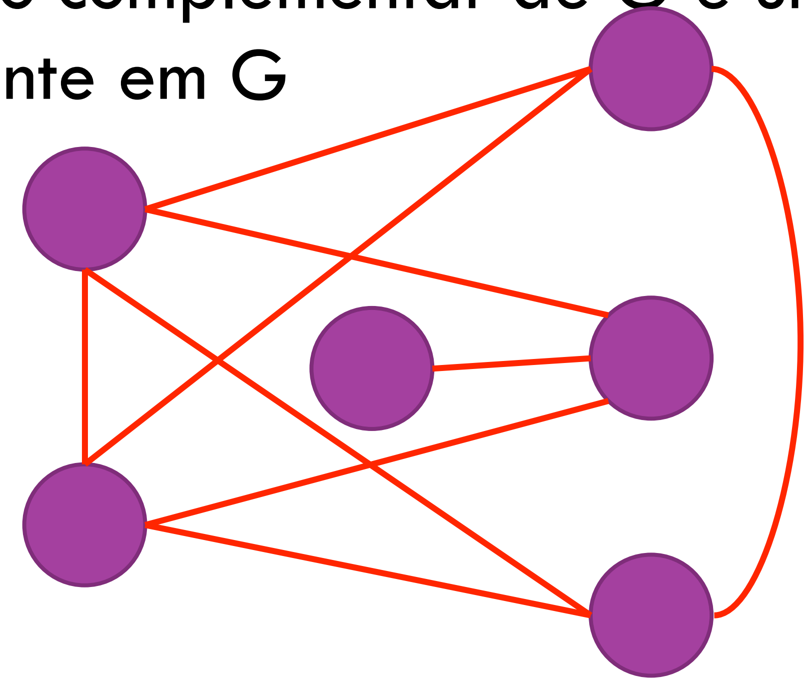
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



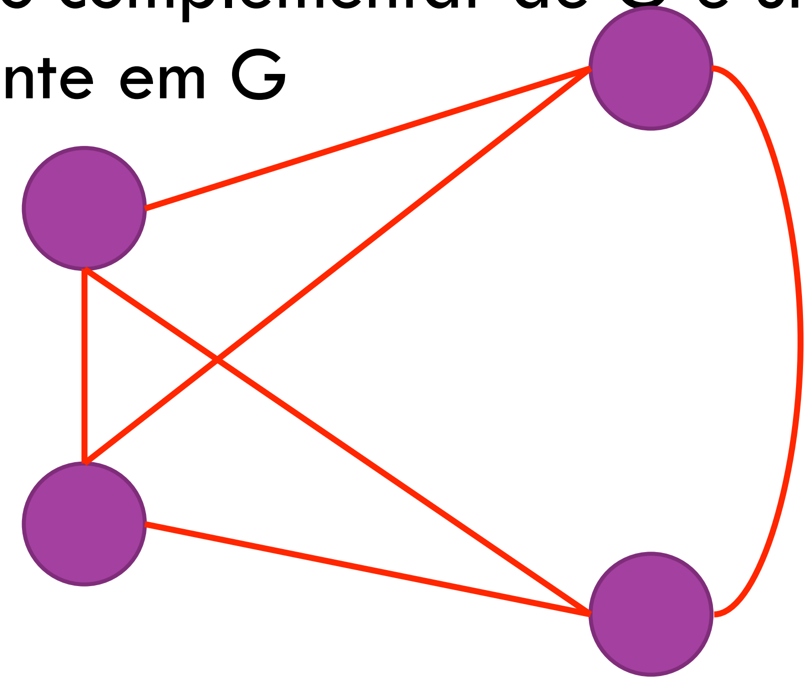
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



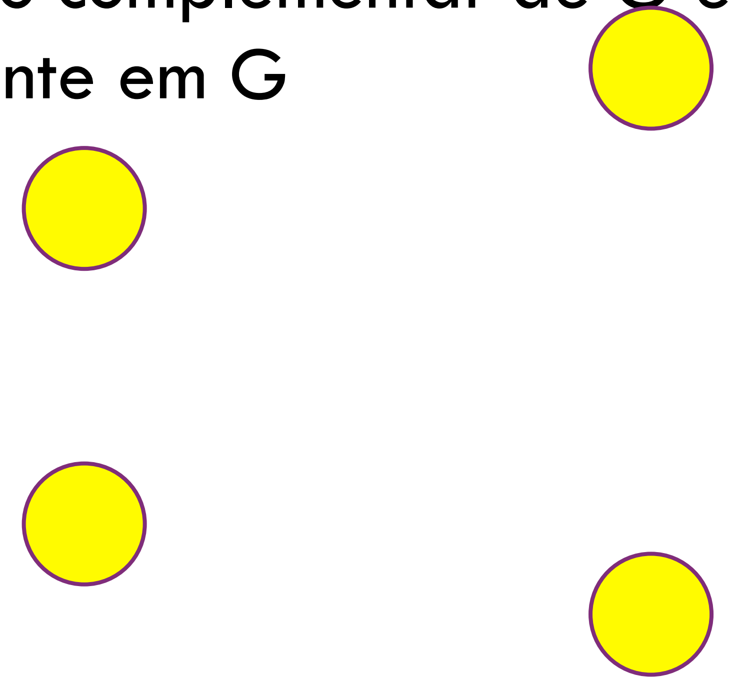
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



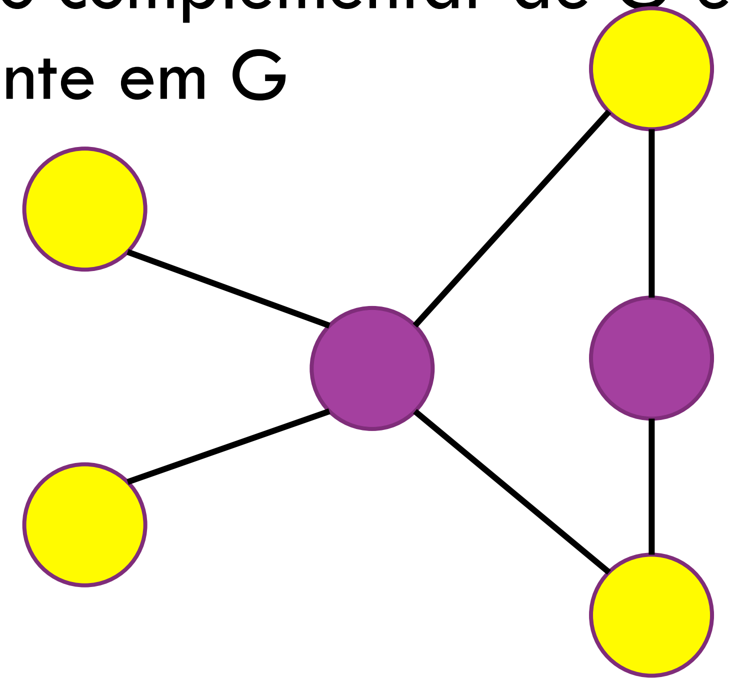
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



Algoritmos

- Encontrar um conjunto independente maximal não é complicado

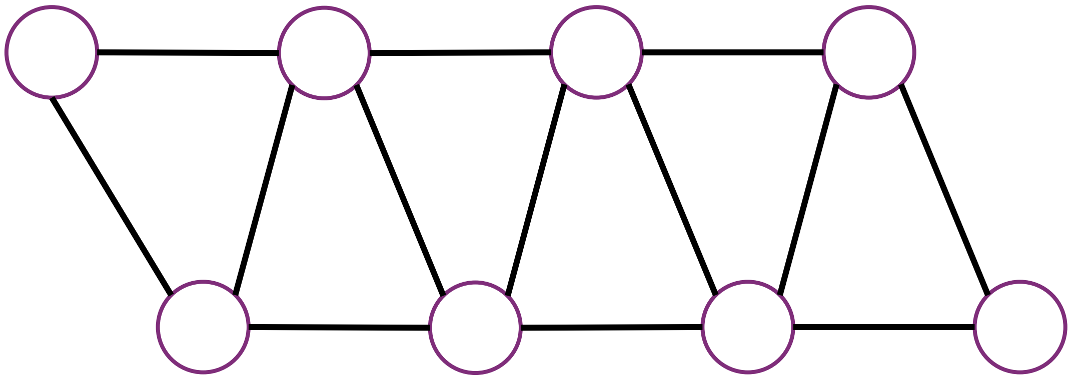
Algoritmos

- Encontrar um conjunto independente maximal não é complicado. Dado um grafo G=(V,E)

```
 Inicialize o conjunto independente I como vazio
 Enquanto há vértices em V
Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
 Fim_enquanto
 Retorne I
```

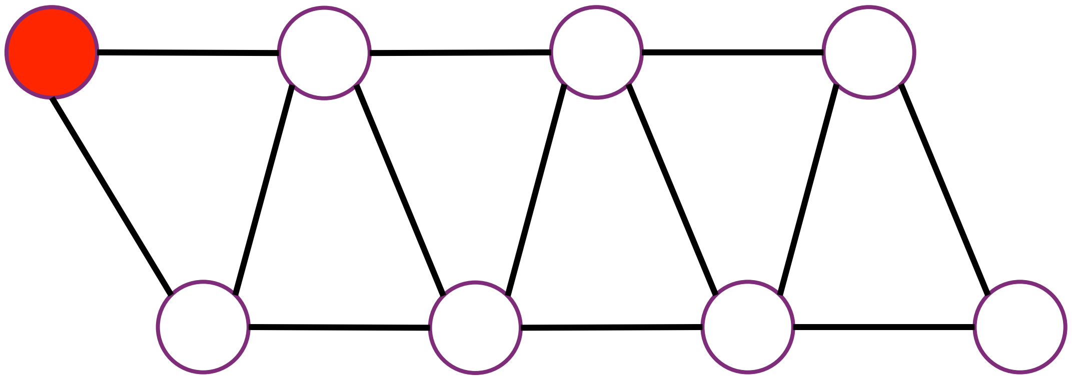
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



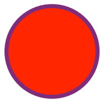
Algoritmos

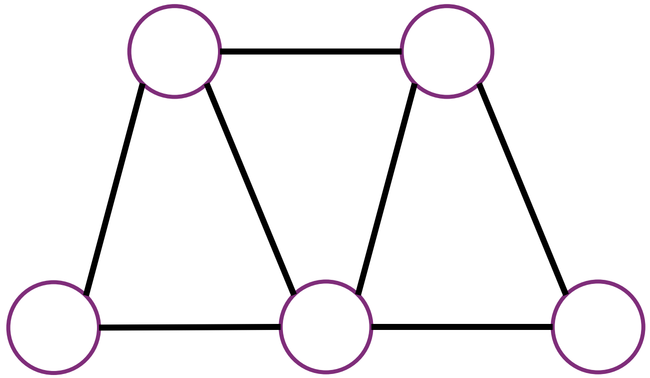
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



Algoritmos

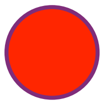
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```

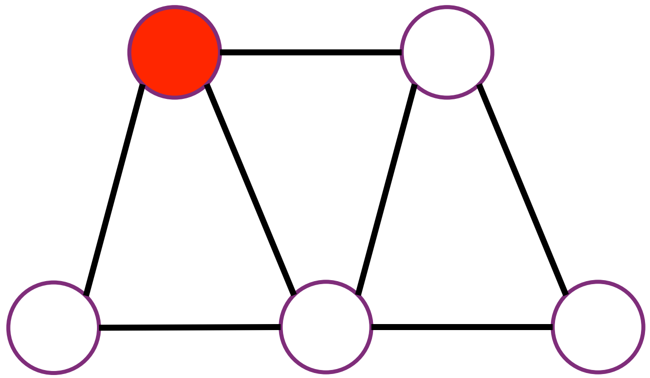




Algoritmos

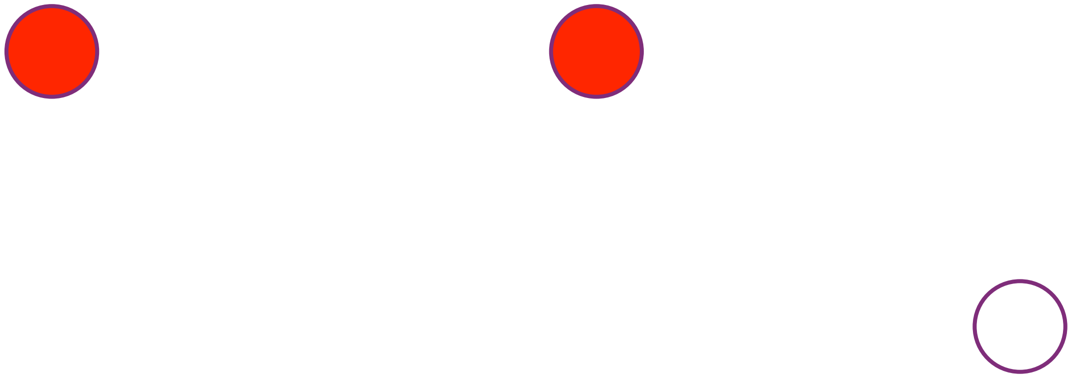
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```





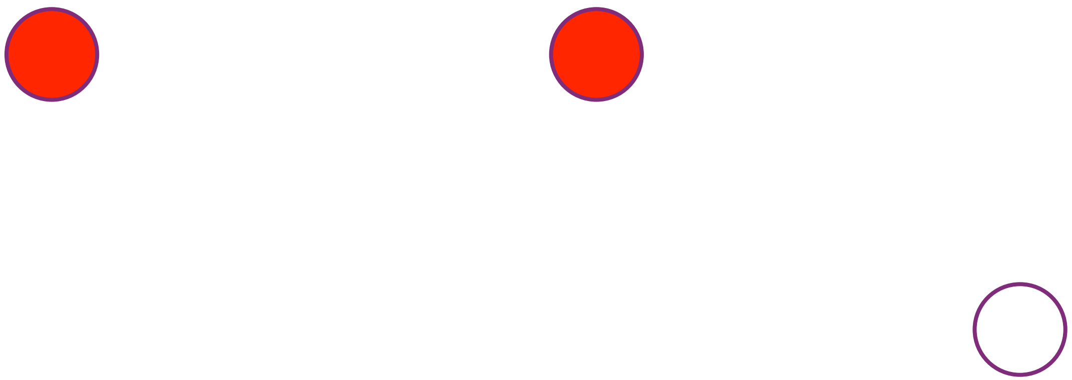
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



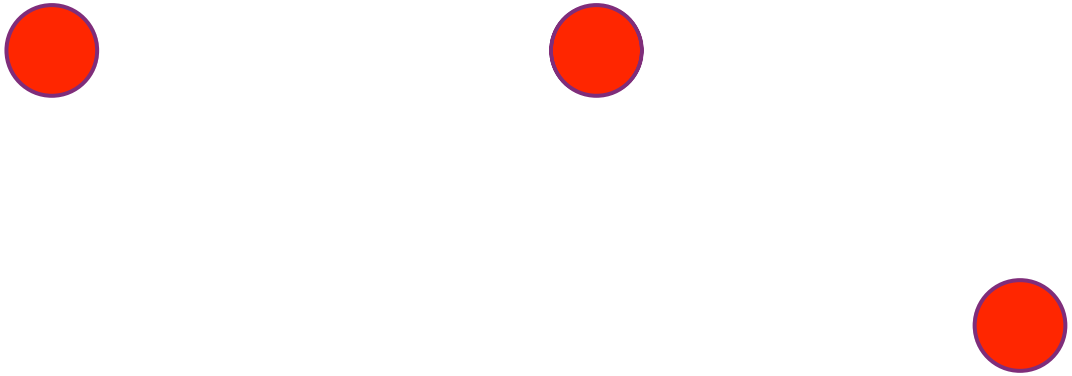
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



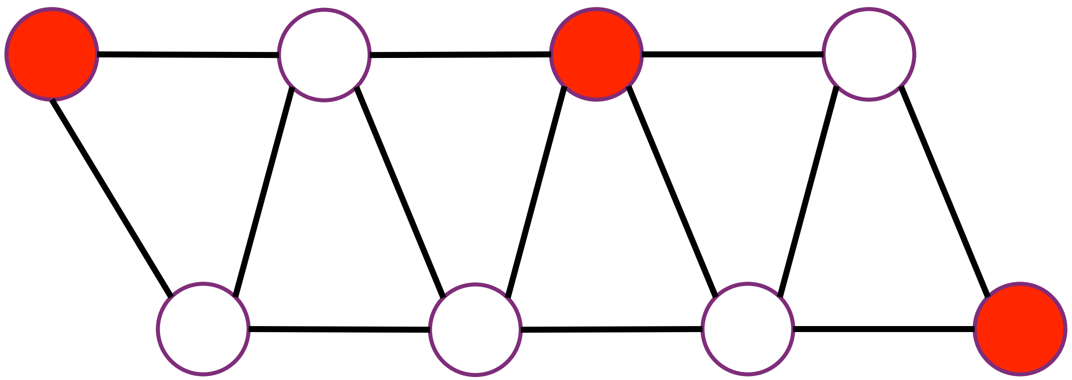
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



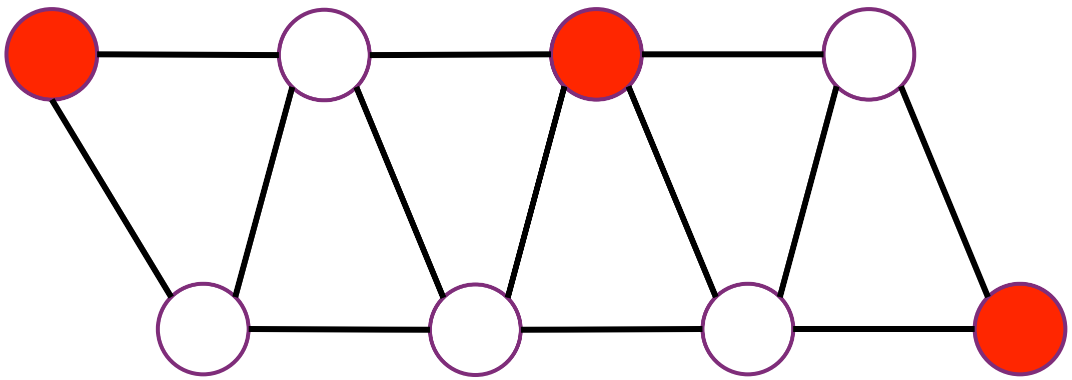
Algoritmos

- Já para encontrar um conjunto independente máximo... *NP-hard*

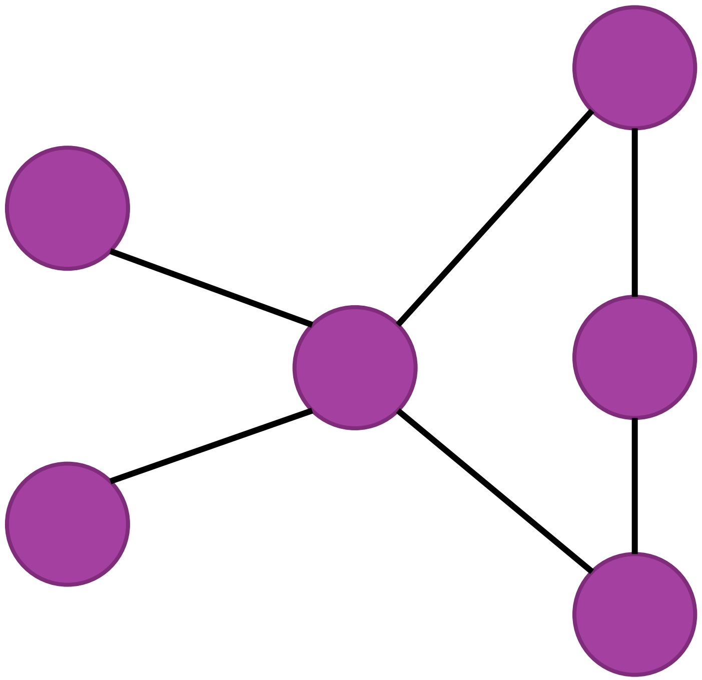
- *Heurísticas*

Algoritmos

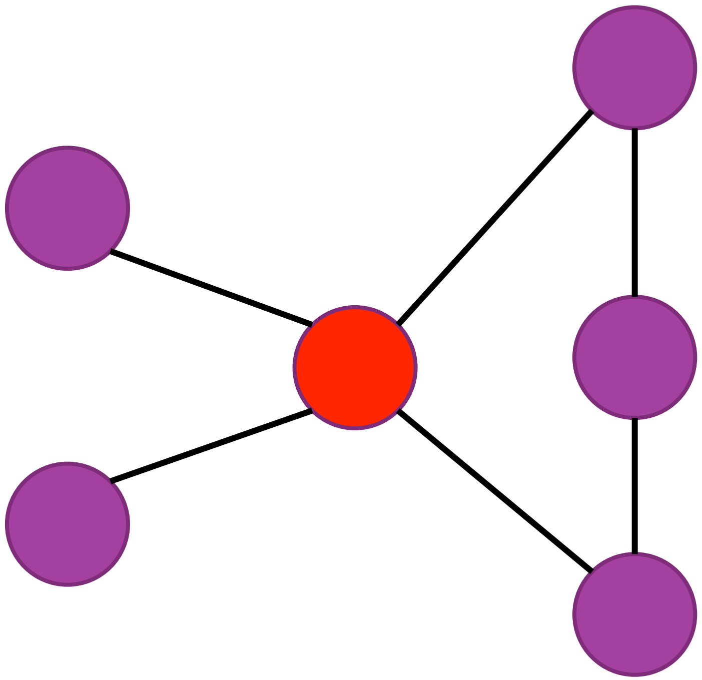
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
   Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



Algoritmos



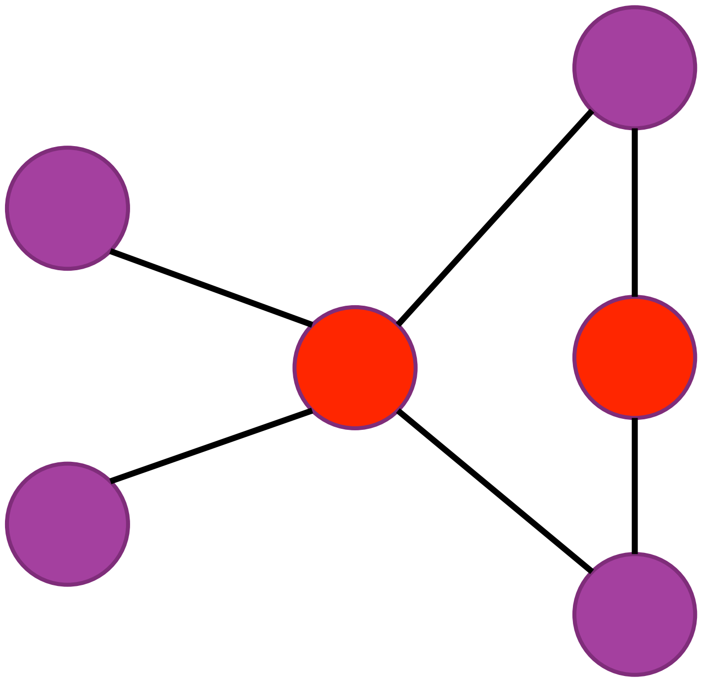
Algoritmos



Algoritmos

Algoritmos

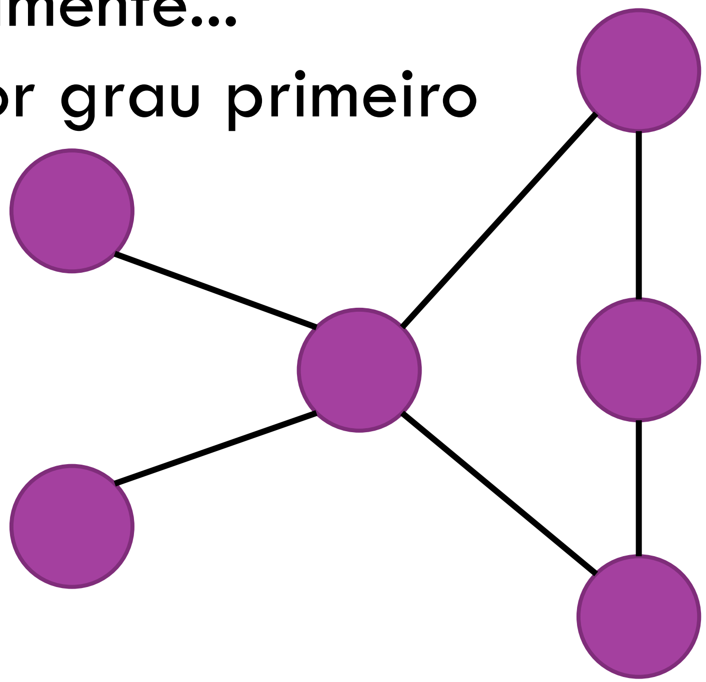
Algoritmos



Algoritmos

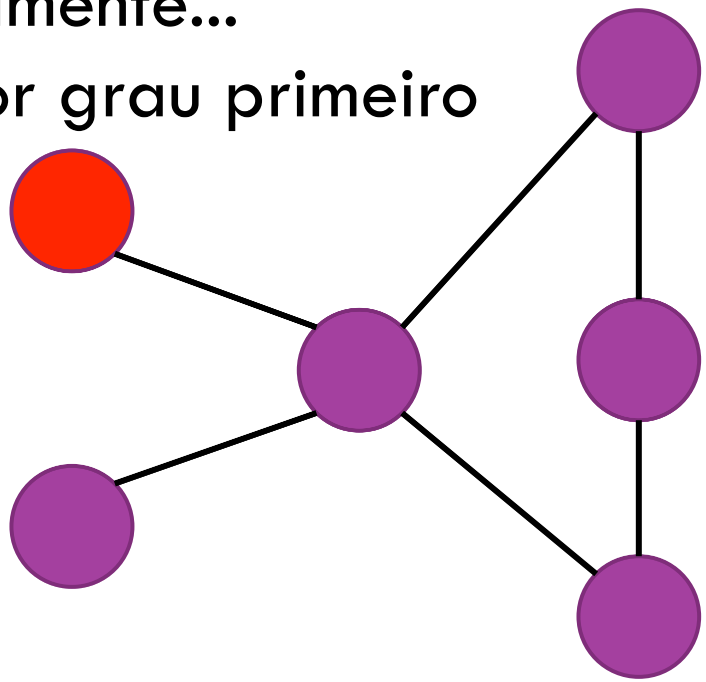
- Novamente...

  Menor grau primeiro



Algoritmos

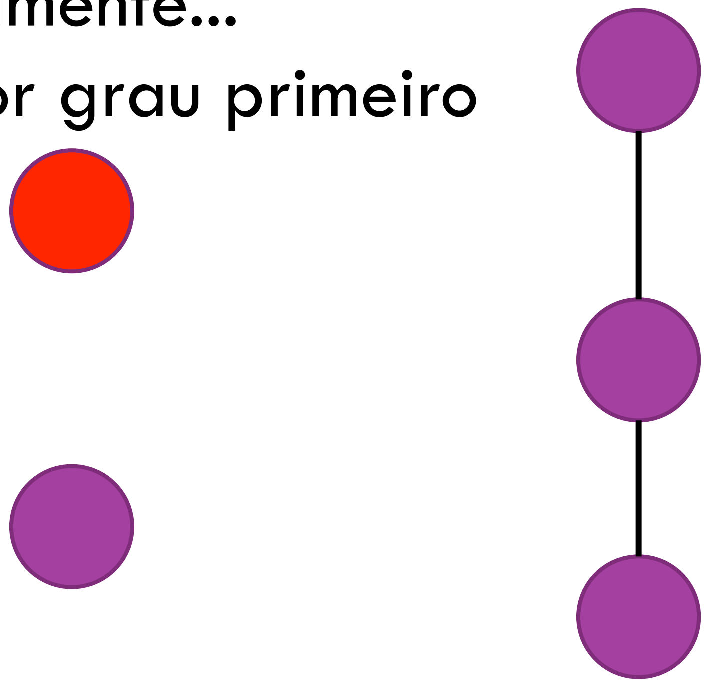
- Novamente...
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

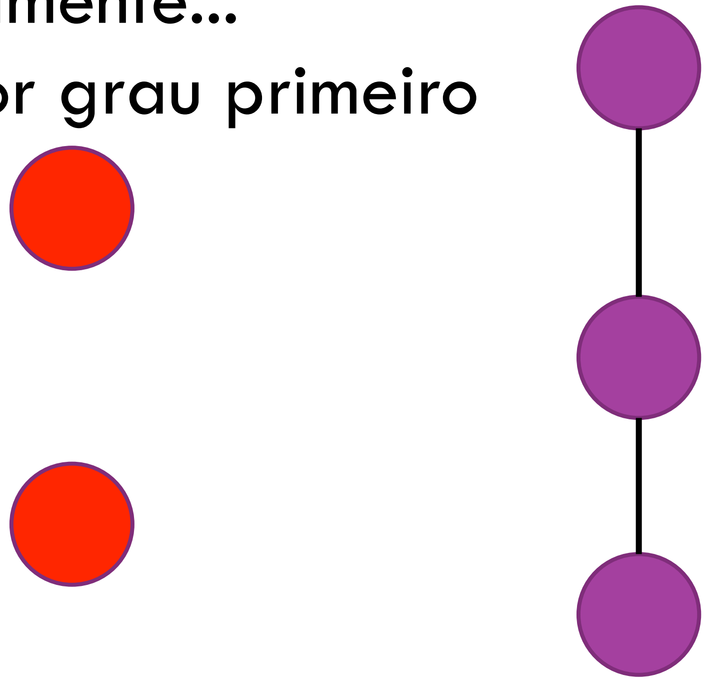
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

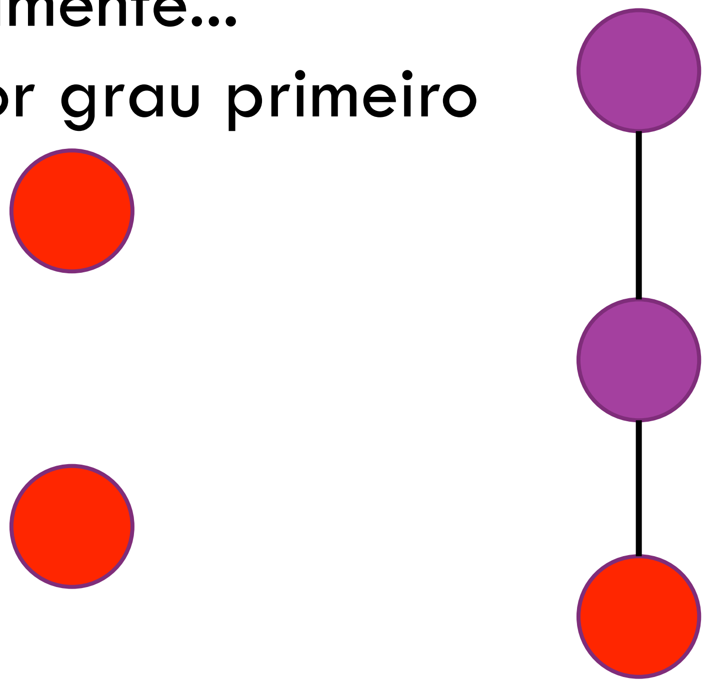
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

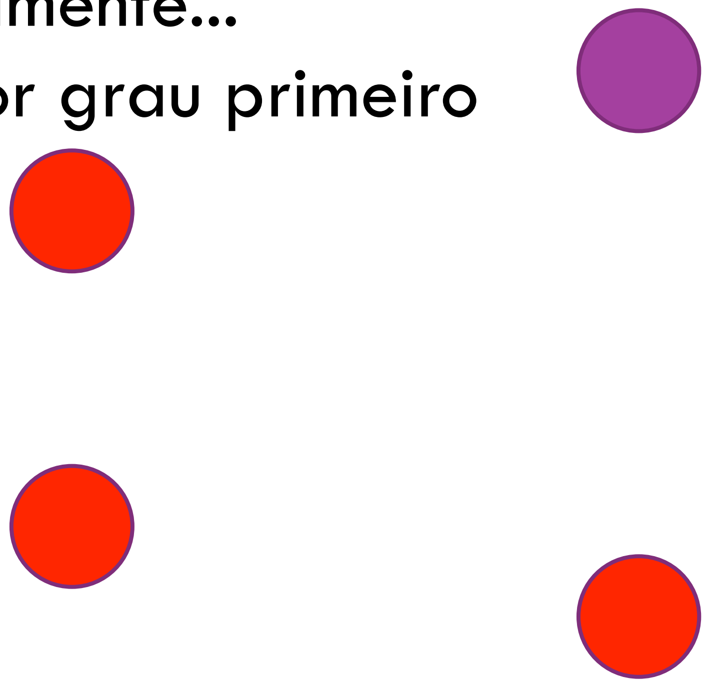
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

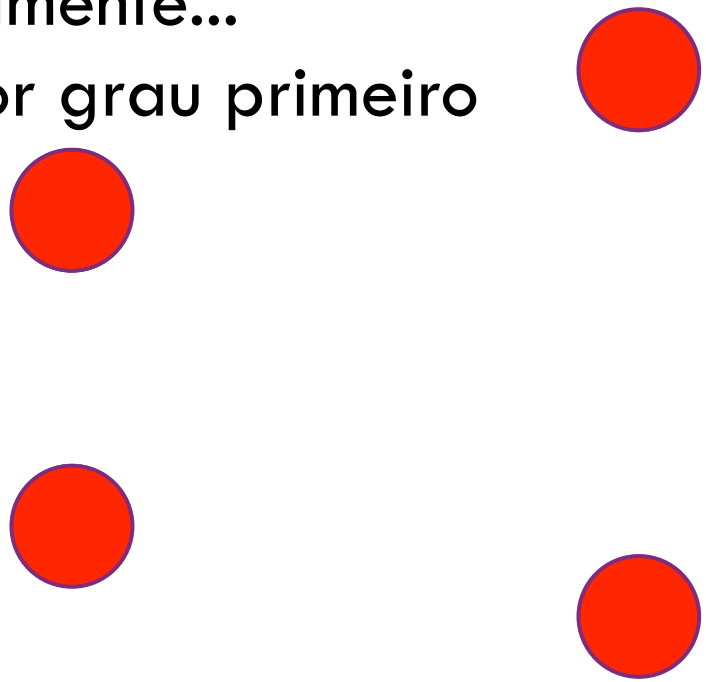
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

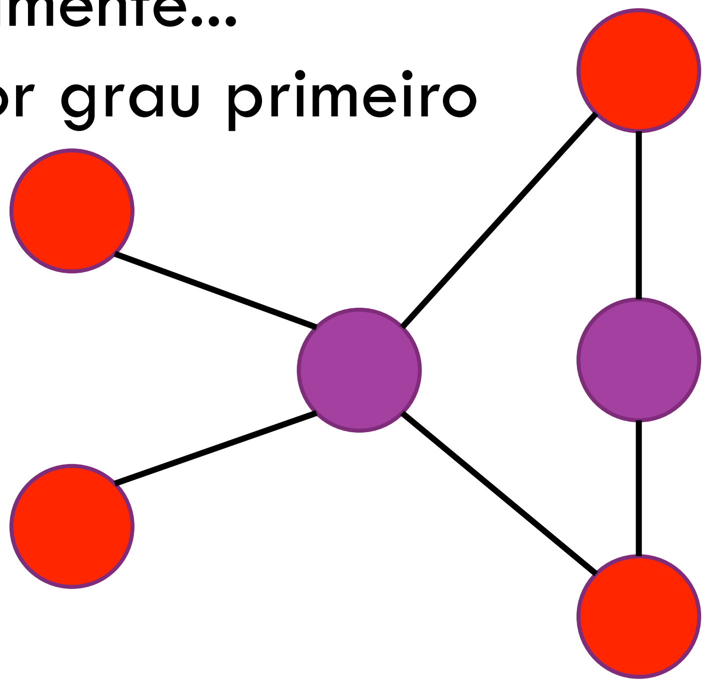
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

  Menor grau primeiro



Conjuntos dominantes

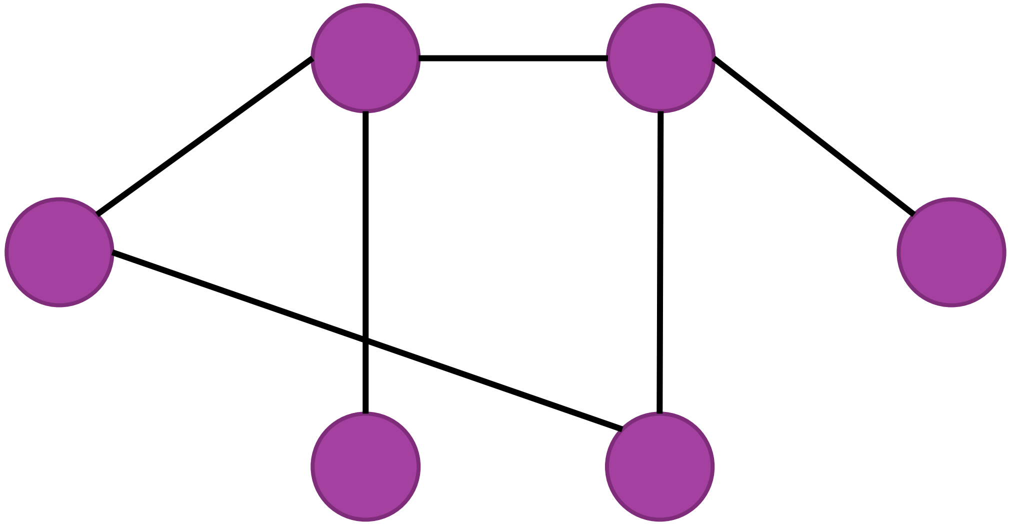
- **Conjunto dominante** é um conjunto de vértices do grafo que "domina" todos os vértices do grafo:

UM VÉRTICE V PERTENCE AO CONJUNTO DOMINANTE OU É ADJACENTE A UM VÉRTICE QUE PERTENCE.

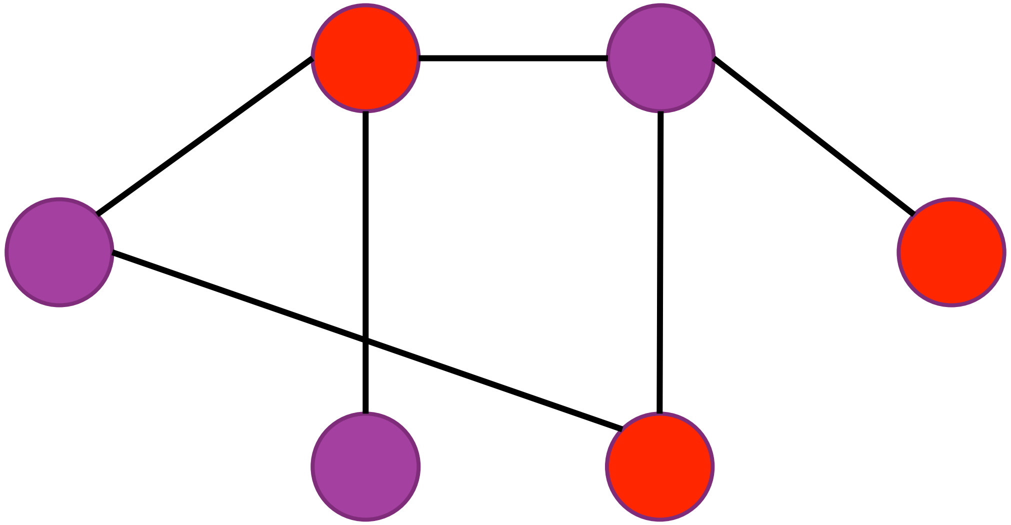
Conjunto dominante mínimo

- Dizemos que um conjunto dominante U é um conjunto dominante mínimo se não existir outro conjunto dominante S tal que S $\subseteq$ U
- **Conjunto dominante mínimo** é um conjunto dominante com o menor número de vértices possível.
- Número de estabilidade externa: $\alpha(G)$

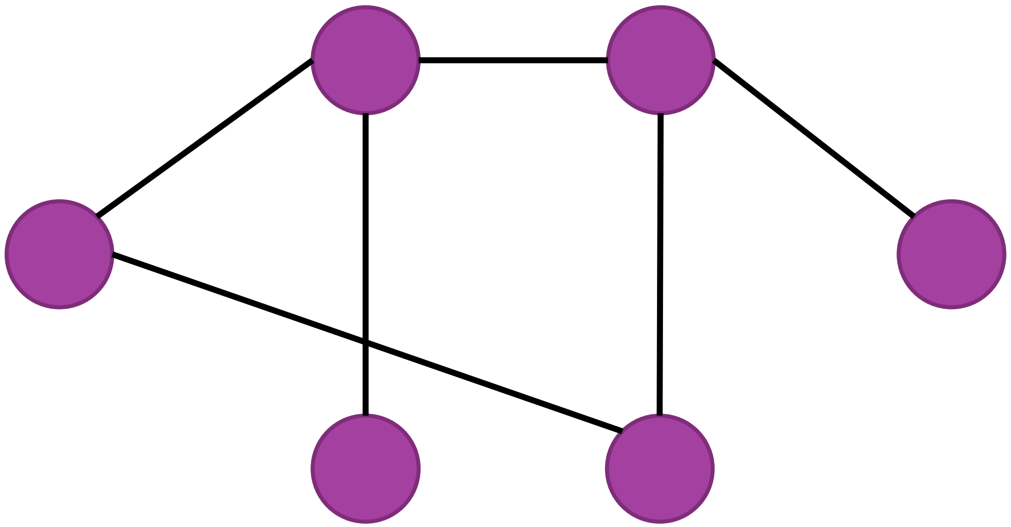
Conjunto dominante



Conjunto dominante

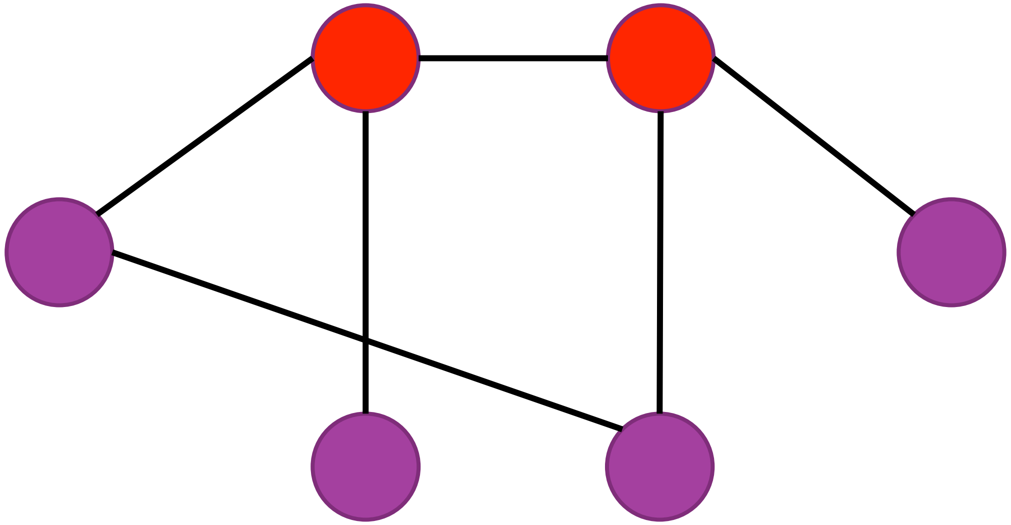


Conjunto dominante



Conjunto dominante

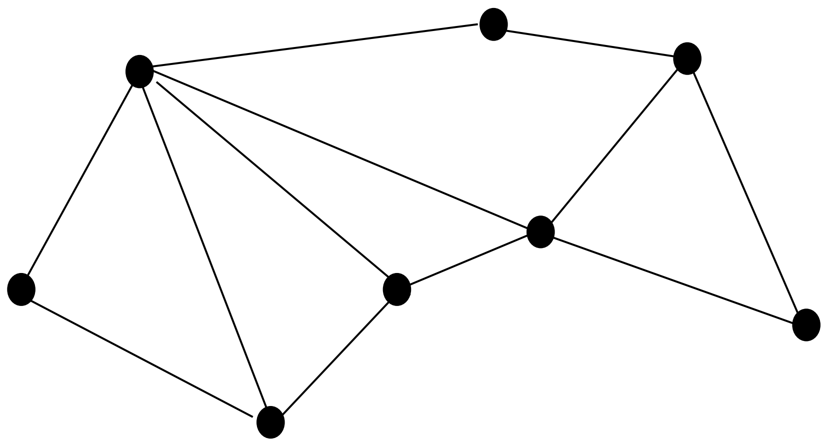
- Conjunto dominante mínimo



Cobertura de vértices

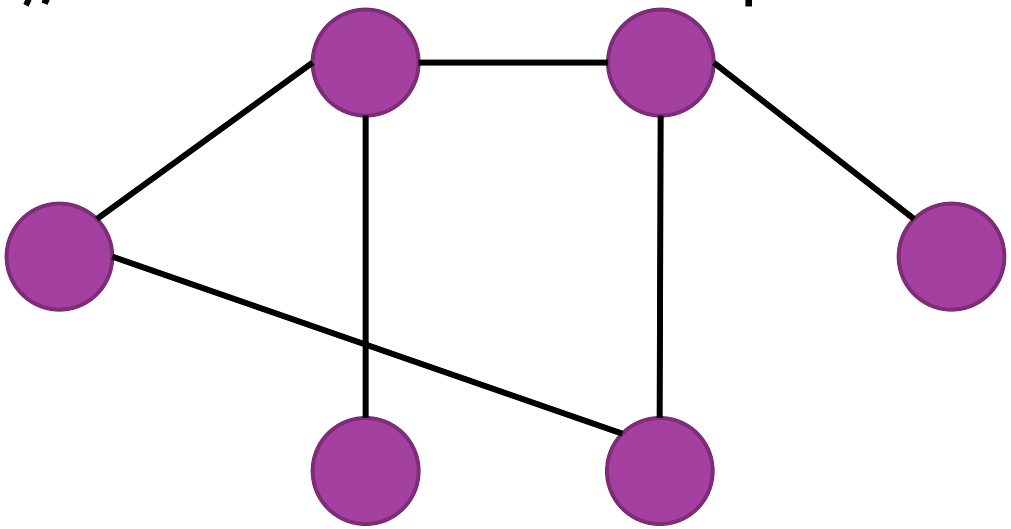
- Em um grafo G, um conjunto g de vértices é chamado de cobertura de vértices se todas as arestas de G são incidentes a pelo menos um vértice de g.
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade dizemos que g é uma ***cobertura mínima de vértices***

MENOR CONJUNTO DE VÉRTICES INCIDENTES A TODAS AS ARESTAS



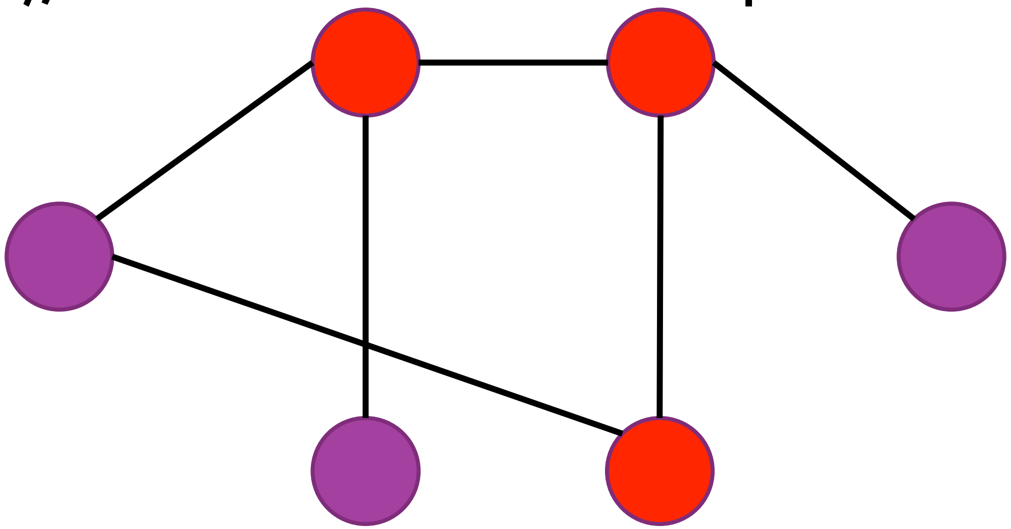
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



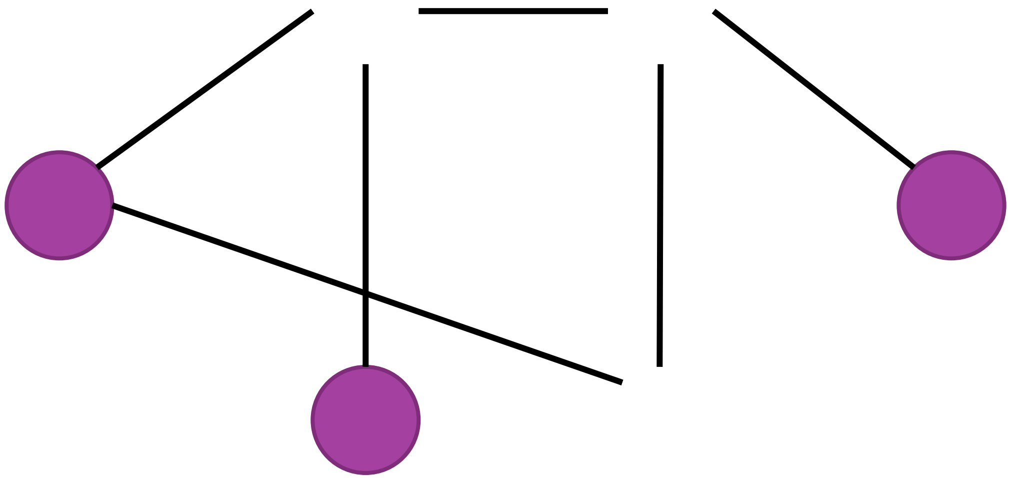
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



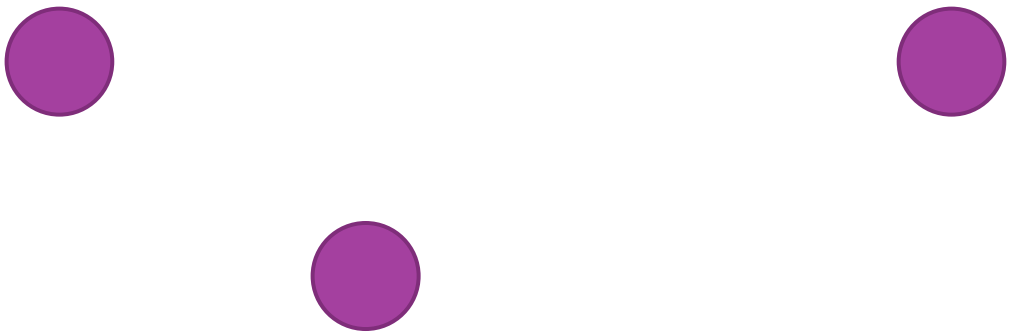
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



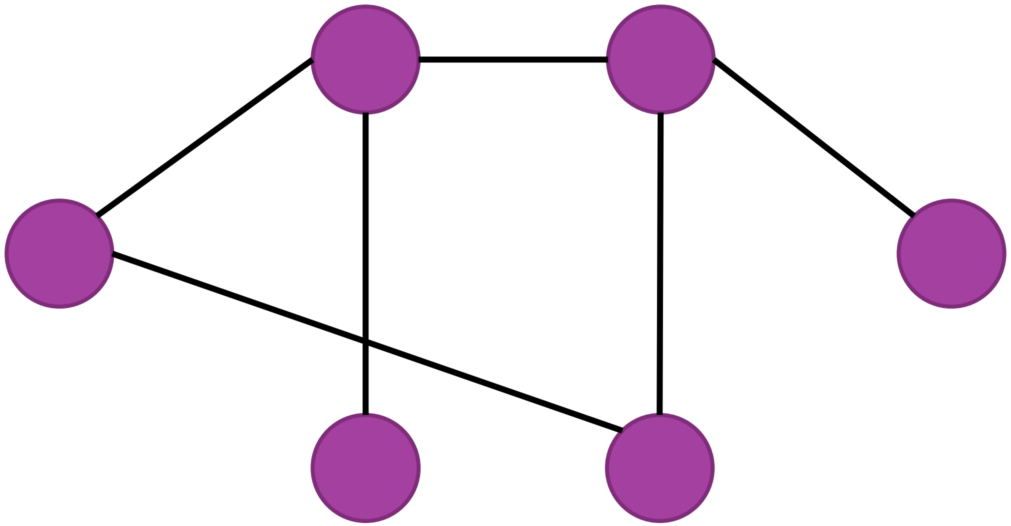
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



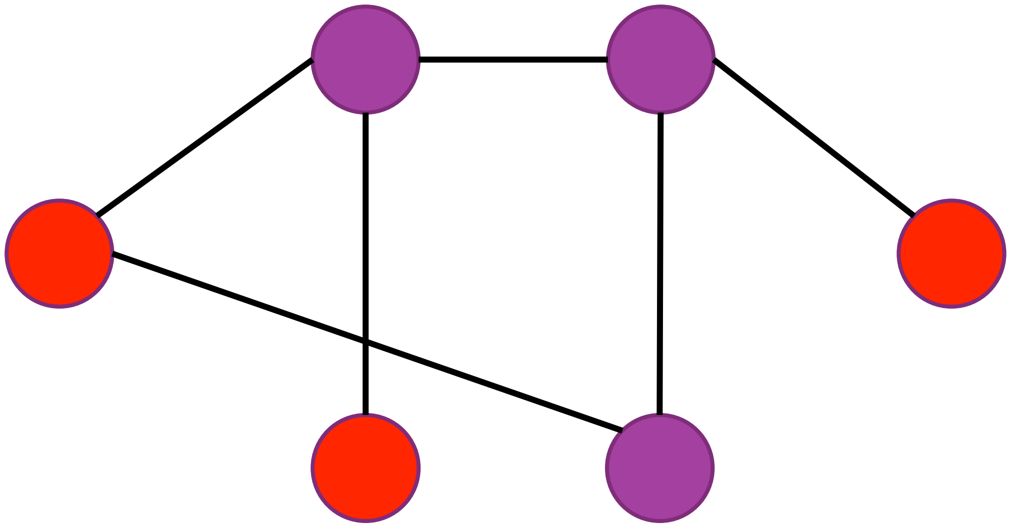
Coberturas e independência

- Logo, se S é um conjunto independente, V – S é uma cobertura de vértice



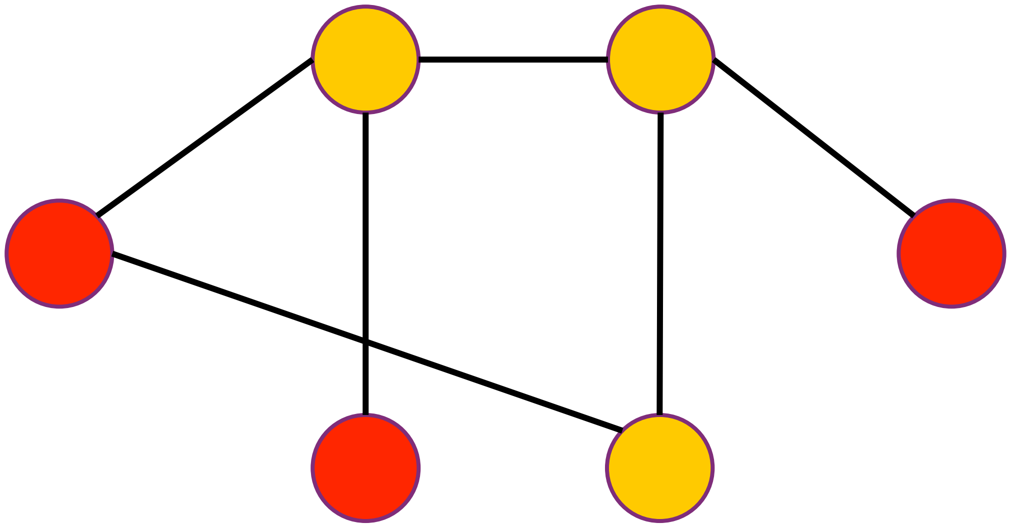
Coberturas e independência

- Logo, se S é um conjunto independente, V – S é uma cobertura de vértice



Coberturas e independência

- Logo, se S é um conjunto independente, V – S é uma cobertura de vértice



Coberturas e independência

- Se o conjunto S é máximo, V – S é mínimo

ENCONTRAR UM CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO É O MESMO QUE ENCONTRAR UMA COBERTURA DE VÉRTICE MÍNIMA

Coberturas e independência

- Como encontrar um conjunto independente é NP-completo, encontrar a cobertura de vértice mínima também é.

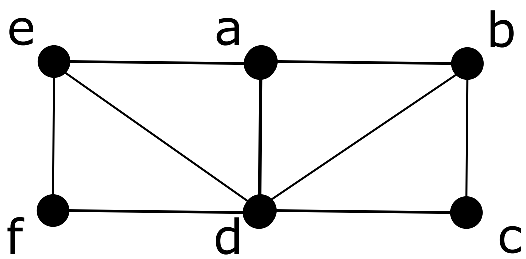
ENCONTRAR UMA COBERTURA DE VÉRTICE MÍNIMA É UM PROBLEMA NP-COMPLETO

Emparelhamento (casamento / *matching*)

- Um emparelhamento num grafo G não-dirigido é um conjunto M de arestas com a seguinte propriedade: todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M.

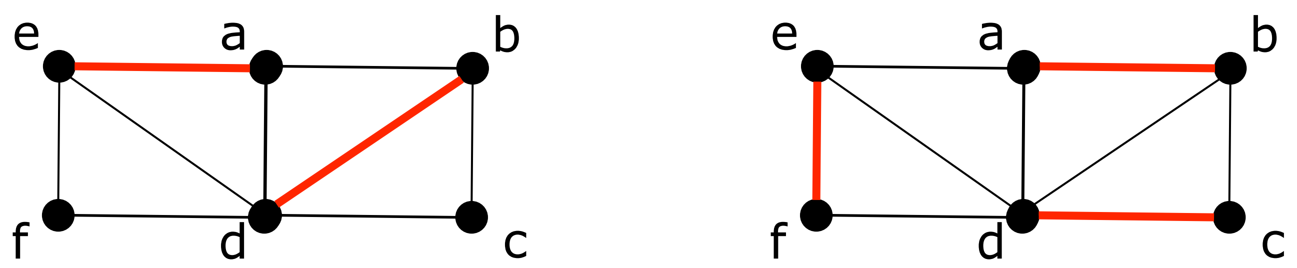
Emparelhamento (casamento / *matching*)

- Em um emparelhamento duas arestas não podem compartilhar o mesmo vértice



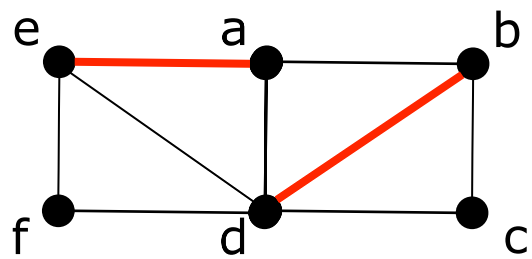
Emparelhamento (casamento / *matching*)

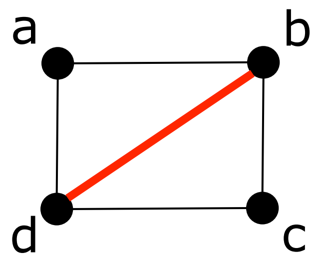
- Em um emparelhamento duas arestas não podem compartilhar o mesmo vértice



Emparelhamento

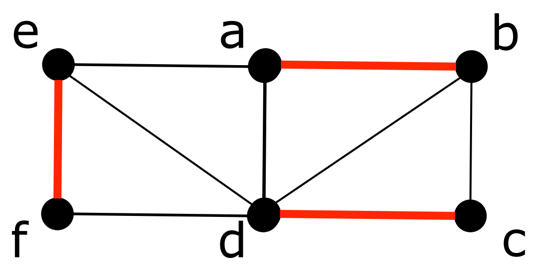
- Quando nenhuma aresta pode ser incluída em M, dizemos que M é maximal





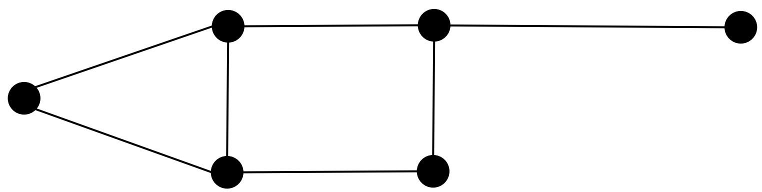
Emparelhamento

- Um emparelhamento M é máximo se |M| for máximo em G
- Emparelhamento com maior número de arestas possível em G



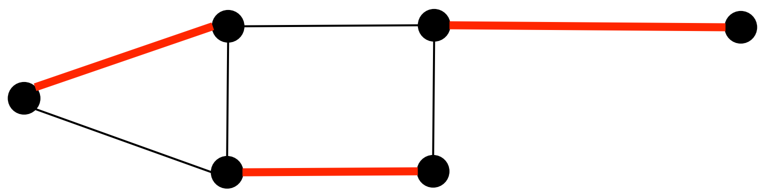
Emparelhamento perfeito

- Um emparelhamento M é perfeito (completo) se todos os vértices de G estão em M



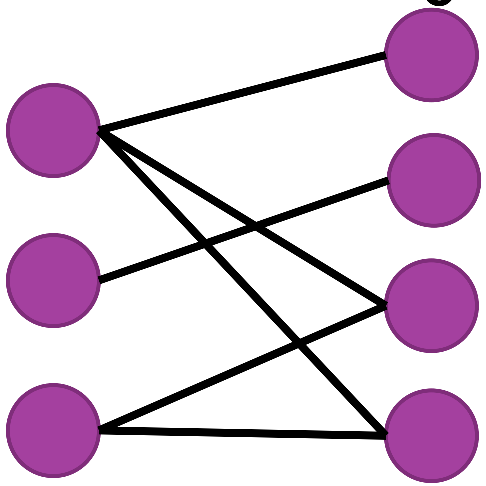
Emparelhamento perfeito

- Um emparelhamento M é perfeito se todos os vértices de G estão em M



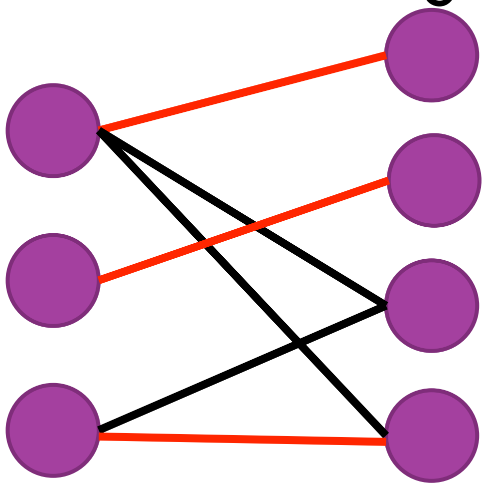
Emparelhamento completo em grafos bipartidos

- É um emparelhamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto



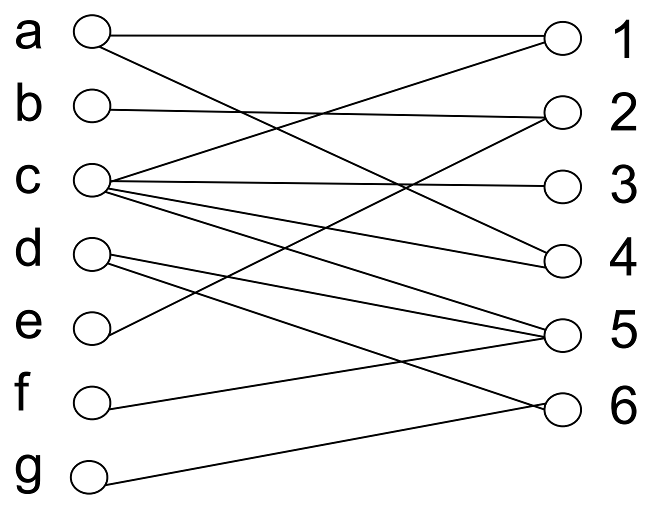
Emparelhamento completo em grafos bipartidos

- É um emparelhamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto



Exercício

- Tente encontrar um emparelhamento máximo e um emparelhamento completo para o grafo ao lado

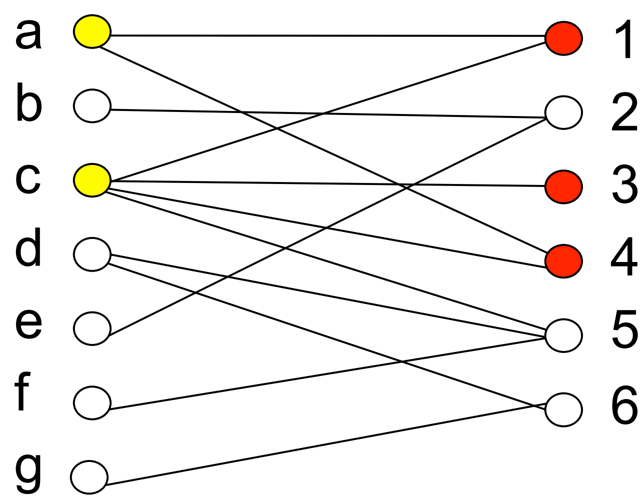


Teorema de Hall

- Seja $G=(X \cup Y, E)$ um grafo bipartido. Existe um emparelhamento completo de X para Y se e somente se $|\mathrm{adj}(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.

Teorema de Hall

- Seja $G=(X \cup Y, E)$ um grafo bipartido. Existe um emparelhamento completo de X para Y se e somente se $|\text{adj}(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.



Teorema de Hall

- Temos que *v* vértices devem ser adjacentes a ao menos *u* vértices do outro conjunto, para todo inteiro k satisfazendo $1 \leq k \leq m$, onde m indica o número total de vértices, e todo subconjunto de k vértices.

Encontrando emparelhamentos

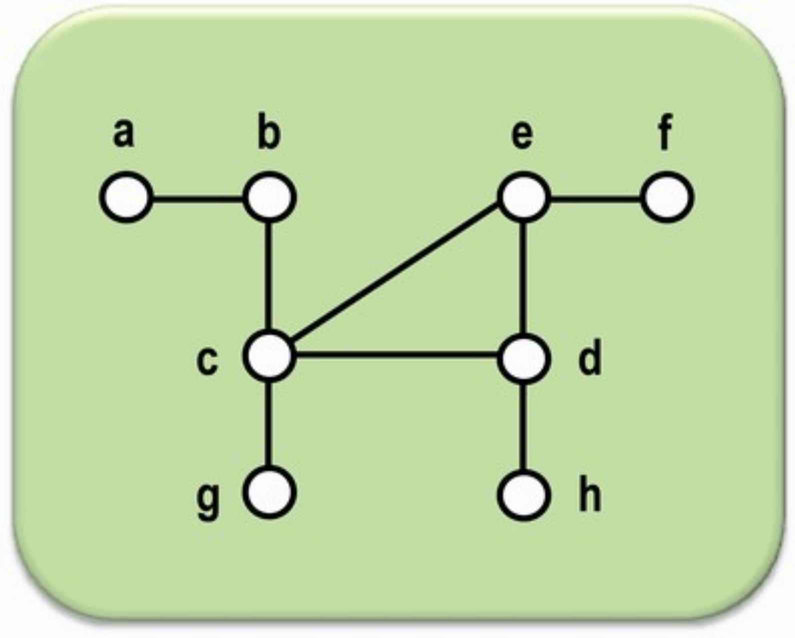
- Algortimo de Edmonds: dado um grafo G com um emparelhamento M
  - Caminho ***alternante***: intercala arestas livres e arestas associadas ao emparelhamento
  - Caminho ***de aumento***: é um caminho alternante que inicia e termina em vértices livres.

Algoritmo de Edmonds

1. Determine um emparelhamento E
2. Encontre um caminho de aumento em relação a E
3. Se o caminho foi encontrado, expanda o emparelhamento e volte ao passo 2
4. Senão, fim. Emparelhamento máximo encontrado

Algoritmo de Edmonds

```
Determine um emparelhamento E
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E
      Expanda o emparelhamento
Fim enquanto
Emparelhamento máximo encontrado
```



Algoritmo de Edmonds

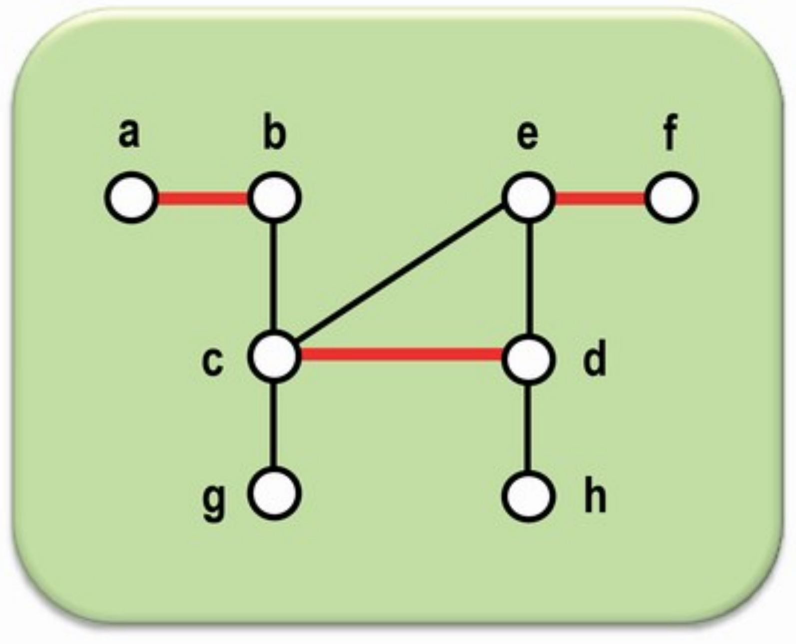
Determine um emparelhamento E

Enquanto há um caminho de aumento em relação a E

Expanda o emparelhamento

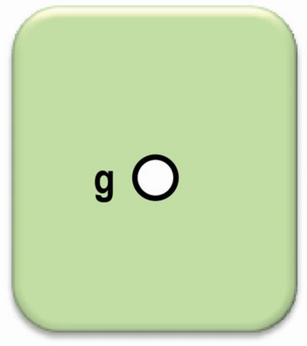
Fim enquanto

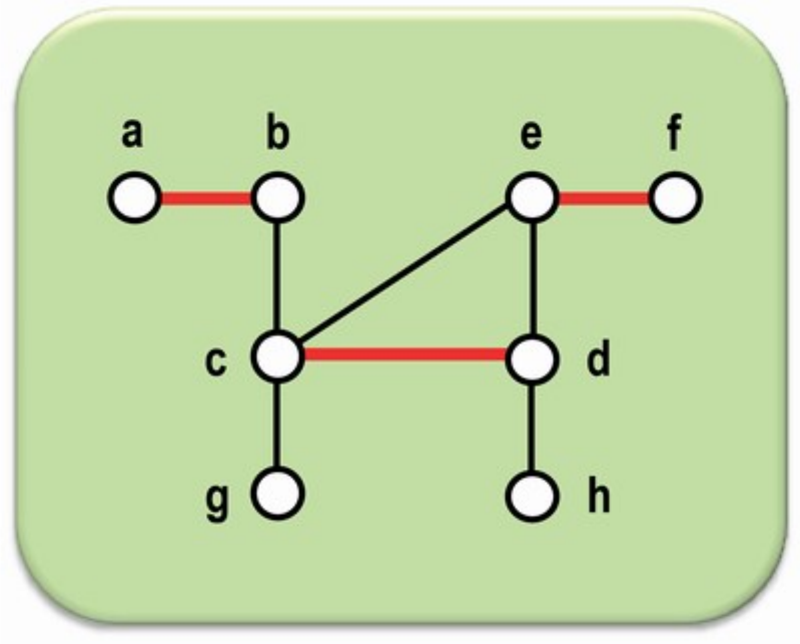
Emparelhamento máximo encontrado



Algoritmo de Edmonds

```
Determine um emparelhamento E
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E
        Expanda o emparelhamento
Fim enquanto
Emparelhamento máximo encontrado
```





Algoritmo de Edmonds

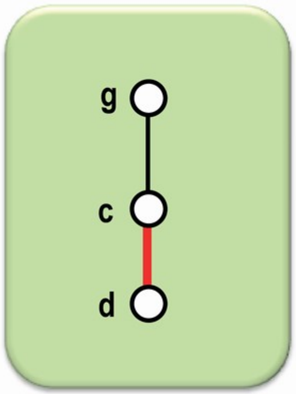
Determine um emparelhamento E

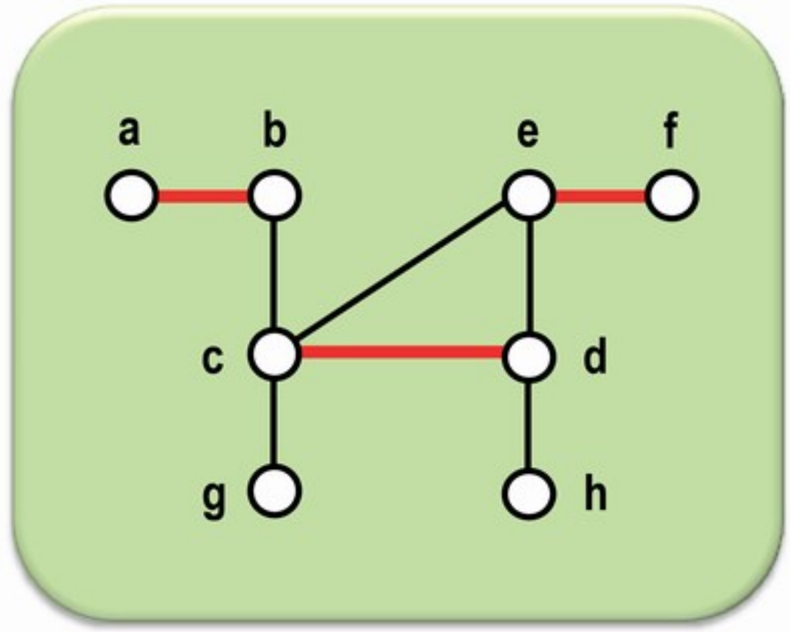
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E

Expanda o emparelhamento

Fim enquanto

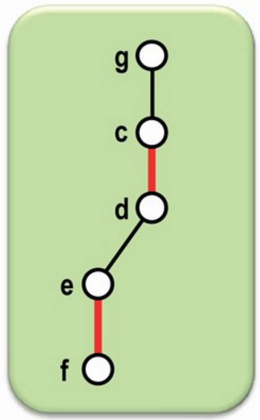
Emparelhamento máximo encontrado

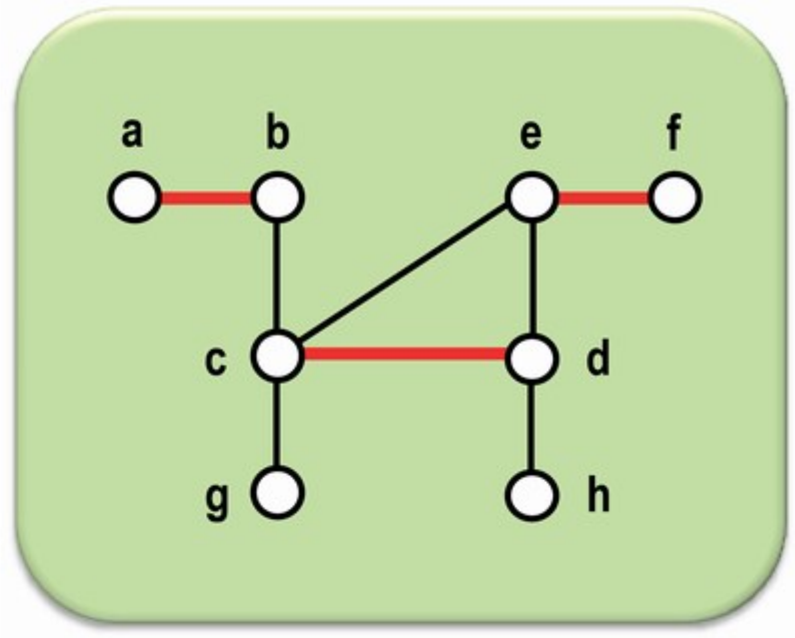




Algoritmo de Edmonds

```
Determine um emparelhamento E
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E
      Expanda o emparelhamento
Fim enquanto
Emparelhamento máximo encontrado
```





Algoritmo de Edmonds

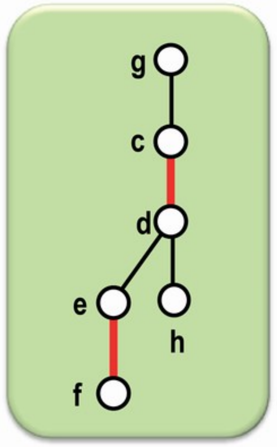
Determine um emparelhamento E

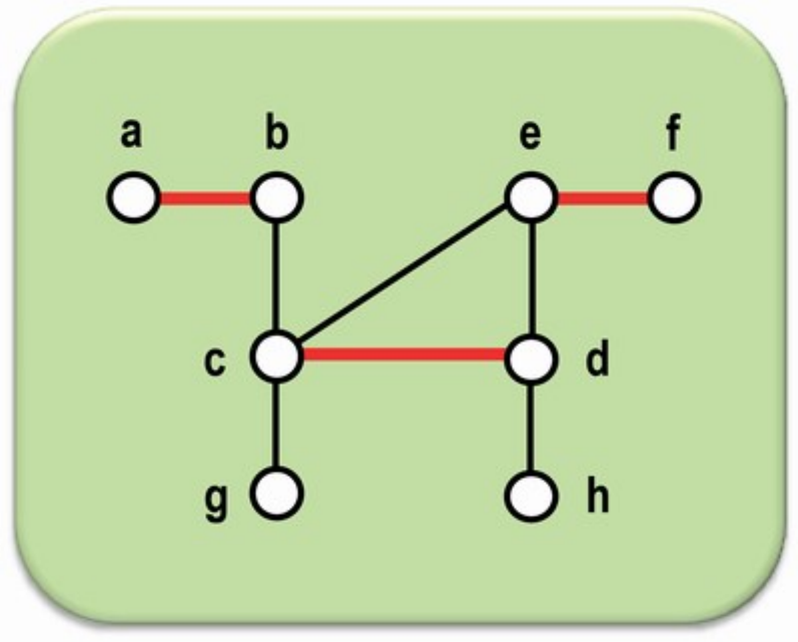
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E

        Expanda o emparelhamento

Fim enquanto

Emparelhamento máximo encontrado





Algoritmo de Edmonds

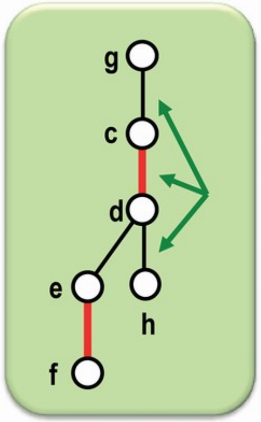
Determine um emparelhamento E

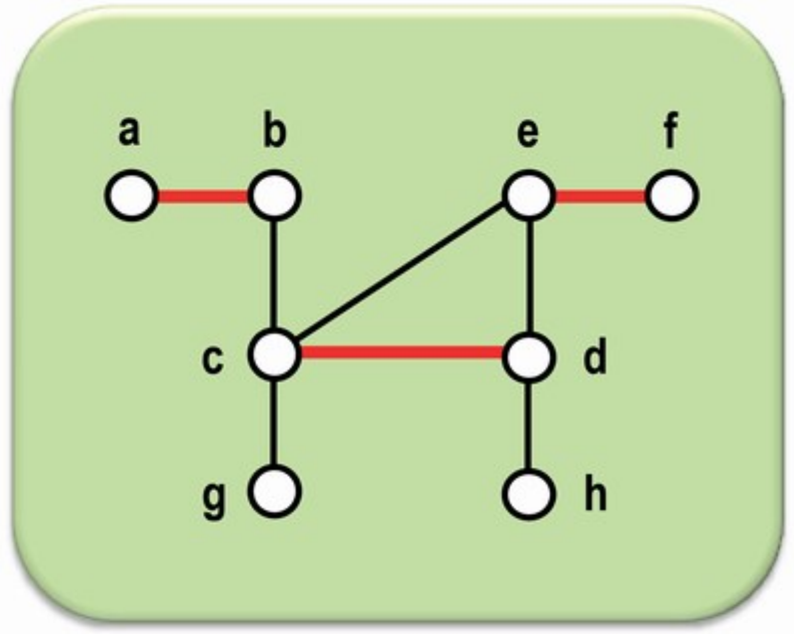
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E

Expanda o emparelhamento

Fim enquanto

Emparelhamento máximo encontrado





Algoritmo de Edmonds

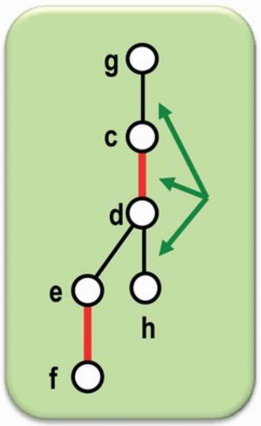
Determine um emparelhamento E

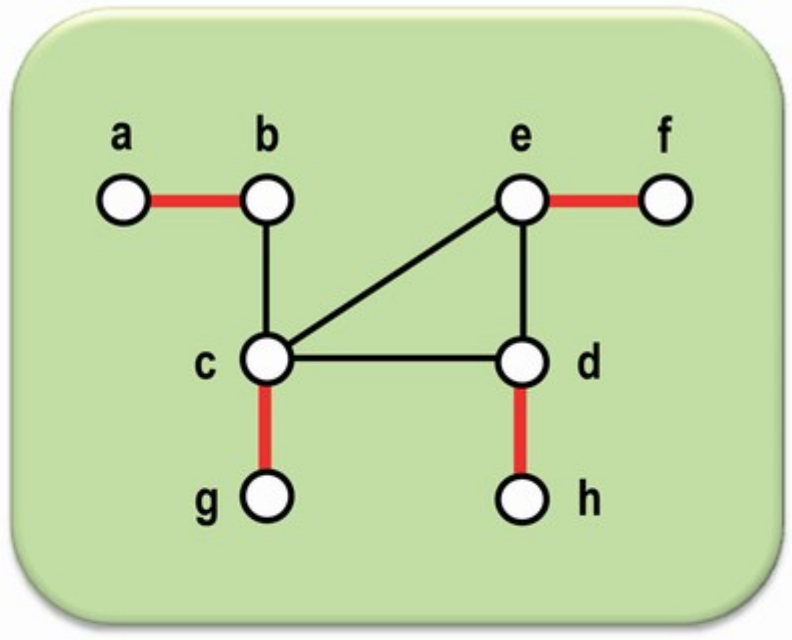
Enquanto há um caminho de aumento em relação a E

    Expanda o emparelhamento

Fim enquanto

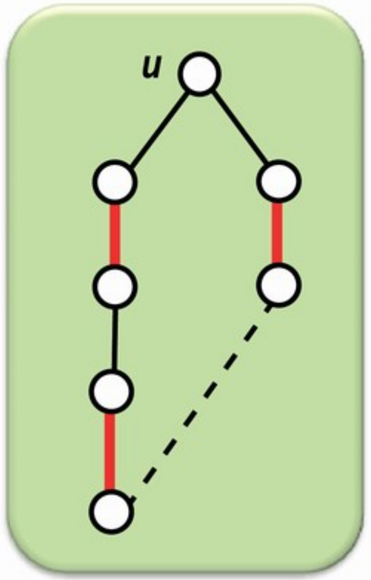
Emparelhamento máximo encontrado





Como encontrar caminhos de aumento eficientemente?

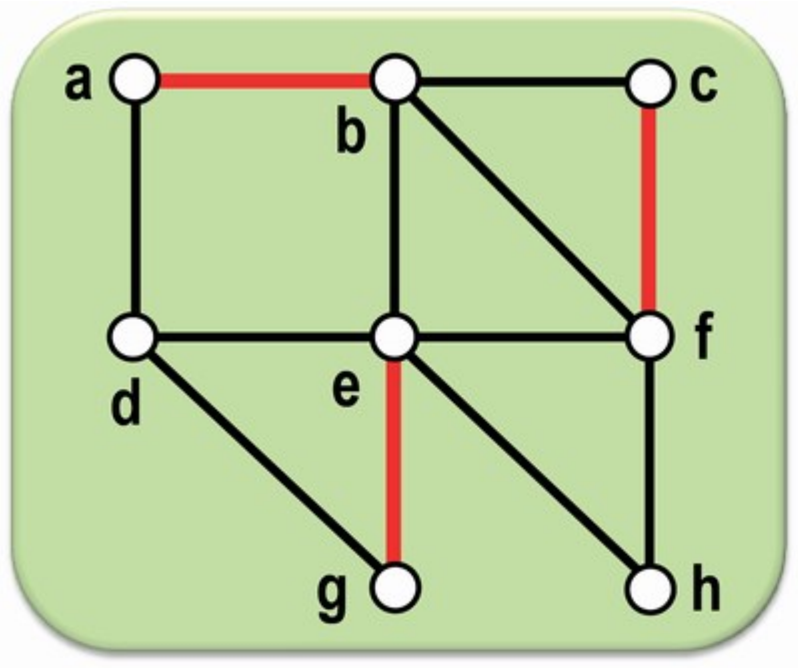
- ***Blossom:*** caminho alternante fechado de comprimento impar



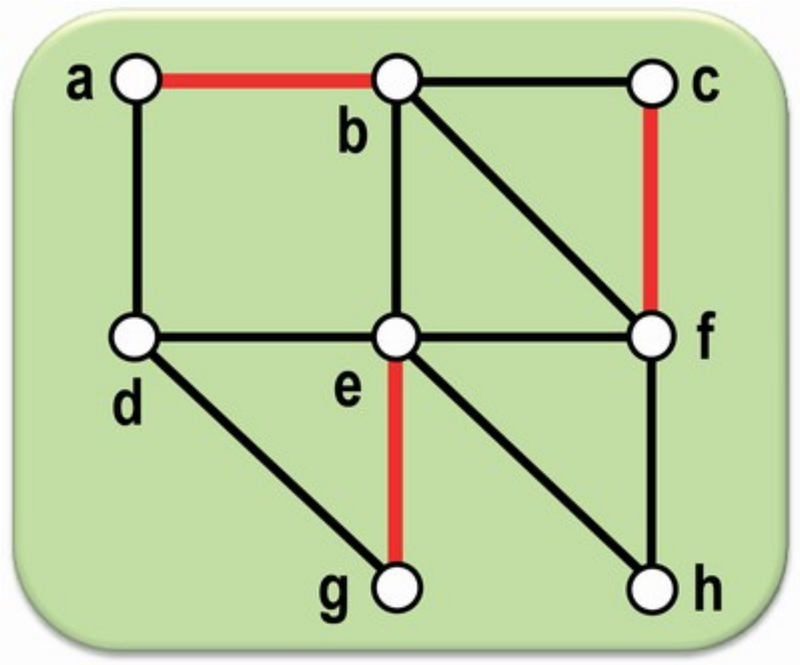
Como encontrar caminhos de aumento eficientemente?

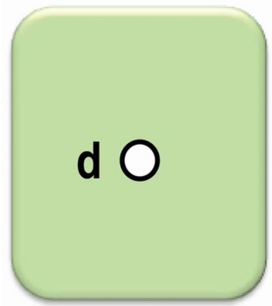
- ***Blossom:*** caminho alternante fechado de comprimento impar
- Ao encontrar um *blossom*, o algoritmo contrai seus vértices em um único vértice
- O algoritmo termina quando encontra-se um caminho de aumento ou um grafo reduzido em que não existe um caminho de aumento

Algoritmo de Edmonds

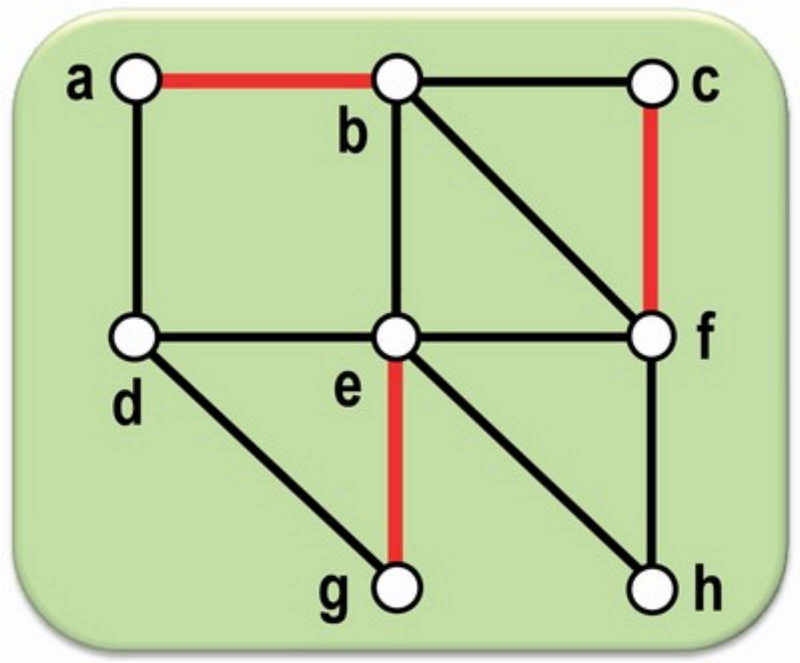


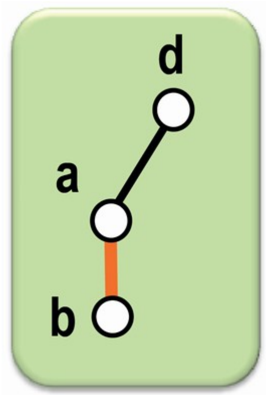
Algoritmo de Edmonds



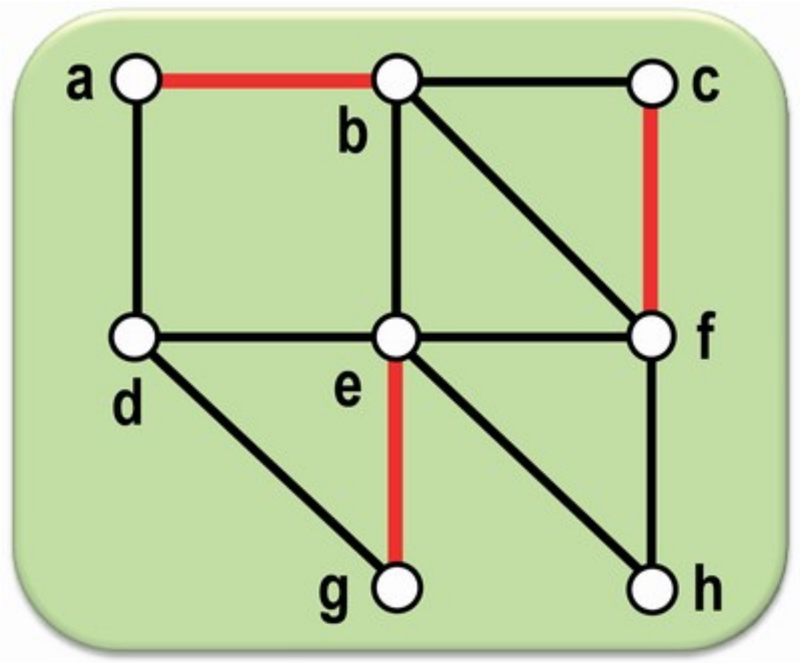


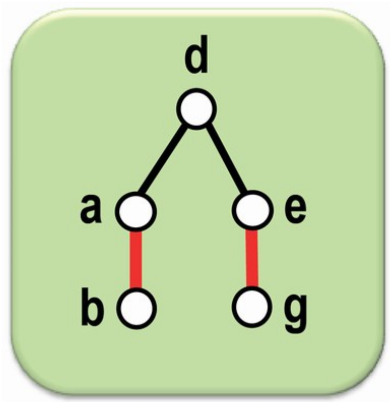
Algoritmo de Edmonds



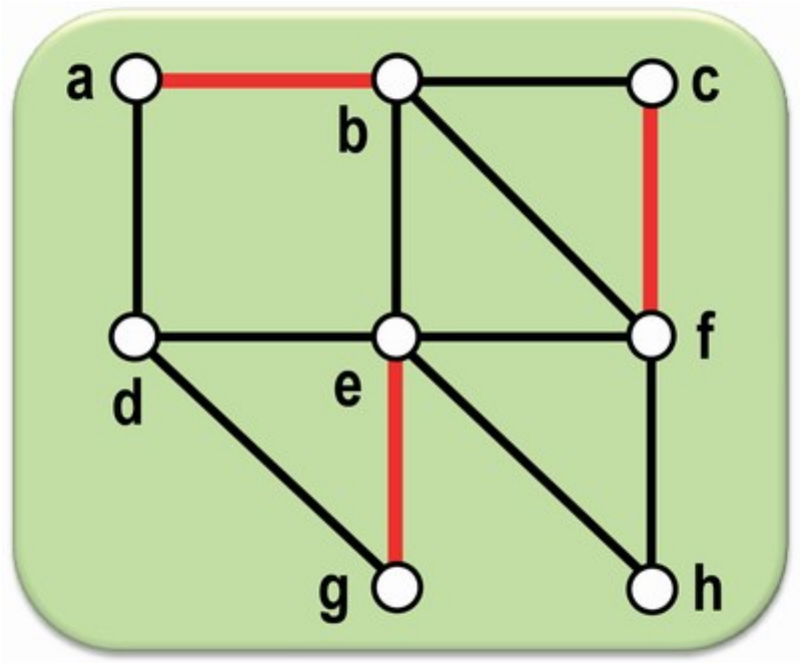


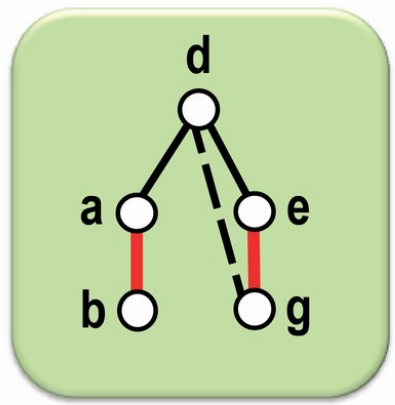
Algoritmo de Edmonds



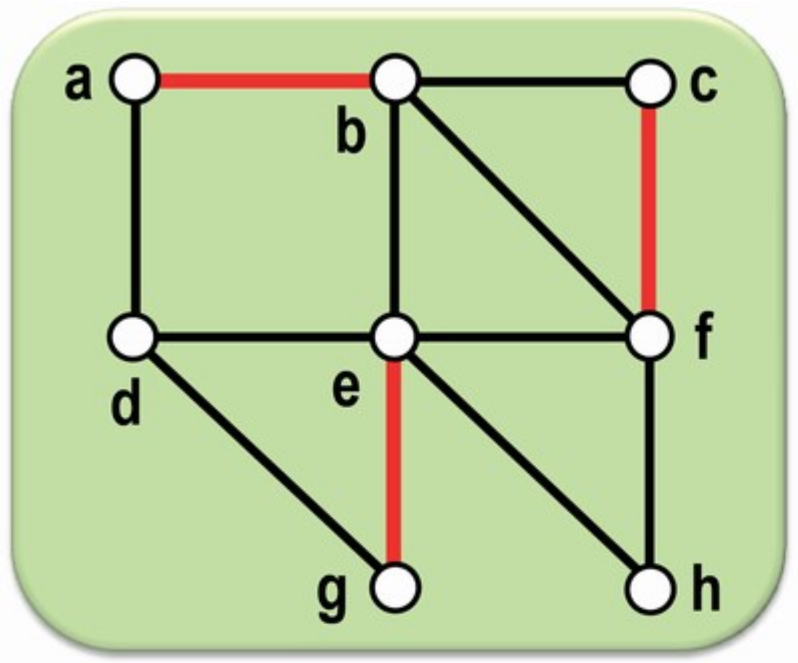


Algoritmo de Edmonds

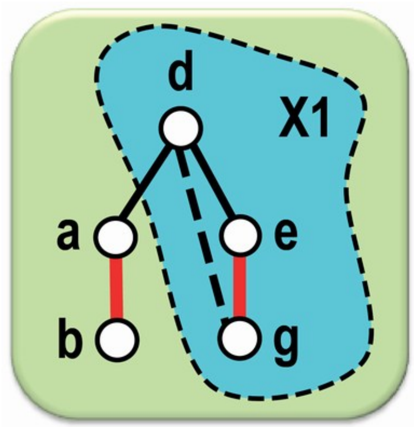




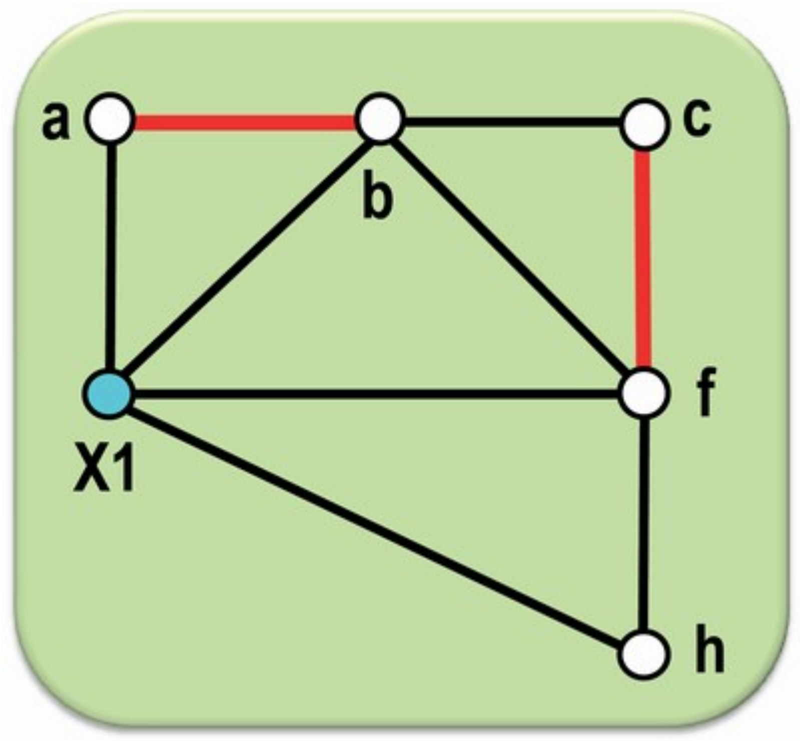
Algoritmo de Edmonds



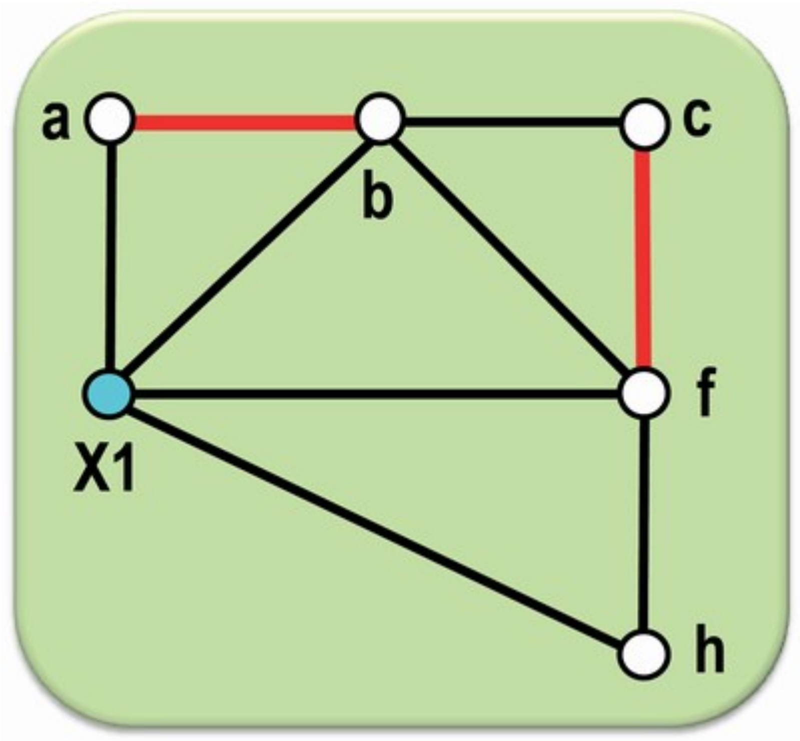
Blossom!

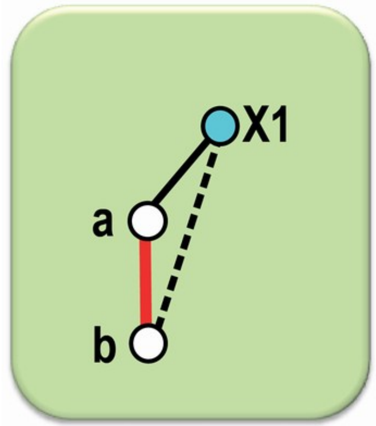


Algoritmo de Edmonds

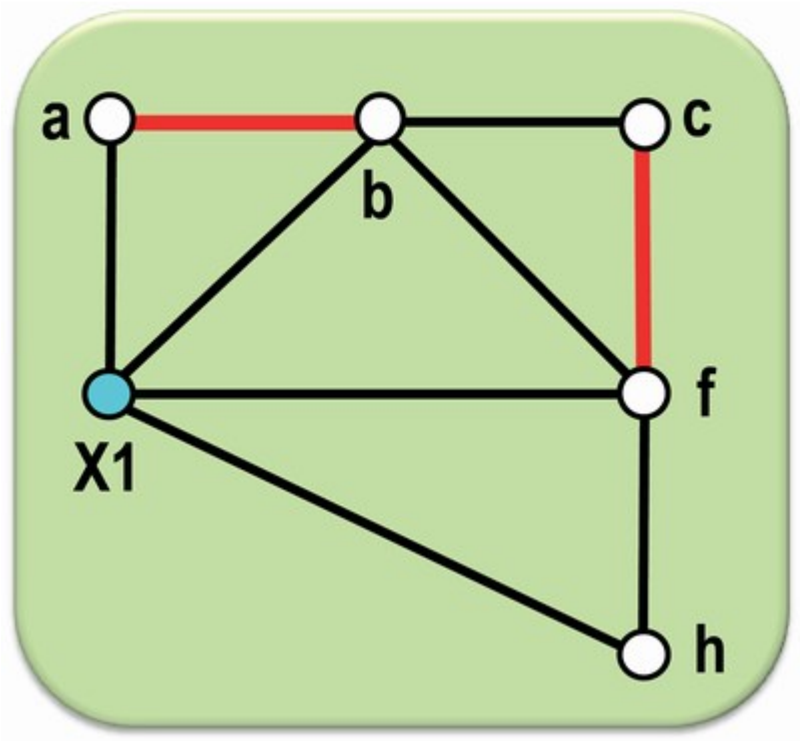


Algoritmo de Edmonds

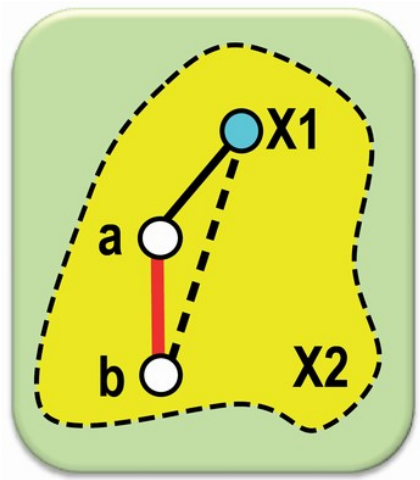




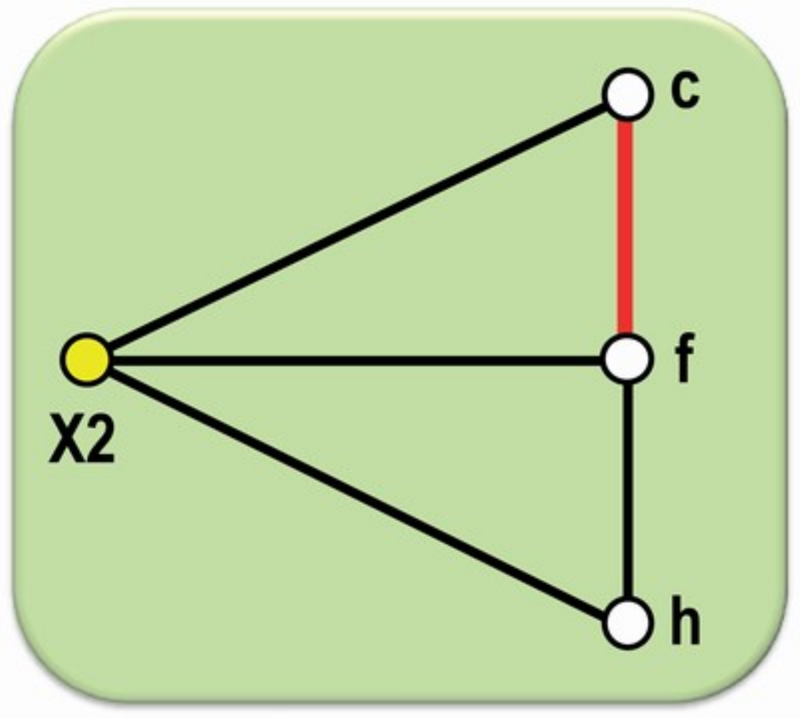
Algoritmo de Edmonds



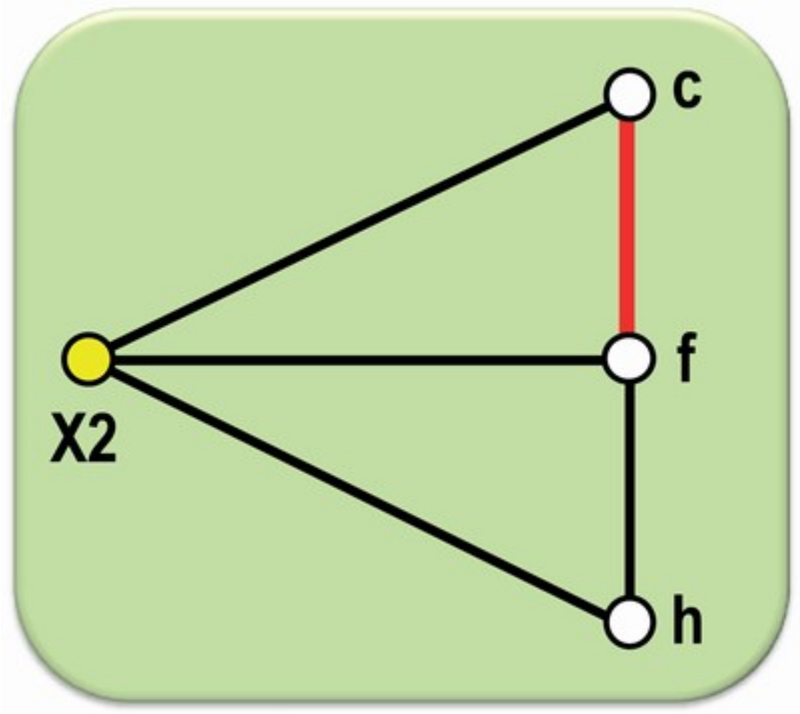
Blossom!

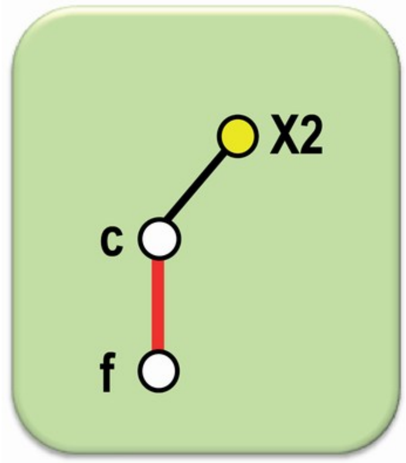


Algoritmo de Edmonds

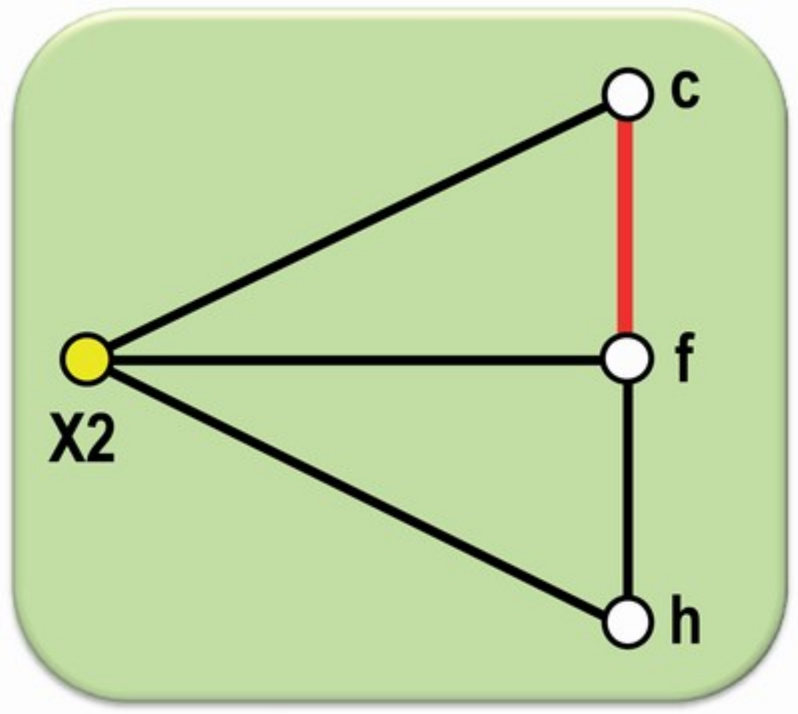


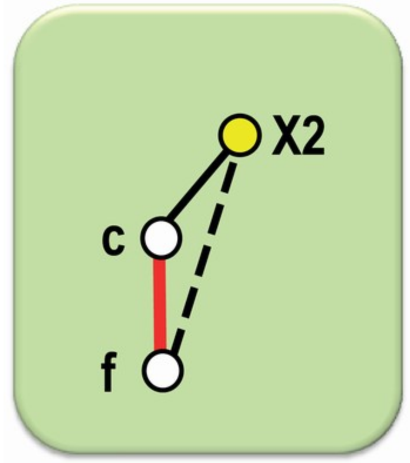
Algoritmo de Edmonds



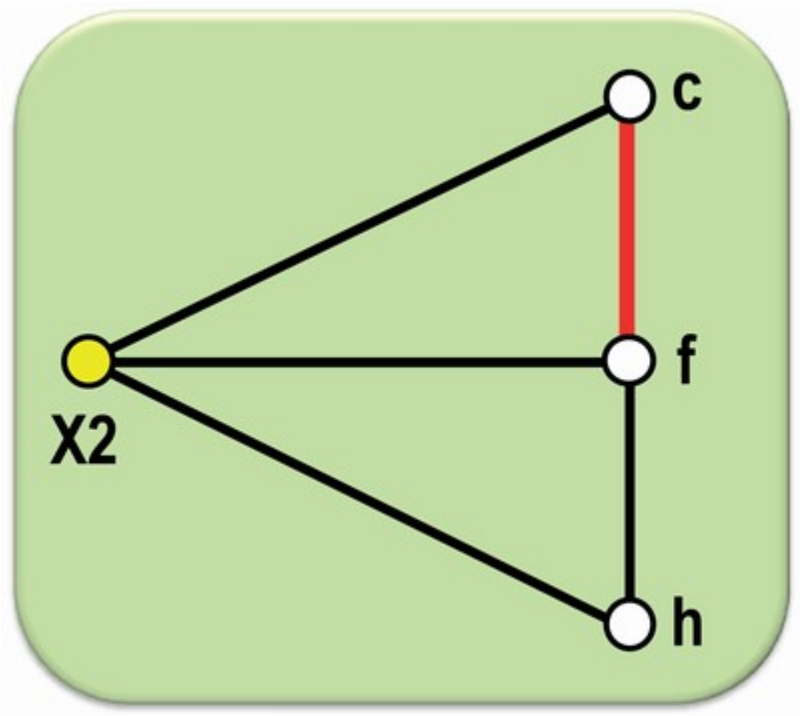


Algoritmo de Edmonds

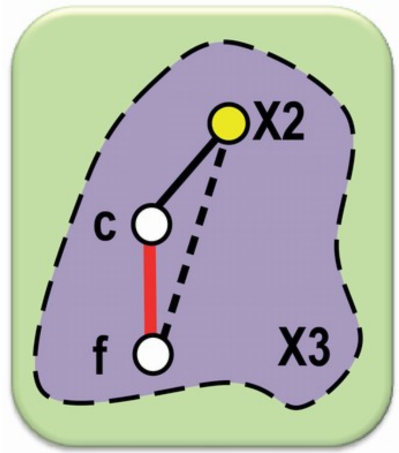




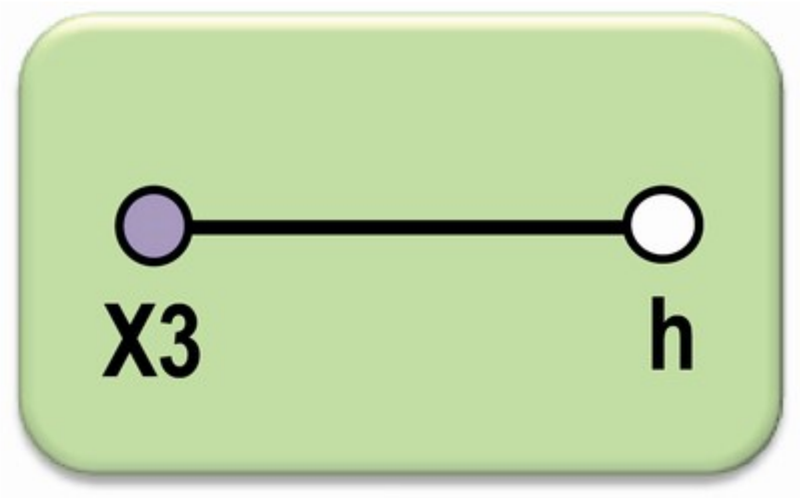
Algoritmo de Edmonds



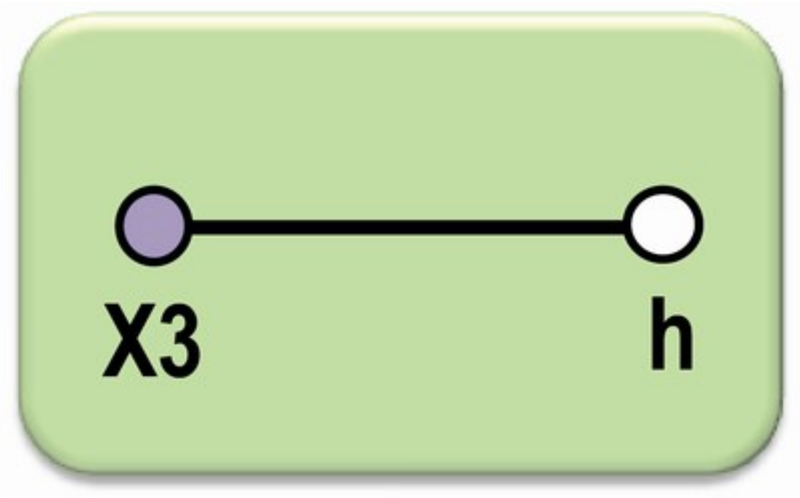
Blossom!

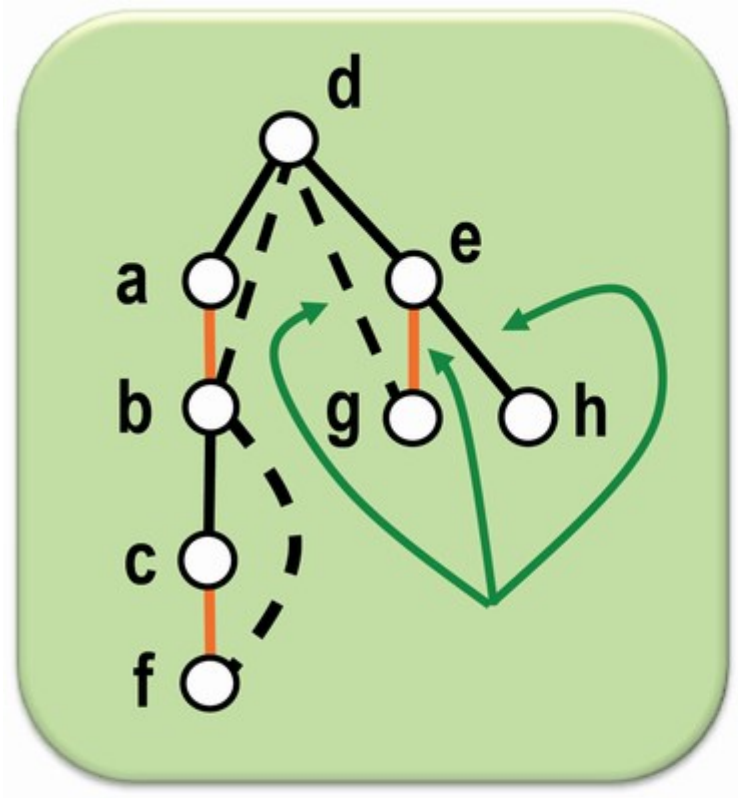


Algoritmo de Edmonds

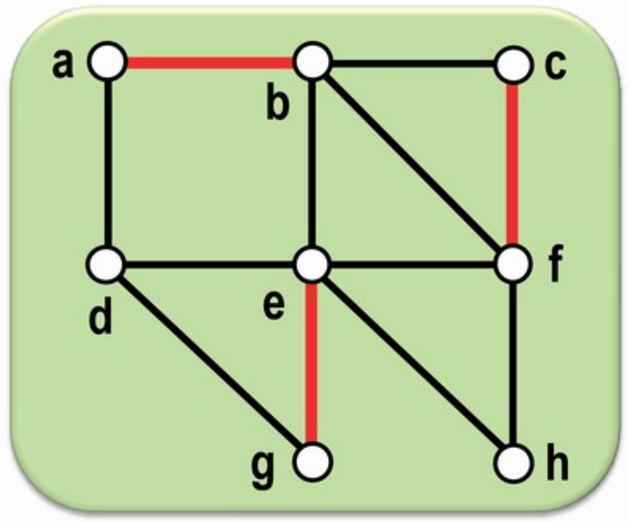


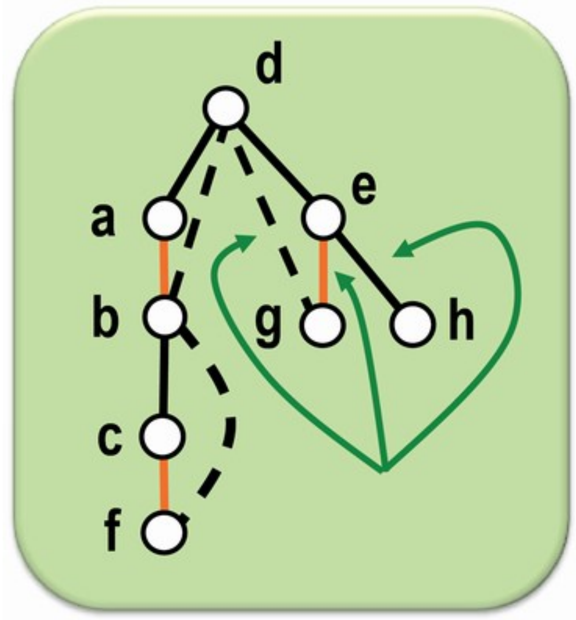
Algoritmo de Edmonds

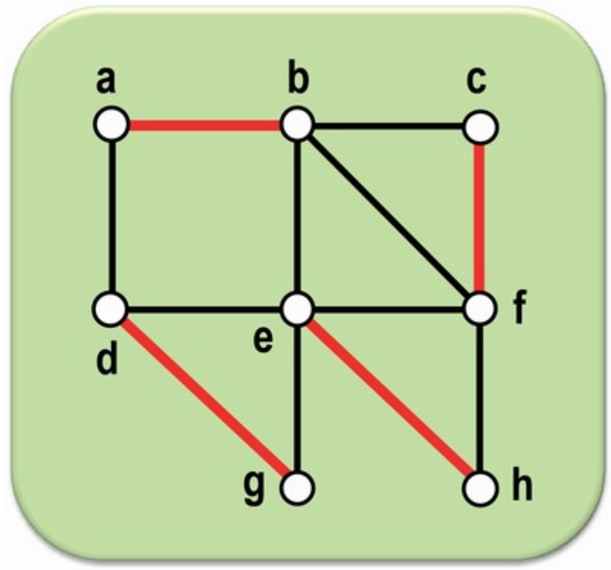




Algoritmo de Edmonds







Cobertura de arestas

- Em um grafo G, um conjunto g de arestas é chamado de cobertura de aresta se todos os vértices de G são incidentes a pelo menos uma aresta de g.

- O próprio grafo G é uma cobertura de arestas

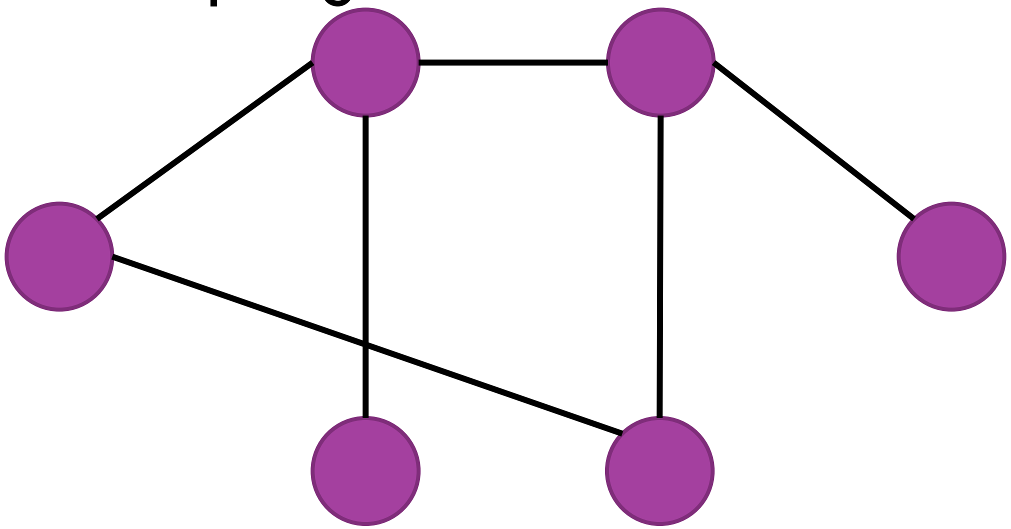
Cobertura de arestas

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que g é uma ***cobertura mínima de aresta.***

MENOR CONJUNTO DE ARESTAS INCIDENTES A TODOS OS VÉRTICES

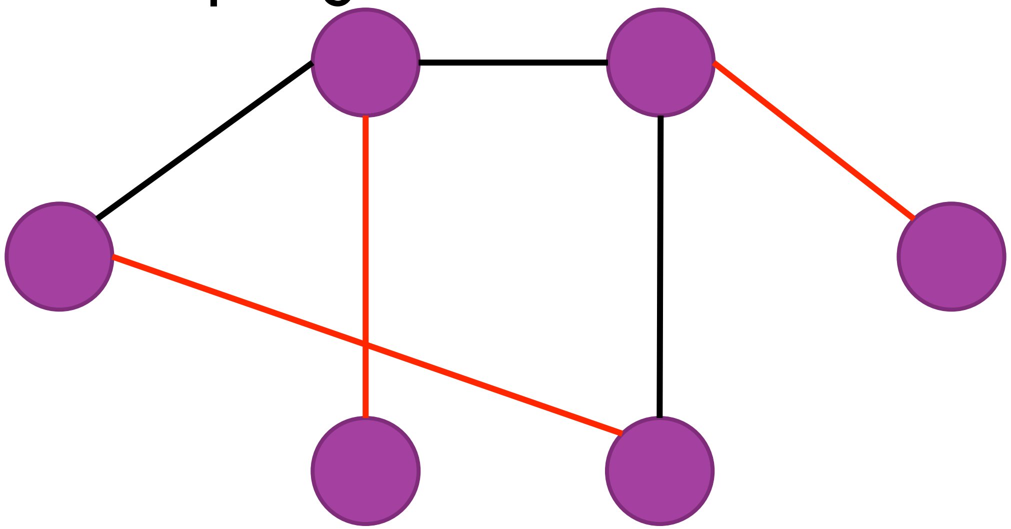
Cobertura de arestas

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que g é uma ***cobertura mínima de aresta.***



Cobertura de arestas

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que g é uma ***cobertura mínima de aresta.***

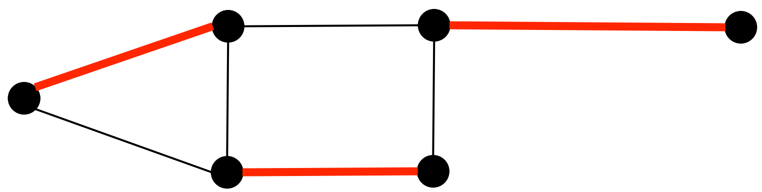


Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Se temos um emparelhamento perfeito, temos uma cobertura mínima de arestas

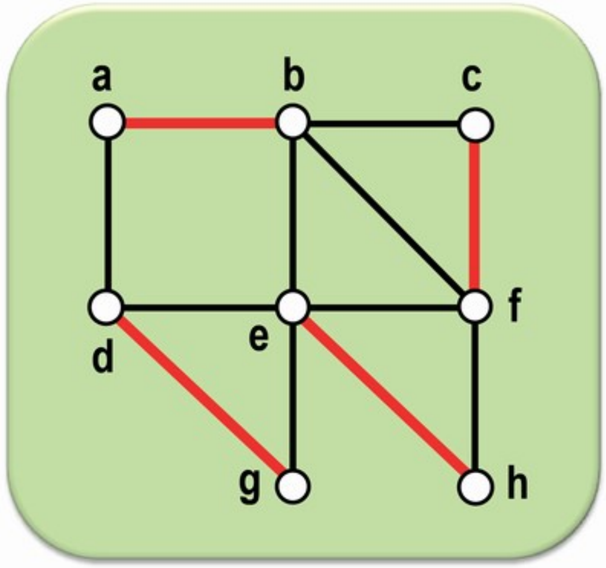
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Se temos um emparelhamento perfeito, temos uma cobertura mínima de arestas



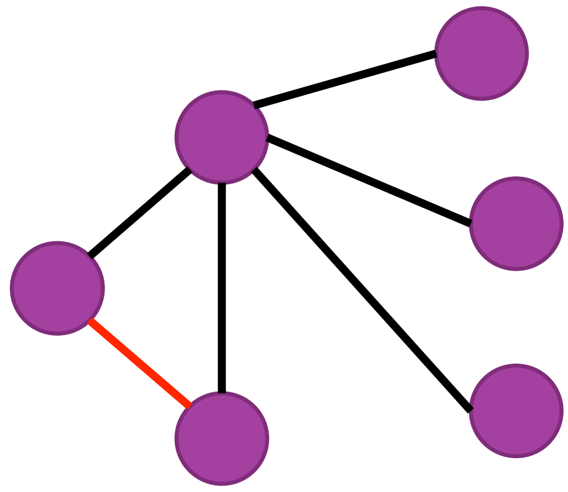
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



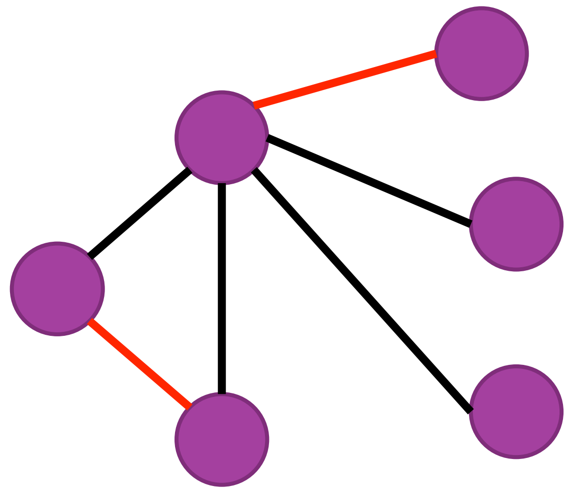
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



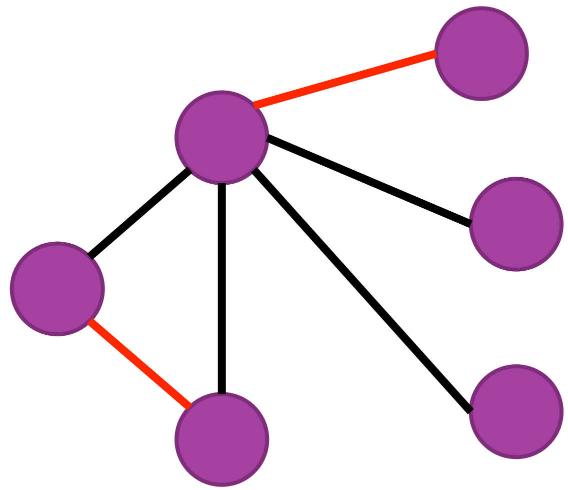
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



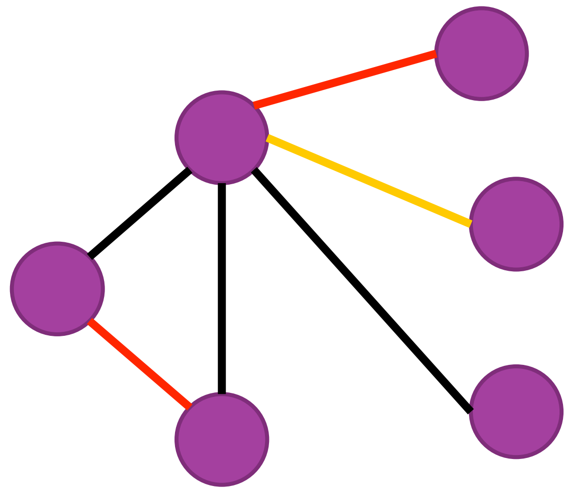
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



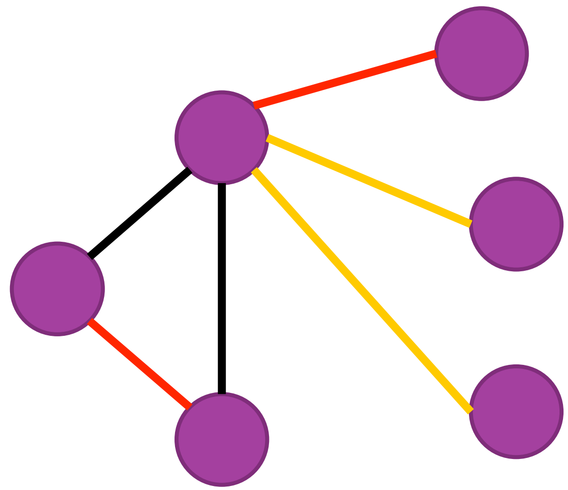
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura