Algoritmos em Grafos

Conectividade

Prof. Alexei Machado

PUC MINAS

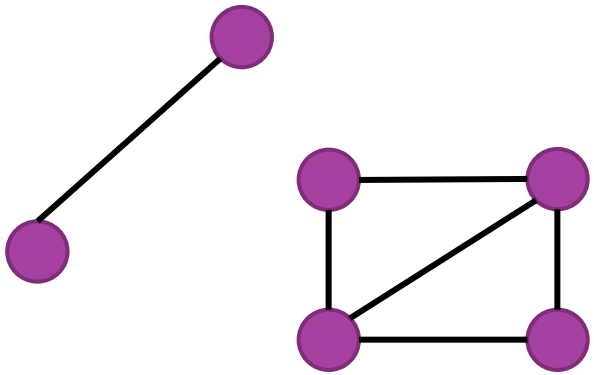
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Grafos conexos

- Um grafo é conexo quando existe pelo menos um caminho entre quaisquer pares de vértices

Grafos desconexos e componentes conexos

- Cada componente de um grafo desconectado é chamado de componente conexo



Componentes conexos

- Como saber se um grafo é conexo? (ou, como saber quantos componentes conexos há em um grafo?)

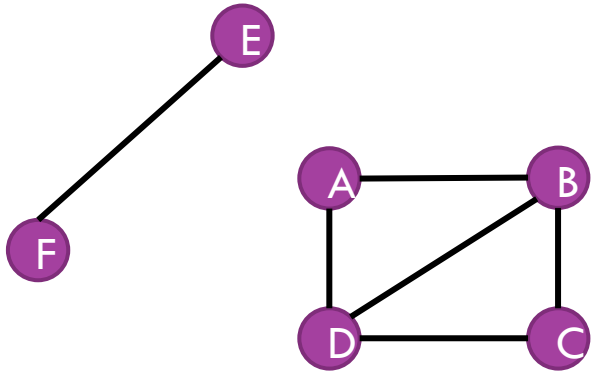
Componentes conexos

- Como saber se um grafo é conexo? (ou, como saber quantos componentes conexos há em um grafo?)

- A busca em profundidade forma árvores. Esta informação pode ser utilizada para contarmos os componentes de um grafo

Algoritmo DFS - inicialização

```
Para cada vértice u faça
        u.cor = branco;
        u.pai = null;
Fim para
componentes=1;
timestamp = 0
Para cada vértice u faça
        se u.cor == branco
                Visitar(u);
                componentes++;
        Fim se
Fim Para
```

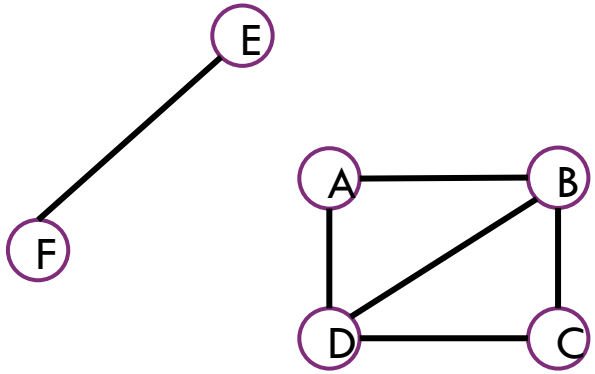


Componente: 1

A	B	C	D	E	F

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

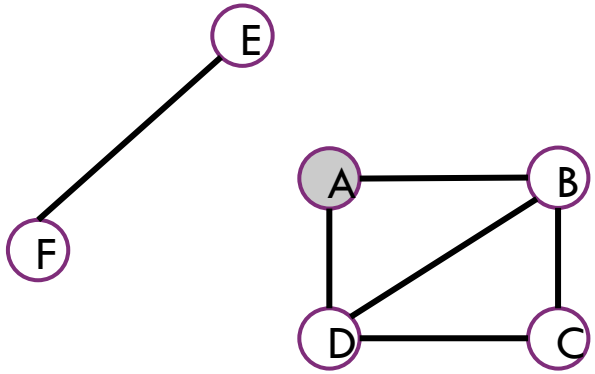


Componente: 1

A	B	C	D	E	F

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

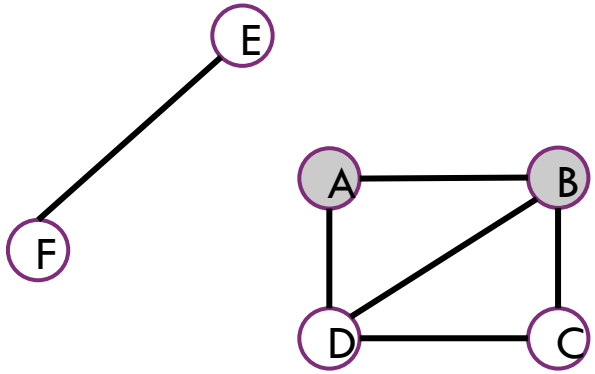


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1					

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

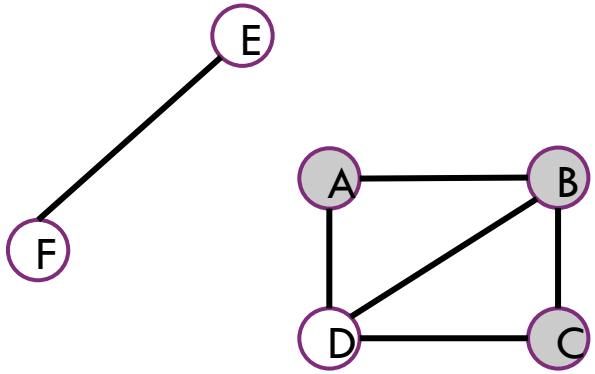


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1	1				

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

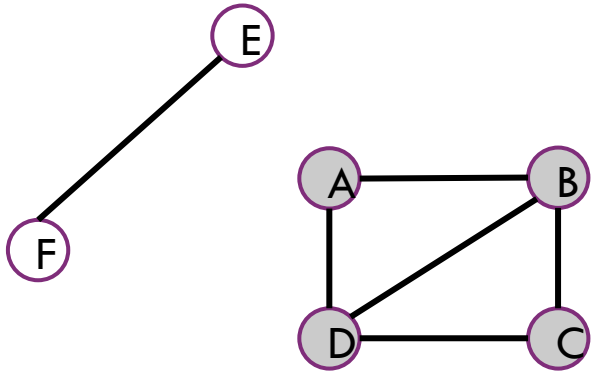


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1	1	1			

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

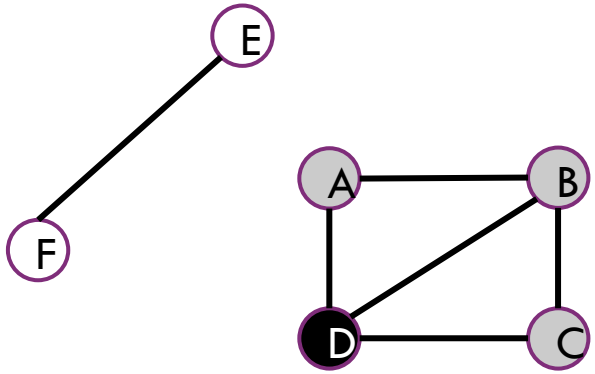


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1		

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

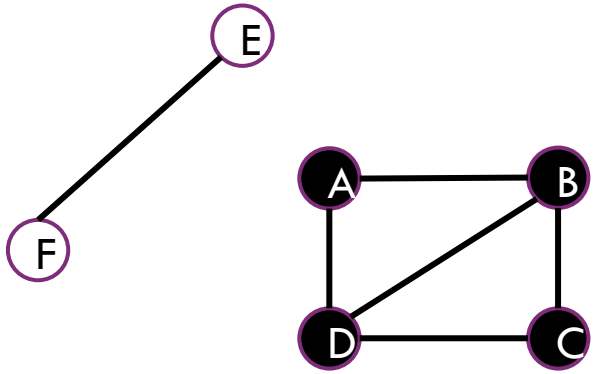


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1		

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

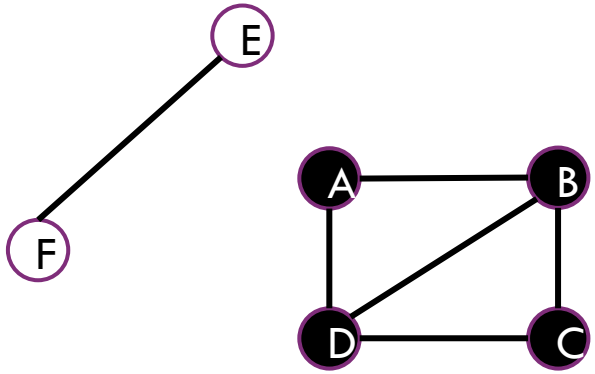


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1		

Algoritmo DFS - inicialização

```
Para cada vértice u faça
        u.cor = branco;
        u.pai = null;
Fim para
componentes=1;
timestamp = 0
Para cada vértice u faça
        se u.cor == branco
                Visitar(u);
                componentes++;
        Fim se
Fim Para
```

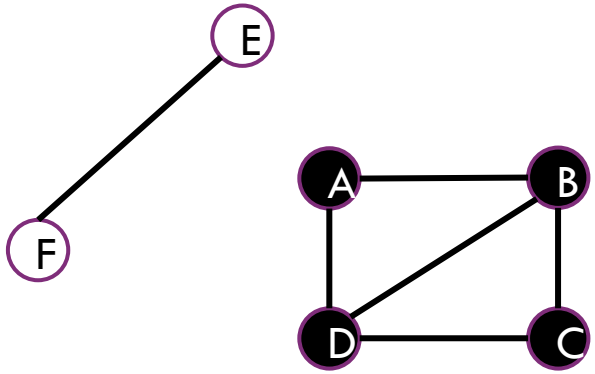


Componente: 1

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1		

Algoritmo DFS - inicialização

```
Para cada vértice u faça
        u.cor = branco;
        u.pai = null;
Fim para
componentes=1;
timestamp = 0
Para cada vértice u faça
        se u.cor == branco
                Visitar(u);
                componentes++;
        Fim se
Fim Para
```

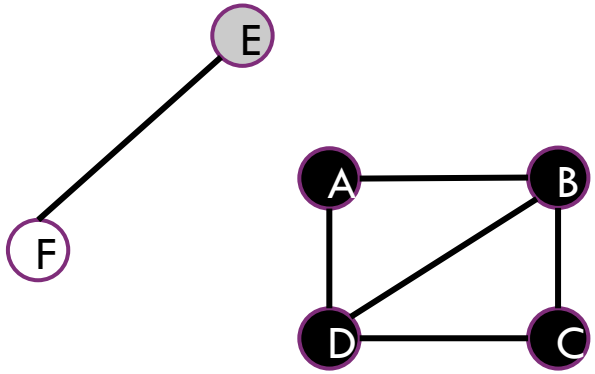


Componente: 2

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1		

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

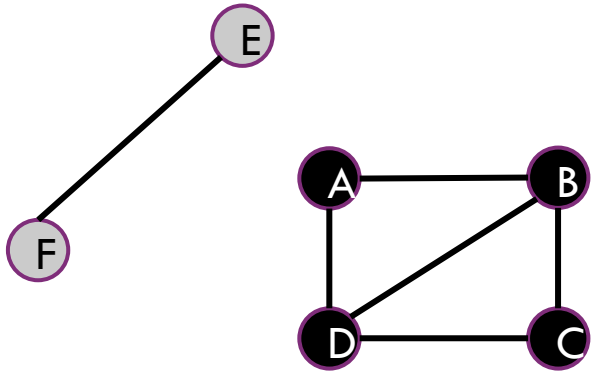


Componente: 2

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	2	

Algoritmo DFS – principal (visita)

```
timestamp = timestamp + 1;
u.descoberta = timestamp;
u.cor = cinza;
u.componente = componentes;
Para cada vértice v vizinho de u faça
        se v.cor == branco
                v.pai = u;
                Visitar(v);
        Fim se
Fim Para
u.cor = preto;
timestamp = timestamp+1;
u.término = timestamp;
```

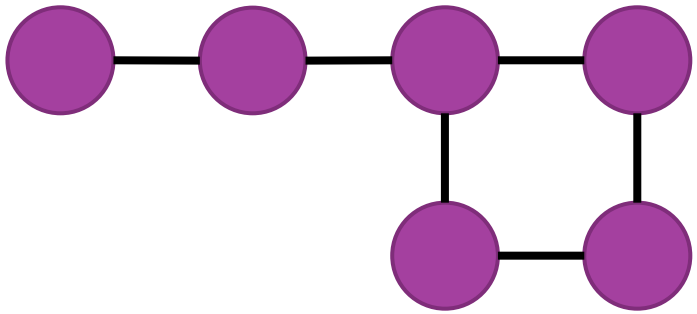


Componente: 2

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	2	2

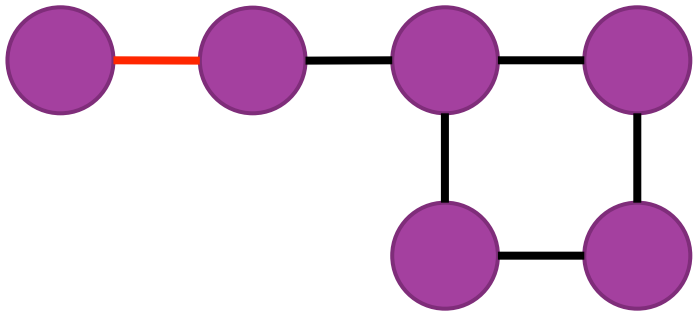
Cut-edge

- Um *cut-edge* ou uma ponte é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo



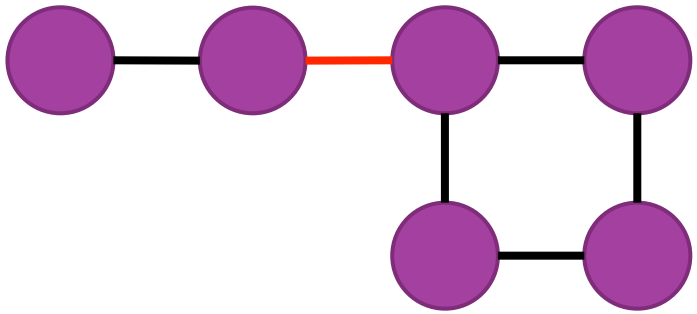
Cut-edge

- Um *cut-edge* ou uma ponte é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo



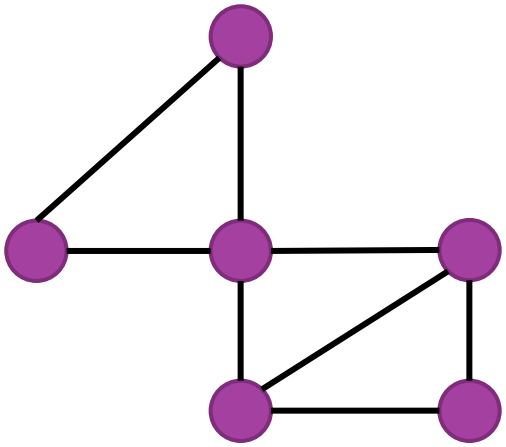
Cut-edge

- Um *cut-edge* ou uma ponte é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo



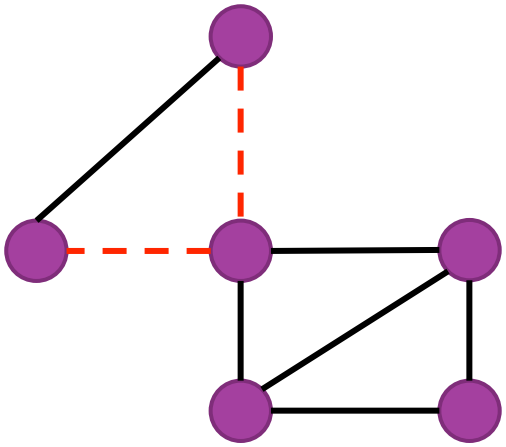
Cut-set

- Conjunto de arestas de um grafo conexo G cuja remoção desconecta G



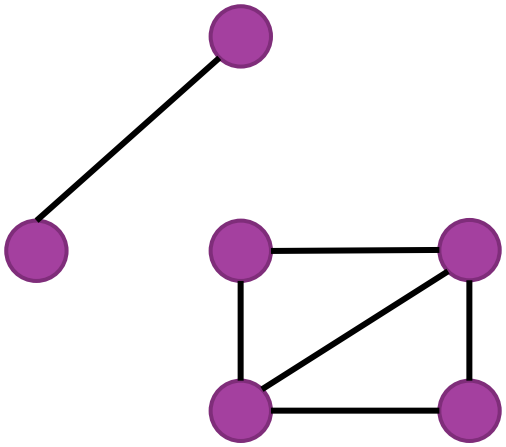
Cut-set

- Conjunto de arestas de um grafo conexo G cuja remoção desconecta G



Cut-set

- Conjunto de arestas de um grafo conexo G cuja remoção desconecta G

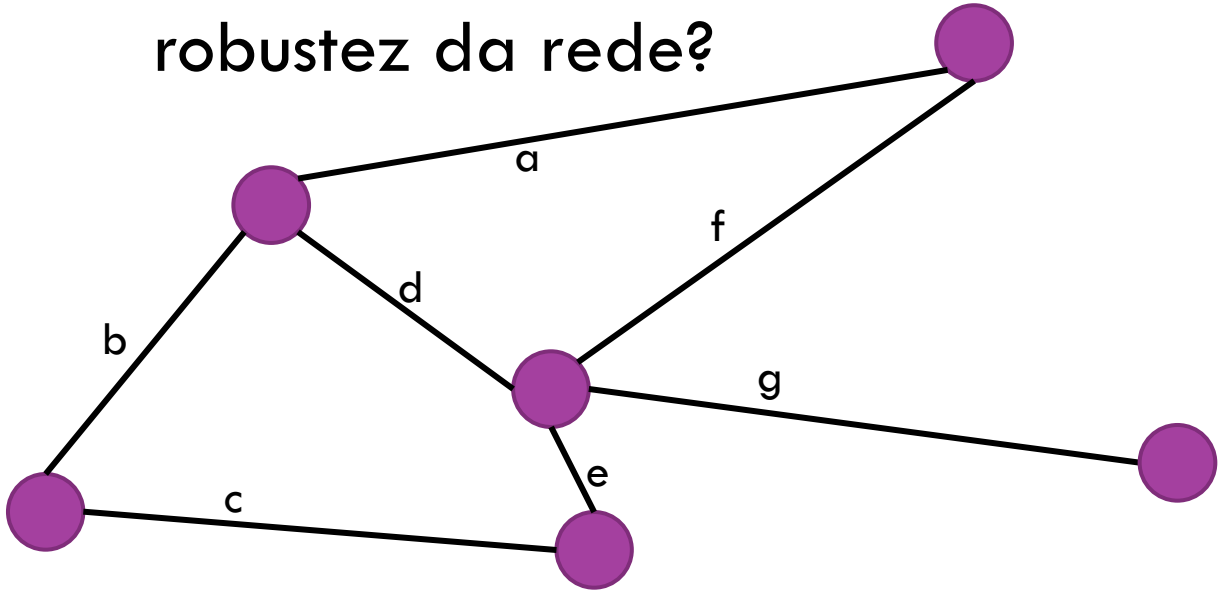


Cut-set

- Um *cut-set* particiona o grafo em dois subgrafos disjuntos
- Um *cut-set* pode ser definido como o conjunto de arestas em um grafo conexo cuja remoção reduz o *rank* do grafo em 1 unidade.
- O rank ou posto de um grafo G com n vértices e c componentes conexas é dado por r = n-c

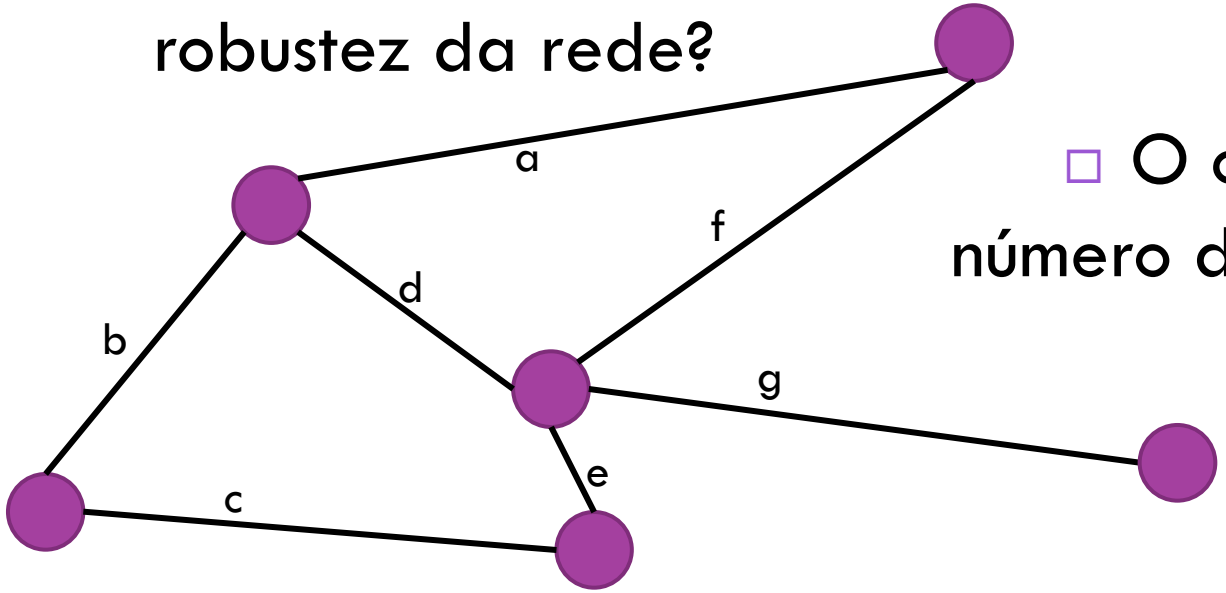
Cut-set: aplicação

- Dada uma rede de comunicação, como medir a robustez da rede?



Cut-set: aplicação

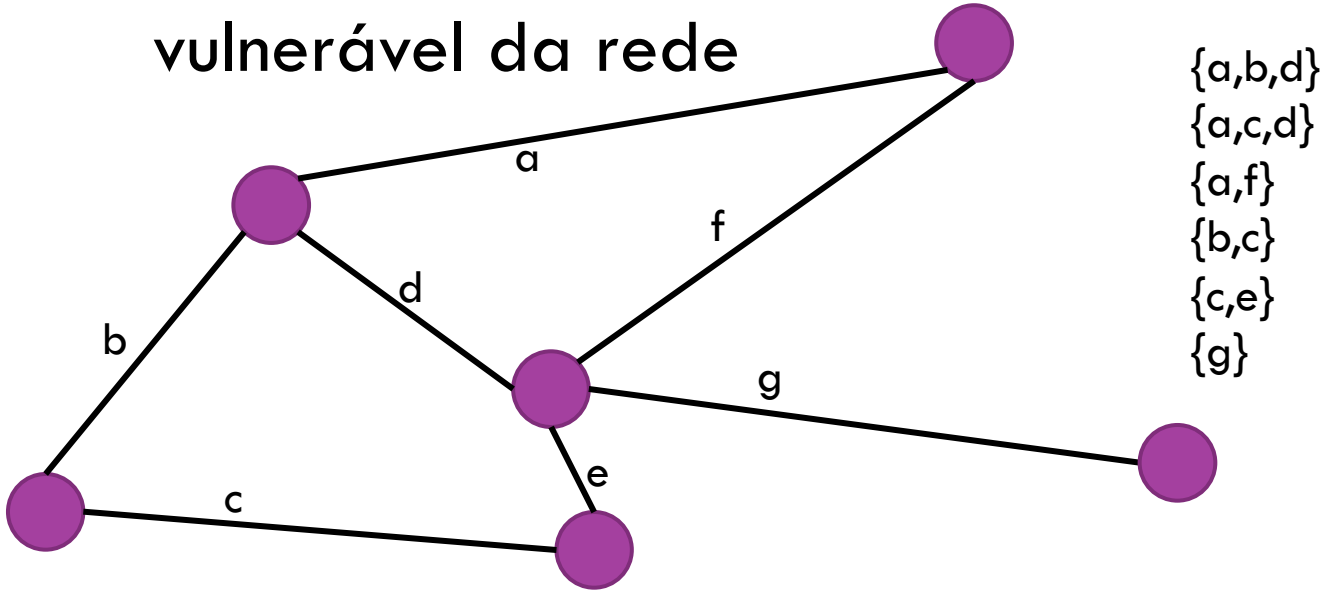
- Dada uma rede de comunicação, como medir a robustez da rede?



- O cut-set com o menor número de arestas é o mais vulnerável da rede

Cut-set: aplicação

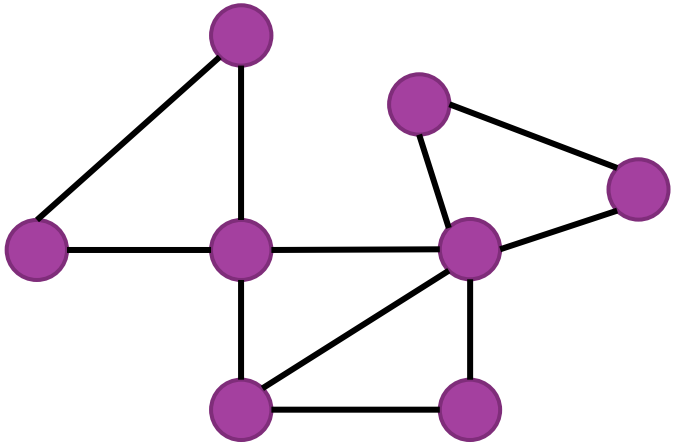
- O cut-set com o menor número de arestas é o mais vulnerável da rede



{a,b,d}
{a,c,d}
{a,f}
{b,c}
{c,e}
{g}

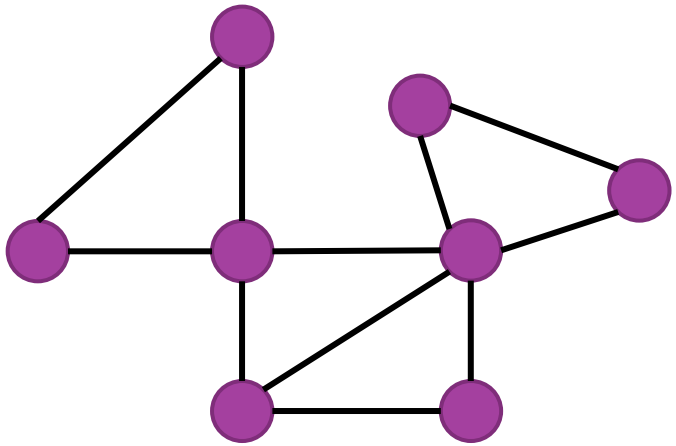
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de aresta $\lambda(G)$:
  - menor número de arestas do grafo cuja remoção o desconecta. É o número de arestas do menor *cut-set*



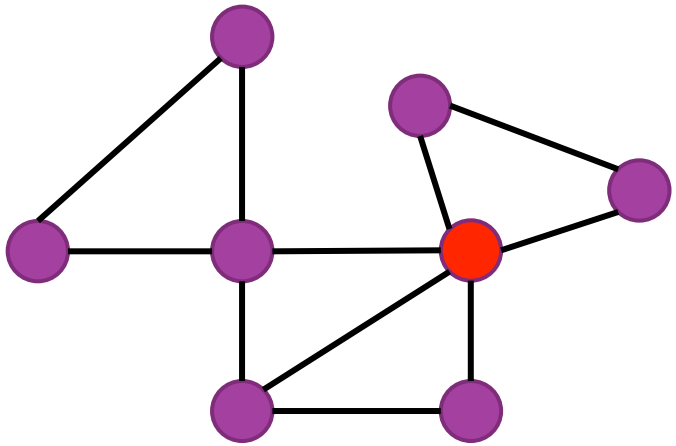
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



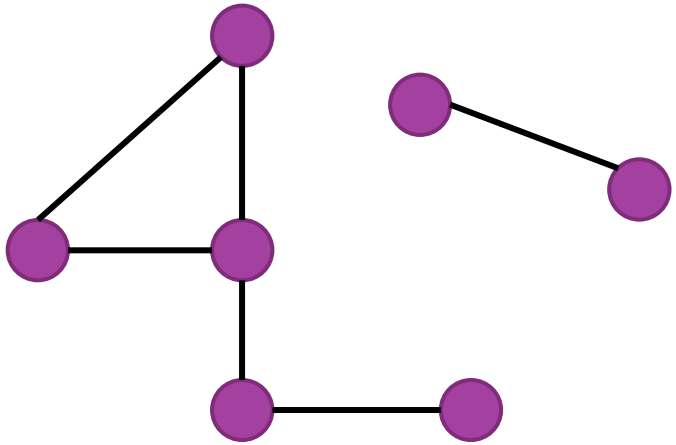
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



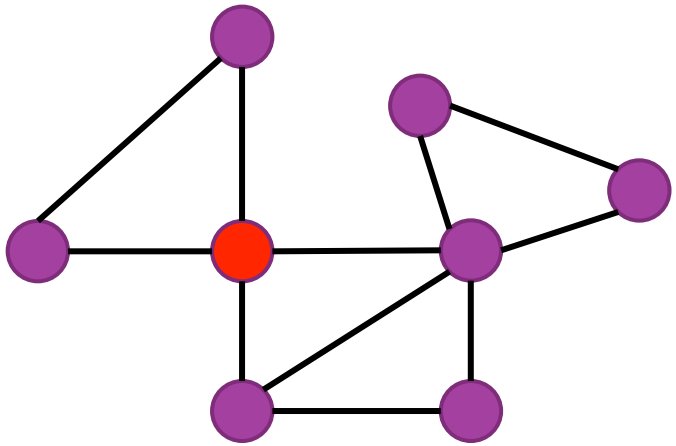
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



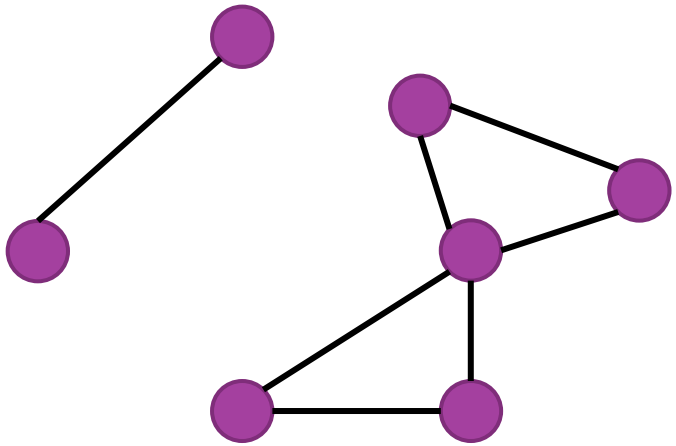
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



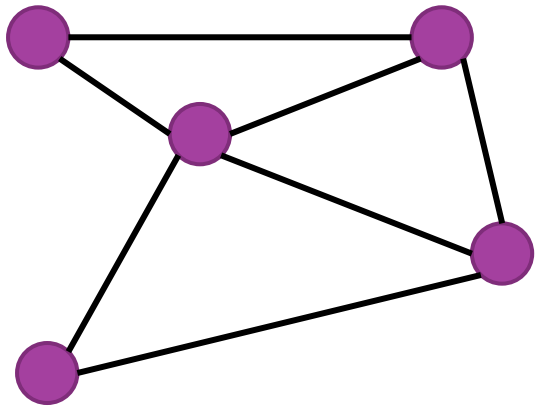
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



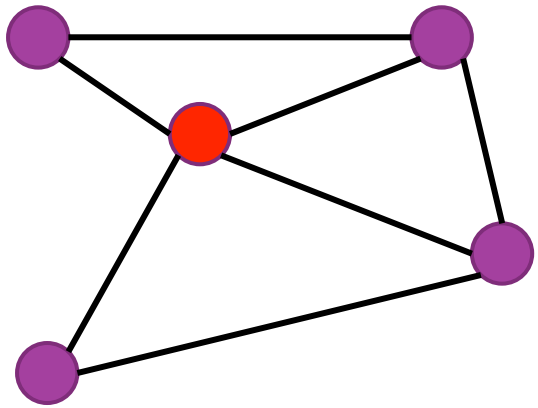
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



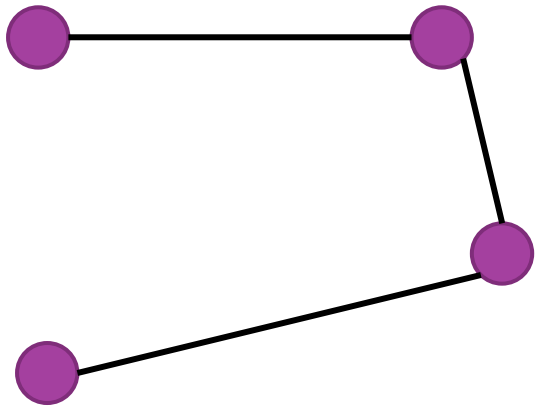
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



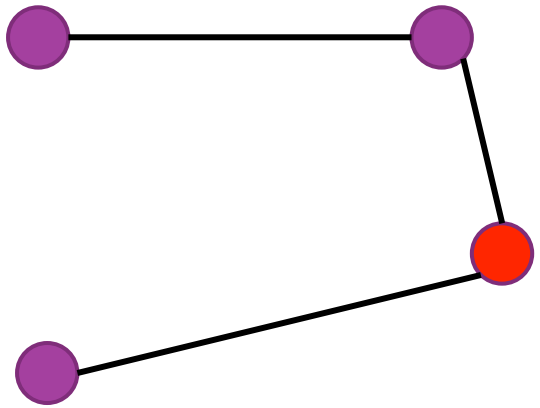
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



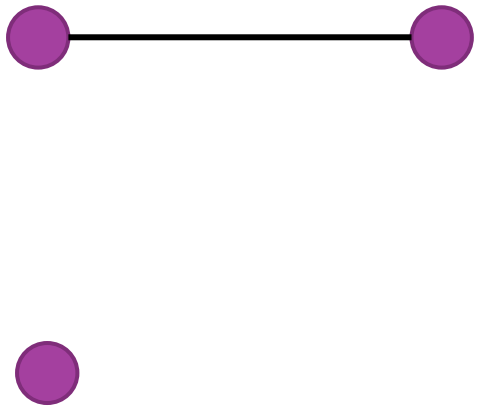
Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta



Conectividade e separabilidade

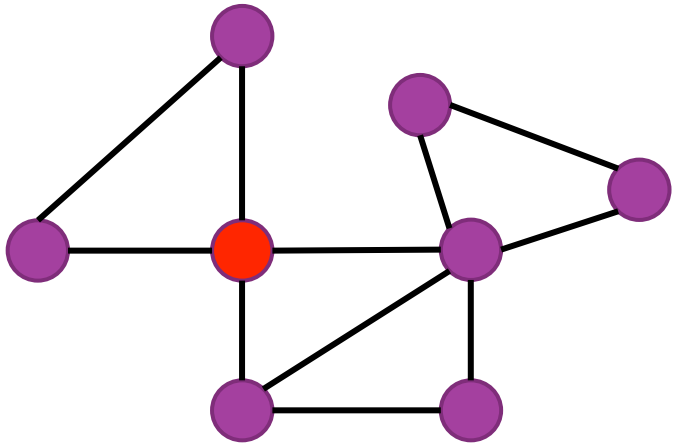
- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta
- Grafo K-conexo: grafo de conectividade de vértice igual a K.

Conectividade e separabilidade

- Conectividade de vértice K(G):
  - menor número de vértices do grafo cuja remoção (em conjunto com suas arestas adjacentes) o desconecta
- Grafo K-conexo: grafo de conectividade de vértice igual a K.
- Grafo separável: grafo com conectividade de vértice igual a 1.

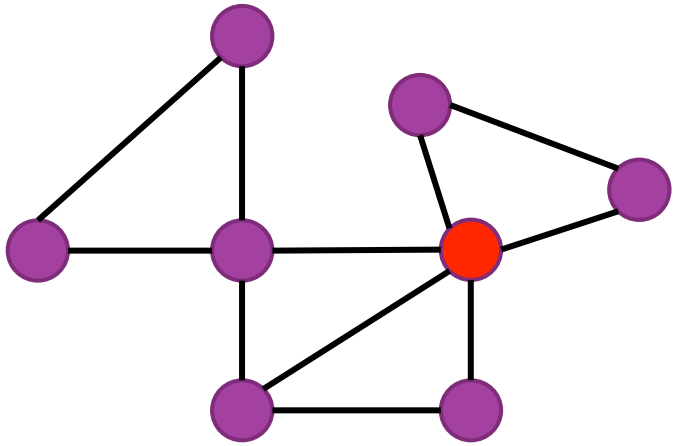
Cut-vértice

- Vértice que desconecta um grafo separável (também chamado *cut vertex ou ponto de articulação*)



Cut-vértice

- Vértice que desconecta um grafo separável (também chamado *cut vertex ou ponto de articulação*)



Teoremas

- TEOREMA 1: A conectividade de aresta de um grafo G não pode exceder ao grau do vértice de menor grau.

- TEOREMA 2: A conectividade de vértice não pode exceder a conectividade de aresta de G.

Conectividade

- Seja $\delta(G)$ o menor grau de vértice em G.

Para todo grafo conexo G, tem-se:

$$K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Teoremas

- TEOREMA 3: A máxima conectividade de vértice de um grafo G com n vértices e e arestas (e $\geq$ n-1) é $\frac{2e}{n}$

Para todo grafo conexo G, tem-se:

$$K(G) \leq \lambda(G) \leq \frac{2e}{n}$$

Aplicação - exemplo

- Oito computadores serão conectados por linhas remotas privadas. Existem 16 linhas disponíveis. Como organizar a rede de computadores de maneira que ela fique o mais invulnerável (robusta) possível a falhas nas máquinas individuais ou nas linhas de comunicação?

Aplicação - exemplo

- $\frac{2e}{n} = \frac{2*16}{8} = 4$
- Grafo com conectividade de aresta 4 e 16 arestas:
  - $K_{4,4}$
- Solução: dois conjuntos de 4 computadores cada; os computadores de um conjunto ligados a todos os computadores do outro conjuno