Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação
Curso de Ciência da Computação

Algoritmos em Grafos

Parte 2

Raquel Mini
raquelmini@pucminas.br

Conectividade

Conectividade

Quantas arestas devemos remover de um grafo conectado de forma que ele se torne desconectado?

O “quão conectado” é um grafo?

Cortes (cut-sets)

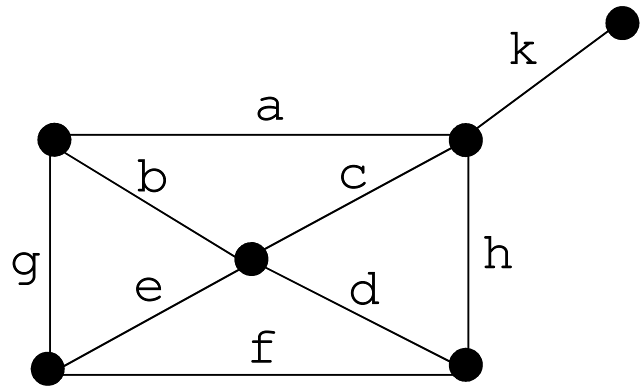
- Corte de um grafo conexo G é um conjunto de arestas de G cuja remoção desconecta G

- Nenhum subconjunto próprio de um corte pode ser um corte

- Um corte particiona os vértices do grafo em subconjuntos disjuntos

Corte

- <u>Exemplo</u>: Dada uma rede de comunicação, telecomunicações ou transportes, como medir a robustez da rede?

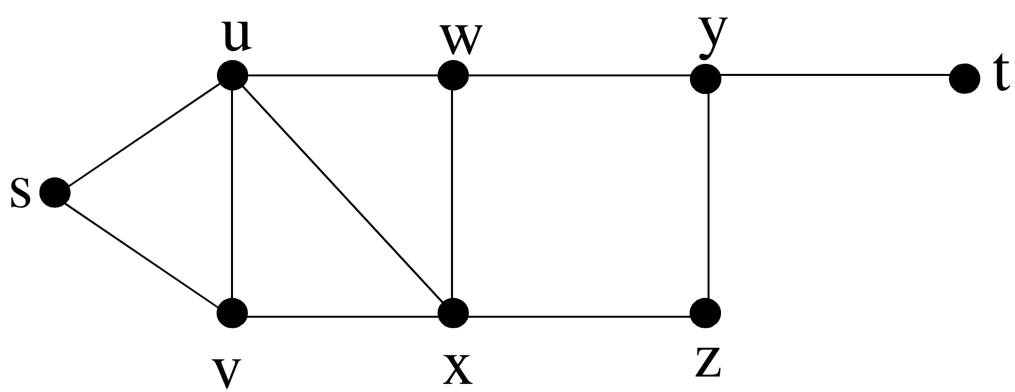


{a,b,g}
{a,b,e,f}
{d,h,f}
{k}

- Olhamos todos os cortes do grafo e aquele com menor número de arestas é o mais vulnerável

Exercícios

1. Quais dos seguintes conjuntos de arestas são corte do grafo G?



   a) {su,sv}
   b) {ux, wx, yz}
   c) {ux, vx, wx, yz}
   d) {yt}
   e) {wx, xz, yz}
   f) {uw, wx, wy}

Conectividade e Separabilidade

- Conectividade de aresta $\lambda(G)$: corresponde ao menor número de arestas do grafo cuja remoção o desconecta, ou seja, é o número de aresta do menor corte

- Conectividade de vértice $K(G)$ (ou simplesmente conectividade): corresponde ao menor número de vértices do grafo cuja remoção o desconecta

Conectividade e Separabilidade

- <u>Grafo K-conectado</u>: grafo de conectividade de vértice igual a K
- <u>Grafo separável</u>: grafo com conectividade de vértice igual a 1
- O vértice que desconecta o grafo separável é chamado de <u>ponto de articulação</u> ou <u>corte de vértice (cut-vértice)</u>

Exercícios

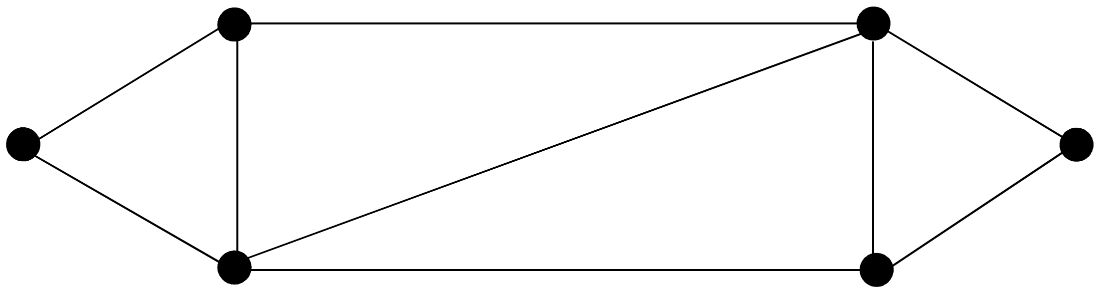
2. Para os grafos abaixo, responda:

   i) Qual é o valor de K(G)?

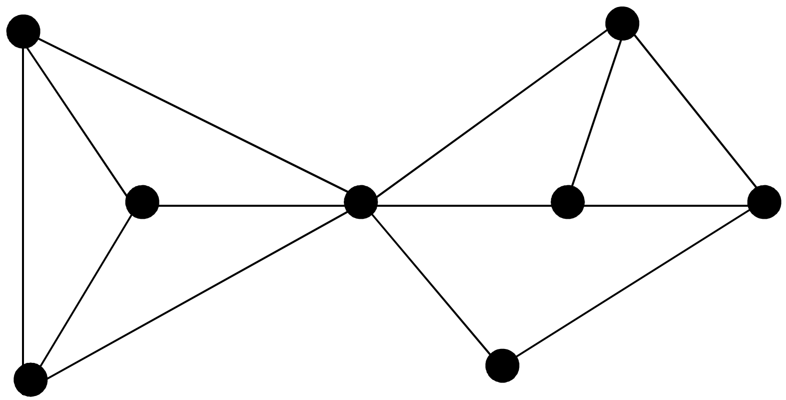
   ii) Qual é o valor de λ(G)?

   iii) O grafo é separável?

(a)



(b)



Exercícios

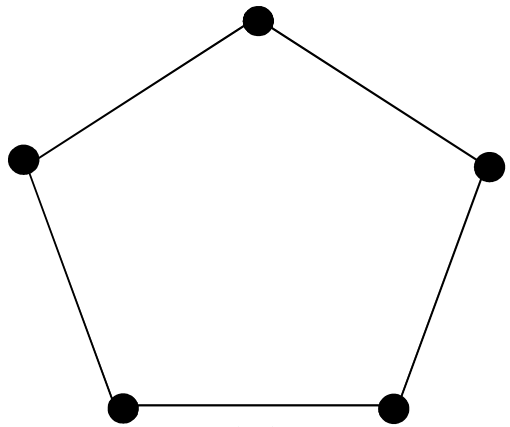
3. Qual é o valor da conectividade de árvores?

4. Qual é o valor da conectividade de grafos completos?

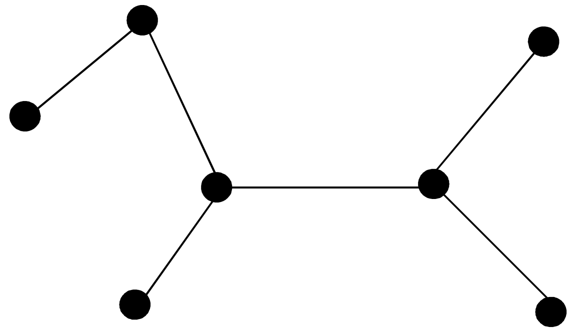
5. Diga se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa e justifique: “Todo corte de um grafo conexo G contém pelo menos uma aresta de cada árvore geradora de G”.

Exercícios

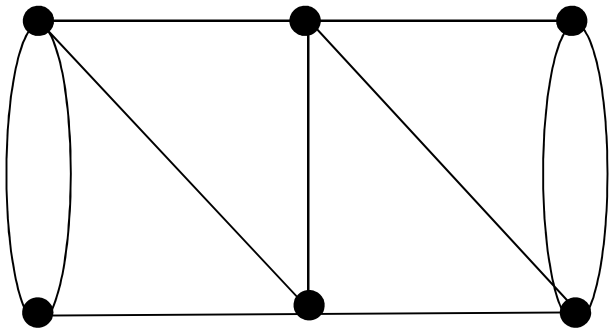
6. Escreva os valores de K(G) e λ(G) para os seguintes grafos:



(a)



(b)



(c)

Conectividade e Separabilidade

- A conectividade de aresta de um grafo G não pode exceder ao grau do vértice de menor grau

- A conectividade de vértice não pode exceder a conectividade de aresta de G

- Seja $\delta(G)$ o menor grau de vértice em G. Para todo grafo conectado G tem-se:

$$K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Conectividade e Separabilidade

- A máxima conectividade de vértice de um grafo G com n vértices e e arestas ($e \geq n-1$) é $\left\lfloor \frac{2e}{n} \right\rfloor$

- Portanto,

$$K(G) \leq \lambda(G) \leq \left\lfloor \frac{2e}{n} \right\rfloor$$

Conectividade e Separabilidade

- <u>Aplicação</u>: Oito computadores serão conectados por linhas remotas privadas, 16 linhas são disponíveis. Como organizar a rede de computadores de maneira que ela fique o mais invulnerável (robusta) possível a falha nas máquinas individuais ou nas linhas de comunicação?

  <u>Modelagem</u>: Como construir um grafo G com 8 vértices e 16 arestas de forma a maximizar $\lambda(G)$ e $K(G)$?

Exercícios

7. Dê exemplos (se existirem) de grafos G com as seguintes características:
   a) $K(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$
   b) $K(G) = 3$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 4$
   c) $K(G) = 2$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 4$

8. Encontre o número mínimo de arestas de um grafo k-conectado.

Exercícios

9. Todo grafo regular de grau d (d $\geq$ 3) é não separável? Se não, de exemplo de um grafo simples e regular de grau 3 que é separável.

10. Encontre um grafo 4-conectado com 8 vértices e 16 arestas.