

ALGORITMOS EM GRAFOS

DEFINIÇÕES E REPRESENTAÇÃO

Prof. Alexei Machado

PUC MINAS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

2

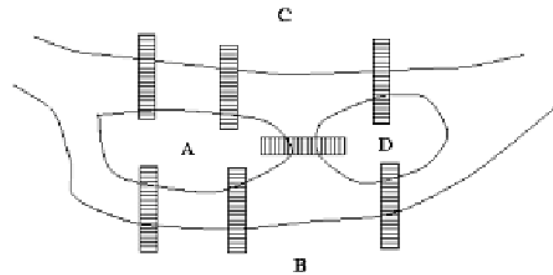
Agradecimentos

○ Material desta disciplina foi confeccionado em conjunto com os professores João Caram, Max Machado e Raquel Mini

Problema das Pontes de Königsberg

3

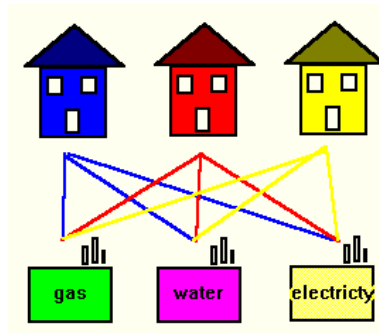
No século XVIII havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel. Elas conectavam duas ilhas (**A** e **D**) entre si e as ilhas com as margens (**B** e **C**)



Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível **cruzar as sete pontes** numa caminhada contínua **sem passar duas vezes** por qualquer uma delas

O Problema das 3 Casas e 3 Serviços

- Suponha que tenhamos três casas e três serviços, a exemplo de:



É possível conectar cada serviço a cada uma das três casas sem que haja cruzamento de tubulações?

Problemas de Transporte

5

- **Problema de Conectividade:** dadas as direções das vias, é possível ir da cidade **A** até a cidade **B**, sem andar na contramão?
- **Problema de Fluxo Máximo:** dada a capacidade de fluxo em cada via, qual é a quantidade de mercadoria que podemos mandar de uma cidade **A** a uma cidade **B**?
- **Problema de Menor Caminho:** Dados os comprimentos de cada via, qual o percurso mais rápido para sair de uma cidade **A** e chegar a uma cidade **B**?

Grafo

6

- Um par $G = (V, E)$, sendo V um conjunto finito e E um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V

(Scheinerman, 2011)

- Chamamos os elementos de V de vértices
- Chamamos os elementos de E de arestas (edges)

Grafo

7

- Modelo que formaliza relações de interdependência entre os elementos de um conjunto (Goldbarg,2012)
- **Vértices** são objetos simples que podem ter nomes e outros atributos
- **Arestas** são conexões entre dois vértices

Grafo

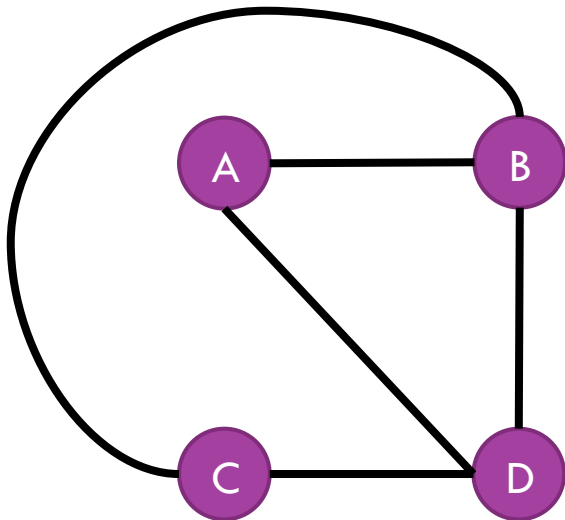
8

- $V = \{ A, B, C, D \}$
- $E = \{ (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) \}$

Grafo

9

- $V = \{ A, B, C, D \}$
- $E = \{ (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) \}$



Grafo

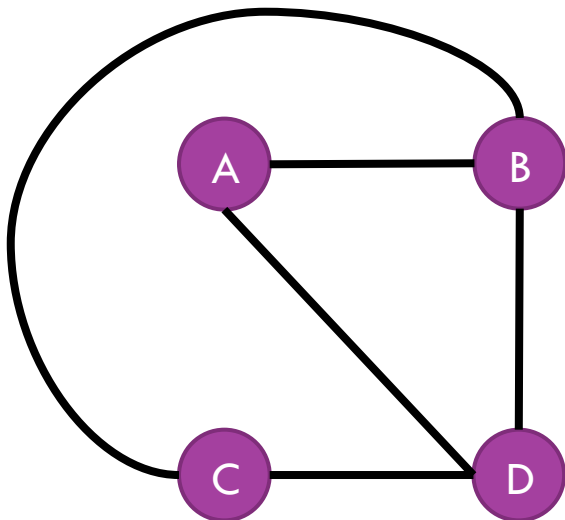
10

- $V = \{ A, B, C, D \}$

- $E = \{ (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) \}$

- Vértices: cidades

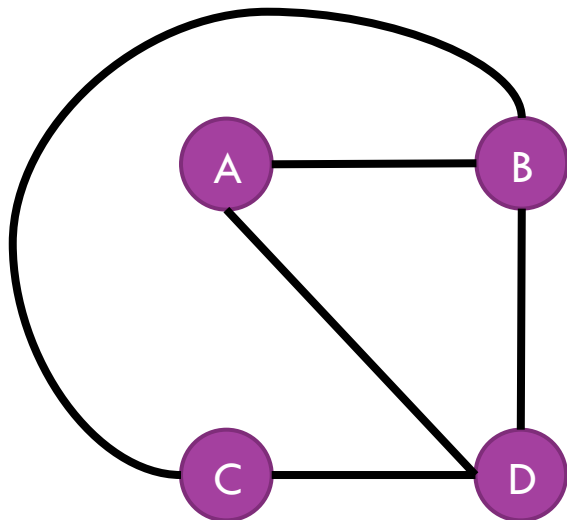
- Arestas: rodovias entre as cidades



Grafo

11

- $V = \{ A, B, C, D \}$
- $E = \{ (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) \}$

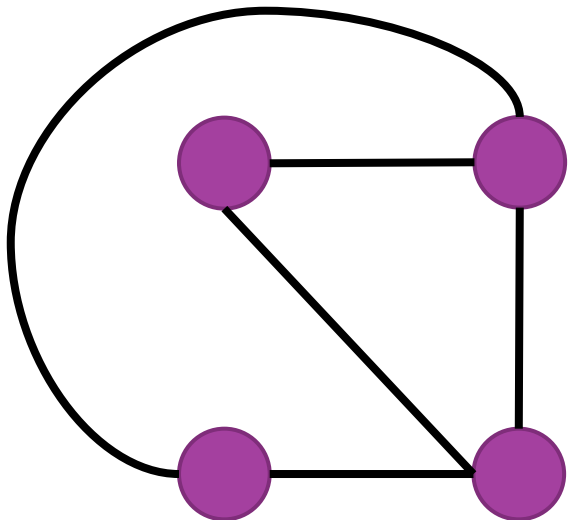


- Vértices: autores
- Arestas: autores que publicaram livros ou artigos em conjunto

Ordem e tamanho

12

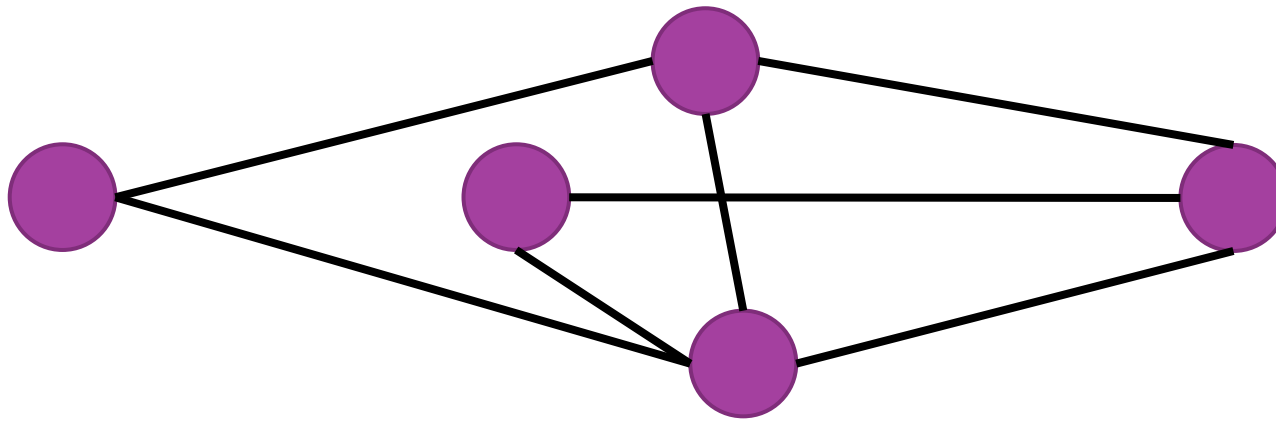
- A **ordem** de um grafo G é a cardinalidade de V
- O **tamanho** de um grafo G é a cardinalidade de E



Ordem e tamanho

13

- A **ordem** de um grafo G é a cardinalidade de V
- O **tamanho** de um grafo G é a cardinalidade de E



Grafo valorado / ponderado

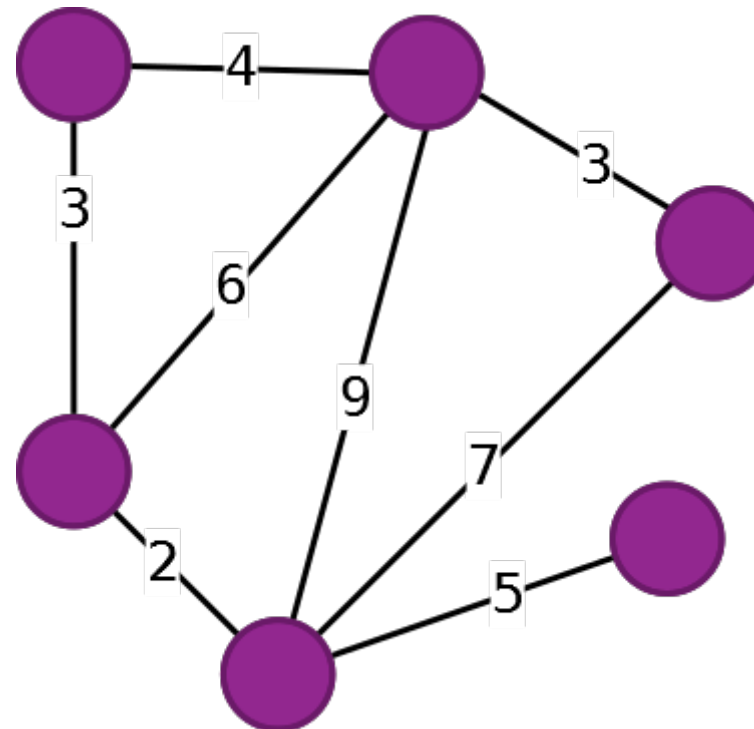
14

- Um grafo G é dito *valorado* se existem valores associados a seus vértices ou arestas
- Tais valores são denominados *pesos*

Grafo valorado / ponderado

15

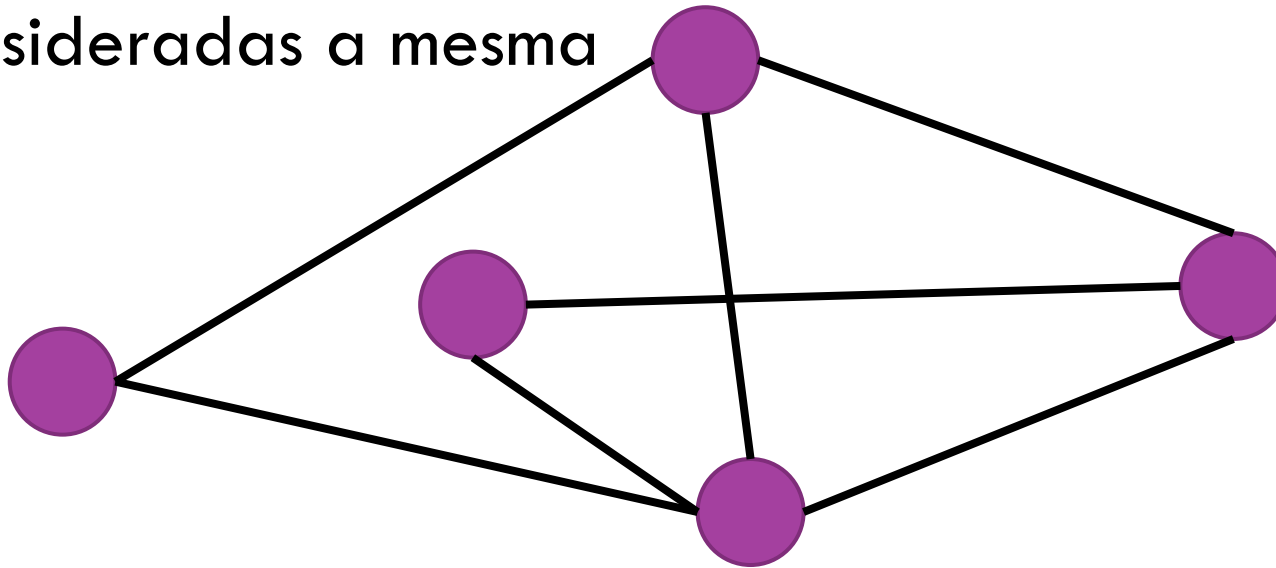
- Ex: custo de se movimentar entre dois pontos



Grafo não direcionado / não orientado

16

- Por padrão, duas arestas (v_a, v_b) e (v_b, v_a) são consideradas a mesma



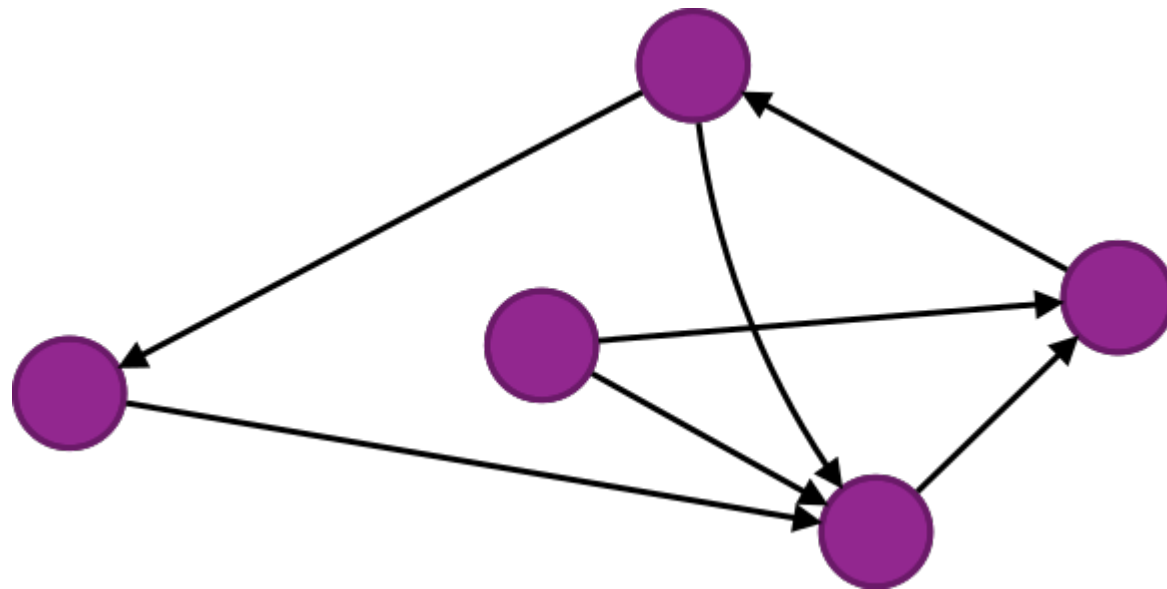
Grafo direcionado / orientado / digrafo

17

- Já em um grafo direcionado, o conjunto E de arestas é uma relação binária em V
- $(v_a, v_b) \neq (v_b, v_a)$ e podem ter significados diferentes
- O *sentido* da aresta importa e é indicado
- Arestas, neste caso, podem ser chamadas de *arcos*

Grafo direccionado / orientado / dígrafo

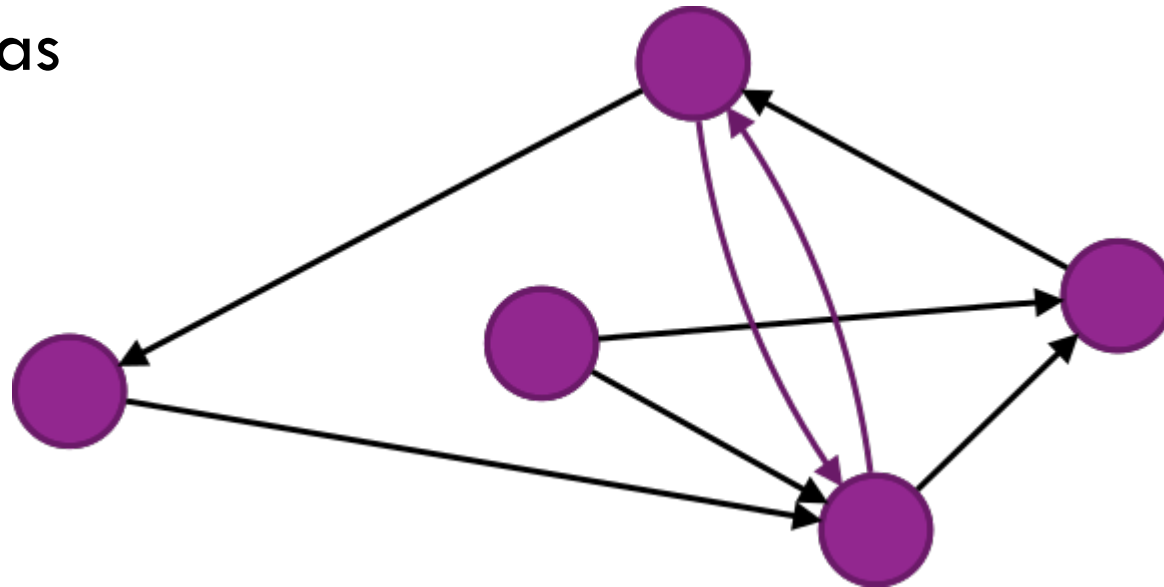
18



Grafo direcionado / orientado / dígrafo

19

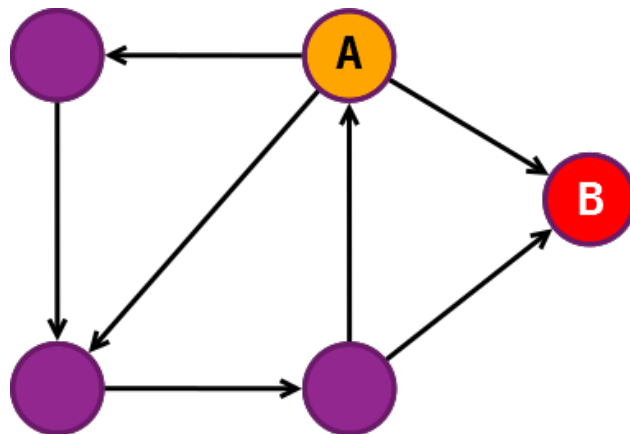
- Se há correspondência em ambos os sentidos, duas arestas



Vértices sucessores e antecessores

20

- Em grafos direcionados, podemos falar de sucessores e antecessores de um vértice

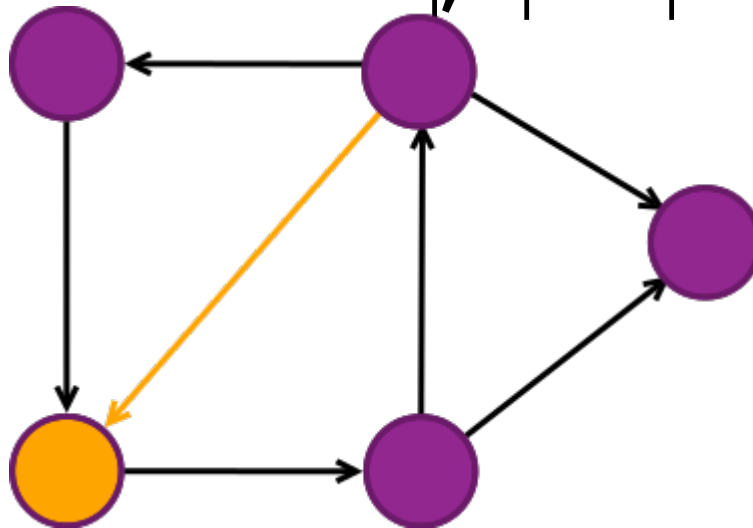


- B é sucessor de A
- A é antecessor de B

Incidência

21

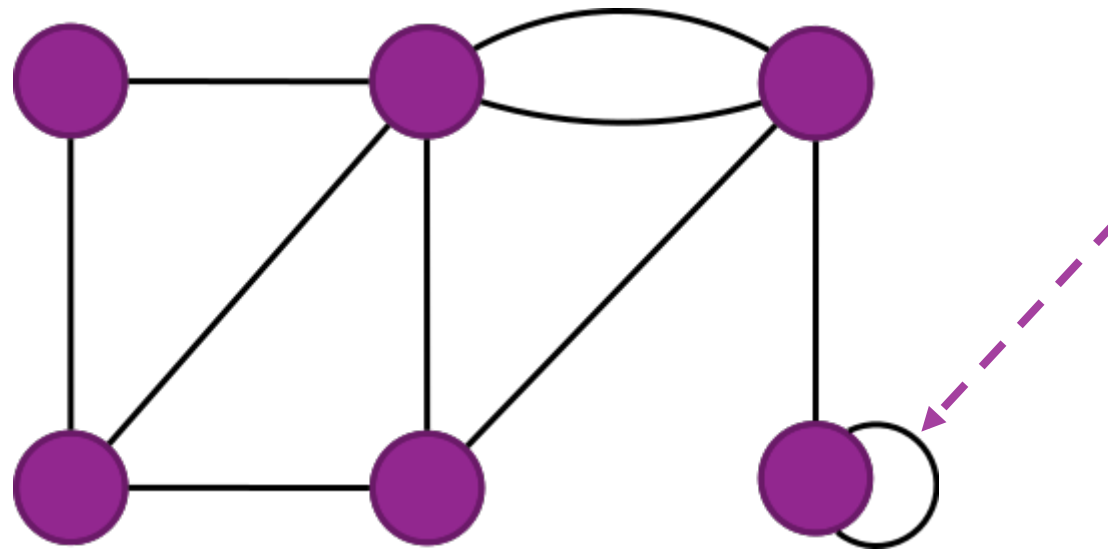
- Quando um vértice v_i é o vértice final de alguma aresta e_i , v_i e e_i são **incidentes**



Laço (*Loop*)

22

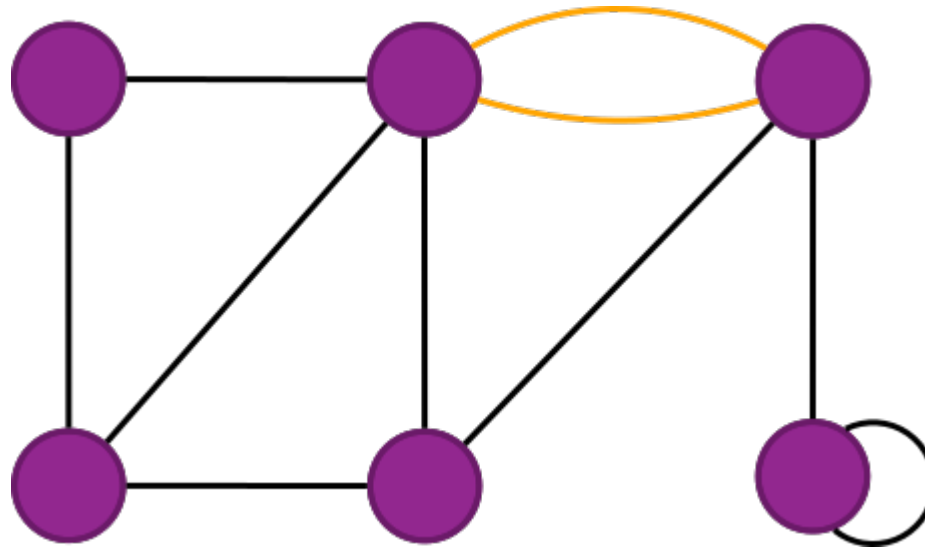
- Aresta que liga um vértice a si mesmo (v_i, v_i)



Arestas paralelas

23

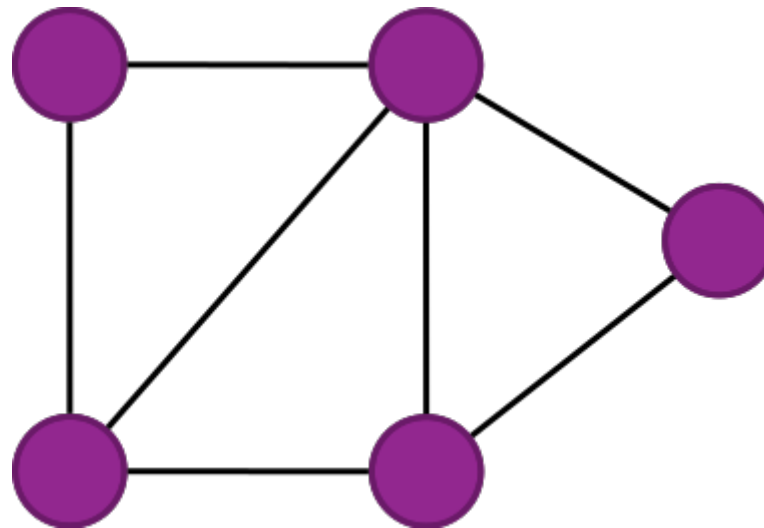
- Duas ou mais arestas associadas ao mesmo par de vértices



Grafo simples

24

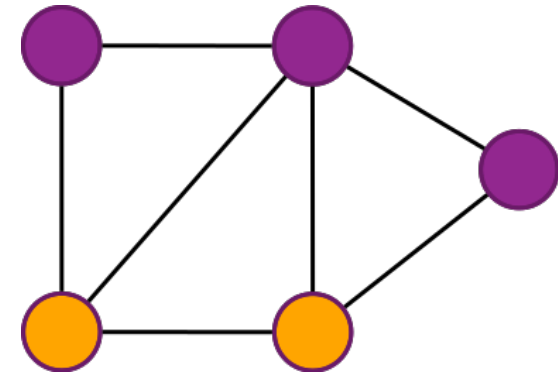
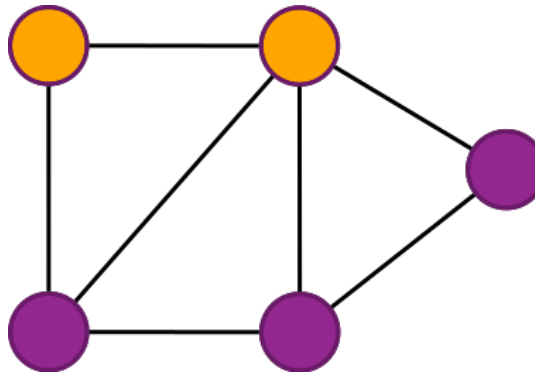
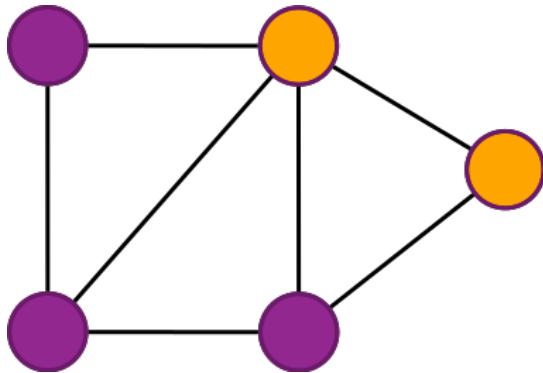
- Não possui nem arestas paralelas nem laços



Vértices adjacentes (vizinhos)

25

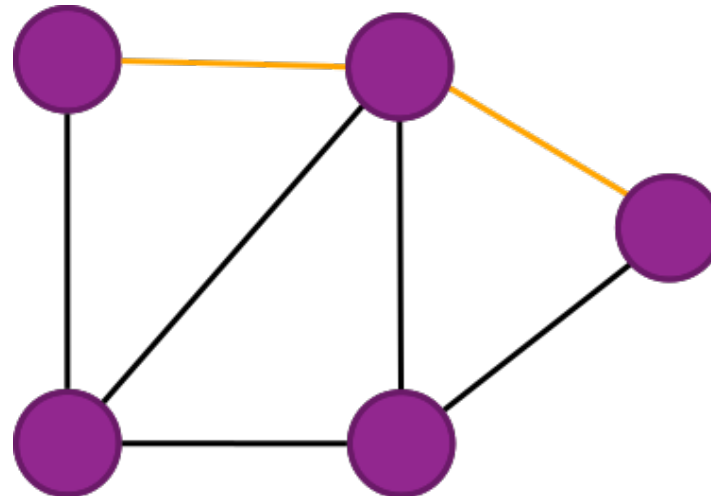
- Dois vértices são ditos **adjacentes** se existe uma aresta que os liga



Arestas adjacentes

26

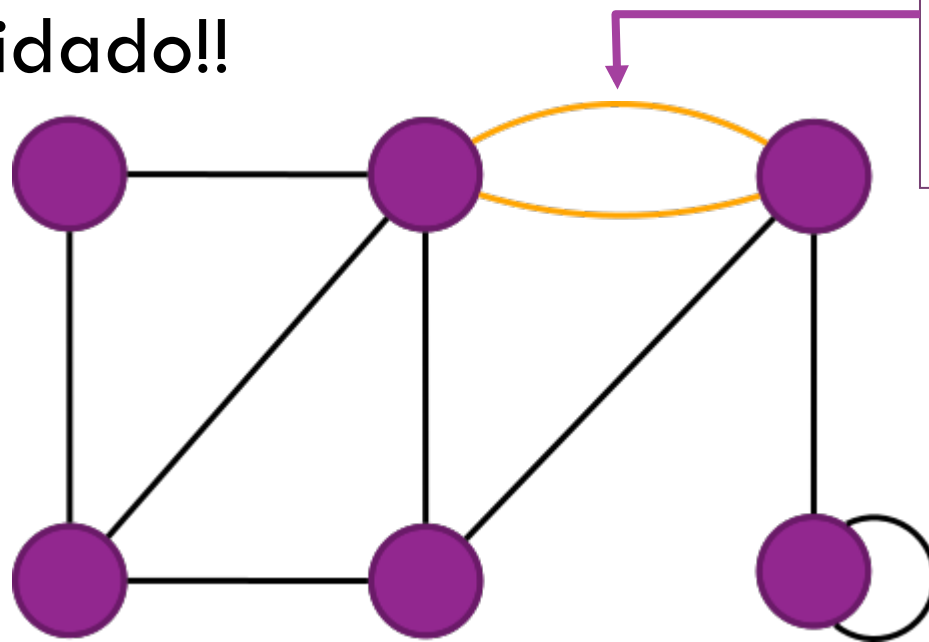
- Duas arestas não paralelas são **adjacentes** se elas são incidentes a um vértice comum



Arestas adjacentes

27

□ Cuidado!!

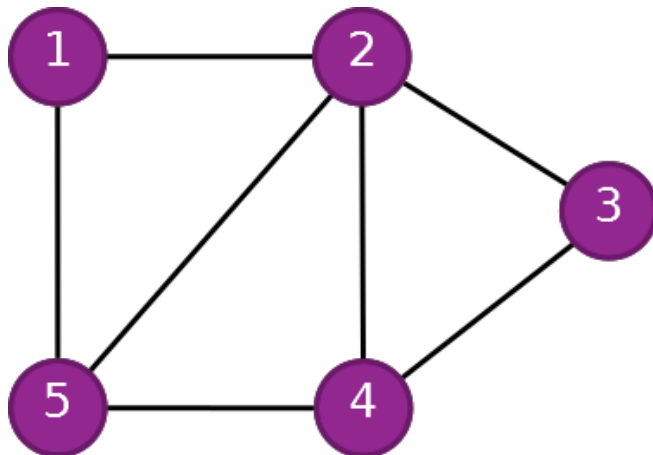


Paralelas,
Não adjacentes!

Grau de um vértice

28

- O número de arestas incidentes a um vértice v_i é chamado de **grau**, $d(v_i)$, do vértice i



Vértice 1:

Vértice 2:

Vértice 3:

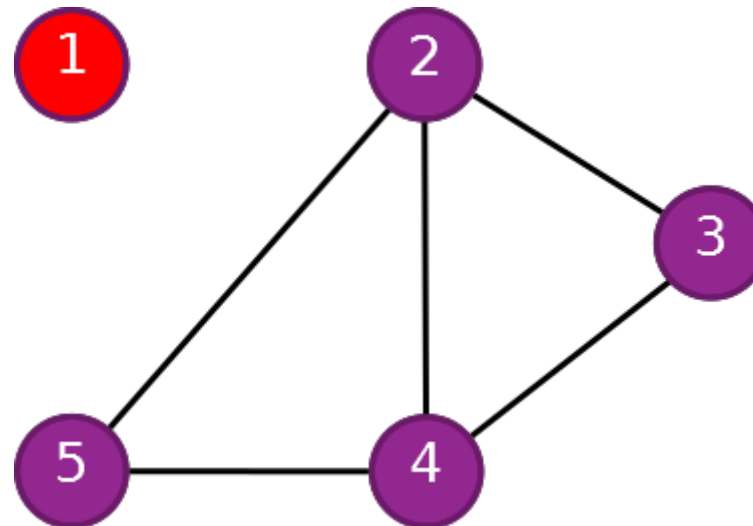
Vértice 4:

Vértice 5:

Graus e vértices

29

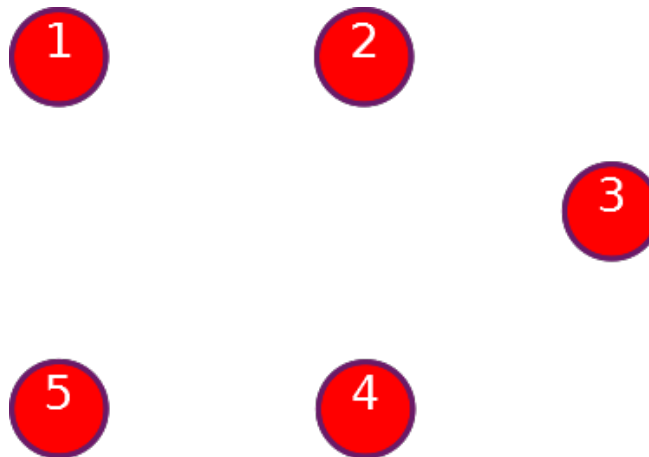
- Vértices com grau 0 são chamados **isolados**



Graus e vértices

30

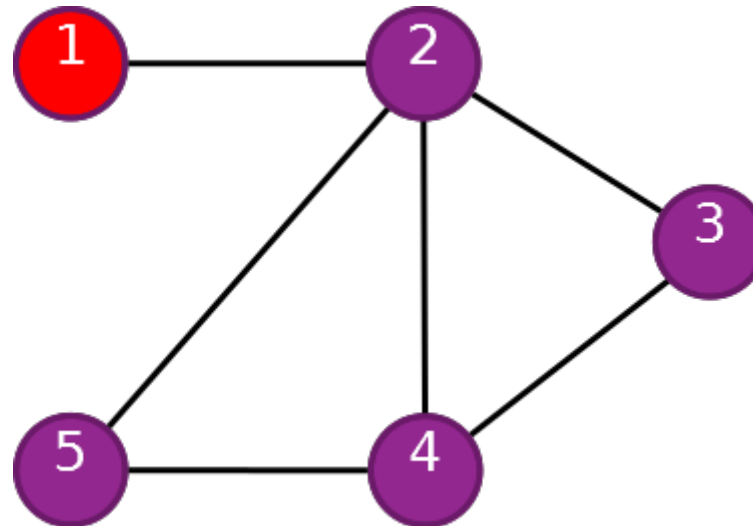
- Grafos que possuem somente vértices isolados são chamados de *grafos nulos*



Graus e vértices

31

- Um vértice de grau 1 é chamado de **pendente**



Teorema

32

- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e$$

Teorema

33

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e$$

□ Demonstre!

Teorema

34

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e$$

- Ao contar os graus dos vértices, contamos cada extremidade de aresta uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Teorema

35

- O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par
 - Prove o teorema!

Provando...

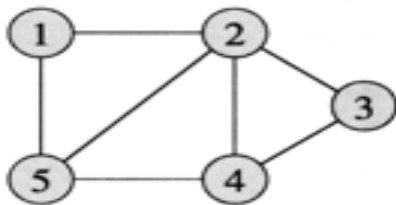
36

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in Par} d(v) + \sum_{v \in \acute{I}mpar} d(v)$$

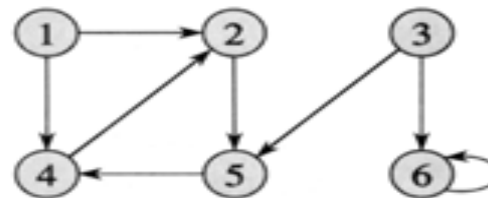
Graus e vértices

37

- Em um grafo orientado, o grau de saída de um vértice é o número de arestas que saem dele, e o grau de entrada de um vértice é o número de arestas que entram nele. O grau de um vértice em um grafo orientado é seu grau de entrada somado a seu grau de saída



grau do vértice 2 é 4

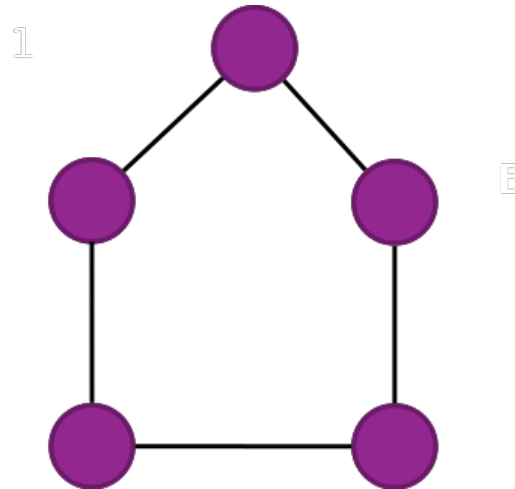


*grau de entrada do vértice 5 é 2
grau de saída do vértice 5 é 1*

Grafo regular

38

- Um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau é chamado de **grafo regular**



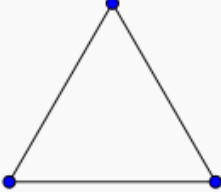
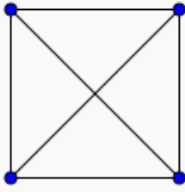
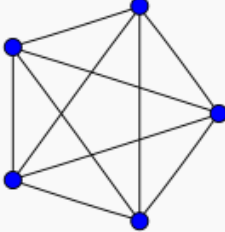
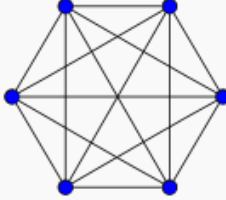
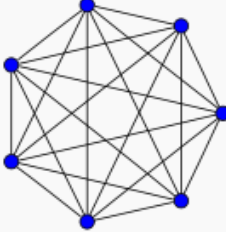
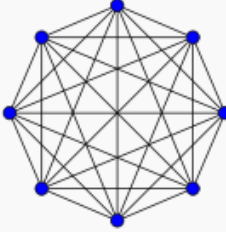
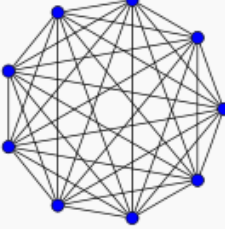
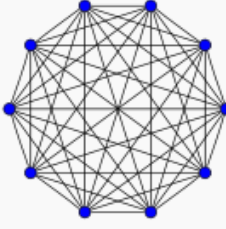
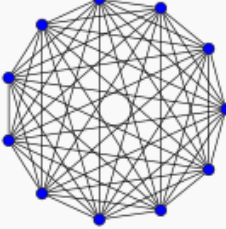
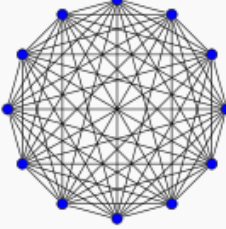


Grafo completo

39

- Um grafo $G=(V,E)$ é dito **completo** se para cada par de vértices v_a e v_b existe uma aresta entre v_a e v_b
- Em um grafo completo quaisquer dois vértices distintos são adjacentes
- Um grafo completo com n vértices é dito K_n



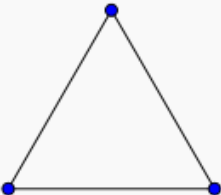
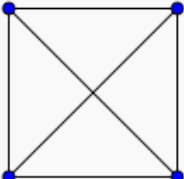
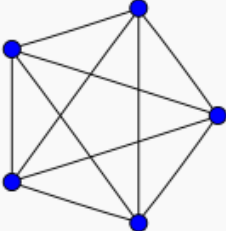
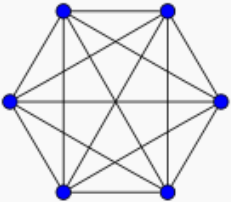
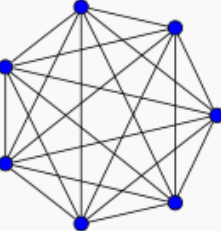
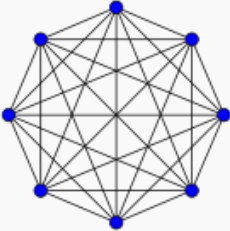
Grafos completos

K_1 : 0 arestas	K_2 : 1 aresta	K_3 : 3 arestas	K_4 : 6 arestas
			
K_5 : 10 arestas	K_6 : 15 arestas	K_7 : 21 arestas	K_8 : 28 arestas
			
K_9 : 36 arestas	K_{10} : 45 arestas	K_{11} : 55 arestas	K_{12} : 66 arestas
			

Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_completo

Grafos completos

41

$K_1 : 0 \text{ arestas}$	$K_2 : 1 \text{ aresta}$	$K_3 : 3 \text{ arestas}$	$K_4 : 6 \text{ arestas}$
			
$K_5 : 10 \text{ arestas}$	$K_6 : 15 \text{ arestas}$	$K_7 : 21 \text{ arestas}$	$K_8 : 28 \text{ arestas}$
			

- Qual é o grau dos vértices de um grafo K_n ?
- Qual é o número de arestas de um grafo K_n ?

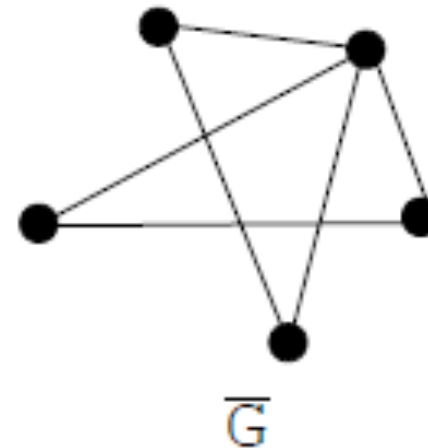
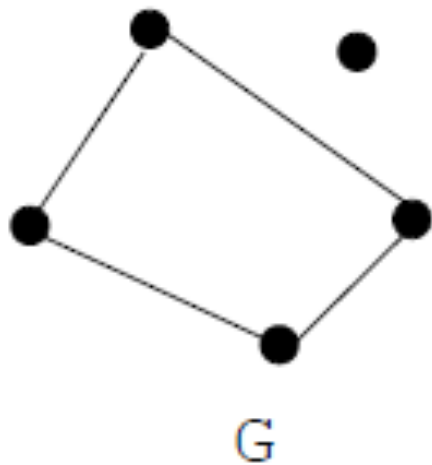
Grafo complementar

42

- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, seu grafo complementar, $C(G)$ ou \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:
 - Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G
 - As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo

Grafo complementar

43



Grafo

45

- Como representar um grafo computacionalmente, de modo que possamos executar algoritmos e resolver problemas diversos ?

Representação de Grafos

46

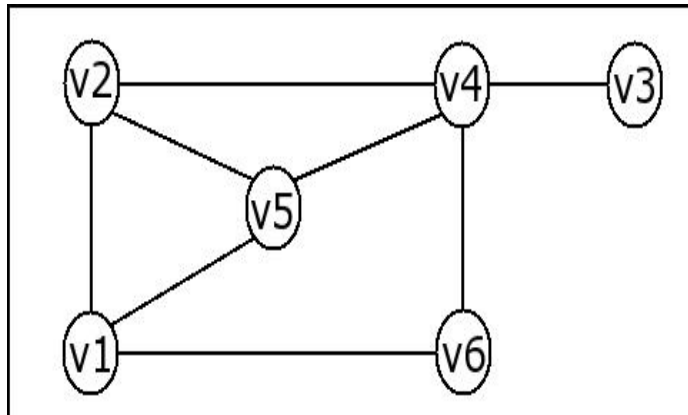
- Principais estruturas de dados:
 - ▣ Matriz de adjacências
 - ▣ Listas de adjacências

Matriz de adjacências

47

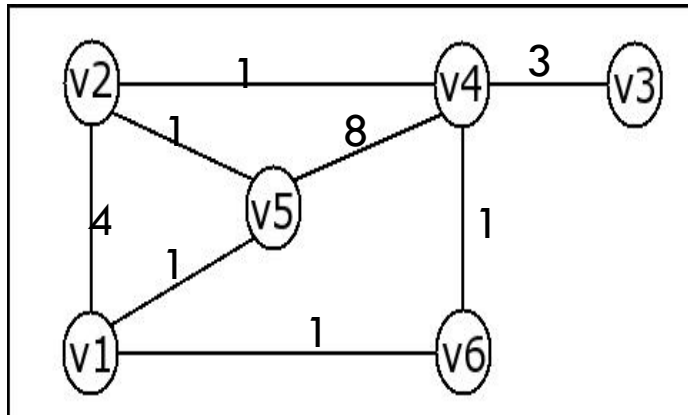
- Dado $n = |G|$, criar uma matriz $n \times n$.
- A posição $[u,v]$ da matriz conterá 0 se não há aresta entre v_u e v_v , ou um valor não nulo se houver

Matriz de adjacências



	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
<u>1</u>	0	1	0	0	1	1
<u>2</u>	1	0	0	1	1	0
<u>3</u>	0	0	0	1	0	0
<u>4</u>	0	1	1	0	1	1
<u>5</u>	1	1	0	1	0	0
<u>6</u>	1	0	0	1	0	0

Matriz de adjacências



Se as arestas tivessem pesos, suas posições poderiam ter estes valores

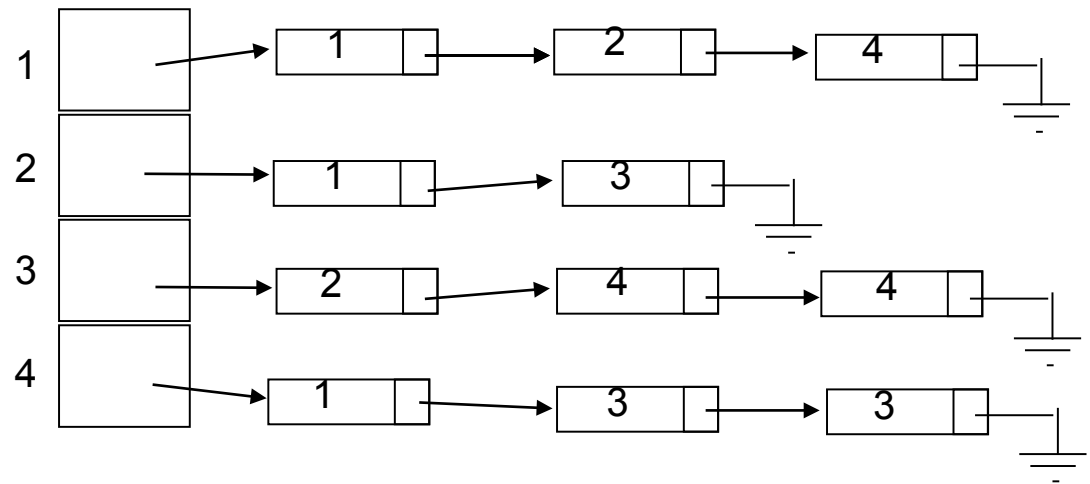
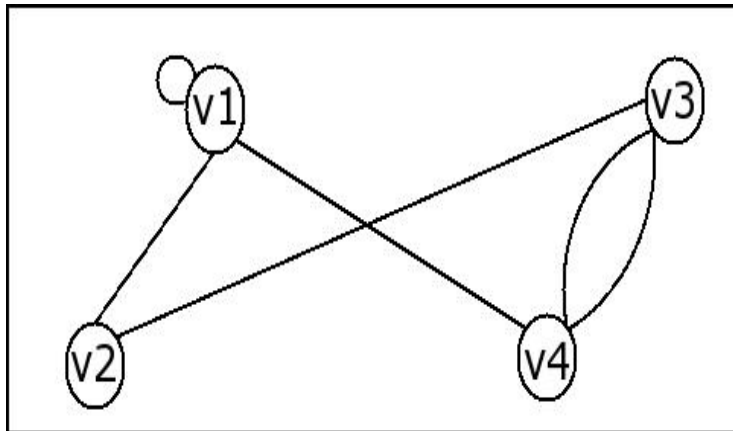
	1	2	3	4	5	6
1	0	4	0	0	1	1
2	4	0	0	1	1	0
3	0	0	0	3	0	0
4	0	1	3	0	8	1
5	1	1	0	8	0	0
6	1	0	0	1	0	0

Listas de adjacências

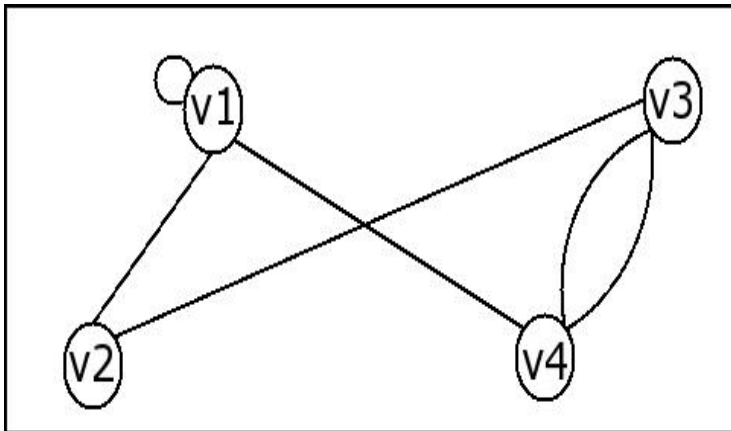
50

- Cada vértice é um elemento de uma lista
- Cada vértice contém uma lista de arestas, indicando o outro par que a compõe

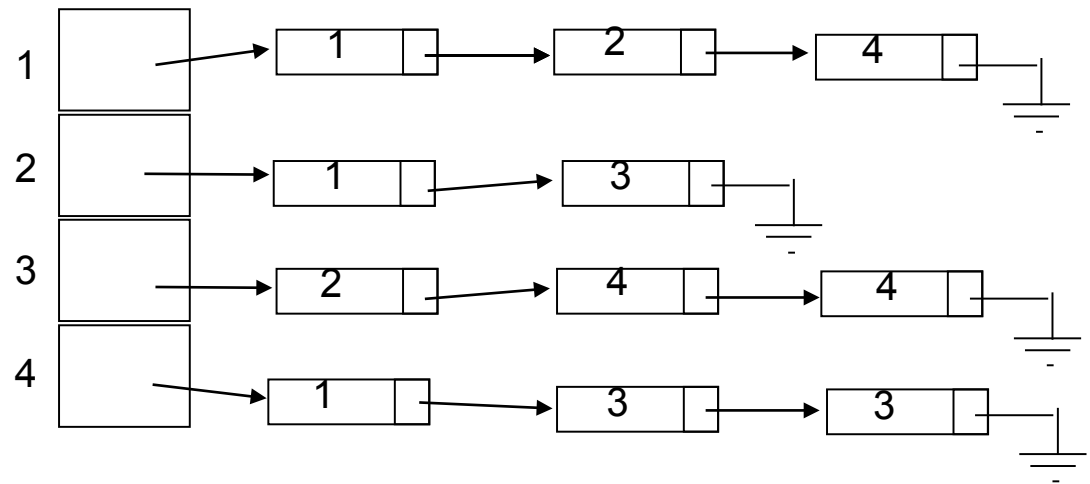
Listas de adjacências



Listas de adjacências



Se as arestas tivessem pesos, isto poderia ser armazenado nos elementos das listas



Representação de digrafos

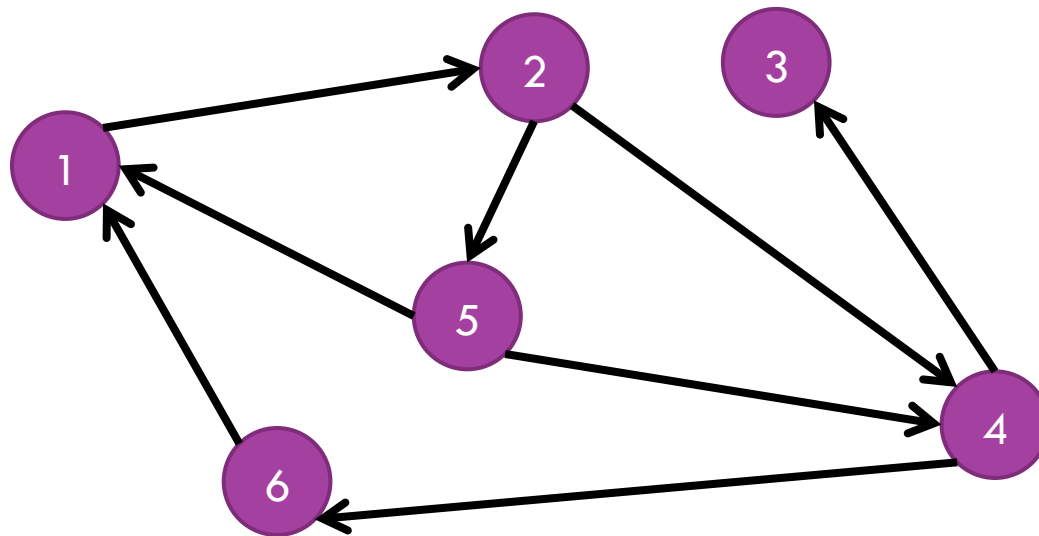
53

- Matriz de incidência
 - Valor positivo: indica direção linha \rightarrow coluna
 - Valor negativo: indica direção coluna \rightarrow linha

Representação de digrafos

54

□ Matriz de incidência



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	-1	-1
2	-1	0	0	1	1	0
3	0	0	0	-1	0	0
4	0	-1	1	0	-1	1
5	1	-1	0	1	0	0
6	1	0	0	-1	0	0

Representação de digrafos

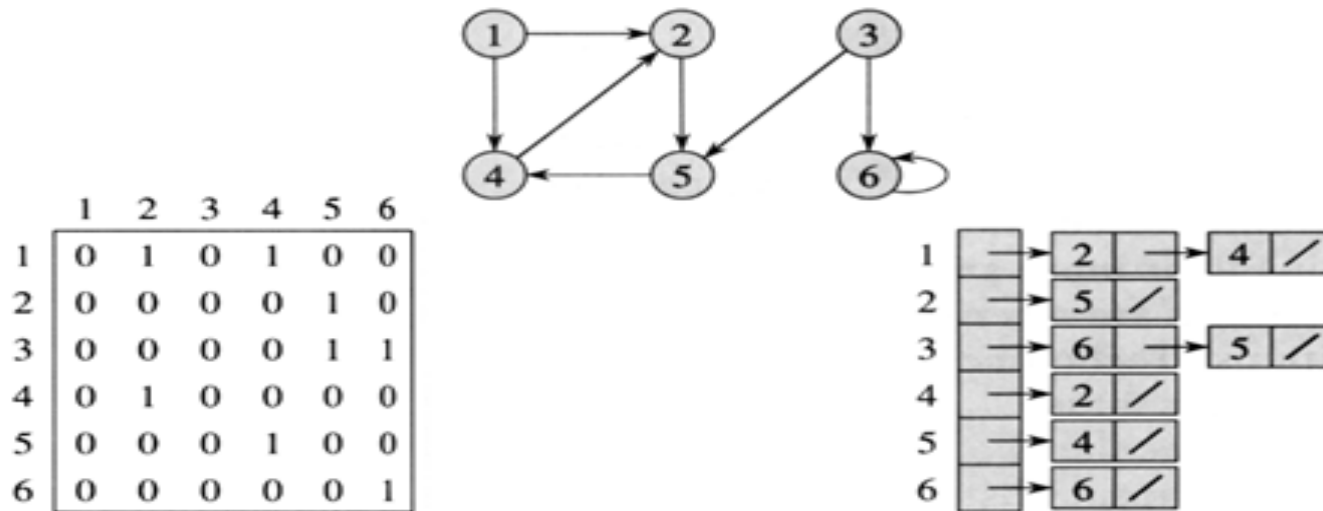
55

- Matriz de incidência
 - Valor positivo: indica direção linha \rightarrow coluna
 - Valor negativo: indica direção coluna \rightarrow linha

- Listas de incidência

Estruturas de Dados para Dígrafos

56



Matriz de Adjacências

Lista de Adjacências

Considerações

57

- Matrizes x listas
 - Espaço
 - Complexidade de busca

- Estruturas de dados otimizadas para busca de vértices e/ou arestas