Algoritmos em Grafos

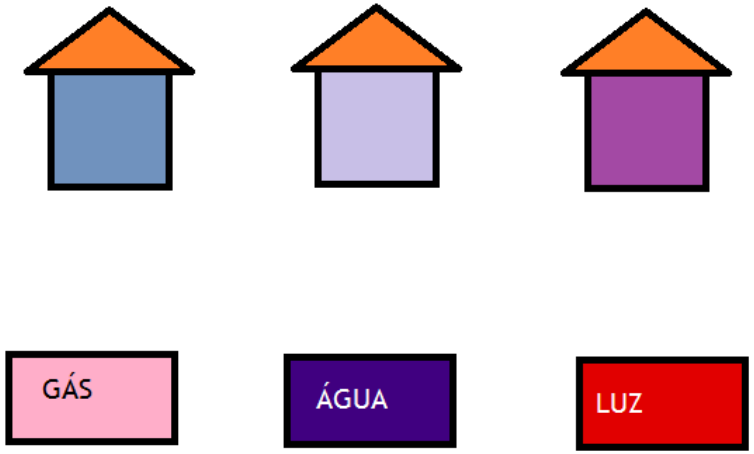
Planaridade

Prof. Alexei Machado

PUC Minas

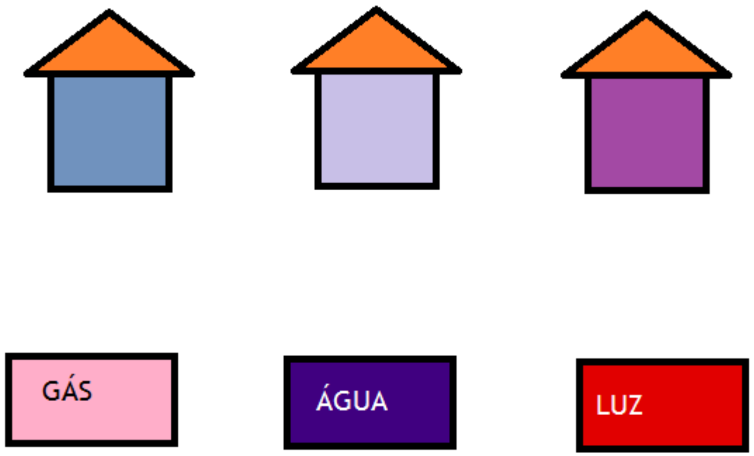
Ciência da Computação

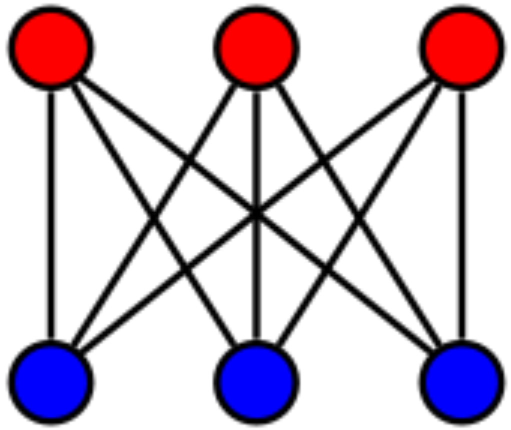
Problema das 3 casas



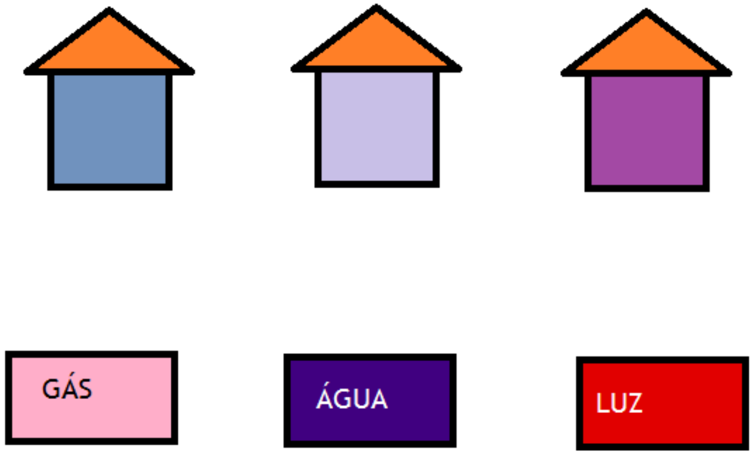
- É possível conectar as três casas aos três serviços sem cruzar as tubulações?

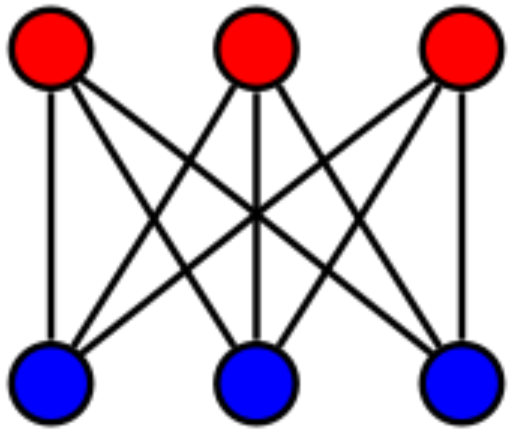
Problema das 3 casas





Problema das 3 casas

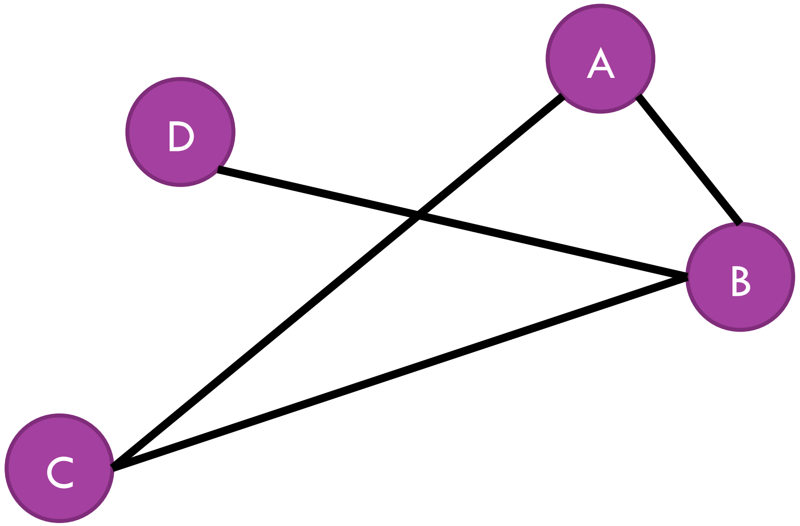




Grafo bipartido completo – $K_{3,3}$

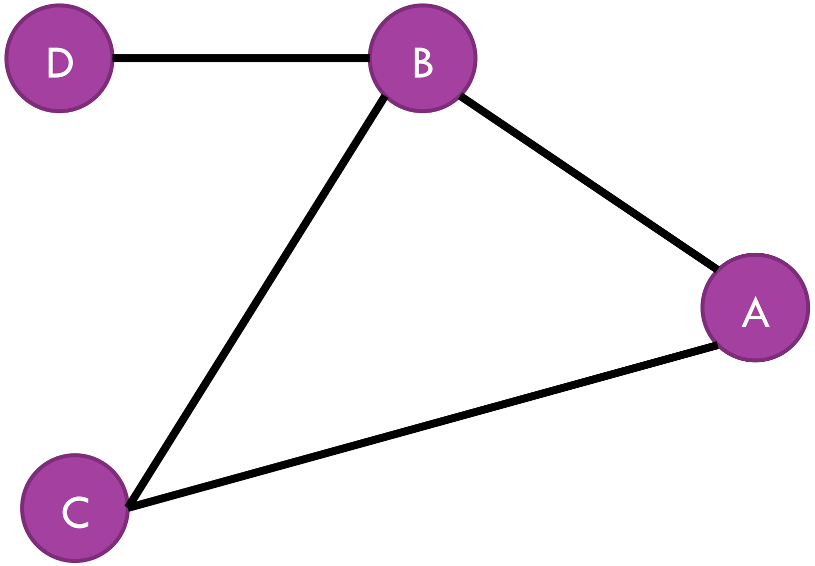
Grafo planar

- Um grafo G é **planar** se existe uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.



Grafo planar

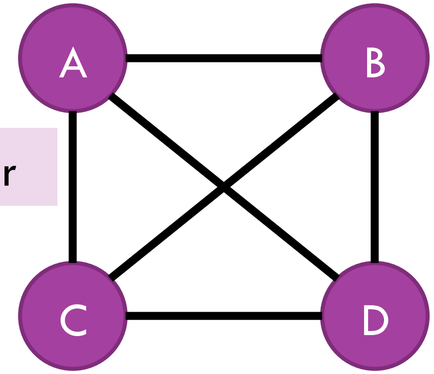
- Um grafo G é **planar** se existe uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.



Grafo planar e grafo plano

- Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.

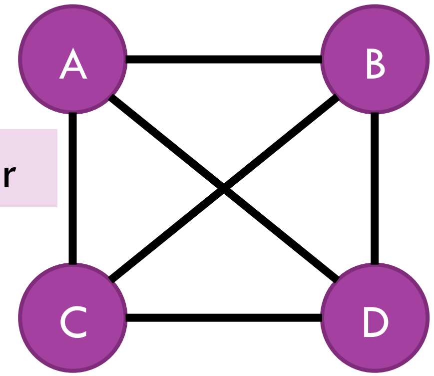
Grafo planar

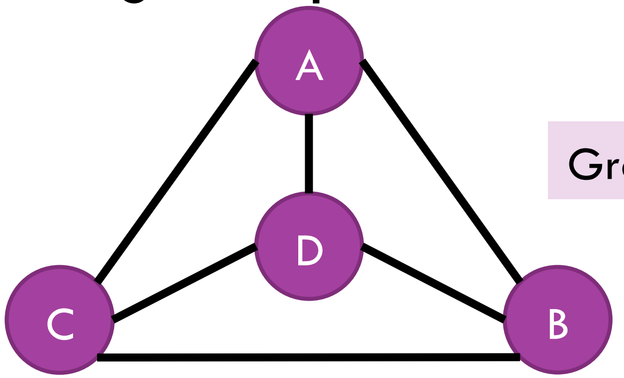


Grafo planar e grafo plano

- Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.

Grafo planar



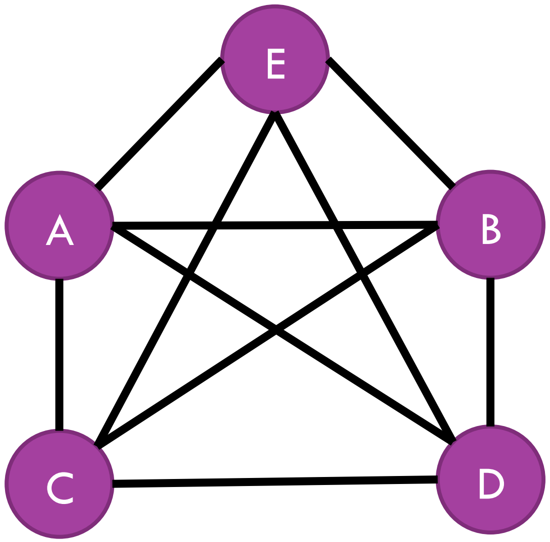


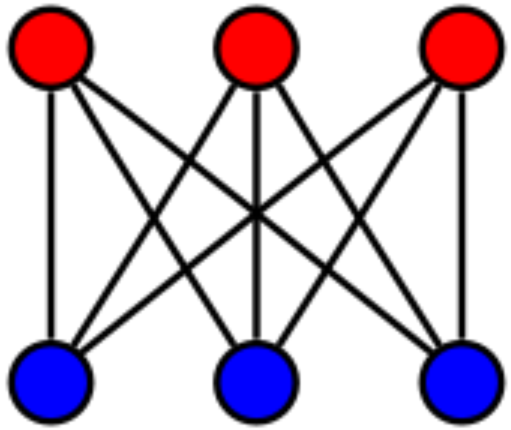
Grafo plano

Grafos planares e Kuratowski

- Existem dois grafos não planares que são muito importantes para o estudo de planaridade. Eles são chamados de grafos de Kuratowski

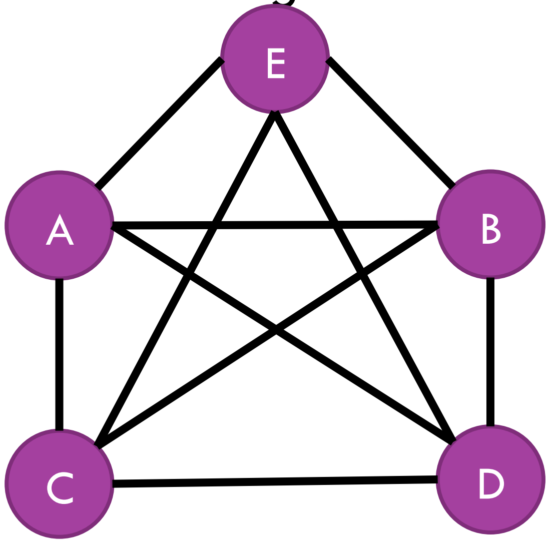
Grafos de Kuratowski



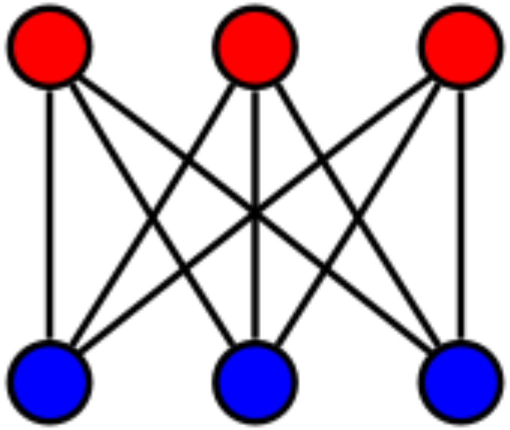


Grafos de Kuratowski

K_5

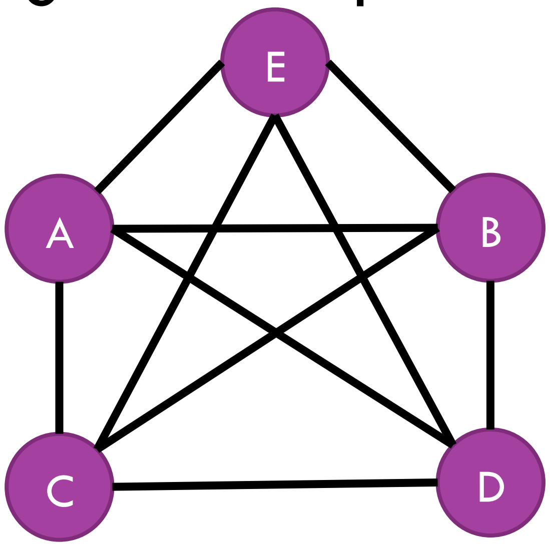


$K_{3,3}$



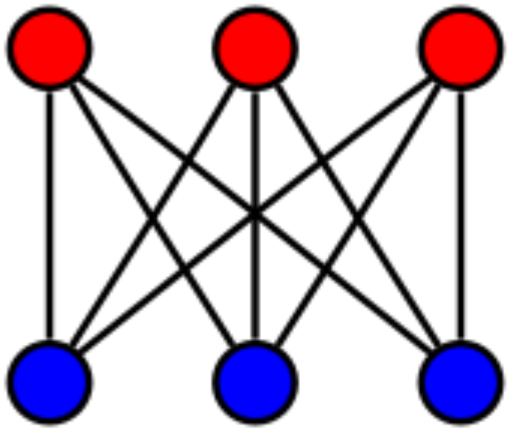
Grafos de Kuratowski

- K_5: grafo não planar com o menor número de vértices



Grafos de Kuratowski

- $K_{3,3}$: grafo não planar com o menor número de arestas

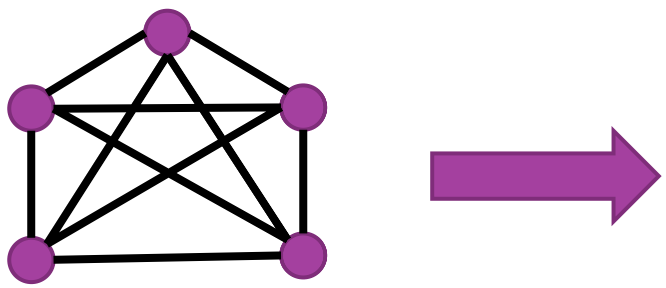


Grafos de Kuratowski

- Propriedades em comum de K_5 e $K_{3,3}$
  1. Ambos são regulares
  2. Ambos são não planares
  3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna ambos os grafos planares

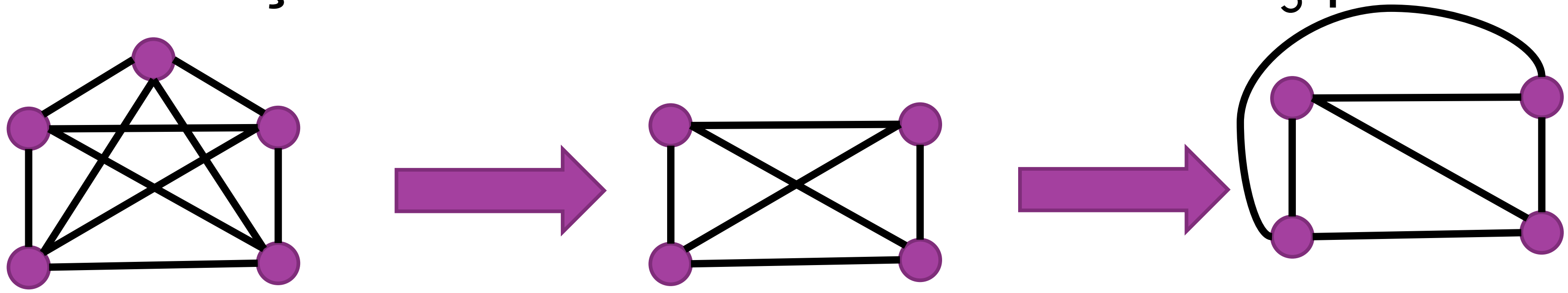
Grafos de Kuratowski

- A remoção de um vértice ou aresta torna K_5 planar?



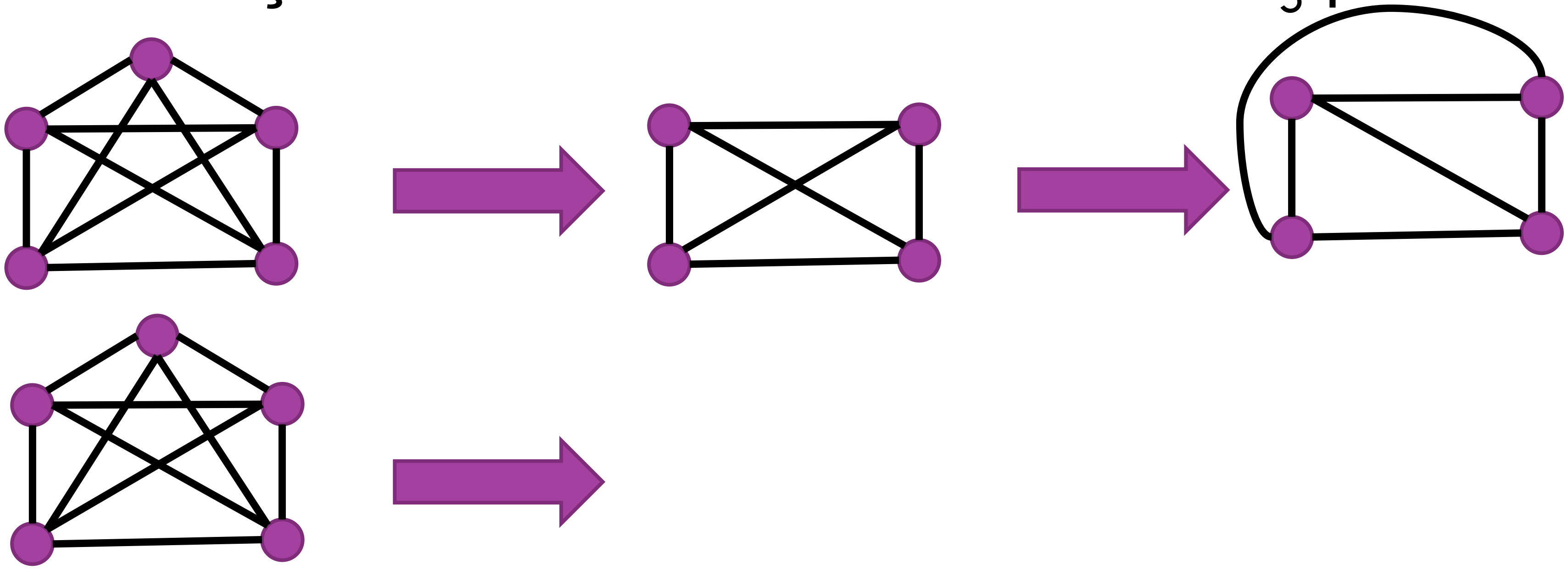
Grafos de Kuratowski

- A remoção de um vértice ou aresta torna K_5 planar?



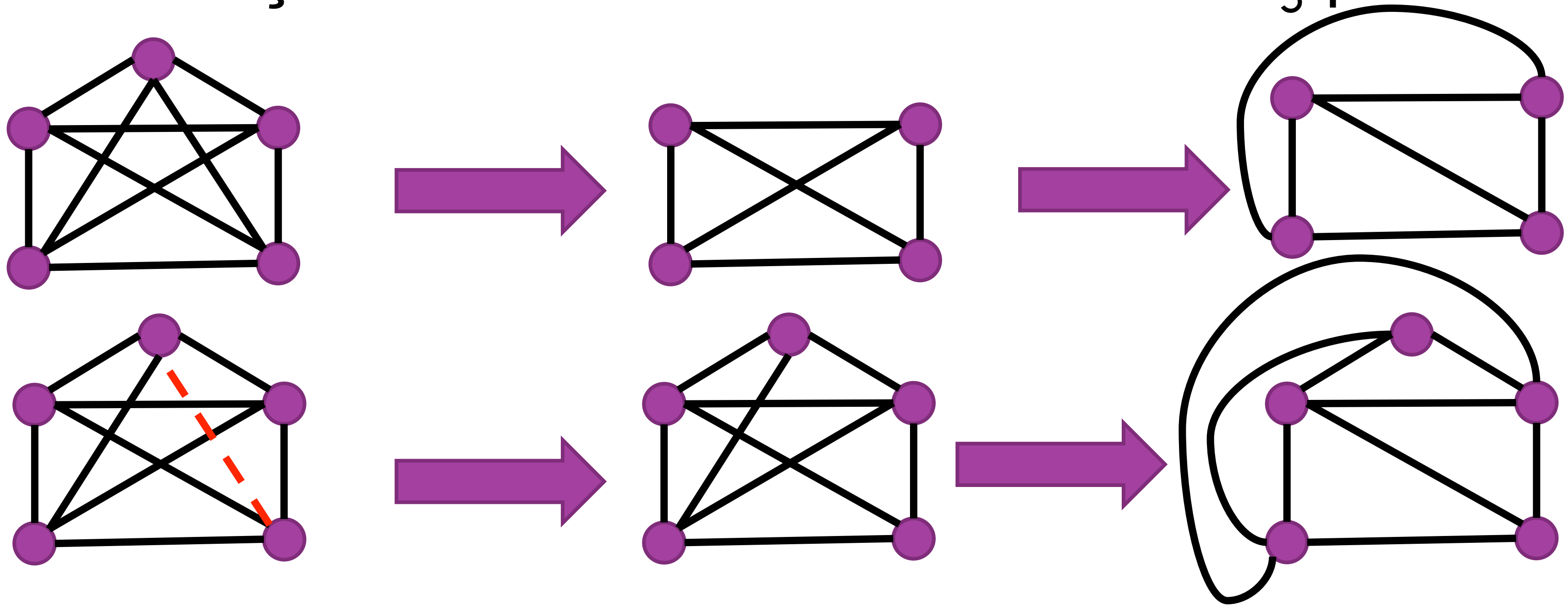
Grafos de Kuratowski

- A remoção de um vértice ou aresta torna K_5 planar?



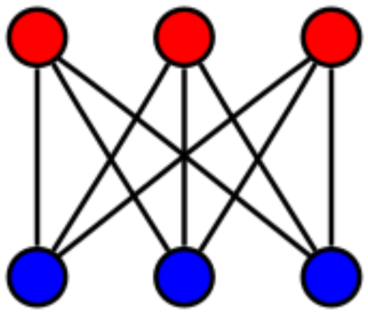
Grafos de Kuratowski

- A remoção de um vértice ou aresta torna K_5 planar?



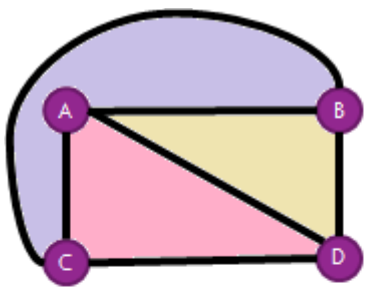
Grafos de Kuratowski

- A remoção de uma aresta ou vértice torna $K_{3,3}$ planar?



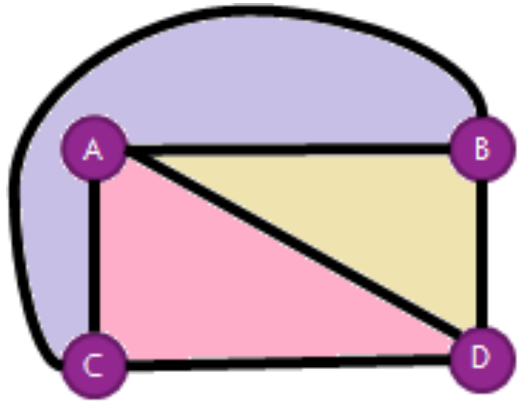
Planaridade

- **Região (ou face)**: uma representação gráfica planar de um grafo divide o plano em *regiões* ou *faces*. Cada região é caracterizada pelas arestas que a contornam.



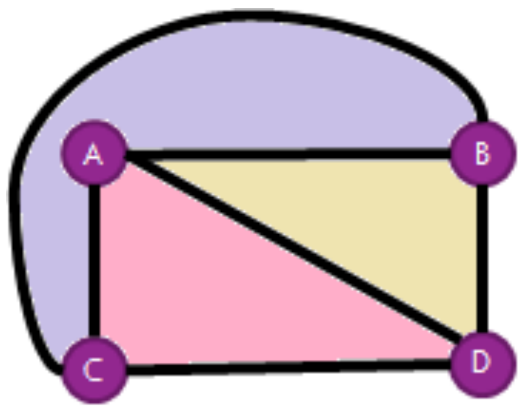
Faces

- Cada aresta de G pertence à fronteira de uma ou duas faces de G.
- O grau (comprimento), de uma face f de G, representado por d(F) é igual ao número de arestas da fronteira de F.



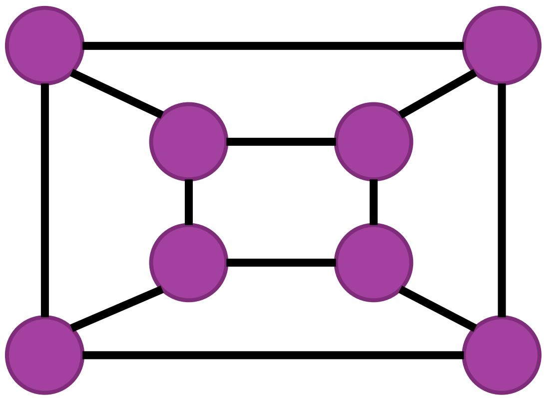
Faces

- Cada face da representação planar de um grafo corresponde a um passeio fechado do grafo constituído pelos vértices e arestas que delimitam a face. Chamamos grau da face, d(f), ao comprimento do passeio correspondente.



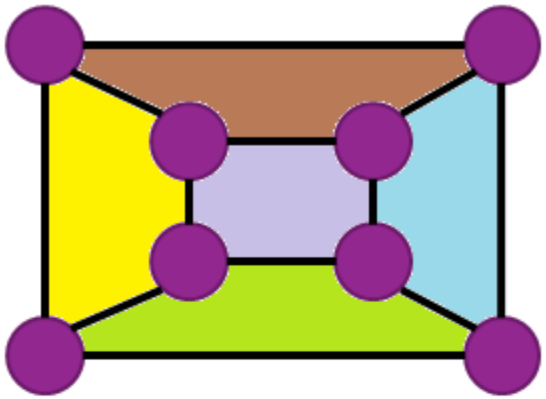
Faces

- Quantas faces temos neste grafo?



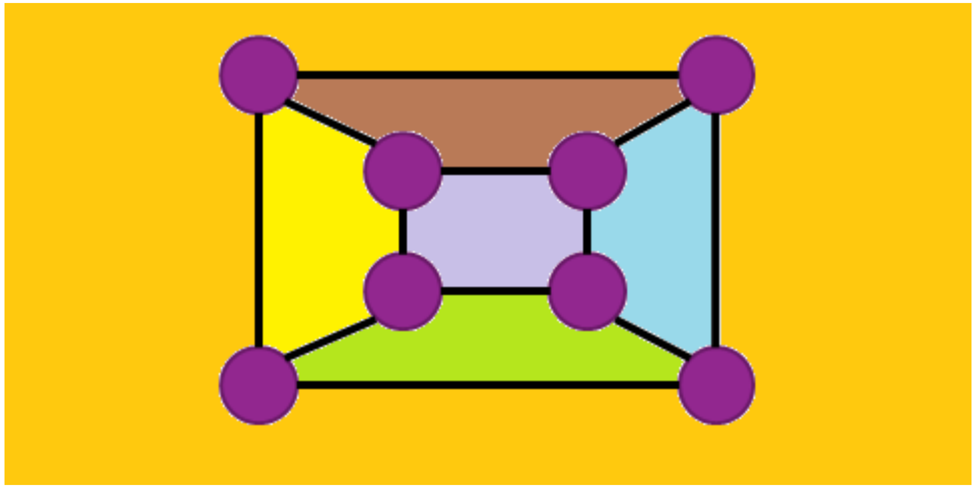
Faces

- Quantas faces temos neste grafo?



Faces

- Quantas faces temos neste grafo? SEIS



Face infinita: porção infinita do plano que não é contornada por arestas

Fórmula de Euler

- TEOREMA: Seja G um grafo conexo planar com *n* vértices e e arestas. O número de faces do grafo é

$$f = e - n + 2$$

Fórmula de Euler

- TEOREMA: Seja G um grafo conexo planar com *n* vértices e e arestas. O número de faces do grafo é

$$f = e - n + 2$$

"Apesar das inúmeras maneiras de se desenhar um grafo no plano, o número de faces irá permanecer o mesmo."

Fórmula de Euler

- COROLÁRIO: $e \leq 3n - 6$

- Condição necessária mas não suficiente para um grafo ser planar

Detecção de planaridade

- Um grafo desconexo é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar

Detecção de planaridade

- Um grafo desconexo é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar
- Se G é planar, então, a inclusão ou remoção de:
  - arestas paralelas
  - loops
  - vértices de grau 2 (arestas em série)
- não afetam a planaridade de G

Detecção de planaridade

- Técnica de *redução* auxilia nesta detecção

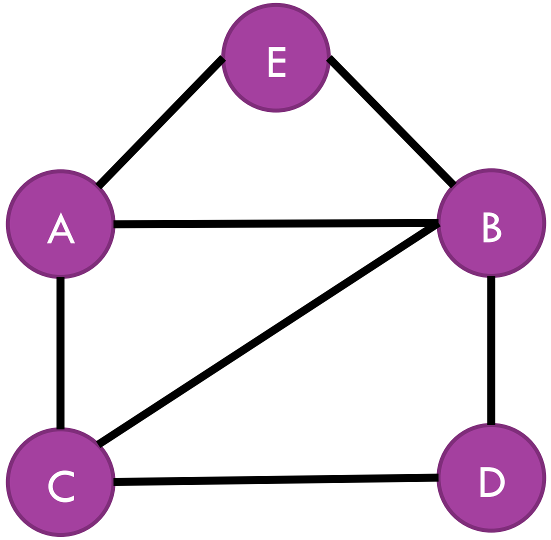
Detecção de planaridade

- Redução elementar

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

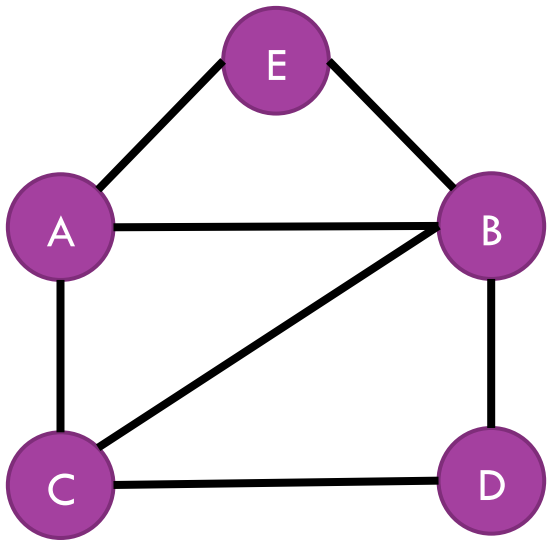
Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



Detecção de planaridade

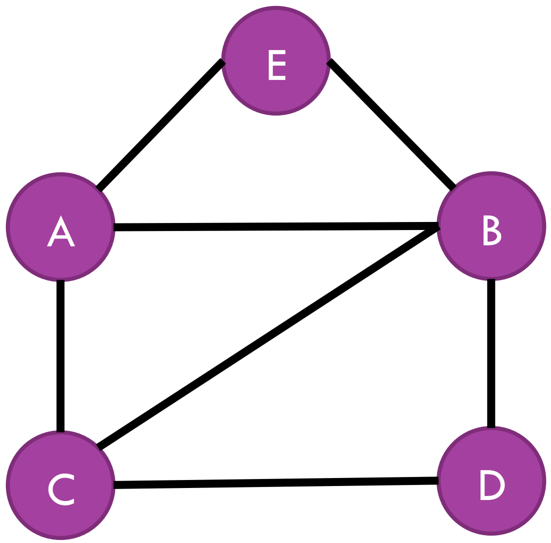
```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

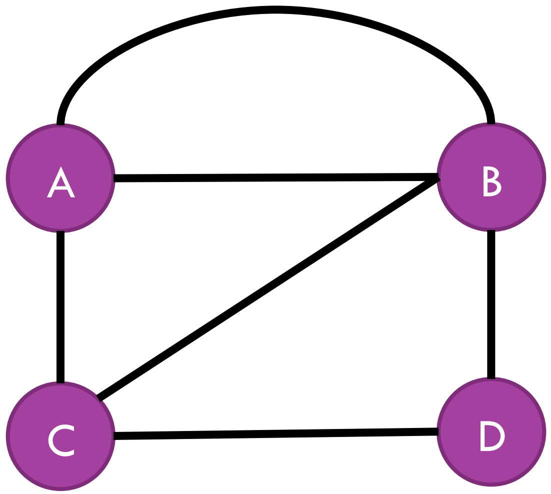
- AE e EB



Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

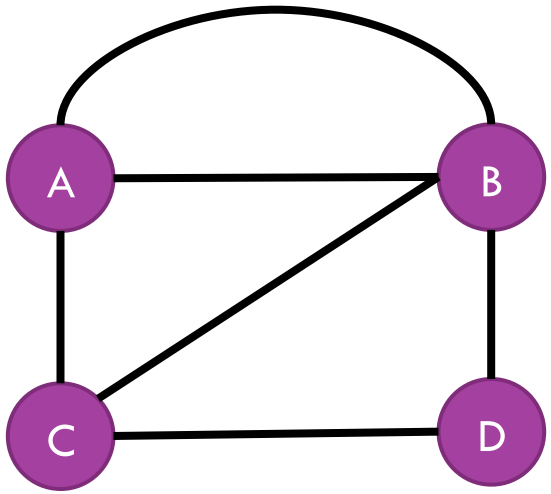
- AE e EB



Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

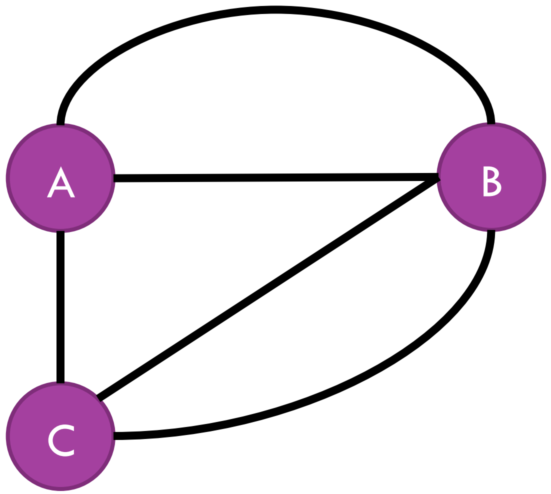
- AE e EB
- BD e DC



Detecção de planaridade

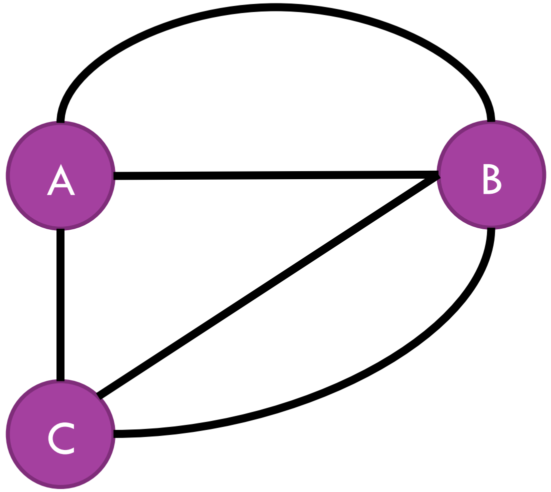
```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

- AE e EB
- BD e DC



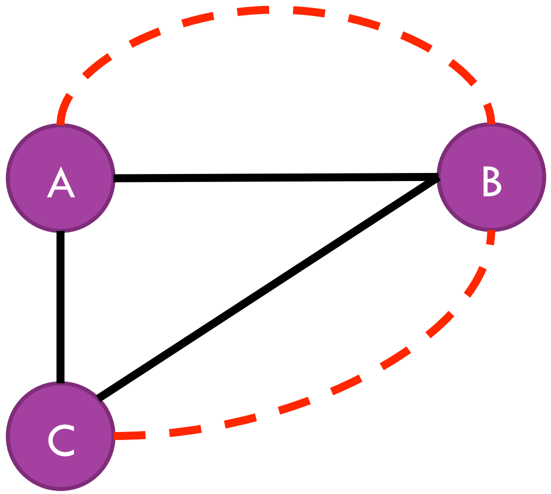
Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



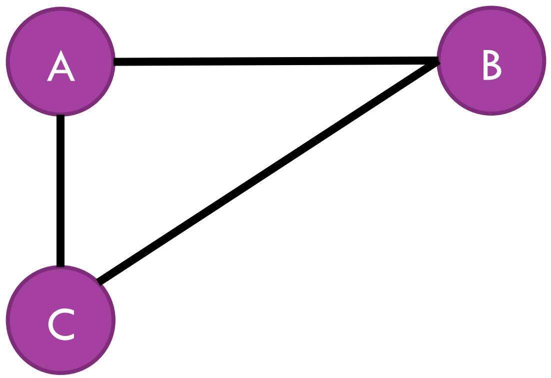
Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



Detecção de planaridade

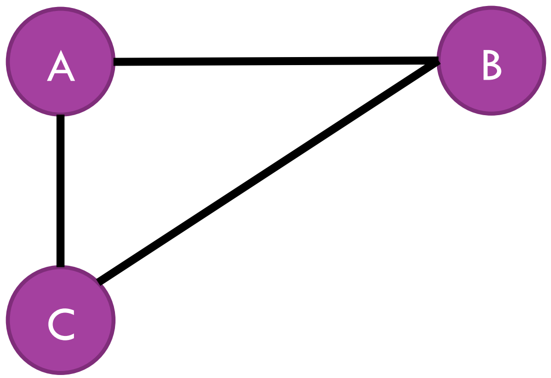
```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

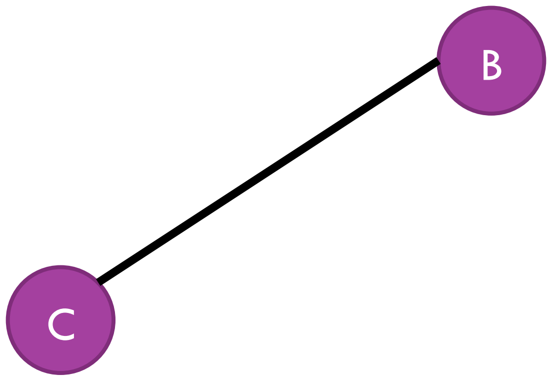
- CA e AB



Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

- CA e AB



Detecção de planaridade

- De maneira geral, após aplicar o procedimento a cada um dos componentes Gi, qual será o grafo reduzido Hi?
  1. Uma única aresta, ou
  2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
  3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

Detecção de planaridade

1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

Detecção de planaridade

1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

PLANAR!!

Detecção de planaridade

1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. $\boxed{\text{Um grafo simples com } n \geq 5 \text{ e } e \geq 7}$ INVESTIGAR!!

Detecção de planaridade

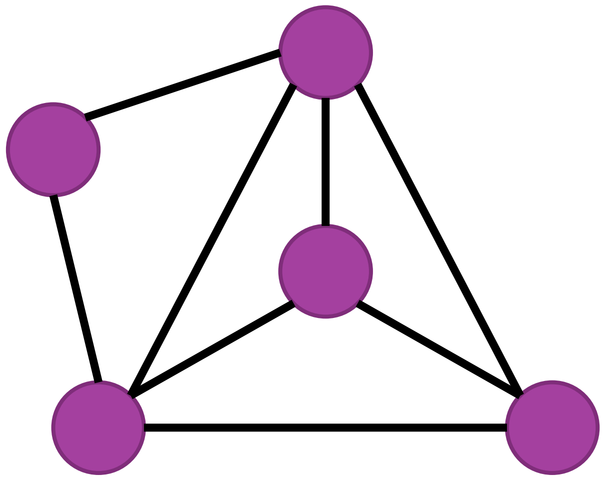
3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$ INVESTIGAR!!

- Podemos verificar se $e \leq 3n-6$.
  - Se o grafo reduzido não satisfaz a inequação, então o grafo é não planar. Se a inequação for satisfeita, é necessário fazer testes adicionais.

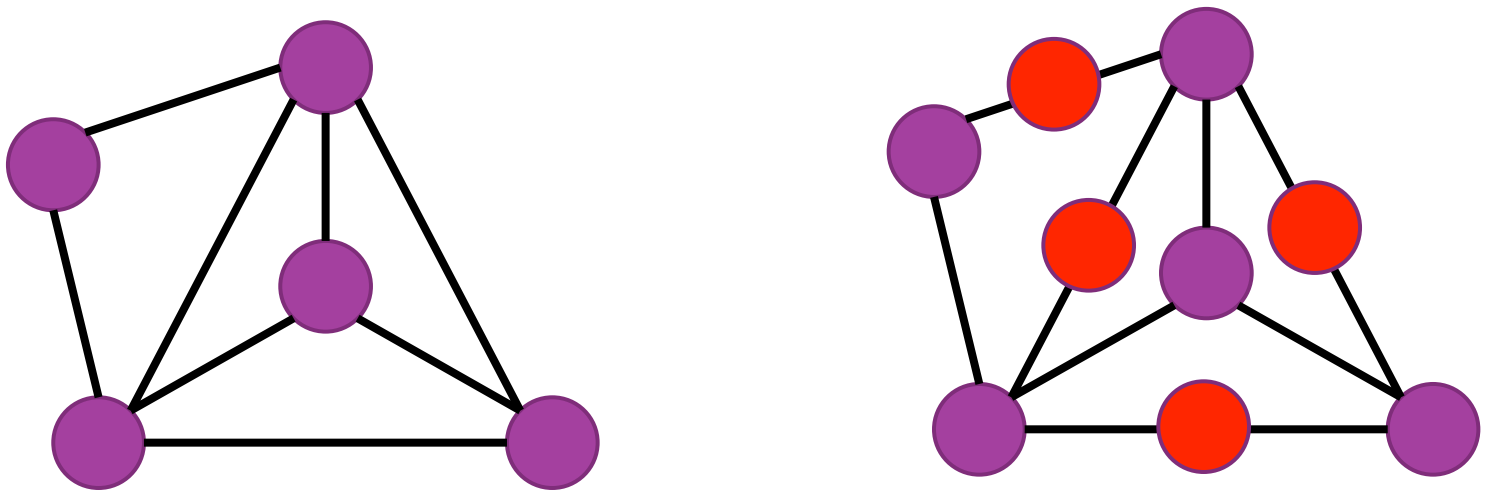
Homeomorfismo

- Dois grafos G_1 e G_2 são **homeomorfos** se os grafos H_1 e H_2 obtidos a partir das reduções elementares de G_1 e G_2 forem isomorfos
- G_1 e G_2 são **homeomorfos** se pudermos obter G_2 a partir da inserção de vértices intermediários nas arestas de G_1

Homeomorfismo

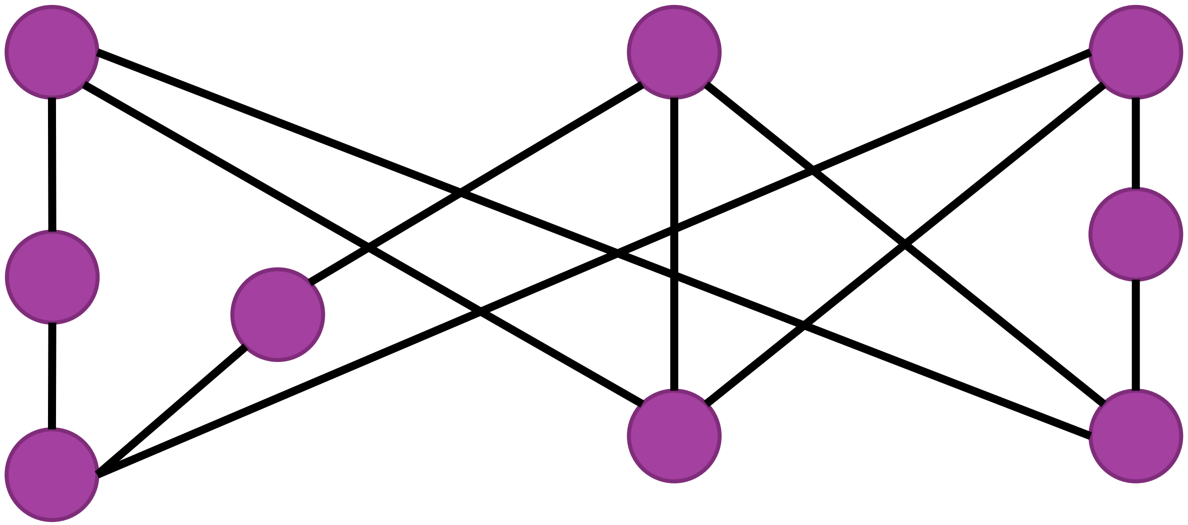


Homeomorfismo



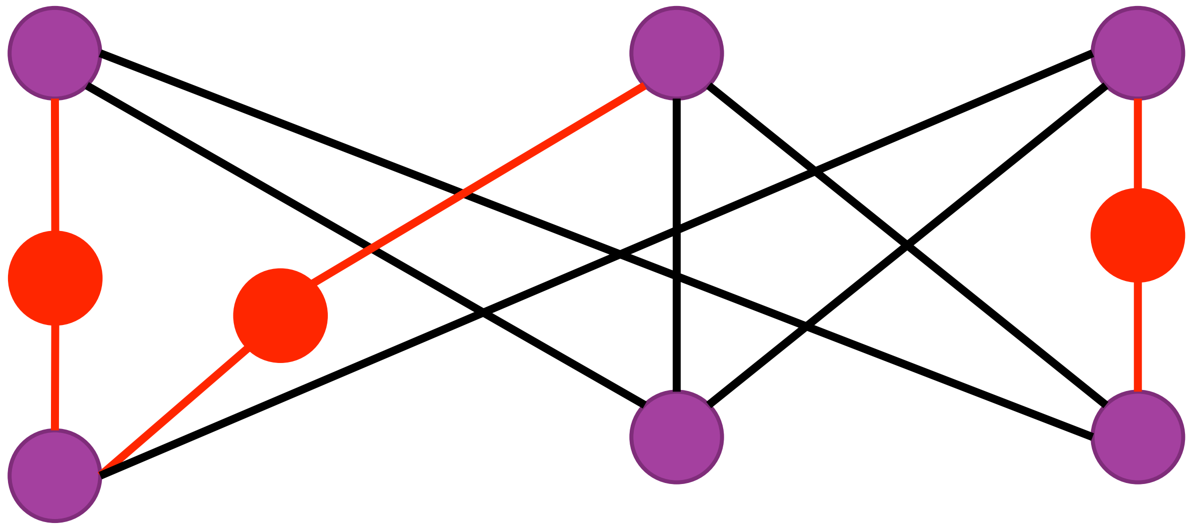
Teorema

- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



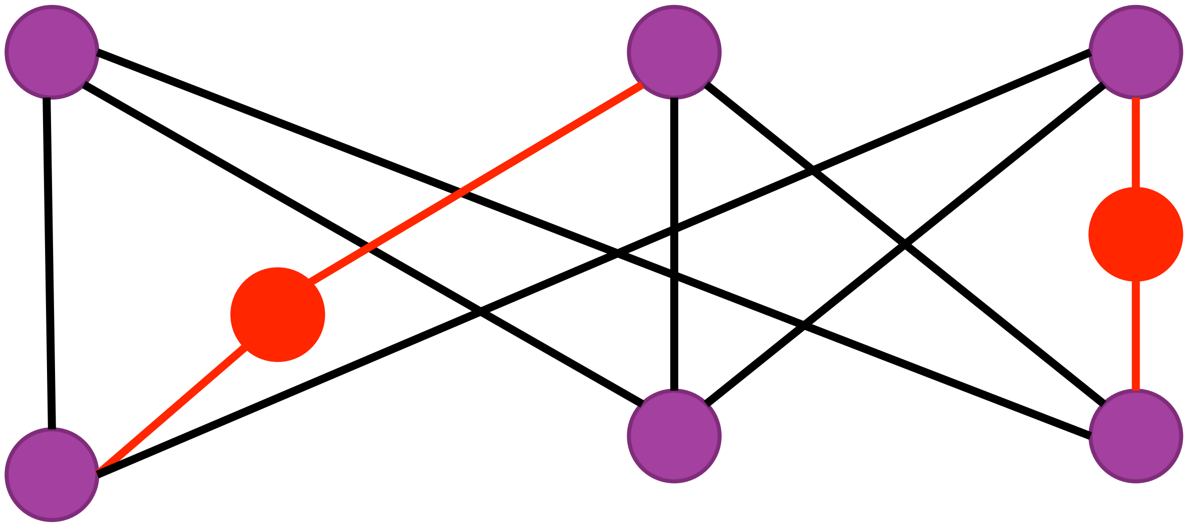
Teorema

- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



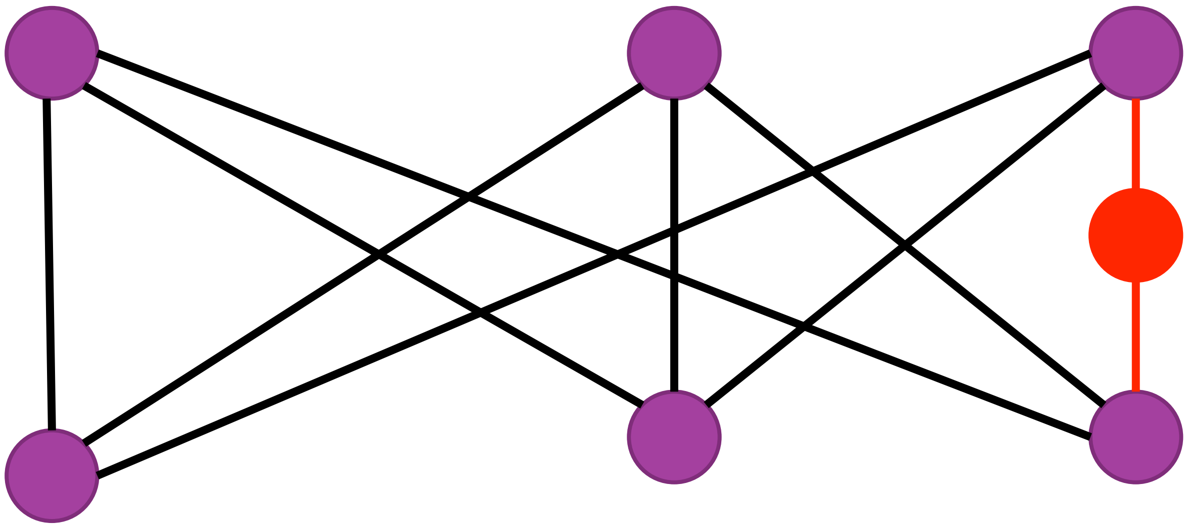
Teorema

- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



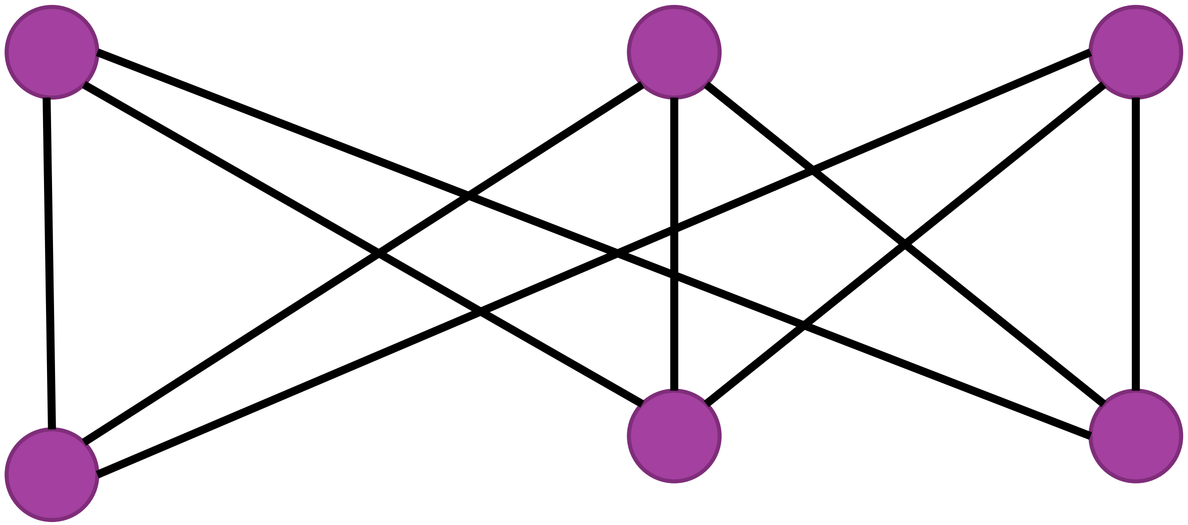
Teorema

- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



Teorema

- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



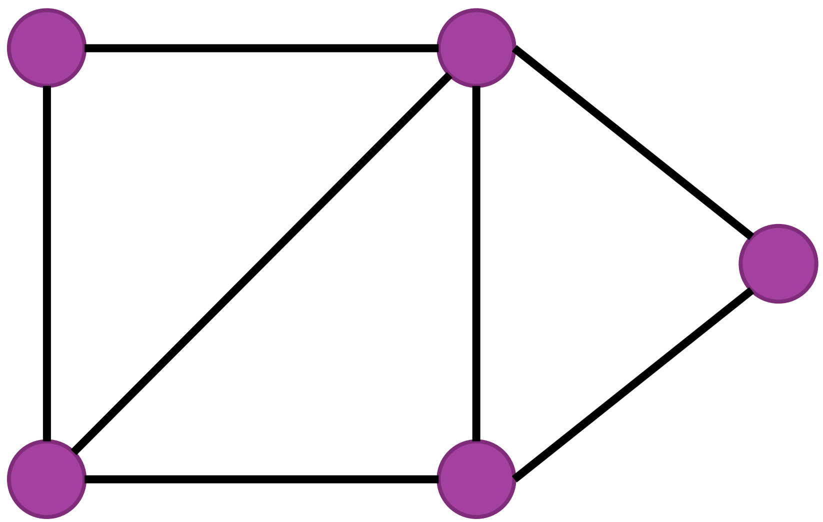
Dualidade

- Dado um grafo G planar, o grafo G*, chamado **dual** de G, é construído da seguinte forma:
  - para cada face f de G, G* tem um vértice

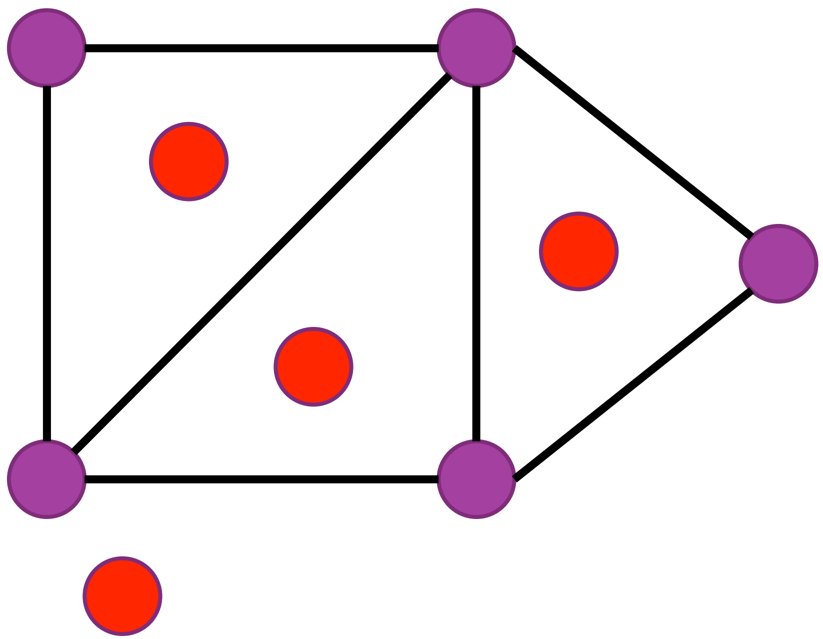
Dualidade

- una os vértices de G* da seguinte forma
  - se 2 regiões f_i e f_k são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre v_k e v_k interceptando a aresta em comum
  - se existirem mais de uma aresta em comum entre f_i e f_k coloque uma aresta entre v_i e v_k para cada aresta em comum
  - se uma aresta está inteiramente em uma região, f_i, coloque um loop no vértice v_i.

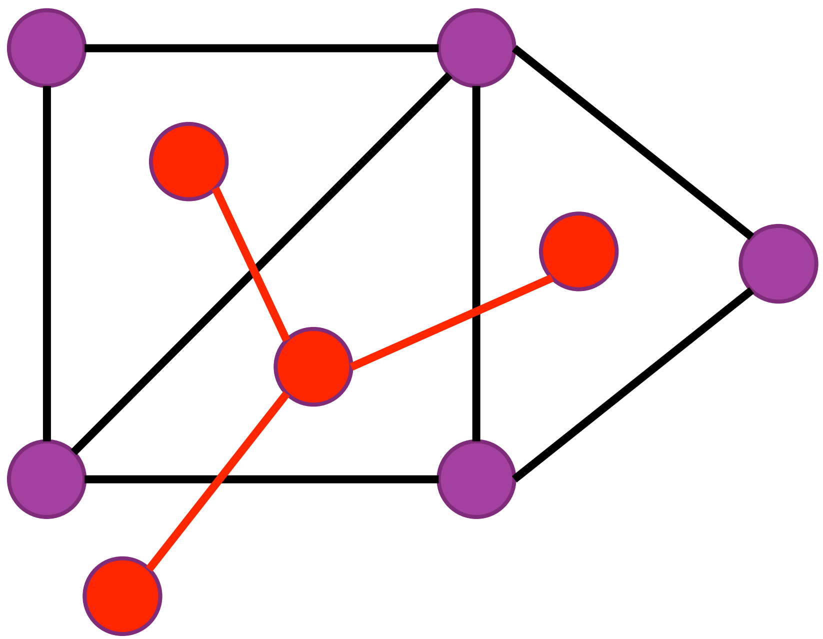
Dualidade



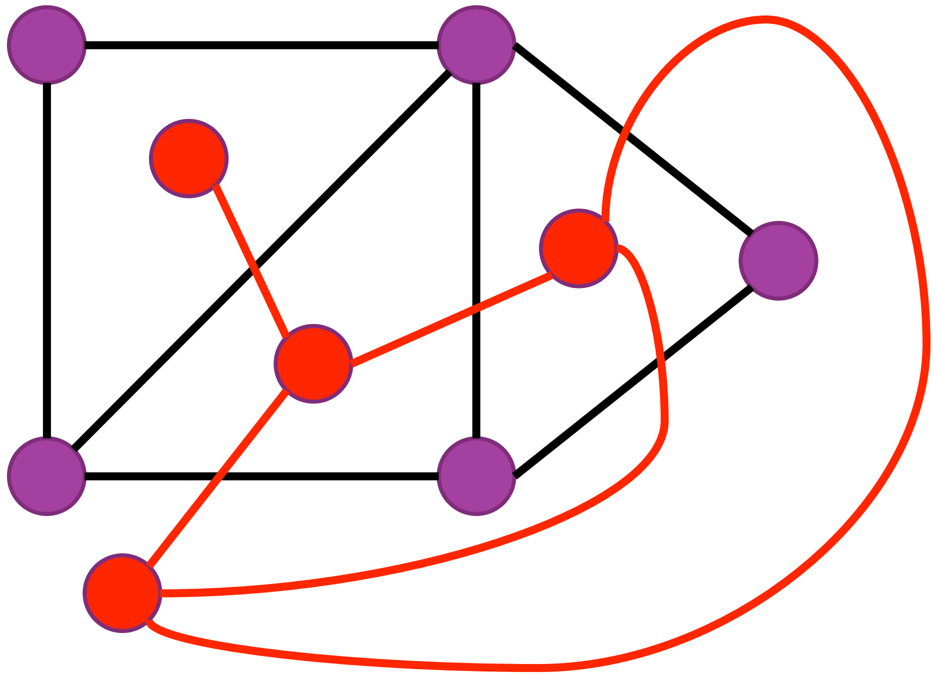
Dualidade



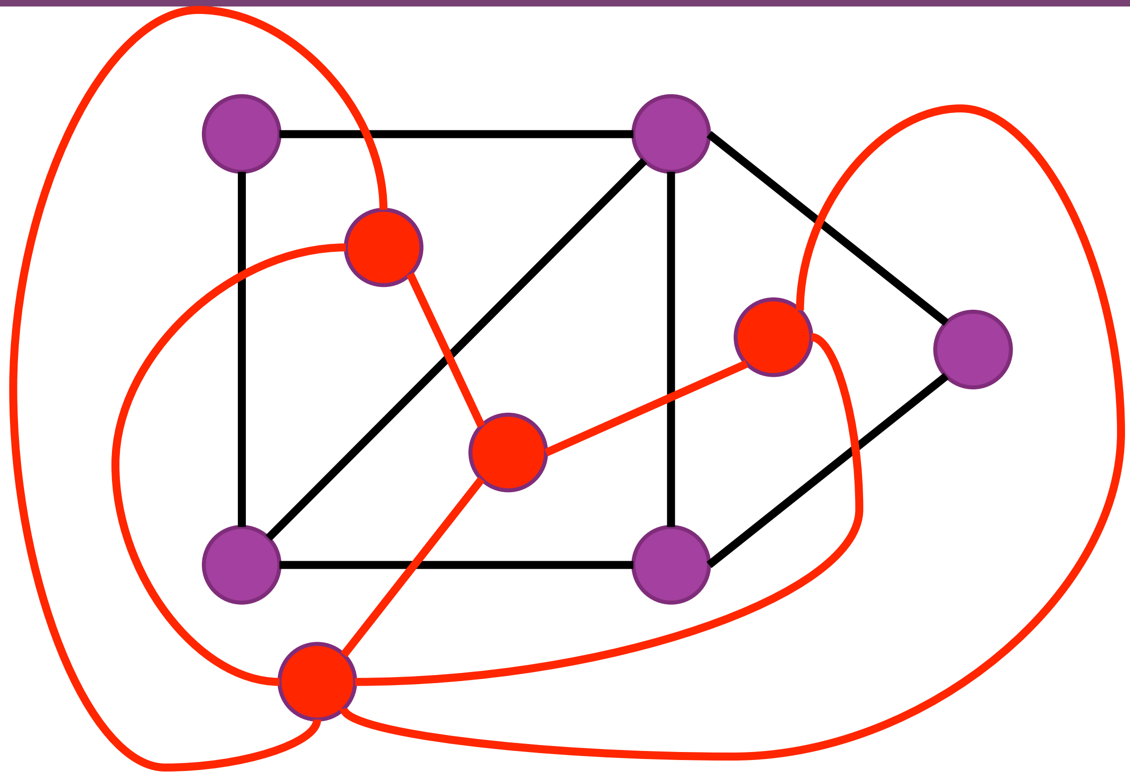
Dualidade



Dualidade

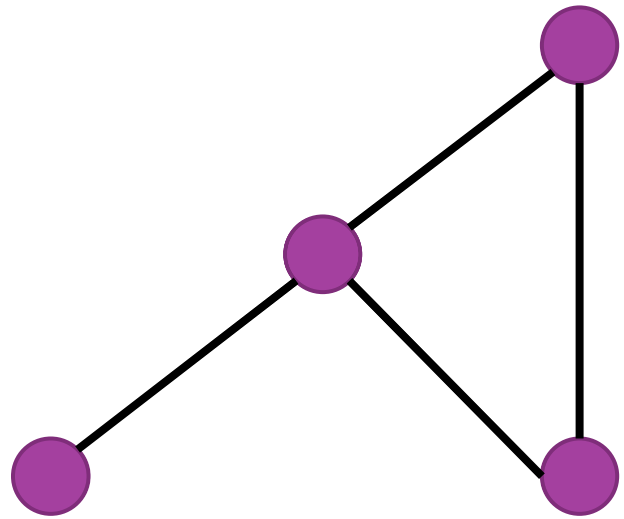


Dualidade



Dualidade

- Qual é o dual deste grafo G?



Dualidade

- Qual é o dual deste grafo G?
  - Arestas contidas em uma região tornam-se *loops* no dual