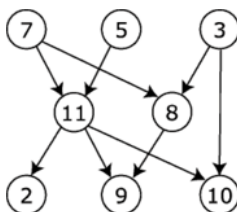


1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Qual é o número mínimo de arestas necessárias para garantir que um grafo simples seja conexo. Justifique.
2. Construa todos os grafos simples não isomorfos de 3 vértices.
3. Podemos afirmar que se existirem exatamente 2 vértices de grau ímpar em um grafo G , então existe um caminho entre esses dois vértices? Justifique sua resposta.
4. Considere um grafo G que é complementar a um grafo bipartido conectado. Responda às seguintes questões sobre G e justifique.
 - a) Quando G será desconexo?
 - b) Quantas arestas G possui?
 - c) G é sempre uma árvore?
5. Determine o número de vértices para os seguintes grafos:
 - a) G tem 9 arestas e todos os vértices têm grau 3.
 - b) G é simples, conexo e regular com 15 arestas.
 - c) G tem 10 arestas com 2 vértices de grau 4 e todos os outros de grau 3.
6. Mostre os vértices topologicamente ordenados para o grafo abaixo:



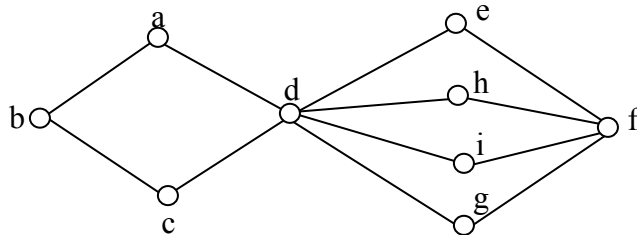
7. Suponha que o seguinte método para verificar se um grafo é euleriano:

```
bool TGrafo::VerificaEuleriano() {  
    int i;  
    if (NumeroComponentes() == 1) {  
        for (i = 1; i < n; i++)  
            if (GrauVertice(i) % 2 != 0)  
                return false;  
        return true;  
    } else return false;  
}
```

Observe que o *loop* do comando “for” está começando de 1 e não de 0. Comente a repercussão deste fato. A função continuará se comportando da maneira esperada? Justifique.

8. Um grafo euleriano é arbitrariamente traçável a partir de um vértice v se, sempre que começamos de v e caminhamos no grafo de forma arbitrária utilizando uma aresta não visitada, sempre obtemos o ciclo de Euler.

- a) Mostre que o grafo abaixo é arbitrariamente traçável a partir de algum vértice. Qual é esse vértice?



- b) Dê exemplo de um grafo que é arbitrariamente traçável a partir de todos os seus vértices.
 c) Dê exemplo de um grafo euleriano que não é arbitrariamente traçável a partir de nenhum de seus vértices. Justifique suas respostas.
 d) Qual é a condição que um vértice v deve satisfazer para que um grafo euleriano seja arbitrariamente traçável a partir de v ?
 e) Porque um grafo arbitrariamente traçável é adequado para o *layout* de um museu?
9. Seja V o produto cartesiano $\{1, 2, \dots, a\} \times \{1, 2, \dots, b\}$ isto é, o conjunto de todos os pares ordenados $\langle i, j \rangle$ com i em $\{1, 2, \dots, a\}$ e j em $\{1, 2, \dots, b\}$. Dois elementos $\langle i, j \rangle$ e $\langle i', j' \rangle$ de V são adjacentes se:

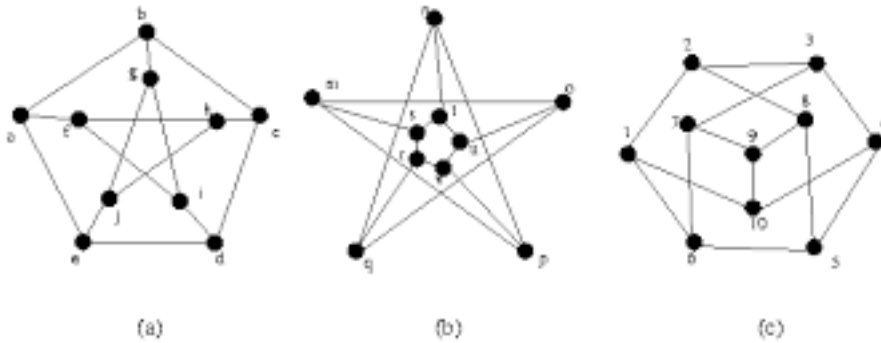
$$i = i' \text{ e } |j - j'| = 1 \text{ ou } j = j' \text{ e } |i - i'| = 1$$

Essa relação de adjacência define um grafo sobre o conjunto V de vértices. Esse grafo é conhecido como grade a -por- b .

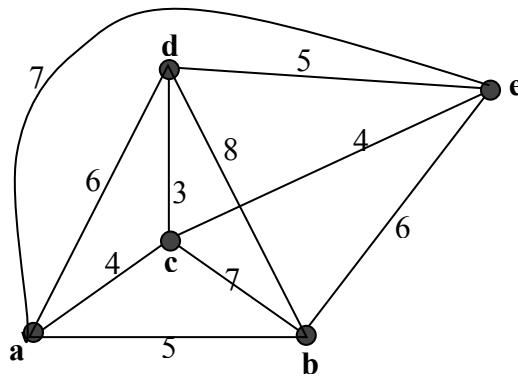
- a) Faça uma figura da grade 3-por-4.
 b) Quantas arestas tem a grade a -por- b ? Justifique.
 c) Para quais valores de a e b o grafo da grade a -por- b é Hamiltoniano? Justifique.
 d) Para quais valores de a e b o grafo da grade a -por- b é bipartido? Justifique.
 e) Para quais valores de a e b o grafo da grade a -por- b é uma árvore? Justifique.
10. Um grafo simples G é dito ser auto-complementar se ele e seu complementar são isomorfos. Mostre que o grafo abaixo é auto-complementar.



11. Verifique se existem grafos isomorfos dentre os abaixo.



12. Encontre a solução para o Problema do Caixeiro Viajante para o grafo abaixo.



13. Podemos dizer que toda árvore é um grafo bipartido? Justifique sua resposta.

14. Quais árvores são grafos bipartidos completos? Justifique sua resposta.

15. Uma floresta é um grafo no qual todos os componentes são árvore.

- Seja G uma floresta com n vértices e k componentes. Quantas arestas G possui?
 - Construa uma floresta com 12 vértices e 9 arestas
 - Podemos afirmar que toda floresta com k componentes tem pelo menos $2k$ vértices de grau 1? Explique sua resposta.
16. Dizemos que G é uma quase-árvore se existir exatamente uma aresta cuja remoção torna G uma árvore. Responda às seguintes questões sobre um grafo G que é uma quase-árvore e justifique.
- Quantas arestas existem em G ?
 - G é Hamiltoniano?
 - G é Euleriano?
 - G é bipartido?

17. Considere um grafo simples com peso nas arestas no qual os vértices representam casas e as arestas caminhos entre as casas. O peso das arestas varia de 0 a 100 e significa a porcentagem de ovos transportados que serão quebrados (perdidos) se um transportador de ovos percorre esse trajeto.
- Mostre com um contra-exemplo que a aplicação do algoritmo de Dijkstra sobre este grafo não necessariamente devolve o caminho entre duas casas pelo qual o menor número de ovos serão perdidos.
 - Adapte o algoritmo de Dijkstra para calcular o caminho pelo qual menos ovos serão perdidos.
18. É possível visitar todas as casas de um tabuleiro 4×4 com movimentos de cavalo, sem passar duas vezes pela mesma casa e voltando à casa inicial? Modele este problema utilizando teoria dos grafos e proponha uma solução para ele. O grafo gerado é bipartido?
19. Determine todos os valores de n para os quais o grafo circuito, C_n , possui complementar euleriano. Justifique sua resposta.
20. Tertuliano Gonçalves havia prometido casamento a Josefina das Graças. O evento deveria ser realizado, segundo ele, assim que acabasse o contrato de trabalho recém assinado com uma empresa encarregada de pavimentar toda a rede de estradas que ligava Santana do Caixa Prego (cidade onde morava Josefina) às cidades da região. O trabalho iria começar em Santana e prosseguir em continuidade, sem parar, estrada após estrada, terminando, segundo explicou Tertuliano, na própria Santana. A rede de estradas poderia ser representada pela matriz de adjacência que se segue, na qual a cidade de Santana é representada pelo número 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		x	x		x					
2	x			x	x	x				
3	x	x				x	x			
4		x			x		x			x
5	x	x	x	x		x	x	x	x	
6			x		x			x		x
7				x	x			x		x
8					x	x	x		x	x
9					x			x		x
10				x		x	x	x	x	

- Modele este problema utilizando teoria dos grafos e proponha uma solução para ele que responda se Tertuliano estava sendo sincero com Josefina.
- Caso Tertuliano esteja sendo sincero, mostre como ele poderia provar isso para Josefina. Caso Tertuliano não esteja sendo sincero, mostre qual seria a menor mudança na matriz de adjacência de forma a tornar verdadeira a sua promessa.