Навчально-науковий інститут комп’ютерних інформаційних технологій

Кафедра комп’ютеризованих систем управління

Навчальна дисципліна

«ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

Спеціальність 123 «Комп’ютерна інженерія»

Спеціалізація 123.2 «Системне програмування»

Курс 3	Семестр 6
Аудиторних занять –	48 годин
Самостійна робота –	72 години
Всього (годин/кредитів ECTS) –	120/4,0
Диференційований залік –	6 семестр

Викладач: ***Литвиненко Олександр Євгенійович*** –
завідувач кафедри КСУ, доктор техн. наук, професор

Рейтингова система оцінювання знань

6 семестр		
Модуль №1		Max Кількі-сть балів
Вид навчальної роботи	Max кількі-сть балів	
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.1	10	
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.2	10	
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.3	10	
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.4	10	
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.5	15	
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.6	15	
Для допуску до виконання модульної контрольної роботи №1 студент має набрати ***не менше 42 балів***		
Виконання модульної контрольної роботи №1	18	
Усього за модулем №1	**88**	
Диференційований залік		**12**
Усього за 6 семестр		**100**

ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ

1. Основні поняття теорії моделювання
2. Моделювання випадкових явищ
3. Технологія імітаційного моделювання
4. Обробка результатів імітаційного моделювання

Мета викладання дисципліни: засвоєння методів імітаційного моделювання складних систем.

Студент повинен знати:
● методи імітаційного моделювання випадкових явищ;
● принципи побудови моделюючих алгоритмів;
● методи обробки та інтерпретації результатів імітаційних експериментів.

Студент повинен вміти:
● формалізувати процес функціонування складних систем;
● обчислювати кількісні характеристики випадкових явищ;
● обробляти результати імітаційних експериментів;
● розраховувати необхідну кількість реалізацій моделюючого алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

1. Акопов А.С. Имитационное моделирование : учебник и практикум для академического бакалавриата / М. : Издательство Юрайт, 2014. — 389 с.

2. Кельтон Д., Аверил М. Имитационное моделирование. — СПб.: Питер, 2004. — 848 с.

3. Кельтон В., Лоу А., Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. – СПб.: Питер; – Киев: Издательская группа BHV, 2004. — 847 с.

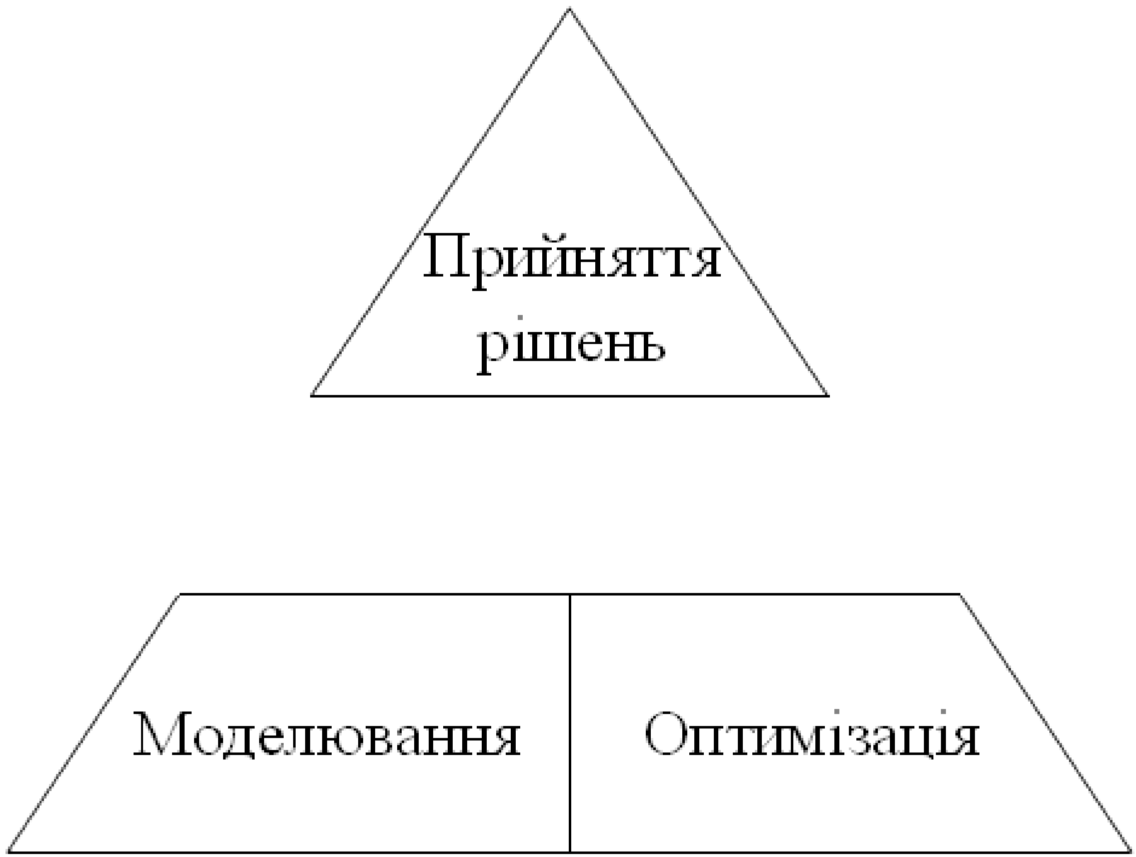
4. Белотелов Н.В Имитационное моделирование / Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский. – Москва: Издательский центр «Академия», 2008. — 236 с.

5. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – М.: Альтекс, 2004. — 529 с.

6. Харин Ю.С., Малюгин В.И., Кирлица В.П. Основы имитационного и статистического моделирования: Учеб. пособие. — Минск: Дизайн ПРО, 1997. — 288 с.

7. Карпов Ю. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование. – СПб.: Питер, Издательская группа BHV, 2004. — 400 с.

ГЛОБАЛЬНА ПРОБЛЕМА

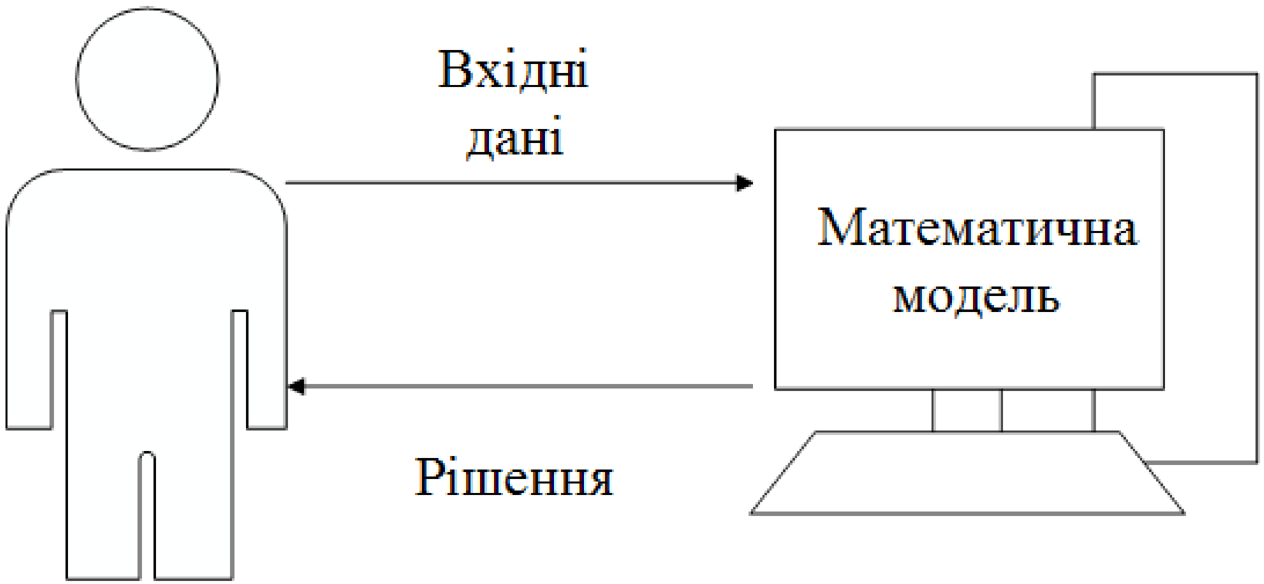


ПІДХОДИ ДО ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ

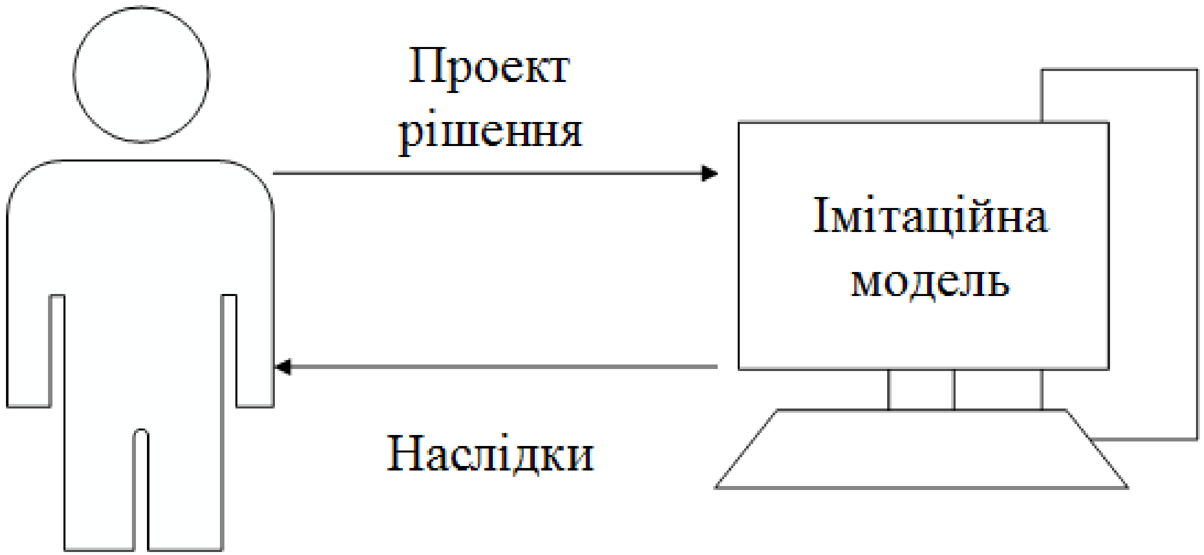
Основа:

- Математична модель задачі прийняття рішень (ЗПР);
- Імітаційна модель керованого процесу (системи);
- Експертна модель прийняття рішень.

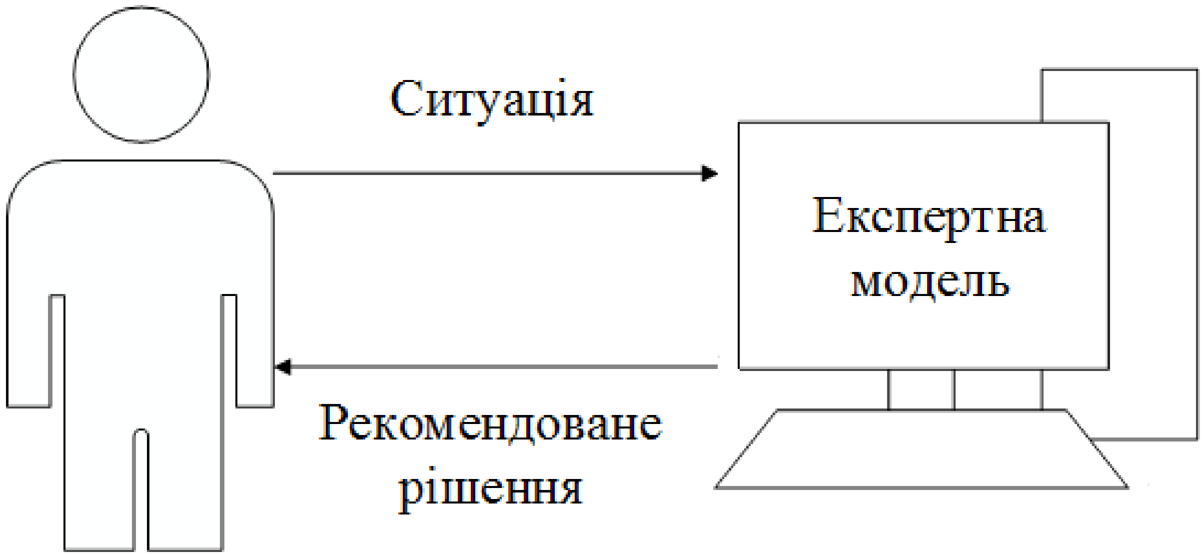
ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ



ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ



ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРТНОЇ МОДЕЛІ



1. Основні поняття теорії моделювання

- Модель - опис об'єкту на формальній мові, що дозволяє виводити судження про його властивості і поведінку за допомогою формальних процедур.

- Моделювання - вивчення властивостей реальних об'єктів шляхом побудови і дослідження їх моделей.

- Адекватність
- Види моделювання:
  - аналітичне;
  - імітаційне.

ГАЛУЗІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ

• Структура • Параметри • Початковий стан • Умови функціонування	→	АНАЛІЗ	→	Функціональні характеристики: • ефективність; • надійність тощо.
• Функціональні характеристики (вимоги) • Умови функціонування	→	СИНТЕЗ	→	• Структура • Параметри

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

– реалізація моделюючого алгоритму, який формально відтворює процес функціонування реального об'єкту.

Елементарні явища, що становлять цей процес, імітуються із збереженням логічної структури їх взаємодії та послідовності протікання в часі.

Випадкові явища імітуються за допомогою випадкових чисел з необхідними імовірнісними характеристиками.

Отримання об'єктивних і стійких характеристик модельованого процесу потребує його багатократне відтворення для різних початкових даних з наступною статистичною обробкою отриманих результатів.

ПРИКЛАД ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Процес, що моделюється – виконання рейсу за маршрутом $A_1 \to A_2 \to A_3$.

Вхідні дані:

t^H – час початку рейсу;

τ_{12}, τ_{23} – тривалість польоту на дільницях $(A_1 \to A_2)$ та $(A_2 \to A_3)$;

s_2 – тривалість стоянки в аеропорту A_2;

$p_1^B, p_2^П, p_2^B, p_3^П$ – вірогідності того, що аеропорти будуть закриті у потрібний час для зльоту (p_i^B) або посадки $(p_i^П)$;

$d_1^B, d_2^П, d_2^B, d_3^П$ – тривалість закриття аеропортів для зльоту (d_i^B) або посадки $(d_i^П)$.

Визначити час завершення рейсу t^K.

СХЕМА МОДЕЛЮЮЧОГО АЛГОРИТМУ
(ПОЧАТОК)

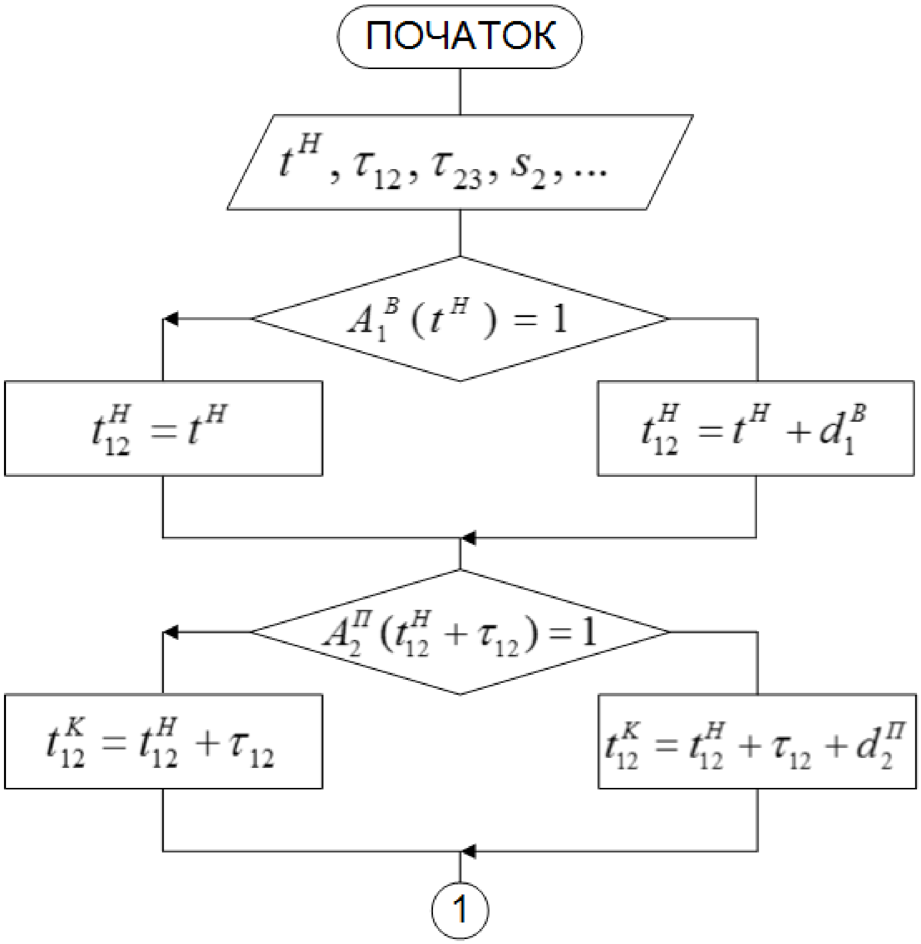
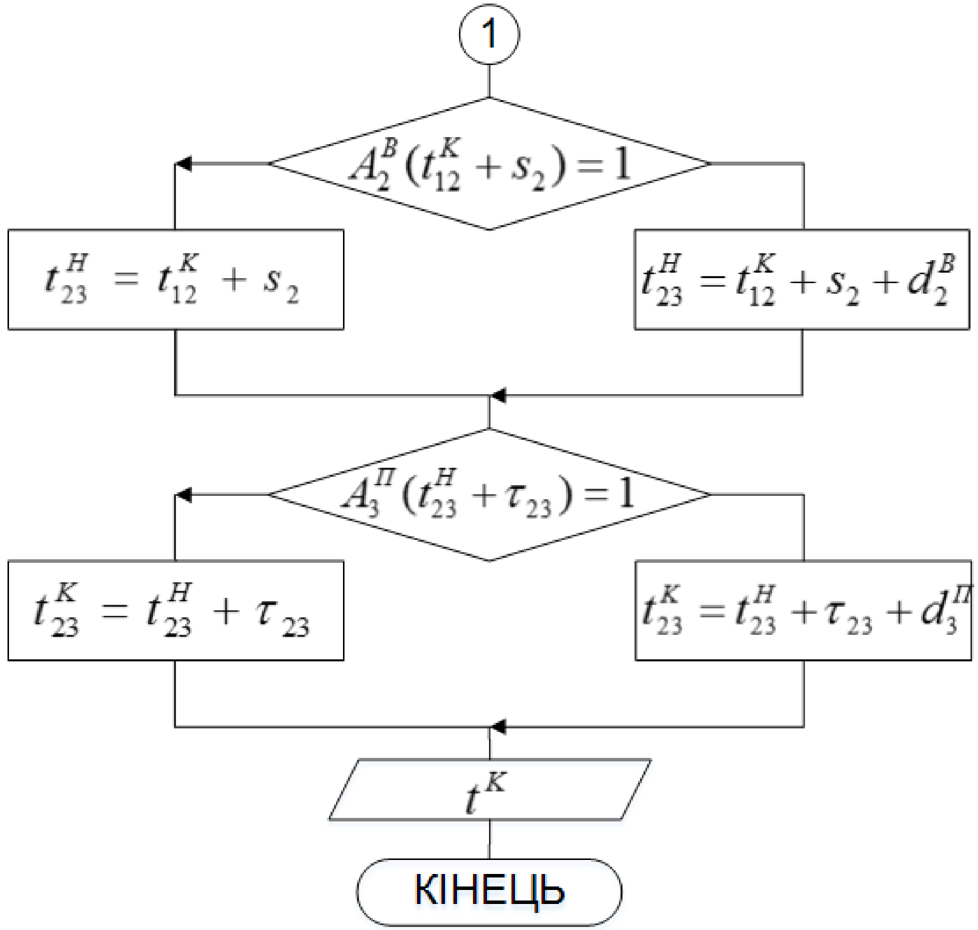


СХЕМА МОДЕЛЮЮЧОГО АЛГОРИТМУ
(кінець)



ЗАГАЛЬНА СХЕМА ОБ’ЄКТА МОДЕЛЮВАННЯ (СИСТЕМИ)

ФОРМАЛЬНИЙ ОПИС СИСТЕМИ (1)

Час: $t \in T$; $t_0 = \min\{t \in T\}$

Поточний стан системи:

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)) \in Z$$

Початковий стан системи:

$$z_0 = (z_{01}, z_{02}, ..., z_{0n});\ z_{0j} = z_j(t_0);\ j = \overline{1, n}$$

Вхідний сигнал:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in X$$

Збурюючі дії:

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)) \in V$$

Внутрішні (власні) параметри:

$$h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_l(t)) \in H$$

ФОРМАЛЬНИЙ ОПИС СИСТЕМИ (2)

Стан системи в момент часу $t^* \in T$; $t^* > t_0$:

$$z(t^*) = F[t, z_0, x(t), h(t), v(t)]\,_{t_0}^{t^*}$$

Вихідний сигнал:

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)) \in Y$$

$$y(t^*) = G[t, z_0, x(t), h(t), v(t)]\,_{t_0}^{t^*}$$

$$y(t) = G[t, z(t)]\,_{t_0}^{t^*}$$

Формальна модель системи:

$$M = (T, H, X, V, Z, Y, F, G)$$

ЗАДАЧА ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ:
побудова функцій $z(t)$ та $y(t)$, $t \in T$.

2. Моделювання випадкових явищ

Імовірнісні характеристики випадкової величини ξ, рівномірно розподіленої в інтервалі [0, 1]:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \quad \text{або} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ x, & \text{при} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$M(\xi) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$D(\xi) = \int_0^1 [x - M(\xi)]^2\, f(x)\, dx = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(\xi) = +\sqrt{D(\xi)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

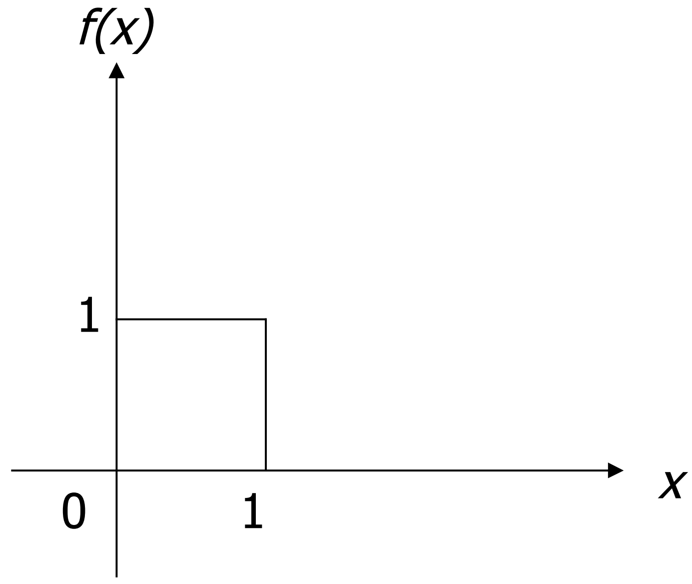


Рис. 3.1

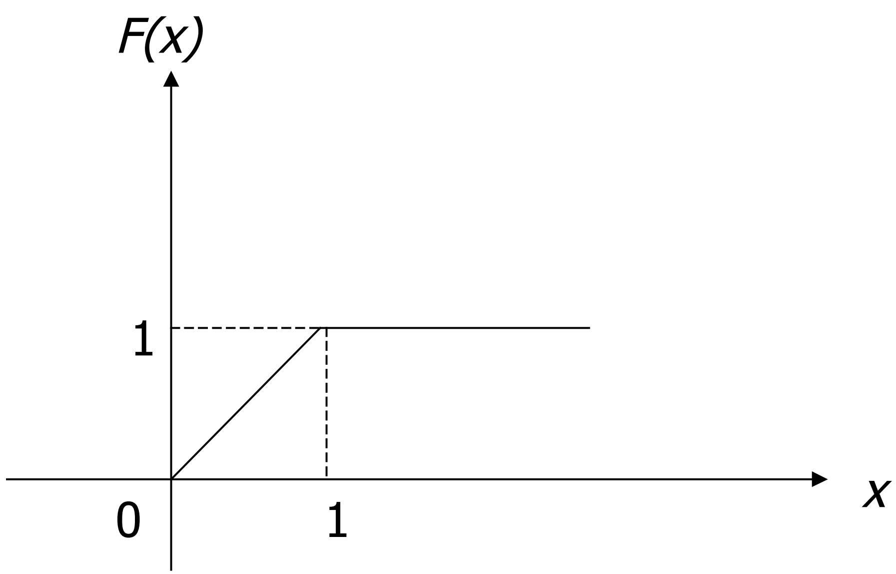


Рис. 3.2

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ

випадкової величини $\xi \in [0, 1]$
в цифрових обчислювальних системах

$$\xi' = z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + ... + z_n \cdot 2^{-n};$$

n – кількість двійкових розрядів;

$z_k \in \{0, 1\}$ з вірогідністю ½; $k = \overline{1, n}$.

$$x_i = \frac{m}{2^n - 1};$$

$$m \in \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}; \quad i = 1, 2, ...; \quad p_i = \frac{1}{2^n}.$$

ІМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

дискретної випадкової величини ξ', квазірівномірно розподіленої в інтервалі [0, 1]:

$$M(\xi') = \sum_{m=0}^{2^n-1} \frac{m}{2^n - 1} \times \frac{1}{2^n} \quad ;$$

$$\sum_{m=1}^{N} m = \frac{N(N+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad M(\xi') = \frac{1}{2};$$

$$D(\xi') = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{m}{2^n - 1} - \frac{1}{2} \right]^2 \quad ;$$

$$\sum_{m=1}^{N} m^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad \Rightarrow \quad D(\xi') = \frac{1}{12} \times \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \quad ;$$

$$\sigma(\xi') = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2^n + 1}{2^n - 1}}.$$

СПОСОБИ
формування послідовностей випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі [0,1]

- апаратний (фізичний);

- табличний (файловий);

- алгоритмічний (програмний):

$$x_{i+1} = \varphi(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_0)$$

АЛГОРИТМІЧНІ МЕТОДИ формування послідовностей псевдовипадкових чисел в інтервалі [0,1]

- мультиплікативний метод (метод вирахувань);
- метод підсумовування;
- метод усікання;
- метод перемішування.

МУЛЬТИПЛІКАТИВНИЙ МЕТОД

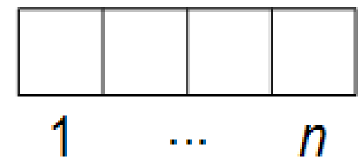
$$X_{i+1} = \lambda\, X_i \pmod M;$$
$$X_{i+1} = \lambda\, X_i + \mu \pmod M;$$
$$x_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{M};$$
$$M = q^n - 1; \quad \lambda = 8\alpha \pm 3,$$

q – основа системи числення, прийнятої в комп'ютері;
n – кількість цифрових розрядів в машинному слові;
α – ціле позитивне число;
μ – ціле позитивне непарне число;
X_0 – ціле позитивне непарне число.

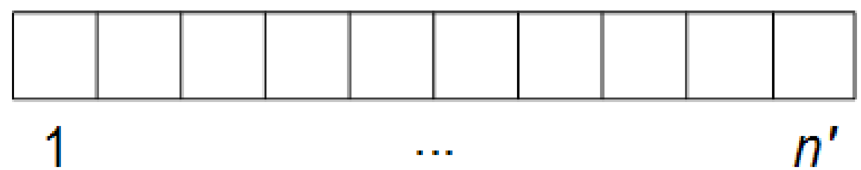
Період послідовності: $10^6 - 10^{11}$.

ІЛЮСТРАЦІЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОГО МЕТОДУ

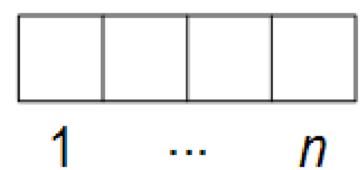
X_i



$\lambda X_i + \mu$



$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu \,(\mathrm{mod}\, M)$



МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ

$$X_{i+1} = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j X_{i-j} + \mu \pmod{M}; \quad i \geq r;$$

$$x_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{M};$$

$r, \lambda_j, X_i, \mu, M$ – цілі позитивні числа;

$X_r, X_{r-1}, \ldots, X_0$ – випадкові числа з діапазону $(0, M)$.

Період послідовності: $10^9 - 10^{17}$.

ІЛЮСТРАЦІЯ МЕТОДУ ПІДСУМОВУВАННЯ

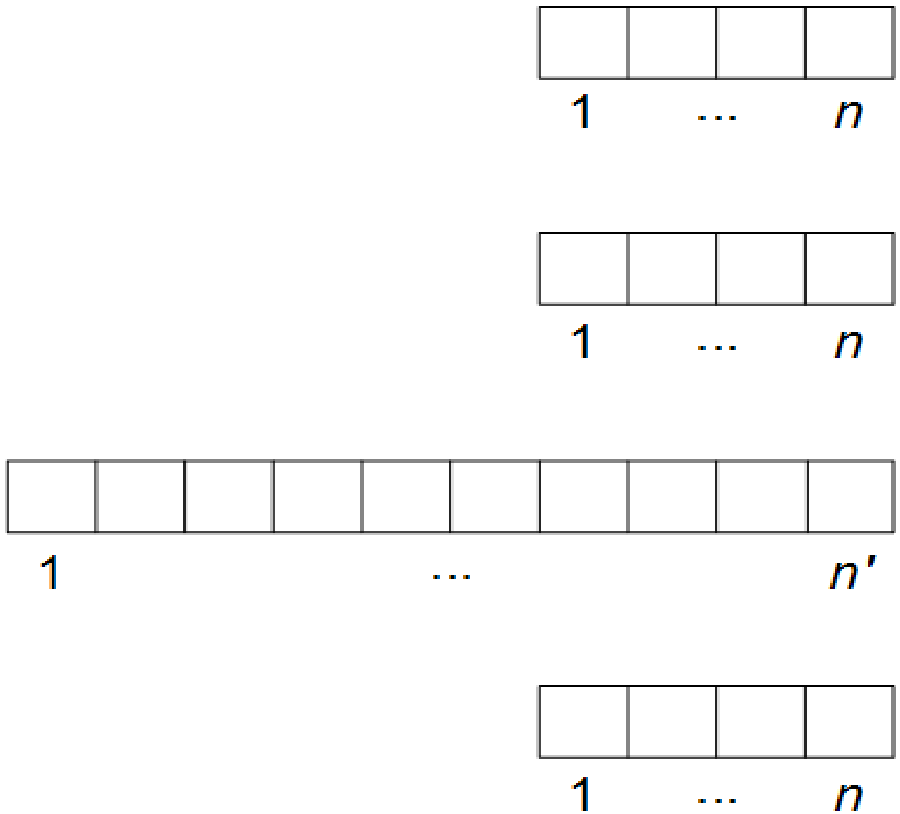
X_i

. . .

X_{i-r}

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda_j X_{i-j} + \mu$$

X_{i+1}



МЕТОД УСІКАННЯ

$$X_{i+1} = \{X_i^2 (\mathrm{mod}\, 2^{3k}) - X_i^2 (\mathrm{mod}\, 2^k)\} 2^{-k};$$

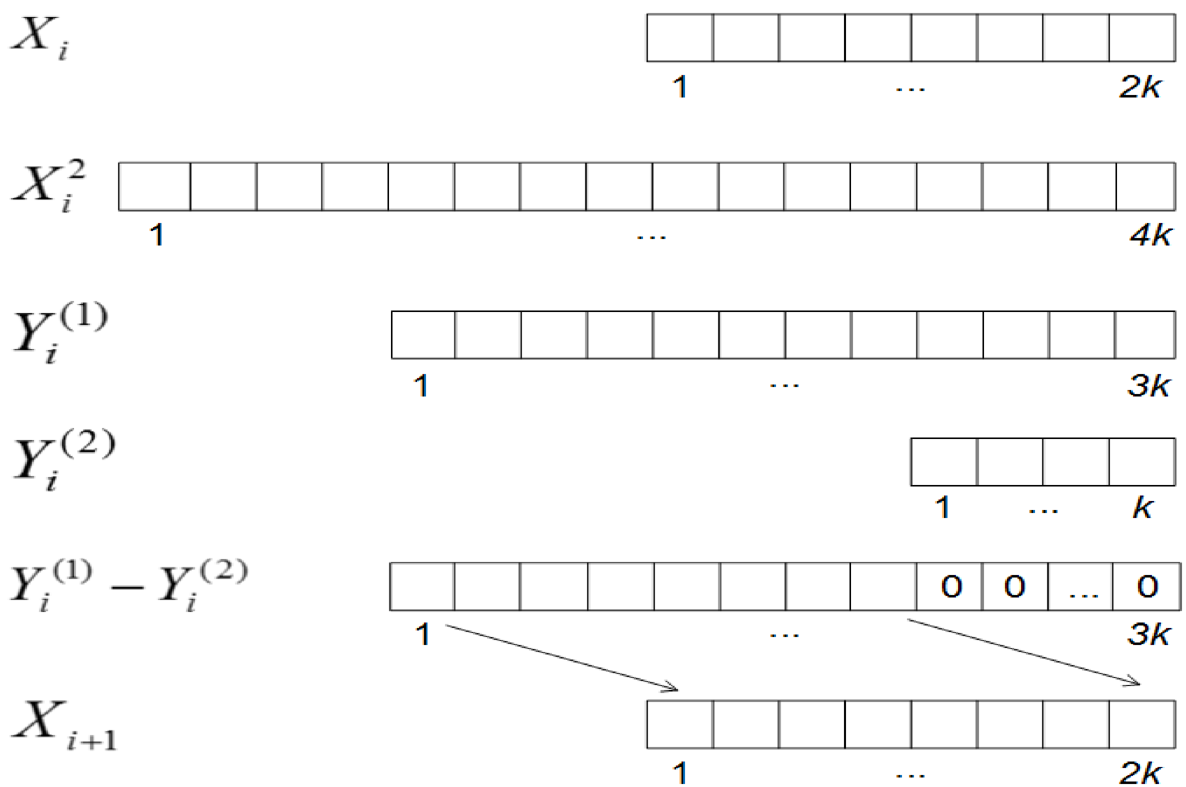
$$X_{i+1} = \{X_i X_{i-1} (\mathrm{mod}\, 2^{3k}) - X_i X_{i-1} (\mathrm{mod}\, 2^k)\} 2^{-k};$$

$$X_{i+1} = [\{X_i^2 (\mathrm{mod}\, 2^{2k})\} C 2^{-2k}] \oplus [X_i^2 2^{-2k}] C (\mathrm{mod}\, 2^{2k}).$$

$2k$ – кількість двійкових розрядів;
$C = const$;
[…] – ціла частина числа;
$\oplus$ – знак порозрядного складання двійкових чисел.

$$x_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{2^{2k} - 1}$$

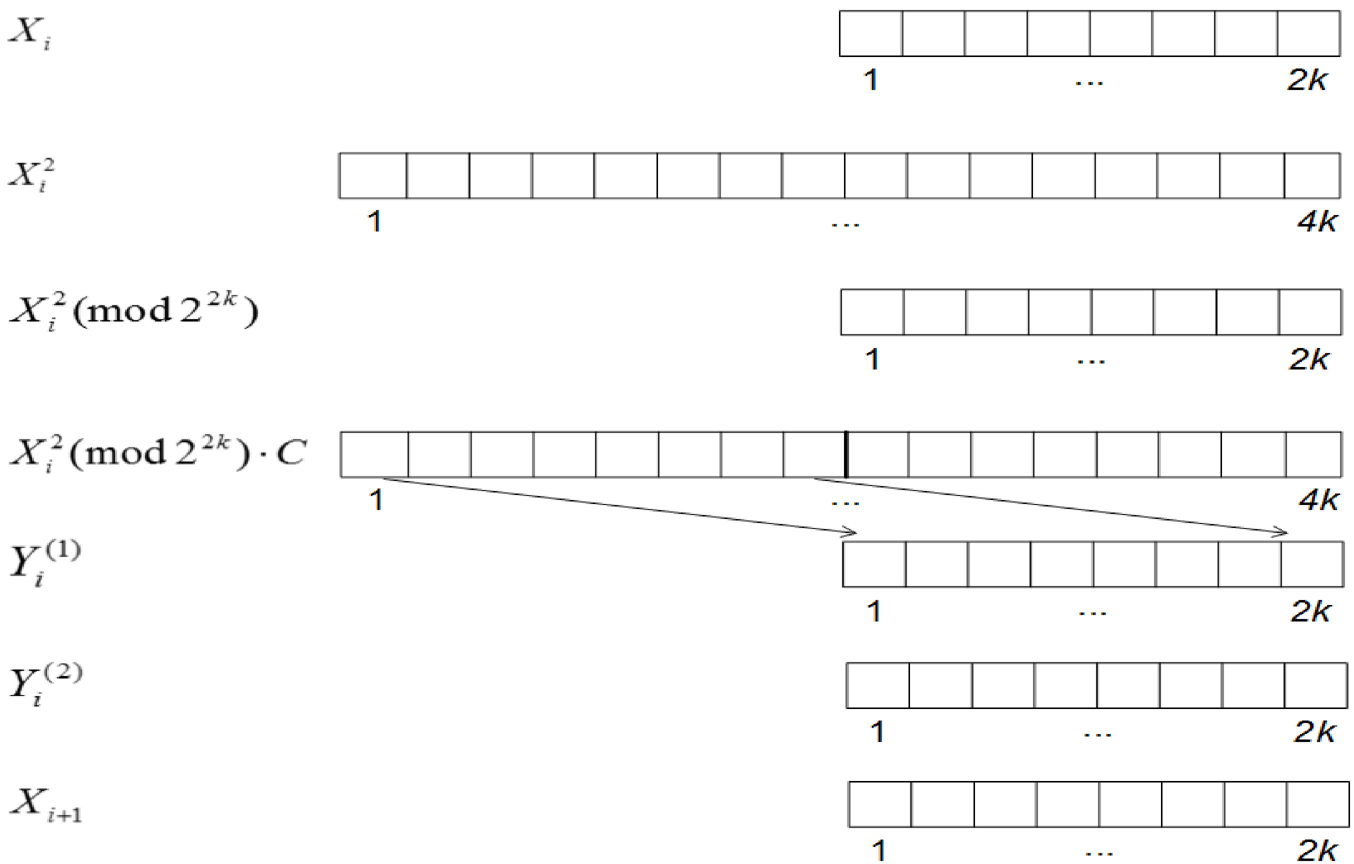
ІЛЮСТРАЦІЯ МЕТОДУ УСІКАННЯ (1)



$$Y_i^{(1)} = X_i^2 (\bmod 2^{3k})$$

$$Y_i^{(2)} = X_i^2 (\bmod 2^{k})$$

ІЛЮСТРАЦІЯ МЕТОДУ УСІКАННЯ (2)



$$Y_i^{(1)} = [\{X_i^2 (\mathrm{mod}\, 2^{2k})\} C 2^{-2k}]$$

$$Y_i^{(2)} = [X_i^2 2^{-2k}] C (\mathrm{mod}\, 2^{2k})$$

ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ
формування послідовностей псевдовипадкових чисел

<u>C++:</u>

```
double result=min+double(rand()) / RAND_MAX * (max - min);
```

<u>C#:</u>

```
double result=min+randomNumber.NextDouble()*(max-min);
```

<u>Java:</u>

```
double result=min+Math.random()*(max-min);
```

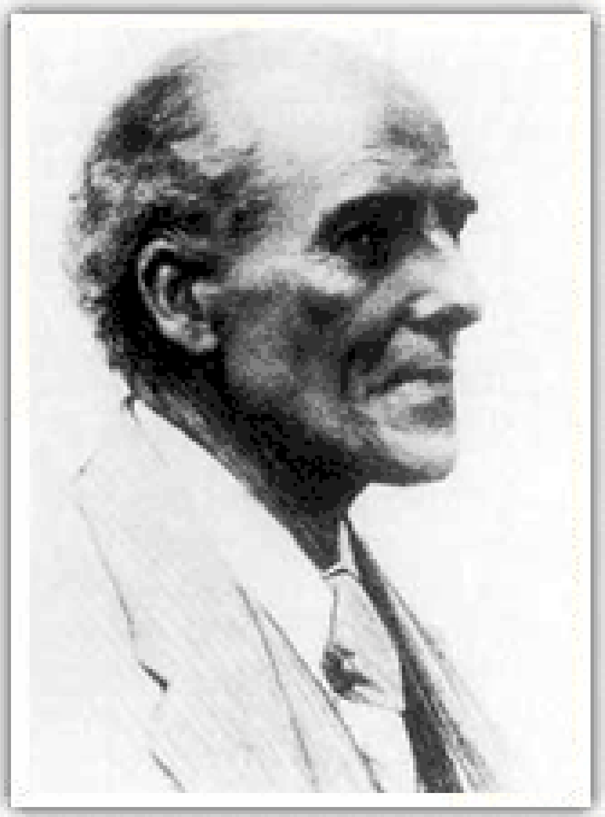
ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ

послідовностей псевдовипадкових чисел, отриманих алгоритмичними методами

- Тест частот – перевірка рівномірності розподілу псевдовипадкових чисел в інтервалі [0, 1].
- Тест пар – перевірка незалежності псевдовипадкових чисел.

Карл Пірсон

(27.03.1857 – 27.04.1936)



- Професор прикладної математики і механіки Лондонського університетського коледжу. Професор геометрії Грэшем-коледжу. Член Королівського Товариства. Почесний доктор наук Лондонського університету. Почесний член Кембріджського Королівського коледжу, Единбурзького Королівського Товариства, Лондонського університетського коледжу.

ТЕСТ ЧАСТОТ (1)

$(x_i;\ i=\overline{1,N})$ – послідовність псевдовипадкових чисел;

m – кількість рівних напіввідкритих інтервалів на відрізку (0, 1).

N_j – емпірічна частота $j=\overline{1,m}$.

Вірогідність попадання числа x_i в j-й інтервал:

$$p_j = \frac{1}{m}\ ;\ j=\overline{1,m}\ .$$

Теоретична частота:

$$N_j^* = p_j N = \frac{N}{m};\quad j=\overline{1,m}\,.$$

ТЕСТ ЧАСТОТ (2)

Критерій Пірсона:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(N_j - N_j^*)^2}{N_j^*} = \frac{m}{N} \sum_{j=1}^{m} \left(N_j - \frac{N}{m} \right)^2 .$$

Гіпотеза приймається, якщо

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, k),$$

k – кількість ступенів свободи розподілу χ^2: $k = m - 1$;

α – рівень значущості.

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,02
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
. . .						
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ТЕСТ ПАР

Способи формування пар псевдовипадкових чисел:

$$(x_1, x_2);\quad (x_3, x_4);\quad (x_5, x_6);\quad \ldots;$$

Кількість пар $= N/2$.

$$(x_1, x_2);\quad (x_2, x_3);\quad (x_3, x_4);\quad \ldots;$$

Кількість пар $= N$.

ТЕСТ ПАР (1 спосіб)

N_{jl} – емпірічна частота попадання пар чисел в клітини квадратної таблиці розмірності $m \times m$; $j = \overline{1,m}$; $l = \overline{1,\, m}$.

Вірогідність попадання пари чисел в (j, l)-у клітину таблиці:

$$p_{jl} = \frac{1}{m^2}; \quad j = \overline{1,m}; \quad l = \overline{1,m}.$$

Теоретична частота попадання пар чисел в клітини таблиці:

$$N^*_{jl} = p_{jl} \times \frac{N}{2} = \frac{1}{m^2} \times \frac{N}{2} = \frac{N}{2m^2}.$$

Критерій Пірсона:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\left(N_{jl} - N^*_{jl}\right)^2}{N^*_{jl}} = \frac{2m^2}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \left(N_{jl} - \frac{N}{2m^2} \right)^2.$$

Кількість ступенів свободи розподілу χ^2:

$$k = m\,(m-1).$$

Гіпотеза приймається, якщо

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, k).$$

ТЕСТ ПАР (2 спосіб)

Теоретична частота попадання пар чисел в клітини таблиці:

$$N_{jl}^* = p_{jl} \times N = \frac{1}{m^2} \times N = \frac{N}{m^2}.$$

Критерій Пірсона:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\left(N_{jl} - N_{jl}^*\right)^2}{N_{jl}^*} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(N_j - N_j^*)^2}{N_j^*} =$$

$$= \frac{m^2}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \left(N_{jl} - \frac{N}{m^2}\right)^2 - \frac{m}{N} \sum_{j=1}^{m} \left(N_j - \frac{N}{m}\right)^2 .$$

Кількість ступенів свободи розподілу χ^2:

$$k = m\,(m-1).$$

Гіпотеза приймається, якщо

$$\chi^2 < \chi_{кр}^2(\alpha, k).$$

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Дано: вірогідність p настання випадкової події A.

Вважатимемо, що подія A сталася, якщо

$$x_i \le p .$$

Доведення:

$$P(x_i \le p) = \int_0^p f(x)\,dx = \int_0^p dx = p .$$

МОДЕЛЮВАННЯ ГРУПИ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Дано: вірогідності $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n$ настання неспільних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_n$, що утворюють повну групу:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Відрізок (0, 1) розбивається на n напіввідкритих інтервалів, довжина яких дорівнює вірогідностям $p_j,\ j = \overline{1, n}$.

Межі j-го відрізку:

$$l_0 = 0; \quad l_j = \sum_{r=1}^{j} p_j; \quad j = \overline{1, n}.$$

Вважатимемо, що сталася подія A_m, якщо $l_{m-1} < x_i \le l_m$.

Доведення:

$$P(l_{m-1} < x_i \le l_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} f(x)\, dx = l_m - l_{m-1} = p_m$$

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ (спосіб 1)

Дано: вірогідності $p(A)$ і $p(B)$ настання залежних випадкових подій A і B; умовна вірогідність $p(B/A)$.

1. Перевіряється справедливість нерівності

$$x_i \le p(A). \qquad (3.1)$$

2. Якщо (3.1) виконується, перевіряється справедливість нерівності

$$x_{i+1} \le p(B/A).$$

3. Якщо (3.1) не виконується, визначається умовна вірогідність $p(B/\overline{A})$, виходячи з формули повної вірогідності

$$p(B) = p(A)p(B/A) + p(\overline{A})p(B/\overline{A}):$$

$$p(B/\overline{A}) = \frac{p(B) - p(A)p(B/A)}{1 - p(A)}.$$

4. Перевіряється справедливість нерівності

$$x_{i+1} \le p(B/\overline{A}).$$

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ (спосіб 2)

Складні події AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ і $\overline{A}\,\overline{B}$ розглядаються як неспільні випадкові події, що становлять повну групу.

Вірогідність їх настання:

$$p(AB) = p(A)\,p(B/A);$$

$$p(A\overline{B}) = p(A)[1 - p(B/A)];$$

$$p(\overline{A}B) = [1 - p(A)]\,p(B/\overline{A});$$

$$p(\overline{A}\,\overline{B}) = [1 - p(A)][1 - p(B/\overline{A})],$$

причому

$$p(AB) + p(A\overline{B}) + p(\overline{A}B) + p(\overline{A}\,\overline{B}) = 1.$$

Застосовується процедура моделювання неспільних подій, що становлять повну групу.

Марков Андрій Андрійович
(1856-1922)

- російський математик,
професор Санкт-Петербурзького університету,
академік Імператорської Санкт-Петербурзької академії наук.

Вніс великий вклад до теорії ймовірностей, математичного аналізу і теорії чисел.

Є першовідкривачем великого класу **стохастичних процесів з дискретним і неперервним часом**, названих його ім'ям.

ПОНЯТТЯ МАРКІВСЬКОГО ЛАНЦЮГА

Марківський випадковий процес: для кожного моменту часу t' ймовірність будь-якого стану системи (об'єкту моделювання) у майбутньому (при $t > t'$) залежить тільки від її стану у теперішньому (при $t = t'$) і не залежить від того, коли і яким чином система прийшла в цей стан.

Марківський випадковий процес з дискретними станами і дискретним часом – дискретний марківський ланцюг (стохастичний автомат, імовірнісний автомат, P-схема, P-модель).

Відмітні особливості дискретних марківських ланцюгів:

- простір станів системи є кінцевою множиною $Z = \{ z_i \mid i = \overline{1,m} \}$;
- переходи системи із стану в стан можливі тільки в строго визначені, заздалегідь фіксовані моменти часу $t_1, t_2, t_3, \ldots$

МОДЕЛЮВАННЯ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ (1)

Дано:

1) вектор вірогідностей початкових станів системи $(p_k(0), k=\overline{1,n})$:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(0) = 1 \ ;$$

2) матриця переходів:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & . & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & . & p_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & . & . & . & p_{nn} \end{bmatrix} ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_{jk} = 1 ; \quad j = \overline{1,n} \ .$$

МОДЕЛЮВАННЯ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ (2)

1. Визначення початкового стану системи.

Розбиття відрізка (0,1) на n напіввідкритих інтервалів:

$$l_0 = 0; \quad l_k = \sum_{r=1}^{k} p_r(0); \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо $l_{k^*-1} < x_i \le l_{k^*}$, вважаємо, що початковим станом системи є $z(0) = z_{k^*}$.

2. Визначення наступних станів системи.

Фіксація номеру рядка матриці переходів: $j^* = k^*$.

Розбиття відрізка (0,1) на n напіввідкритих інтервалів:

$$l_{j^*,0} = 0; \; l_{j^*,k} = \sum_{r=1}^{k} p_{j^*,r}; \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо $l_{j^*,k^*-1} < x_{i+m} \le l_{j^*,k^*}$, вважаємо, що станом системи на m-у етапі моделювання є $z(m) = z_{k^*}$.

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Дано: послідовність випадкових чисел (x_i) – значень випадкової величини ξ, розподіленої з постійною щільністю $f(x)$ в інтервалі [0, 1].

Визначити: послідовність значень (y_j) випадкової величини η, розподіленої з функцією щільності $f(y)$ на відрізку числової осі (a, b).

МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

η – випадкова величина, яка може набувати значень $y_1, y_2, ..., y_n$ з вірогідністями $p_1, p_2, ..., p_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Визначення її значень зводиться до моделювання групи неспільних подій $A_1, A_2, ..., A_n$.

Подія A_j полягає в тому, що випадкова величина η набуває значення y_j; $j = \overline{1,n}$.

МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

- прямого перетворення (зворотній функції);
- кускової апроксимації функції щільності;
- відсіювання (виключення);
- моделювання умов граничних теорем теорії ймовірностей.

МЕТОД ПРЯМОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Теорема: якщо випадкова величина η має щільність розподілу $f(y)$, то розподіл випадкової величини

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f(y)dy$$

є рівномірним в інтервалі числової осі (0,1).

Чергове число y_j обчислюється шляхом розв’язання такого рівняння відносно верхньої межі інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{y_j} f(y)dy = x_i$$

ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}\ ; \quad y \geq 0 .$$

$$\lambda \int_0^{y_j} e^{-\lambda y} dy = x_i\ ;$$

$$\lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right]_0^{y_j} = x_i ;$$

$$1 - e^{-\lambda y_j} = x_i ;$$

$y_j = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - x_i)$ або $y_j = -\dfrac{1}{\lambda} \ln x_i$.

МЕТОД КУСКОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Відрізок (a, b) розбивається на n частин $(a_k,\ a_{k+1}]$:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(y)dy = \frac{1}{n}; \quad k = \overline{1,n} \ .$$

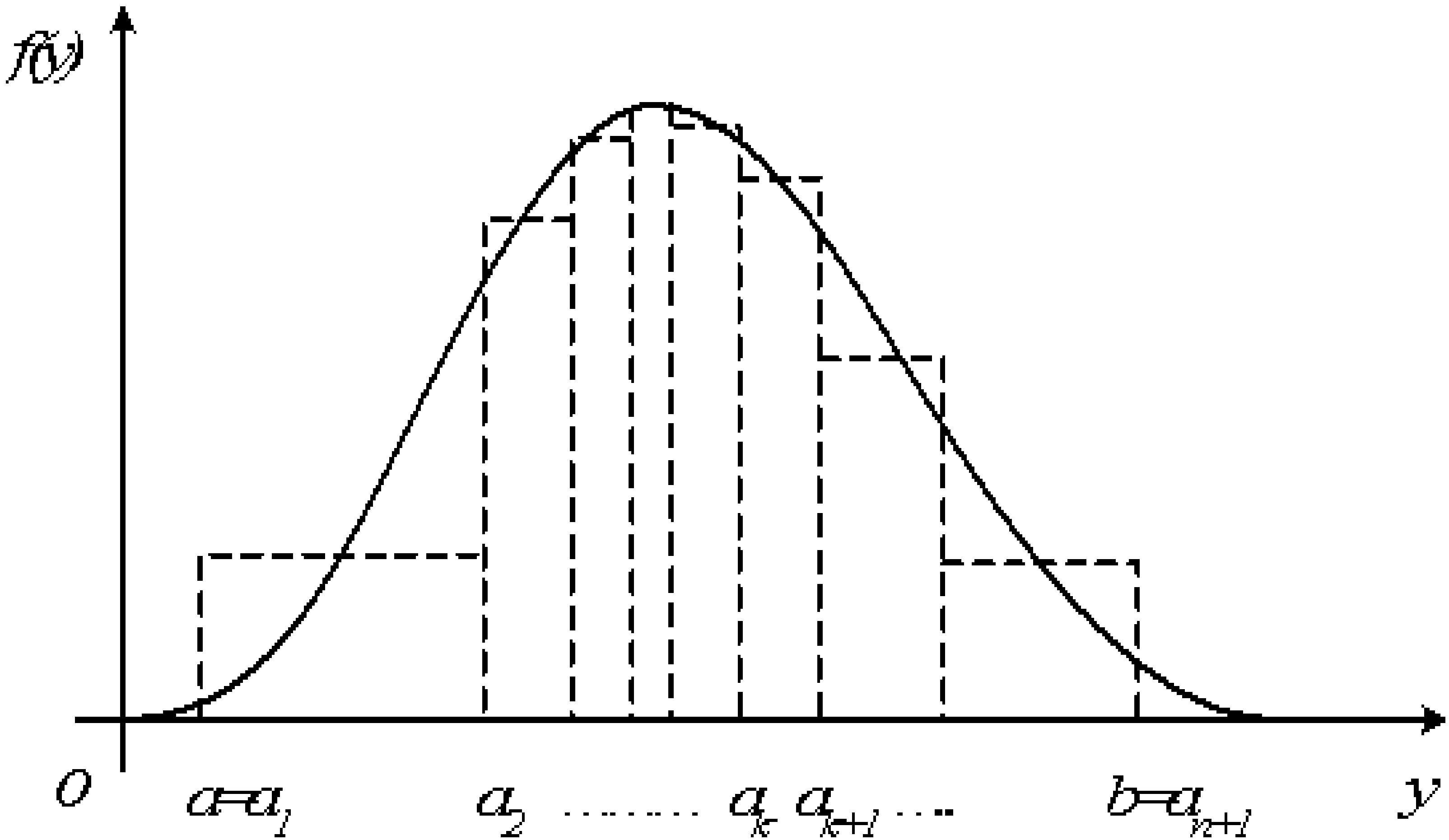
На кожному напіввідкритому інтервалі $(a_k,\ a_{k+1}]$ функція щільності $f(y)$ апроксимується постійною або лінійною функцією $\varphi_k(y)$, $k = \overline{1,n}$.

$$y_j = a_{k_j} + z_j;$$

$$k_j = [n \times x_i]; \quad 0 \le z_j < a_{k_j+1} - a_{k_j};$$

$$\int_0^{z_j} \varphi_{k_j}(y)dy = x_{i+1} \ .$$

КУСКОВО-ПОСТІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ



ОБЧИСЛЕННЯ z_j ПРИ КУСКОВО-ПОСТІЙНІЙ АПРОКСИМАЦІЇ

$$\varphi_k(y) = \varphi_k^* = \frac{1}{a_{k+1} - a_k} = const\,; \quad k = \overline{1,n}\,;$$

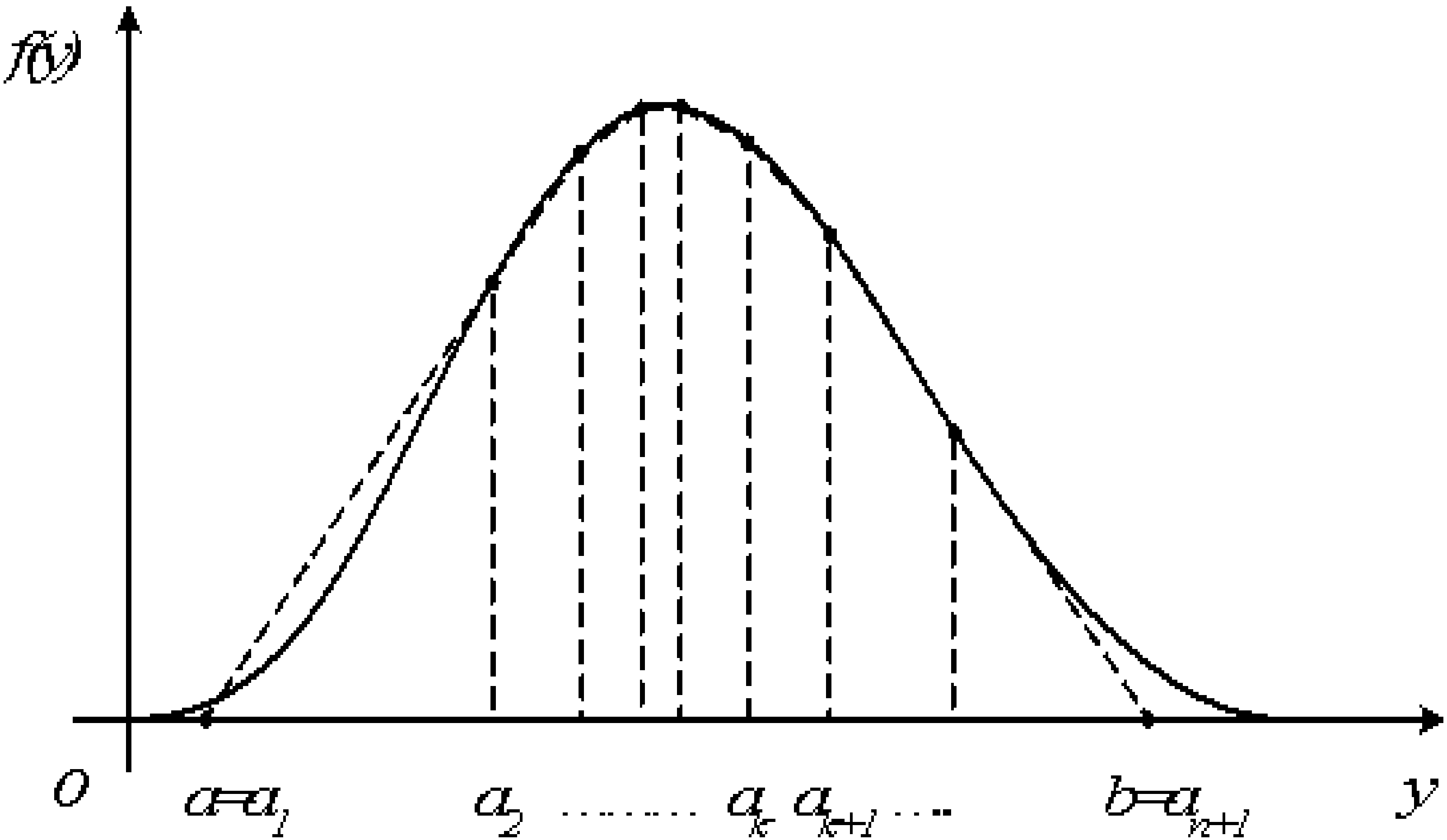
$$\int_0^{z_j} \frac{1}{a_{k+1} - a_k} dy = x_{i+1}\,;$$

$$\left. \frac{y}{a_{k+1} - a_k} \right|_0^{z_j} = x_{i+1}\,; \quad \frac{z_j}{a_{k+1} - a_k} = x_{i+1}\,;$$

$$z_j = (a_{k_j+1} - a_{k_j})x_{i+1}\,.$$

$$y_j = a_{k_j} + (a_{k_j+1} - a_{k_j})x_{i+1}\,.$$

КУСКОВО-ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ



ОБЧИСЛЕННЯ z_j ПРИ КУСКОВО-ЛІНІЙНІЙ АПРОКСИМАЦІЇ

$$\varphi_k(y) = \alpha_k y + \beta_k; \quad k = \overline{1,n} \; ;$$

$$\alpha_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{a_{k+1} - a_k} \; ; \quad \beta_k = \varphi_k^* - \frac{1}{2}(f_{k+1} - f_k) \; , \quad f_k = f(a_k) \; ;$$

$$\int_0^{z_j} (\alpha_k y + \beta_k) dy = x_{i+1} \; ;$$

$$\left. \frac{\alpha_k}{2} y^2 + \beta_k y \right|_0^{z_j} = x_{i+1} \; ; \quad \frac{\alpha_k}{2} z_j^{\;2} + \beta_k z_j - x_{i+1} = 0 \; ;$$

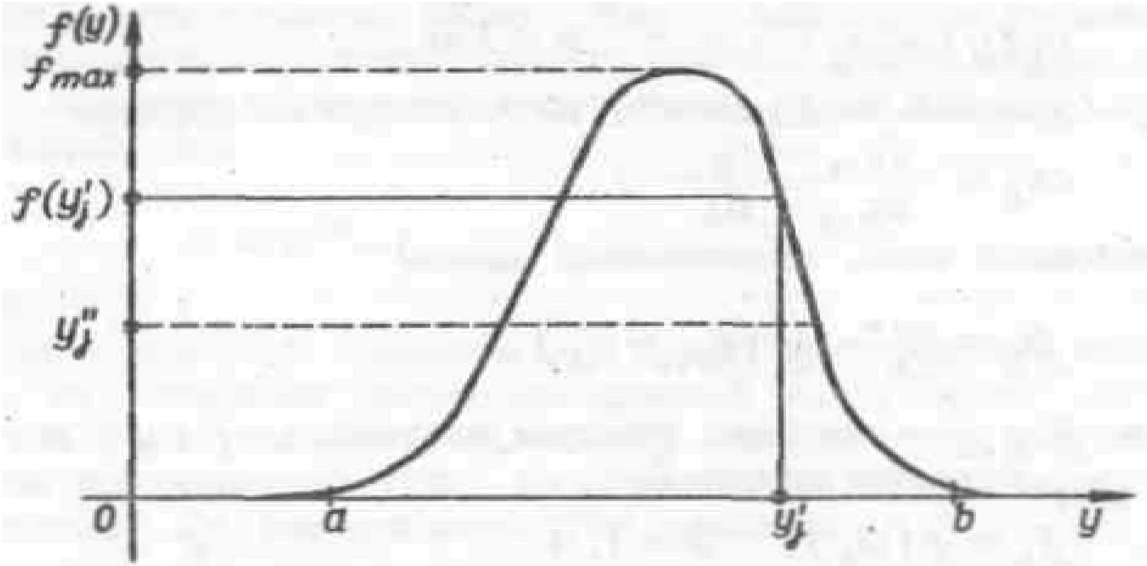
$$z_j = -\frac{\beta_{k_j}}{\alpha_{k_j}} + \frac{1}{\alpha_{k_j}} \sqrt{\beta_{k_j}^2 + 2\alpha_{k_j} x_{i+1}} \; .$$

$$y_j = a_{k_j} - \frac{\beta_{k_j}}{\alpha_{k_j}} + \frac{1}{\alpha_{k_j}} \sqrt{\beta_{k_j}^2 + 2\alpha_{k_j} x_{i+1}} \, .$$

МЕТОД ВІДСІЮВАННЯ (1)

$$y'_j = a + (b - a)x_i \;;$$

$$y''_j = f_{\max} x_{i+1} \;.$$



Якщо

$$f(y'_j) \geq y''_j ,$$

то число y'_j включається до послідовності значень (y_j) випадкової величини η .

МЕТОД ВІДСІЮВАННЯ (2)

<u>Доведення</u>:

$$P(c \le \eta < d) = P[c \le y'_j < d \mid f(y'_j) \ge y''_j],$$

$$c \ge a;\ d \le b.$$

A – випадкова подія: $f(y'_j) \ge y''_j$;

B – випадкова подія: $c \le y'_j < d$.

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A);\ p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)}.$$

$$P[f(y'_j) \ge y''_j] = \int_0^{f(y')} f(y'')dy'' = \int_0^{\frac{1}{b-a}} \frac{1}{f_{\max}} dy'' = \frac{1}{f_{\max}(b-a)};$$

$$P(c \le y'_j < d) = \int_c^d f(y)dy\ .$$

МЕТОД ВІДСІЮВАННЯ (3)

$$P[c \le y'_j < d \mid f(y') \ge y''_j] =$$

$$= \frac{P[(c \le y' < d)\,\&\,(f(y') \ge y'')]}{P[f(y') \ge y'']} =$$

$$= \frac{\int_c^d f(y)dy \times \dfrac{1}{f_{\max}(b-a)}}{\dfrac{1}{f_{\max}(b-a)}} = \int_c^d f(y)dy$$

МОДЕЛЮВАННЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ (1)

Сформувати послідовність випадкових чисел (y_j), що мають нормальний розподіл з математичним очікуванням a і середнім квадратичним відхиленням σ:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2} \right].$$

<u>Центральна гранична теорема</u>: якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають математичне очікування $a(\xi)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(\xi)$, то сума

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

асимптотично нормальна з математичним очікуванням

$$a(\eta) = n \times a(\xi)$$

і середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\mathrm{n}} \times \sigma(\xi).$$

ФОРМУВАННЯ НОРМОВАНОЇ ВЕЛИЧИНИ

Якщо $\xi_i = x_i;\ \ i = \overline{1,n}$, то:

$$\alpha(\eta) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}; \qquad \sigma(\eta) = \sqrt{n} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}.$$

Якщо $\xi_i = 2x_i - 1\ ;\ \ i = \overline{1,n}$, то:

$$a(\xi_i) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0\ ; \qquad \sigma(\xi_i) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;$$

$$\alpha(\eta) = n \times 0 = 0; \qquad \sigma(\eta) = \sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}.$$

Нормована величина:

$$u = \frac{\xi}{\sigma(\xi)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (2x_i - 1)\ ;$$

$$a(u) = 0\ ; \qquad \sigma(u) = 1\ .$$

МОДЕЛЮВАННЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ (2)

$$y_j = \sigma \times u_j + a \;;$$

$$u_j = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \sum_{i=m_j+1}^{m_j+n} (2x_i - 1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \left[2\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_j+n} x_i \right) - n \right] ;$$

$$v'_j = u_j - \frac{1}{20n}(3u_j - u_j^3) \;;$$

$$v''_j = u_j - \frac{41}{13440n^2}(u_j^5 - 10u_j^3 + 15u_j).$$

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ПУАССОНА

Сформувати послідовність випадкових чисел (y_j), що мають закон розподілу Пуассона з математичним очікуванням a.

Теорема Пуассона: якщо p – вірогідність настання випадкової події A при одному випробуванні, то вірогідність настання k подій в n незалежних випробуваннях при $n \to \infty$, $p \to 0$ і $np = a$ асимптотично рівна

$$P_n(k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

Чергове число:

$$y_j = k.$$

Рекомендовано: $a / n \le 0{,}2$.

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ (1)

Сформувати послідовність наборів значень координат випадкового вектору (η, μ, ν), заданого спільною функцією щільності $f(w, y, z)$.

$$f_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, y, z)\, dw\, dy\,;$$

$$f_2(y / z_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(w, y, z_j)}{f_1(z_j)}\, dw\,;$$

$$f_3(w / y_j, z_j) = \frac{f(w, y_j, z_j)}{f_1(z_j) \cdot f_2(y_j / z_j)}\,.$$

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ (2)

Випадковий вектор $z = (z_i \mid i = \overline{1,n})$, заданий кореляційною матрицею

$$K = \left\| k_{ij} \right\|, \quad k_{ij} = k_{ji}; \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,n}$$

з математичними очікуваннями компонентів $a_i; \; i = \overline{1,n}$.

$$z_1 = c_{11}\left(y_1 - a\right) + a_1 \, ;$$

$$z_2 = c_{12}\left(y_1 - a\right) + c_{22}\left(y_2 - a\right) + a_2 \, ;$$

....

$$z_n = c_{1n}\left(y_1 - a\right) + c_{2n}\left(y_2 - a\right) + \ldots + c_{nn}\left(y_n - a\right) + a_n \, .$$

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ (3)

$(y_i;\ i=\overline{1,n})$ – послідовність некорельованих випадкових чисел з математичним очікуванням a і середнім квадратичним відхиленням σ;

c_{ij} – коефіцієнти, послідовно визначувані з рівнянь

$$k_{ij}=\sigma^2\sum_{r=1}^{i}c_{ri}c_{rj}\ ;\quad i=\overline{1,j}\ ;\quad j=\overline{1,n}\ .$$

<u>Приклад</u>:

$$k_{11}=\sigma^2\ c_{11}^2\ ;$$
$$k_{12}=\sigma^2\ c_{11}\ c_{12}\ ;$$
$$k_{22}=\sigma^2\ \left(c_{12}^2+c_{22}^2\right);$$
$$k_{13}=\sigma^2\ c_{11}\ c_{13}\ ;$$
$$k_{23}=\sigma^2\ \left(c_{12}c_{13}+c_{22}c_{23}\right);$$
$$k_{33}=\sigma^2\ \left(c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2\right);$$

....

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ (1)

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ПІДХІД

<u>Дано</u>: $(t_i\,; \quad i=\overline{1,n})$ – послідовність моментів часу;

$m(t)=[\,m(t_i)\,;\; i=\overline{1,n}\,]$ – вектор математичних очикувань випадкової функції $z(t)$ в кожний з цих моментів;

$K=\|k_{ij}\|$ – кореляційна матриця, де k_{ij} характеризує залежність значень випадкової функції $z(t)$ в моменти часу t_i і $t_j\,; \quad i=\overline{1,n}\,;\; j=\overline{1,n}$.

<u>Необхідно</u> визначити значення випадкової функції $z(t)$ в моменти часу $t_i\,; \quad i=\overline{1,n}$.

<u>Розв’язання задачі</u>: моделювання випадкового вектору

$$z(t)=[\,z(t_i)\,;\; i=\overline{1,n}\,]\ .$$

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ (2)

КАНОНІЧНЕ РОЗКЛАДАННЯ

$$z(t_i) = m(t_i) + \sum_{j=1}^{r} v_j \varphi_j(t_i) \ ; \quad i = \overline{1, n};$$

$m(t_i)$ – математичне очікування випадкової функції $z(t)$ у момент часу t_i;

v_j – коефіцієнти розкладання випадкової функції [некорельовані випадкові величини з довільними законами розподілу, $M(v_j) = 0$]; $i = \overline{1, n}$;

$\varphi_j(t)$ – координатні (елементарні детерміновані) функції; $i = \overline{1, n}$.

МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ (1)

$m(t) = const$;

$K(t', t'') = K(t'' - t')$.

$$s(t_1) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \;;$$
$$s(t_2) = c_1 y_2 + c_2 y_3 + \ldots + c_n y_{n+1} \;;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s(t_i) = c_1 y_i + c_2 y_{i+1} + \ldots + c_n y_{n+i-1} \;;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s(t_n) = c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + \ldots + c_n y_{2n-1} \;,$$

y_i – некорельовані випадкові числа з математичним очікуванням $M(y_i) = 0$ і дисперсією σ^2; $i = \overline{1, 2n-1}$;

c_i – детерміновані коефіцієнти.

МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ (2)

Обчислення коефіцієнтів:

$$K(t_i - t_1) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{n-i+1} c_j c_{i+j-1}\,; \quad i = \overline{1,n}\ .$$

<u>Приклад</u>:

$$K\left(t_1 - t_1\right) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{3} c_j^2 = \sigma^2\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right);$$

$$K\left(t_2 - t_1\right) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{2} c_j c_{j+1} = \sigma^2\left(c_1 c_2 + c_2 c_3\right);$$

$$K\left(t_3 - t_1\right) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{1} c_j c_{j+2} = \sigma^2\left(c_1 c_3\right).$$

3. ТЕХНОЛОГІЯ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

ЕТАПИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

- побудова математичної моделі процесу функціонування об'єкту;
- комп’ютерна реалізація моделюючого алгоритму;
- статистична обробка результатів моделювання.

ЗАГАЛЬНА СХЕМА ОБ’ЄКУТУ МОДЕЛЮВАННЯ (СИСТЕМИ)

ФОРМАЛЬНИЙ ОПИС СИСТЕМИ (1)

Час: $t \in T$; $t_0 = \min\{t \in T\}$

Поточний стан системи:

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)) \in Z$$

Початковий стан системи:

$$z_0 = (z_{01}, z_{02}, ..., z_{0n}); \; z_{0j} = z_j(t_0); \; j = \overline{1, n}$$

Вхідний сигнал:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \in X$$

Збурюючі дії:

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_k(t)) \in V$$

Внутрішні (власні) параметри:

$$h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_l(t)) \in H$$

ФОРМАЛЬНИЙ ОПИС СИСТЕМИ (2)

Стан системи в момент часу $t^* \in T$; $t^* > t_0$:

$$z(t^*) = F[\,t, z_0, x(t), h(t), v(t)\,]\,_{t_0}^{t^*}$$

Вихідний сигнал:

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)) \in Y$$

$$y(t^*) = G[\,t, z_0, x(t), h(t), v(t)\,]\,_{t_0}^{t^*}$$

$$y(t) = G[\,t, z(t)\,]\,_{t_0}^{t^*}$$

Формальна модель системи:

$$M = (T, H, X, V, Z, Y, F, G)$$

<u>**ЗАДАЧА ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**</u>:

побудова функцій $z(t)$ та $y(t)$, $t \in T$.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

- постановка задачі моделювання;
- вибір незалежних і залежних змінних, характеристик станів і шуканих характеристик процесу функціонування системи;
- підбір необхідної інформації про систему і зовнішнє середовище, визначення параметрів системи і обурюючих дій, оцінка їх впливу на процес функціонування системи;
- висунення гіпотез про властивості і характеристики системи; прийняття припущень, що дозволяють спростити математичну модель відповідно до вибраного рівня моделювання; апроксимація реальних процесів, що протікають в модельованій системі;
- формалізація функціональних залежностей між змінними, параметрами і характеристиками станів системи; виведення співвідношень для шуканих характеристик модельованого процесу як функцій характеристик станів, змінних і параметрів системи.

КОМП’ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЮЮЧОГО АЛГОРИТМУ

- побудова логічної схеми моделюючого алгоритму;
- програмування моделюючого алгоритму;
- визначення необхідної кількості реалізацій моделюючого алгоритму, що забезпечують необхідну точність і достовірність результатів моделювання;
- проведення робочих розрахунків.

ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЮЮЧИХ АЛГОРИТМІВ

- принцип Δt;
- принцип особливих станів (принцип δz).

ПРИНЦИП Δt

<u>Процес</u>

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)) \ ; \quad t \in T \, .$$

<u>Алгоритм</u>

1. Визначення початкового стану:

$$z_0 = (z_{01}, z_{02}, ..., z_{0n}); \ z_{0j} = z_j(t_0); \ j = \overline{1, n} \, .$$

2. Приріст аргументу часу:

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t = t_0 + k \cdot \Delta t \ ; \ k = 1, 2, 3, ...$$

3. Визначення характеристик наступного стану:

$$z_j(t_{k-1}) \rightarrow z_j(t_{k-1} + \Delta t) = z_j(t_k); \ j = \overline{1, n} \, .$$

ПРИНЦИП δz

Алгоритм

1. Визначення початкового стану:

$$z_0 = (z_{01}, z_{02}, ..., z_{0n}); \; z_{0j} = z_j(t_0); \; j = \overline{1, n}.$$

2. Визначення часу настання чергового особливого стану t_k.

3. Визначення характеристик наступного (особливого) стану:

$$z_j(t_{k-1}) \rightarrow z_j(t_k); \; j = \overline{1, n}.$$

5. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Оцінка вірогідності випадкової події

$$\overline{p} = \frac{m}{N},$$

N – кількість експериментів;
m – кількість випадків настання випадкової події.

Оцінка вірогідності можливих значень випадкової величини (закону її розподілу)

$$\overline{p}_k = \frac{m_k}{N}\ ;\ k = \overline{1,n}\ .$$

m_k – кількість попадань значень випадкової величини в k-й інтервал.

Оцінка середнього значення випадкової величини

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

x_i – значення випадкової величини ξ, яке вона прийняла в i-му експерименті.

Оцінка дисперсії випадкової величини

$$D(\xi) = M[\xi - M(\xi)]^2$$

$$\overline{D} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

$$\overline{D} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - \frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

Оцінка кореляційного моменту двох випадкових величин

$$\overline{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

$$\overline{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$\bar{x}$ і $\bar{y}$ – середні значення випадкових величин ξ і η відповідно.

Оцінка математичного очікування випадкового процесу

$$\overline{Z}(t_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i(t_k); \quad k = \overline{1,r}$$

t_k – фіксований момент часу; $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = \overline{1,r}$;
$Z_i(t_k)$ – значення випадкового процесу у i-й його реалізації для t_k-го моменту часу; $i = \overline{1,N}$.

Оцінка кореляційної функції випадкового процесу

$$\overline{K}(t',t'') = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[Z_i(t') - \overline{Z}(t')][Z_i(t'') - \overline{Z}(t'')]$$

$$\overline{K}(t',t'') = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} Z_i(t') Z_i(t'') - \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} Z_i(t')\sum_{i=1}^{N} Z_i(t'');$$

$$t', t'' \in \{t_k, k = \overline{1,r}\} \; .$$

Оцінка математичного очікування стаціонарного випадкового процесу, що має ергодичну властивість

$$\bar{Z} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)\, dt .$$

$$\bar{Z} \approx \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=1}^{r} Z(t_k)$$

Оцінка кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу, що має ергодичну властивість

$$K(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} Z(t) \cdot Z(t+\tau)\, dt - Z^2 \ ,$$

де $\tau = t' - t''$; $t', t'' \in (0, T)$.

$$\overline{K}(\tau) \approx \frac{\Delta t}{T-\tau} \sum_{k=1}^{r-l} Z(t_k) \cdot Z(t_k + \tau) - \overline{Z}^2 \ ,$$

де $l = \dfrac{\tau}{\Delta t}$

Перевірка статистичних гіпотез

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(N_j - N_j^*)^2}{N_j^*}$$

m – кількість рівних напіввідкритих інтервалів діапазону спостережуваних значень випадкової величини ξ ;

N_j – емпірична частота; $j = \overline{1,m}$;

N_j^* – теоретична частота; $j = \overline{1,m}$;

Кількість ступенів свободи:

$$k = m - r - 1.$$

Рівень значущості:

$$P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)] = \alpha$$

Гіпотеза приймається, якщо

$$\chi^2 \leq \chi^2_{кр}(\alpha, k) \ ,$$

де $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ – критична точка.

Оцінка точності результатів експериментальних досліджень

Точність:

$$| a - \bar{x} | < \varepsilon$$

Достовірність:

$$P(| a - \bar{x} | < \varepsilon) = \alpha$$

$$\varepsilon = t_\alpha \sqrt{D(\bar{x})}$$

Квантіль нормального розподілу:

$$t_\alpha = \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$$

Функція Лапласа:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\Phi(t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$$

РОЗРАХУНОК КІЛЬКОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

1. При визначенні вірогідності p випадкової події A

Кількість випадків настання події A у окремому експерименті – випадкова величина ξ, що набуває значення:

$$z_1 = 1 \text{ з вірогідністю } p;$$

$$z_2 = 0 \text{ з вірогідністю } (1 - p).$$

Математичне очікування і дисперсія випадкової величини:

$$M(\xi) = z_1 p + z_2 (1 - p) = p;$$

$$D(\xi) = [z_1 - M(\xi)]^2 p + [z_2 - M(\xi)]^2 (1 - p) = p(1 - p).$$

ОЦІНКА ВІРОГІДНОСТІ

$$\overline{p} = \frac{m}{N}$$

$$m = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

де ξ_i – кількість випадків настання події A у i-му експерименті; $\xi_i \in \{0, 1\}$.

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

ОЦІНКА ДИСПЕРСІЇ

$$\varepsilon = t_\alpha \sqrt{D(\overline{x})}\,.$$

$$M(\frac{m}{N}) = \frac{1}{N} M(\sum_{i=1}^{N} \xi_i) = \frac{1}{N} N \cdot M(\xi) = M(\xi) = p\,.$$

2-а властивості дисперсії:

$$D(K \cdot X) = K^2 \cdot D(X)$$

$$D(\frac{m}{N}) = D(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i) = \frac{1}{N^2} D(\sum_{i=1}^{N} \xi_i) = \frac{1}{N^2} N \cdot D(\xi) = \frac{p(1-p)}{N}$$

НЕОБХІДНА КІЛЬКІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

$$\varepsilon = t_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

$$N = t_{\alpha}^{2} \frac{p(1-p)}{\varepsilon^{2}}$$

На початковому етапі:

$$\overline{p} = \frac{m_0}{N_0}\ ,\ 50 \le N_0 \le 100$$

КІЛЬКІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ПРИ ВІДНОСНІЙ ТОЧНОСТІ

$$\delta = \frac{\varepsilon}{p}$$

$$N = t_{\alpha}^{2}\,\frac{p(1-p)}{p^{2}\delta^{2}} = t_{\alpha}^{2}\,\frac{1-p}{p\delta^{2}} \approx \frac{t_{\alpha}^{2}}{p\delta^{2}}$$

Рекомендовано:

$$(p \approx 10^{-k}) \Rightarrow (N \approx 10^{k+1})$$

РОЗРАХУНОК КІЛЬКОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

2. При визначенні середнього значення випадкової величини ξ, що має математичне очікування a і дисперсію σ^2

Оцінка математичного очікування:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \, .$$

За центральною граничною теоремою: при великих N величина $\overline{x}$ матиме розподіл, близький до нормального, з математичним очікуванням $M(\overline{x}) = a$ і дисперсією $D(\overline{x}) = \sigma^2 / N$:

$$M(\overline{x}) = \frac{1}{N} N \cdot M(\xi) = a \;;$$

$$\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{N}\sqrt{N} \cdot \sigma(\xi);$$

$$D(\overline{x}) = \sigma^2(\overline{x}) = \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot D(\xi) = \frac{D(\xi)}{N} = \frac{\sigma^2}{N}$$

НЕОБХІДНА КІЛЬКІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Точність оцінки $\bar{x}$ математичного очікування a:

$$\varepsilon = t_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma^{2}}{N}} = t_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Кількість експериментів:

$$N = t_{\alpha}^{2}\,\frac{\sigma^{2}}{\varepsilon^{2}}.$$