Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Факультет кібербезпеки, комп’ютерної та програмної інженерії
Кафедра комп’ютеризованих систем управління

Домашнє завдання
з дисципліни «Системи підтримки прийняття рішень»
на тему «Метод побудови і аналізу множини Еджворта—Парето»

Виконав:
студент ФККПІ
групи СП-425
Клокун В. Д.
Перевірила:
Росінська Г. П.

Київ 2020

Зміст

1. Область і мета застосування

Щоб дослідити метод побудови і аналізу множини Еджворта—Парето, необхідно зрозуміти, в яких областях він застосовується та які задачі вирішує. Основна область застосування методу побудови і аналізу множини Еджворта—Парето — *багатокритеріальна оптимізація* у дослідженні операцій та теорії прийняття рішень. Задачі багатокритеріальної оптимізації зазвичай потребують оптимізувати, тобто мінімізувати або максимізувати, значення декількох цільових характеристик або показників ефективності [1, с. 42]. У такому випадку зазвичай немає єдиного оптимального розв'язку. Натомість, є множина альтернативних і однаково оптимальних розв'язків, але з різними компромісами. Метод побудови і аналізу множини Еджворта—Парето прекрасно описує сам себе: спочатку знаходять множину оптимальних розв'язків, яка називається множиною Еджворта—Парето, а потім кожен елемент цієї множини аналізують; далі на основі аналізу приймають рішення залежно від методу аналізу або побажань особи, що приймає рішення.

Розглянемо приклад задачі багатокритеріальної оптимізації. Припустимо, що особа, яка приймає рішення, хоче купити оптимальну машину. Кожна машина коштує певну суму c, витрачає деяку кількість палива f на 100 km, виділяє p шкідливих викидів у атмосферу, а її зручність можна оцінити значенням k. Як видно, навіть швидко формулюючи задачу, в ній можна виділити цілих 4 критерії ефективності кожного розв'язку. Чим глибше аналізують задачу, тим більше критеріїв можна виділити. Особа, що приймає рішення, має свої вимоги щодо значень кожного критерію: зменшити вартість c, витрати палива f та кількість шкідливих викидів p, при цьому збільшити значення комфорту k.

2. Суть метода

2.1. Математична постановка задачі

Математично задача багатокритеріальної оптимізації формулюється так:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} \;\; \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \\ &\text{так, щоб} \qquad\quad \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned}$$

Це означає, що в ній представлені $k \geqslant 2$ *цільових функцій* f_i, де $i \in \{1, \dots, k\}$, причому $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Кожна цільова функція f_i приймає на вхід *вектор вирішальних змінних* (або просто *вирішальний вектор*) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, а кожен вектор вирішальних змінних $\mathbf{x}$ лежить в непустій *області допустимих розв'язків* $S \subset \mathbb{R}^n$. Кожному розв'язку відповідає *цільовий вектор*, який складається з цільових значень, тобто значень функції $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T$, тобто цільові вектори є образом відображення вирішальних векторів. Крім цього, цільові вектори формують множину розв'язків $Z = \mathbf{f}(S)$, яка в свою чергу є образом відображення області допустимих значень в цільовому просторі [2, с. X].

2.2. Еталонні точки

Щоб мати можливість оцінити якість знайдених розв'язків, зазвичай розглядають такі точки в області значення цільової функції: [3, с. 34]

— ідеальна точка y^I — визначається як вектор $y^I = (y_1^I, \dots, y_p^I)$, кожна з координат якого має оптимальне значення відповідної складової цільової функції:

$$y_k^I = \min_{x \in X} f_k(x) = \min_{y \in Y} y_k.$$

— утопічна точка y^U, яку обчислюють на основі ідеальної:

$$y^U = y^I - \varepsilon U.$$

де $\varepsilon > 0$, а U — одиничний вектор.

— надир y^N. Точка надиру $y^N = (y_1^N, \dots, y_p^N)$ визначається як вектор:

$$y_k^N = \max_{x \in X_E} y_k(x) = \max_{y \in Y_N} y_k, \quad k = 1, \dots, p.$$

Ці точки дозволяють порівняти певний розв'язок та оцінити його цінність. У деяких випадках ці точки можуть бути розв'язками.

2.3. Множина Еджворта—Парето

Оцінити якість розв'язків можна не лише за допомогою еталонних точок, адже можна перевірити, чи є цільовий вектор оптимальним. В багатокритеріальній оптимізації, цільовий вектор вважають оптимальним, якщо неможливо покращити жодну з його компонент, не погіршивши як мінімум одну іншу. Точніше, вирішальний вектор $\mathbf{x}' \in S$ називається *Парето-оптимальним*, якщо не існує такого іншого вирішального вектора $\mathbf{x} \in S$, що $f_i(\mathbf{x}) \leqslant f_i(\mathbf{x}')$ для усіх $i \in 1, \dots, k$ та $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}')$ для як мінімум одного індексу j. Кожна задача може мати декілька Парето-оптимальних векторів, або навіть їх нескінченно велику кількість. Множина усіх Парето-оптимальних вирішальних векторів називається *множиною Еджворта—Парето*, позначимо її як $P(S)$. Відповідно, цільовий вектор вважають оптимальним, якщо відповідний йому вирішальний вектор є Парето-оптимальним. Тоді множину Парето-оптимальних цільових векторів позначимо як $P(Z)$.

2.4. Побудова множини Еджворта—Парето

Щоб побудувати множину Еджворта—Парето, найпоширенішими є два підходи: *наївний* і *метод скаляризації*. Розглянемо їх детальніше.

2.4.1. Наївний алгоритм

Перш за все зазначимо, що так як множина цільових векторів є образом відображення множини можливих розв'язків, то наївний алгоритм можна абсолютно аналогічно застосувати і для множини цільових векторів. У цьому прикладі наївний метод розглянутий на прикладі множини можливих розв'язків.

Також домовимось про позначення відношення «менше або дорівнює» для векторів. Відношення $\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}'$ справедливе тоді і тільки тоді, коли для будь-якого значення $i \in \{1, \dots, k\}$ значення компонент вектора $x_i \leqslant x_i'$, причому $x_i \neq x_i'$.

Отже, нехай множина можливих розв'язків X містить скінченну кількість елементів. Щоб побудувати множину Еджворта—Парето за наївним підходом, необхідно дотримуватись таких кроків:

1. Обрати можливий розв'язок $\mathbf{x} \in S_i$.
2. Порівняти його з усіма іншими можливими розв'язками $\mathbf{x}' \in \{S_i \setminus \mathbf{x}\}$.
3. Якщо для всіх інших можливих розв'язків $\mathbf{x}'$ справджується умова $\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}'$, вилучаємо обраний можливий розв'язок $\mathbf{x}$ і додаємо його у множину Парето–Еджворта $P(S)$.
4. Якщо ж для обраного розв'язку навпаки справджується умова $\mathbf{x}' \leqq \mathbf{x}$, обраний розв'язок $\mathbf{x}$ необхідно видалити з множини S_i і перейти до наступного можливого розв'язку.
5. Якщо жодна з умов не справдилась, не потрібно нічого видаляти, а лише перейти до наступного елемента в множині S_i.

Інакше кажучи, необхідно перевірити кожен можливий розв'язок $\mathbf{x} \in S_i$ на Парето-оптимальність, як описано в підрозділі 2.3.

2.5. Метод скаляризації

Для отримання оптимальних за Парето розв'язків часто використовують методи скаляризації. Оскільки цільова функція задачі багатокритеріальної оптимізації має векторні значення, її перетворюють на функцію зі скалярним значенням. Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до задачі оптимізації з однією скалярною цільовою функцією. Функція скаляризації має задовільняти наступним умовам.

Нехай F — функція скаляризації, що перетворює векторну функцію $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ на скалярну. Якщо F зберігає впорядкованість за Парето $\mathbf{y}$, тобто, якщо для довільних $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^2 \in \mathbf{f}(X)$ виконується:

$$\mathbf{y}^1 \leq \mathbf{y}^2 \implies F(\mathbf{y}^1) < F(\mathbf{y}^2),$$

тоді розв'язок $\mathbf{x}^0$, що мінімізує F на X є розв'язком за Парето.

Якщо F зберігає відношення порядку $<$ в $\mathbf{y}$, тобто, якщо для довільних $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^2 \in \mathbf{f}(X)$ виконується:

$$\mathbf{y}^1 < \mathbf{y}^2 \implies F(\mathbf{y}^1) < F(\mathbf{y}^2),$$

тоді розв'язок $\mathbf{x}^0$, що мінімізує F на X є слабким за Парето. Якщо F неперервна на $\mathbf{y}$, та $\mathbf{x}^0$ єдина точка мінімуму F на X, тоді $\mathbf{x}^0$ є розв'язком за Парето.

2.5.1. Зважена сума

Одним із інструментів скаляризації є зважена сума:

$$F_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = w_1 f_1(\mathbf{x}) + \cdots + w_r f_r(\mathbf{x}).$$

Наведена функція F_1 зберігає впорядкованість за Парето для $w > 0$. Тому розв'язки, що мінімізують F_1 на X для довільних $w > 0$ є оптимальними за Парето. Однак F_1 не зберігає впорядкованість за Парето для $w \geq 0$, а зберігає лише відношення $<$ і тому розв'язки, що мінімізують F_1 на X для $w \geq 0$ є слабкими за Парето.

Недоліком методу зважених сум у випадку неопуклої множини значень цільових функцій є неможливість охопити всі оптимальні за Парето точки з множини Парето-фронту.

У задачах комбінаторної багатокритеріальної оптимізації множина цільових значень не є опуклою, тому метод зважених сум не підходить для скаляризації цільових функцій для цих задач.

2.5.2. Функція скаляризації Чебишева

Також для скаляризації використовують функцію Чебишева:

$$F_\infty(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \max_{1 \leq i \leq r} w_i f_i(\mathbf{x}).$$

Зважена функція скаляризації Чебишева зберігає відношення $<$ і тому мінімум F_∞ є слабким за Парето.

2.5.3. Метод зміни обмежень ε-обмеження

За методом зміни обмежень одну з цільових функцій залишають як цільову, а решту перетворюють на обмеження. Тобто, нехай f_r буде цільовою, а решта $f_1, \dots, f_{r-1}$ як обмеження нерівності:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_r(\mathbf{x}), \\ \text{за умов} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, r-1, \\ & \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Значення $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}$ можуть розглядатись як припустимі рівні для $f_1, \dots, f_{r-1}$.

3. Реалізація метода

Література

1. *Е.С. В.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — 2-е вид. — Наука, 1988. — (Проблемы науки и технического прогресса (пнтп)). — ISBN 5020139009.
2. *Kaisa Miettinen*. Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches / за ред. Jürgen Branke, Kalyanmoy Deb, Roman Słowiński. — 1-е вид. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — (Lecture Notes in Computer Science 5252 : Theoretical Computer Science and General Issues). — ISBN 9783540889076.
3. *Matthias Ehrgott*. Multicriteria Optimization. — 2-е вид. — Springer, 2005. — ISBN 9783540213987.