

Лабораторна робота №1  
«ГРАФІЧНИЙ МЕТОД У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ»

**Освоєння прикладної системи MathCad2000**

**1.1 Мета роботи**

Вивчення основ програмування та побудови графіків у системі MathCAD.

**1.2. Завдання роботи**

Освоїти прийоми роботи та побудови графіків у системі MathCAD.

**1.3. Зміст роботи**

1.3.1. Запустити додаток MathCAD.

1.3.2. Ознайомитися з областями екрана, освоїти роботу з панелями інструментів. По черзі включити кілька пунктів панелі “Математика”, ознайомитися із принципом їх розташування й виклику їхніх опцій.

1.3.3. Ознайомитися з основними прийомами редагування документа.

1.3.4. Зберегти результати у файлі з введенням необхідних коментарів.

1.3.5. Запустити додаток MathCAD.

1.3.6. Побудувати графік функції, оформивши його відповідно до вказівок викладача.

1.3.7. Розв’язати графічним методом задачу лінійного програмування, оформивши його відповідно до вказівок викладача.

1.3.8. Нанести лінії рівня на графік, нормальний вектор, означити область допустимих розв’язків.

1.3.9. Зберегти результати у файлі із введенням необхідних коментарів й оформити звіт.

**1.4. Вимоги до звіту**

Звіт повинен містити:

– назву роботи, постановку завдання дослідження, математичну модель, результати обчислень, а також відомості про послідовності її виконання (Додаток А);

– побудувати область допустимих рішень задачі лінійного програмування, лінії рівня цільової функції, вектор-градієнт;

– знайти за допомогою графічного методу максимальне та мінімальне значення цільової функції;

– відповіді на контрольні питання за вказівкою викладача.

**1.5.1 Загальні положення**

Широку і заслужену популярність ще в середині 80-х років набули інтегровані системи для автоматизації математичних розрахунків класу MathCAD.


Пакет MathCAD завантажується або через кнопку **Пуск**, пункти **Програми** і **MathCAD Professional 2000**, або можна двічі клацнути на ярлику  на робочому столі Windows. З'являється вікно системи (рис. 1.1).



Рис. 1.1

Відразу після запуску система готова до створення документа з необхідними користувачеві обчисленнями. Перша ж кнопка панелі інструментів (із зображенням чистого аркуша паперу) **Новий** дозволяє почати підготовку нового документа. Відповідне йому вікно редагування одержує назву Безімені: N, де N – порядковий номер документа, що починається із цифри 1. Спочатку вікно редагування очищене.

Користувальницький інтерфейс системи створений так, що користувач, що має елементарні навички роботи з Windows-додатками, може відразу почати роботу з MathCAD. Інтерфейс системи зовні дуже нагадує інтерфейс широко відомих текстових процесорів Word під Windows 95/98/2000.

Другий рядок вікна системи — головне меню. Деякі його пункти будуть описані надалі, поки ж відзначимо, що робота з документами MathCAD звичайно не вимагає обов'язкового використання можливостей головного меню, тому що основні з них дублюються кнопками швидкого керування. Панелі (рядка) з ними перебувають під рядком головного меню. Для зручності можна вивести панель математичних символів й операторів (*Математика*). Вона служить для заготівель – шаблонів математичних знаків (цифр, знаків арифметичних операцій, матриць, знаків інтегралів, похідних і т.д.) (рис. 1.2).

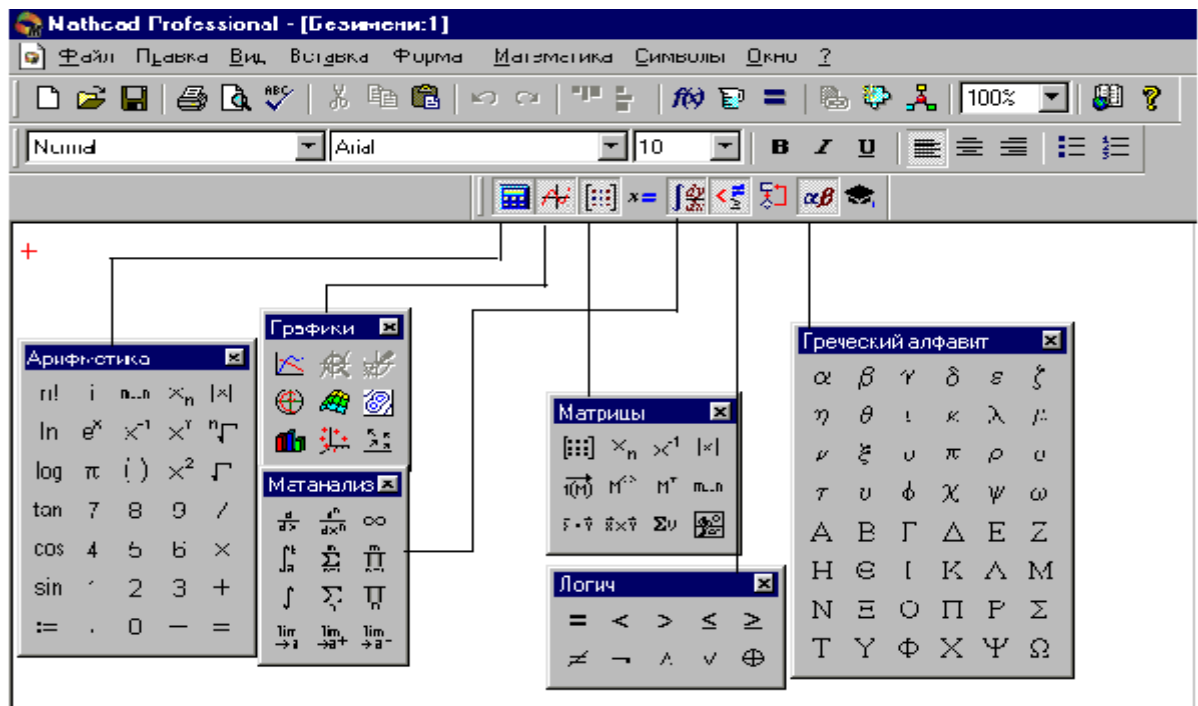


Рис. 1.2

Третій рядок вікна системи займає панель інструментів (рис. 1.3), що містить кілька груп кнопок управління піктограмами, кожна з яких дублює одну з найважливіших операцій головного меню.



Рис. 1.3

### 1.5.2. Кнопки розміщення блоків

Документи складаються з різних блоків: текстових, формульних, графічних і т.д. Блоки проглядаються системою, інтерпретуються й виконуються. Перегляд іде зліва направо та зверху вниз.

### 1.5.3. Кнопки операцій з виразами

Для роботи з виразами служать піктограми:

- вставка функції зі списку, що з'являється в діалоговому вікні;
- вставка одиниць виміру;
- обчислення виділеного виразу.

MathCAD має безліч убудованих функцій, від елементарних до складних статистичних і спеціальних математичних.

Четвертий рядок верхньої частини екрана містить типові засоби керування шрифтами: перемикачі типу символів, набору гарнітур і розмірів шрифтів, три піктограми типу шрифтів (напівжирний, похилий або курсивний, і підкреслений),

а також три піктограми розташування букв у рядку (поруч, надрядкове і підрядкове) (рис. 1.4).



Рис. 1.4: 1 – перемикач вибору стилів; 2 – перемикач вибору набору символів; 3 – перемикач вибору розмірів символів; 4 – установка жирних символів; 5 – установка похилих символів; 6 – установка підкреслених символів; 7 – установка лівостороннього вирівнювання; 8 – установка вирівнювання по центру; 9 – установка правобічного вирівнювання

У п'ятому рядку розміщена панель математичних символів й операторів (рис. 1.5).

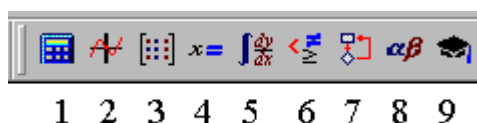


Рис. 1.5: 1 – арифметичні інструменти; 2 – інструменти графіків; 3 – векторні й матричні операції; 4 – інструменти деяких знаків; 5 – оператори математичного аналізу; 6 – панель логіки; 7 – інструменти програмування; 8 – символи грецького алфавіту; 9 – символічні оператори

#### 1.5.4. Редагування документа

Це зміна його виду й параметрів. Система має потужний редактор документів. *Документом* називається повний математичний опис алгоритмів рішення завдань. Документ, у свою чергу, складається із блоків, тобто окремих частин. *Блоки* можуть бути трьох видів – текстові, обчислювальні й графічні. Кожен блок займає на екрані деякий простір, обмежений прямокутною областю.

*Текстові блоки* відіграють роль не виконуваних коментарів. Вони слугують лише для підвищення наочності документа. *Обчислювальні* блоки складаються з математичних виразів, що є, наприклад формулами, рівняннями, рівностями, нерівностями і т.д.

*Графічні блоки* також виконують і слугують для висновку результатів обчислень у графічному виді.

Для введення тексту досить ввести знак “(лапки). Поточне положення курсору виявиться в обрамленні рамки. У цю рамку (блок) можна вводити текст. У міру введення тексту ця рамка автоматично збільшується.

Текстова область може мати довільні розміри й розташовуватися в будь-якому місці робочого документа. При цьому потрібно встановити той шрифт, що необхідний для введення тексту. Цей шрифт буде діяти тільки для текстових областей. Для збереження єдиного стилю всього документа можна встановити той же стиль для змінних (**Variables**) і для постійних (**Constants**) у перемикачі вибору стилів.

Необхідно відзначити, що курсор MathCAD приймає *три різні* форми: візира – знак «плюс» червоного кольору; маркера введення тексту – вертикальна червона риска; маркера введення математичних виразів – куточок («ключка») синього кольору, розташування якого змінюється при натисканні на клавішу **Пробіл**.

У MathCAD можлива вставка в текстову область математичних формул. Для цього потрібно виконати операцію **Вставка/Математична область**. Ця операція доступна тільки тоді, коли текстовий маркер установлений у потрібне місце текстової області. Виконання операції **Вставка/Математична область** призведе до появи в текстовій області шаблону у вигляді маленького чорного квадрата. У ньому можна задавати формули, використовуючи також складальні панелі з математичними символами.

### 1.5.5. Перенесення, копіювання, вставка й видалення фрагментів

Пункт меню **Виправлення/Вирізати** або натискання комбінації клавіш **Ctrl+X** переносять (вирізують) виділений об'єкт документа в буфер обміну даних. Виділити об'єкт можна суцільним або пунктирним прямокутником. Для виділення суцільним прямокутником необхідно ввести в об'єкт курсор і двічі клацнути лівою кнопкою миші. Для пересилання виділеного об'єкта в буфер обміну можна використати й натискання клавіші **F3**.

Об'єкт або групу об'єктів можна виділити й пунктирним прямокутником. Підведіть курсор до об'єкта, клацніть лівою кнопкою миші та, не відпускаючи, переміщайте мишу по діагоналі. На екрані з'явиться прямокутник з пунктирних ліній, розміри якого задаються переміщенням миші. Як тільки в цей прямокутник потрапить хоча б частина якого-небудь об'єкта, цей об'єкт буде обведений прямокутником з пунктирних ліній.

Коли ліва клавіша миші буде відпущена, основний прямокутник зникне, але всі виділені об'єкти залишаться. Так можна виділити відразу кілька об'єктів.

Для виділення одиночних об'єктів доцільно використати мишу при натиснутій та утримуваній клавіші **Ctrl** або **Shift**. Для перенесення досить утримувати курсором миші край виділеного будь-якого блока й домогтися, щоб курсор перетворився в зображення долоні. Це буде означати можливість переміщення блоків.

При виділенні мишею текстових написів можливо виділити і який завгодно фрагмент тексту, аж до одиночного символу, а у формулах – будь-яку змінну. Однак у математичних виразах не можливо виділяти окремі символи в іменах функцій.

Можна також перетягувати об'єкти з одного документа в інший.

Пункт **Виправлення/Виділити все** або натискання комбінації клавіш **Ctrl+A** виділяє всі об'єкти пунктирними прямокутниками. Це дозволяє не тільки спостерігати взаємне розташування блоків, але і чітко бачити ступінь їх сполучення. Щоб цього уникнути, клацніть по пункту **Формат** головного меню, а потім у падаючому меню – по пункту **Відокремити області**.

При перенесенні об'єктів або при їх редагуванні можливе часткове й навіть повне накладення блоків одних об'єктів на інші. У цьому випадку може зникнути частина зображення деяких об'єктів. Виділення всіх об'єктів корисне для контролю такої ситуації.

Редагування різко прискорюється й спрощується при використанні блокових команд: **F2** – поміщає копію блока в спеціальний буфер, тобто місце в пам'яті, що зберігає дані про блок (сам блок зберігається); **F3** – стирає блок і поміщає в буфер його копію; **F4** – поміщає копію блока з буфера на місце документа, зазначене поточним положенням курсору, якщо це місце не зайняте іншим блоком; **Ctrl+F9** – вводить порожній рядок між блоками в місці, зазначеному положенням курсору; **Ctrl+F10** – знищує порожній рядок між блоками в місці, зазначеному положенням курсору.

### 1.5.6. Основні прийоми роботи

Імена змінних і функцій користувача в MathCad можуть мати довільну довжину й складатися з великих та маленьких букв, цифр від 0 до 9, символу нескінченності, грецьких букв, символів підкреслення й відсотків, нижніх індексів.

#### Приклад

Для задання змінної  $x=1$  та обчислення значення функції  $\sin(x)$  можна скористатися введенням із клавіатури.

| Клавіша, що натискається | Зображення     | Коментар                           |
|--------------------------|----------------|------------------------------------|
| x                        | x              | Введення імені змінної             |
| :                        | x :=           | Введення символу присвоювання :=   |
| 1                        | x :=1          | Введення числової константи 1      |
| Enter                    |                | Фіксація введення, стрибок курсору |
| Sin                      | sin            | Введення імені функції sin         |
| (                        | sin(           | Введення лівої дужки (             |
| x                        | sin(x          | Введення імені змінної x           |
| )                        | sin(x)         | Введення правої дужки )            |
| =                        | sin(x) =       | Введення знака висновку =          |
| Enter                    | sin(x) = 0.841 | Обчислення $\sin(x) = \sin(1)$     |

Навіть на цьому простому прикладі видно деякі особливості вхідної мови спілкування із системою. Так, символ присвоювання **:=** відмінний від звичайно використовуваного в математиці знака рівності **=**. Ця обставина пов'язана з тим, що знак рівності інтерпретується в математичних виразах по контексту. Наприклад,  $x=b$  означає або присвоєння змінній  $x$  значення раніше обчисленої змінної  $b$ , або просто факт логічної рівності значення  $x$  значенню  $b$ .

Така подвійність неприпустима в машинних програмах. Тому в системах MathCAD довгий час знак  $=$  використовується тільки як знак висновку результатів обчислень, а для присвоювання змінним значень застосовується знак  $:=$ . Нарешті, для позначення відносини величин  $x$  та  $b$  як рівності використовується жирний знак рівності.

У MathCad можна сформулювати змінні, що пробігають заданий діапазон дискретних значень із заданим кроком для багаторазових обчислень функцій і виразів, а також для спрощення побудови відповідних графіків. Ці змінні записуються в такому вигляді:

$$N:=N1,...,NN \quad \text{або} \quad N:=N1,N2,...,NN,$$

де  $N$  – ім'я змінної;  $N1$  – початкове значення діапазону значень;  $N2$  – друге значення змінної;  $NN$  – останнє значення змінної, при цьому в першому випадку крок зміни змінної буде дорівнювати 1, а в другому випадку –  $(N1-N2)$ .

### 1.5.7. Побудова графіків

Для створення графіків у системі MathCAD є програмний графічний процесор. Процесор дозволяє будувати самі різні графіки, наприклад, у декартовій та полярній системах координат, тривимірні поверхні, графіки рівнів і т.д.

Для побудови графіків використовується, як ми вже відзначали, шаблони. Більшість параметрів графічного процесора, необхідних для побудови графіків, за замовчуванням задається автоматично. Тому для початкової побудови графіка того або іншого виду досить задати тип графіка. На панелі “Графіка” утримується список із семи основних типів графіків. Вони дозволяють виконати наступні дії:

- декартовий графік [**@**] – створити шаблон двовимірного графіка;
- полярний графік [**Ctrl+ 7**] – створити шаблон графіка в полярній системі координат;
- графік поверхні [**Ctrl+ 2**] – створити шаблон для побудови тривимірного графіка;
- карта ліній рівня [**Ctrl+ 5**] – створити шаблон для контурного графіка тривимірної поверхні;
- 3D точковий графік – створити шаблон для графіка у вигляді точок у тривимірному просторі;
- 3D стовпчикова гістограма – створити шаблон для зображення у вигляді сукупності стовпчиків у тривимірному просторі;
- векторне поле – створити шаблон для графіка векторного поля на площині.

Для висновку шаблону двовимірної графіки у декартовій системі координат слугує кнопка **декартовий графік** на панелі “Графіка”. Вона виводить у поточне положення курсору шаблон графіків у декартових координатах. Незаповнений шаблон графіка – це великий порожній прямокутник із шаблонами даних у вигляді темних маленьких прямокутників, розташованих біля осей абсцис і ординат майбутнього графіка. У середні шаблони даних треба помістити ім'я

змінної в осі абсцис і задати формули для функцій в осі ординат. Якщо будуються графіки декількох функцій в одному шаблоні, то для їхнього поділу варто використати коми. Щоб переміщати по шаблонах мітку їхнього вибору й виділення, варто використати клавіші переміщення курсору. Можна вибрати шаблон даних і прямо за допомогою миші, вказавши потрібний шаблон її курсором і нажавши ліву клавішу миші.

Крайні шаблони даних служать для вказання граничних значень абсцис та ординат, тобто вони задають масштаби графіка. Якщо залишити ці шаблони незаповненими, то масштаби по осях графіка будуть установлюватися автоматично. Недолік тут у тому, що масштаби, швидше за все, виявляться не цілком зручними (наприклад, будуть надані неокругленими десятковими цифрами) для подання повністю усього графіка в максимальному розмірі. Рекомендується завжди спочатку використати автоматичне масштабування й лише потім змінювати масштаби на більш підходящі.

Приклад побудови графіків функцій  $f_1(x) = \sin x$ ;  $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$  на інтервалі  $[-10;10]$ , надано на рисунку 1.6.

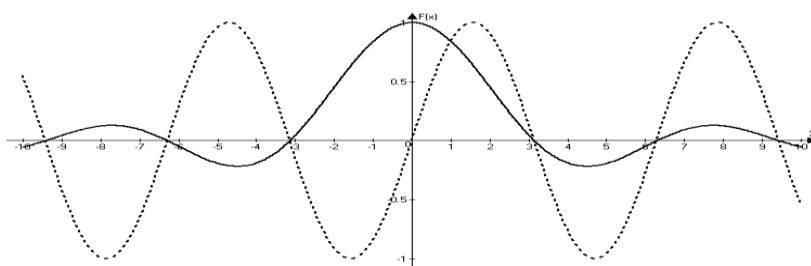


Рис. 1.6

Щоб відбулася побудова графіка в автоматичному режимі обчислень, досить вивести курсор за межі графічного об'єкта. У ручному режимі обчислень для цього потрібно ще натиснути клавішу **F9**.

Параметри зображення (колір і товщина ліній, координатна сітка, розмітка осей, напису на графіках та ін.) найпростіше змінити, клацнувши двічі по полю графіка та установивши настроювання у відповідних вікнах діалогу (рис. 1.7).

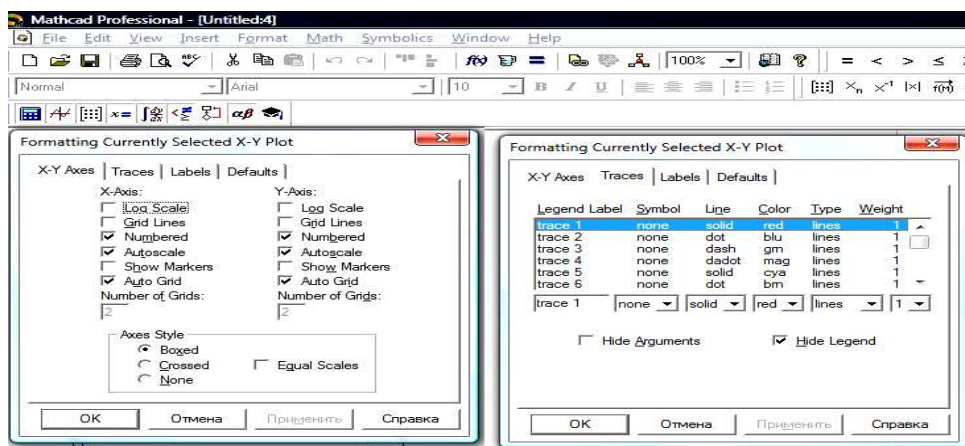


Рис. 1.7



### Приклад

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

$$f = 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування:

Перепишемо нерівності у вигляді рівностей:

$$3x_1 + 2x_2 = 18;$$

$$-x_1 + x_2 = 0.$$

А потім з кожного виразимо  $x_2$  через  $x_1$ , та позначимо ці прямі відповідно (1) та (2):

$$x_2 = \frac{18 - 3x_1}{2}; \quad (1)$$

$$x_2 = x_1. \quad (2)$$

Будуємо ці прямі та враховуємо умови невід'ємності змінних (рис. 1.8).

Визначаємо область допустимих розв'язувань –  $OAB$ , використовуючи обмеження задачі лінійного програмування (рис. 1.9). Наносимо нульову лінію рівня

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$

та нормальний вектор, який має координати  $\bar{N}(3, -4)$ . Таким чином рівняння нормалі має вигляд  $x_2 = \frac{3}{4}x_1$  (рис. 1.10).

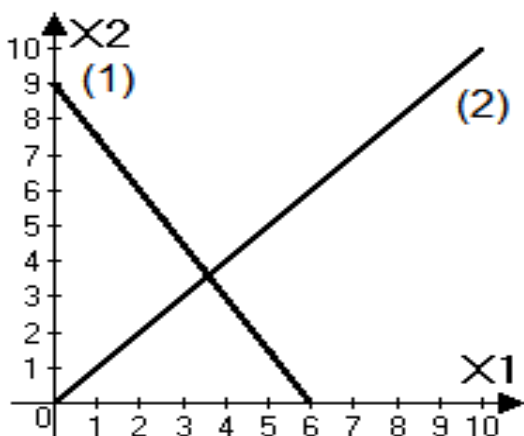


Рис. 1.8

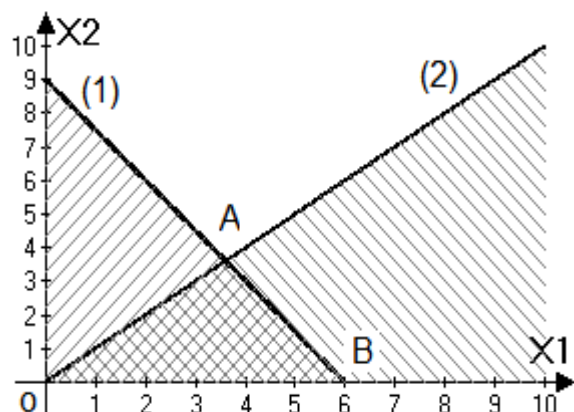


Рис. 1.9

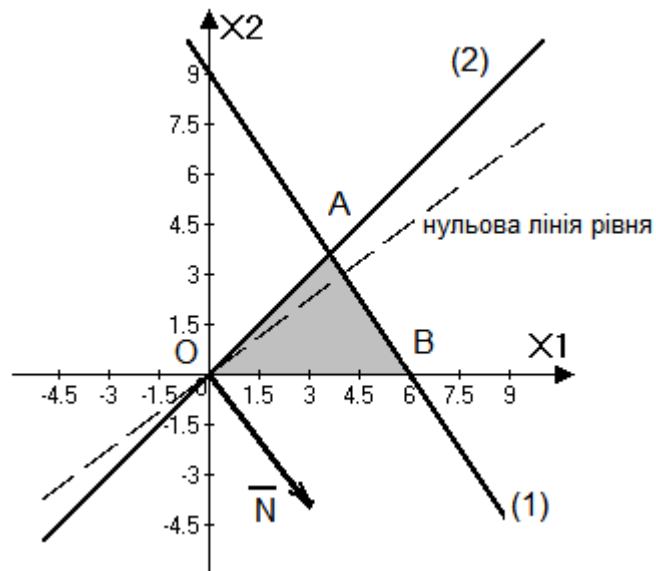


Рис. 1.10

Координати вершин багатокутника розв'язків:  $A\left(\frac{18}{5}, \frac{18}{5}\right)$ ,  $B(6,0)$ ,  $O(0,0)$ . Так як функція мети зростає у напрямку градієнта, а убыває – антиградієнта, то у точках  $O$  та  $B$  – відповідно мінімум та максимум цієї функції.

Найбільше значення цільової функції  $f_{\max} = f(B) = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 0 = 18$ .

Найменше значення цільової функції  $f_{\min} = f(O) = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$ .

Для побудови тривимірної поверхні  $f(x,y)$  служить операція **Surface Plot**, попередньо надана матрицею  $M$  ординат  $f(x,y)$ . При цьому виводиться шаблон графіка, лівий верхній кут якого міститься в місці розташування курсору. Шаблон, у свою чергу, містить єдиний шаблон даних – темний прямокутник у лівого нижнього кута основного шаблону. У нього потрібно занести ім'я матриці зі значеннями ординат 3D-поверхні. Зрозуміло, що перш ніж будувати графік 3D-поверхні, потрібно її визначити математично.

Наочність подання тривимірних поверхонь залежить від безлічі факторів: масштабу побудов, кутів повороту фігури щодо осей, застосування алгоритму видалення невидимих ліній або відмови від нього, використання функціонального зафарбування й т.д. Для зміни цих параметрів варто використати операцію установки формату графіка.

При побудові тривимірних поверхонь й об'ємних фігур можна використати параметричне завдання функцій, що їх описують. Фігури задаються значеннями координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  всіх точок фігури. При цьому в шаблоні 3D-графіка вказуються три матриці, що зберігають масиви цих координат, –  $X$ ,  $Y$  й  $Z$ .

Наведемо приклад побудови такої поверхні.

Можна змінювати задані за замовчуванням параметри графіків. Для цього необхідно виділити графік й, установивши в його області курсор миші, виконати подвійне клацання лівою кнопкою миші. З'явиться діалогове вікно (рис. 1.11) **3-D Plot Format** (Форматування тривимірних графіків).

$$f(x, y) := -\sin(x^2 + y^2) \quad x := 0..20 \quad y := 0..20$$

$$M_{x,y} := f\left[\frac{(x-10)}{5}, \frac{(y-10)}{5}\right]$$

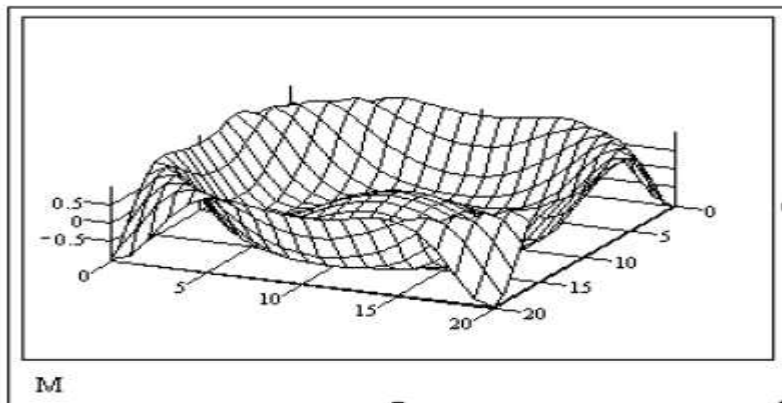


Рис. 1.11

Діалогове вікно **3-D Plot Format** містить дев'ять закладок і безліч прапорців для вибору режиму побудови графіка. Обмежимося розглядом однієї вкладки, наданої на рисунку 1.12 – **Загальне**. Перший комплект чисел у розділі **Вид** показує кути, під якими спостерігається побудований графік поверхні. Далі в розділі **Стиль осі** є ряд перемикачів і прапорець для вибору стилю зображення розмірів графіка (рис.1.12):

- периметр – виводить графік з розмірами по периметрі;
- кут – виводить графік з розмірами по осях;
- немає – виводить графік без розмірів по периметрі й по осях;
- рівні шкали – установка по осях рівних масштабів.

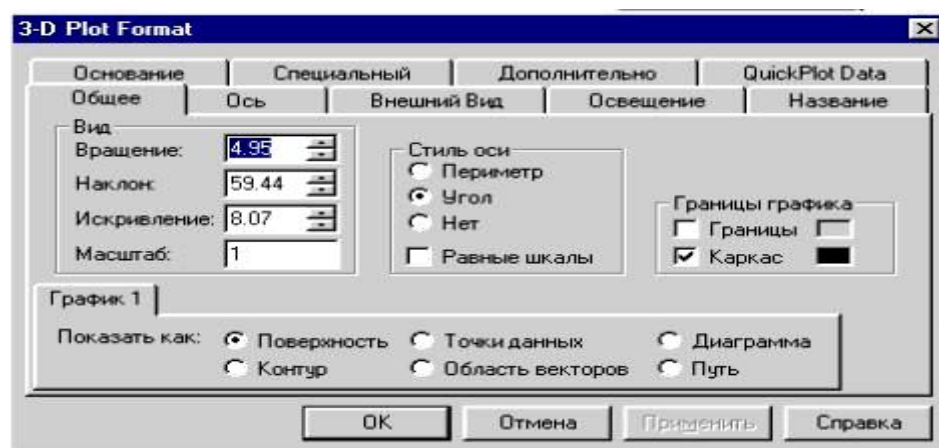


Рис. 1.12

У пункті **Границі графіка** визначається обрамлення графіка:

- границі – показує границі графіка;
- каркас – показує графік у вигляді паралелепіпеда.

На панелі перемикачів **Графік 1** можна вибрати одну з форм подання тривимірного графіка.

При роботі з панелями налаштування параметрів зображення можна подивитися результат, отриманий при зміні параметра зображення, не закриваючи панелі. Для цього після зміни параметра клацніть по кнопці **Застосувати**. Для повернення в документ натисніть клавішу **ОК**.

## Лабораторна робота №2 «СИМПЛЕКС-МЕТОД У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ»

### Символьні обчислення у системі MathCad2000. Знайомство з системою електронних таблиць Excel. Розв'язання задачі лінійного програмування в середовищі MathCad2000 та за допомогою Excel

#### 2.1. Мета роботи

- 2.1.1. Вивчення можливостей символьних перетворень у системі MathCAD.
- 2.2.2. Вивчення можливостей рішення різних типів рівнянь та їх систем у середовищі MathCAD.
- 3. Вивчити принцип роботи електронних таблиць (ЕТ).

#### 2.2. Завдання роботи

- 2.2.1. Освоїти прийоми роботи із системою MathCAD.
- 2.2.2. Освоїти способи рішення різних типів рівнянь їх систем аналітичними й чисельними методами в середовищі MathCAD.
- 3. Освоїти прийоми переміщення по ЕТ та введення в неї даних.

#### 2.3. Зміст роботи

- 2.3.1. Запустити додаток MathCAD.
- 2.3.2. Освоїти роботу з розділом Символи. По черзі включити кілька пунктів даного розділу, ознайомитися із принципом їх розташування й виклику їх опцій.
- 2.3.3. Повторити всі наведені у вказівках приклади.
- 2.3.4. Освоїти способи рішення рівнянь в аналітичній формі.
- 2.3.5. Записати математичну модель задачі (Додаток В).
- 2.3.6. Вирішити задачу лінійного програмування за допомогою функцій *Minimize*, *Maximize*.
- 2.3.7. Зберегти результати у файлі із введенням необхідних коментарів й оформити звіт.
- 2.3.8. Завантажити оболонку Windows і запустити додаток Excel.
- 2.3.9. Ознайомитися з областями екрана; освоїти переміщення по екрані за допомогою миші й кнопок прокручування; ознайомитися з меню інструментів. По черзі включити кілька пунктів головного меню, ознайомитися із принципом розташування й виклику їх опцій.
- 2.3.10. Вирішити задачу лінійного програмування за допомогою Excel.
- 2.3.11. Зберегти таблицю у файлі та оформити звіт.

## 2.4. Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- назву роботи, постановку завдання дослідження, математичну модель;
- результати обчислень, а також відомості про послідовності її виконання;
- результати обчислень без використання ПК – за допомогою симплекс-методу;
- результати обчислень у системі MathCAD та за допомогою ЕТ;
- відповіді отримані за допомогою симплекс-методу, у системі MathCAD, за допомогою ЕТ та графічним методом (якщо це можливо);
- порівняти всі отримані результати, зробити належні висновки;
- відповіді на контрольні запитання за вказівкою викладача.

## 2.5. Загальні положення

### 2.5.1. Меню символічних засобів Символи

За допомогою пункту **Символи** головного меню викликається падаюче меню символічних засобів, з них частина містить свої підменю. Зміст наданих функцій досить очевидний. Розглянемо деякі з них.

Щоб символічні операції виконувалися, необхідно вказати, над яким виразом ці операції повинні вироблятися, тобто треба виділити вираз (правила виділення описувалися вище). Потім вибрати в головному меню.


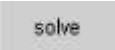
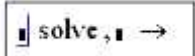
Для ряду операцій варто не тільки вказати вираз, до якого вони звертаються, але й намітити змінну, щодо якої виконується та або інша символічна операція. Саме вираз в такому випадку не виділяється, адже й так ясно, що якщо маркер введення виділяє змінну якого-небудь виразу, то цей вираз вже відзначений наявністю в ньому виділеної змінної.

**Символи/Спростити** – спростити виділений вираз з виконанням таких операцій, як скорочення подібних що складають, доведення до загального знаменника, використання основних тригонометричних тотожностей і т.д. Ця операція дозволяє спрощувати математичні вирази, що містять алгебраїчні та тригонометричні функції, а також поліноміальні вирази. За його допомогою можна спростити складні й погано впорядковані алгебраїчні вирази.

### 2.5.2. Розв'язання рівнянь в аналітичній формі

Система MathCad дозволяє вирішувати лінійні, нелінійні рівняння й системи рівнянь як аналітично, так і чисельно і графічно. Ці функції здійснюються в такий спосіб. Пункт **Змінні** падаючого меню пункту **Символи** головного меню MathCad викликає спливаюче меню.

За допомогою пункту спливаючого меню **Обчислити** рівняння (нерівність) вирішують щодо виділеної змінної, тобто виробляється пошук такого значення змінної, при якому вихідний вираз стає рівним нулю.

Інший спосіб рішення рівнянь можна здійснити, скориставшись панеллю символічних обчислень , на якій необхідно вибрати кнопку . Після чого з'явиться на екрані повідомлення .

Введіть у позначеній позиції ліворуч від ключового слова **solve** вираз для правої частини рівняння, а в позиції праворуч від **solve** – ім'я змінної, щодо якої потрібно вирішити рівняння, і клацніть по вільному місцю в робочому документі. Результат (значення кореня рівняння) буде відображений у робочому документі праворуч від стрілки.

Багато нелінійних рівнянь, наприклад, трансцендентні, і системи з них не мають аналітичних рішень і вирішуються графічними або чисельними методами. Функція **root (вираз, ім'я змінної)** шукає значення змінної, при якій вираз стає рівним нулю. Пошук кореня здійснюється ітераційними методами, причому перед цим потрібно задати початкове значення  $x$ .

Якщо необхідно знайти рішення рівняння з декількома змінними або системи рівнянь, задається блок рівнянь. Він має наступну структуру:

- **Given** – *службове слово, що відзначає початок блока;*
- рівняння;
- обмежувальні умови;
- вирази з функціями **Find**, **Minerr**, **Maximize**, **Minimize**;
- перевірка рішення (якщо необхідно).

У цьому випадку використовуються наступні функції:

- а) **Find** ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) – повертає значення однієї змінної або значення вектора змінних  $X$ , що відповідає точному рішення;
- б) **Minerr** ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) – повертає значення однієї змінної або значення вектора змінних  $X$ , що відповідає наближеному рішення з мінімальною середньоквадратичною похибкою;
- в) **Maximize** ( $f, x_1, x_2, \dots, x_n$ ) – повертає максимальне значення цільової функції та значення однієї змінної або значення вектора змінних  $X$ ;
- г) **Minimize** ( $f, x_1, x_2, \dots, x_n$ ) – повертає мінімальне значення цільової функції та значення однієї змінної або значення вектора змінних  $X$ .

Обмежувальні умови служать для обмеження області рішення за допомогою функції **Find** або мінімізації середньоквадратичної похибки за допомогою функції **Minerr**.

Для задання початкового значення, щоб уникнути тривіальних помилок, можна побудувати графік досліджуваної функції. Задайте в робочому документі функцію  $f(x)$  і побудуйте її графік у декартових координатах. Щоб знайти графічно корінь рівняння – абсциси точок перетинання графіка функції з віссю ординат, клацніть по полю графіка правою кнопкою миші. У контекстному меню, що з'явилося, виберіть пункт **Трасування** та установіть (стрілками клавіатури або мишею) маркер (перехресні пунктирні лінії) у точці перетинання графіка функції з віссю абсцис. У вікні діалогу відображаються координати маркера: значення

координати  $x$  при рівності координати  $y$  нулю або малій величині  $i$  є шукане наближене значення кореня.

### 2.5.3. Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою MathCAD

#### Приклад

Розв'язати задачу лінійного програмування.

$$f = 12x_1 + 15x_2 \rightarrow \max$$

при заданих обмеженнях:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12;$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ця задача може розв'язуватися без використання комп'ютера за допомогою прямого симплекс-методу. А у системі **MathCAD** розв'язок має вигляд, який наданий на рисунку 2.1.

Аналогічно знаходиться мінімум функції за допомогою вбудованої функції **MathCAD – Minimize**.

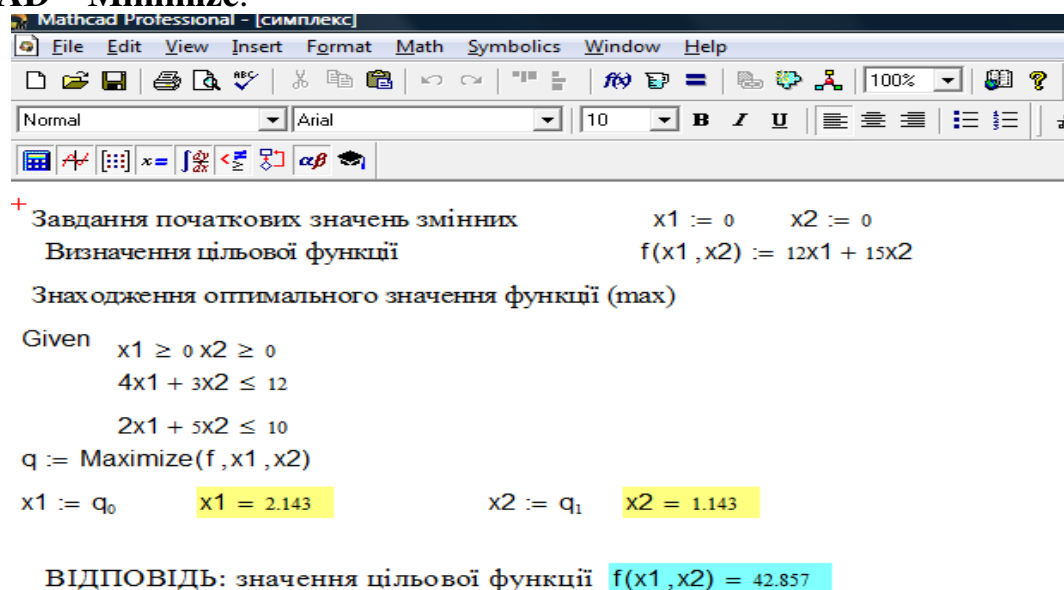


Рис. 2.1

## 2.6. Поняття про електронні таблиці

Інформаційні технології обробки даних часто вимагають подання відомостей у вигляді таблиць. Для табличних розрахунків характерні відносно прості формули й більші обсяги вихідних даних.

Універсальним засобом для автоматизації розрахунків над табличними даними стали пакети прикладних програм (ППП), названі **ТАБЛИЧНИМИ ПРОЦЕСОРАМИ** або **ЕЛЕКТРОННИМИ ТАБЛИЦЯМИ**.



### 2.6.1. Екран Excel

Основний формат ЕТ – екран із сіткою, що розділяє його на стовпці й рядки. Стовпці таблиці названі латинськими буквами й комбінаціями латинських букв від А до W (256 стовпців). Рядки пронумеровані від 1 до 16384. Комірки, отримані на перетинанні стовпців і рядків, мають свої адреси, що складається з букви, яка позначає стовпець і цифри, яка позначає рядок. Наприклад, комірка, що перебуває на перетинанні стовпця В і рядка 5, має адресу В5. Адресу комірки також називають посиланням. На екрані монітора звичайно видно не більше 18 повних рядків робочої таблиці й 9 повних стовпців зі стандартною шириною 9 позицій, назва відкритої книги, а також основні елементи вікон Windows: *КНОПКА СИСТЕМОГО МЕНЮ, ПАНЕЛЬ ГОЛОВНОГО МЕНЮ, ПАНЕЛІ ІНСТРУМЕНТІВ, ПАНЕЛЬ ФОРМУЛ* і т.д.

Для пересування по робочому аркуші на значні відстані використовуються смуги прокручування. Часто доводиться виконувати дії з декількома комітками одночасно, тобто із блоком або діапазоном комірок. Блок – це безліч комірок, що утворюють область прямокутної форми. Блок відзначається адресами верхніх лівих і правої нижньої комірок прямокутника, розділених двокрапкою, наприклад: *В4:Д6, А5:А10, С3:Е3*.

На риунку 2.2 зображено екран Excel з виділеним блоком комірок В4: Д6.

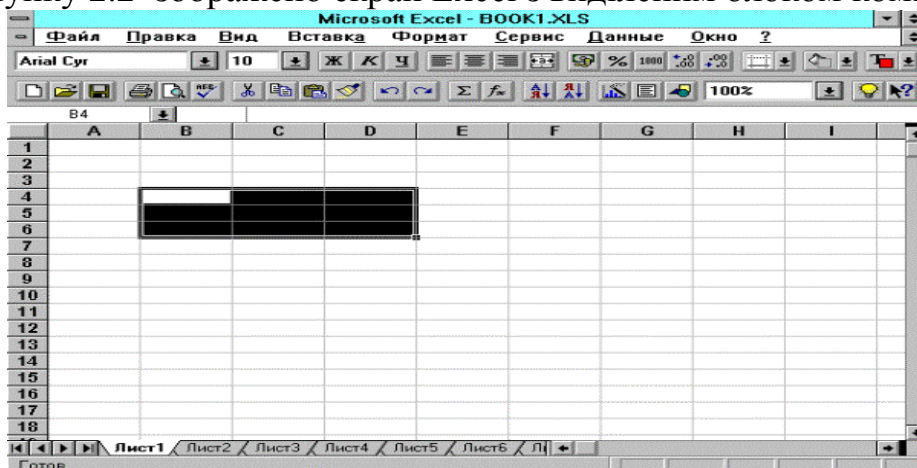


Рис. 2.2

### 2.6.2. Головне меню Excel

У верхній панелі перебуває головне меню Excel. Вибір будь-якого пункту меню розкриває список його команд.

Команди в головному меню не завжди доступні. Недоступна в цей момент команда зафарбована тьмними сірими кольорами. Вона залишається тьмяною доти, поки не з'являться умови для її роботи.

Виконання деяких команд також здійснюється через швидкі клавіші, зазначені відразу після назви команди.



### 2.6.3. Типи даних

В Excel розрізняються три типи даних: числові значення, текстові значення й формули.

Числові значення – це числа, що відображають кількісні величини, і числа, розглянуті як дати й час. Будь-які числові значення можуть використовуватися як аргументи для формул. Цей тип даних вирівнюється по правому краю комірки.

Щоб програма сприймала введені час і дату як числа, потрібно користуватися стандартним форматом введення. При цьому Excel не робить розходження між рядковими й прописними буквами й при введенні дат дозволяє використати крапку (.), косу риску (/), або дефіс (-).

Текст – узагальнена категорія даних, що має на увазі все, що не має справи із числами й обчисленнями.

Формули в ЕТ починаються зі знака рівності (=), що відрізняє введення тексту від введення формули. Наприклад:  $=B5*C5*D5$ . Після введення формули в комірку, вона видна в рядку формул, а в самій комірці висвічується результат обчислення. Формули можуть складатися із чисел, посилань на комірки й убудованих функцій, таких як СУМ, СРЗНАЧ й ін., розділених операторами додавання (+), віднімання (-), множення (\*), ділення (/), зведення в степінь (^).

### 2.6.4. Відносні та абсолютні посилання

При виконанні операцій копіювання й дублювання формульних даних, що містять посилання на комірки, Excel автоматично коректує їх, тобто змінює номер рядка або найменування стовпця залежно від напрямку руху. Таке коректування в багатьох випадках дуже зручне, але іноді не потрібне за змістом виконуваного завдання. Щоб посилання в процесі копіювання не змінювалося, його роблять абсолютним, установивши знак долара перед буквою стовпця й перед номером рядка, наприклад  $\$A\$1$ . Допускається конструювання змішаних посилань, наприклад  $\$A1$ . Адреса стовпця даної комірки є сталою, а адреса рядка - відносною.

### 2.6.5. Введення й редагування вмісту комірки

Звичайно при вході в Excel на екрані товстою рамкою виділена комірка з номером A1, що готова до прийому інформації. Щоб ввести інформацію в іншу комірку, її виділяють за допомогою миші або клавіш керування курсором (клавіш зі стрілками). За мірою набору даних із клавіатури Excel показує всі введені символи як у панелі формул, що перебуває зверху, так і в активній комірці на робочому аркуші. У панелі формул активізуються кнопки: **СКАСУВАННЯ** (позначена хрестом); **ВВЕДЕННЯ**, (позначена галочкою) та **ЕКСПЕРТ ЗА ФУНКЦІЯМИ** (позначена fx).

Щоб набрана інформація була внесена в поточну комірку робочого аркуша, вона повинна бути підтверджена однією з наступних дій з використанням клавіш або миші:

- натисканням клавіші введення, або виходом з поточної комірки за допомогою клавіші керування курсором.
- клацанням миші по іншій комірці, або по кнопці введення позначеною галочкою.

Для виправлення помилок під час заповнення комірки, перш ніж введення інформації підтверджене, можна скористатися клавішею *Backspace* або *Delete*. Для видалення всього набраного тексту потрібно за допомогою миші натиснути кнопку із хрестом.

Виправити вже підтверджений зміст комірки можна як у рядку формул, так і безпосередньо в комірці. Для цього:

- 1) вибрати потрібну комірку;
- 2) двічі клацнути по ній мишею або натиснути клавішу **F2**;
- 3) відредагувати вміст.

За допомогою клавіші *Insert* можна змінити режим вставки символів на режим заміни.

Щоб здійснити очищення комірки, при якій знищується вміст комірки без її видалення з робочої таблиці, потрібно: або натиснути *<Del>*, а потім *<Enter>*, або вибрати з контекстного меню комірки команду *ОЧИСТИТИ ВМІСТ*, або виконати команду головного меню *ВИПРАВЛЕННЯ-ОЧИСТИТИ-ВМІСТ*.

Для видалення комірки з її вмістом й атрибутами форматування потрібно: вибрати команду *ВИДАЛИТИ* з контекстного меню комірки або *ВИПРАВЛЕННЯ-ВИДАЛИТИ* з головного меню. Excel відобразить діалогове вікно, в якому потрібно вказати, як зрушувати сусідні комірки для заповнення місця, що звільнилося після видалення на робочому аркуші.

#### 2.6.6. Послідовність розв'язування оптимізаційних задач в MS Excel

Задачі математичного програмування можна розв'язувати за допомогою табличного процесора MS Excel, в якому використовується програма **Solver** (*Поиск решения*).

Процедура пошуку розв'язку дозволяє знайти оптимальне значення формули, яка міститься в комірці, що називається цільовою. Ця процедура працює з групою комірок, прямо чи побічно пов'язаних з формулою в цільовій комірці.

Щоб одержати з формули, що міститься в цільовій комірці, заданий результат, процедура змінює значення у впливаючих комірках. Щоб звузити безліч значень, які використовуються в моделі, застосовуються обмеження. Ці обмеження можуть посилатися на інші впливаючі комірки.

#### Приклад

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \rightarrow \max; \quad (2.1)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12;$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10; \quad (2.2)$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

### Розв'язування:

Обмеження (2.2) і цільова функція (2.1) у вигляді формул без знаків ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ ) та вільного члена заносяться у комірки. Як невідомі, в цих формулах фігурують адреси певних комірок. Нехай невідомі значення  $x_1$ ,  $x_2$  будуть заноситися в комірки з адресами  $A2$ ,  $A3$ . Тоді для першого обмеження  $4x_1 + 3x_2 \leq 12$  в довільну комірку (наприклад  $B2$ ) потрібно занести формулу  $=4*A2+3*A3$ . Для другого обмеження  $2x_1 + 5x_2 \leq 10$  в довільну комірку (наприклад  $B3$ ) потрібно занести формулу  $=2*A2+5*A3$ . Формулу цільової функції занесемо у комірку  $C2$  у вигляді  $=12*A2+15*A3$ .

Після введення формул всіх обмежень і цільової функції для розв'язання задачі лінійного програмування потрібно виконати такі дії:

а) В меню **Tools (Сервис)** виберіть пункт **Solver (Поиск решения)**. Після вибору його активізується вікно Solver parameters (рис. 2.3).

б) У поле **Set Target Cell (Установить целевую ячейку)** введіть адресу або ім'я комірки, в якій знаходиться формула функції, що досліджується на екстремум. У даному випадку ввести  $\$C\$2$ .

в) Щоб максимізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач **Equal to (Равной)** у положення **Max (максимальному значенню)**.

Щоб мінімізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач **Equal to (Равной)** у положення **Min (мінімальному значенню)**.

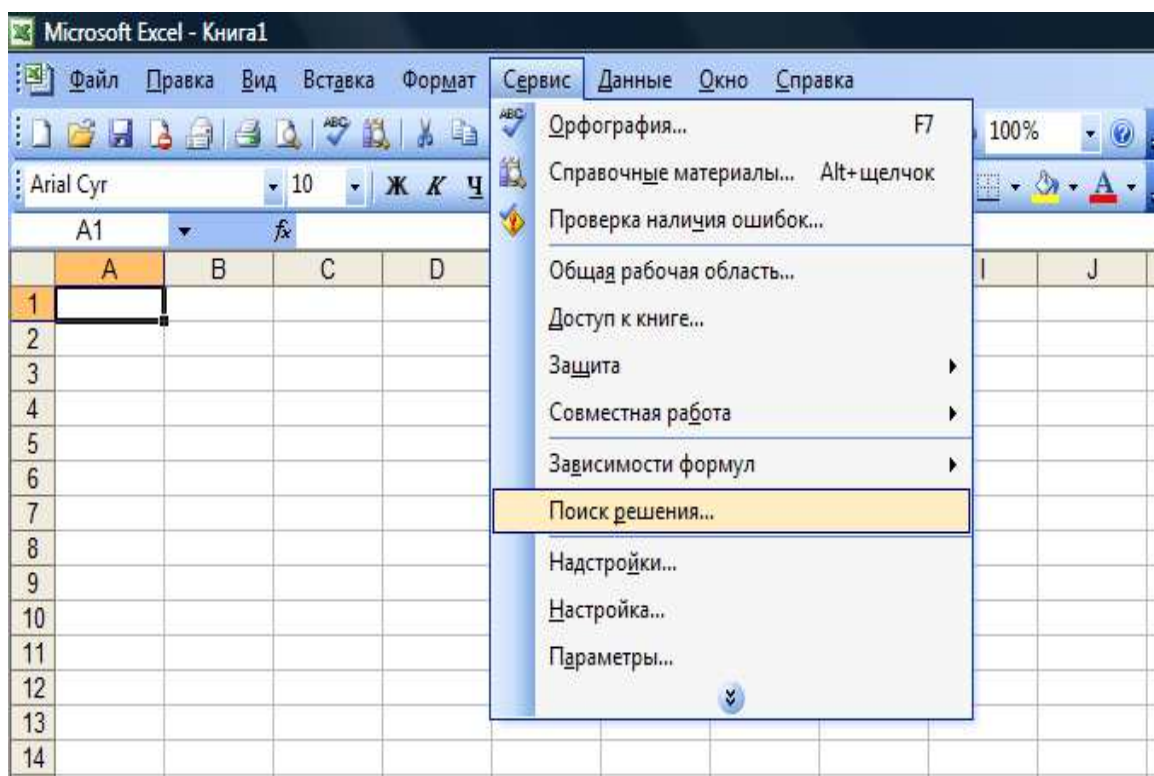


Рис. 2.3

Щоб знайти значення в цільовій комірці, яке дорівнює деякому числу шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення **Value of (значенню)** і введіть у відповідне поле необхідне число. В нашому випадку встановлюємо перемикач у положення **Max (максимальному значенню)**.

г) У поле **By Changing Ctlts (Изменяя ячейки)** введіть імена чи адреси комірок шуканих невідомих змінних, розділяючи їх комами або за допомогою мишки вказати необхідні комірки.

Допускається встановлення до 200 змінюваних комірок. В нашому випадку введемо  $A\$2:A\$3$ . Щоб автоматично знайти всі комірки, що впливають на цільову функцію, натисніть кнопку **Предположить**.

д) У поле **Subject to the Constraints (Ограничения)** введіть всі обмеження, що накладаються на пошук розв'язку. Для цього натисніть кнопку **Add (Добавить)**. Відкриється вікно **Add constraintf (Добавление ограничения)**. У поле **Cell Reference (Ссылка на ячейку)** ввести комірку чи діапазон, на значення яких необхідно накласти обмеження. Поле **Ограничение** служить для задання умови, що накладається на значення комірки чи діапазону, зазначеного в полі **Ссылка на ячейку**. Виберіть необхідний умовний оператор ( $\leq$ ,  $=$ ,  $\geq$ , цел або двоич.). Введіть обмеження – число, формулу, чи посилання на діапазон – у поле праворуч від списку, що розкривається. Натисніть на кнопку **Добавить**, щоб, не повертаючись у вікно діалогу **Параметры поиска решения**, накласти нову умову на пошук розв'язку задачі. В нашому випадку потрібно ввести  $A\$2 \geq 0$ ,  $A\$3 \geq 0$ ,  $B\$2 \leq 12$ ,  $B\$3 \leq 10$ .

є) Натисніть кнопку **Выполнить**.

ж) Щоб зберегти знайдений розв'язок, встановіть перемикач у діалоговому вікні **Solver Results (Результаты поиска решения)** в положення **Keep Solver Solution (Сохранить найденное решение)**. Щоб відновити вихідні дані, встановіть перемикач у положення **Restore Original Values (Восстановить исходные значения)**. В нашому випадку отримаємо в комірці  $A\$2$  число 2,142857, в комірці  $A\$3$  число – 1,142857 і в комірці  $C\$2$  – число 42,85714. Отже, оптимальний розв'язок лінійної задачі програмування має вигляд (рис.2.4):

|   | A   | B  | C        | D | E | F | G | H |
|---|---|----|----------|---|---|---|---|---|
| 1 | задача лінійного програмування за допомогою Excel |    |          |   |   |   |   |   |
| 2 | 2,142857  | 12 | 42,85714 |   |   |   |   |   |
| 3 | 1,142857  | 10 |          |   |   |   |   |   |
| 4 |   |    |          |   |   |   |   |   |

Рис. 2.4

А такий вигляд має рішення цієї ж задачі лінійного програмування у вигляді симплекс-таблиць (рис. 2.5):

|    | A  | B | C  | D        | E   | F   | G        | H    | I        |
|----|--|---|----|----------|-----|-----|----------|------|----------|
| 1  | задача лінійного програмування за допомогою симплекс таблиць |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 2  | 1 iter   |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 3  |  | Б | ОП | a1       | a2  | a3  | a4       |      |          |
| 4  |  |   | 0  | 12       | 4   | 3   | 1        | 0    | 4        |
| 5  |  |   | 0  | 10       | 2   | 5   | 0        | 1    | 2        |
| 6  |  |   |    | 0        | -12 | -15 | 0        |      |          |
| 7  |  |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 8  | 2 iter   |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 9  |  | Б | ОП | a1       | a2  | a3  | a4       |      |          |
| 10 |  |   | 0  | 6        | 2,8 | 0   | 1        | 0    | 2,142857 |
| 11 |  |   | 15 | 2        | 0,4 | 1   | 0        | 0,2  | 5        |
| 12 |  |   |    | 30       | -6  | 0   | 0        |      |          |
| 13 |  |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 14 | 3 iter   |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 15 |  | Б | ОП | a1       | a2  | a3  | a4       |      |          |
| 16 |  |   | 12 | 2,142857 | 1   | 0   | 0,357143 | 0    |          |
| 17 |  |   | 15 | 1,142857 | 0   | 1   | -0,14286 | 0,04 |          |
| 18 |  |   |    | 42,85714 | 0   | 0   | 2,142857 |      |          |
| 19 |  |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 20 | відповідь 42,85714   |   |    |          |     |     |          |      |          |
| 21 |  |   |    |          |     |     |          |      |          |

Рис. 2.5

### Приклад.

Розв'язати задачу дрібно-лінійного програмування за допомогою **MathCAD** та **MS Excel**.

$$f = \frac{4x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$x_1 + x_2 \leq 9;$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язок у **MS Excel**, наданий на рисунку 2.6.

|   | A        | B     | C        | D | E | F |
|---|----------|-------|----------|---|---|---|
| 1 | ЗАДАЧА   |       |          |   |   |   |
| 2 | невідомі | обмеж | ф-ція    |   |   |   |
| 3 | 5        | -5    | 3,333333 |   |   |   |
| 4 | 0        | 5     |          |   |   |   |
| 5 |          | 15    |          |   |   |   |

Рис. 2.6

Розв'язок у **MathCAD**, наданий на рисунку 2.7.

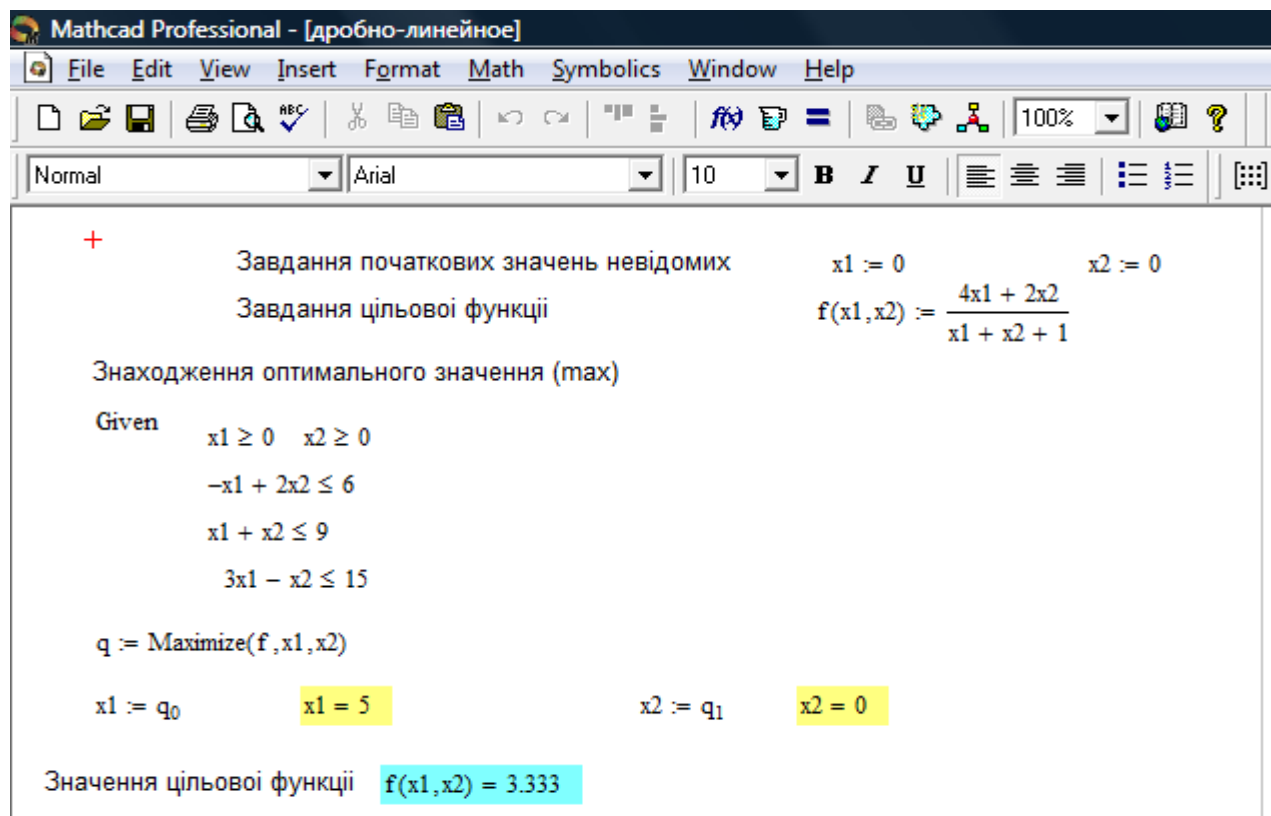


Рис. 2.7

### Лабораторна робота №3 «ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА»

#### Використання електронних таблиць при розв'язуванні транспортної задачі

##### 3.1. Мета роботи

3.1. Вивчення можливостей рішення транспортної задачі (ТЗ) за допомогою ЕТ MS Excel.

##### 3.2. Завдання роботи

3.2.1. Освоїти рішення ТЗ у MS Excel.

##### 3.3. Зміст роботи

3.3.1. Запустити додаток MS Excel.

3.3.2. Вивчити методи знаходження початкового опорного плану ТЗ: метод «північно-західного кута» та найменшої собівартості.

3.3.3. Вивчити метод потенціалів для розв'язання ТЗ.

3.3.4. Вирішити ТЗ за допомогою таблиць MS Excel (Додаток С).

3.3.5. Зберегти результати у файлі із введенням необхідних коментарів й оформити звіт.

### 3.4. Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- назву роботи, постановку завдання дослідження;
- результати обчислень, а також відомості про послідовності її виконання;
- відповіді отримані у результаті ET **MS Excel** та отримані без допомоги ПК, порівняти, зробити належні висновки;
- відповіді на контрольні питання за вказівкою викладача.

### 3.5. Загальні положення

Використовуючи знання роботи з таблицями **MS Excel** знайти рішення ТЗ.

#### *Приклад.*

Фірма, яка обслуговує туристів, прибуваючих на відпочинок, повинна розмістити їх у 4 готелях: “Морський”, “Сонячний”, “Слава” і “Затишний”, в яких заброньовано відповідно 85, 65, 90 і 60 місць. Сто двадцять туристів прибувають по залізниці, вісімдесят – прилітають черговим рейсом в аеропорт, а сто чоловік прибудуть на теплоході на морський вокзал. Транспортні витрати при перевезенні з пунктів прибуття в готелі наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

| Початкові пункти          | Пункти призначення (готелі) |            |         |            |
|---------------------------|-----------------------------|------------|---------|------------|
|                           | «Морський»                  | «Сонячний» | «Слава» | «Затишний» |
|                           | $B_1$                       | $B_2$      | $B_3$   | $B_4$      |
| Залізничний вокзал, $A_1$ | 7                           | 4          | 15      | 9          |
| Аеропорт, $A_2$           | 11                          | 2          | 7       | 3          |
| Морський вокзал, $A_3$    | 4                           | 5          | 12      | 8          |

В умовах жорсткої конкуренції фірма повинна мінімізувати свої витрати, значну частину яких складають саме транспортні витрати. Потрібно визначити такий план перевезення туристів з пункту прибуття в готелі, при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальні і всі туристи будуть розміщені в готелях.

*Побудова математичної моделі задачі.*

1) Змінні задачі. Позначимо кількість туристів, які перевозитимуться з пункту  $i$  в готель  $j$  як  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1,3}$ ;  $j = \overline{1,4}$ ). Це змінні задачі, значення яких повинні необхідно визначатися в процесі рішення. Наприклад,  $x_{23}$  – це число туристів, які необхідно перевезти з аеропорту (пункт 2) у готель “Слава” (пункт 3). У задачі міститься  $3 \cdot 4 = 12$  змінних.

2) Обмеження на змінні задачі. Очевидно, що всі змінні задачі не негативні і цілі числа, тобто

$$x_{ij} \geq 0, \quad (3.1)$$

$$x_{ij} - \text{цілі числа}, \quad (3.2)$$

$$\text{де } i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}.$$

Окрім цього, повинні задовольнятися наступні умови. Число туристів, що вивозяться із залізничного вокзалу (пункт 1) рівне 120, тому:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = \sum_{j=1}^4 x_{1j} = 120. \quad (3.3)$$

Аналогічно для аеропорту (пункт 2):

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 80. \quad (3.4)$$

І для морського вокзалу (пункт 3):

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 100. \quad (3.5)$$

За умовою задачі в готелі “Морський” (пункт 1) заброньовано 85 місць, тому:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 85. \quad (3.6)$$

Аналогічно, для готелю “Сонячний” (пункт 2):

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 65. \quad (3.7)$$

Для готелю “Слава” (пункт 3):

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 90. \quad (3.8)$$

Для готелю “Затишний” (пункт 4):

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 60. \quad (3.9)$$

Звичайно транспортна задача надається у вигляді таблиці, де в комірках поміщаються змінні задачі ( $x_{ij}$ ), а в правому верхньому кутку комірки стоїть ціна перевезення з пункту  $i$  в пункт  $j$  ( $c_{ij}$ ). У крайньому правому стовпці і нижньому рядку таблиці записуються числа визначувані обмеження задачі (у даному прикладі – це число туристів у початкових пунктах і число місць у пунктах призначення – готелях).

Для даного прикладу таблиця має вигляд (таблиця 3.2):

Таблиця 3.2

| Початкові<br>пункти | Пункти призначення (готелі) |            |         |            | Число<br>туристів у |
|---------------------|-----------------------------|------------|---------|------------|---------------------|
|                     | «Морський»                  | «Сонячний» | «Слава» | «Затишний» |                     |



|                              | $B_1$    |    | $B_2$    |   | $B_3$    |    | $B_4$    |   | початково-<br>му пункті |
|------------------------------|----------|----|----------|---|----------|----|----------|---|-------------------------|
| Залізничний<br>вокзал, $A_1$ |          | 7  |          | 4 |          | 15 |          | 9 | 120                     |
|                              | $x_{11}$ |    | $x_{12}$ |   | $x_{13}$ |    | $x_{14}$ |   |                         |
| Аеропорт,<br>$A_2$           |          | 11 |          | 2 |          | 7  |          | 3 | 80                      |
|                              | $x_{21}$ |    | $x_{22}$ |   | $x_{23}$ |    | $x_{24}$ |   |                         |
| Морський<br>вокзал, $A_3$    |          | 4  |          | 5 |          | 12 |          | 8 | 100                     |
|                              | $x_{31}$ |    | $x_{32}$ |   | $x_{33}$ |    | $x_{34}$ |   |                         |
| Число місць у<br>готелі      | 85       |    | 65       |   | 90       |    | 60       |   | $\Sigma 300$            |

Дана транспортна задача є збалансованою, так як сума чисел в останньому стовпці дорівнює сумі чисел останнього рядка:

$$120+80+100 = 85+65+90+60$$

3) Цільова функція. Транспортні витрати на перевезення туристів у готелі обчислюються за формулою:

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij} = 7 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 15 \cdot x_{13} + \dots + 8 \cdot x_{34}. \quad (3.10)$$

Остаточно транспортна задача має вигляд (таблиця 3.2). Потрібно знайти такі значення змінних  $x_{ij}$  ( $i=\overline{1,3}; j=\overline{1,4}$ ) при яких цільова функція, визначувана формулою (3.10), матиме мінімальне значення і будуть виконані обмеження (3.1) - (3.9):

$x_{ij} \geq 0$ , де  $x_{ij}$  – цілі числа ( $i=\overline{1,3}; j=\overline{1,4}$ );

$$\sum_{j=1}^4 x_{1j} = 120; \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 80; \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 100;$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 85; \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 65; \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 90; \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 60.$$

Транспортна задача є задачею лінійного програмування і може бути вирішена симплекс-методом. З причини її специфіки для неї був розроблений спеціальний метод рішення – метод потенціалів. Наведемо різні варіанти розв’язування даної задачі за допомогою ЕТ.

*Розв’язування:*

1 варіант. Розв’язок транспортної задачі в процедурі EXCEL “Поиск решения”

а) Введення даних. Вводимо дані таблиці 1 і 2 в комірки EXCEL (рис. 3.1).

У комірках  $B3 : E5$  введені вартості перевезень (табл. 3.1).

У комірках  $F3 : F5$  знаходиться число туристів, що прибувають. А в комірках  $B6 : E6$  знаходиться число місць у готелях. Комірki  $B8 : E10$  – робочі (змінні) комірки, в яких обчислюватимуться значення змінних задачі  $x_{ij}$ .

У комірках  $F8 : F10$  потрібно записати формули для обчислення лівих частин обмежень (3.3) – (3.5):

у  $F8$  повинна бути сума комірок  $B8 : E8$ ;

у  $F9$  повинна бути сума комірок  $B9 : E9$ ;

у  $F10$  повинна бути сума комірок  $B10 : E10$ .

Формули для обчислення лівих частин обмежень (3.6) – (3.9) введемо в комірки  $B11 : E11$ :

у  $B11$  повинна бути сума комірок  $B8 : B10$ ;

у  $C11$  повинна бути сума комірок  $C8 : C10$ ;

у  $D11$  повинна бути сума комірок  $D8 : D10$ ;

у  $E11$  повинна бути сума комірок  $E8 : E10$ ;

Цільову функцію помістимо в комірку  $G3$ :

$G3$ : СУММПРОИЗВ ( $B3 : E5$ ;  $B8 : E10$ ).

Таблиця початкових даних має вигляд (рис. 3.1):

|    | A           | B  | C             | D  | E  | F   | G | H |
|----|-------------|----|---------------|----|----|-----|---|---|
| 1  |             |    | пункты назнач |    |    |     |   |   |
| 2  | исход пункт | 1  | 2             | 3  | 4  |     |   |   |
| 3  | 1           | 7  | 4             | 15 | 9  | 120 | 0 |   |
| 4  | 2           | 11 | 2             | 7  | 3  | 80  |   |   |
| 5  | 3           | 4  | 5             | 12 | 8  | 100 |   |   |
| 6  |             | 85 | 65            | 90 | 60 |     |   |   |
| 7  |             |    |               |    |    |     |   |   |
| 8  | 1           |    |               |    |    | 0   |   |   |
| 9  | 2           |    |               |    |    | 0   |   |   |
| 10 | 3           |    |               |    |    | 0   |   |   |
| 11 |             | 0  | 0             | 0  | 0  |     |   |   |
| 12 |             |    |               |    |    |     |   |   |

Рис. 3.1

б) Заповнення вікна процедури «Поиск решения».

цільова функція :  $G3$ ;

значення цільової функції :  $min$ ;

змінні комірки:  $B8 : E10$ ;

обмеження задачі:

$F8 : F10 = F3 : F5$  (формули (3.3) – (3.5));

$B11 : E11 = B6 : E6$  (формули (3.6) – (3.9));

$B8 : E10 \geq 0$  і  $B8 : E10$  – цілі числа.

У вікні «Параметры» встановити «Линейная модель», що відповідає рішенню задачі симплекс-методом. Результати заповнення вікна показані на рисунку 3.2:

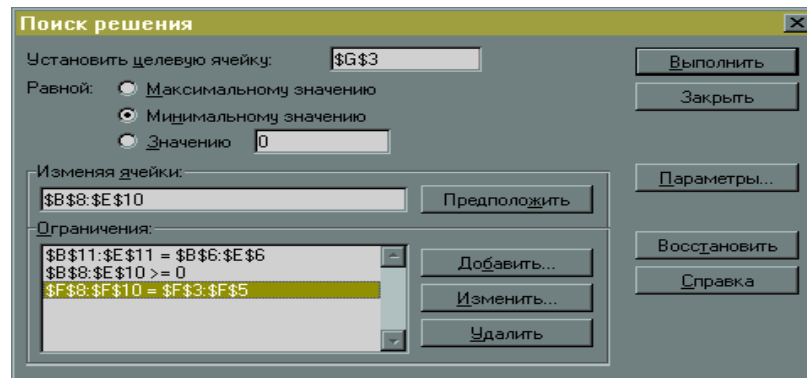


Рис. 3.2

в) Виконавши процедуру «Поиск решения» одержимо наступні результати (рис. 3.3):

|    | A           | B  | C             | D  | E  | F   | G    | H |
|----|-------------|----|---------------|----|----|-----|------|---|
| 1  |             |    | пункты назнач |    |    |     |      |   |
| 2  | исход пункт | 1  | 2             | 3  | 4  |     |      |   |
| 3  | 1           | 7  | 4             | 15 | 9  | 120 | 1815 |   |
| 4  | 2           | 11 | 2             | 7  | 3  | 80  |      |   |
| 5  | 3           | 4  | 5             | 12 | 8  | 100 |      |   |
| 6  |             | 85 | 65            | 90 | 60 |     |      |   |
| 7  |             |    |               |    |    |     |      |   |
| 8  | 1           | 0  | 65            | 0  | 55 | 120 |      |   |
| 9  | 2           | 0  | 0             | 80 | 0  | 80  |      |   |
| 10 | 3           | 85 | 0             | 10 | 5  | 100 |      |   |
| 11 |             | 85 | 65            | 90 | 60 |     |      |   |
| 12 |             |    |               |    |    |     |      |   |

Рис. 3.3

Таким чином із залізничного вокзалу (початковий пункт 1) потрібно 65 туристів відвезти в готель «Сонячний» (пункт призначення 2) і 55 туристів у готель «Затишний» (пункт призначення 4); з аеропорту (початковий пункт 2) 80 туристів відвезти в готель «Слава» (пункт призначення 3); туристів, що прибувають на морський вокзал (початковий пункт 3) потрібно відправити до готелів «Морський», «Слава» та «Затишний» відповідно у кількості – 85, 10 та 5 чоловік (рис. 3.3). При цьому сумарна вартість транспортних витрат складе 1815 умовних одиниць (комірка G3).

2 варіант. Розв’язок транспортної задачі за допомогою ЕТ.

а) Знаходження початкового опорного плану ТЗ методом найменшої вартості за допомогою **MS Excel**:

|   |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
|---|---|----|-----------|------------|------|-------|---|------|------|-------|------|
| Microsoft Excel - T3_наим ст-ти                           |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
| Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
| Arial Cyr 10 Ж К Ч  |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
| X28 fx  |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
|   | A   | B  | C         | D          | E    | F     | G | H    | I    | J     | K    |
| 1   | ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ T3 |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
| 2   | методом найменшої вартості                |    |           | 1 ітерація |      |       |   | u1=4 | u2=7 | u3=14 | u4=8 |
| 3   |   |    | 90        | 30         | 120  | v1=1  |   |      |      | 15    | 9    |
| 4   |   | 65 |           | 15         | 80   | v2=-5 |   |      | 2    |       | 3    |
| 5   | 85  |    |           | 15         | 100  | v3=0  |   | 4    |      |       | 8    |
| 6   | 85  | 65 | 90        | 60         |      |       |   |      |      |       |      |
| 7   |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |
| 8   |   |    | ПЕРЕВІРКА |            |      |       |   |      |      |       |      |
| 9   |   |    | ИСТИНА    | ЛОЖЬ       |      |       |   |      |      |       |      |
| 10  |   |    | ИСТИНА    |            | ЛОЖЬ |       |   |      |      |       |      |
| 11  |   |    |           | ЛОЖЬ       | ЛОЖЬ |       |   | F=   | 2255 |       |      |
| 12  |   |    |           |            |      |       |   |      |      |       |      |

б) Покращення отриманого опорного плану методом потенціалів:

|  |               |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|--|---------------|----|------------|-----|-------|--|------|------|-------|------|
|  |               |    | 2 ітерація |     |       |  | u1=4 | u2=7 | u3=18 | u4=8 |
|  |               | 30 | 90         | 120 | v1=-3 |  |      | 4    | 15    |      |
|  |               | 35 |            | 45  | v2=-5 |  |      | 2    |       | 3    |
|  | 85            |    |            | 15  | v3=0  |  | 4    |      |       | 8    |
|  | 85            | 65 | 90         | 60  |       |  |      |      |       |      |
|  | ПЕРЕВІРКА     |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|  | ИСТИНА ИСТИНА |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|  | ЛОЖЬ ЛОЖЬ     |    |            |     |       |  |      |      |       |      |

в) Перехід до нового базису за допомогою циклу перерахунку:

|  |               |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|--|---------------|----|------------|-----|-------|--|------|------|-------|------|
|  |               |    | 3 ітерація |     |       |  | u1=7 | u2=4 | u3=15 | u4=5 |
|  |               | 45 | 75         | 120 | v1=0  |  |      | 4    | 15    |      |
|  |               | 20 |            | 60  | v2=-2 |  |      | 2    |       | 3    |
|  | 85            |    | 15         | 100 | v3=-3 |  | 4    |      | 12    |      |
|  | 85            | 65 | 90         | 60  |       |  |      |      |       |      |
|  | ПЕРЕВІРКА     |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|  | ИСТИНА ИСТИНА |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|  | ЛОЖЬ          |    |            |     |       |  |      |      |       |      |
|  | ИСТИНА ИСТИНА |    |            |     |       |  |      |      |       |      |

г) Подальший розв'язок зводиться до повторного застосування методу потенціалів та циклу перерахунку:

|  |               |    |            |     |       |  |      |      |       |       |
|--|---------------|----|------------|-----|-------|--|------|------|-------|-------|
|  |               |    | 4 ітерація |     |       |  | u1=7 | u2=4 | u3=15 | u4=11 |
|  |               | 65 | 55         | 120 | v1=0  |  |      | 4    | 15    |       |
|  |               |    | 20         | 60  | v2=-8 |  |      |      | 7     | 3     |
|  | 85            |    | 15         | 100 | v3=-3 |  | 4    |      | 12    |       |
|  | 85            | 65 | 90         | 60  |       |  |      |      |       |       |
|  | ПЕРЕВІРКА     |    |            |     |       |  |      |      |       |       |
|  | ИСТИНА        |    |            |     |       |  |      |      |       |       |
|  | ЛОЖЬ          |    |            |     |       |  |      |      |       |       |
|  | ИСТИНА ИСТИНА |    |            |     |       |  |      |      |       |       |
|  | ИСТИНА        |    |            |     |       |  |      |      |       |       |

Остання ітерація:

|   |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
|---|----|--------|------------|--------|------|-------|------|------|-------|------|--|
| Microsoft Excel - ТЗ_наим ст-ти                           |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
| Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
| Arial Cyr 10 Ж К Ч  |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
| K11   |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
| A   | B  | C      | D          | E      | F    | G     | H    | I    | J     | K    |  |
|   |    |        | 5 ітерація |        |      |       | u1=5 | u2=4 | u3=13 | u4=9 |  |
|   | 65 |        | 55         | 120    |      | v1=0  |      | 4    |       | 9    |  |
|   |    | 75     | 5          | 80     |      | v2=-6 |      |      | 7     | 3    |  |
| 85  | 0  | 15     |            | 100    |      | v3=-1 | 4    |      | 12    |      |  |
| 85  | 65 | 90     | 60         |        |      |       |      |      |       |      |  |
| ПЕРЕВІРКА   |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
|   |    | ИСТИНА | ИСТИНА     |        |      |       |      |      |       |      |  |
|   |    | ИСТИНА | ИСТИНА     |        |      |       |      |      |       |      |  |
|   |    |        | ИСТИНА     | ИСТИНА |      |       |      |      |       |      |  |
| ЗНАЧЕННЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ                                 |    |        |            |        |      |       |      |      |       |      |  |
|   |    |        |            | F=     | 1815 |       |      |      |       |      |  |

3 варіант. Розв'язок транспортної задачі за допомогою ЕТ.

Знаходження початкового опорного плану ТЗ діагональним методом, а покращення отриманого опорного плану методом потенціалів за допомогою MS Excel:

| Microsoft Excel - T3_северо-зап                                   |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
|---|--------|------|----|----|----|-----|---|----|----|----|----|----|----|
| Файл  Правка  Вид  Вставка  Формат  Сервис  Данные  Окно  Справка |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| Arial Cyr 10 Ж К Ч  |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| S4  |        | fx   |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
|   | A      | B    | C  | D  | E  | F   | G | H  | I  | J  | K  | L  | M  |
| 1   | 1 iter |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 2   |        | b1   | b2 | b3 | b4 |     |   |    | u1 | u2 | u3 | u4 |    |
| 3   | a1     | 85   | 35 |    |    | 120 |   | v1 | 7  | 4  |    |    | 0  |
| 4   | a2     |      | 30 | 50 |    | 80  |   | v2 |    | 2  | 7  |    | -2 |
| 5   | a3     |      |    | 40 | 60 | 100 |   | v3 |    |    | 12 | 8  | 3  |
| 6   |        | 85   | 65 | 90 | 60 | 300 |   |    | 7  | 4  | 9  | 5  |    |
| 7   |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 8   | F=     | 2105 |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 9   |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 10  | 2 iter |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 11  |        | b1   | b2 | b3 | b4 |     |   |    | u1 | u2 | u3 | u4 |    |
| 12  | a1     | 55   | 65 |    |    | 120 |   | v1 | 7  | 4  |    |    | 0  |
| 13  | a2     |      | 0  | 80 |    | 80  |   | v2 |    |    | 7  |    | 0  |
| 14  | a3     | 30   |    | 10 | 60 | 100 |   | v3 | 4  |    | 12 | 8  | 5  |
| 15  |        | 85   | 65 | 90 | 60 | 300 |   |    | 7  | 4  | 7  | 3  |    |
| 16  |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 17  | F=     | 1925 |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 18  |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 19  | 2 iter |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 20  |        | b1   | b2 | b3 | b4 |     |   |    | u1 | u2 | u3 | u4 |    |
| 21  | a1     | 0    | 65 |    | 55 | 120 |   | v1 | 7  | 4  |    |    | 0  |
| 22  | a2     |      | 0  | 80 |    | 80  |   | v2 |    |    | 7  |    | 0  |
| 23  | a3     | 85   |    | 10 | 5  | 100 |   | v3 | 4  |    | 12 | 8  | 5  |
| 24  |        | 85   | 65 | 90 | 60 | 300 |   |    | 7  | 4  | 7  | 3  |    |
| 25  |        |      |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |
| 26  | F=     | 1815 |    |    |    |     |   |    |    |    |    |    |    |

Розв'язок даної транспортної задачі:

– оптимальний вектор  $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 65 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \\ 85 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix};$

– функція мети  $f(X^*) = 1815.$

## Додаток А

Скласти математичну модель. Знайти найбільше та найменше значення функції графічним методом. Побудувати багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування, вектор-градієнт та лінії рівня функції мети.

### Варіант № 1

Фабрика виготовляє два види фарб: I – для внутрішніх і II – для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас продукту А – 6 т. Допустимі добові витрати вихідного продукту В – не більше 8 т на добу.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба I  | Фарба II |
| А                | 1  | 2        |
| В                | 2  | 1        |

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу II ніколи не перевищує попит на фарбу I більше, ніж на 1 т. Попит на фарбу I – не менше 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби II; 2 тис. грн для фарби I. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 2

Фабрика виготовляє два види фарб: I – для внутрішніх і II – для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас цих продуктів – 6 і 10 т відповідно.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба I  | Фарба II |
| А                | 1  | 2        |
| В                | 2  | 1        |

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу I ніколи не перевищує попит на фарбу II більше, ніж на 1 т. Попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби II; 2 тис. грн для фарби I. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 3

Фабрика виготовляє два види фарб: I – для внутрішніх і II – для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас цих продуктів – 8 і 10 т відповідно.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба I  | Фарба II |
| A                | 1  | 2        |
| B                | 2  | 1        |

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу I ніколи не перевищує попит на фарбу II більше, ніж на 1 т. Попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби II; 2 тис. грн для фарби I. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 4

Фабрика виготовляє два види фарб: I – для внутрішніх і II – для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас цих продуктів – 6 і 10 т відповідно.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба I  | Фарба II |
| A                | 1  | 2        |
| B                | 2  | 1        |

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу I ніколи не перевищує попит на фарбу II більше, ніж на 1 т. Попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби II; 1 тис. грн для фарби I. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 5

Фабрика виготовляє два види фарб: I – для внутрішніх і II – для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас цих продуктів – 10 і 8 т відповідно.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба І  | Фарба ІІ |
| А                | 1  | 2        |
| В                | 2  | 1        |

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу І ніколи не перевищує попит на фарбу ІІ більше, ніж на 1 т. Попит на фарбу І ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби ІІ; 2 тис. грн для фарби І. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 6

Фабрика виготовляє два види фарб: І – для внутрішніх і ІІ – для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас вихідного продукту А – 6 т. Допустимі добові витрати вихідного продукту В – 8 т. Попит на фарбу І перевищує попит на фарбу ІІ не менше, ніж на 1 т.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба І  | Фарба ІІ |
| А                | 1  | 2        |
| В                | 2  | 1        |

Попит на фарбу І ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби ІІ; 2 тис. грн для фарби І. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 7

Фабрика виготовляє два види фарб: І – для внутрішніх і ІІ для зовнішніх робіт. Для цього використовується два вихідних продукти – А і В. Максимально можливий добовий запас вихідного продукту А – 10 т. Допустимі добові витрати вихідного продукту В – не менше 8 т за добу.

| Вихідний продукт | Витрати вихідних матеріалів (т) на тонну фарби |          |
|------------------|--|----------|
|                  | Фарба І  | Фарба ІІ |
| А                | 1  | 2        |
| В                | 2  | 1        |



Попит на фарбу I перевищує попит на фарбу II не менше 8 т за добу. Попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби II; 2 тис. грн для фарби I. Яку кількість фарби кожного виду за добу має виготовляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним? У відповіді зазначити найбільшу суму в грн, яку одержує податкова інспекція, якщо вона утримує 30% з прибутку.

### Варіант № 8

Для виробництва двох видів виробів А і В використовується токарське, фрезерувальне і шліфувальне устаткування. Норми витрат часу, фонд робочого часу, а також прибуток від реалізації наводяться у таблиці.

| Вид устаткування                           | Витрати часу на обробку одного виробу |    | Загальний фонд корисного часу устаткування, год |
|--|---------------------------------------|----|---|
|  | А                                     | В  |   |
| Фрезерувальне                              | 10                                    | 8  | 168   |
| Токарське                                  | 5                                     | 10 | 180   |
| Шліфувальне                                | 6                                     | 12 | 144   |
| Прибуток від реалізації одного виробу, грн | 14                                    | 18 |   |

Знайти план випуску виробів А і В, що забезпечує найбільший прибуток від їх реалізації. У відповіді вказати найбільший прибуток.

### Варіант № 9

Підприємство має три види сировини і може випускати одну й ту ж продукцію двома способами. При цьому за 1 годину роботи першим способом випускається 20 од. продукції, а другим – 30. Кількість сировини, кг того чи іншого виду, що витрачається за 1 годину під час використання різних способів виробництва, і запаси сировини (кг) наведено в таблиці.

| Спосіб виробництва | Сировина |     |    |
|--------------------|----------|-----|----|
|                    | 1        | 2   | 3  |
| I                  | 10       | 20  | 15 |
| II                 | 20       | 10  | 15 |
| Запаси сировини    | 100      | 100 | 90 |

Знайти оптимальний план виробництва, при якому буде випущена найбільша кількість продукції. У відповіді зазначити найбільшу кількість продукції.

### Варіант № 10

На звірофермі можна вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для їх вирощування використовуються три види кормів. Щоденне споживання корму, а також загальний запас корму і прибуток від реалізації шкурок наведено в таблиці.

| Вид корму                                  | Кількість корму, кг |        | Загальна кількість корму, кг |
|--|---------------------|--------|------------------------------|
|  | лисиця              | песець |                              |
| I  | 2                   | 3      | 180                          |
| II   | 4                   | 1      | 240                          |
| III  | 6                   | 7      | 426                          |
| Прибуток від реалізації однієї шкурки, грн | 16                  | 12     |                              |

Визначити, скільки лисиць і песців необхідно вирощувати на фермі, щоб прибуток від реалізації хутра був максимальним. У відповіді вказати найбільший прибуток.

### Варіант № 11

Для виготовлення двох видів продукції P1 і P2 використовують три види сировини C1, C2, C3, що наведені в таблиці.

| Вид сировини                 | Кількість одиниць сировини на одиницю продукції |    | Запас сировини |
|------------------------------|---|----|----------------|
|                              | P1  | P2 |                |
| C1                           | 2   | 5  | 20             |
| C2                           | 8   | 5  | 40             |
| C3                           | 5   | 6  | 30             |
| Прибуток від реалізації, грн | 50  | 40 |                |

Написати план випуску продукції, щоб при реалізації одержати найбільший прибуток.

### Варіант № 12

Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини C1, C2, C3. Для виготовлення одиниці продукції є такі норми витрат сировини:

| Вид сировини | Норми витрат сировини на один виріб, кг |    | Загальна кількість сировини, кг |
|--------------|---|----|---------------------------------|
|              | А                                       | В  |                                 |
| C1           | 12                                      | 4  | 300                             |
| C2           | 4                                       | 4  | 120                             |
| C3           | 3                                       | 12 | 252                             |

Прибуток від реалізації одного виробу кожного виду відповідно дорівнює 30 і 40 грн. Враховуючи, що збут забезпечений, скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде найбільшим. У відповіді вказати найбільший прибуток.

### Варіант № 13

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна одержати не менше 9 одиниць поживної речовини С1, не менше 8 одиниць С2 і не більше 12 одиниць речовини С3. Для складання раціону використовують два види корму, які характеризуються даними таблиці.

| Речовина | Корм |   |
|----------|------|---|
|          | А    | В |
| С1       | 2    | 3 |
| С2       | 3    | 2 |
| С3       | 1    | 4 |

Вартість одиниці кормів В та А відповідно дорівнюють 5 та 4 грн. Скласти денний раціон з необхідною кількістю поживних речовин з мінімальними витратами. У відповіді зазначити величину цих витрат.

### Варіант № 14

Підприємство випускає дві моделі комп'ютерів, причому кожна модель виробляється на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії – 60 виробів, другої – 75 виробів. На комп'ютер першої моделі витрачається 10 однотипних елементів електронних схем, на комп'ютер другої моделі – 8 таких же елементів. Максимальний добовий запас елементів дорівнює 800 одиницям. Прибутки від реалізації одного комп'ютера першої і другої моделей дорівнюють 30 і 20 доларів відповідно. Визначте оптимальні добові обсяги виробництва першої та другої моделі. У відповіді вказати найбільший прибуток, одержаний від реалізації продукції за добу.

### Варіант № 15

Фірма випускає капелюхи двох фасонів. Трудомісткість виготовлення капелюха фасону 1 удвічі не перевищує трудомісткості виготовлення капелюха фасону 2. Якби фірма випускала тільки капелюхи фасону 2, то добовий обсяг виробництва дав би не більше 500 капелюхів. Добовий обсяг збуту капелюхів кожного з фасонів обмежений діапазоном від 150 до 200 штук. Прибуток від продажу капелюха фасону 1 дорівнює 8 грн, а фасону 2 – 5 грн. Визначити, яку кількість капелюхів кожного фасону варто виготовляти, щоб максимізувати прибуток. У відповіді вказати найбільший прибуток від реалізації капелюхів.

### Варіант № 16

На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізувати заготовки трьох видів у кількостях, які відповідно дорівнюють не менше 24, 27 і не більше 60 шт. Кожен лист фанери можна розрізати на заготовки двома способами. Кількість одержуваних заготовок при даному способі розкроювання, величини відходів при розкроюванні одного листа наведено в таблиці.

| Вид заготовок             | Кількість заготовок (шт.) при розкроюванні |          |
|---------------------------|--|----------|
|                           | 1 спосіб                                   | 2 спосіб |
| I                         | 2  | 6        |
| II                        | 5  | 4        |
| III                       | 4  | 5        |
| Величина відходів, кв. см | 12   | 16       |

Визначити, скільки листів фанери і за яким способом варто розкроїти, щоб отримати не менше потрібної кількості заготовок при найменших відходах. У відповіді зазначити величину найменших відходів.

### Варіант № 17

З пункту А в пункт В щодня відправляються пасажирські і швидкі поїзди. Вагони, з яких комплектуються потяги, а також кількість пасажирів у кожному з вагонів зазначено в таблиці.

| Потяг                        | Вагон     |           |              |           |        |
|------------------------------|-----------|-----------|--------------|-----------|--------|
|                              | Багаж-ний | Пошто-вий | Плац-картний | Купей-ний | М`який |
| Швидкий                      | 1         | 1         | 5            | 6         | 3      |
| Пасажирський                 | 1         | 0         | 8            | 4         | 1      |
| Кількість пасажирів у вагоні | —         | —         | 58           | 40        | 32     |
| Парк вагонів                 | 12        | 8         | 81           | 70        | 26     |

Пропускна здатність дороги — шість пасажирських потягів за добу. Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських потягів, за якою перевезення пасажирів буде найбільшим. У відповіді зазначити цю найбільшу кількість пасажирів.

### Варіант № 18

З пункту А в пункт В щодня відправляються пасажирські і швидкі поїзди. Парк вагонів, з яких комплектуються потяги, а також кількість пасажирів у кожному з вагонів зазначено в таблиці.

| Потяг                           | Вагон    |               |                  |               |        |
|---------------------------------|----------|---------------|------------------|---------------|--------|
|                                 | Багажний | Пошто-<br>вий | Плац-<br>картний | Купей-<br>ний | М'який |
| Швидкий                         | 1        | 1             | 5                | 6             | 3      |
| Пасажирський                    | 1        | 0             | 8                | 4             | 1      |
| Кількість пасажирів<br>у вагоні | —        | —             | 58               | 40            | 32     |
| Парк вагонів                    | 14       | 10            | 80               | 60            | 30     |

Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських потягів, за якою перевезення пасажирів досягає максимуму. У відповіді зазначити найбільшу кількість пасажирів.

### Варіант № 19

Два вироби в процесі виробництва проходять обробку на чотирьох верстатах I, II, III, IV. Час обробки кожного виробу на кожному з цих верстатів задається таблицею.

| Виріб | Верстат |    |     |    |
|-------|---------|----|-----|----|
|       | I       | II | III | IV |
| A     | 2       | 4  | 3   | 1  |
| B     | 0,25    | 2  | 1   | 4  |

Верстати можна використовувати відповідно 45, 100, 300 і 500 год. Вартість виробу А – 6 грн за одиницю, а виробу В – 4 грн. Виробу А потрібно не менше 22 штук. У якому співвідношенні варто виготовляти вироби А і В, щоб отримати найбільший прибуток. У відповіді вказати найбільший прибуток.

### Варіант № 20

Для виробництва двох видів продукції А і В можна використовувати тільки матеріал трьох сортів. При цьому на виготовлення одиниці виробу виду А витрачається 20 кг матеріалу першого сорту, 15 кг другого і 14 третього. На виготовлення одиниці виробу виду В витрачається 28 кг матеріалу першого сорту, 9 кг другого і 1 кг третього. На складі фабрики є всього матеріалу першого сорту 758 кг, другого – 526 кг, 541 кг – третього. Від реалізації готової продукції виду А фабрика має прибуток 10 грн, а від реалізації продукції виду В – 2 грн. Визначити максимальний прибуток від реалізації всієї продукції видів А і В.

### Варіант № 21

Підприємство має три види сировини і може випускати одну й ту ж продукцію двома способами. При цьому за 1 годину роботи першим способом випускається 30 од. продукції, а другим – 20. Кількість сировини, кг того чи іншого виду, що витрачається за 1 годину під час використання різних способів виробництва, і запаси сировини (кг) наведено в таблиці.

| Спосіб виробництва | Сировина |    |   |
|--------------------|----------|----|---|
|                    | 1        | 2  | 3 |
| I                  | 1        | 2  | 1 |
| II                 | 2        | 1  | 1 |
| Запаси сировини    | 10       | 10 | 6 |

Знайти оптимальний план виробництва, при якому буде випущена найбільша кількість продукції. У відповіді зазначити найбільшу кількість продукції.

### Варіант № 22

Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини С1, С2, С3. Для виготовлення одиниці продукції є такі норми витрат сировини:

| Вид сировини | Норми витрат сировини на один виріб, кг |   | Загальна кількість сировини, кг |
|--------------|---|---|---------------------------------|
|              | А                                       | В |                                 |
| С1           | 3                                       | 1 | 75                              |
| С2           | 1                                       | 1 | 30                              |
| С3           | 1                                       | 4 | 84                              |

Прибуток від реалізації одного виробу кожного виду відповідно дорівнює 30 і 40 грн. Враховуючи, що збут забезпечений, скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде найбільшим. У відповіді вказати найбільший прибуток.

### Варіант № 23

На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізувати заготовок трьох видів у кількостях, які відповідно дорівнюють не менше 12, 27 і не більше 60 шт. Кожен лист фанери можна розрізати на заготовки двома способами. Кількість одержуваних заготовок при даному способі розкроювання, величини відходів при розкроюванні одного листа наведено в таблиці.

| Вид заготовок             | Кількість заготовок (шт.) при розкроюванні |          |
|---------------------------|--|----------|
|                           | 1 спосіб                                   | 2 спосіб |
| I                         | 1  | 3        |
| II                        | 5  | 4        |
| III                       | 4  | 5        |
| Величина відходів, кв. см | 12   | 13       |

Визначити, скількох листів фанери і за яким способом варто розкroїти, щоб отримати не менше потрібної кількості заготовок при найменших відходах. У відповіді зазначити величину найменших відходів.

### Варіант № 24

Підприємство має три види сировини і може випускати одну й ту ж продукцію двома способами. При цьому за 1 годину роботи першим способом випускається 20 од. продукції, а другим – 30. Кількість сировини, кг того чи іншого виду, що витрачається за 1 годину під час використання різних способів виробництва, і запаси сировини (кг) наведено в таблиці.

| Спосіб виробництва | Сировина |     |    |
|--------------------|----------|-----|----|
|                    | 1        | 2   | 3  |
| I                  | 10       | 10  | 15 |
| II                 | 10       | 20  | 15 |
| Запаси сировини    | 50       | 100 | 90 |

Знайти оптимальний план виробництва, при якому буде випущена найбільша кількість продукції. У відповіді зазначити найбільшу кількість продукції.

### Варіант № 25

У виробництві двох видів продукції А і В беруть участь три підприємства. При цьому на виготовлення одиниці виробу А перше підприємство витрачає 7 кг, друге – 6 кг, третє – 5 кг. На виготовлення одиниці виробу В перше підприємство витрачає 8 кг, друге – 3 кг, третє – 1 кг. На виробництво всіх виробів перше підприємство може витратити не більше ніж 476 кг, друге – не більше ніж 364, третє – не більше ніж 319 кг. Від реалізації одиниці готової продукції виду А прибуток становить 11 тис. грн, а виду В – 10 тис. грн. Визначити максимальний прибуток від реалізації всієї продукції видів А і В.

## **Додаток В**

Скласти математичну модель і за допомогою симплексного або двоїстого методу розв'язати задачу лінійного програмування.

### **Варіант № 1**

Потрібно засіяти не більше 5 га двома сільськогосподарськими культурами, причому першою культурою повинна бути засіяна площа не більше як 3 га, до того ж площа її мусить бути удвічі більшою ніж площа засіву другої культури. Прибуток від продажу культур становить 4 тис. грн за 1 га першої культури і 5 тис. грн – другої культури.

Знайти оптимальний варіант засіву площі двома культурами.

### **Варіант № 2**

Для процесу гальванізації готується суміш, якій потрібні два види порошку. Загальна маса двох видів не повинна перевищувати 6 кг, норми витрат початкових заготовок для виробництва 1 кг кожного порошку становить відповідно 2 та 11 кг. Витрати заготовок повинні бути не менше як 22 кг.

Знайти склад суміші з максимальною її вартістю, якщо 1 кг першого порошку коштує 2 грн, а другого – 1 грн.

### **Варіант № 3**

Два хімічні препарати виготовляються однією установою одночасно. Кількість першого хімічного препарату за технологією виробництва завжди не перевищує кількість другого, причому вихід придатного продукту першого хімічного препарату за добу повинен бути не більше як 200 кг.

На виробництво 1 т кожного препарату витрачається відповідно 4 та 6 кг нафтопродукту, запас якого на добу не перевищує 30 кг.

Знайти виробництво хімічних препаратів з їх максимальною вартістю, якщо 1 кг першого хімічного продукту коштує 2 грн, а другого – 1 грн.

### **Варіант № 4**

Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. Виготовляючи один вал, робітник витрачає 3 годину, а одну втулку – 2 години. Від реалізації вала підприємство одержує прибуток 80 коп., а від реалізації втулки – 60 коп. цех повинен випустити не менше 100 штук валів і не менше 200 штук втулок.

Скільки треба виготовити валів і втулок, щоб цех одержав найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу становить 900 людино-годин.

### **Варіант № 5**

Установка виробляє два типи будівельних матеріалів, причому її загальну продуктивність за добу доцільно витримувати в діапазоні 4..8 т матеріалу. За



технологією виробництва, якщо одночасно виготовляються типи матеріалів, кількість першого матеріалу не повинна перевищувати 1,5 кількості тонн другого матеріалу.

Знайти добовий режим роботи установки з максимальною вартістю виробництва будівельних матеріалів, якщо вартість 1 т першого матеріалу дорівнює 1 тис. грн, а другого – 3 тис. грн.

### **Варіант № 6**

На виготовлення 1 т декоративних плит першого типу витрачається 6 куб. м деревини, а другого – 7 куб. м. Витрати деревини за добу не повинні перевищувати 42 куб. м. При цьому слід мати на увазі, що різниця між кількостями виробництва першого та другого типів не повинна перевищувати 2 т, а найбільш доцільний режим технології виробництва плит – не більше як 4 т плит за добу.

Знайти оптимальний план виробництва декоративних плит, якщо вартість 1 т плит першого типу – 3 тис. грн, а другого – 1 тис. грн.

### **Варіант № 7**

Для виготовлення заданого сплаву металу необхідна шихта, що складається з двох початкових матеріалів, вартість яких становить відповідно 1 та 3 грн.

Масова частка матеріалу в 1 т шихти мусить становити: 20..50 % – першого та 10...40% – другого, а загальна масова частка двох початкових матеріалів шихти повинна не перевищувати 50%.

Знайти витрати початкових матеріалів у процесі виготовлення шихти з їх мінімальною вартістю.

### **Варіант № 8**

Три цехи разом виготовляють не більше 500 т будівельного матеріалу за добу. Фонд часу не перевищує 3200 годин, а витрати праці не повинні перевищувати 8000 чол.-днів. Питомі витрати по кожному цеху на виробництво 1 т матеріалу наведені у таблиці:

| Ресурси                     | Цех |    |    |
|-----------------------------|-----|----|----|
|                             | 1   | 2  | 3  |
| Час, год                    | 3   | 2  | 4  |
| Витрати праці,<br>чол.-днів | 11  | 15 | 20 |

Вихід валової продукції по цехах дорівнює відповідно 400, 300 та 200 грн за 1 т. За добу другий цех повинен виробляти не більше як 200 т матеріалу.

Знайти план виробництва будівельного матеріалу кожним цехом з максимальним виходом валової продукції з точки зору загальної вартості.

### Варіант № 9

У студентській їдальні для виготовлення бутербродів трьох видів використовуються чотири види продуктів, загальні обсяги яких і норми витрат зазначені у таблиці. Відомий також прибуток, одержаний їдальнею від реалізації однієї партії бутербродів кожного виду.

| Вид продукту    | Норми витрат продуктів (кг) на одну партію бутербродів виду |    |    | Наявність продуктів (кг) |
|-----------------|---|----|----|--------------------------|
|                 | Б1  | Б2 | Б3 |                          |
| С1              | 4   | 3  | 1  | 42                       |
| С2              | 2   | 5  | 4  | 56                       |
| С3              | 3   | 6  | 2  | 38                       |
| С4              | 5   | 7  | 3  | 40                       |
| Прибуток, (грн) | 5   | 7  | 8  |                          |

Запланувати випуск бутербродів у таких кількостях, щоб загальний прибуток їдальні був максимальним.

### Варіант № 10

Скласти оптимальний план (мінімум капітальних затрат) забудови мікрорайону міста житловими будинками трьох різних типів. Наявність квартир у кожному з типових будинків відображає таблиця.

| Планова кількість мешканців у квартирі | Кількість квартир за типом будинку |              |              |
|--|------------------------------------|--------------|--------------|
|  | Першим                             | Другим       | Третім       |
| 2                                      | 50                                 | 50           | 60           |
| 3                                      | 30                                 | 100          | 50           |
| 4                                      | 120                                | 60           | 40           |
| Вартість                               | 804 тис. грн                       | 822 тис. грн | 602 тис. грн |

Демографічний склад майбутнього населення мікрорайону зумовлює необхідність того, щоб було не менше ніж 750 квартир на 2-х мешканців; 1700 квартир на 3-х; 450 квартир на 4-х.

### Варіант №11

Цех за добу може випускати не більше 10 шт. виробів першого типу, 7 шт. – другого та 9 шт. – третього типу. Згідно з умовами ритмічності роботи цех повинен за добу випускати не більше 20 виробів. Тривалість виробництва одного виробу першого типу дорівнює 1 год, другого – 0,5 год, третього – 1,5 год. А вартість одного виробу становить відповідно 3, 2 та 4 грн.

Знайти план випуску виробів, який передбачає максимальну вартість виробів, вироблених за добу.

### Варіант № 12

Вміст кількості поживних речовин типу А та С (у міліграмах) у 1 кг двох типів продуктів наведено в таблиці.

| Вітамін | Продукти |     |
|---------|----------|-----|
|         | 1        | 2   |
| А       | 350      | 400 |
| С       | 150      | 750 |

Яку кількість першого та другого типів продуктів необхідно включити до раціону харчування, щоб у ньому було не менш як 600 мг речовини А та 750 мг речовини С за умов мінімальних витрат. Якщо виробництво 10 кг продукту першого типу коштує 0,025 грн, а 10 кг другого – 0,03 грн.

При цьому необхідно врахувати, що загальна кількість продукту в раціоні харчування повинна бути не більше 1 кг.

### Варіант № 13

Підприємство виробляє три типи хімічних реактивів, які входять до складу кінцевої продукції. Три частки другого реактиву входить до кінцевої продукції не менше двох часток третього, а першого реактиву повинно бути не більш як 20 т. Для виробництва реактивів виділяється фонд часу не більше ніж 280 год., а запас початкових ресурсів становить 600 т. Питомі норми витрат часу та початкових ресурсів наведені у таблиці.

| Вид витрат | Реактив |   |    |
|------------|---------|---|----|
|            | 1       | 2 | 3  |
| Час, год   | 4       | 3 | 8  |
| Ресурси, т | 12      | 8 | 10 |

Оптова ціна 1 т кожного реактиву дорівнює відповідно 8, 12 та 10 грн.

Знайти оптимальний варіант виробництва кінцевої продукції, яка складається з трьох реактивів, з максимальною вартістю.

### Варіант № 14

У процесі виробництва двох рецептів використовується три типи лікарських речовин, витрати яких на 1 г кінцевої продукції наведені у таблиці.

| Речовина, г | Рецепт |   |
|-------------|--------|---|
|             | 1      | 2 |

|           |     |   |
|-----------|-----|---|
| 1-го типу | 5   | 1 |
| 2-го типу | 2   | 5 |
| 3-го типу | 1,5 | 4 |

У виробництві рецептів повинно використовуватись не менше як 20 г першої, як 10 г другої та не більше як 32 г третьої речовин відповідно. Вартість виробництва 10 г продукції за першим рецептом – 1,8 грн, за другим – 1 грн.

Знайти кількість продукції, яка вироблена за кожним рецептом з мінімальною вартістю її виробництва.

### **Варіант № 15**

Для виготовлення будівельного матеріалу необхідно не менше як 10 кг речовини А і не менше як 12 кг речовини В. Речовину А можна одержати з двох мінералів: 1 кг першого мінералу містить 100 г, другого – 400 г речовини А. Речовину В одержують також з двох мінералів: 1 кг першого мінералу містить 0,3 кг; другого – 0,2 кг речовини В. Загальні витрати мінералів повинні становити не менше 20 кг, причому витрати першого – не більше 2 кг.

Вартість 1 кг першого мінералу 30 грн, другого – 25 грн. Знайти витрати вихідних мінералів з мінімальною вартістю виготовлення будівельних матеріалів.

### **Варіант № 16**

Підприємство за добу переробляє більше 120 т сировини, яка надходить з трьох рудників. Щоб доставляти сировину безперебійно, треба виконувати ритм навантаження, який повинен перевищувати 3 год. Тривалість вантаження 1 т сировини на першому руднику становить 1,1 хв, на другому – 1,5 хв, на третьому – 0,3 хв. За добу від першого та третього рудників повинно надходити не більше як 20 та 30 т відповідно; а від другого – не менше 40 т.

Вартість 1 т сировини з першого рудника дорівнює 5 грн, другого – 7 грн, третього – 8 грн. Знайти план постачання сировини на добу з мінімальною вартістю.

### **Варіант № 17**

Фабрика виробляє два види продуктів за умов дотримання таких вимог: загальне виробництво за добу обох продуктів повинно становити планове завдання до 3,5 т; технологією виробництва передбачається обов'язкова різниця між обсягами двох продуктів не більше як 2,5 т; запаси сировини на добу не перевищують 20 т, а нормативи витрат його на виробництво 1 т першого продукту дорівнюють 2 т, другого – 10 т. Знайти оптимальне виробництво двох видів продукції з максимальною вартістю їх реалізації, якщо вартість реалізації 1 т першого продукту – 10 грн, другого – 20 грн.

### Варіант № 18

Щоб виготовити задану марку цементу, необхідно мати суміш з двох компонентів A1 та A2. Одержати ці компоненти можна з будівельних матеріалів B1 та B2. Для виготовлення 1 кг компонента A1 потрібно 0,5 кг матеріалу B1 та 1,5 кг матеріалу B2. А для виготовлення 1 кг компонента A2 потрібно 1,2 кг матеріалу B1 та 0,2 кг матеріалу B2. Масова частка компонента A2 повинна становити не менше як 5 кг. Є 15 кг матеріалу B1 та 10 кг матеріалу B2. Вартість 1 кг компонента A1 дорівнює 10 грн, а A2 – 8 грн. Знайти масову долю компонентів A1 та A2, які входять до заданої марки цементу, з мінімальною вартістю.

### Варіант № 19

Майстерня виробляє до 40 шт. скляних виробів за добу. Норми витрат кольорової речовини та час виготовлення першого та другого видів скляних виробів наведені у таблиці.

| Ресурси               | 1  | 2  |
|-----------------------|----|----|
| Кольорова речовина, г | 3  | 4  |
| Час, хв               | 50 | 60 |
| Прибуток, грн         | 25 | 20 |

Запас кольорової речовини на добу не перевищує 100 г. Знайти оптимальний прибуток за добу від випуску скляних виробів.

### Варіант № 20

Кондитерська фабрика для виробництва 3-х видів карамелі A1, A2, A3 використовує 3 види сировини C1, C2, C3. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені в таблиці.

| Вид продукту    | Норми витрат сировини на одну тонну карамелі |     |     | Загальна кількість сировини (кг) |
|-----------------|--|-----|-----|----------------------------------|
| C1              | 0,8  | 0,5 | 0,6 | 800                              |
| C2              | 0,4  | 0,4 | 0,3 | 600                              |
| C3              | —  | 0,1 | 0,1 | 120                              |
| Прибуток, (грн) | 108  | 112 | 126 |                                  |

Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

### Варіант № 21

З нафтопродукту виробляють два типи кінцевого продукту широкого вжитку. Необхідно знайти обсяги виробництва кінцевих продуктів з максимальною вартістю їх реалізації та виконанням умов (зведено до однієї доби):

- загальні витрати нафтопродукту не повинні перевищувати 3 т;
- сумарне виробництво обох видів продуктів не може бути менше як 1 т;
- виробництво кожних 2-х т другого виду кінцевого продукту потребує не менше як 1 т першого кінцевого продукту;
- щоб виготовити 1 т першого виду кінцевого продукту, необхідно не більше 1 т нафтопродукту, для другого – не більше 3 т нафтопродукту;
- вартість реалізації 1 т першого та другого типів кінцевих продуктів дорівнює відповідно 1 та 2 грн.

### Варіант № 22

Для виготовлення хімічних речовин А, В, С використовують два лікарські препарати. Кількість речовин кожного препарату, яка міститься в одній таблетці, така:

- у першому препараті міститься 0,2; 1,1 та 0,7 г відповідних речовин;
- у другому препараті – відповідно 0,4 та 0,1 г речовин А та С.

Вартість однієї упаковки з 10 таблеток лікарського препарату першого типу – 10 коп., другого – 18 коп. Для виробництва лікарських препаратів є 40 г речовини В та 10 г речовини С, а речовина А може бути використана в межах 20..50 г.

Знайти план випуску лікарських препаратів з максимальною вартістю.

### Варіант № 23

Відгодівля худоби ефективна за умов, коли кожна тварина отримує за добу не менше як 0,6 кг речовини А, не більше як 1,2 кг речовини В та не більше як 1,4 кг речовини С. Для відгодівлі тварин використовують два типи кормів, 1 кг кожного з яких містить відповідно таку кількість речовин А, В та С:

- у першому – 150, 30, 70 г;
- у другому – 60, 120, 30 г.

Рацион харчування повинен складатися з кормів у такому співвідношенні: одна частина корму першого типу і не як дві частини другого.

Ефективність харчування кормом першого типу становить 15, а другого – 8 умовних одиниць. Знайти оптимальний склад раціону харчування.

### Варіант № 24

Є 5-ть типів контейнерів з однаковою вантажопідйомністю. Відомі кількості кожного типу контейнерів, які можна транспортувати залізничними вагонами у заданих сукупностях. Початкові дані наведені в таблиці.

| Тип контейнера | Кількість контейнерів | Варіанти завантаження вагонів |
|----------------|-----------------------|-------------------------------|
|----------------|-----------------------|-------------------------------|

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
|   |    | 1 | 2 |
| 1 | 12 | 2 | – |
| 2 | 18 | 3 | 5 |
| 3 | 10 | 4 | 8 |
| 4 | 4  | 5 | 4 |
| 5 | 15 | – | 2 |

Знайти таку кількість вагонів із завантаженням різними сукупностями контейнерів, яка передбачає максимальний обсяг перевезення вантажу, якщо прибуток від перевезень першим варіантом завантажень вагонів складає 1 тис. ум. од., а другим варіантом завантажень вагонів складає 5 тис. ум. од.

### Варіант № 25

Для збереження здоров'я та працездатності бригада 10 чоловік повинна споживати за добу не менше як 40 г речовини В1, не менше як 100 г – В2, не більше як 90 г – В3 та не менше як 50 г – В4. Харчі можна готувати за двома рецептами: 1 кг харчів за першим рецептом містить 5 г речовини В1, 6 г – В2, 3 г – В3 та 1 г – В4; а 1 кг харчів за другим рецептом містить 1 г речовини В1, 3 г – В2, 1 г – В3 та 2 г – В4.

За першим рецептом 1 кг харчів коштує 30 коп., за другим – 10 коп. Потрібно організувати харчування бригади таким чином, щоб вартість його була мінімальною, а вся бригада одержувала б необхідну норму речовини за добу.

### Додаток С

Знайти за допомогою ЕТ план, який забезпечує мінімум витрат від перевезень вантажу для заданої таблиці, де  $k$  – номер варіанта.

| Пункти відправлення | Пункти призначення |       |       |       |       | Запаси вантажів |
|---------------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
|                     | $B_1$              | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |                 |
| $A_1$               | 70-к               | 84    | 72    | 56    | 56+к  | 80-к            |
| $A_2$               | 39                 | 43    | 66-к  | 40    | 55    | 55              |
| $A_3$               | 41                 | 54    | 45    | 38    | 36    | 65+к            |
| Потреби у вантажах  | 48                 | 45-к  | 31    | 37    | 39+к  | 200             |

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Максимов О.В., Афанасьєва М.Г., Липовик В.В., Щербак А.Ф. Математичне програмування. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2003. – 273 с.

2. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
3. *Поршнев С.В.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCad. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 252 с.