Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Факультет кібербезпеки, комп’ютерної та програмної інженерії
Кафедра комп’ютеризованих систем управління

Домашнє завдання
з дисципліни «Системи підтримки прийняття рішень»
на тему «Метод побудови і аналізу множини Еджворта—Парето»

Виконав:
студент ФККПІ
групи СП-425
Клокун В. Д.
Перевірила:
Росінська Г. П.

Київ 2020

Зміст

1. Область і мета застосування

Щоб дослідити метод побудови і аналізу множини Еджворта—Парето, необхідно зрозуміти, в яких областях він застосовується та які задачі вирішує. Основна область застосування методу побудови і аналізу множини Еджворта—Парето — *багатокритеріальна оптимізація* у дослідженні операцій та теорії прийняття рішень. Задачі багатокритеріальної оптимізації зазвичай потребують оптимізувати, тобто мінімізувати або максимізувати, значення декількох цільових характеристик або показників ефективності [1, с. 42]. У такому випадку зазвичай немає єдиного оптимального розв'язку. Натомість, є множина альтернативних і однаково оптимальних розв'язків, але з різними компромісами. Метод побудови і аналізу множини Еджворта—Парето прекрасно описує сам себе: спочатку знаходять множину оптимальних розв'язків, яка називається множиною Еджворта—Парето, а потім кожен елемент цієї множини аналізують; далі на основі аналізу приймають рішення залежно від методу аналізу або побажань особи, що приймає рішення.

Розглянемо приклад задачі багатокритеріальної оптимізації. Припустимо, що особа, яка приймає рішення, хоче купити оптимальну машину. Кожна машина коштує певну суму c, витрачає деяку кількість палива f на 100 км, виділяє p шкідливих викидів у атмосферу, а її зручність можна оцінити значенням k. Як видно, навіть швидко формулюючи задачу, в ній можна виділити цілих 4 критерії ефективності кожного розв'язку. Чим глибше аналізують задачу, тим більше критеріїв можна виділити. Особа, що приймає рішення, має свої вимоги щодо значень кожного критерію: зменшити вартість c, витрати палива f та кількість шкідливих викидів p, при цьому збільшити значення комфорту k.

2. Математична постановка задачі

Математично задача багатокритеріальної оптимізації формулюється так:

$$\begin{array}{ll} \text{Мінімізувати} & \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \\ \text{так, щоб} & \mathbf{x} \in S_i. \end{array}$$

Це означає, що в ній представлені $k \geqslant 2$ *цільових функцій* f_i, де $i \in \{1, \dots, k\}$, причому $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Кожна цільова функція f_i приймає на вхід *вектор вирішальних змінних* (або просто *вирішальний вектор*) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, а кожен вектор вирішальних змінних $\mathbf{x}$ лежить в непустій *області допустимих розв'язків* $S \subset \mathbb{R}^n$. Кожному розв'язку відповідає *цільовий вектор*, який складається з цільових значень, тобто значень функції $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T$, тобто цільові вектори є образом відображення вирішальних векторів. Крім цього, цільові вектори формують множину розв'язків $Z = \mathbf{f}(S)$, яка в свою чергу є образом відображення області допустимих значень в цільовому просторі [2, с. X].

2.1. Еталонні точки

Щоб мати можливість оцінити якість знайдених розв'язків, зазвичай розглядають такі точки в області значення цільової функції: [3, с. 34][2, с. xi]

— ідеальна точка або ідеальний цільовий вектор $\mathbf{z}^*$ — визначається як вектор, кожна з координат якого має оптимальне значення відповідної складової цільової функції. Наприклад, якщо оптимальним значенням функції є мінімум, тоді ідеальна точка визначається так:

$$\mathbf{z}^* = \left(z_1^*, \dots, z_k^*\right) = \left(\min_{x \in S_i} f_1(\mathbf{x}), \dots, \min_{x \in S_i} f_k(\mathbf{x})\right)^T.$$

— утопічна точка або утопічний цільовий вектор $\mathbf{z}^{**}$ — це вектор, який строго кращий за ідеальний цільовий вектор $\mathbf{z}^*$. Його знаходять так:

$$\mathbf{z}^{**} = \mathbf{z}^* - \varepsilon U.$$

де $\varepsilon > 0$, а U — одиничний вектор.

— надир $\mathbf{z}^{\text{nad}}$ — це верхня границя множини Парето. Точка надиру визначається як вектор:

$$\mathbf{z}^{\text{nad}} = \left(z_1^{\text{nad}}, \dots, z_k^{\text{nad}}\right) = \left(\max_{x \in S_i} f_1(\mathbf{x}), \dots, \max_{x \in S_i} f_k(\mathbf{x})\right)^T.$$

Ці точки дозволяють порівняти певний розв'язок та оцінити його цінність. У деяких випадках ці точки можуть бути розв'язками.

2.2. Множина Еджворта—Парето

Оцінити якість розв'язків можна не лише за допомогою еталонних точок, адже можна перевірити, чи є цільовий вектор оптимальним. В багатокритеріальній оптимізації, цільовий вектор вважають оптимальним, якщо неможливо покращити жодну з його компонент, не погіршивши як мінімум одну іншу. Точніше, вирішальний вектор $\mathbf{x}' \in S$ називається *Парето-оптимальним*, якщо не існує такого іншого вирішального вектора $\mathbf{x} \in S$, що $f_i(\mathbf{x}) \leqslant f_i(\mathbf{x}')$ для усіх $i \in 1, \dots, k$ та $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}')$ для як мінімум одного індексу j. Кожна задача може мати декілька Парето-оптимальних векторів, або навіть їх нескінченно велику кількість. Множина усіх Парето-оптимальних вирішальних векторів називається *множиною Еджворта—Парето*, позначимо її як $P(S)$. Відповідно, цільовий вектор вважають оптимальним, якщо відповідний йому вирішальний вектор є Парето-оптимальним. Тоді множину Парето-оптимальних цільових векторів позначимо як $P(Z)$.

3. Побудова множини Еджворта—Парето

Щоб побудувати множину Еджворта—Парето, існує декілька підходів [4], [5], які можуть бути як наївними, так і більш ефективними. Так як ефективні методи, зокрема за допомогою використання функцій пристосованості, заслуговують окремих статей [6], а метою домашнього завдання є більш детальне дослідження методів аналізу, розглянемо лише наївний метод побудови множини Парето.

Перш за все зазначимо, що так як множина цільових векторів є образом відображення множини можливих розв'язків, то наївний алгоритм можна абсолютно аналогічно застосувати і для множини цільових векторів. У цьому прикладі наївний метод розглянутий на прикладі множини можливих розв'язків.

Також домовимось про позначення відношення «менше або дорівнює» для векторів. Відношення $\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}'$ справедливе тоді і тільки тоді, коли для будь-якого значення $i \in \{1, \dots, k\}$ значення компонент вектора $x_i \leqslant x_i'$, причому $x_i \neq x_i'$.

Отже, нехай множина можливих розв'язків X містить скінченну кількість елементів. Щоб побудувати множину Еджворта—Парето за наївним підходом, необхідно дотримуватись таких кроків:

1. Обрати можливий розв'язок $\mathbf{x} \in S_i$.
2. Порівняти його з усіма іншими можливими розв'язками $\mathbf{x}' \in \{S_i \setminus \mathbf{x}\}$.
3. Якщо для всіх інших можливих розв'язків $\mathbf{x}'$ справджується умова $\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}'$, вилучаємо обраний можливий розв'язок $\mathbf{x}$ і додаємо його у множину Парето–Еджворта $P(S)$.
4. Якщо ж для обраного розв'язку навпаки справджується умова $\mathbf{x}' \leqq \mathbf{x}$, обраний розв'язок $\mathbf{x}$ необхідно видалити з множини S_i і перейти до наступного можливого розв'язку.
5. Якщо жодна з умов не справдилась, не потрібно нічого видаляти, а лише перейти до наступного елемента в множині S_i.

Інакше кажучи, необхідно перевірити кожен можливий розв'язок $\mathbf{x} \in S_i$ на Парето-оптимальність, як описано в підрозділі 2.2.

4. Аналіз множини Еджворта—Парето

Як зрозуміло з визначення множини Еджворта—Парето, вона може містити декілька варіантів, які будуть однаково оптимальними. Тобто особі, що приймає рішення, все ще потрібно буде обрати один варіант серед усіх Парето-оптимальних варіантів. Для цього призначений другий крок методу — аналіз множини.

Існує багато методів аналізу множини Парето, які часто використовують спільні стратегії, тому їх відносять до спільних категорій. В рамках цих категорій, методи бувають:

- неінтерактивні,
    - базові,

— методи, що не враховують побажання,
— апостеріорні
— апріорні,
— інтерактивні,
— еволюційні.

Розглянемо ці категорії детальніше.

4.1. Неінтерактивні методи

Неінтерактивні методи аналізу множини Парето отримали таку назву тому, що особа, що приймає рішення, не бере участь у процесі пошуку розв'язку.

4.1.1. Базові методи

Першою підкатегорією неінтерактивних методів є базові методи, які зазвичай використовують ідею *скаляризації*: оскільки цільова функція задачі багатокритеріальної оптимізації має векторні значення, її перетворюють на функцію зі скалярним значенням. Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до задачі оптимізації з однією скалярною цільовою функцією. Функція скаляризації має задовільняти нижчезазначеним умовам.

Нехай F — функція скаляризації, що перетворює векторну функцію $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ на скалярну. Якщо F зберігає впорядкованість за Парето $\mathbf{y}$, тобто, якщо для довільних $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^2 \in \mathbf{f}(X)$ виконується:

$$\mathbf{y}^1 \leq \mathbf{y}^2 \implies F(\mathbf{y}^1) < F(\mathbf{y}^2),$$

тоді розв'язок $\mathbf{x}^0$, що мінімізує F на X є розв'язком за Парето.

Якщо F зберігає відношення порядку $<$ в $\mathbf{y}$, тобто, якщо для довільних $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^2 \in \mathbf{f}(X)$ виконується:

$$\mathbf{y}^1 < \mathbf{y}^2 \implies F(\mathbf{y}^1) < F(\mathbf{y}^2),$$

тоді розв'язок $\mathbf{x}^0$, що мінімізує F на X є слабким за Парето. Якщо F неперервна на $\mathbf{y}$, та $\mathbf{x}^0$ єдина точка мінімуму F на X, тоді $\mathbf{x}^0$ є розв'язком за Парето.

ЗВАЖЕНА СУМА Одним із інструментів скаляризації є зважена сума:

$$F_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = w_1 f_1(\mathbf{x}) + \cdots + w_r f_r(\mathbf{x}).$$

Наведена функція F_1 зберігає впорядкованість за Парето для $w > 0$. Тому розв'язки, що мінімізують F_1 на X для довільних $w > 0$ є оптимальними за Парето. Однак F_1 не зберігає впорядкованість за Парето для $w \geq 0$, а зберігає лише відношення $<$ і тому розв'язки, що мінімізують F_1 на X для $w \geq 0$ є слабкими за Парето.

Недоліком методу зважених сум у випадку неопуклої множини значень цільових функцій є неможливість охопити всі оптимальні за Парето точки з множини Парето-фронту.

У задачах комбінаторної багатокритеріальної оптимізації множина цільових значень не є опуклою, тому метод зважених сум не підходить для скаляризації цільових функцій для цих задач.

ФУНКЦІЯ СКАЛЯРИЗАЦІЇ ЧЕБИШЕВА Також для скаляризації використовують функцію Чебишева:

$$F_\infty(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \max_{1 \leq i \leq r} w_i f_i(\mathbf{x}).$$

Зважена функція скаляризації Чебишева зберігає відношення $<$ і тому мінімум F_∞ є слабким за Парето.

МЕТОД ЗМІНИ ОБМЕЖЕНЬ (ε-ОБМЕЖЕННЯ) За методом зміни обмежень одну з цільових функцій залишають як цільову, а решту перетворюють на обмеження. Тобто, нехай f_r буде цільовою, а решта $f_1, \dots, f_{r-1}$ як обмеження нерівності:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} && f_r(\mathbf{x}), \\ &\text{так, щоб} && f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, r-1, \\ & && \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Значення $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}$ можуть розглядатись як припустимі рівні для $f_1, \dots, f_{r-1}$.

4.1.2. Методи, що не враховують побажання

Як дає зрозуміти назва, ці методи не враховують побажання особи, що приймають рішення, у своїй роботі. Їх суть полягає в тому, щоб знайти певний компромісний розв'язок, зазвичай посередині множини Парето, тому що під час роботи метода немає інформації, яка б направляла його до розв'язків, яким надає перевагу особа, що приймає рішення. Методи, що не враховують побажання, підходять у випадках, коли немає особи, що приймає рішення, або вона не очікує нічого конкретного від розв'язків. Також їх можна застосовувати як початкову точку для інтерактивних методів.

МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО КРИТЕРІЮ Суть методу глобального критерію в тому, щоб мінімізувати відстань між певною бажаною точкою відліку та областю допустимих розв'язків. Для цього аналітик обирає точку відліку і метрику відстані. Як точку відліку логічно обрати ідеальну точку y^I. Що до метрики відстані, то можна використати метрику L_p або метрику Чебишева L_∞. Це дозволить виміряти відстань до ідеальної точки $\mathbf{z}^*$ або утопічної точки $\mathbf{z}^{**}$. Потім, залежно від обраної метрики, необхідно вирішити таку задачу:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} \left| f_i(\mathbf{x}) - z_i^* \right| \right)^{1/p}, \\ &\text{так, щоб} \qquad \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned}$$

де показник степеня $1/p$ можна опустити, або ж:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} \quad \max_{i \in \{1,\dots,k\}} \left[\left| f_i(\mathbf{x}) - z_i^* \right| \right], \\ &\text{так, щоб} \qquad \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned}$$

відповідно. Зазначимо, що якщо на цьому етапі відомо значення ідеальної точки, можна ігнорувати оператори модуля, тому що згідно з визначенням ідеальної точки, різниця завжди буде додатною.

Також варто вказати, що якщо цільові функції мають різні степені, цей метод правильно спрацює тільки якщо привести цільові функції до однорідної, безрозмірного діапазону. Це означає, наприклад, що треба розділити кожен член зі значенням модуля, який містить значення f_i, на відповідний діапазон f_i у множині Парето, тобто на $z_i^{\text{nad}} - z_i^{**}$ для кожного значення i. Так як утопічна точка домінує над усіма Парето-оптимальними розв'язками, необхідно використовувати утопічні, а не ідеальні цільові значення, щоб не ділити на нуль.

НЕЙТРАЛЬНИЙ КОМПРОМІСНИЙ РОЗВ'ЯЗОК Іншим простим способом знайти розв'язок без особи, що приймає рішення називається *нейтральним компромісним розв'язком*. Його ідея полягає в тому, щоб знайти допустиму точку «десь посередині» значень цільових функцій у множині Парето. Компоненти цієї точки можна знайти як середнє значення ідеальних або утопічних векторів та вектора надиру. Тобто можна знайти нейтральний розв'язок, розв'язавши таку задачу:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} \quad \max_{i \in \{1,\dots,k\}} \left[\frac{f_i(\mathbf{x}) - \left(\left(z_i^* + z_i^{\text{nad}} \right) / 2 \right)}{z^{\text{nad}} - z_i^{**}} \right], \\ &\text{так, щоб} \qquad \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned}$$

Як видно, у цій задачі використовується утопічний цільовий вектор та надир або інші наближення із діапазону цільових функцій у множині Парето, щоб привести цільові функції до єдиного діапазону. Такий розв'язок буде слабо Парето-оптимальним. Звісно, можна замінити середнє значення ідеальної точки з надиром на середнє значення утопічної точки з надиром.

4.1.3. Апостеріорні методи

Щоб використати апостеріорні методи, необхідна особа, що приймає рішення. Так як може існувати нескінченно багато Парето-оптимальних розв'язків, апостеріорні методи генерують представлення множини Парето та показують його особі, що приймає рішення, а вона обирає те, яке найбільше її влаштовує. Ідея в тому, що коли особа, що приймає рішення, побачить представлення різних Парето-оптимальних розв'язків, їй буде легше прийняти рішення. Недоліки апостеріорних методів у тому, що зазвичай вони обчислювально складні, а також у тому, що навіть після того, як особа, що приймає рішення, побачить загальний вигляд Парето-оптимальних розв'язків, їй все ще може бути важко обрати один.

Варто пам'ятати, що метод зважених сум та метод зміни ε-обмеження можна використати як апостеріорні методи. Але зараз розглянемо традиційні методи цього класу.

МЕТОД ЗВАЖЕНИХ МЕТРИК Метод зважених метрик[1] ототожнює ідею метода глобального критерію, в якому мінімізується відстань між певною точкою відліку та областю допустимих розв'язків. Різниця в тому, що зважуючи метрики відстані, можна отримувати різні розв'язки.

Як і у методі глобального критерію, знайдений розв'язок сильно залежить від використаної метрики відстані. У випадку, коли $1 \leqslant p \leqslant \infty$, задача формулюється так:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} && \left(\sum_{i=1}^{k} w_i \left(f_i(\mathbf{x}) - z_i^*\right)^p\right)^{1/p}, \\ &\text{так, щоб} && \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned} \tag{1}$$

де показник степеня $1/p$ можна опустити. Або ж можна сформулювати *зважену за Чебишевим задачу*:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} && \max_{i \in \{1,\ldots,k\}} \left[w_i \left(f_i(\mathbf{x}) - z_i^*\right)\right], \\ &\text{так, щоб} && \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Зазначимо, що припускаючи, що при розв'язку задачі відомий глобальний ідеальний або утопічний вектор, ми ігноруємо абсолютні значення. Що стосується оптимальності, можна довести, що розв'язок задачі (1) є Парето-оптималььним, якщо він унікальний, або якщо усі ваги додатні. Також, розв'язок задачі (3) є слабко Парето-оптимальним, якщо ваги додатні, а ще ця задача має як мінімум один Парето-оптимальний розв'язок. Тим не менш, щоб довести, що змінюючи значення ваг у задачі (1), можна знайти усі Парето-оптимальні розв'язки, необхідно, щоб задача була опуклою. Натомість, розв'язуючи задачу (3), можна знайти будь-яке Парето-оптимальне значення, якщо використовувати утопічний цільовий вектор як точку відліку.

[1] Іноді його також називають компромісним програмуванням.

ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ СКАЛЯРИЗАЦІЇ ДОСЯГНЕННЯ Існують особливі скаляризаційні функції, які називаються *функціями скаляризації досягнень* або просто *функціями досягнень*. Вони опираються на певну довільну точку відліку $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^k$. Ідея їх застосування полягає в тому, щоб відобразити точку відліку, яка містить бажані рівні досягнень, на множину Парето. Використовуючи різні точки відліку, отримують різні Парето-оптимальні розв'язки. Цей метод відрізняється від методу зважених метрик тим, що він не використовує метрики відстані, а точка відліку не обов'язково має бути ідеальним або утопічним цільовим вектором. Завдяки цим властивостям, метод знаходить Парето-оптимальні розв'язки незалежно від того, як обирають точку відліку.

4.1.4. Апріорні методи

Апріорні методи отримали таку назву, тому що особа, яка приймає рішення, повинна зазначити інформацію про свої побажання до початку пошуку розв'язку. Якщо розв'язок задовольняє особу, яка приймає рішення, їй не потрібно витрачати багато час на власне процес розв'язку. Однак, на жаль, особа, яка приймає рішення, часто не знає, на який розв'язок можна очікувати та наскільки реалістичні її очікування. В такому випадку особа, що приймає рішення, може бути розчарована знайденим розв'язком там може бути готовою змінити свої побажання. Також зазначимо, що вищеописані методи також можна використати як апріорні, і розглянемо власне апріорні методи.

МЕТОД ОЦІНЮЮЧОЇ ФУНКЦІЇ Якщо особа, яка приймає рішення, знає явну математичну формулу $v(x)$, яка виражає усі її побажання, їй прекрасно підійде *метод оцінюючої функції*, адже в такому випадку можна сформулювати задачу так:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} \quad v(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \\ &\text{так, щоб} \qquad \mathbf{x} \in S_i. \end{aligned}$$

Так як оцінююча функція повністю надає повне упорядкування в області цільових значень, таким способом можна знайти найкращий Парето-оптимальний розв'язок. На жаль, дуже важко або навіть неможливо знайти ту саму явно математичну формулу $v(x)$, або ж навіть якщо таку функцію знайшли, вона може бути дуже складною і її може бути складно оптимізувати. Крім того, навіть якщо особа, яка приймає рішення, змогла виразити свої побажання у вигляді оцінюючої функції, отримана структура побажань може бути занадто спрощеною, оскільки оцінюючі функції не можуть передати несумісність та інтранзитивність. Інакше кажучи, побажання особи, яка приймає рішення, повинні відповідати певним вимогам, щоб для них можна було визначити оцінюючу функцію.

МЕТОД ЛЕКСИКОГРАФІЧНОГО УПОРЯДКУВАННЯ Щоб застосувати метод лексикографічного упорядкування, особа, яка приймає рішення, має упорядкувати цільові функції за їх абсолютною важливістю. Це означає, що більш важлива ціль нескінченно більш важлива, ніж менш важлива ціль. Після упорядкування спочатку мінімізується найбільш важлива цільова функція, дотримуючись початкових обмежень. Якщо ця задача має унікальний розв'язок, він остаточний і процес розв'язання завершується. Інакше, вводять нове обмеження, яке гарантує, що найважливіша функція збереже своє оптимальне значення, а потім мінімізують наступну за важливістю цільову функцію. Якщо наступна функція має унікальний розв'язок, процес розв'язання закінчується. Інакше ж він продовжується за вищеописаними кроками.

Варто зазначити, що перевірити, чи є розв'язок унікальним — обчислювально нетривіальна задача, тому щоб впевнитись, необхідно розв'язати задачу оптимізації наступної функції. Тоді якщо виявиться, що наступна задача має унікальний розв'язок, стає зрозумілим, що початкова задача обчислювально погано сформульована.

Можна довести, що розв'язок за лексикографічним порядком є Парето-оптимальним. Цей метод дуже простий, і можна сказати, що люди часто приймають рішення по порядку. Однак, особі, яка приймає рішення, може бути складно упорядкувати цілі в абсолютному порядку важливості. Крім цього, цей метод дуже грубий, і досить ймовірно, що процес розв'язання закінчиться до того, як будуть розглянуті менш важливі цілі. Це означає, що під час розв'язку можуть розглядатись не усі цілі, які були сформульовані у задачі, що проблематично.

4.2. Інтерактивні методи

В інтерактивних методах особа, яка приймає рішення, грає важливу роль у процесі розв'язання, і ідея цих методі в полягає в тому, щоб підтримувати особу у процесі розв'язання. В інтерактивних методах повторюються кроки ітеративного алгоритму розв'язання, а особа, яка приймає рішення, поступово надає інформацію про свої побажання, щоб знайти найбільш підходящий розв'язок.

Залежно від способу надання інформації про побажання, інтерактивні методи можуть бути засновані на інформації про недоліки, точки відліку або на класифікації цільових функцій. Загалом, інтерактивні методи досить складні у розумінні і є відносно новими, тому виходять за рамки даного домашнього завдання.

4.3. Еволюційні методи

Еволюційні методи оптимізації істотно відрізняються від класичних методів. По-перше, процедури еволюційної оптимізації зазвичай не використовують інформацію про градієнт під час пошуку, тому методи еволюційної оптимізації — це методи прямого пошуку, що дозволяє використовувати їх у найрізноманітніших задачах оптимізації. Тим не менш, ця властивість також означає, що методи еволюційної оптимізації можуть поступатись градієнтним методам у більш структурованих задачах на кшталт опуклого, лінійного або квадратичного програмування.

По-друге, еволюційні методи використовують більш ніж один розв'язок за ітерацію, тобто використовують *популяційний підхід*. Це дає декілька переваг:

— обчислення, необхідні для методів еволюційної оптимізації, можна виконувати паралельно;

— методи еволюційної оптимізації можуть знаходити одразу декілька оптимальних розв'язки, що сприяє розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації;

— методи еволюційної оптимізації використовують стохастичні оператори, на відміну від детермінованих операторів, які використовуються у класичних задачах оптимізації. Зазвичай такі оператори використовують упереджені ймовірнісні розподіли, щоб досягти бажаного результату, що дозволяє еволюційним алгоритмам краще досягати оптимумів, а також надає їм глобальну перспективу задачі.

Методи еволюційної оптимізації можна описати простим алгоритмом (алгоритм 1).

Алгоритм 1: Загальний вигляд еволюційного алгоритму

$t = 0$;
`Ініціалізувати`(P_t);
поки `ДосягнутийКінець`(P_t, P_{t+1}) $= 0$ **роби**
  `Оцінити`(P_t);
  $P_t' :=$ `Відібрати`(P_t);
  $P_t'' :=$ `Різноманітнити`(P_t');
  $P_{t+1} :=$ `ЗалишитиНайкращих`(P_t, P_t'');
  $t := t + 1$;
кінецьпоки

У наведеному алгоритмі процедура `Ініціалізувати` ініціалізує початкову популяцію випадковими значеннями із області допустимих. Після ініціалізації починається еволюційне моделювання: процедура `ДосягнутийКінець` перевіряє, чи досягнутий кінець на даному етапі. Якщо ні, то процедура `Оцінити` оцінює поточну популяцію. В контексті багатокритеріальної оптимізації це означає, що вона обчислює значення цільових функцій для поточної популяції. Коли особини популяції оцінені, процедура `Відібрати` відбирає найкращі особини.

Далі залишившихся найкращих особин в популяції змінюють за допомогою процедури `Різноманітнити`, відбуваються мутації за правилами конкретного алгоритму. Після зміни найкращих особин процедура `ЗалишитиНайкращих` обирає найкращих серед них та попередньої популяції та об'єднує залишившихся в нову єдину популяцію, і в кінці кінців збільшується лічильник ітерацій, а процес повторюється знову.

5. Висновки

Виконуючи дане домашнє завдання, ми ознайомились із застосуванням методом побудови і аналізу множини Еджворта—Парето до задач прийняття рішень. Користь метода полягає в тому, що спочатку він допомагає побудувати множину дійсно оптимальних рішень, які неможливо змінити, не втративши оптимальність. Ця множина називається множиною Еджворта—Парето. Побудувавши множину, особа, що приймає рішення, отримує багато оптимальних рішень. Однак, найчастіше за все необхідно обрати лише одне.

Тому метод переходить до наступного кроку — аналізу побудованої множини. Існує багато методів аналізу множини, однак їх можна розподілити за категоріями. Розрізняють *неінтерактивні*, *інтерактивні* та *еволюційні* методи. Перші дві категорії методів звертають увагу на те, чи приймає особа, яка приймає рішення, участь у процесі пошуку єдиного оптимального розв'язку. Якщо не приймає, метод вважається неінтерактивним; якщо ж, навпаки, приймає, метод вважають інтерактивним.

Неінтерактивні методи досить прості, але також поділяються на підкатегорії. Перша підкатегорія — це *базові методи*, які зазвичай намагаються перейти від задачі багатокритеріальної оптимізації до задачі однокритеріальної оптимізації. Друга підкатегорія — *методи, які не враховують побажання*. Такі методи ігнорують побажання особи, яка приймає рішення, і намагаються знайти компроміс, «середнє» значення. Не варто сприймати як недолік той факт, що метод не бере до уваги побажання особи, яка приймає рішення; навпаки, це варто сприймати як перевагу, коли особа, яка приймає рішення, недоступна або не може сформулювати свої побажання. Третя підкатегорія — це *апостеріорні методи*, які передбачають, що особа, яка приймає рішення, обере розв'язок після того, як закінчиться процес розв'язання. Протилежною до апостеріорних методів є четверта підкатегорія — *апріорні методи*, розрахована на те, що спочатку особа, яка приймає рішення, вкаже, якими повинні бути розв'язки, а вже потім метод почне розв'язувати задачу.

Отже, неінтерактивні методи варто використовувати, коли за тих чи інших причин треба зменшити участь особи, яка приймає рішення, у процесі, коли неможливо чітко виділити побажання або коли не важлива велика точність розв'язків.

Складнішою є категорія інтерактивних методів. Вона передбачає, що особа, яка приймає рішення, також приймає активну участь у процесі розв'язку задачі. Це означає, що процес роботи методу ітеративний: на кожній ітерації метод знаходить розв'язок і презентує його особі, яка приймає рішення, а вона натомість вказує свої побажання щодо наступної ітерації розв'язку. Інтерактивні методи шукають розв'язки на основі інформації про недоліки кожного розв'язку, позиції відносно певної точки відліку або класифікації цільової функції, яку вводить особа, що приймає рішення.

Це означає, що інтерактивні методи варто використовувати, коли є відносно чіткі вимоги до бажаних розв'язків або коли особа, яка приймає рішення, бажає приймати активну участь у процесі розв'язку, щоб мати чітке представлення про їх поточний стан.

Найновішою, найскладнішою та найефективнішою є категорія еволюційних методів. Вони надихаються процесом природного відбору і намагаються імітувати його при пошуку розв'язків поставленої задачі. Імітація полягає в тому, що алгоритм починає зі створення певної популяції розв'язків, яку він потім оцінює, змінює і відбирає з неї найкращих до тих пір, поки не досягне умови завершення відбору, тобто знайде оптимальний розв'язок. Такий підхід дозволяє не тільки розв'язувати задачу, одночасно дивлячись на глобальний простір розв'язків, але й пришвидшити процес, виконуючи обчислення паралельно.

Еволюційні методи дають нову перспективу у розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації і дозволяють ефективно розв'язувати їх на обчислювальних кластерах, а також досить швидко моделювати цілі популяції розв'язків і ефективно справлятись із нечіткими вимогами, однак більш-менш чітким знанням про бажану популяцію.

Література

1. *Е.С. В.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — 2-е вид. — Наука, 1988. — (Проблемы науки и технического прогресса (пн-тп)). — ISBN 5020139009.
2. *Kaisa Miettinen*. Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches / за ред. Jürgen Branke, Kalyanmoy Deb, Roman Słowiński. — 1-е вид. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — (Lecture Notes in Computer Science 5252 : Theoretical Computer Science and General Issues). — ISBN 9783540889076.
3. *Matthias Ehrgott*. Multicriteria Optimization. — 2-е вид. — Springer, 2005. — ISBN 9783540213987.
4. *Ehlers R.* Computing the Complete Pareto Front // CoRR. — 2015. — arXiv: 1512.05207. — URL: http://arxiv.org/abs/1512.05207.
5. *Boglárka G.-Tóth and Vladik Kreinovich*. Verified Methods for Computing Pareto Sets: General Algorithmic Analysis // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. — Берлін, 2009. — Т. 19, № 3. — С. 369—380. — URL: https://content.sciendo.com/view/journals/amcs/19/3/article-p369.xml.
6. *Shan, Songqing and Wang, G. Gary*. An Efficient Pareto Set Identification Approach for Multiobjective Optimization on Black-Box Functions // Journal of Mechanical Design. — 2004. — Листоп. — Т. 127, № 5. — С. 866—874. — ISSN 1050-0472. — DOI: 10.1115/1.1904639. — eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article-pdf/127/5/866/5922443/866_1.pdf. — URL: https://doi.org/10.1115/1.1904639.