Лабораторна робота 2

МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Мета: ознайомлення з методом аналізу ієрархій. Студент має сформулювати отриманне завдання прийняття рішення в умовах визначеності з двома ієрархічними рівнями, та обрати оптимальну альтернативу.

Основні теоретичні відомості

Моделі лінійного, динамічного і т.д. програмування є прикладом прийняття рішень в умовах визначеності. Ці моделі застосовують лише в тих випадках, коли альтернативні розв'язки можна зв'язати між собою точними лінійними функціями. Але існує й інший підхід до прийняття рішень в умовах визначеності, коли визначаються деякі кількісні показники, що забезпечують числову шкалу переваг для можливих альтернативних розв'язків. Цей підхід відомий як ***метод аналізу ієрархій***.

Етапи розв'язку завдання:

1. Якщо є n критеріїв на заданому рівні ієрархії, то створюється матриця А розмірності $n \times n$, яка називається матрицею парних порівнянь. Вона відображує судження особи, що ухвалює рішення, щодо важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується таким чином, що критерій у рядку i (i=1, 2, …, n) оцінюється щодо кожного з критеріїв, представлених n стовпцями. Позначимо через a_{ij} елемент матриці А, що перебуває на перетинанні i –рядка й j – стовпця. Відповідно до методу аналізу ієрархій для опису згаданих оцінок використовуються цілі числа від 1 до 9. При цьому a_{ij}=1 означає, що i –й та j – й критерій однаково важливі, a_{ij}=5 відображує думку, що i –й критерій значно важливіше, чим j – й, а a_{ij}=9 указує, що i –й критерій надзвичайно важливіше j – го. Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно. На матрицю парних порівнянь накладаються наступні обмеження:

якщо $a_{ij}=k$, то $a_{ji}=1/k$.

усі діагональні елементи a_{ij} матриці A повинні бути рівні 1, тому що вони виражають оцінки критеріїв щодо самих себе.

2. Визначити відносні ваги w критеріїв і альтернатив шляхом нормалізації матриці А (розподіл елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця). Відносні ваги w, що шукаються обчислюються тепер у вигляді середніх значень елементів відповідних рядків нормалізованої матриці А.
3. Визначити погодженість матриці А. Погодженість означає, що розв'язок буде погоджений з визначеннями парних порівнянь критеріїв або альтернатив. З математичної точки зору погодженість матриці А означає, що $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ для всіх i, j і k. Властивість погодженості вимагає лінійної залежності стовпців (і рядків) матриці А. Зокрема, стовпці матриці порівняння розміром 2×2 є залежними, і, отже, така матриця завжди є *погодженою*. Не всі матриці порівнянь є погодженими, тому що будуються на основі людських суджень. При цьому необхідно визначити: чи є рівень непогодженості прийнятним.
4. Ідеально погоджена матриця A породжує нормалізовану матрицю N, у якій усі стовпці однакові.

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}.$$

Матриця порівнянь А може бути отримана з матриці N шляхом розподілу елементів i-го стовпця на w_i (це процес, зворотний знаходженню матриці N з A).

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи наведене визначення матриці A, маємо

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix}=n\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

У компактній формі умова погодженості матриці A формулюється в такий спосіб. Матриця A буде погодженою тоді й тільки тоді, коли

$$Aw = nw,$$

де w – вектор стовпець відносних ваг w_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Коли матриця A не є погодженою, відносна вага w_i апроксимується середнім значенням n елементів i-й рядка нормалізованої матриці N. Позначивши через $\overline{w}$ обчислену оцінку (середнє значення в рядку), умова погодженості матриці можна записати

$$A\overline{w} = n_{max}\overline{w},$$

де $n_{\max} \geq n$. У випадку $n_{\max}= n$ матриця порівняння A є ідеально погодженою.

Рівень непогодженості матриці A обчислюється з виразу:

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

де $CI = \frac{n_{\max} - n}{n-1}$ - коефіцієнт погодженості матриці A,

$RI = \frac{1{,}98(n-2)}{n}$ - стохастичний коефіцієнт погодженості матриці A.

Стохастичний коефіцієнт погодженості RI визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнта CI для великої вибірки генерованих випадковим образом матриць порівняння A.

Якщо $CR \leq 0{,}1$, рівень непогодженості є прийнятним. А якщо ні, то рівень непогодженості матриці порівняння A є високим і особі, що ухвалює рішення, рекомендується перевірити елементи парного порівняння a_{ij} матриці A з метою одержання більш погодженої матриці.

Значення n_{max} обчислюється на основі матричного рівняння $A\overline{w} = n_{\max}\overline{w}$, при цьому неважко помітити, що i-е рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j = n_{\max}\overline{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = 1$, сума елементів у стовпці розрахункової матриці може бути записана в наступному виді

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j\right) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = n_{\max}.$$

У такий спосіб величину n_{max} можна визначити шляхом обчислення вектор-стовпця $A\overline{w}$ з наступним підсумовуванням його елементів.

Використовуючи отримані вагові коефіцієнти розраховується комбінована вага для кожної альтернативи. Альтернатива, комбінований ваговий коефіцієнт якої є найбільшим, являє собою оптимальний розв'язок.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант завдання слід отримати у викладача.

1. Відділ кадрів фірми звузив пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: Стив (S), Джейн (J) і Майса (M). Кінцевий відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (C), досвід роботи (К) та рекомендації (Р). Відділ кадрів використовує матрицю А (наведену нижче) для порівняння трьох критеріїв. Після проведених співбесід із трьома претендентами, побудовані матриці АС, АО і АР. Якого із трьох кандидатів слід прийняти на роботу?

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} C & O & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ O \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_c = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_o = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_p = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Кевин і Джун Парки (К і Д) купують новий будинок. Розглядаються три варіанти А, В та С. Парки встановили два критерії для вибору будинку: площа зеленої галявини (Л) і близькість до місця роботи (Б), а також розробили матриці порівнянь, наведені нижче. Необхідно оцінити три будинки в порядку їх пріоритету й обчислити коефіцієнт погодженості кожної матриці.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} К & Д \end{matrix} \\ \begin{matrix} К \\ Д \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_к = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} Л & Б \end{matrix} \\ \begin{matrix} Л \\ Б \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_Д = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} Л & Б \end{matrix} \\ \begin{matrix} Л \\ Б \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_{КЛ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{КБ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{ДЛ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{ДБ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Автор книги по дослідженню операцій визначив три критерії для вибору видавництва, яке буде друкувати його книгу: відсоток авторського гонорару (R), рівень маркетингу (M) і розмір авансу (A). Видавництва Н і Р виявили цікавість до видання книги. Використовуючи наведені нижче матриці порівняння, необхідно дати оцінку двом видавництвам і оцінити погодженість розв'язку.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} R & M & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ M \\ A \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_R = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_M = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4. Професор політології планує передбачити результат виборів у місцеву шкільну раду. Кандидати I, B і S балотуються на одне місце. Професор ділить усіх виборців на три категорії: ліві (L), центристи (C) і праві (R). Оцінка кандидатів ґрунтується на трьох факторах: педагогічний досвід (О), відношення до дітей (Д) і характер (Х). Нижче наведені матриці порівняння для першого ієрархічного рівня, пов'язаного із градацією виборців (ліві, центристи й праві).

$$
A=\begin{array}{c} \\ L \\ C \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad
A_L=\begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad
A_c=\begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad
A_R=\begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Професор згенерував ще дев'ять матриць порівняння для трьох кандидатів на другому ієрархічному рівні, пов'язаному з педагогічним досвідом, відношенням до дітей і характером. Потім був використаний метод аналізу ієрархій для відомості цих матриць до наступних відносних ваг.

	Ліві			Центристи			Праві		
Кандидат	О	Д	Х	О	Д	Х	О	Д	Х
I	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	0,2	0,7	0,1	0,3
B	0,5	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4	0,1	0,4	0,2
S	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,2	0,5	0,5

Використовуючи цю інформацію, необхідно визначити, хто з кандидатів виграє вибори.