Міністерство освіти і науки України
Миколаївський державний гуманітарний університет
ім. Петра Могили
комплексу “Києво-Могилянська академія”

В.Я. КУТКОВЕЦЬКИЙ

Дослідження операцій

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Миколаїв
Видавництво МДГУ ім. Петра Могили
2003

ББК 3-17
К 95
УДК 517.93

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 14/18.2-1149 від 03.06.2002 р.).

Друкується за ухвалою Вченої ради МДГУ ім. П. Могили (протокол № 5 (12.6) від 25 травня 2002 р.).

Рецензенти:
Ставинський А.А. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри суднових електроенергетичних систем Українського державного морського технічного університету.
Павлов Г.В. – доктор технічних наук, завідувач кафедри комп'ютерних систем управління Українського державного морського технічного університету.

К 95 **Кутковецький В.Я.**
Дослідження операцій: Навчальний посібник. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. – 260 с.

ISBN 966-7458-80-6 **ББК 3-17**

У навчальному посібнику розглянуті основні принципи та задачі дослідження операцій, основи теорії прийняття рішень в умовах визначеності, ризику та невизначеності; критерії оптимальності; отримання системи рівнянь для задач лінійного програмування і їх рішення графоаналітичним та симплекс-методами; транспортна задача; задача комівояжера; задачі динамічного програмування; система масового обслуговування; теорія ігор. Посібник містить приклади основних розрахунків і багато задач для індивідуального розв'язання студентами у групі.

Посібник призначений для студентів вузів гуманітарних напрямків очних та заочних форм навчання й може використовуватися для вивчення курсу, виконання практичних завдань, курсового та дипломного проектування.

ISBN 966-7458-80-6

Вступ

Враховуючи, що засвоєння курсу дослідження операцій є важливою складовою частиною вищої освіти, у посібнику головна увага приділена питанням практичного використання основних методів дослідження операцій з детальним описом алгоритму виконання розрахунків та наведенням прикладів. Курс розрахований приблизно на 140 годин, з яких 70 годин припадає на лекції, а 70 годин – на практичні заняття. Завданням посібника є представлення методів як інструмента дослідження операцій, що надало можливість уникнути розгляду обґрунтування складних теоретичних питань. Особлива увага приділена практичним розрахункам. Студенти повинні самостійно виконати розрахунки за індивідуальними завданнями і додатково використати готові програми ЕОМ або самі скласти потрібні програми за визначеним алгоритмом.

Загальні відомості про дослідження операцій. Історія розвитку методів дослідження операцій. Під операцією розуміють будь-яку діяльність людини, що спрямована до якоїсь мети (у виробництві, у військовій операції, у перевезенні вантажів, у плануванні робіт, у прийнятті політичного рішення та ін.).

Припустимо, що людина приймає рішення (часто – дуже важливе, бо від нього залежить її доля, доля її підприємства, доля військової операції, напрямок розвитку держави). Виникає питання: наскільки це рішення є вірним? Виникає потреба об'єктивної кількісної оцінки прийнятого рішення.

Дослідження психологів показали, що людина почуває себе невпевнено, якщо при прийнятті рішення потрібно врахувати більше ніж 10 змінних або суперечливих факторів. Але в реальних умовах виробництва на процеси впливають сотні (а іноді і тисячі) факторів. Тому науковий підхід до кількісної оцінки прийнятого рішення за допомогою методів дослідження операцій є дуже важливим.

Дослідження операцій – це теорія використання наукових кількісних методів для прийняття найкращого рішення у різних галузях діяльності людини. Ця наука дає об'єктивні, кількісні рекомендації по управлінню цілеспрямованими діями людини.

Як самостійний науковий напрямок дослідження операцій оформилося на початку 40-х років. Перші публікації з досліджень операцій з'явилися у 1939-1940 рр. А на період Другої світової війни США використовували науковців, які давали поради військовим щодо прийняття рішень при аналізі та дослідженні військових операцій. Звідси і виникла назва дисципліни.

Пізніше принципи і методи дослідження операцій (ДО) стали використовуватися у цивільній сфері: у промисловості, для управління фінансами, у сільському господарстві та ін.

Метою ДО є наукове кількісне обгрунтування рішень, що приймаються по управлінню у господарчих, військових та державних справах. У деяких випадках (наприклад, у багатьох комбінаторних задачах) отримати оптимальне рішення неможливо, і тому приймається субоптимальне (не найгірше) рішення.

Виникає питання філософського характеру: наскільки впливають методи ДО на наше життя? Відповідь на це дає скорочений перелік питань, які розв'язуються за допомогою методів ДО: плани у політиці (у Канаді та США створені, як їх прозвали, "електронні уряди"), плани розвитку народного господарства (тобто ми живемо і йдемо шляхом, вказаним ЕОМ), розвиток військових справ та військових операцій, фінансові справи. На перший погляд, ЕОМ у даних випадках лише "дає поради", а "рішення приймає людина". Але у деякій мірі це самообман, бо перевірити рішення машини людина може, знову ж таки, лише за допомогою іншої машини. І виходить, що доля людства залежить від рішення машини, затвердженого людиною.

Предметом дослідження операцій є: військові операції; рішення у політиці та виробництві, сільському господарстві, фінансових справах і т.п. Ми будемо розглядати виробничі процеси у господарчій діяльності людини.

Типовими класами задач дослідження операцій є:

УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ. Із збільшенням запасів створюються умови для більш ритмічної роботи виробництва. Запас – це гарантія можливості виконання будь-якого замовлення. Якщо запасів не вистачає, то можливі значні збитки за рахунок невиконання зобов'язань. Але разом з тим збільшується змертвілий капітал і витрати на зберігання. Недаремно існують підприємства, які зовсім не мають складів: їх замінюють майданчики для розвантаження отриманої та відвантаження виготовленої продукції. Виникає проблема управління запасами при найменших витратах.

РОЗПОДІЛ РЕСУРСІВ. Ресурси – це гроші, матеріали, людська праця і т.п. Ресурси завжди обмежені і в різних виробах забезпечують різний прибуток. Наприклад, ми маємо матерію, з якої можна виготовити або чоловічий, або жіночий, або дитячий одяг за різними цінами та прибутками. Виникає проблема розподілу людей, матерії та інших ресурсів між виробами з метою отримання найбільшого прибутку.

РЕМОНТ ТА ЗАМІНА ОБЛАДНАННЯ. Застаріле обладнання вимагає витрат на ремонт і має знижену продуктивність. Потрібні розрахунки для прийняття рішення по визначенню термінів ремонту та заміни обладнання, які забезпечують найбільший прибуток.

ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ: розглядають питання створення та функціонування черг (на заводському конвейєрі; у залізничній касі; для літаків над аеропортом, що йдуть на посадку; клієнтів в ательє побутового обслуговування; абонентів міської телефонної станції). Потрібно розв'язати проблеми якісного обслуговування при мінімальних витратах на обладнання.

ЗАДАЧА РЮКЗАКА: рюкзак (вантажна машина, вагон, судно, літак) має обмежену вантажність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.

ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА, СТВОРЕННЯ СУМІШЕЙ, НАЙМАННЯ/ЗВІЛЬНЕННЯ РОБІТНИКІВ, МЕРЕЖЕВОГО ПЛАНУВАННЯ РОБІТ, ПОРЯДКУ ОБРОБКИ КІЛЬКОХ РІЗНИХ ДЕТАЛЕЙ, КОМБІНОВАНІ ЗАДАЧІ та ін. – всім цим займається наука "Математичні методи дослідження операцій".

Головні етапи дослідження операцій:

1. Отримання змісту задачі у вигляді текстового (технічного) завдання. Збір даних, їх аналіз. Формулювання задачі з точки зору Замовника. Консультації з Замовником. Виявлення факторів, які впливають на процес. Уточнення мети (варіантів мети).

2. Формалізація задачі у вигляді математичної моделі, яка складається з функції мети (показника якості або ефективності процесу) $F = F(X, Y) = \max (\min)$ при обмеженнях $gi(X, Y) \le b_i$,

де X – вектор керованих змінних (ними розпоряджається оперуюча сторона); Y – вектор некерованих аргументів (некеровані, невизначені, випадкові фактори); $gi(X, Y)$ – функція споживання i-го ресурсу; b_i – величина *i-го* ресурсу (вага ресурсу, сума грошей, фонд машинного часу верстата та ін.).

За допомогою обмежень знаходять область припустимих рішень, а функція мети дозволяє визначити оптимальну точку у цій області. Отримати оптимальне рішення означає знайти такі величини X, при яких функція мети F досягає оптимуму при одночасному дотриманні нерівностей.

3. Розв'язання задачі виконується такими найбільш розповсюдженими методами:
   - лінійного програмування, якщо $F = f(X, Y)$ та $g_i(X, Y)$ – лінійні функції відносно X, Y;
   - нелінійного програмування, якщо $F = f(X, Y)$ та $g_i(X, Y)$ – нелінійні функції відносно X, Y;
   - динамічного програмування, якщо $F = f(X, Y)$ є аддитивною або мультиплікативною функцією від змінних X, Y;
   - дискретного програмування, якщо на змінні X, Y накласти умови дискретності (наприклад, цілочисельності);
   - стохастичного програмування, якщо Y – випадкова величина, а замість функції мети $F = f(X, Y)$ розглядають її математичне очікування.
4. Перевірка та коригування моделі. Перевірка виконується порівнянням поведінки моделі з фактичним її поводженням.
5. Реалізація на практиці.

Отримане на базі дослідження операцій рішення має свої особливості:

1. *Наукове кількісне обгрунтування* рекомендованого варіанту рішення із визначенням: обрання найкращого способу дій; повноти досягнення мети і ціни досягнутої мети; ступеня ризику.
2. *Системний підхід:* будь-яка задача розглядається з точки зору її впливу на критерії функціонування всієї системи.
3. *Дорогий фізичний експеримент* замінюється відносно дешевим математичним моделюванням, яке дає відповідь на багато питань і дозволяє прийняти оптимальне рішення. При цьому використовується ЕОМ.
4. *Рекомендуючий характер* висновків по дослідженню операцій: рішення приймає людина, яка повинна нести повну відповідальність за наслідки цих рішень.

У своїй сукупності методи ДО вміщують цілий арсенал математичних засобів:

- теорію лінійного, нелінійного, дискретного (цілочисельного, бінарного, неподільного), динамічного, стохастичного програмування;
- теорію ігор;

- теорію систем масового обслуговування;
- прийняття рішень в умовах нечіткої інформації;
- теорію експертних систем;
- теорію ефективності та ін.

У принципі, будь-який розрахунок можна розглядати як дослідження операцій, бо він дозволяє прийняти обгрунтоване оптимальне рішення у багатофакторній області. Але традиційно дослідження операцій стосується більш вузького кола питань: організації взаємодій та оптимального функціонування складних систем з множиною можливих рішень і при умовах дотримання вказаної форми математичної моделі.

1. Критерії оптимальності в умовах визначеності та ризику

Коли людина виконує будь-яку роботу або виконує якісь дії, то вона завжди намагається досягти мети оптимальним чином. Можна вважати, що дії без мети не існує. Але завадою при обранні напрямку виконання дії часто стає багатоваріантність шляхів досягнення мети та її неоднозначна оцінка. Наприклад, якщо розробляється електродвигун для промисловості і для ракети, то властивості варіантів такого електродвигуна (строк життя, ККД, надійність, габарити, вага та ін.) та їх оцінки можуть суттєво відрізнятись. Між тим потрібно вибрати найкращий варіант для конкретного використання двигуна. Прийняття рішення (стратегії) серед кількох варіантів в умовах визначеності характеризується однозначною, детермінованою залежністю прийнятого рішення від ряду властивостей стратегії (від вектора властивостей, ознак або якостей), які враховуються для кожного варіанту можливого рішення. Основне призначення критерію оптимальності – поставити в однакові умови оцінки (часто – суб'єктивні) тих варіантів рішень, що розглядаються. Під рішенням розуміється обрання одного найкращого з можливих варіантів дій (обрання напрямку дій, стратегії дій).

Прикладом є критерій оптимальності у вигляді суми зважених якостей (намагаються отримати максимальне значення критерію), яка визначає загальну корисність конкретного рішення:

$$F_{01} = \sum_{i=1}^{n} W_i F_i \to \max,$$

де W_i – ваговий коефіцієнт якісної або кількісної властивості F_i рішення. Це суб'єктивна або об'єктивна величина, яка встановлюється дослідником як коефіцієнт пропорційності для визначення впливу величини конкретної властивості F_i на загальну корисність або на іншу обрану головну властивість рішення; вона може мати додатне або від'ємне значення; $W_i F_i$ – величина, яку можна розглядати як внесок у загальну корисність даного рішення (наприклад, як своєрідний внесок у прибуток); $i = 1 \ldots n$ – порядковий номер властивості.

Прийняття рішення в умовах ризику пов'язане з випадком, коли кожній стратегії $X_{i,}$ (i = 1…m) відповідає ціла множина можливих результатів $Y_{j,}$ (j = 1...n) з відомими ймовірностями P_{ij} та корисностями $K_{ij.}$ Правило для визначення оптимальної стратегії записується як $F_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} P_{ij} \rightarrow \max$. У цьому випадку серед (i = 1…m) можливих рішень приймається найкраще.

Завдання. Розділити студентів на групи по 2-4 людини. Вважається, що кожна група розглядає 4 варіанти однакових за назвою виробів: книжка, ЕОМ, портфель, вантажна машина, іграшка, будівля, електродвигун, літак, велосипед і т.д. Кожний студент у групі довільно надає своїм варіантам виробу не менше 5-ти індивідуальних властивостей, дві з яких – якісні: прибуток від реалізації, вартість, вага, габарити, колір, привабливість, витрати на обслуговування, зручність у користуванні, надійність, попит на ринку і т.п. з врахуванням особливостей виробу. Використати критерій оптимальності у вигляді суми зважених властивостей і обрати серед 4-х варіантів найкращий.

2. Критерії оптимальності в умовах невизначеності. Критерії Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца. Обробка експертної інформації

Одним з визначних факторів у таких задачах є зовнішнє середовище, або природа, яка може знаходитися в одному з станів $S_1, S_2, ..., S_k$. Ймовірність знаходження природи у станах S_1, S_2, …, S_k є невідомою для особи, що приймає рішення (якщо б вона була відомою, то отримали б попередню задачу прийняття рішень в умовах ризику).

У таких умовах оптимальна стратегія визначається за критеріями Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.

Припустимо, що фірма вирішила збудувати готель і потрібно прийняти рішення/стратегію: скільки місць повинен мати готель (x_i = 20, 40, 60). Результат (реалізація у вигляді кількості замовлених (зайнятих) місць X_{pj} теж задається, наприклад, цифрами X_{pj} = 0, 10, 15, 20, 40, 60). Складають кошторис по будівництву готеля та розраховують очікуваний прибуток (табл. 2.1) у залежності від кількості побудованих наявних місць у готелі (стратегії будівництва) і кількості дійсно замовлених (заповнених) кімнат – результату експлуатації. Якщо кількість замовлень більша за їх наявність, то тоді корисність не збільшується (бо замовленням відмовляють).

Розглянемо на цьому прикладі використання критеріїв.

Критерій Вальда (обережного спостерігача) оптимізує корисність за припущенням, що середовище знаходиться в самому невигідному для спостерігача стані:

– для кожного рядка (стратегії/рішення) обирають ***мінімальне значення*** корисності: –39; –63; –87;
– з обраних корисностей обирають ***максимальне значення***

(–39), яке і є рішенням проблеми, бо визначає кількість кімнат $X_{опт} = 20$.

Але, судячи з результатів, від будування готелю слід відмовитися, якщо керуватися критерієм Вальда, бо корисність/прибуток від'ємний ($l_{опт} = –39$).

Таблиця 2.1

Прибуток при експлуатації готелю у залежності від стратегії (загальної кількості кімнат) та кількості замовлених кімнат

Стратегія x_i	Результат: замовлені кімнати					
	0	**10**	**15**	**20**	**40**	**60**
20	–39	52	143	224	224	224
40	–63	28	120	190	405	405
60	–87	5	98	170	365	652

Критерій Лапласа. Тому що ймовірність виникнення тієї чи іншої ситуації невідома, то будемо вважати, що всі ***вони рівноймовірні.*** Тоді для ***кожного рядка*** матриці виграшів розраховується ***середнє арифметичне значення*** оцінок. Із отриманих середніх величин оптимальним вважається максимальне значення, яке і дозволяє визначити кількість кімнат у майбутньому готелі.

$$l_1 = \frac{1}{6}(-39 + 52 + 143 + 224 + 224 + 224) = \frac{1}{6}(828) = 138;$$

$$l_2 = \frac{1}{6}(-63 + 28 + 120 + 190 + 405 + 405) = \frac{1}{6}(1085) = 181;$$

$$l_3 = \frac{1}{6}(-87 + 5 + 98 + 170 + 365 + 652) = \frac{1}{6}(1203) = 201.$$

Максимальне значення корисності $l_{max} = 201$, звідки оптимальна кількість кімнат $x_{опт} = 60$ кімнат.

Критерій Севіджа (мінімалізація "жалю"). Вважається, що ризик припустимий. Вкладається стільки грошей, скільки не жалко.

"Жаль" – це втрачений прибуток ***результату при даній стратегії*** по відношенню до найкращої стратегії (розглядають по колонці табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Таблиця "жалів" до критерію Севіджа

x_i	**Результат**					
	0	**10**	**15**	**20**	**40**	**60**
20	0	0	0	0	–181	–428
40	–24	–24	–23	–34	0	–247
60	–48	–47	–45	–54	–40	0

Початкова таблиця перетворюється на ***нову табл. 2.2,*** елементи якої ***(в межах однієї колонки)*** дорівнюють різниці між елементами комірок табл. 2.1 та максимальним значенням елементу цієї ж колонки. Таблиця 2.2 є таблицею "жалів". У цій таблиці виконуємо такі дії:

– по кожному рядку обирається найменше значення –428; –247; –54;
– з них обирається максимальне значення оцінки "жалю", яке і визначає обрану кількість кімнат $U_{\max} = -54$; $x_{\text{опт}} = 60$ кімнат.

Критерій Гурвіца. Вводиться деякий коефіцієнт $0 \leq \alpha \leq 1$, який зветься ***коефіцієнтом оптимізму,*** або ***коефіцієнтом довіри*** (вважається, що середовище може знаходитись у найвигіднішому стані з ймовірністю α, а в найневигіднішому – з ймовірністю 1 – α).

Для кожної стратегії (кожного рядка табл. 2.3) розглядаються лише дві величини – максимальне $l_{ij\max}$ та мінімальне $l_{ij\min}$ значення корисності – і розраховують значення: $\alpha l_{ij\max} + (1-\alpha)\, l_{ij\min}$.

З отриманих для кожного рядка розрахованих величин обирають максимальне значення, яке і вказує потрібну стратегію/рішення. Нехай, наприклад, α = 0,1. Тоді отримуємо для кожного рядка (кожної стратегії):

$$h_1 = 0{,}1 \cdot 224 + (1 - 0{,}1) \cdot (-39) = -12{,}7;$$
$$h_2 = 0{,}1 \cdot 405 + (1 - 0{,}1) \cdot (-63) = -16{,}2;$$
$$h_3 = 0{,}1 \cdot 652 + (1 - 0{,}1) \cdot (-87) = -13{,}0.$$

Згідно з критерієм Гурвіца, треба будувати готель на 20 місць.

Таким чином ми отримали кількість кімнат: по Вальду $x_{\text{опт}} = 20$ кімнат; по Лапласу $x_{\text{опт}} = 60$ кімнат; по Севіджу $x_{\text{опт}} = 60$ кімнат; по Гурвіцу $x_{\text{опт}} = 20$ кімнат.

Узагальнений алгоритм фаззифікації якісних сигналів у нечітких системах підтримки прийняття рішень з функціями належності трикутної форми і з прикладом оптимізації суднових бункерувальних операцій в умовах невизначеності наведений у роботі [12].

Виникає питання: навіщо нам потрібні ці розрахунки, якщо вони дають такі суперечливі і нечіткі рішення? Відповідь полягає у тому, що ми всі можливі стратегії ставимо цими розрахунками в однакові умови, а обрання самого критерію залежить від настрою та матеріальних можливостей "Замовника".

Таблиця 2.3

Максимальне $l_{i\max}$ та мінімальне $l_{i\min}$ значення корисності

x_i	$l_{i\max}$	$l_{i\min}$
20	224	–39
40	405	–63
60	652	–87

Обрання критерію прийняття рішень є найбільш складним і відповідальним етапом у дослідженні операцій. При цьому не існує яких-небудь загальних рекомендацій або порад. Обрання критерію повинен підтвердити "Замовник" (на самому вищому рівні) і в максимальному ступені узгодити це обрання із специфікою задачі, з наявними ресурсами та зі своєю метою. Задачею "Виконавця" є створення умов об'єктивності в оцінці стратегічних напрямків за визначеними "Замовником" умовами:

1. Зокрема, якщо навіть мінімальний ***ризик неприпустимий,*** то потрібно використовувати ***критерій Вальда***.
2. Якщо ***ризик припустимий*** і "Замовник" має намір вкласти стільки коштів, щоб потім ***не жалкувати,*** то обирають ***критерій Севіджа.***

З цими особливостями потрібно ознайомити "Замовника".

Обробка експертної інформації. Задача зводиться до визначення об'єктивного рішення із сукупності думок експертів стосовно гіпотези, яка розглядається. Експертні системи відрізняються методами створення експертних груп, організації їх праці, обробки висновків експертів.

Експертні системи можна умовно розділити на дві великі групи:

1. Групи з людей-експертів.
2. Спеціалізовані експертні системи, в яких досвід експертів вкладений у ЕОМ і для отримання рішення потрібно ввести в ЕОМ відповідну інформацію. Сюди ж можна віднести використання нейронних мереж (з навчанням або самонавчанням) для обрання рішення.

Завдання. Обрати один з варіантів об'єкта: готель, їдальня, бар, літак, автобус, ринок, зал ігрових автоматів, вагон трамвая, ресторан, автовокзал і т.п. Із замовником робіт узгоджено, що для кожного об’єкта будуть розглядатись 4 можливі варіанти стратегій (рішень по будуванню об’єкта) з загальною кількістю місць обслуговування у побудованого об’єкта, яка розраховується за формулою

$$x_i = (N + 5)(i + 1),$$

де N – порядковий номер студента у групі, i = 1, …, 4 – номер варіанту стратегій.

При експлуатації можуть використовуватись не всі місця об’єкта. Тому розраховуються варіанти дійсної кількості замовлених місць за формулою

$$K_j = (N + 5)(j - 1),$$

де j = 1, …, 6 – порядковий номер варіанту дійсної кількості замовників місць об’єкта.

У комірках таблиці вказати “корисність результатів” для визначених стратегій x_i та варіантів експлуатації K_j, яка в умовних одиницях розраховується за формулою

$$a_{ij} = N[(j - 1) - 5/(6 - i)]i.$$

У сформованій таким чином табл. 2.4 “корисність результатів” a_{ij} не змінювати, якщо кількість замовлених місць K_j перевищує кількість місць, визначених за стратегією (замовникам у цьому випадку відмовляють, а “корисність результатів” a_{ij} не змінюється).

Таблиця 2.4

Корисність результатів для готелю (N = 5)

x_i	$K_1 = 0$	$K_2 = 10$	$K_3 = 20$	$K_4 = 30$	$K_5 = 40$	$K_6 = 50$
20	–3,33	1,69	6,66	6,66	6,66	6,66
30	–8,00	2,00	12	22	22	22
40	–15,0	0	15	30	45	45
50	–26,6	–6,6	14,4	33,4	53,4	63,4

Використати критерії Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца для заданих об’єктів.

3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Загальна задача лінійного програмування

Лінійне програмування розглядає рішення задач, які виникають у господарчій, економічній, виробничій, військовій сферах діяльності людини. *Лінійне програмування має вигляд лінійної математичної моделі, яка складається з трьох частин:*

1. Функції мети $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$, для якої ми повинні отримати оптимальне значення. Якщо змінити знаки коефіцієнтів c_j, ($j = \overline{1, n}$) на протилежні, то функція $F \to \max$ змінюється на $F \to \min$ і навпаки. Приклад функції мети: прибуток (треба збільшити до максимуму), збиток (треба зменшити до мінімуму). Тут $x_1, x_2, ..., x_n$ – фактори, які безпосередньо впливають на процес, що розглядається. Приклад: c_j – це прибуток від реалізації одного з j-го варіантів виробів, а x_j – це кількість цих виробів.

2. Обмеження по запасу ресурсів у вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

або

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array}\right\}, \qquad (3.2)$$

де a_{ij} – норма витрат ресурсу b_i; x_j – кількість j-го виробу, одиниця якої потребує a_{ij} витрат (величина x_j не повинна бути від’ємною); b_i – величина i-го ресурсу; $i = 1, ..., m$ – порядковий номер ресурсу; $j = 1, ..., n$ – порядковий номер виробу.

3. Вимоги невід’ємності змінних (факторів) $X_j > 0$, бо практичні дії (практична кількість приладів, що випускається, і т.п.) не можуть бути від’ємними. Систему нерівностей (3.1) або (3.2) приводять до системи рівностей:
   - до системи рівнянь (3.1) додаємо додаткові додатні змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$;
   - від системи (3.2) віднімаємо додаткові додатні змінні $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$.

Розглянуті три частини лінійного програмування (ЛП) виконують такі функції:

1. Нерівності-обмеження та вимоги невід’ємності змінних обмежують область існування рішення, яка задовольняє вказані обмеження і в дійсності визначає загальне рішення задачі ЛП. Ця область існування рішення вміщує багато точок (у загальному випадку – нескінченно велику кількість точок) з рішеннями.

2. Функція мети охоплює лише одну точку або частку точок із вказаної області і визначає в ній точні координати точки або точок, у яких сама функція мети отримує оптимальне постійне значення

У результаті ми повинні розглядати таку систему рівнянь:

1. Функцію мети $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max (\min)$. Призначення функції мети – отримати оптимальне рішення для області, яка визначається наведеною нижче системою рівнянь-обмежень.

2. Систему рівнянь-обмежень

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \pm x_{n+1} = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \pm x_{n+2} = b_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \pm x_{n+m} = b_m;$$

де $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n + m$; $m < n$.

Рішення $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$, при якому функція F приймає оптимальне значення, називається ***оптимальним рішенням.*** Більшість задач лінійного програмування ***має одне оптимальне рішення.*** Але система рівнянь може бути і несумісною (не має оптимального рішення), і з нескінченною кількістю оптимальних рішень.

Вимога невід'ємності $x_i \geq 0$ означає, що рішення повинне бути *припустимим,* тобто не мати від'ємних компонентів x_i.

Нижче розглядаються особливості та властивості системи рівнянь-обмежень, яка має узагальнений вигляд

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 ;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 ;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m ,
\end{aligned}
$$

де $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n; a_{ij}$ – коефіцієнти; b_i – вільні члени.

Ці отримані рівняння потрібно перевірити на:

- наявність тотожностей (тотожності вилучаються);
- сумісність (несумісна система рівнянь не має сенсу і тому не розглядається);
- визначеність (щоб мати уяву про кількість можливих рішень).

Потім отриману таким чином систему рівнянь можна розв'язувати.

3.2. Властивості системи лінійних рівнянь-обмежень

Система m лінійних рівнянь-обмежень з n змінними має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 ;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 ;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m ,
\end{aligned}
\qquad (3.2.1)
$$

де $i = 1, ..., m; j = ; i = 1, ..., n; a_{ij}$ – коефіцієнти; b_i – вільні члени.

Числові значення $X_i = K_i$, які перетворюють рівняння (3.2.1) у тотожності, називаються рішеннями системи рівнянь. Практично отримані рівняння (3.2.1) (при $n = m$, або $n < m$, або $n > m$) можуть мати математичні неузгодження: бути несумісними; мати еквівалентні (по суті – однакові, тотожні) рівняння. Можна стверджувати, що у випадку $n < m$

максимально можлива кількість рівнянь повинна бути як мінімум $n = m$ (не виключається, безумовно, і випадок, коли $n > m$). Тому отримані з аналізу процесів рівняння (3.2.1) повинні бути перевірені на сумісність і еквівалентність. При такій перевірці використовується твердження: якщо обидві частини якогось рівняння помножити на довільне число і додати або відняти від відповідних частин будь-яке інше рівняння, теж оброблене таким же чином, то отримуємо нову систему рівнянь, еквівалентну попередній.

Після виконання таких перетворень системи рівнянь (3.2.1) одне або кілька рівнянь можуть перетворитися у рівняння вигляду

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b. \qquad (3.2.2)$$

Якщо в (3.2.2) b = 0, то перетворюване рівняння потрібно вилучити, бо воно є еквівалентним, тотожним.

Якщо в (3.2.2) b > 0, або b < 0, то система не має рішень, бо рівняння (3.2.2) не виконується ні при яких значеннях змінних. Тоді початкова система (3.2.1) ***несумісна*** і не повинна розв'язуватись, бо несумісні системи рівнянь не мають ***ні теоретичного, ні практичного інтересу.*** Ми будемо розглядати ***лише сумісні системи***.

Наприклад, система лінійних рівнянь

$$3X_1 + 5X_2 = 11;$$
$$3X_1 + 5X_2 = 8$$

є ***несумісною***, бо жодне рішення першого рівняння не є рішенням другого рівняння. Якщо існує хоча б одне рішення для кожної змінної, то система називається ***сумісною***. Сумісна система рівнянь, що має одне рішення для кожної змінної X_i, називається ***визначеною***. Якщо кількість рішень більше одного, то система рівнянь називається ***невизначеною.***

У результаті виконання перетворень початкової системи рівнянь (3.2.1) ми отримуємо систему рівнянь, для якої $m < n$, або $m = n$.

Якщо $m = n$, то система рівнянь у матричній формі має вигляд

$$A \cdot X = B,$$

де $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = [b_1, b_2, \ldots b_m]$.

Рішення цієї системи рівнянь у матричній формі має вигляд $X = A^{-1}$, де A^{-1} – матриця, зворотна по відношенню до A.

Але може трапитись випадок, коли перевірена для рішень система рівнянь (3.2.1) має кількість рівнянь, меншу за кількість змінних ($m < n$). Тоді будь-які змінні кількістю m, для яких визначники матриці А при них відмінні від нуля, звуться основними (базисними) змінними. Всі інші ($n - m$) змінних звуться неосновними (небазисними, вільними), які мають нескінченну кількість рішень. Із цієї нескінченної кількості рішень виділяють базисні рішення, для яких неосновні змінні мають нульове значення. Кожному розмежуванню змінних на основні та неосновні відповідає одне базисне рішення. Кількість таких розмежувань на основні та неосновні змінні дорівнює числу сполучень із n елементів по m:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Таким чином ми маємо C_m^n базисних рішень.

3.3. Метод Гаусса розв'язання системи лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь-обмежень дозволяє визначити припустиму область існування рішень (оптимальних та неоптимальних; оптимальні рішення визначаються за допомогою функції мети, яка у даному випадку не розглядається):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

при будь-якому m ($m < n$, $m = n$, $m > n$) може вирішуватися методом Гаусса за таким алгоритмом:

1. Перше рівняння не змінюємо.
2. Скорочуємо першу змінну X_1 в усіх інших рівняннях, для чого кожне з цих рівнянь множиться на $\frac{a_{11}}{a_{i1}}$ для $i = 2, 3, \ldots, m$ і віднімається від 1-го неперетвореного рівняння. В результаті отримуємо систему рівнянь у вигляді

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{22}^1 x_2 + \ldots a_{2n}^1 x_n = b_2^1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m2}^1 x_2 + \ldots a_{mn}^1 x_n = b_m^1.
\end{aligned}
\qquad (3.3.2)
$$

Якщо при перетворенні отримуємо рівняння у вигляді (3.2.2), то або вилучаємо із розгляду рівняння (при $b_i^1 = 0$), або приймаємо рішення про несумісність рівнянь (при $b_i^1 \neq 0$).

Після цього друге рівняння у системі (3.3.2) залишаємо без зміни, а з усіх інших рівнянь аналогічно вилучаємо змінну X_2.

У результаті такого послідовного вилучення змінних система рівнянь набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{22}^1 x_2 + \ldots a_{2n}^1 x_n = b_2^1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{mn}^1 x_n = b_m^1.
\end{aligned}
\qquad (3.3.3)
$$

За методом Гаусса ми отримуємо трикутну матрицю A, по якій рівняння вирішуються з кінця. Число отриманих рівнянь ***не більше*** числа змінних.

Якщо $m = n$, то така система (3.2.1) має лише одне рішення і вирішується в матричній формі у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$ для матричного рівняння $A \cdot X = B$.

Якщо $m < n$, а коефіцієнти при змінних (у яких обидва індекси однакові) відмінні від нуля, то така система рівнянь ***невизначена.***

Таким чином метод Гаусса дозволяє:

- вилучити зайві тотожні рівняння;
- отримати ***сумісну*** систему рівнянь при одночасному вилученні зайвих (залежних) рівнянь;
- виявити ***несумісність*** системи рівнянь;
- отримати ***рішення*** системи рівнянь (починаючи з кінця).

4. Графо-аналітичний метод роз-в'язання задач лінійного програмування

На відміну від звичайної системи рівнянь, у якій число змінних дорівнює числу рівнянь, задачі лінійного програмування (ЛП) мають справу з системою, у якій число рівнянь може бути меншим за число невідомих і тому у загальному випадку число рішень може бути нескінченним. Із цієї множини потрібно вибрати оптимальне рішення. Множина, елементами якої є точки, називається *точковою множиною.* Приклади множини на площі: трикутник, кут, точки прямої лінії, відрізок, коло, сектор. Приклади у просторі *X, Y, Z:* куля, куб, призма, паралелепіпед. У задачах ЛП ми розглядаємо точкові множини.

Множина точок називається *випуклою,* якщо сумісно з його будь-якими двома точками множині належить і весь відрізок прямої лінії, який з'єднує ці дві точки. В іншому випадку множина не є випуклою (рис.4.1).

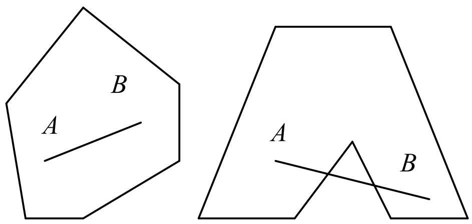


Рис. 4.1. Випукла і невипукла множини

Розглянемо задачу ЛП у вигляді:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$2x_1 - 5x_2 + 10 \ge 0; \qquad (4.1)$$

$$3x_1 + 4x_2 - 12 \le 0; \qquad (4.2)$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \qquad (4.3)$$

Перетворимо нерівності (4.1), (4.2) у рівності для будування граничних прямих:

$$2x_1 - 5x_2 + 10 = 0;$$

$$3x_1 + 4x_2 - 12 = 0,$$

для яких на площині x_1, x_2 побудуємо відповідні дві прямі лінії (рис. 4.2). Кожна з цих прямих ліній ділить площу x_1, x_2 на дві напівплощини (рис. 4.2): для лінії (4.1) на одній напівплощині нерівність (4.1) виконується, і цю сторону ми помічаємо пунктирною лінією, а на іншій напівплощині нерівність (4.1) не дотримується.

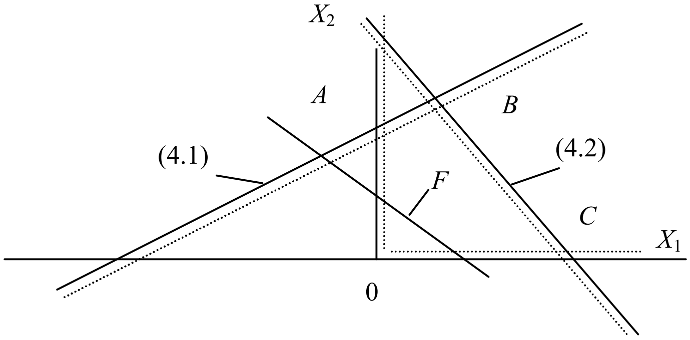


Рис. 4.2. Графо-аналітичний метод розв'язання задачі ЛП

Точно таку ж властивість має пряма лінія (4.2), яка ділить усю площу на дві напівплощини, в одній з яких нерівність (4.2) виконується. Найпростішим чином у цьому впевнюються за допомогою координат точки 0 ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). Таким же чином використовуються нерівності (4.3). ***В результаті отримуємо багатокутник 0ABC, всередині або на межах якого знаходиться множина точок, яка відповідає вимогам обмежень-нерівностей.*** В цьому можна впевнитися, взявши будь-яку точку всередині або на межі багатокутника.

Але з цієї множини точок нам потрібна лише одна – у якій функція мети F стає найбільшою. На рис. 4.2 функція мети F показана у вигляді прямої лінії, отриманої з рівняння $F = x_1 + x_2 = Z$, де Z – деяка постійна величина, яку ми намагаємось наблизити до максимально можливого значення. Припустимо, що на графіку рис. 4.2 ми провели пряму F для довільного значення величини Z. Очевидно, що якщо змінювати величину Z, то пряма F буде переміщуватись на рис. 4.2 паралельно сама собі. З теорії задач ЛП відомо, що оптимальне значення функції мети знаходиться у кутовій точці. Переміщуємо функцію мети за межі отриманого багатокутника 0*ABC* таким чином, щоб вона пройшла лише через одну кутову точку, координати якої і є розв'язанням задачі ЛП. У даному випадку – це точка *B*.

Властивості випуклих множин:

1. Пересічення (загальна частина) двох випуклих множин є випуклою множиною.
2. Пересічення (загальна частина) кінцевої кількості випуклих множин є також випуклою множиною.
3. Кількість кутових точок (*A*, *B*, *C*) множини багатокутника співпадає з числом припустимих базисних рішень системи.
4. Множиною рішень системи лінійних рівнянь з двома змінними є випуклий багатокутник.

Основні теореми лінійного програмування:

Теорема 1. Множина всіх припустимих рішень системи обмежень задачі ЛП є випуклою.

Теорема 2. Якщо задача ЛП має оптимальне рішення, то воно співпадає з однією (двома) точкою із кутових точок (вершин) множини припустимих значень.

Теорема 3. Кожному припустимому базисному рішенню задачі ЛП відповідає кутова точка області припустимих рішень системи, і навпаки

ПРИМІТКА. Якщо кутовій точці відповідають два, три і т.д. базисні рішення, то всі вони будуть виродженими.

ВИСНОВОК. Оптимальне рішення задачі ЛП співпадає з припустимим базисним рішенням системи обмежень. Тобто оптимальне рішення потрібно шукати серед кінцевого числа кутових точок (серед припустимих базисних рішень).

Завдання. Розв'язати графо-аналітично наведене нижче завдання (*N* – порядковий номер студента у групі):

1. $F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$x_1 + 3x_2 \le 3N;$$
$$(x_1 + 20x_2 - 10N)(-1)^N \le 0;$$
$$(x_1 + x_2 - 1)(-1)^N \ge 0;$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

2. $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$(3x_1 + 30x_2 - 20N)(-1)^N \le 0;$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 5N;$$
$$(2x_1 + 2x_2 - 3)(-1)^N \ge 0;$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

5. ОТРИМАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Оптимальне використання ресурсів при плануванні робіт. Визначення оптимального асортименту

Початкові дані наведені у табл. 5.1:

1. Підприємство випускає $j = 1 \ldots n$ виробів. Для їх виробництва необхідно $i = 1 \ldots m$ ресурсів (сировини, матеріалів, робочого часу, грошей, машинного часу і т.п.).
2. Відомі також запаси цих ресурсів b_i $(i = 1 \ldots m)$ та технологічні коефіцієнти a_{ij} (які визначають норми витрат ресурсів i на виріб j).
3. $x_1, x_2, \ldots, xj, \ldots, xn$ – кількість виробів;
   $c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ – ефективність виробів (наприклад, прибуток).
4. Усі показники вважаємо постійними (a_{ij}, c_j, b_i = const).

Завдання: скласти такий план випуску кількості виробів x_j, щоб отримати максимальну ефективність (максимальний прибуток).

Математичний опис задачі складається з функції мети $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ та обмежень по запасу ресурсів:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2;$$

……………………………………

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m,$$

де $x_j \ge 0, j = 1, n$ – обмеження по додатності змінних.

Крім показаних обмежень, у модель можуть бути введені додаткові обмеження:

1. $x_j \geq x_{j+k}$ – співвідношення по кількості;
2. $x_1 : x_2 : x_3 = k_1 : k_2 : k_3$ – умова комплектності, замовлення або монтажу;
3. $x_j \leq N_j$ – умова комплектності ($j = 1, n$).

Таблиця 5.1

Запаси ресурсів b_i, норми витрат a_{ij}, ефективності c_j

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Технологічні норми витрат *i*-го ресурсу (i = 1, m) на *j*-й виріб (j = 1, n)					
		1	2	…	j	…	n
1	b_1 [м]	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
2	b_2 [м^2]	a_{21}	a_{12}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	b_i [кг]	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	b_m [грн.]	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}
Кількість виробів		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n
Прибуток (ефективність) від одного виробу		c_1	c_2	…	c_j	…	c_n

5.2. Задача по випуску костюмів ательє

Початкові дані (норми витрат, ресурси) наведені у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Ресурси та норми витрат на випуск костюмів (N – порядковий номер студента у групі. $A = \sqrt{N}$)

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Жіночий костюм	Чоловічий костюм
Матерія з вовни	10N м	0,5A м	1,5 м
Лавсан	20N м	2 м	0,5A м
Гроші	300 грн.	2A грн.	A грн.
Кількість виробів, шт.		x_1	x_2
Прибуток за 1 виріб, грн.		10 грн.	20 грн.

Завдання:

1) визначити кількість костюмів при максимальному прибутку;
2) випустити не менше 10 костюмів;
3) прибуток повинен бути більше 400 грн.

Математичний опис завдання:

– функція мети: $F_0 = 10x_1 + 20x_2 \to \max$;
– обмеження по ресурсах:

$$0{,}5Ax_1 + 1{,}5x_2 \le 10N;$$

$$2x_1 + 0{,}5Ax_2 \le 20N;$$

$$2Ax_1 + Ax_2 \le 300;$$

$$x_1 + x_2 \le 10;$$

$$10x_1 + 20x_2 \ge 400;$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ – ознаки додатності.

5.3. Обробка двох виробів на 3-х верстатах

Початкові дані наведені у табл. 5.3.

Два вироби (B_1, B_2) обробляються послідовно на 3-х верстатах. Кількість деталей B_1(x_1) не може бути меншою за кількість деталей B_2 (x_2).

Таблиця 5.3

Дані по обробці деталей (N – порядковий номер студента у групі. $A = \sqrt{N}$)

Верстат	Запаси ресурсів часу роботи верстатів, годин	Час обробки однієї деталі, години	
		B_1	B_2
1	$10N$	1	2
2	$15N$	2	A
3	50	A	3
Кількість виробів		x_1	x_2
Прибуток, грн./шт.		5	3

Завдання: скласти план виробництва (знайти x_1, x_2) при максимальному прибутку.

Математичний опис задачі:

– $F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$ – функція мети;
– обмеження ресурсів:

$$x_1 + 2x_2 \le 10N;$$
$$2x_1 + Ax_2 \le 15N;$$
$$Ax_1 + 3x_2 \le 50;$$

$x_j \ge 0$ – умова додатності.

5.4. Оптимальний розподіл завдань між заводами по випуску однакової продукції

Початкові дані наведені у табл. 5.4.

$j = 1, n$ – порядковий номер фабрики;

$i = 1, m$ – порядковий номер ресурсу;

b_i – запаси ресурсу (сировини, матеріалів (кг);

a_{ij} – витрати i-го ресурсу на j-й фабриці (кг/годину) при забезпеченні продуктивності P_j (штук/годину);

x_j – час, який витрачає фабрика (годин), щоб забезпечити максимальний об'єм продукції;

P_j – продуктивність фабрики (штук/годину).

Таблиця 5.4

Дані по розподілу завдань між заводами

Вид ресурсу	**Запаси ресурсів, кг**	**Технологічні норми витрат *i*-го ресурсу (*i* = 1…*m*) на *j*-й (*j* = 1…*n*) фабриці**					
		1	**2**	**…**	***j***	**…**	***N***
1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{12}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}
Час на роботу		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n
Продуктивність		P_1	P_2	…	P_j	…	P_n

Завдання: знайти для кожної фабрики час x_j (годин), за який j-та фабрика при продуктивності P_j (штук/годину) буде працювати так, щоб забезпечити максимум продукції.

Примітка: таке завдання може дати і окремий завод для своїх цехів.

Математичний опис задачі:

$F = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n \to \max$ – функція мети;

– обмеження по ресурсах:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 ;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m ,$$

де $x_j \ge 0$ – умова додатності.

5.5. Задача про суміші

Початкові дані. Задачі про суміші виникають:

– у сільськогосподарському виробництві при розрахунку складу добрив;
– при використанні ряду видів пального для отримання пального іншої марки;
– в металургії при виготовленні сталі із кількох марок сталі;
– при складанні раціону харчування худоби, спортсменів, сім'ї.

У табл. 5.5 позначено:

$i = 1, \ldots, m$ – порядковий номер матеріалу;

$j = 1, \ldots, n$ – кількість компонентів у матеріалах, що розглядаються;

c_i (крб./кг) – ціна 1кг матеріалу;

x_i (кг) – загальна вага i-го матеріалу в суміші;

b_i (кг) – потрібна вага j-го компонента y вихідній суміші;

a_{ij} (кг/кг) – вага j-го компонента в 1 кг матеріалу.

Завдання: отримати суміш мінімальної вартості.

Математичний опис задачі:

$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_ix_{i + \ldots +} c_mx_m \to \min$ – функція мети;

– обмеження по ресурсах:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge b_1 ;$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge b_2 ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_m,$$

де $x_j \geq 0$ ($i = 1\ldots m$) – умова додатності.

Таблиця 5.5

Дані задачі про суміші

Види матеріалів	Загальна вага *i*-го матеріалу в суміші, кг	Ціна 1 кг матеріалу, крб./кг	a_{ij} – вага *j*-го компонента (кг) в одному кг матеріалу					
			1	2	…	j	…	n
1	x_1	c_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
2	x_2	c_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	x_i	c_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_m	c_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}
Потрібна вага *j*-го компонента в суміші			b_1	b_2	…	b_j	…	b_n

5.6. Транспортна задача

Початкові дані. Транспортний цех повинен перевезти однотипну продукцію від 3-х постачальників до 3-х споживачів.

У табл. 5.6 позначено:

$j = 1, 2, 3$ – користувачі однотипної продукції;

$i = 1, 2, 3$ – постачальники однакової продукції;

x_{ij} – величина постачання *i*-го постачальника *j*-му користувачу, кг;

c_{ij} – витрати на перевезення від *i*-го постачальника до *j*-го користувача 1 кг однакової продукції.

Завдання: виконати перевезення за мінімальну вартість.

Математичний опис задачі:

$F = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33} \to \min$ – функція мети;

– обмеження по постачальниках (рядки):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 140;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 120;$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 110;$$

– обмеження по вимогах користувачів (колонки):

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90;$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160;$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120.$$

Тут ми отримали (m + n) рівнянь-обмежень (тут m – кількість постачальників; n – кількість користувачів). Одне з цих рівнянь є зайвим: у дійсності використовується ($m + n - 1$) рівнянь-обмежень.

Таблиця 5.6

Дані до транспортної задачі

Постачальник, i	**Вага постачання, кг**	**a_{ij} – витрати на перевезення, крб./кг, x_{ij} – постачання, кг**		
		$j = 1$	**$j = 2$**	**$j = 3$**
1	140	$7/x_{11}$	$6/x_{12}$	$4/x_{13}$
2	120	$3/x_{21}$	$8/x_{22}$	$5/x_{23}$
3	110	$2/x_{31}$	$3/x_{32}$	$7/x_{33}$
Вимоги користувачів, кг		90	160	120

У роботі [13] розглянута нечітка модель транспортної задачі судна і дане її чисельне розв’язання у реальних невизначених умовах замовлення та отримання вантажу замовниками.

5.7. Раціональне використання потужності підприємства за визначений термін

Початкові дані. Підприємство повинне виготовити $j = 1, n$ приладів на $i = 1, m$ верстатах, маючи план на випуск $k_1, k_2, \ldots, k_n$ приладів.

У табл. 5.7 позначено:

$i = 1, m$ – порядковий номер верстата;

$j = 1, n$ – порядковий номер приладу;

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ – план випуску приладів, шт. за термін T;

a_{ij} – продуктивність i-го верстата по j-му приладу (j-х приладів (шт.)/j-ву годину];

c_{ij} – витрати на *і-му* верстаті на виготовлення j-го приладу в одиницю часу (j-х карбованців/j-ву годину];

x_{ij} – час роботи i-го верстата по обробці j-го приладу (j годин).

Додаткова умова: кожен із $j = 1, ..., n$ приладів може випускатись

Таблиця 5.7

Дані підприємства

Верстат	a_{ij} – **продуктивність** i**-го верстата (**j **прил., шт./годину);** c_{ij} – **витрати в грн. за годину роботи на** i**-му верстаті на** j**-му приладі (грн./годину);** x_{ij} – **час обробки на** i**-му верстаті** j**-го приладу (годин)**			
	j **= 1 прилад**	j **= 2 прилади**	**…**	$j = n$ **приладів**
$i = 1$	a_{11} c_{11} x_{11}	a_{12} c_{12} x_{12}	…	a_{1n} c_{1n} x_{1n}
$i = 2$	a_{21} c_{21} x_{21}	a_{22} c_{22} x_{22}	…	a_{2n} c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
i = m	a_{m1} c_{m1} x_{m1}	a_{m2} c_{m2} x_{m2}	…	a_{mn} c_{mn} x_{mn}
Кількість приладів (план)	k_1	k_2	…	k_n

Завдання: знайти час роботи кожного верстата при мінімумі витрат і заданому плані робіт.

Математична модель має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad – \quad \text{функція мети;}$$

– обмеження по терміну виконання:

$$x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} \le T;$$

$$x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} \le T;$$

$$x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} \le T;$$

– план випуску продукції:

$$a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + ... + a_{m1}x_{m1} = K_1 ;$$

$$a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + ... + a_{m2}x_{m2} = K_2 ;$$

……………………………………

$$a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + ... + a_{mn}x_{mn} = K_n .$$

З останніх n рівнянь (по плану випуску приладів) можна визначити n змінних x_{ij} (наприклад, методом Гаусса) і підставити їх у функцію мети та обмеження по терміну виконання робіт. В результаті отримаємо типову задачу лінійного програмування.

5.8. Оптимальний розподіл ресурсів підприємства між запланованими роботами

Початкові дані показані у табл. 5.8:

$i = 1, m$ – порядковий номер ресурсу;

$j = 1, n$ – порядковий номер робіт;

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – запас i-го ресурсу, кг;

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ – виділені ресурси у вигляді людей для виконання плану, людино-годин];

a_{ij} – трудовитрати по обробці одиниці i-го ресурсу на j-й роботі [j людино-годин/j кг];

c_{ij} – вартість обробки одиниці i-го ресурсу на j-й роботі [j грн./j кг];

x_{ij} – кількість i-го ресурсу, виділена на j-ву роботу [j кг].

Таблиця 5.8

Запаси ресурсу, кг		**a_{ij} – трудовитрати по обробці 1-го кг i-го ресурсу на j-й роботі [j людино-годин], c_{ij} – вартість обробки i-го ресурсу на одиницю j-ї роботи, x_{ij} – кількість i-го ресурсу на j роботу**			
i	**Запас ресурсу**	**$j = 1$ робота**	**$j = 2$ роботи**	**…**	**$j = n$ робіт**
1	b_1	a_{11} c_{11} x_{11}	a_{12} c_{12} x_{12}	…	a_{1n} c_{1n} x_{1n}
2	b_2	a_{21} c_{21} x_{21}	a_{22} c_{22} x_{22}	…	a_{2n} c_{2n} x_{2n}
i	…	…	…	…	…
m	b_m	a_{m1} c_{m1} x_{m1}	a_{m2} c_{m2} x_{m2}	…	a_{mn} c_{mn} x_{mn}
Виділені люди (людино-годин)		k_1	k_2	…	k_n

Завдання: виконати роботу за найменшою вартістю.

Математична модель має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \quad – \quad \text{функція мети;}$$

– обмеження по ресурсах:

$$x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} \le b_1 ;$$
$$x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} \le b_2 ;$$
$$.......... ....$$
$$x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} \le b_m ;$$

– обмеження по людях:

$$a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + ... + a_{m1}x_{m1} = K_1 ;$$
$$a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + ... + a_{m2}x_{m2} = K_2 ;$$
$$...$$
$$a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + ... + a_{mn}x_{mn} = K_n .$$

З останніх n рівнянь (обмеження по людях) можна визначити n змінних x_{ij} (наприклад, методом Гаусса) і підставити їх у функцію мети та обмеження по запасу ресурсів. У результаті отримаємо типову задачу лінійного програмування.

5.9. Оптимальна міжгалузева балансова модель

Початкові дані: маємо ($i = 1, \ldots, n$) галузей, які, з одного боку, споживають ресурси (тобто діляться між собою ресурсами), а з іншого боку, виробляють ці ресурси на продаж та накопичення. Для цього випадку ми можемо написати матричне рівняння

$$X = Y + A \bullet X,$$

де $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .... \\ y_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix};$

X – вектор валового випуску продукції галузями; Y – вектор продукції, яка йде на продаж та накопичення; AX – вектор споживання продукції галузями; A – матриця взаємного споживання; a_{ij} – витрати i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі, тонни$_i$/тонни$_j$.

Задача полягає у тому, щоб знайти X – вектор валової продукції, при якому досягається максимальний прибуток від накопиченої продукції. Тобто функція мети дорівнює

$$F = C \cdot Y^T \to \max, \qquad (5.9.1)$$

де $C = [c_{11}, c_{21}, ..., c_n]$ – вектор ціни продукції, що йде на продаж; Y^T – транспонована матриця Y.

Валовий продукт X знаходимо з рівнянь

$$X - A \bullet X = Y;\ (E - A)X = Y;\ (E - A)^{-1}(E - A)X = (E - A)^{-1}Y;$$
$$X = (E - A)^{-1}Y \le D, \qquad (5.9.2)$$

де D – вектор виробничої потужності галузі; E – одинична квадратна матриця з діагональними елементами, що дорівнюють одиниці, і з нульовими іншими елементами.

Рівняння (5.9.1) та (5.9.2) складають оптимальну міжгалузеву балансову модель.

5.10. Складання математичних моделей задач лінійного програмування

Загальне завдання для перелічених нижче задач має такий вигляд: скласти математичні моделі задач лінійного програмування; отримати рішення графо-аналітичним методом; дати рекомендації по виробництву виробів.

У наведених нижче задачах мається на увазі:

– Кожний студент по можливості повинен отримати індивідуальне завдання. З цією метою використовуються такі позначення: N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.
– Математична модель складається і розв'язується студентом на практичних заняттях. При цьому можливі два варіанти видачі завдань. Згідно з першим варіантом студент самостійно задає об'єм наявних ресурсів та норми витрат ресурсів на виробництво товарів. Згідно з другим варіантом завдання видає викладач, користуючись наведеними нижче таблицями.
– Одиниці вимірювання ресурсів та норм витрат вважаються однаковими (наприклад: кг; метр; бочка, пачка, комплект, тюк, лист визначеного типу; м^2; літр; м^3; "у.о." – умовна

одиниця та ін.), а самі норми витрат відносяться до одного виробу (“кг/1 шт.”, “бочка визначеного типу/1 шт.” і т.д.). Тому не вказуються розмірності норм витрат та ресурсів. Іноді в задачах використовується визначення “у.о.” – “умовні одиниці”. Під трудовими ресурсами розглядаються обмеження, пов’язані з витратою часу робітниками на виробництво продукції; трудові ресурси вимірюються у “л.-г.” – людино-годинах, а відповідні норми – у “л.-г./одиницю виробу”.

– Наявні ресурси, норми витрат ресурсів на один виріб та ускладнення, які вводяться у задачі, повинні розглядатись як умовні величини та обмеження, які часто використовуються лише для ускладнення задачі з метою кращого опанування студентами методу лінійного програмування та зручності графічного розв’язання задачі. Тобто задачі розглядаються як навчальні. Треба також враховувати, що для кожного підприємства вказані величини є індивідуальними.
– Гроші як ресурси витрачаються на інші, невказані, додаткові ресурси (наприклад, при виготовленні страв – на невказані компоненти: спеції, овочі; при виготовленні радіоприймачів – на невказані компоненти: конденсатори, резистори, друковані плати; при виготовленні одягу та взуття – на нитки, клей та ін.). Гроші також можуть використовуватися з метою спрощення задач (для вилучення з розгляду другорядних, не основних, багаточисельних ресурсів, які не впливають суттєво на процеси, але у той же час є необхідним компонентом).
– Завдання можуть ускладнюватись такими додатковими вимогами: обмеженням по мінімуму, при якому виробництво ще є рентабельним (наприклад, $X1 > N$; $X1 + X2 > 2N$); обмеженням по максимуму, пов’язаному з максимальною виробничою потужністю підприємства (наприклад, $X1 < 30N$; $X1 + X2 < 50N$); плановими обмеженнями (наприклад, $X1/X2 = A$; $X1 > 100N$; $X1 < 250N$; $X1 + X2 > 20A$); вимогами ринку (наприклад, $X1/X2 = A$; $X1 = (120\ldots250)N$); обмеженнями по комплектації (наприклад, $X1 = A \bullet X2$); вимогами визначення мінімальної кількості ресурсу, який потрібно додатково закупити, щоб збільшити випуск продукції; вимогами розрахунку функції мети у кожній кутовій точці та по межах багатокутника отриманого графічного рішення та ін.
– Завдання можуть ускладнюватись викладачем навмисними суперечностями, щоб привчити до реальних умов складання

математичних моделей. Наприклад: отриманий план по випуску продукції $X1/X2 = 4N$ може суперечити даним попиту на ринку $X1/X2 = 3N$ (студент повинен прийняти рішення: повідомити керівництво, орієнтуватись на задоволення вимог ринку); або одне рівняння повторює інше, хоча має інший вигляд; або математична модель не має рішення та ін.

– Завдання можуть ускладнюватись елементами стохастичного програмування. При цьому задача повинна зводитись до задач ЛП. Наприклад, якщо в обмеженні $A_1X_1 + A_2X_2 \leq B_J$ наявний ресурс є випадковою величиною з рівномірним розподілом у межах $B_J = (B_{J1} \ldots B_{J2}) = (100 \ldots 120)$ кг, то значення змінних X_J (кількість продукції, що випускається) при ймовірності $P = 0,8$ у забезпеченні наявності потрібних ресурсів розраховується з використанням конкретного значення ресурсу $B_J = B_{J1} + (B_{J2} - B_{J1})(1 - P) = 100 + (120 - 100)(1 - 0,8) = 104$ кг, тобто задача зводиться до задачі ЛП. В обмеженні $A_1X_1 + A_2X_2 \geq B_J$ (при ймовірності $P = 0,8$ у забезпеченні даної нерівності щодо наявного ресурсу) значення ресурсу $B_J = B_{J1} + (B_{J2} - B_{J1})P = 100 + (120 - 100)0,8 = 116$ кг.

Кожне завдання завершується рекомендаціями (бо рішення приймає людина), у яких вказується: значення функції мети, кількість виробленої продукції, залишки ресурсів.

1. Розрахувати максимальний прибуток цеху від продажу виробів № 1 та № 2, якщо задані ресурси (листи металу, пластмаса, деревина, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток

Таблиця 5.10.1

Дані для складання математичної моделі по випуску виробів № 1, № 2

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Виріб № 1	**Виріб № 2**
Листи металу	$4N$	$0,08-0,003 \cdot A$	0,1
Пластмаса	$7N$	$0,095-0,003 \cdot A$	$0,35-0,02 \cdot A$
Деревина	$2,5N$	0,05	0,083
Гроші	$8N$	$0,42 + 0,01 \cdot A$	–
Трудові ресурси	$4N$	0,1	0,13
Кількість виробів, шт.		$X1$	$X2$
Прибуток за 1 виріб, грн./шт.		$1,2 \cdot A$	$1,6 \cdot A$

2. Розрахувати максимальний прибуток цеху від продажу радіоприймачів № 1 та № 2, якщо задані ресурси (мікросхеми, транзистори, резистори, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від одного приладу (табл. 5.10.2).

Таблиця 5.10.2

Дані для складання математичної моделі по випуску радіоприймачів № 1, № 2

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Радіо № 1	Радіо № 2
Мікросхеми	20*N*	0,9	6 – 0,3 • A
Транзистори	30*N*	3	0,8 – 0,02 • A
Резистори	25*N*	5 + 0,4 • *A*	1,1
Гроші	14*N*	1	3,5 + 0,3 • *A*
Трудові ресурси	10*N*	0,9	0,4
Кількість радіоприймачів, шт.		*X*1	*X*2
Прибуток за 1 радіоприймач, грн./шт.		0,5 • A	*A*

3. Розрахувати, скільки сільськогосподарському підприємству потрібно купити добрив № 1 та № 2 для отримання з них загальної суміші, якщо задані по кожному з добрив: скільки в одному кілограмі вміщується аміаку, суперфосфату, калію, натрію та вартість одного кілограма добрива. Отримати мінімальну потрібну загальну вагу та вартість добрив № 1 і № 2 у суміші, яка повинна вміщувати не менше заданої потрібної кількості компонентів (аміаку, суперфосфату, калію, натрію) (табл. 5.10.3).

Таблиця 5.10.3

Дані для складання математичної моделі по випуску суміші добрив № 1, № 2

Види матеріалів	Загальна вага добрива в суміші, кг	Ціна 1 кг добрива, грн./кг	Вага компонентів (у.о.) в одному кг добрива			
			Аміак	Суперфосфат	Калій	Натрій
Добриво № 1	*X*1	0,8*N*	0,9	0,5	4 + 0,2 • *A*	*A*
Добриво № 2	*X*2	0,7*N*	0,1	*A* + 1	1,2	–
Потрібна вага компоненту в суміші, у.о.			8*N*	8*N*	2*N* + 5	*N*

4. Розрахувати, скільки сільськогосподарському підприємству потрібно використати кормів № 1 та № 2 для отримання з них загальної суміші, якщо задані по кожному з кормів: скільки в одному кілограмі вміщується білка, вітаміну А, вітаміну В, вітаміну С та вартість одного кілограма корму. Отримати мінімальну загальну вагу та вартість кормів № 1 та № 2 у суміші, яка повинна вміщувати не менше заданої потрібної кількості компонентів (білка, вітаміну А, вітаміну В, вітаміну С) (табл. 5.10.4).

Таблиця 5.10.4

Дані для складання математичної моделі по випуску суміші кормів № 1, № 2

Види матеріалів	Загальна вага корму в суміші, кг	Ціна 1 кг матеріалу, грн./кг	Вага компонентів (у.о.) в одному кг корму			
			Білок	Вітаміни		
				А	В	С
Корм № 1	$X1$	$0{,}5N$	$0{,}2 - 0{,}01 \cdot A$	$0{,}3 - 0{,}03 \cdot A$	–	1,3
Корм № 2	$X2$	$0{,}6N$	0,24	0,6	1	$3 + 0{,}3 \cdot A$
Потрібна вага компоненту в суміші, у.о.			$2N$	$5N$	A	$4N$

5. Розрахувати, скільки потрібно використати сім'ї для споживання продуктів № 1 та № 2, якщо задані по кожному з продуктів: скільки в одному кілограмі вміщується білка, вітаміну А, вітаміну В, вітаміну С та вартість одного кілограма продуктів. Отримати мінімальну загальну вагу та вартість продуктів № 1 та № 2 у суміші при умові, що у сукупності всі продукти повинні вміщувати не менше заданої потрібної кількості компонентів (білка, вітаміну А, вітаміну В, вітаміну С) (табл. 5.10.5).

Таблиця 5.10.5

Дані для складання математичної моделі суміші продуктів № 1, № 2

Види матеріалів	Загальна вага корму в суміші, кг	Ціна 1 кг матеріалу, грн./кг	Вага компонентів (у.о.) в одному кг продуктів			
			Білок	Вітаміни		
				А	В	С
Продукт № 1	$X1$	$1{,}5N$	$16 + A$	0,09	$4 + 0{,}1 \cdot A$	–
Продукт № 2	$X2$	$0{,}9N$	$1 - 0{,}1 \cdot A$	12	–	$7 + 0{,}1A$
Потрібна вага компоненту в суміші, у.о.			$10N$	$4N$	N	N

6. Розглянути задачу № 5 для спортсменів (табл. 5.10.6).

Таблиця 5.10.6

Дані для складання математичної моделі суміші продуктів № 1, № 2

Види матеріалів	Загальна вага корму в суміші, кг	Ціна 1 кг матеріалу, грн./кг	Вага компонентів (у.о.) в одному кг продуктів			
			Білок	Вітаміни		
				A	B	C
Продукт № 1	$X1$	$2{,}5N$	5	$25 + A$	–	50
Продукт № 2	$X2$	$1{,}6N$	7	1,6	20	$0{,}5 - 0{,}02 \cdot A$
Потрібна вага компоненту в суміші, у.о.			$7N$	$3N + 7$	$5N$	10

7. Розрахувати максимальний прибуток підприємства від продажу сумішей (пального № 1 та № 2), якщо задані ресурси (бензин, керосин, дизельне пальне, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від кілограма суміші (табл. 5.10.7).

Таблиця 5.10.7

Дані для складання математичної моделі випуску пального № 1, № 2

Вид ресурсу	Запаси ресурсів, кг	Норми витрат на 1 кг пального	
		Пальне № 1	Пальне № 2
Бензин	$70N$	0,1	0,3
Керосин	$300N$	0,5	0,7
Дизельне пальне	$200N$	0,4	–
Трудові ресурси	$12N$	0,04	$0{,}016 + 0{,}001 \cdot A$
Вага пального, кг		$X1$	$X2$
Прибуток за 1 кг пального, грн./кг		$0{,}01(N + 2)$	$0{,}01(N + 4)$

8. Розрахувати максимальний прибуток підприємства від продажу сумішей (добрив № 1 та № 2), якщо задані ресурси (аміак, суперфосфат, калій, натрій, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від кілограма суміші (табл. 5.10.8). Аміак, суперфосфат, калій, натрій вимірюються в у.о.

Таблиця 5.10.8

Дані для складання математичної моделі випуску добрива № 1, № 2

Вид ресурсу	Запаси ресурсів, кг	Норми витрат на 1 кг добрив	
		Добриво № 1	**Добриво № 2**
Аміак	$9N$	$0,1 + 0,1 \cdot A$	$0,08 + 0,01 \cdot A$
Суперфосфат	$5N$	$0,4 + 0,05 \cdot A$	0,04
Калій	$20N$	–	0,35
Натрій	$3N$	0,44	–
Трудові ресурси	$12N$	$0,3 + 0,01 \cdot A$	$0,15 + 0,01 \cdot A$
Вага добрива, кг		$X1$	$X2$
Прибуток за 1 кг добрива, грн./кг		$N + 1$	$N + 2$

9. Розрахувати максимальний прибуток підприємства від продажу сумішей (комбікормів для худоби № 1 та № 2), якщо задані ресурси (зерно, сіно, висівки, добавки, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від кілограма суміші (табл. 5.10.9).

Таблиця 5.10.9

Дані для складання математичної моделі випуску комбікормів № 1, № 2

Вид ресурсу	Запаси ресурсів, кг	Норми витрат на 1 кг суміші	
		Комбікорм № 1	**Комбікорм № 2**
Зерно	$15N$	0,15	0,5
Сіно	$1,5N$	0,05	0,02
Висівки	$3,5N$	$0,08 - 0,002 \cdot A$	0,1
Добавки	$3N$	$0,12 - 0,005 \cdot A$	–
Трудові ресурси	N	0,015	$0,016 + 0,001 \cdot A$
Вага комбікорму, кг		$X1$	$X2$
Прибуток за 1 кг комбікорму, грн./кг		$N + 4$	$N + A$

10. Розрахувати максимальний прибуток їдальні від продажу порцій смаженини та котлет, якщо задані ресурси (м’ясо, крупа, картопля, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від однієї порції кожної страви (табл. 5.10.10).

Таблиця 5.10.10

Дані для складання математичної моделі по випуску страв

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 страву	
		Смаженина	Котлети
М'ясо	$5N$	0,4	0,15
Крупа	$6N$	0,2	0,3
Картопля	$4N$	0,25	0,2
Гроші	$3N$	$0{,}15 + 0{,}01 \cdot A$	$0{,}2 + 0{,}001 \cdot A$
Трудові ресурси	N	0,06	$0{,}04 + 0{,}001 \cdot A$
Кількість страв, шт.		$X1$	$X2$
Прибуток від 1 страви, грн./шт.		$A + 2$	А + 1,4

11. Розрахувати максимальний прибуток ковбасного цеху від продажу ковбас № 1 та № 2, якщо задані ресурси (м'ясо, сало, спеції, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від одного кілограма кожної з ковбас (табл. 5.10.11).

Таблиця 5.10.11

Дані для складання математичної моделі по випуску ковбас

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 кг ковбаси	
		Ковбаса № 1	Ковбаса № 2
М'ясо	$10N$	0,7	1,3
Сало	$5N$	0,55	0,3
Спеції	$0{,}5N$	0,025	0,1
Гроші	N	$0{,}02 + 0{,}0015 \cdot A$	0,04
Трудові ресурси	$2N$	$0{,}2 + 0{,}001 \cdot A$	0,5
Вага ковбаси, кг		$X1$	$X2$
Прибуток від 1 кг ковбаси, грн./кг		$0{,}8N$	$1{,}2N$

12. Розрахувати максимальний прибуток бару від продажу бутербродів № 1 та № 2, якщо задані ресурси (хліб, м'ясо, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від одного бутерброда (табл. 5.10.12).

Таблиця 5.10.12

Дані для складання математичної моделі по випуску бутербродів

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 бутерброд	
		Бутерброд № 1	Бутерброд № 2
Хліб	$2N$	0,05	0,1
М'ясо	$6N$	$0{,}15 + 0{,}001 \cdot A$	$0{,}6 - 0{,}001 \cdot A$
Гроші	N	$0{,}06 + 0{,}001 \cdot A$	$0{,}04 + 0{,}001 \cdot A$
Трудові ресурси	$3N$	$0{,}1 + 0{,}01 \cdot A$	$0{,}12 + 0{,}01 \cdot A$
Кількість бутербродів, шт.		$X1$	$X2$
Прибуток від 1 бутерброда, грн./шт.		$A + 4$	$A + 10$

13. Розрахувати максимальний прибуток цеху від продажу іграшок № 1 та № 2, якщо задані ресурси (шкіра, вата, фарба, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від однієї іграшки (табл. 5.10.13).

Таблиця 5.10.13

Дані для складання математичної моделі по випуску іграшок

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 іграшку	
		Іграшка № 1	Іграшка № 2
Шкіра	$10N$	$0{,}1 + 0{,}015 \cdot A$	$0{,}2 + 0{,}01 \cdot A$
Вата	$8N$	$0{,}4\text{-}0{,}012 \cdot A$	$0{,}08 - 0{,}01 \cdot A$
Фарба	$2N$	0,08	0,03
Гроші	$3N$	$0{,}1\text{-}0{,}01 \cdot A$	0,035
Трудові ресурси	$5N$	0,15	$0{,}05 + 0{,}01 \cdot A$
Кількість іграшок, шт.		$X1$	$X2$
Прибуток від 1 іграшки, грн./шт.		A	$1{,}5 \cdot A$

14. Розрахувати максимальний прибуток цеху від продажу чоловічого та жіночого взуття, якщо задані ресурси (шкіра, гума, гроші, трудові ресурси), норми витрат та прибуток від однієї пари взуття (табл. 5.10.14).

Таблиця 5.10.14

Дані для складання математичної моделі по випуску взуття

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 пару взуття	
		Чоловіче взуття	Жіноче взуття
Шкіра	$12N$	$0{,}1 + 0{,}02 \cdot A$	$0{,}3 - 0{,}02 \cdot A$
Гума	$9N$	$0{,}3 + 0{,}01 \cdot A$	$0{,}09 - 0{,}012 \cdot A$
Гроші	$4N$	0,1	0,06
Трудові ресурси	$5N$	0,1	0,08
Кількість пар взуття, пара		$X1$	$X2$
Прибуток від 1 пари взуття, грн./пара		12	15

15. Визначити максимально можливу кількість гідролокаторів № 1 та № 2, яку може випускати підприємство при таких даних:
   - мінімальна припустима надійність обох гідролокаторів – 95%;
   - виробництво є рентабельним, якщо випускає не менше $5A$ гідролокаторів (тут $A = \sqrt{N}$, де N – порядковий номер студента у групі);

– максимальна виробнича потужність підприємства – не більша за $30A$ гідролокаторів;
– надійність гідролокаторів (якщо їх випускати не більше за 10 шт.): 96,5% для гідролокатора № 1 та 97,5% для гідролокатора № 2;
– на кожні A шт. додаткових гідролокаторів (які випускаються понад 10 шт.) надійність знижується: на 0,1% для гідролокатора № 1 та на 0,15% для гідролокатора № 2.

16. Розв'язати графо-аналітичним методом задачі ЛП:

– $$F = Nx_1 + Ax_2 \to \max; \quad -4x_1 + x_2 + 2N \ge 0;$$
$$x_1 - x_2 + N \ge 0; \qquad (2x_1 + x_2 - 2N)(-1)^N \ge 0;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

– $$F = Nx_1 + 10x_2 \to \max; \quad (4x_1 - x_2 - 2N)(-1)^N \ge 0;$$
$$-2x_1 - x_2 + 2N \ge 0; \quad -x_2 + \frac{3}{2}N \ge 0; \quad x_2 - \frac{1}{4}N \ge 0;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

– $$F = 8x_1 + Nx_2 \to \max; \quad -2x_1 - x_2 + 2N \ge 0;$$
$$-x_1 + x_2 - N \ge 0; \quad x_1 - \frac{1}{8}N \ge 0; \quad -x_1 + \frac{1}{4}N \ge 0;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

17. Розрахувати максимальний прибуток від продажу виробів № 1 та № 2. Дані для розрахунків наведені у табл. 5.10.15 – 5.10.16. Наявні ресурси є випадковою величиною з рівномірним розподілом у вказаних межах. Знайти графо-аналітичним методом значення змінних при ймовірності $P = (0{,}8 - 0{,}01 \cdot N)$ у забезпеченні наявності потрібних ресурсів.

Таблиця 5.10.15

Дані для складання математичної моделі продажу приладів

Вид ресурсу	**Запаси ресурсів**	**Норми витрат на 1 прилад**	
		Прилад № 1	**Прилад № 2**
Мідь	$2N \ldots 4N$	$0{,}06 - 0{,}002 \cdot A$	0,1
Залізо	$3N \ldots 7N$	$0{,}095 - 0{,}01 \cdot A$	$0{,}4 - 0{,}02 \cdot A$
Гроші	$4N \ldots 8N$	0,1	0,06
Кількість приладів, шт.		$X1$	$X2$
Прибуток від продажу 1 приладу, грн./шт.		12	15

Таблиця 5.10.16

Дані для складання математичної моделі продажу приладів

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 прилад	
		Прилад № 1	Прилад № 2
Мідь Залізо Гроші	$3N \ldots 5N$ $2N \ldots 6N$ $3N \ldots 6N$	$0{,}5 + 0{,}02*A$ $0{,}085 - 0{,}01*A$ 0,15	0,3 $0{,}3 + 0{,}01*A$ 0,07
Кількість приладів, шт.		$X1$	$X2$
Прибуток від продажу 1 приладу, грн./шт.		10	8

6. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

6.1. Ідея симплексного методу

При лінійному програмуванні розглядається модель

$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to$ max/min – функція мети;

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ – обмеження;

$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,n};\quad i = \overline{1,m};\quad m \le n.$

Тут є m рівнянь-обмежень та $(m - n)$ неосновних змінних x_j.

На відміну від графо-аналітичного методу, симплекс-метод є універсальним: він дозволяє розв'язати будь-яку задачу лінійного програмування. Ми вже знаємо, що оптимальне рішення задачі лінійного програмування знаходиться в одній-двох кутових точках множини припустимих значень.

Таким чином, пошук припустимих рішень ми повинні розглядати лише серед m базисних рішень обмежень-рівнянь. Але навіть при невеликих значеннях m та n простий перебір таких базисних рішень є недоцільним, бо число базисних рішень виявляється досить великим.

Симплексний метод вносить порядок у розрахунки, обмежує кількість рішень, що розглядається.

При використанні симплексного методу виконують такі дії:

1. Пишуть функцію мети F.
2. Нерівності (обмеження) переводяться у рівняння з використанням додаткових змінних $\pm x_{n+i}$. З них маємо визначити m базисних (основних) змінних та $(n - m)$ неосновних змінних.

1-й крок. 1. Функція мети F у загальному вигляді дорівнює постійній величині та сумі неосновних змінних з додатними або від'ємними коефіцієнтами.

2. Рівняння-обмеження маємо перетворити таким чином, щоб зліва були базисні (основні) змінні, а справа – постійні величини та *(n – m) неосновних змінних з коефіцієнтами* (додатніми або від'ємними).

3. У базисному рішенні всі неосновні змінні дорівнюють нулю. Тому функція мети F та базисні змінні дорівнюють постійним величинам справа (у правій частині рівнянь).

4. Підготовка 2-го кроку:
   - переводимо з неосновних змінних в основні змінну $x_\alpha^{\text{неосн}}$, яка найбільше збільшує функцію мети F (тобто має найбільший додатній коефіцієнт);
   - тепер потрібно визначити, яку основну змінну треба перевести у неосновні. Для визначення цієї основної змінної розраховують значення $x_\alpha^{\text{неосн}}$ з рівнянь-обмежень, вважаючи, що всі інші змінні (справа і зліва, як основні, так і неосновні) дорівнюють нулю;
   - обирають рівняння-обмеження, для якого отримали мінімальне значення $x_\alpha^{\text{неосн}}$. Це рівняння-обмеження і вказує на основну змінну зліва $x_\beta^{\text{осн}}$, яку потрібно перевести в неосновні. Це рівняння-обмеження вирішують відносно $x_\alpha^{\text{неосн}}$ і використовують на другому кроці. Є тут і особливості: якщо $x_\alpha^{\text{неосн}} = 0$, то це значення використовуємо як звичайно. Але якщо $x_\alpha^{\text{неосн}} = -0$ (мінус нуль) або $x_\alpha^{\text{неосн}} = -b$, то берем $x_\alpha^{\text{неосн}} = +\infty$. Таким чином, перед другим кроком маємо: основні і неосновні змінні; залежність нової основної змінної $x_\alpha^{\text{неосн}}$ від нових неосновних змінних.

2-й крок. За допомогою отриманої залежності нової основної змінної $x_\alpha^{\text{неосн}} = f(x)$ від нових неосновних змінних перетворюють математичну модель лінійного програмування (функцію мети та рівняння-обмеження) для аналізу на 2-му кроці. Після цього знову виконують дії, аналогічні діям 1-го кроку.

Далі виконуються аналогічні дії, які завершуються, якщо у функції мети немає додатних коефіцієнтів при неосновних змінних.

6.2. Приклад використання симплексного методу

Припустимо, що ми маємо задачу лінійного програмування по випуску виробів A_1, A_2, A_3, A_4 з обмеженнями по трьох видах ресурсів (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Дані по запасах ресурсів та нормах витрат на виробництво продукції $A_1 \dots A_4$

Порядковий номер ресурсу	Назва ресурсу	Запас ресурсів	Технологічні норми витрат ресурсів на продукцію A_1, A_2, A_3, A_4			
			A_1	A_2	A_3	A_4
1	Гроші	2000 грн.	8	2	–	3
2	Пластмаса	800 кг	6	2	3	1
3	Залізо	200 кг	1,5	–	3	2
Кількість продукції, шт.			X_1	X_2	X_3	X_4
Прибуток з одиниці продукції, грн./шт.			8	3	2	3

Потрібно визначити кількість цієї продукції X_1, X_2, X_3, X_4, яка б забезпечила підприємству отримання найбільшого прибутку.

За даними табл. 6.2.1 ми отримуємо функцію мети (прибуток у залежності від кількості виробів)

$$F = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max \qquad (6.2.1)$$

та обмеження по ресурсах

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_4 \le 2000; \qquad (6.2.2)$$

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 800; \qquad (6.2.3)$$

$$1{,}5x_1 + 3x_3 + 2x_4 \le 200; \qquad (6.2.4)$$

$$x_1, \dots, x_4 \ge 0. \qquad (6.2.5)$$

Переводимо систему нерівностей-обмежень у систему рівнянь-обмежень доданням невід'ємних змінних x_5, x_6, x_7 (це залишки сировини після виконання випуску виробів)

$$F = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max \qquad (6.2.6)$$

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 2000; \qquad (6.2.7)$$

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 800; \qquad (6.2.8)$$

$$1{,}5x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 200; \qquad (6.2.9)$$

$$x_1, \dots, x_7 \ge 0.$$

1-й крок. Ми маємо $n = 7$ змінних ($x_1 \dots x_7$) і три рівняння-обмеження. Згідно з кількістю рівнянь-обмежень довільно обираємо $m = 3$ основних змінних, відносно яких розв'язуємо систему рівнянь-обмежень. При цьому функція мети F повинна залежати лише ***від неосновних змінних.***

$$F = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max \tag{6.2.10}$$

$$x_5 = 2000 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_4; \tag{6.2.11}$$

$$x_6 = 800 - 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4; \tag{6.2.12}$$

$$x_7 = 200 - 1{,}5x_1 - 3x_3 - 2x_4; \tag{6.2.13}$$

$$x_1, ..., x_4 \geq 0.$$

З рівнянь (6.2.10) – (6.2.13) можна зробити такі висновки:

1. Основні змінні $X_5 = 1000$; $X_6 = 800$; $X_7 = 200$, а неосновні $X_1 = \ldots = X_4 = 0$. Це базисне рішення виявилось припустимим, бо $X_i \geq 0$.
2. Значення $X_j = 0$, $j = 1...4$, очевидно, не є оптимальним рішенням (підприємство нічого не випускає). Але своєї мети (знайти перше будь-яке припустиме базисне рішення, яке потім можна покращити) ми досягли.
3. Нам необхідно зробити наступний крок таким чином, щоб збільшити функцію мети F (прибуток).

Для виконання наступного, другого, кроку ми повинні якусь неосновну змінну $X_1, \ldots, X_4$ перевести у основні (базисні). Яку саме? З функції мети F ми бачимо, що найбільше її збільшує X_1, бо вона має найбільший додатній коефіцієнт ($8X_1$). Тобто якщо X_1 буде переведена у базисні змінні, то замість $X_1 = 0$ ми можемо отримати $X \geq 0$ і тим самим маємо можливість збільшити функцію мети. Тому X_1 переводимо з неосновних змінних в основні.

Але одночасно виникає й інше питання: яку основну (базисну) змінну (X_4, X_6, X_7) ми повинні перевести в основні? Ми зацікавлені зробити X_1 як можна більшою (бо це збільшує F). Але ми не можемо збільшувати X_1 до нескінченності, бо таке збільшення згідно з рівняннями-обмеженнями (6.2.11) – (6.2.13) обмежене ***вимогою відсутності інших від'ємних змінних*** (тобто X_1 обмежене рівняннями-обмеженнями). Із (6.2.11) – (6.2.13) випливає, що у найкращому для збільшення X_1 випадку (коли всі інші основні та неосновні змінні дорівнюють нулю) значення X_1 не повинні перевищувати:

$$X_1 = 2000/8 = 250; \tag{6.2.14}$$

$$X_1 = 800/6 = 133; \tag{6.2.15}$$

$$X_1 = 200/1{,}5 = 133. \tag{6.2.16}$$

З цих отриманих трьох значень для X_1 ми повинні орієнтуватись на використання $X_1 = 133$, яке пов'язане з рівняннями (6.2.12) та (6.2.13), бо лише воно гарантує відсутність від'ємних інших змінних: у цьому можна переконатись, якщо підставити $X_1 = 250$ у рівняння (6.2.12) або (6.2.13).

Таким чином, у майбутніх діях ми повинні керуватись такими ***правилами***:

1. З розрахованих значень неосновної змінної ми повинні виділити найменшу за величиною, і вона нам вкаже рівняння-обмеження, з якого базисна змінна переводиться у неосновні змінні.
2. Якщо ми отримали кілька однакових найменших значень неосновної змінної, то тоді виділяємо будь-яке з них.

У даному випадку найменше значення $X_1 = 133$ ми пов'язуємо з рівнянням (6.2.13) і тому отримуємо рівняння для нової базисної змінної

$$x_1 = 133\frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_7. \qquad (6.2.17)$$

Ми отримали такий перелік змінних: $X_5,\ X_6,\ X_1$ – основні (базисні); X_2, X_3, X_4, X_7 – неосновні.

На цьому 1-й крок закінчується.

2-й крок. Отримане значення X_1 по (6.2.17) ми використовуємо у рівняннях (6.2.10) – (6.2.13) для отримання іншої системи, де у правих частинах рівнянь будуть знаходитись лише неосновні змінні:

$$F = (133\frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_7) + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 =$$
$$= \frac{3200}{3} + 3x_2 - 14x_3 - \frac{23}{3}x_4 - \frac{16}{3}x_7 \to \max; \qquad (6.2.18)$$

$$x_5 = 2000 - 8(133\frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_7) - 2x_2 - 3x_4 =$$
$$= 933\frac{1}{3} - 2x_2 + 16x_3 + \frac{23}{3}x_4 + \frac{16}{3}x_7; \qquad (6.2.19)$$

$$x_6 = 800 - 6(133\frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_7) - 2x_2 - 3x_3 - x_4 =$$
$$= -2x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 4x_7; \qquad (6.2.20)$$

$$x_1 = 133\frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_7, \qquad (6.2.21)$$

де $X_5 = 933{,}3$; $X_6 = 0$; $X_1 = 133{,}3$ – основні змінні; $X_2 = X_3 = X_4 = X_7 = 0$ – неосновні змінні.

Як бачимо, на другому кроці функція мети $F = 3200/3$ збільшилась. Це означає, що ми переміщуємо симплекс у вірному напрямку. В інших випадках вільний член функції мети може не змінюватись по величині, що теж є ознакою переміщення у вірному напрямку. Але якщо при наступному кроці вільний член F зменшується, то це означає, що ми переміщуємось у невірному напрямку, і тому ми повинні ще раз переглянути рішення. Але чи є отримана функція F оптимальною? Ні, бо ми маємо в функції мети F при змінній X_2 додатний коефіцієнт, тобто якщо ми переведемо X_2 у базисні (тоді ця змінна може стати більшою за нуль), то ми можемо збільшити функцію мети F.

Найбільший додатній коефіцієнт у функції мети F ми маємо при змінній X_2. Тому переводимо неосновну змінну X_2 в базисні змінні. Для визначення, яку основну (базисну) змінну треба перевести у неосновні, розв'язуємо рівняння (6.2.19) – (6.2.21), у яких всі змінні, крім X_2, дорівнюють нулю. Тоді отримаємо

$$X_2 = 933/2 = 466{,}5;$$
$$X_2 = +0/+2 = +0;$$
…………………..

Тут третє рівняння (6.2.21) не розглядається, бо у ньому немає X_2.

Найменше значення по умовах відсутності від'ємних змінних відповідає $X_2 = +0$. ***Ми отримали базисне вироджене рішення.*** Таким чином, для 3-го кроку повинні використати рівняння, яке отримується з (6.2.20),

$$x_2 = \frac{9}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_7. \qquad (6.2.22)$$

Тут ми отримали такий перелік змінних: X_5, X_2, X_1 – основні змінні; X_3, X_4, X_6, X_7 – неосновні змінні.

На цьому 2-й крок завершується.

3-й крок. Значення X_2 по (6.2.22) ми використовуємо у рівняннях (6.2.18) – (6.2.21) для отримання іншої системи рівнянь, де у правих частинах будуть знаходитись лише неосновні змінні:

$$F = \frac{3200}{3} + 3\left(\frac{9}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_7\right) - 14x_3 - \frac{23}{3}x_4 - \frac{16}{3}x_7 =$$

$$= \frac{3200}{3} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{17}{6}x_4 - \frac{3}{2}x_6 + \frac{2}{3}x_7 \to \max; \qquad (6.2.23)$$

$$x_5 = 933\frac{1}{3} - 2(\frac{9}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_7) + 16x_3 + \frac{23}{3}x_4 + \frac{16}{3}x_7 =$$

$$= 933\,\frac{1}{3} + 7x_3 + \frac{2}{3}x_4 + x_6 + \frac{4}{3}x_7; \qquad (6.2.24)$$

$$x_2 = \frac{9}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_7; \qquad (6.2.25)$$

$$x_1 = 133\,\frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_7. \qquad (6.2.26)$$

Порівняно з попереднім кроком вільний член функції мети F не змінився. Отримана функція мети F не є оптимальною, бо у ній є змінні з додатними коефіцієнтами. Переводимо X_4 в основні змінні. Для визначення, яку основну змінну потрібно перевести в неосновні, розв'язуємо рівняння (6.2.24) – (6.2.26), в яких всі змінні, крім X_4, дорівнюють нулю. Тоді отримуємо

$$X_4 = -933/(3/2) = -1440 = +\infty;$$
$$X_4 = -0/3{,}5 = -0 = +\infty;$$
$$X_4 = (400{,}3)/(3/4) = 100.$$

Тут ми ***вперше зустрілися з від'ємними значеннями*** змінних, навіть якщо ці значення дорівнюють "–0". Від'ємність величини X_4 означає, що лише від'ємні значення X_4 (тобто заборонене значення змінної) *може* забезпечити відсутність від'ємних значень інших змінних. Тому використання відповідних рівнянь ми повинні заборонити. З цією метою, щоб не змінювати встановлений алгоритм рішення, ми умовно прирівнюємо від'ємні значення X_4 до "+∞", тим самим забороняючи використання відповідних рівнянь (6.2.24) – (6.2.26).

У майбутньому треба використовувати таке ***правило:*** якщо отримане значення змінної, що переводиться в основні, має від'ємний знак (навіть при мінус нульовому значенні), то величину змінної приймаємо ***рівною додатній нескінченності.***

Серед X_4 обираємо найменше значення $X_4 = 100$ і тому з (6.2.26) отримуємо

$$x_4 = 100 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7. \qquad (6.2.26)$$

Ми отримали такий перелік змінних: X_5, X_2, X_4 – основні (базисні) змінні; X_6, X_3, X_1, X_7 – неосновні змінні.

На цьому 3-й крок закінчується.

4-й крок. Рівняння (6.2.27) використовується для отримання із системи (6.2.23) – (6.2.26) іншої системи рівнянь, де у правій частині будуть знаходитись лише нові неосновні змінні:

$$F=\frac{3200}{3}-\frac{1}{2}x_3+\frac{17}{6}(100-\frac{3}{4}x_1-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7)-\frac{3}{2}x_6+\frac{2}{3}x_7=$$

$$=1350-\frac{17}{8}x_1-\frac{19}{4}x_3-\frac{3}{2}x_6-\frac{3}{4}x_7\to\max; \qquad (6.2.28)$$

$$x_5=933\frac{1}{3}+7x_3+\frac{2}{3}(100-\frac{3}{4}x_1-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7)+x_6+\frac{4}{3}x_7=$$

$$=1000-\frac{1}{2}x_1+6x_3+x_6+x_7; \qquad (6.2.29)$$

$$x_2=\frac{9}{2}x_3+\frac{7}{2}(100-\frac{3}{4}x_1-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7)-\frac{1}{2}x_6+2x_7=$$

$$=350-\frac{21}{8}x_1-\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{4}x_7; \qquad (6.2.30)$$

$$x_4=100-\frac{3}{4}x_1-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7. \qquad (6.2.31)$$

Порівняно з попереднім кроком вільний член F збільшився до 1350. Отримана функція мети F є оптимальною, бо всі коефіцієнти при змінних у рівнянні (6.2.28) є від'ємними. Таким чином, оптимальне рішення задачі має вигляд:

$X_1 = 0$; $X_2 = 350$; $X_3 = 0$; $X_4 = 100$; $X_5 = 1000$; $X_6 = 0$; $X_7 = 0$; $F = 1350$.

Критерій оптимальності: якщо у функції мети F (максимум якої розраховується) відсутні додатні коефіцієнти при неосновних змінних, то ми отримали оптимальне рішення.

Оптимальне рішення задачі: $X_1 = 0$; $X_2 = 350$; $X_3 = 0$; $X_4 = 100$; $X_5 = 1000$; $X_6 = 0$; $X_7 = 0$; $F = 1350$.

Розшифрування цього рішення:

1. Ми повинні випустити вироби A_1, A_2, A_3, A_4 у відповідній кількості: $X_1 = 0$ шт.; $X_2 = 350$ шт.; $X_3 = 0$ шт.; $X_4 = 100$ шт.
2. Після випуску виробів отримуємо залишки ресурсів $X_5 = 1000$ грн.; $X_6 = 0$ кг; $X_7 = 0$ кг.
3. Максимально можливий прибуток дорівнює $F = 1350$.

Завдання

1. Отримати рішення задач розділу 5.10 симплекс-методом.
2. Розв'язати графо-аналітичним та симплекс-методом задачу лінійного програмування:

$$F = 10x_1 + x_2 \to \max; \quad x_2 \geq 0{,}2N; \quad (0{,}5x_1 - x_2 + 0{,}5N)(-1)^N \leq 0;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 2N,$$

де $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; N – порядковий номер студента у групі.

3. Розв'язати графо-аналітичним та симплекс-методом задачу лінійного програмування:

$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max; \quad x_2 \leq 4N; \quad (x_1 - x_2 - 1)(-1)^N \leq 0;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6N; \quad x_1 + 3x_2 \geq 3N.$$

6.3. Деякі окремі випадки перетворень математичної моделі при використанні симплекс-методу

Згідно з симплекс-методом для виконання першого кроку всі базисні змінні повинні бути додатними, тобто в отриманій системі виразів, яка складається з функції мети

$$F = C_{m+1}X_{m+1} + C_m + 2X_{m+2} + ... + C_{m+n}X_{m+n}$$

та рівнянь-обмежень

$$x_1 = k_1 - b_{1,m+1}x_{m+1} + b_{1,m+2}x_{m+2} + ... + b_{1,m+n}x_{m+n};$$
$$x_2 = k_2 - b_{2,m+1}x_{m+1} + b_{2,m+2}x_{m+2} + ... + b_{2,m+n}x_{m+n};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_i = k_i - b_{i,m+1}x_{m+1} + b_{i,m+2}x_{m+2} + ... + b_{i,m+n}x_{m+n};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = k_m - b_{m,m+1}x_{m+1} + b_{m,m+2}x_{m+2} + ... + b_{m,m+n}x_{m+n}$$

всі значення $k_i \geq 0$ ($i = 1, ..., m$).

Але ця умова витримується не завжди. В деяких задачах значення k_i може бути від'ємним, і тоді основні змінні x_i ($i = 1...m$) мають ***неприпустиме*** від'ємне значення.

У таких задачах потрібно спочатку виконати умову використання симплексного методу: ***знайти припустиме додатне базисне рішення або встановити несумісність системи обмежень.***

Для цього ***по черзі*** перетворюють рівняння з $k_i \leq 0$ таким чином, щоб отримати припустимі вирази.

У рівняннях з $k_i < 0$ можуть виникнути три випадки:

1. Вільний член k_i та всі коефіцієнти $b_{i,m+j}$ є від'ємними. В цьому випадку система обмежень ***несумісна і ми її не розглядаємо.***
2. В i-му рівнянні є лише одна змінна з додатним коефіцієнтом $b_{i,m+j} > 0$. В цьому випадку ця змінна переводиться в основні.
3. В i-му рівнянні є кілька змінних з додатними коефіцієнтами $b_{i,m+j} > 0$. В цьому випадку одна з цих змінних переводиться в основні.

Переведення неосновної змінної x_{m+j} в основні виконується таким чином:

1. У виділеному рівнянні неосновна змінна x_{m+j} переводиться в ліву частину рівняння (тобто визначається як основна).
2. Отримане рівняння для x_{m+j} використовується в усіх інших рівняннях для вилучення з їх правих частин змінної x_{m+j}. Такі дії дозволяють вилучати ***по одному*** всі рівняння, які мають значення $k_i < 0$, до тих пір, доки ми не отримаємо припустиме базисне рішення. Але якщо в процесі цих дій на будь-якому їх етапі ми отримаємо хоча б одне рівняння з $k_i < 0$ та з усіма коефіцієнтами $b_{i,m+j} < 0$, то це означає ***несумісність нерівностей,*** і тому ми повинні не розглядати таку математичну модель (або вилучати з неї суперечності). Якщо в процесі перетворення системи нерівностей функція мети F має якусь неосновну змінну з нульовим коефіцієнтом (тобто вона відсутня в F), то це означає, що ця змінна не є ні вигідною, ні збитковою і переведення її в основні ***не змінить*** оптимальне значення F. Якщо критерій оптимальності виконується (і із функції мети випадає одна з неосновних змінних), то ***порушується умова наявності лише одного оптимального рішення.***

7. Двоїсті задачі лінійного програмування

7.1. Складання двоїстої задачі

Дві задачі лінійного програмування називаються двоїстими, якщо вони мають такий вигляд:

1. Максимізувати функцію $F = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \rightarrow \max$ при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1\ ;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2\ ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m\ ,$$

де $x_j \ge 0$, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$; $m < n$; b_i – наявні ресурси.

2. Мінімізувати функцію $Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \rightarrow \min$ при обмеженнях

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge C_1\ ;$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge C_2\ ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge C_n\ ;$$
$$y_i \ge 0; \qquad i = 1,\ ..., m.$$

Першу задачу будемо називати ***початковою,*** або ***прямою*** (причому будь-яку із двоїстих задач можемо розглядати як початкову), а другу задачу – двоїстою. Щоб отримати з початкової задачі ***двоїсту,*** потрібно виконати такі дії:

1. Привести всі нерівності системи обмежень початкової задачі до одного вигляду з однаковим знаком "≤" або "≥", в залежності від того, що шукаємо ($F(x) \to \max$; $Z(y) \to \min$). Для цього ***нерівності,*** де ця умова не виконується, множаться на "–1".
2. Скласти у матричній формі систему обмежень для початкової та двоїстої задач.

Початкова задача: $F = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \to \max$ при обмеженнях $A \bullet X \le B$,
де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B^T = \left| b_1 \quad b_2 \cdots b_m \right|.$$

Двоїста задача $Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \max$ при обмеженнях $A^T \bullet Y \ge C$,
де

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}; \quad C^T = \left| C_1 \quad C_2 \cdots C_n \right|.$$

При цьому матрицю A системи нерівностей треба транспонувати (отримати A^T), нерівностям надати протилежного змісту (у порівнянні з початковою задачею), а ***коефіцієнти при змінних функції мети початкової задачі*** взяти як вільні члени.

3. У початковій та двоїстій задачах знаки обмежень ("≤"або "≥") повинні бути протилежними.
4. Функція мети F/Z має такі особливості у двоїстій задачі:
   а) повинен розшукуватись max/(min), якщо в початковій задачі розшукується min/(max);
   б) Як змінні беруться $X_1 \ldots X_n$ (якщо розшукується $F \to \max$), або $Y_1 \ldots Y_m$ (якщо розшукується $Z \to \min$);
   в) Як коефіцієнти при змінних беруться вільні члени протилежної задачі.

5. Всі змінні невід’ємні (у початковій та двоїстій задачі).

При розв’язанні задач (початкової та двоїстої) симплексним методом для перетворення системи нерівностей у систему рівнянь необхідно ввести m додаткових невід’ємних змінних $X_{n+1}\ldots X_{n+m}$ або n додаткових невід’ємних змінних $Y_{m+1}\ldots Y_{m+n}$.

Між змінними X та Y початкової та двоїстої задач існують такі відповідності (табл. 7.1):

Таблиця 7.1

Відповідність між змінними початкової та двоїстої задач

X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	…	X_{n+i}	…	X_{n+m}
Y_{m+1}	Y_{m+2}	…	Y_{m+j}	…	Y_{m+n}	Y_1	Y_2	…	Y_i	…	Y_m

Іншими словами, кожній змінній X_j ($j = 1\ldots n + m$) однієї задачі ставиться у відповідність змінна Y_i ($i = 1...n + m$) іншої задачі.

7.2. Основні теореми двоїстості

Основні теореми двоїстості стосуються лише оптимального рішення, яке отримується через кілька кроків рішення і яке має справу не з початковими змінними $X_1\ldots X_n$ для прямої задачі або $Y_1\ldots Y_m$ для двоїстої задачі, а з повною сукупністю змінних оптимального рішення:

1. Для прямої задачі сукупністю змінних є ($X_1\ldots X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m}$), звідки ми визначаємо значення m базисних змінних та n неосновних змінних. Тут ми вводимо m додаткових невід’ємних змінних $X_{n+1},\ldots, X_{n+m}$.
2. Для двоїстої задачі сукупністю змінних є ($Y_1\ldots Y_m, Y_{m+1},\ldots, Y_{m+n}$), звідки ми визначаємо значення n базисних змінних та m неосновних змінних. Тут ми вводимо n додаткових невід’ємних змінних $Y_{m+1}, \ldots, Y_{m+n}$.

В оптимальному рішенні змінній X_j ($j = 1, \ldots, n + m$) прямої задачі ставиться у відповідність змінна Y_i ($i = 1, \ldots, n + m$) двоїстої задачі згідно з табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Відповідність між змінними початкової та двоїстої задач

X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	…	X_{n+i}	…	X_{n+m}
Y_{m+1}	Y_{m+2}	…	Y_{m+j}	…	Y_{m+n}	Y_1	Y_2	…	Y_i	…	Y_m

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні будується на таких теоремах:

Теорема 1. Якщо задача лінійного програмування має кінцевий оптимум (тобто вільний член *A)*

$$F_{\max} = A + C_1^{\text{опт}} X_1 + \ldots + C_j^{\text{опт}} X_j + \ldots + C_n^{\text{опт}} Xn,$$

то двоїста до неї задача також має кінцевий оптимум, тобто вільний член

$$Z_{\min} = A + b_1^{\text{опт}} Y_1 + \ldots + b_i^{\text{опт}} Y_i^{\text{опт}} + \ldots + b_m^{\text{опт}} Y_m,$$

який співпадає з оптимумом початкової задачі (бо небазисні змінні дорівнюють нулю)

$$F_{\max\ \text{опт}} = Z_{\min\ \text{опт}} = A,$$

де $C_j^{\text{опт}}$, $b_j^{\text{опт}}$ взяті з індексом "опт", щоб підкреслити, що значення коефіцієнтів $C_j^{\text{опт}}$, $b_j^{\text{опт}}$ змінились при русі до оптимуму.

Якщо лінійна форма однієї із двоїстих задач не обмежена, то умови іншої задачі мають протиріччя.

Теорема 2. В оптимальній функції мети початкової задачі $F_{\max}/Z_{\min}$ значення коефіцієнтів при неосновних змінних дорівнюють значенням базисних змінних оптимального рішення двоїстої задачі

$$F_{\max} = A + \sum_{j=1}^{m+n} C_j^{\text{опт}} X_j = A + \sum_{j=1}^{m+n} [(Y_j^{\text{опт}}) X_j];$$

$$Z_{\max} = A + \sum_{i=1}^{m+n} b_i^{\text{опт}} Y_i = A + \sum_{i=1}^{m+n} [(X_i^{\text{опт}}) Y_i].$$

Примітка: 1. Якщо в одній із задач (прямій або двоїстій) порушується одиничність рішення, то оптимальне рішення іншої задачі буде виродженим.

2. Відповідність між змінними $(Y_j^{\text{опт}})X_j$ та $(X_i^{\text{опт}})Y_i$ береться з табл. 7.1.

Із теорем 1 та 2 випливає, що отримане оптимальне рішення однієї з двоїстих задач дозволяє написати оптимальну функцію мети іншої задачі

Теорема 3 (про "об'єктивно обумовлені оцінки"). В оптимальному рішенні двоїстої задачі значення оптимальних базисних змінних $Y_i^{\text{опт}}$ дорівнюють похідній оптимальної функції мети початкової задачі по відповідному вільному члену оптимальної початкової задачі

$$Y_i^{\text{опт}} = \frac{dF_{\max}^{\text{опт}}}{db_i^{\text{опт}}} dF_{\max}^{\text{опт}}. \qquad (7.2.1)$$

Таким чином оптимальні базисні змінні двоїстої задачі є оцінками зростання прибутку $F_{\max}$ при збільшенні кількості сировини i-го виду, тобто дають оцінку цінності сировини з точки зору зростання прибутку: якщо задатися збільшенням кількості сировини db_i початкової задачі, то отримаємо збільшення прибутку $dF_{\max}^{\text{опт}}$ як результат такої дії.

Пояснимо це на прикладі. Нехай отримані оптимальні рішення мають вигляд

$$F_{\max} = A + \sum_{j=1}^{n} \text{C}_j^{\text{опт}} X_j; \qquad Z_{\min} = A + \sum_{i=1}^{m} b_i^{\text{опт}} Y_i.$$

На основі першої теореми маємо

$$F_{\max}^{\text{опт}} = Z_{\min}^{\text{опт}} = A + \sum_{j=1}^{n+m} C_j^{\text{опт}} X_j^{\text{опт}} = A + \sum_{i=1}^{n+m} b_i^{\text{опт}} Y_i^{\text{опт}},$$

звідки

$$\frac{dF_{\max}^{\text{опт}}}{db_i^{\text{опт}}} = Y_i^{\text{опт}},$$

тобто ми прийшли до форми (7.2.1).

Враховуючи лінійність функції $F_{\max}$, отримуємо

$$\Delta F_{\max} = Y_i^{\text{опт}} \Delta\, b_i^{\text{опт}}.$$

Тобто між зростанням функції мети $F_{\max}$ і зростанням ресурсів Δb_i існує пряма пропорційна залежність з коефіцієнтом пропорційності $Y_i^{\text{опт}}$ – оптимальним значенням змінної двоїстої задачі.

Оптимальні значення $Y_i^{\text{опт}}$ визначають ріст прибутку $\Delta F_{\max}^{\text{опт}}$ при збільшенні сировини i-го виду і $Y_i^{\text{опт}}$ виступають ***як умовні ціни одиниці і-го виду сировини.***

Тому змінні двоїстої задачі іноді називають ***"об'єктивно обумовленими оцінками".*** Тут мова йде не про вартість сировини на ринку (при купівлі), а про оцінку цінності сировини з точки зору зростання прибутку.

7.3. Порівняння рішення прямої і двоїстої задач

Розглянемо ***пряму (початкову)*** задачу про використання сировини, рішення для якої ми вже отримали: підприємство випускає чотири вироби у кількості X_1, X_2, X_3, X_4 з трьох видів сировини, залишки якої складають X_5, X_6, X_7 одиниць.

Рішення цієї задачі ми отримали раніше:

$$F^{\text{опт}}_{\max} = 1350 - \frac{17}{8}x_1 - \frac{19}{4}x_3 - \frac{3}{2}x_6 - \frac{3}{4}x_7;$$

$X_1 = 0$; $X_2 = 350$; $X_3 = 0$; $X_4 = 100$; $X_5 = 1000$; $X_6 = 0$; $X_7 = 0$; $F = 1350$.

Вважаємо цю задачу початковою. Рішення двоїстої задачі (воно не приводиться) отримується симплекс-методом і має вигляд

$$Z^{\text{опт}}_{\min} = 1350 + 1000\,Y_1 + 350\,Y_5 + 100\,Y_7.$$

Базисні змінні: $Y_2 = 3/2$; $Y_3 = 3/4$; $Y_4 = 17/8$; $Y_6 = 19/4$.

Небазисні змінні дорівнюють нулю: $Y_1 = Y_5 = Y_7 = 0$.

Складемо таблицю відповідності отриманих змінних (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

X_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
$X_j^{\text{опт}}$	0	350	0	100	1000	0	0
$C_j^{\text{опт}}$	17/8	0	19/4	0	0	3/2	3/4
Y_i	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_1	Y_2	Y_3
$Y_i^{\text{опт}}$	17/8	0	19/4	0	0	3/2	3/4
$b_i^{\text{опт}}$	0	350	0	100	1000	0	0

Звідси видно, що оптимальне рішення початкової задачі $F^{\text{опт}}_{\max}$ та X_j ($j = 1\ldots7$) дозволяють визначити функцію мети двоїстої задачі $Z^{\text{опт}}_{\max}$ і навпаки.

Після виконання оптимального плану згідно з початковою задачею отримуємо прибуток $F^{\text{опт}}_{\max}$ = 1350 грн. і маємо такі залишки ресурсів: X_5= 1000 грн. (гроші), X_6= 0 кг (пластмаса), X_7= 0 кг (залізо). Збільшення запасів ресурсів, наприклад, на 100 одиниць, дозволяє збільшити прибуток. Очікуване збільшення прибутку від збільшення запасів ресурсів на 100 одиниць складає:

$$\Delta F_{\max X_5} = Y_1 \Delta b_1 = 0 \cdot 100 = 0; \qquad F^{\text{опт}}_{5\max} = 1350 + 0 = 1350 \text{ грн.},$$

$$\Delta F_{\max X_6} = Y_2 \Delta b_2 = (\frac{3}{2}) \cdot 100 = 150; \qquad F^{\text{опт}}_{6\max} = 1350 + 150 = 1500 \text{ грн.},$$

$$\Delta F_{\max X_7} = Y_3 \Delta b_3 = (\frac{3}{4}) \cdot 100 = 75; \qquad F^{\text{опт}}_{6\max} = 1350 + 75 = 1425 \text{ грн.}$$

Можливість зростання прибутку на вказану величину можна перевірити шляхом додання ресурсів до початкової їх наявності і розв’язанням задачі симплекс-методом.

7.4. Приклад рішення двоїстої задачі

Розглянута нами початкова задача лінійного програмування має вигляд

$$F = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max;$$
$$8x_1 + 2x_2 + 3x_4 \le 2000;$$
$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 800;$$
$$1{,}5x_1 + 3x_3 + 2x_4 \le 200;$$
$$x_1, ..., x_4 \ge 0.$$

Вона може бути перетворена у відповідну до неї двоїсту задачу:

$$Z = 2000y_1 + 800y_2 + 200y_3 \to \min;$$

$$8y_1 + 6y_2 + \frac{3}{2}y_3 \ge 8; \qquad 8y_1 + 6y_2 + \frac{3}{2}y_3 - y_4 = 8;$$
$$2y_1 + 2y_2 \ge 3; \qquad 2y_1 + 2y_2 - y_5 = 3;$$
$$3y_2 + 3y_3 \ge 2; \qquad 3y_2 + 3y_3 - y_6 = 2;$$
$$3y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 3; \qquad 3y_1 + y_2 + 2y_3 - y_7 = 3.$$
$$y_i \ge 0; \quad i = 1, \ ..., m.$$

Основні змінні Y_4, ..., Y_7 двоїстої задачі мають неприпустиме від’ємне значення. Тому потрібно виконати перетворення рівнянь перед використанням симплекс-методу. З цією метою, не чіпаючи функцію мети (ми її потім перерахуємо), розглянемо спочатку рівняння-обмеження.

1-й крок.

$$y_4 = -8 + 8y_1 + 6y_2 + \frac{3}{2}y_3; \tag{7.4.1}$$
$$y_5 = -3 + 2y_1 + 2y_2; \tag{7.4.2}$$
$$y_6 = -2 + 3y_2 + 3y_3; \tag{7.4.3}$$
$$y_7 = -3 + 3y_1 + y_2 + 2y_3. \tag{7.4.4}$$

З рівняння (7.4.1), у якому базисна змінна $Y_4 = -8$ (має найменше від'ємне значення), переводимо у базисну змінну Y_1. У цьому випадку ми отримуємо рівняння

$$y_1 = 1 - \frac{3}{4}y_2 - \frac{3}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4. \qquad (7.4.5)$$

Рівняння (7.4.5) використовуємо на 2-му кроці для вилучення з правих частин рівнянь (7.4.1) – (7.4.4) нової базисної змінної y_1.

2-й крок.

$$y_1 = 1 - \frac{3}{4}y_2 - \frac{3}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4; \qquad (7.4.6)$$

$$y_5 = -3 + 2(1 - \frac{3}{4}y_2 - \frac{3}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4) + 2y_2 = -1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4; \qquad (7.4.7)$$

$$y_6 = -2 + 3y_2 + 3y_3; \qquad (7.4.8)$$

$$y_7 = -3 + 3(1 - \frac{3}{4}y_2 - \frac{3}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4) + y_2 + 2y_3 = -\frac{5}{4}y_2 + \frac{23}{16}y_3 + \frac{3}{8}y_4. \qquad (7.4.9)$$

З рівняння (7.4.8), у якому базисна змінна $Y_6 = -2$ (має від'ємне значення), переводимо у базисну змінну Y_2. У цьому випадку ми отримуємо рівняння

$$y_2 = \frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3}y_6. \qquad (7.4.10)$$

Рівняння (7.4.10) використовуємо на 3-му кроці для вилучення з правих частин рівнянь (7.4.6) – (7.4.9) нової базисної змінної y_2.

3-й крок

$$y_1 = 1 - \frac{3}{4}(\frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3}y_6) - \frac{3}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4 = \frac{1}{2} + \frac{9}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4 - \frac{1}{4}y_6; \qquad (7.4.11)$$

$$y_5 = -1 + \frac{1}{2}(\frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3}y_6) - \frac{3}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 = -\frac{2}{3} - \frac{7}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{1}{6}y_6; \qquad (7.4.12)$$

$$y_2 = \frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3}y_6; \qquad (7.4.13)$$

$$y_7 = -\frac{5}{4}(\frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3}y_6) + \frac{23}{16}y_3 + \frac{3}{8}y_4 = -\frac{10}{12} + \frac{43}{16}y_3 + \frac{3}{8}y_4 - \frac{5}{12}y_6. \qquad (7.4.14)$$

З рівняння (7.4.12), у якому базисна змінна $Y_5 = -1$ (має від'ємне значення), переводимо у базисну змінну Y_6. У цьому випадку ми отримуємо рівняння

$$y_6 = 4 + \frac{21}{4}y_3 - \frac{3}{2}y_4 + 6y_5. \qquad (7.4.15)$$

Рівняння (7.4.15) використовуємо на 4-му кроці для вилучення з правих частин рівнянь (7.4.11) – (7.4.14) нової базисної змінної y_6.

4-й крок

$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{16}y_3 + \frac{1}{8}y_4 - \frac{1}{4}(4 + \frac{21}{4}y_3 - \frac{3}{2}y_4 + 6y_5) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y_3 + \frac{1}{2}y_4 - \frac{3}{2}y_5; \qquad (7.4.16)$$

$$y_6 = 4 + \frac{21}{4}y_3 - \frac{3}{2}y_4 + 6y_5; \qquad (7.4.17)$$

$$y_2 = \frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3}(4 + \frac{21}{4}y_3 - \frac{3}{2}y_4 + 6y_5) = 2 + \frac{3}{4}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + y_5; \qquad (7.4.18)$$

$$y_7 = -\frac{10}{12} + \frac{43}{16}y_3 + \frac{3}{8}y_4 - \frac{5}{12}(4 + \frac{21}{4}y_3 - \frac{3}{2}y_4 + 6y_5) =$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_3 + y_4 - \frac{5}{2}y_5. \qquad (7.4.19)$$

З рівняння (7.4.19), у якому базисна змінна $Y_7 = -5/2$ (має від'ємне значення), переводимо у базисну змінну Y_4. У цьому випадку ми отримуємо рівняння

$$y_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_3 + \frac{5}{2}y_5 + y_7. \qquad (7.4.20)$$

Рівняння (7.4.20) використовуємо на 5-му кроці для вилучення з правих частин рівнянь (7.4.16) – (7.4.19) нової базисної змінної y_4.

5-й крок

$$y_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y_3 + \frac{1}{2}(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_3 + \frac{5}{2}y_5 + y_7) - \frac{3}{2}y_5 =$$

$$= \frac{3}{4} - y_3 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7; \qquad (7.4.21)$$

$$y_6 = 4 + \frac{21}{4}y_3 - \frac{3}{2}(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_3 + \frac{5}{2}y_5 + y_7) + 6y_5 =$$

$$= \frac{1}{4} + 6y_3 + \frac{9}{4}y_5 - \frac{3}{2}y_7; \qquad (7.4.22)$$

$$y_2 = 2 + \frac{3}{4}y_3 - \frac{1}{2}(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_3 + \frac{5}{2}y_5 + y_7) +$$

$$+ 2y_5 = \frac{3}{4} + y_3 + \frac{3}{4}y_5 - \frac{1}{2}y_7; \qquad (7.4.23)$$

$$y_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_3 + \frac{5}{2}y_5 + y_7. \qquad (7.4.24)$$

У даному випадку всі базисні змінні є додатними. Тому переходимо до використання симплексного методу з метою отримання оптимального рішення. У початкову функцію мети

$$Z = 2000y_1 + 800y_2 + 200y_3 \to \min$$

вставимо отримані значення базисних змінних (7.4.21) – (7.4.24) з тим, щоб залишити у правій частині функції мети лише неосновні змінні

$$Z = 2000\,(\frac{3}{4} - y_3 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7) + 800\,(\frac{3}{4} + y_3 + \frac{3}{4}y_5 - \frac{1}{2}y_7) + 200\,y_3 =$$

$$= 2100 - 1000y_3 + 100y_5 + 600y_7 \to \min. \qquad (7.4.25)$$

З функції мети (7.4.25) випливає, що для її збільшення потрібно в основні змінні перевести неосновну змінну y_3 (пояснюється це тим, що насправді для переведення функції мети до симплексного методу її потрібно помножити на “–1”. Таким чином, згідно з симплексним методом, ми повинні з рівнянь (7.4.21) – (7.4.23) визначити значення y_3. В результаті отримуємо: $y_3 = 3/4$; $y_3 = (-1/4)/6 = \infty$; $y_3 = -3/4 = \infty$; $y_3 = (5/2)(2/1) = 5$.

Таким чином, для визначення y_3 ми повинні використати рівняння (7.4.21), звідки отримуємо

$$y_3 = \frac{3}{4} - y_1 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7. \qquad (7.4.26)$$

6-й крок

Рівняння (7.4.26) використовуємо на 6-му кроці для вилучення з правих частин рівнянь (7.4.21) – (7.4.25) нової базисної змінної y_3.

$$Z = 2100 - 1000(\frac{3}{4} - y_1 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7) + 100y_5 + 600y_7 =$$

$$= 1350 + 1000y_1 + 350y_5 + 100y_7 \to \min; \qquad (7.4.27)$$

$$y_3 = \frac{3}{4} - y_1 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7; \qquad (7.4.28)$$

$$y_6 = \frac{1}{4} + 6(\frac{3}{4} - y_1 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7) + \frac{9}{4}y_5 - \frac{3}{4}y_7 =$$

$$= \frac{19}{4} - 6y_1 + \frac{3}{4}y_5 + \frac{3}{2}y_7. \qquad (7.4.29)$$

$$y_2 = \frac{3}{4} + (\frac{3}{4} - y_1 + \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7) + \frac{3}{4}y_5 - \frac{1}{2}y_7 =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{8}y_5 - \frac{1}{4}y_7; \qquad (7.4.30)$$

$$y_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - y_1 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{2}y_7) + \frac{5}{2}y_5 + y_7 =$$

$$= \frac{17}{8} - \frac{1}{2}y_1 + \frac{21}{8}y_5 + \frac{3}{4}y_7. \qquad (7.4.31)$$

Ми отримали ***припустиме базисне рішення,*** бо всі основні $Y_i > 0$. Одночасно у функції мети Z всі неосновні змінні мають додатні коефіцієнти (немає жодного від'ємного коефіцієнта, який би зменшував функцію мети *Z)*.

Тому на 6-му кроці ми ***отримали оптимальне рішення.***

Оптимальне рішення початкової задачі

$$F_{\max}^{\text{опт}} = 1350 - \frac{17}{8}x_1 - \frac{19}{4}x_3 - \frac{3}{2}x_6 - \frac{3}{4}x_7 \to \max;$$

$X_1 = 0$; $X_2 = 350$; $X_3 = 0$; $X_4 = 100$; $X_5 = 1000$; $X_6 = 0$; $X_7 = 0$; $F = 1350$.

Оптимальне рішення двоїстої задачі:

$$Z_{\min}^{\text{опт}} = 1350 + 1000\,Y_1 + 350\,Y_5 + 100\,Y_7 \to \min;$$

$Y_1 = 0$; $Y_2 = 3/2$; $Y_3 = 3/4$; $Y_4 = 17/8$; $Y_5 = 0$; $Y_6 = 19/4$; $Y_7 = 0$; $Z = 1350$.

Завдання. Для попередньо розглянутих завдань отримати розв'язання відповідної двоїстої задачі і виконати порівняння двох рішень.

8. Розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

8.1. Математична модель задач ЛП. Загальна, стандартна та канонічна (основна) форми моделі ЛП

Кожна із задач ЛП є частковим випадком *загальної задачі ЛП,* математична модель якої складається із функції мети F та системи *нерівностей-обмежень* (зі знаками "≤" або "≥") і рівностей-обмежень (зі знаками "="):

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \ (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ \dots, k;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, \ \dots, m.$$

де a_{ij}, b_i, C_j – задані постійні величини.

Стандартна (симетрична) форма має функцію мети $F \to \max$ та нерівності-обмеження $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$. Більшість задач ЛП зводиться до стандартної форми.

Канонічна (основна) форма має функцію мети у вигляді "$F \to \max$", а за рахунок додаткових змінних нерівності переводяться у рівності. Вона використовується для розв'язання математичних моделей ***симплекс-методами.*** Тобто симплексні методи використовують лише при формі $F \to \max$ та рівняннях-обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$.

Усі ці три моделі еквівалентні, бо легко переводяться одна у другу, використовуючи такі перетворення:

1. Якщо маємо функцію мети $F = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \to \min$, то її можна перевести на знаходження максимуму, для чого беруть праву частину з від'ємним знаком $F = -C_1X_1 - C_2X_2 - \ldots - C_nX_n \to \max$ і навпаки.

2. Нерівності вигляду

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i;$$
$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \ldots + d_{in}x_n \ge k_i$$

перетворюються у рівності-обмеження за рахунок використання додатних додаткових змінних:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x^{|}_{n+i} = b_i;$$
$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \ldots + d_{in}x_n - x^{||}_{n+1} = k_i,$$

де $x'_{n+i}, x''_{n+i} > 0$ – додаткові змінні.

Кількість таких додаткових змінних дорівнює кількості перетворених нерівностей.

3. Нерівності вигляду

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i;$$
$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \ldots + d_{in}x_n \ge k_i$$

без зміни математичної та фізичної суті перетворюються у нерівності іншого характеру за рахунок множення їх лівої та правої частин на "–1":

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \ge -b_i;$$
$$-d_{i1}x_1 - d_{i2}x_2 - \ldots - d_{in}x_n \le -k_i.$$

4. Якщо змінна x_k є від'ємною, то її треба замінити двома невід'ємними змінними ($x_k = x_{k1} - x_{k2}$).

Визначення: опорний план називається невиродженим, якщо він вміщує ***рівно m*** додатних компонент (по числу рівнянь), в іншому разі він – вироджений.

Змінні, відносно яких вдається вирішити систему рівнянь, називаються ***базисними змінними,*** а всі інші змінні ***– небазисні (вільні).***

8.2. Отримання загального рішення системи лінійних рівнянь методом Жордана – Гаусса

Початкова система лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1, p}; \qquad j = \overline{1, n} \qquad (8.2.1)$$

представлена в табл. 8.2.1, у якій колонка "Базисна змінна" не заповнена. Вважається, що початкова система рівнянь (8.2) створена дослідником і у ній число рівнянь "*p*" може бути довільним (наприклад, "*p > n*", хоча це і неможливо з математичної точки зору: ми просто повинні подальшими діями вилучити зайві рівняння).

Таблиця 8.2

Початкова система рівнянь

Порядковий номер рівнянь $i = 1 \ldots p$	**Базисна змінна**	**Змінні X_j та їх порядкові номери $J = 1 \ldots n$**				**b_i**
		X_1 $J = 1$	**X_2 $J = 2$**	**…**	**X_n $J = n$**	
1		a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2		a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…
p		a_{p1}	a_{p2}	…	a_{pn}	b_p

Початкова система лінійних рівнянь розв'язується методом Жордана – Гаусса і переводиться до вигляду ***загального рішення початкової системи***

$$x_i + \sum_{j=1}^{i-1} a'_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i; \quad i = \overline{1, m}; \quad m \le n, \quad m \le p, \qquad (8.2.2)$$

де x_i – базисні змінні, які створюють одиничний базис, x_j – небазисні змінні; p – кількість рівнянь у початковій системі рівнянь.

У загальному ж рівнянні (8.2.2) число рівнянь $m \le p$ за рахунок можливого зменшення кількості рівнянь методом Жордана – Гаусса (якщо серед них є лінійно залежні – див. нижче).

Алгоритм методу Жордана – Гаусса:

1. У довільному рядку $i = e$ з колонки $j = k$ обирається змінна $x_j = x_k$, яка переводиться у базисні змінні при умові, що коефіцієнт $a_{ij} = a_{ek} \neq 0$. Позначення цієї змінної $x_j = x_k$ записується у цей же

рядок $i = e$ колонки “Базисна змінна” табл. 8.2.1, яка у завершальному вигляді може мати кількість рівнянь (кількість рядків) $m < p$.

Обраний рядок $i = e$ та обрана колонка $j = k$ звуться ***вирішальним рядком та вирішальною колонкою,*** а коефіцієнт a_{ek} – ***вирішальним елементом.***

2. Елементи вирішального $i = e$-го рядка діляться на вирішальний елемент за формулами:

$$a'_{ej} = \frac{a_{ej}}{a_{ek}}, \quad j = \overline{1,\ n}; \qquad b'_e = \frac{b_e}{a_{ek}}; \qquad i = e. \qquad (8.2.3)$$

3. Перетворення елементів в інших рядках $i \neq e$ виконується за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej}\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; \qquad b'_i = b_i - b_e\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; \qquad i \neq e. \qquad (8.2.4)$$

Із наведеного рівняння видно, що при $j = k$ значення $a'_{jk} = a_{ik} - \frac{a_{ek} . a_{ik}}{a_{ek}} = 0$. В результаті виконаних розрахунків вирішальна колонка базисної змінної у розділі “Змінні X_j та їх порядкові номери $J = 1...n$” табл. 8.2.1 вміщує ***одну одиницю на місці вирішального елемента (всі інші елементи цієї колонки після повного завершення всіх розрахунків дорівнюють нулю).***

4. Наступна ітерація при нових значеннях рядка $i = e$ та колонки $j = k$ починається з п. 1. Процес завершується, коли ми заповнимо у табл. 8.2 всю колонку “Базисна змінна”, причому відповідні рівняння повинні мати вигляд (8.2.2). Цим завершується також створення одиничного базису (рівних одиниці коефіцієнтів $a_{ij} = 1$ перед базисними змінними, причому всі інші коефіцієнти у відповідній колонці дорівнюють нулю).

При розв’язанні системи рівнянь (8.2.1) за методом Жордана – Гаусса можуть виникнути ***два окремі спеціальні випадки:***

1. Всі коефіцієнти рівняння (рядка) a_{ij} є нулями, а його вільний член b_i – не нульовий. Це означає, що система рівнянь (8.1) несумісна і не повинна розглядатись. На цьому розрахунки зупиняються.

1. Всі коефіцієнти a_{ij} і вільний член b_i дорівнюють нулю. Це рівняння (рядок) вилучається із розгляду, бо воно лінійно залежить від інших рівнянь. Тому може статися так, що $m < p,$ бо число рівнянь може зменшитись.

Отримана таким чином система рівнянь (8.2.2) є ***загальним рішенням*** початкової системи рівнянь (8.2.1), бо з нього ми можемо отримати окреме рішення, якщо будемо задаватись будь-якими значеннями небазисних змінних.

Загальне рішення (8.2.2) рівнянь (8.2.1) має такі назви:

1. ***Базисне рішення*** $X = (b'_1,\ b'_2,\ \ldots,\ b'_m,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ – це рішення, при якому небазисні змінні дорівнюють нулю: $x_j = 0,\ j = \overline{m+1,\ n}.$
2. ***Опорний план*** $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – це базисне рішення лінійно незалежних взаємосумісних рівнянь. У ньому лише m базисних змінних $x_i,\ \ j = \overline{1,\ m}$ можуть прийняти якісь значення, а $(n - m)$ інших змінних $x_j,\ \ j = \overline{m+1,\ n}$ в опорному плані дорівнюють нулю.
3. ***Опорний план є невиродженим***, якщо він вміщує рівно m змінних $x_j > 0,\ j = \overline{1,\ m}$. В іншому випадку він є виродженим.
4. ***Оптимальний опорний план*** – це базисне рішення $X = \{x_j\},\ j = \overline{1, m},$ при якому функція мети приймає оптимальне (максимальне або мінімальне) значення.

8.3. Приклад рішення системи рівнянь методом Жордана – Гаусса

Розв'язати методом Жордана – Гаусса систему рівнянь:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \qquad (8.3.1)$$

$$x_1 - x_2 = 10.$$

Рівняння заносимо у табл. 8.3.1. Рішення виконуємо у табличній формі згідно з алгоритмом Жордана – Гаусса.

У табл. 8.3.1 обираємо вирішальний елемент $a_{21} = 1$, який помічаємо зірочкою. Це означає, що у базисні змінні переводиться змінна x_1, яка і показана у табл. 8.3.2.

Таблиця 8.3.1

Початкове рівняння (8.3.1)

	Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	b_i
$\left(\dfrac{a_{ik}}{a_{ek}}\right) = \left(\dfrac{2}{1}\right) = 2$	–	2	1	2	20
$e = 2;\ k = 1$	–	1*	–1	0	10

Таблиця 8.3.2

Перше перетворення рівнянь табл.8.3.1 за Жорданом – Гауссом

$e = 1;\ k = 2$	Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	b_i
$\left(\dfrac{a_{ik}}{a_{ek}}\right) = -\dfrac{1}{3}$	–	0	3*	2	0
	x_1	1	–1	0	10

Зліва у табл. 8.3.1 пишемо розраховане значення у квадратних дужках, яке згідно з (8.2.4) не змінюється для рядка $i = 1$.

Елементи вирішального рядка $i = e = 2$ діляться на вирішальний елемент (на “1”) за формулами

$$a'_{ej} = \frac{a_{ej}}{a_{ek}}, \quad j = \overline{1,\ n}; \qquad b'_e = \frac{b_e}{a_{ek}}; \qquad i = e$$

і заносяться у табл. 8.3.2 для $i = 2$.

Перетворення елементів у рядках $i \neq e$ виконується за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej}\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; \qquad b'_i = b_i - b_e\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; \qquad i \neq e,$$

і розраховані значення вносяться у табл. 8.3.2. Таким чином, для рядка $i = 1$ згідно з даними табл. 8.3.1 виконуються такі розрахунки, які заносяться у табл. 8.3.2:

$$a'_{11} = a_{11} - a_{21}\left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = 2 - 1\ \left[\tfrac{2}{1}\right] = 0;$$

$$a'_{12} = a_{12} - a_{22}\left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = 1 - (-1)\left[\tfrac{2}{1}\right] = 3;$$

$$a'_{13} = a_{13} - a_{23}\left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = 2 - 0\ \left[\tfrac{2}{1}\right] = 2;$$

$$b'_1 = b_1 - b_2\left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = 20 - 10\left[\tfrac{2}{1}\right] = 0.$$

З табл. 8.3.2 обираємо вирішальний елемент $a_{12} = 3$, який помічаємо зірочкою. Це означає, що змінна x_2 переводиться у базисні (табл. 8.3.3).

Для вирішального рядка табл. 8.3.2 виконуються розрахунки

$$a'_{11} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{0}{3} = 0; \quad a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}} = \frac{3}{3} = 1; \quad a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{12}} = \frac{2}{3}; \quad b'_1 = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{0}{3} = 0,$$

які заносяться у табл. 8.3.3.

Для рядка $i = 2$ табл. 8.3.3 виконуються розрахунки за даними табл. 8.3.2:

$$a'_{21} = a_{21} - a_{11}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 1 - 0\left[-\frac{1}{3}\right] = 1;$$

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = -1 - (3)\left[-\frac{1}{3}\right] = 0;$$

$$a'_{23} = a_{23} - a_{13}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 0 - 2\left[-\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3};$$

$$b'_2 = b_2 - b_1\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 10 - 0\left[-\frac{1}{3}\right] = 10.$$

Таблиця 8.3.3

Друге перетворення рівнянь

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	b_i
x_2	0	1	2/3	0
x_1	1	0	2/3	10

Таким чином, загальне рішення системи рівняння, показане у табл. 8.3.3, має вигляд

$$x_1 + \frac{2}{3}x_3 = 10; \qquad x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0.$$

Для більш складної системи рівнянь алгоритм рішення не відрізняється від показаного.

8.4. Прямий симплекс-метод

Всі симплекс-методи використовують *стандартну* (симетричну) форму початкової задачі

$$F = b_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots c_n x_n \to \max;$$

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1\ ;\\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2\ ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n \le b_i\ ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \ldots + a_{pj} x_j + \ldots + a_{pn} x_n \le b_p,
\end{aligned} \qquad (8.4.1)$$

де $i = \overline{1, p}$; $j = \overline{1, n}$; a_{ij}, c_j – коефіцієнти; b_i – вільні члени; b_0 – вільний член функції мети (звичайно у початковій задачі $b_0 = 0$); p – загальна кількість рівнянь, складених дослідником стосовно обмежень по ресурсах (після розрахунків прямим симплекс-методом ця кількість рівнянь може бути зменшена до $m \le p$ за рахунок вилучення еквівалентних рівнянь).

Для використання прямого симплекс-методу (ПСМ) до математичної моделі (8.4.1) ставляться такі вимоги:

1) функція мети F – максимується;
2) нерівності мають характер "$\le$";
3) всі вільні члени ***нерівностей-обмежень*** $b_i \ge 0$ (якщо це не так, то ми повинні перетворити математичну модель таким чином, щоб вказана умова виконувалась – див. попередні розділи);
4) вважаємо, що всі коефіцієнти $c_j > 0$ (це найбільш розповсюджений варіант початкової задачі, хоча у принципі деякі коефіцієнт c_j можуть бути і від'ємними). Але якщо у моделі (8.4.1) всі коефіцієнти $c_j < 0$, то (при $b_i \ge 0$) це означає, що ми маємо оптимальне рішення поставленої задачі, і тому розрахунки не потрібно виконувати.

Математичну модель (8.4.1) ми за допомогою додаткових невід'ємних змінних x_{n+1}, …, x_{n+m} перетворюємо у систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} + ... + a_{1,n+m}x_{n+m} = b_1 ;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} + ... + a_{2,n+m}x_{n+m} = b_2 ;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n + a_{i,n+1}x_{n+1} + ... + a_{i,n+m}x_{n+m} = b_i ;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pj}x_j + ... + a_{pn}x_p + a_{p,n+1}x_{n+1} + ... + a_{p,n+m}x_{n+m} = b_p ,\\
&- a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - ... - a_{0j}x_j - ... - a_{0n}x_n = b_0 .
\end{aligned}
\qquad (8.4.2)
$$

Як бачимо з рівнянь (8.4.2), у прямому симплексному методі до загального рішення додається ***"нульове" приведене рівняння, яке отримується із функції мети (при F = 0), якому надається порядковий номер i = 0.*** При цьому коефіцієнти $-c_j$ перейменовуються на $-a_{0j} = -c_j$. Тоді вся система рівнянь записується у симплекс-таблицю (табл. 8.4).

Таблиця 8.4

Симплекс-таблиця

№ рів-няння i	Базис-ні змінні	Змінні									b_i
		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
		$j = 1$	$j = 2$	…	$j = j$	…	$j = n$	$j = n+1$	…	$j = n + m$	$j = 0$
1		a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	$a_{1,n+1}$	…	$a_{1,n+m}$	b_1
2		a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	$a_{2,n+1}$	…	$a_{2,n+m}$	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i		a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	$a_{i,n+1}$	…	$a_{i,n+m}$	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
p		a_{p1}	a_{p2}	…	a_{pj}	…	a_{pn}	$a_{p,n+1}$	…	$a_{p,n+m}$	b_p
0		$-a_{01}$	$-a_{02}$	…	$-a_{0j}$	…	$-a_{0n}$	0	…	0	b_0

У табл. 8.4.1 ми маємо:

1) нульовий рядок ($i = 0$) для запису функції мети F з оцінками a_{0j};

2) нульову колонку (i = 0) для запису значень вільних членів b_i;
3) колонка "Базисні змінні" у табл. 8.4 не заповнена перед початком використання ПСМ.

Записані у таблицю 8.4 ***оцінки оптимальності*** a_{0j} (***вони є оцінками відповідних небазисних змінних***) дозволяють зробити деякі висновки:

1. Якщо $a_{0i} > 0,\ i = \overline{1, n}$, то опорний план є оптимальним і розрахунки припиняються.

2. Якщо для деякого $j = s$ величина $\boldsymbol{a_{0s} < 0}$ і всі значення $\boldsymbol{a_{is} \leq 0}$ (при $i = \overline{1, m}$), то функція мети не обмежена зверху.

3. Якщо $a_{0j} < 0$ і у табл. 8.4 є ***хоча б один*** елемент $a_{ij} > 0$ для цього j, то можна перейти до нового кращого опорного плану, при якому функція мети збільшиться.

Прямий симплекс-метод відноситься до задач ЛП. Його алгоритм вміщує такі кроки (див. табл. 8.4):

1. Обирається ***вирішальна колонка*** $j = k$, для якої $a_{0j} = a_{0k} < 0$. Це означає переведення неосновної змінної x_k у базисні.

2. Для отриманої колонки $j = k$ розраховуємо всі відношення $\frac{b_i}{a_{ik}}$; $i = \overline{1, p}$ **при додатних значеннях** a_{ik} ($a_{ik} \leq 0$ не розглядається) та з них обираємо найменше значення, яке і визначає вирішальний рядок $i = e$. Це означає, що у відповідний рядок колонки "Базисні змінні" таблиці 8.4.1 ми записуємо нову базисну змінну x_k, а стара базисна змінна x_e (якщо вона була записана у цій колонці) **переводиться в неосновні.**

Якщо таке найменше значення b_i/a_{ik} при $a_{ik} > 0$ не одне, то це означає, що новий опорний план – вироджений (одна або кілька базисних змінних дорівнюють нулю). Тоді функція мети може не змінюватись за кілька ітерацій. У цьому випадку ми обираємо будь-який рядок з найменшим значенням b_i/a_{ik} при $a_{ik} > 0$.

3. На перехресті вирішального рядка $i = e$ та вирішальної колонки $j = k$ знаходиться ***вирішальний елемент*** a_{ek}, який позначається зірочкою.

4. Складається нова ***симплекс-таблиця,*** аналогічна табл. 8.4, у якій всі комірки для коефіцієнтів a_{ij} та b_i ($i = 0, \dots, p;\ j = 0, \dots, n + m$) *не заповнюються.*

5. Нові значення елементів симплекс-таблиці розраховуються за формулами Жордана – Гаусса (включаючи елемент нульового рядка):
   – елементи вирішального рядка $j = e$

$$a'_{ej} = \frac{a_{ej}}{a_{ek}}, \quad j = \overline{1,\ n}; \qquad b'_e = \frac{b_e}{a_{ek}}; \qquad i = e;$$

   – для рядків $i \neq e$ всі інші елементи симплекс-таблиці (з нульовим рядком $i = 0$ у тому числі)

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej}\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; \quad b'_i = b_i - b_e\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; \quad i = \overline{0, m}; \quad i \neq e.$$

6. Нова ітерація починається з п. 1. Розрахунки завершуються, коли $a_{0j} \geq 0$ для всіх $i = \overline{1, n}$, бо тоді ми отримали оптимальний план.

При перетворенні симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса для наступного рівняння (наступного рядка у табл.8.4.1) можуть виникнути ***два окремі спеціальні випадки:***

1. Всі коефіцієнти рівняння (рядка) a_{ij} є нулями, а його вільний член b_i – не нульовий. Це означає, що система рівнянь несумісна і симплекс-таблиця не повинна розглядатись. На цьому розрахунки зупиняються.
2. Всі коефіцієнти a_{ij} і вільний член b_i дорівнюють нулю. Це рівняння (рядок) вилучається із розгляду (викреслюється з симплекс-таблиці), бо воно лінійно залежить від інших рівнянь. Тому може статися так, що $m < p$, бо число рівнянь може зменшитись.

8.5. Приклад використання прямого симплекс-методу

Задачу ЛП

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq \frac{5}{2};$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2;$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,2}$$

потрібно розв’язати прямим симплекс-методом. З цією метою приводимо її до канонічної форми

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2};$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 2;$$
$$-3x_1 - 4x_2 = 0$$

і записуємо ці рівняння у табл. 8.5.1.

Таблиця 8.5.1

Симплекс-таблиця ($e = 1$; $k = 1$; $a_{ek} = a_{11} = 1$)

Номер рівняння i	Базисні змінні	Змінні				b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 0$
1		1^x	1	1	0	5/2
2		2	–1	0	1	2
0	F	–3	–4	0	0	0

У табл. 8.5.1 виділяємо вирішальний елемент $e = 1$; $k = 1$; $a_{ek} = a_{11} = 1$, виконуємо незаповнену табл. 8.5.2 і починаємо заповнювати її комірки згідно з розрахунками за методом Жордана – Гаусса. Нижче наведені ці розрахунки для рядків $i = 1, 2, 0$. Змінну X_1 переводимо у базисні змінні в табл. 8.5.2.

Таблиця 8.5.2

Симплекс-таблиця ($e = 2$; $k = 2$, $a_{ek} = a_{22} = –3$)

Номер рівняння i	Базисні змінні	Змінні				b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 0$
1	X_1	1	1	1	0	5/2
2		0	$–3^x$	–2	1	–3
0	F	0	–1	3	0	15/2

Рядок i = 1. Цей рядок є вирішальним, і тому нові коефіцієнти розраховуються за формулами:

$$a'_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1; \qquad a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1; \qquad a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$a'_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}} = \frac{0}{1} = 0; \qquad b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}.$$

Рядок i = 2. Для цього рядка використовується у формулах Жордана – Гаусса елемент $\left[\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right] = \left[\dfrac{2}{1}\right] = [2\,] = \text{const}$, який не змінюється:

$$a'_{21} = a_{21} - a_{11}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right] = 2 - 1[2] = 0; \qquad a'_{22} = a_{22} - a_{12}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right] = -1 - 1[2] = -3;$$

$$a'_{23} = a_{23} - a_{13}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right] = 0 - 1[2] = -2;$$

$$a'_{24} = a_{24} - a_{14}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right] = 1 - 0[2] = 1;$$

$$b'_2 = b_2 - b_1\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right] = 2 - \frac{5}{2}[2] = -3.$$

Рядок i = 0. Для цього рядка використовується у формулах Жордана – Гаусса елемент $\left[\dfrac{a_{01}}{a_{11}}\right] = \left[\dfrac{-3}{1}\right] = [-3] = \text{const}$, який не змінюється:

$$a'_{01} = a_{01} - a_{11}\left[\frac{a_{01}}{a_{11}}\right] = -3 - 1[-3] = 0;$$

$$a'_{02} = a_{02} - a_{12}\left[\frac{a_{01}}{a_{11}}\right] = -4 - 1[-3] = -1;$$

$$a'_{03} = a_{03} - a_{13}\left[\frac{a_{01}}{a_{11}}\right] = 0 - 1[-3] = 3;$$

$$a'_{04} = a_{04} - a_{14}\left[\frac{a_{01}}{a_{11}}\right] = 0 - 0[-3] = 0;$$

$$b'_0 = b_0 - b_1\left[\frac{a_{01}}{a_{11}}\right] = 0 - \frac{5}{2}[-3] = \frac{15}{2}.$$

У результаті виконаних перетворень згідно з табл. 8.5.2 ми ще не отримали оптимального значення функції мети, бо ми маємо від’ємне значення одного з її коефіцієнтів функції мети $a_{02} = -1$. Крім того, вільний член $b_2 = -3$ набрав неприпустиме для ПСМ від'ємне значення. Тому для рядка $i = 2$ ми повинні спочатку отримати додатне значення цього коефіцієнта. Але якщо ми виберемо у табл. 8.5.2 показаний вирішальний елемент, то отримаємо додатне значення цього вільного члена. Тому додаткові розрахунки не робимо і для даних табл. 8.5.2 знову використовуємо метод Жордана – Гаусса, а розраховані дані записуємо у табл. 8.5.3.

Таблиця 8.5.3

Кінцева симплекс-таблиця

Номер рівняння *i*	**Базисні змінні**	**Змінні**				**b_i**
		X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	
		$j = 1$	**$j = 2$**	**$j = 3$**	**$j = 4$**	**$j = 0$**
1	X_1	1	0	1/3	1/3	3/2
2	X_2	0	1	2/3	–1/3	1
0	F	0	0	11/2	0	17/2

1-й рядок. Для цього рядка використовується у формулах Жордана – Гаусса елемент $\left[\dfrac{a_{12}}{a_{22}}\right] = \left[\dfrac{1}{-3}\right] = \left[-\dfrac{1}{3}\right] = \text{const}$, який не змінюється:

$$a'_{11} = a_{11} - a_{21}\left[\frac{a_{12}}{a_{22}}\right] = 1 - 0\left[-\frac{1}{3}\right] = 1;$$

$$a'_{12} = a_{12} - a_{22}\left[\frac{a_{12}}{a_{22}}\right] = 1 - (-3)\left[-\frac{1}{3}\right] = 0;$$

$$a'_{13} = a_{13} - a_{23}\left[\frac{a_{12}}{a_{22}}\right] = 1 - (-2)\left[-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3};$$

$$a'_{14} = a_{14} - a_{24}\left[\frac{a_{12}}{a_{22}}\right] = 0 - 1\left[-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3};$$

$$b'_1 = b_1 - b_2\left[\frac{a_{12}}{a_{22}}\right] = \frac{5}{2} - (-3)\left[-\frac{1}{3}\right] = \frac{3}{2}.$$

2-й рядок. Цей рядок є вирішальним, і тому нові коефіцієнти розраховуються за формулами:

$$a'_{21} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{0}{-3} = 0; \quad a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{22}} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad a'_{23} = \frac{a_{23}}{a_{22}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3};$$

$$a'_{24} = \frac{a_{24}}{a_{22}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}; \qquad b'_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{-3}{-3} = 1\,.$$

0-й рядок. Для цього рядка використовується у формулах Жордана – Гаусса елемент $\left[\frac{a_{02}}{a_{22}}\right] = \left[\frac{-1}{-3}\right] = \left[\frac{1}{3}\right] = \text{const}$, який не змінюється.

$$a'_{01} = a_{01} - a_{21}\left[\frac{a_{02}}{a_{22}}\right] = 0 - 0\left[\frac{1}{3}\right] = 0;$$

$$a'_{02} = a_{02} - a_{22}\left[\frac{a_{02}}{a_{22}}\right] = -1 - (-3)\left[\frac{1}{3}\right] = 0;$$

$$a'_{03} = a_{03} - a_{23}\left[\frac{a_{02}}{a_{22}}\right] = 3 - (-2)\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{11}{3};$$

$$a'_{04} = a_{04} - a_{24}\left[\frac{a_{02}}{a_{22}}\right] = 0 - 0\left[\frac{1}{3}\right] = 0;$$

$$b'_0 = b_0 - b_2\left[\frac{a_{02}}{a_{22}}\right] = \frac{15}{2} - (-3)\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{17}{2}.$$

У табл. 8.5.3 ми отримали оптимальну функцію мети, бо всі коефіцієнти функції мети та вільні члени є додатними величинами. Оптимальне рішення має вигляд

$$F = \frac{17}{2}; \qquad x_1 = \frac{3}{2}; \qquad x_2 = 1.$$

У даному випадку ми виконали підряд розрахунки всіх коефіцієнтів симплекс-таблиці. Очевидно, що для базисних змінних це не завжди виправдано, бо значення елементів колонок базисних змінних ми знаємо заздалегідь: вони вміщують одну одиницю, розміщення якої ми знаємо, а всі інші елементи цієї колонки дорівнюють нулю. Тому іноді розрахунки скорочують і заодно зменшують також і симплекс-таблиці, показуючи в них колонки зі значеннями коефіцієнтів лише для неосновних змінних.

Завдання. Розв'язати задачі прямим симплекс-методом.

1. $F = -Nx_1 - Ax_2 \to \min;$ $\quad -Nx_1 + 0{,}5Nx_2 \geq -600;$

$-Бx_1 + (Б+3)x_2 \leq 30;$ $\quad Ax_1 + x_2 \leq 20;$

2. $F = -Nx_1 - 10x_2 \to \min;$ $\quad Nx_1 + Ax_2 \leq 100;$

$Nx_1 - 3Ax_2 \geq -50;$ $\quad 15x_1 - 7x_2 \leq 30,$

де $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

8.6. Розв'язання задачі лінійного програмування матричним прямим симплекс-методом

Даний розроблений автором матеріал спрямований на спрощення розрахунків прямого симплекс-методу шляхом використання матричних співвідношень.

Припустимо, що нам потрібно розв'язати задачу лінійного програмування прямим симплекс-методом, дані для якої наведені у табл. 8.6.1.

Таблиця 8.6.1

Початкова симплекс-таблиця матриці А (вирішальний рядок $i = e = 3$; вирішальна колонка $k = 3$; вирішальний елемент $a_{e,k} = a_{33} = 4$)

i	Базисні змінні	Змінні						B_i
		X_1 (j=1)	X_2 (j=2)	X_3 (j=3)	X_4 (j=4)	X_5 (j=5)	X_6 (j=6)	j=0
i=1	X_4	8	7	1	1	0	0	15
i=2	X_5	1	2	1	0	1	0	12
i=3	X_6	2	1	4*	0	0	1	12
i=0	F	1	–4	–6	0	0	0	0

Розширена симплексна матриця A з симплекс-таблиці 8.6.1 дорівнює

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 4^* & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Елементи наступної симплексної матриці А1 повинні розраховуватися згідно з рівняннями методу Жордана – Гаусса, які мають вигляд (вирішальний рядок $i = e = 3$; вирішальна колонка $j = k = 3$; вирішальний елемент $a_{e,k} = a_{33} = 4$):

– для вирішального рядка матриці А1 ($i = e = 3$) $a^*_{e,j} = \dfrac{a_{e,j}}{a_{e,k}}$,

$b^*_e := \dfrac{b_e}{a_{e,k}}$;

– для усіх інших рядків матриці А1 ($i \neq e$)

$$a^*_{i,j} := a_{i,j} - a_{e,j}\left(\frac{a_{i,k}}{a_{e,k}}\right); \qquad b^*_i := b_i - b_e\left(\frac{a_{i,k}}{a_{e,k}}\right).$$

Квадратна крокова матриця В1 заповнюється таким чином (ця матриця змінюється на кожному кроці, а її порядок дорівнює кількості рядків матриці А):

1. Спочатку всі елементи матриці В1 приймають рівними нулю за вилученням елементів головної діагоналі, які дорівнюють одиниці.

2. Потім рівний "1" діагональний елемент матриці В1 $b1_{e,e} = 1$ (де $e = 3$) замінюється на $b1_{e,e} = \dfrac{1}{a_{e,k}} = \dfrac{1}{4}$.

3. Після цього елементи колонки $j = e = 3$ матриці В1 (за вилученням $i = e = 3$) заповнюються елементами $b1_{i,e} = \dfrac{-a_{i,k}}{a_{e,k}}$ (зі зворотним знаком перед $a_{i,k}$).

У результаті заповнена матриця В1 має вигляд

$$\mathrm{B1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Після першого кроку отримуємо перетворену симплексну матрицю А1 (табл. 8.6.2) з матричного рівняння А1 = В1 • А.

Ми ще не отримали оптимального розв'язання задачі ЛП, бо у рядку $i = 0$ функції мети матриці А1 маємо один від'ємний коефіцієнт $a1_{0,2}$ = –2,5. У зв'язку з цим для виконання наступного кроку знову знаходимо значення елементів матриці B2, яка буде множитись на матрицю A1 для отримання наступної перетвореної симплексної матриці A2 на другому кроці.

Таблиця 8.6.2

Симплекс-таблиця матриці A1 після першого кроку (вирішальний рядок $i = e = 1$; вирішальна колонка $k = 2$; вирішальний елемент $a_{e,k} = a_{1,23} = 6{,}75$)

i	Базисні змінні	Змінні						B$_i$
		X_1 j=1	X_2 j=2	X_3 j=3	X_4 j=4	X_5 j=5	X_6 j=6	j=0
i=1	X_4	7,5	6,75*	0	1	0	–0,25	12
i=2	X_5	0,5	1,75	0	0	1	–0,25	9
i=3	X_3	0,5	0,25	1	0	0	0,25	3
i=0	F	4	–2,5	0	0	0	1,5	18

У результаті рядки матриці B2 мають вигляд

$$B2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6{,}75} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1{,}75}{6{,}75} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-0{,}25}{6{,}75} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2{,}5}{6{,}75} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для другого кроку отримуємо перетворену матрицю A2 (табл. 8.6.3) з матричного рівняння

$$A2 = B2 \cdot A1.$$

Таблиця 8.6.3

Симплекс-таблиця матриці A2 після другого кроку (отримано оптимальне рішення)

i	Базисні змінні	Змінні						B$_i$
		X_1 j=1	X_2 j=2	X_3 j=3	X_4 j=4	X_5 j=5	X_6 j=6	j=0
i=1	X_2	1,111	1	0	0,148	0	–0,037	1,778
i=2	X_5	–1,444	0	0	–0,259	1	–0,185	5,889
i=3	X_3	0,222	0	1	–0,037	0	0,259	2,556
i=0	F	6,778	0	0	0,37	0	1,407	22,444

У результаті отримали оптимальне рішення: базисні змінні x_2 = 1,778, x_3 = 2,556, x_5 = 5,8,89; небазисні змінні x_1 = 0, x_4 = 0, x_6 = 0; функція мети F = 22,444.

Завдання. Розв'язати задачі прямим симплекс-методом.

1. $F = -2Nx_1 - x_2 \to \min;$ $\quad -3Nx_1 + 0{,}7Nx_2 \geq -400$

$- Ax_1 + (A+3)x_2 \leq 30;$ $\quad Ax_1 + 5x_2 \leq 20;$

2. $F = -Nx_1 - x_2 \to \min;$ $\quad Nx_1 + Ax_2 \leq 70$

$2Nx_1 - 3Ax_2 \geq -80;$ $\quad 10x_1 - 7x_2 \leq 30,$

де $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

8.7. Двоїстий симплекс-метод

Метою двоїстого симплекс-методу (ДСМ) є отримання оптимального рішення задачі лінійного програмування (ЛП). ДСМ використовує такий же початок розрахунків, як і прямий симплекс-метод (ПСМ). В той же час задачі ДСМ та ПСМ є самостійними і можуть використовуватись незалежно один від другого. На практиці дуже часто ДСМ використовується після ПСМ: спочатку за допомогою ПСМ вилучають із системи рівнянь-обмежень еквівалентні рівняння, виявляють сумісність системи рівнянь-обмежень і отримують так званий ***псевдоплан*** (але треба підкреслити, що ДСМ теж дозволяє вилучити з системи рівнянь-обмежень еквівалентні рівняння та виявити сумісність системи рівнянь-обмежень). Псевдоплан має такі зовнішні особливості: всі коефіцієнти нульового рядка (функції мети) симплекс-таблиці не є від'ємними $a_{0j} \geq 0$), деякі з вільних членів рівнянь-обмежень (b_i, $i = \overline{1, m}$) є від'ємними. За таких умов подальше використання ПСМ стає неможливим. Іноді псевдоплан можна отримати без використання ПСМ, якщо у функції мети $c_j < 0$.

Таким чином, для використання ДСМ необхідне додержання двох вимог:

1) у функції мети $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ всі коефіцієнти $c_j \leq 0$;
2) хоча б деякі вільні члени нерівностей-обмежень (b_i, $i = \overline{1,m}$) повинні мати від'ємне значення, бо якщо всі вільні члени будуть додатними, то при умові $c_j < 0$ (і відповідно $a_{0j} \geq 0$) це означає отримання оптимального опорного плану, тобто розв'язання задачі, і тоді використання ДСМ втрачає сенс.

У всьому іншому початкова симплекс-таблиця ДСМ (табл.8.7.1) за формою не відрізняється від аналогічної таблиці ПСМ (табл. 8.4.1).

Таблиця 8.7.1

Симплекс-таблиця ДСМ (псевдоплан)

№ рівняння i	Базисні змінні	Змінні									b_i
		x_1	x_2		X_j.	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
		$j = 1$	$j = 2$		$j = j$	…	j = n	$j = n + 1$	…	$j = n + m$	$j = 0$
1		a_{11}	a_{12}		a_{1j}.	…	a_{1n}	$a_{1,n+1}$	…	$a_{1,n+m}$	b_1
2		a_{21}	a_{22}		a_{2j}.	…	a_{2n}	$a_{2,n+1}$	…	$a_{2,n+m}$	b_2
…	…	…	…		…	…	……	…		……	
i		a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}.		..a_{in}	$a_{i,n+1}$		.$a_{i,n+m}$	b_i
...	…	…	…		…	…	…	…	…	…	…
m		a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}.		..a_{mn}	$a_{m,n+1}$		.$a_{m,n+m}$	b_m
0		a_{01}	a_{02}		a_{0j}.		..a_{0n}	0		… 0	b_0

ДСМ має такий алгоритм:

1. Отримання псевдоплану у канонічній формі рівнянь. ДСМ використовується, якщо $a_{0j} \geq 0$, $b_i \leq 0$.
2. Заповнення на основі отриманих рівнянь симплекс-таблиці 8.7.1.
3. Обрання *вирішального рядка* $i = e$, *для якого* $b_i = b_e < 0$. ***Це означає переведення у неосновні змінні*** базисної змінної $x_i = x_e$. *Якщо всі* $b_i > 0$, *то псевдоплан є оптимальним* опорним планом і розрахунки припиняються, бо знайдено рішення задачі.
4. Обрання ***вирішальної колонки*** $j = k$, для якої є ***найменшим абсолютне*** значення ділення елементів ***нульового рядка*** a_{0j} на відповідні ***від'ємні елементи*** a_{ek} вирішальної колонки:

$$\min \left| \frac{a_{0j}}{-a_{ej}} \right| = \left| \frac{a_{0k}}{-a_{ek}} \right|.$$

Це означає, що неосновна змінна $x_j = x_k$ переводиться в основні.

5. На перехресті вирішального рядка і вирішальної колонки знаходиться ***вирішальний елемент*** a_{ek}, який позначається зірочкою.
6. Складається симплекс-таблиця ДСМ, у якій міняються місцями базисна змінна $x_i = x_e$ з неосновною $x_j = x_k$.

Перераховуються всі елементи нової симплекс-таблиці за формулами Жордана – Гаусса:

$$a'_{ij} = \begin{Bmatrix} \dfrac{a_{ej}}{a_{ek}}, & i = e \\ a_{ij} - \dfrac{a_{ej} \cdot a_{ik}}{a_{ek}}, & i \neq e \end{Bmatrix}; \qquad b'_i = \begin{Bmatrix} \dfrac{b_e}{a_{ek}}, & i = e \\ b_i - \dfrac{b_e \cdot a_{ik}}{a_{ek}}, & i \neq e \end{Bmatrix}.$$

Далі всі дії повторюються, починаючи з другого пункту. Ці розрахунки також можна виконувати за методом розділу 8.6.

При перетворенні симплекс-таблиці за методом Жордана – Гаусса для наступного рівняння (наступного рядка у табл. 8.7.1) можуть виникнути ***два окремі спеціальні випадки***:

1. Всі коефіцієнти рівняння (рядка) a_{ij} є нулями, а його вільний член b_i – не нульовий. Це означає, що система рівнянь несумісна і симплекс-таблиця не повинна розглядатись. На цьому розрахунки зупиняються.

2. Всі коефіцієнти a_{ij} і вільний член b_i дорівнюють нулю. Це рівняння (рядок) вилучається із розгляду (викреслюється з симплекс-таблиці), бо воно лінійно залежить від інших рівнянь.

При розрахунках за допомогою ДСМ використовуються теореми:

Теорема 1. Якщо в псевдоплані $X = \{b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; 0; \ldots; 0\}$ є хоча б одне від'ємне число $b_j < 0$, і для якого всі відповідні значення $a_{ij} \geq 0,\ j = \overline{1, n},$ то задача взагалі не має опорних планів.

Теорема 2. Якщо в псевдоплані $X = \{b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; 0; \ldots; 0\}$ маються від'ємні числа $b_j < 0$ і для будь-якого з них існує хоча б одне значення $a_{ij} < 0$, то можна перейти до нового псевдоплану у ДСМ.

Таким чином, сам початок розрахунків (початкові формули, симплекс-таблиця) нічим не відрізняється від ПСМ за вилученням знаків коефіцієнтів $a_{0j},\ b_{i.}$

У ДСМ використовуються ідеї двоїстості: кожну задачу ЛП можна розглядати як пару задач (пряму та двоїсту), між якими існує внутрішній зв'язок (наприклад, роль рядків/колонок у ПСМ виконують колонки/рядки ДСМ). Хоча кожна з цих задач ЛП є самостійною і може бути вирішена незалежно одна від другої, але значення отриманих функцій мети для них є однаковими. З урахуванням зв'язків цієї пари задач (прямої та двоїстої) і побудований алгоритм ДСМ.

Використовуючи такий же початок, як і ПСМ, отримання рішення за ***ДСМ має свої особливості:***

1. У ПСМ розрахунки починаються з визначення вирішальної колонки, а в ДСМ – з вирішального рядка, бо у ДСМ роль рядків виконують колонки, а роль колонок – рядки.
2. Для ПСМ ***вирішальна колонка*** визначається по від'ємному елементу нульового рядка для функції мети a_{0j}, а в ДСМ – ***вирішальний рядок*** обирається по ***від'ємному значенню вільного члена*** b_i.
3. Ознака оптимальності ***в обох методах однакова: невід'ємність елементів нульової колонки (j = 0) та нульового рядка (i = 0).***

8.8. Приклад використання двоїстого симплекс-методу

Початкову задачу ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$$
$$-2x_1 + 4x_2 \geq 5;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10;$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}$$

треба привести до стандартної форми (функція мети $F \to$ max; знаки нерівностей "≤")

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to \max;$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq -5;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10;$$
$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,2}$$

і за допомогою додатних змінних перевести нерівності у рівняння

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to \max;$$
$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 10.$$

Після цього переводимо у систему рівнянь функцію мети (замість F у ліву частину переводимо значення $-2x_1 - 3x_2$ з відповідною зміною знаків, у правій частині залишаємо вільний член)

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 10;$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

і записуємо ці рівняння у табл. 8.8.1.

Таблиця 8.8.1

Симплекс-таблиця (e = 1; k = 2; $a_{ek} = a_{12} = -4$)

Номер рівняння	Базисні змінні	Змінні				b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	
i		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 0$
1	X_3	2	-4^x	1	0	–5
2	X_4	1	2	0	1	10
0	F	2	3	0	0	0

Таблиця 8.8.2

Симплекс-таблиця (завершуюча)

Номер рівняння	Базисні змінні	Змінні				b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	
i		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 0$
1	X_2	–1/2	1	–1/4	0	5/4
2	X_4	2	0	1/2	1	15/2
0	F	7/2	0	3/4	0	–15/4

У табл. 8.8.1 виділяємо вирішальний елемент $e = 1$; $k = 2$; $a_{ek} = a_{12} = -4$, виконуємо незаповнену табл. 8.7.2 і починаємо заповнювати її комірки згідно з розрахунками по методу Жордана – Гаусса. Нижче наведені ці розрахунки для рядків i = 1, 2, 0. Змінну X_2 переводимо у базисні змінні в табл. 8.8.2.

Рядок i = 1. Цей рядок є вирішальним, і тому нові коефіцієнти розраховуються за формулами:

$$a'_{11} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; \qquad a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}} = \frac{-4}{-4} = 1; \qquad a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{12}} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4};$$

$$a'_{14} = \frac{a_{14}}{a_{12}} = \frac{0}{-4} = 0; \qquad b'_1 = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}.$$

Рядок i = 2. Для цього рядка використовується у формулах Жордана – Гаусса елемент $\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = \left[\frac{2}{-4}\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] = \text{const}$, який не змінюється:

$$a'_{21} = a_{21} - a_{11}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 1 - 2\left[-\frac{1}{2}\right] = 2;$$

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 2 - (-4)\left[-\frac{1}{2}\right] = 0;$$

$$a'_{23} = a_{23} - a_{13}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 0 - 1\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2};$$

$$a'_{24} = a_{24} - a_{14}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 1 - 0\left[-\frac{1}{2}\right] = 1;$$

$$b'_{2} = b_{2} - b_{1}\left[\frac{a_{22}}{a_{12}}\right] = 10 - (-5)\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{15}{2}.$$

Рядок i = 0. Для цього рядка використовується у формулах Жордана – Гаусса елемент $\left[\frac{a_{02}}{a_{12}}\right] = \left[\frac{3}{-4}\right] = \left[-\frac{3}{4}\right] = \text{const}$, який не змінюється:

$$a'_{01} = a_{01} - a_{11}\left[\frac{a_{02}}{a_{12}}\right] = 2 - 2\left[-\frac{3}{4}\right] = \frac{7}{2};$$

$$a'_{02} = a_{02} - a_{12}\left[\frac{a_{02}}{a_{12}}\right] = 3 - (-4)\left[-\frac{3}{4}\right] = 0;$$

$$a'_{03} = a_{03} - a_{13}\left[\frac{a_{02}}{a_{12}}\right] = 0 - 1\left[-\frac{3}{4}\right] = \frac{3}{4};$$

$$a'_{04} = a_{04} - a_{14}\left[\frac{a_{02}}{a_{12}}\right] = 0 - 0\left[-\frac{3}{4}\right] = 0;$$

$$b'_{0} = b_{0} - b_{1}\left[\frac{a_{02}}{a_{12}}\right] = 0 - 5\left[-\frac{3}{4}\right] = -\frac{15}{4}.$$

У табл. 8.8.2 ми отримали оптимальну функцію мети, бо всі коефіцієнти функції мети та вільні члени є додатними величинами. Оптимальне рішення має вигляд $F = -\frac{15}{4}$; $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{4}$; $x_3 = 0$; $x_4 = \frac{15}{2}$.

Завдання. Отримати рішення задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом (спочатку привести задачу до стандартної форми).

1. $F = Nx_1 + 5x_2 \to \min$; $\quad -Nx_1 + 2x_2 \geq 10$;

   $5x_1 - Ax_2 \geq 20$; $\quad Nx_1 + Nx_2 \leq 40$;

2. $F = Nx_1 + 2x_2 \to \min$; $\quad Nx_1 + 3x_2 \leq 20$;

   $-Ax_1 + 25x_2 \leq 50$; $\quad Nx_1 + 0{,}2x_2 \geq 5$,

де $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

Розв’язати задачу графо-аналітичним методом.

9. Цілочисельне програмування

9.1. Математична модель та методи рішення задач цілочисельного програмування

Цілочисельне програмування – це розділ математичного програмування, який використовує *змінні лише у цілочисельному вигляді,* в тому числі і в окремому випадку, коли змінні є бінарними (0; 1). Цілочисельне програмування є розділом більш загального дискретного програмування, яке має справу у більш широкому сенсі з неподільностями, комбінаторними задачами, множинами, діапазонами значень. Наприклад, у роботі [14] розглянуті питання дискретної оптимізації у САПР.

З математичної точки зору задачі цілочисельного програмування можуть бути лінійними або нелінійними. Ми будемо розглядати лінійні задачі, які мають стандартну форму:

$$
\begin{gathered}
F = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \quad i = \overline{1, m}; \\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n};\ x_j \text{ – цілі числа.}
\end{gathered}
\tag{9.1}
$$

Таким чином, зовнішній вигляд задачі лінійного цілочисельного програмування практично ***не відрізняється від звичайної задачі ЛП,*** за винятком того, що на рішення ЛП накладається ***додаткове обмеження:*** визначення лише цілих значень змінних. Припустимо, що ми розв'язали задачу ЛП згідно з моделлю (9.1) (але без вимоги цілозначеності) і отримали область рішень *ABCD* (рис. 9.1). Цілі значення змінних x_j на рис. 9.1 позначені точками. Ці точки і є метою визначення задач цілочисельного програмування.

У результаті задача цілочисельного програмування має область рішень 0*KLMPN*, тобто внутрішню по відношенню до області 0*ABCD* звичайної задачі ЛП (на рис. 9.1 область лінійного цілочисельного програмування (ЛЦП) заштрихована).

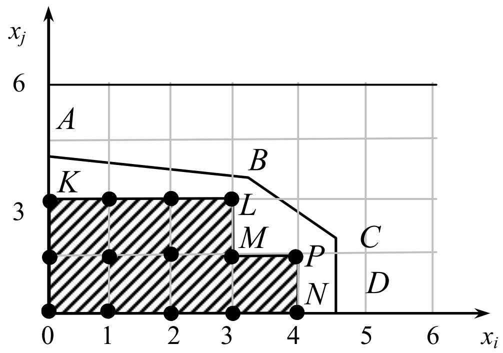


Рис. 9.1. Область цілочисельного програмування

Задачі лінійного цілочисельного програмування вирішують проблеми із змінними, які визначають: кількість одиниць неподільної продукції; розподіл завдань між підприємствами; планування роботи при різних номенклатурах продукції та ін.

Встановлено, що ***округленням лінійного рішення неможливо отримати цілочисельне рішення.***

Методи рішення задач цілочисельного програмування можна поділити на дві групи:

1) метод відсічень (відсікаючих площин; метод Гоморі);
2) комбінаторні методи (метод гілок та меж; адитивний метод з бінарними змінними).

9.2. Метод відсікаючих площин (метод Гоморі)

Метод відсікаючих площин існує у двох варіантах:

1. ***Перший алгоритм Гоморі*** для рішення цілком цілочисельних задач.
2. ***Другий алгоритм Гоморі*** для рішення частково цілочисельних задач.

Вони відрізняються способом формування відсічення.

Ідея розрахунків методом відсікаючих площин для рішення цілком цілочисельних задач (1-й метод Гоморі) полягає у такому підході:

1) лінійна задача (9.1) розв'язується без врахування цілочисельності x_j будь-яким симплекс-методом (наприклад, прямим симплекс-методом). У результаті отримують ***оптимальний опорний план,*** який має канонічний вигляд

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1,m}; \tag{9.2}$$

$$F_0 + \sum_{j=m+1}^{n} a_{0j} x_j = b_0;$$

2) якщо серед рівнянь-обмежень (9.2) є дрібні значення базисних змінних $x_i = b_i$, то обирають серед них таке значення, яке має ***найбільшу*** дрібну частину. Це рівняння записують і у вигляді

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

і перетворюють їх у додаткову нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i, \tag{9.3}$$

де $\alpha_{ij} = a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor$; $\beta_i = b_i - [b_i]$; $\alpha_{ij} \geq 0$, $\beta_i > 0$.

Правила обрання чисел $[a_{ij}]$ та $[b_i]$:

1. Якщо дрібні числа a_{ij} або b_i є ***додатними*** числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є цілими ***додатними*** числами і дорівнюють цілій частині числа a_{ij} або b_i. Наприклад:

$$a_{ij} = 2{,}3; \quad \lfloor a_{ij} \rfloor = 2; \quad \alpha_{ij} = a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor = 2{,}3 - 2 = 0{,}3;$$

$$b_i = 1{,}25; \quad [b_i] = 1; \quad \beta_i = b_i - [b_i] = 1{,}25 - 1 = 0{,}25.$$

2. Якщо дрібне число a_{ij} або b_i є ***від'ємним*** числом, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є ***від'ємним цілим*** числом, яке по абсолютному значенню на "1" більше за абсолютне значення цілої частини числа a_{ij} або b_i. Наприклад:

$$a_{ij} = -3\frac{1}{3}; \quad [a_{ij}] = -4; \quad \alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] = -3\frac{1}{3} - (-4) = \frac{2}{3};$$

$$b_i = -\frac{3}{5}; \quad [b_i] = -1; \quad \beta_i = b_i - [b_i] = -\frac{3}{5} - (-1) = \frac{2}{5}.$$

Якщо a_{ij} або b_i є цілими числами, то $\alpha_{ij} = 0$, $\beta_i = 0$.

3. Додаткова нерівність (9.3) має лише додатні коефіцієнти. Вона множенням на “–1” спочатку приводиться до вигляду, який повинна мати нерівність у симплекс-методі згідно із стандартною формою (≤)

$$\sum_{j=1}^{n} -\text{ѓї}_{ij} x_j \le -\text{ѓА}_i,$$

а потім за допомогою додаткової змінної x_{n+1} перетворюється у рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} -\text{ѓї}_{ij} x_j + x_{n+1} = -\text{ѓА}_i,$$

яке додається до оптимального опорного плану-системи (9.2) і сумісно з ним створює ***псевдоплан*** (він так зветься, бо має одне від’ємне значення $b_i = -\beta_i$).

4. Цей ***псевдоплан*** розв’язується двоїстим симплекс-методом. В результаті отримують ***новий оптимальний опорний план*** (з додатними значеннями b_i та a_{0j}). Якщо в новому оптимальному опорному плані існують базисні змінні $x_j = b_i$, які мають дрібні значення, то знов додають ***одне додаткове обмеження,*** і процес розрахунків повторюється до отримання цілочисельних значень базисних змінних.

Ознакою ***відсутності рішення*** задачі є наявність у таблиці хоча б ***одного рядка з цілими величинами a_{ij} та вільним дрібним членом b_i,*** що вказує на відсутність рішення у цілих числах (наприклад, $5x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 7/3$).

На відміну від задач ЛП задачі ЛПЦ вимагають значно більшого об’єму обчислень навіть при малих $i = m$ та $j = n$. Як показала практика, жоден з варіантів методу відсікаючих площин не забезпечує високої ефективності.

Частково цілочисельні задачі (в них вимоги до цілочисельності ставляться лише до окремих змінних) вирішуються так само, як попередні, за рахунок введення додаткового обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} \text{ѓЃ}_{ij} x_j \ge \text{ѓА}_i,$$

де γ_{ij} визначається з відношень:

1) для нецілочисельних значень змінних x_j:

$$\text{ŕБ}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{якщо } a_{ij} \geq 0 \\ \dfrac{\text{ŕA}_i}{1-\text{ŕA}_i}\left|a_{ij}\right|, & \text{якщо } a_{ij} < 0 \end{cases};$$

2) для цілочисельних змінних x_j:

$$\text{ŕБ}_{ij} = \begin{cases} \text{ŕï}_{ij}, & \text{якщо } \text{ŕï}_{ij} \leq \text{ŕA}_i \\ \dfrac{\text{ŕA}_i}{1-\text{ŕA}_i}\left(1-\text{ŕï}_{ij}\right), & \text{якщо } \text{ŕï}_{ij} > \text{ŕA}_i \end{cases};$$

9.3. Приклад розв’язання лінійної задачі цілочисельного програмування

Раніше ми отримали за допомогою ДСМ оптимальне рішення задачі ЛП

$$F = -\frac{15}{4} - \frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_3 \to \max; \tag{9.3.1}$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 = \frac{5}{4}; \tag{9.3.2}$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = \frac{15}{2}; \tag{9.3.3}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4},$$

які показані у табл. 9.3.1.

Таблиця 9.3.1

1-ша симплекс-таблиця

Номер рівняння	**Базисні змінні**	**Змінні**				b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	
i		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 0$
1	X_2	–1/2	1	–1/4	0	5/4
2	X_4	2	0	1/2	1	15/2
0	F	7/2	0	3/4	0	–15/4

Тепер треба отримати цілочисельне рішення. З цією метою виділяємо рівняння з дрібною частиною (9.3.2) і з нього отримуємо рівняння Гоморі

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_3 \geq \frac{1}{4}.$$

Цю нерівність ми переводимо до вигляду, якого потрібно дотримуватись при використанні симплекс-методу:

$$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_3 \leq -\frac{1}{4}.$$

Далі за допомогою додаткової додатної змінної x_5 переводимо нерівність у рівність

$$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_3 + x_5 = -\frac{1}{4}$$

і створюємо нову табл. 9.3.2 доданням відповідної колонки та рядка для нової базисної змінної.

Таблиця 9.3.2

2-га симплекс-таблиця

Номер рівняння i	**Базисні змінні**	**Змінні**					b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 0$
1	X_2	–1/2	1	–1/4	0	0	5/4
2	X_4	2	0	1/2	1	0	15/2
3	X_5	–1/2	0	$-3/4^x$	0	1	–1/4
0	F	7/2	0	3/4	0	0	–15/4

За допомогою ДСМ заповнюємо комірки табл. 9.3.3 (розрахунки не показані).

Таблиця 9.3.3

3-я симплекс-таблиця

Номер рівняння i	**Базисні змінні**	**Змінні**					b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 0$
1	X_2	–1/3	1	0	0	–1/3	4/3
2	X_4	5/3	0	0	1	2/3	22/3
3	X_3	2/3	0	1	0	–4/3	1/3
0	F	3	0	0	0	1	–4

Ми бачимо, що цілочисельні значення отримали лише комірки рядка $i = 0$ для функції мети. Тому з табл. 9.3.3 виділяємо рівняння $i = 1$, отримуємо для нього рівняння Гоморі і заповнюємо табл. 9.3.4.

Таблиця 9.3.4

4-та симплекс-таблиця

Номер рівняння i	Базисні змінні	Змінні						b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 0$
1	X_2	–1/3	1	0	0	–1/3	0	4/3
2	X_4	5/3	0	0	1	2/3	0	22/3
3	X_3	2/3	0	1	0	–4/3	0	1/3
4	X_6	–2/3	0	0	0	$-2/3^x$	1	–1/3
0	F	3	0	0	0	1	0	–4

В табл. 9.3.4 виділяємо вирішальний елемент (показаний зірочкою) і за допомогою ДСМ заповнюємо табл. 9.3.5.

Таблиця 9.3.5

5-та симплекс-таблиця

Номер рівняння i	Базисні змінні	Змінні						b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 0$
1	X_2	0	1	0	0	0	–1/2	3/2
2	X_4	1	0	0	1	0	1	7
3	X_3	2	0	1	0	0	–2	1
4	X_5	1	0	0	0	1	–3/2	1/2
0	F	2	0	0	0	0	3/2	–9/2

В табл. 9.3.5 для рядка i = 4 отримуємо рівняння Гоморі, вводимо нову колонку та рядок для нової базисної змінної і заповнюємо комірки табл. 9.3.6.

Таблиця 9.3.6

6-та симплекс-таблиця

Номер рівняння i	Базисні змінні	Змінні							b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 0$
1	X_2	0	1	0	0	0	–1/2	0	3/2
2	X_4	1	0	0	1	0	1	0	7
3	X_3	2	0	1	0	0	–2	0	1
4	X_5	1	0	0	0	1	–3/2	0	1/2
5	X_7	0	0	0	0	0	$-1/2^x$	1	–1/2
0	F	2	0	0	0	0	3/2	0	–9/2

У табл. 9.3.6 виділяємо вирішальний елемент (показаний зірочкою) і за допомогою ДСМ заповнюємо табл. 9.3.7.

Таблиця 9.3.7

7-ма симплекс-таблиця

Номер рівняння i	Базисні змінні	Змінні							b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 0$
1	X_2	0	1	0	0	0	0	–1	2
2	X_4	1	0	0	1	0	0	2	6
3	X_3	2	0	1	0	0	0	–4	3
4	X_5	1	0	0	0	1	0	–3	2
5	X_6	0	0	0	0	0	1	–2	1
0	F	2	0	0	0	0	0	4	–6

Таким чином, отримали цілочисельне рішення по методу Гоморі:
$x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 6$; $x_5 = 2$; $x_6 = 1$; $x_7 = 0$; $F = –6$.

9.4. Оптимальне завантаження обладнання підприємства за методом гілок та меж

Розглянемо приклад: підприємство має дві групи обладнання (*А* та *Б*), на якому виготовляється чотири види виробів кількістю *Х*1, …, *Х*4. Потрібний час на виготовлення виробів на обладнанні показаний у табл. 9.4.1, у якій наведений також фонд робочого часу для груп обладнання.

Вимагається визначити кількість виробів (у цілочисельному вигляді), яка б забезпечила максимально можливе завантаження обладнання на запланований період. При цьому кожний з виробів може бути введеним у програму у будь-якій кількості або не вводитися зовсім.

Таблиця 9.4.1

Норми витрат та фонд робочого часу на виготовлення виробів $X_1 – X_4$

Група обладнання	Норма часу на виготовлення 1 шт. виробу				Фонд робочого часу обладнання, годин
	X_1	X_2	X_3	X_4	
А	1	6	0,2	0,2	14
Б	3	14	0,3	1,05	36

З даних табл.9.4.1 випливає, що ми можемо визначити лише дві базисні змінні, бо неосновні змінні згідно з симплекс-методом будуть дорівнювати нулю. Між тим нам потрібно визначити завантаження підприємства по всіх виробах. Для розв'язання цієї задачі нам потрібно отримати систему рівнянь, у якій кількість рівнянь дорівнює кількості змінних. Ця задача може бути досягнена двома шляхами:

1. Кількість неосновних змінних зменшується шляхом об'єднання, якщо їх поставка виконується комплектно у відомому співвідношенні.
2. Збільшується кількість рівнянь за рахунок штучного збільшення обмежувальних рівнянь, не дозволяючи викривлення задачі.

Наприклад, припустимо, що вироби $X1$, $X3$, $X4$ випускаються комплектно у співвідношенні 1:3:2. Тоді на випуск одного комплекту $X_1^1 = (X_1 + 3 \bullet X_3 + 2 \bullet X_4)$ витрачається відповідна норма часу, яка показана у табл. 9.4.2.

Таблиця 9.4.2

Норми витрат та фонд робочого часу на виготовлення виробів $X1^1$ та $X2$

Група обладнання	Норма часу на виготовлення 1 шт. виробу		Фонд робочого часу обладнання, годин
	$X1^1$	$X2$	
А	2	6	14
Б	6	14	36

У системі рівнянь, отриманій згідно з табл. 9.4.2,

$$2 \cdot X_1^1 + 6 \cdot X_2 \leq 14; \qquad 6 \cdot X_1^1 + 14 \cdot X_2 \leq 36 \qquad (9.4.1)$$

кількість змінних дорівнює кількості рівнянь, тому вона дозволяє однозначно розрахувати значення змінних $X1^1 = 2{,}5$ та $X2 = 1{,}5$. Кінцева оптимальна кількість виробів для повного завантаження підприємства може бути прийнята як числа, які отримуються відкиданням дрібної частини: $X1 = 2$; $X2 = 1$; $X3 = 3X1 = 6$; $X4 = 2X1 = 4$. При цьому завантаження обладнання отримується з даних табл. 9.4.2:

1. Для групи обладнання А $(2 \cdot X_1^1 + 6 \cdot X_2)/14 = (2 \cdot 2 + 6 \cdot 1)/14 = 0{,}715$, або 71,5 %.
2. Для групи обладнання В $(6 \cdot X_1^1 + 14 \cdot X_2)/36 = (6 \cdot 2 + 14 \cdot 1)/36 = 0{,}72$, або 72,0%.

Але відомо, що цілочисельне рішення, отримане таким чином (з коренів нецілочисельних рішень), не завжди є оптимальним. Для більш точного розв'язання задачі можна використати відомий метод гілок та меж (рис. 9.4.1).

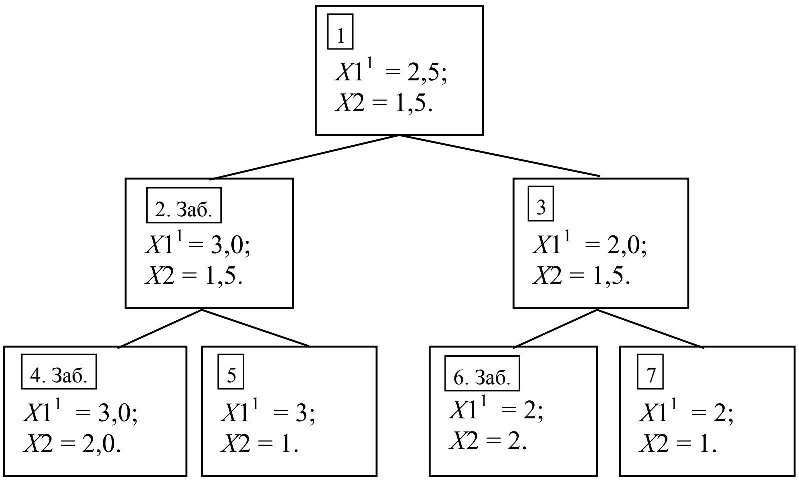


Рис. 9.4.1. Метод гілок та меж для отримання цілочисельного оптимального завантаження підприємства

На рис. 9.4.1 у вершині графу в комірці $\boxed{1}$ вказані значення отриманих коренів при нецілочисельному рішенні системи рівнянь. Це рішення спочатку розділяється на два можливі напрямки (комірки $\boxed{2}$ та $\boxed{3}$) при цілочисельних значеннях одного кореня ($X1 = 3$ та $X1 = 2$), і кожне з цих припущень перевіряється по нерівностях (9.4.1). Нерівності (9.4.1) дозволяють вказані значення, і тому гілкування продовжується, як це показано у комірках $\boxed{6}$ – $\boxed{7}$. З отриманих комірок не задовольняють вимогам рівнянь (9.4.1) лише комірки $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ та $\boxed{6}$ (вони помічені літерами "Заб." – "Заборонено"). Комірки $\boxed{5}$ та $\boxed{7}$ задовольняють вимогам рівнянь (9.4.1) і вміщують припустимі цілочисельні рішення, отримані за допомогою методу гілок та меж. Наприклад, з комірки $\boxed{5}$ отримуємо найкраще завантаження підприємства $X1^1 = 3$; $X2 = 1$ або $X1 = 3$; $X2 = 1$; $X3 = 9$; $X4 = 6$. При цьому завантаження обладнання отримується з даних табл. 9.4.2.

1. Для групи обладнання А $(2 \cdot X_1^1 + 6 \cdot X_2)/14 = (2 \cdot 3 + 6 \cdot 1)/14 = 0{,}857$, або 85,7%.

2. Для групи обладнання Б $(6 \cdot X_1^1 + 14 \cdot X_2)/36 = (6 \cdot 3 + 14 \cdot 1)/36 = 0{,}89$, або 89,0%.

Завдання 1. На базі отриманих раніше оптимальних планів з рішеннями у дрібних числах розв'язати задачу цілочисельного програмування методом Гоморі. Звернути увагу на те, що розрахунок за допомогою ЕОМ може давати близькі до цілих чисел значення, а точні цілі числа отримуються, якщо розрахунок виконується вручну або якщо виконати спеціальну програму для ЕОМ.

2. У результаті оптимізації симплекс-методом отримано розв'язання задачі ЛП табл. 9.4.3, яке потрібно привести до цілочисельного рішення методом Гоморі.

Таблиця 9.4.3

Оптимальний план

i	**Базисні змінні**	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	x_2	1/7	1	$4/N$	0	$2N/5$
2	x_4	–2	0	$5/N$	1	6/7
0	*F*	10	0	3	0	–60

3. У результаті оптимізації симплекс-методом отримано розв'язання задачі ЛП табл. 9.4.4, яке потрібно привести до цілочисельного рішення методом Гоморі.

Таблиця 9.4.4

Оптимальний план

i	**Базисні змінні**	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	x_2	0	$-4N$	1	$2N/7$	$2N/5$
2	x_4	1	–2	0	$3N/7$	26/7
0	*F*	0	20	0	6	–73

10. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

10.1. Модель транспортної задачі

У табл. 10.1.1 представлені дані для транспортної задачі (Т-задачі), яка стосується m постачальників однакової продукції (вантажу) та n користувачів цією продукцією, де C_{ij} – витрати на перевезення продукції від i-го постачальника до j-го користувача $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$; Mi – потужність i-го постачальника; Nj – вимоги (попит) на продукцію j-го користувача (замовника); Xij – кількість вантажу (постачання), яке потрібно перевезти від i-го постачальника до j-го користувача. Метою розрахунків є зведення до мінімуму витрат на перевезення постачання між m постачальниками та n користувачами.

Таблиця 10.1.1

Номер постачальника i	**Постачання** M_i	**Вимоги користувачів** N_j					
		1	**2**	**…**	J	**..**	n
		$N1$	$N2$	**…**	Nj	**..**	Nn
1	$M1$	$\frac{C_{11}}{x_{11}}$	$\frac{C_{12}}{x_{12}}$	…	$\frac{C_{1j}}{x_{1j}}$	…	$\frac{C_{1n}}{x_{1n}}$
2	$M2$	$\frac{C_{21}}{x_{21}}$	$\frac{C_{22}}{x_{22}}$	…	$\frac{C_{2j}}{x_{2j}}$	…	$\frac{C_{2n}}{x_{2n}}$
……	……	……	……	…	……	…	……
i	Mi	$\frac{C_{i1}}{x_{i1}}$	$\frac{C_{i2}}{x_{i2}}$	…	$\frac{C_{ij}}{x_{ij}}$	…	$\frac{C_{in}}{x_{in}}$
……	……	……	……	…	……	…	……
m	Mm	$\frac{C_{m1}}{x_{m1}}$	$\frac{C_{m2}}{x_{m2}}$	…	$\frac{C_{mj}}{x_{mj}}$	…	$\frac{C_{mn}}{x_{mn}}$

Функція мети Т-задачі має вигляд $F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min$ (10.1.1) при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M_i$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j$ $x_{ij} \geq 0$.

Закрита модель Т-задачі отримується, якщо загальна сума постачання дорівнює сумарному попиту користувачів $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$.

Для ***відкритої моделі Т-задачі*** згадана рівність не витримується $\sum_{i=1}^{m} M_i \neq \sum_{j=1}^{n} N_j$.

Деякі особливості Т-моделі:

- Система обмежень має вигляд *рівнянь,* тому не потрібно вводити додаткові змінні.
- Система *обмежень* складається з $(m + n)$ рівнянь з $m \times n$ змінними.

Будь-яке рішення Т-задачі зветься ***розподілом постачання.*** Постачання не може бути від'ємним, тому мова може йти лише про припустимі (додатні) рішення.

Для заповнення постачання в будь-якій комірці таблиці проводять діагональ і під нею вказують поставку *Xij.* В незаповнених комірках проведення діагоналі не рекомендується (нульові поставки звичайно не записують). Рішення Т-задачі складається з переходу від одного розподілу постачання до іншого – кращого, яке знижує підсумкові витрати на перевезення (бо ми повинні отримати мінімальну функцію мети $F \to \min$).

Розподіл поставок повинен відповідати ***базисному рішенню:***

- У комірки, що відповідають основним (базисним) змінним, записують поставки *Xij* (їх кількість $m + n - 1$).
- У комірки, що відповідають неосновним (небазисним) змінним, нічого не записують (тобто нульові поставки $Xij = 0$ не записують).

Оптимальним є таке рішення Т-задачі, при якому $F = \min$. У Т-задачі, здавалося б, всупереч вимогам функції мети F, при оптимальному розподілі постачання можуть використовуватись комірки з найбільшим тарифом постачання C_{ij} і одночасно не використовуватись комірки з найменшим тарифом постачання C_{ij} (це пояснюється вимогами обов'язкового використання продукту, що постачається). Прикладом такого оптимального постачання є табл.10.1.2.

Таблиця 10.1.2

	20	40
25	1	8 $\boxed{25}$
35	4 $\boxed{20}$	100 $\boxed{15}$

10.2. Початковий розподіл постачання

Ми розглянемо *закриту модель*, для якої виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j .$$

Система обмежень (10.1.1) вміщує $(m + n)$ рівнянь, але кількість незалежних рівнянь (відповідно і кількість базисних рішень) дорівнює $(m + n - 1)$, тому що одне з рівнянь випливає з інших. Відповідно і кількість заповнених перевезенням комірок дорівнює $(m + n - 1)$.

Існує кілька методів заповнення поставками комірок таблиці з метою отримання першого початкового розподілу поставок. Перед використанням будь-якого з них перевіримо, що модель задачі – закрита:

$$\sum_{i=1}^{m} N_i = 50 + 80 + 120 = 250; \quad \sum_{i=1}^{n} N_i = 40 + 60 + 150 = 250.$$

У даному випадку модель закрита, але якщо модель не закрита, то її роблять закритою за допомогою фіктивного постачальника або фіктивного користувача (див. далі).

Перший метод: з урахуванням найменших витрат для користувачів (табл. 10.2.1). Метод полягає у тому, що ми переміщуємося зліва направо від одного користувача до іншого (по колонках) і забираємо вантаж по найменшій ціні перевезення по принципу “перший у черзі серед користувачів забирає вантаж з найменшою ціною перевезення”. Всі інші користувачі, які знаходяться далі у черзі, повинні задовольнятись тим, що залишилось після користувачів, які знаходяться ближче до голови черги. При цьому ми повинні використати весь вантаж кожного постачальника і задовольнити весь попит кожного користувача.

У даному випадку число постачальників $m = 3$, а число користувачів $n = 3$. Число комірок $m \cdot n = 3 \cdot 3 = 9$. Число заповнених комірок (дорівнює числу основних змінних або числу незалежних рівнянь) повинно бути $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$. Число вільних комірок $m \cdot n - (m + n - 1) = 3 \cdot 3 - (3 + 3 - 1) = 9 - 5 = 4$.

Особливу увагу потрібно звернути на кількість заповнених постачанням комірок. Якщо після розподілу перевезення за визначеним алгоритмом виявиться, що кількість заповнених постачанням комірок дорівнює, наприклад, “4” (що не відповідає отриманому нами значенню “5”), то ми повинні заповнити постачаннями “0” потрібну кількість комірок таким чином, щоб загальна кількість заповнених постачанням комірок дорівнювала “5”. При подальших розрахунках нульові постачання використовують, як і будь-яку іншу цифру. Додавати комірки з нульовим постачанням потрібно таким чином, щоб із заповнених постачанням комірок не створювались замкнені кола у таблиці. Тепер перейдемо до розподілу постачання.

Таблиця 10.2.1

Номер постачальника i	**Постачання M_i**	**Вимоги користувачів N_j**		
		$j = 1$	**$j = 2$**	**$j = 3$**
		50	**80**	**120**
$i = 1$	40	9	3	7 / 40
$i = 2$	60	5	6	5 / 60
$i = 3$	150	4 / 50	2 / 80	9 / 20

Позначимо комірки як (i, j), де i – номер рядка, j – номер колонки. Починаємо з першого користувача і переміщуємося по колонках зліва направо. Для 1-го користувача (у 1-й колонці табл. 10.2.1) беремо комірку (3.1), яка має найменший показник витрат $C_{ij} = 4$, і візьмемо у цю комірку весь потрібний вантаж для першого користувача “50”. Вантаж, який залишився після виділеного для 1-го користувача, розподіляється між іншими користувачами по принципу “хто перший за номером колонки – той забирає вантаж з найменшою вартістю перевезення”. Далі в комірці (3.2) візьмемо для 2-го користувача ще “80”, тому що в комірці (3.2) витрати найменші. Перейдемо до 3-го користувача: в комірці (3.3) заберемо для нього вантаж 20, бо ми повинні при виконанні розподілу обов’язково використати всі постачальні можливості; в комірках (1.3) та (2.3) вкажемо поставку 40 та 60.

Отримані заповнені комірки не повинні створювати коло у таблиці, бо це призведе до невизначеності рішення. Ми закінчили розподіл. Функція мети (вартість перевезення вантажу) для даних табл. 10.2.1 дорівнює

$F = 7 \cdot 40 + 5 \cdot 60 + 4 \cdot 50 + 2 \cdot 80 + 9 \cdot 20 = 280 + 300 + 200 + 160 + 180 = 1120$.

Другий метод: правило “північно-західного кута” (табл. 10.2.2)

У цьому випадку не звертають уваги на вартість постачання C_{ij}, а переміщуються по рядках зверху вниз і для кожного рядка розподіляють все постачання постачальника по правилу “хто перший за номером колонки – той забирає максимально можливу величину вантажу без врахування вартості перевезення”. В результаті завантажуються комірки, розміщені по діагоналі табл. 10.2.2 (починаючи з лівого верхнього кута і закінчуючи нижнім правим кутом). Звідси метод і отримав свою назву “північно-західного кута”, якщо розглядати табл. 10.2.2 як географічну карту. Отримані заповнені комірки не повинні створювати коло у таблиці, бо це призведе до невизначеності рішення.

Таблиця 10.2.2

Номер постачальника i	**Постачання M_i**	**Вимоги користувачів N_j**		
		j = 1	**j = 2**	**j = 3**
		50	**80**	**120**
i = 1	40	9 / 40	3	7
i = 2	60	5 / 10	6 / 50	5
i = 3	150	4	2 / 30	9 / 120

Ми закінчили розподіл перевезень. Функція мети (вартість перевезення вантажу) для даних табл. 10.2.2 дорівнює

$F = 9 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 50 + 2 \cdot 30 + 9 \cdot 120 = 360 + 50 + 300 + 60 + 1080 = 1790$,

тобто витрати значно більші.

Пошук оптимального рішення виконується перерозподілом поставок: заповненням якоїсь однієї вільної комірки та відповідним вилученням поставки з іншої заповненої комірки. При цьому змінюються поставки в деяких заповнених комірках.

Третій метод: метод мінімального елемента

Метод мінімального елемента полягає у ранжуванні тарифів за перевезення вантажу по збільшенню значення (однакові тарифи помічаються довільно зростаючими цифрами у порядку нумерації ранжованого ряду). Розподіл постачання виконується, починаючи з найменшого члена ранжованого ряду до задоволення вимог як користувачів, так і постачальників.

Метод намірів та реалізацій

Метод намірів та реалізацій (розроблений автором у співавторстві з к.т.н. Турти М.В. на базі відомого “методу подвійної переваги”) дозволяє отримати початковий опорний план транспортної задачі, який або співпадає з оптимальним планом, або знаходиться достатньо близько від нього

Розглянемо цю задачу на прикладі даних табл. 10.2.3. У таблиці комірки позначаємо номерами (i, j), де “i = 1, 2, …, m” означає номер рядка постачальника (нумерація рядків виконується зверху вниз; m – кількість постачальників), а "$j = 1, 2, \ldots, n$" означає номер колонки користувача (нумерація колонок виконується зліва направо; n – кількість користувачів). Зверху таблиці вказані об'єми вимог j-х користувачів, а зліва таблиці вказані об'єми поставок i-х постачальників вантажу. Колонка α та рядок β використовуються для розрахунків за методом потенціалів.

У верхньому рядку кожної комірки вказуються у порядку перелічення: тариф перевезення одиниці вантажу; знак помітки комірки у вигляді (–) / (I) / (+); цифри постачання у квадратній рамці. Знаки помітки комірки та цифри постачання можуть бути відсутніми. Якщо постачання змінюється, то воно позначається у комірці під попереднім постачанням. У нижньому лівому куті у круглих дужках за методом потенціалів указуються потенціали незаповнених постачанням комірок

Таблиця 10.2.3

α		30	120	50	60	Пс
0	100	3(-) (0)	4(+) $\boxed{100}$	7 (6)	5 (2)	*
5	80	2(+) $\boxed{30}$	10 (1)	6(+) $\boxed{50}$	12 (4)	*
0	50	4 (1)	5 (1)	8 (7)	3(+) $\boxed{50}$	*
0	30	9 (6)	4(I) $\boxed{*}$ $\boxed{20}$	1(+) $\boxed{20}$ $\boxed{*}$	3(I) $\boxed{10}$	*
Кр		*	+20	-20	*	
β		3	4	1	3	

Метод складається з двох алгоритмів: спочатку виконується алгоритм намірів, а потім – алгоритм реалізації намірів. Алгоритм намірів виконується у такій послідовності:

1. Кожний постачальник (табл. 10.2.3) помічає у своєму рядку горизонтальними рисками "(–)" ті комірки, які мають найменші тарифи перевезення і можуть за сукупним об'ємом користування забрати цілком весь об'єм постачання даного постачальника. Якщо у рядку однакові мінімальні тарифи мають кілька комірок, то всі вони позначаються горизонтальними рисками.

2. Кожний користувач помічає у власній колонці вертикальними рисками "(I)" ті комірки, які мають найменші тарифи переве-

зення і можуть за сукупним об'ємом постачання цілком задовольнити об'єм вимог даного користувача. Якщо у колонці однакові мінімальні тарифи мають кілька комірок, то всі вони позначаються вертикальними рисками. Якщо наміри постачальників та користувачів збігаються на одній комірці, то в результаті накладення знаків (–) та (І) в цій комірці отримуємо знак (+).

На цьому алгоритм намірів даного методу завершується. В результаті ми отримуємо помічені знаками (–), (І), (+) комірки, які в основному і складають оптимальний план.

Перед переходом до алгоритму реалізації намірів візьмемо до уваги кілька приміток:

1. Ми повинні отримати ($m + n – 1$) заповнених постачанням комірок, де m – загальна кількість постачальників, а n – загальна кількість користувачів. Якщо кількість помічених комірок дорівнює ($m + n – 1$), то звичайно це означає можливість отримання оптимального плану у випадку, коли задача проходить алгоритм реалізації без зміни помічених комірок.

2. У загальному плані в оптимальний план можуть входити і зовсім не помічені комірки, бо заповнюються постачанням не обов'язково комірки з найменшими тарифами.

Далі починається алгоритм реалізації намірів (визначення комірок, дійсно зайнятих постачанням), який виконується у такій послідовності:

1. Додаємо до табл. 10.2.3 справа додаткову колонку (помічену літерами "Пс"), у якій будемо помічати вимоги постачальників – залишки після задоволення вимог користувачів. Цей залишок для конкретного постачальника може бути: нульовим (він помічається зірочкою "*"); додатною цифрою (якщо деякий вантаж залишився у постачальника); від'ємною цифрою (якщо користувачі забирають у нього більше, ніж постачальник може поставити). З аналогічною метою знизу до табл. 10.2.3 додається рядок, помічений літерами "Кр", у якому будемо помічати вимоги користувачів – залишки після задоволення вимог постачальників. Цей залишок для конкретного користувача може бути: нульовим (він помічається зірочкою "*"); додатною цифрою (якщо постачальники постачають менше за вимоги даного користувача і вимоги залишились не задоволеними); від'ємною цифрою (якщо постачальники постачають більше за вимоги користувача і створилось для користувача зайве постачання).

2. Заповнюємо постачанням комірки табл. 10.2.3 згідно з бажанням постачальників, надаючи їм перевагу (звісно, що перевагу можна надати і користувачам). Природно, що залишків у постачальників не залишається, і тому колонка "Пс" цілком заповнюється зірочками "*", які означають відсутність залишків постачання

3. У рядку "Кр" перевіряємо користувачів у табл. 10.2.3 по колонках і помічаємо їх залишки. Ми бачимо, що для колонки j = 2 користувачу не вистачає вантажу "+20", а у колонці j = 3 у користувача є зайвий вантаж " – 20". Тоді переміщуємо вантаж між поміченими комірками: з комірки (4,3) забираємо вантаж "20" і перекладаємо його у комірку (4,2) – як для помічених комірок. Цю операцію помічаємо у комірках нижче – під попередньо отриманим вантажем вказуємо у квадратних рамках новий вантаж. Перевага при такому переміщенні вантажу надається або поміченим коміркам, або коміркам з найменшим тарифом перевезення. Алгоритм реалізацій повинен завершитись при нульових залишках як постачальників, так і користувачів.

Метод осереднених коефіцієнтів

Розраховуємо (табл. 10.2.4) середні вартості рядків (C_{pi}) та колонок (C_{Kij}), а також визначаємо осереднені коефіцієнти (K_{ij}) за формулами

$$C_{pi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}; \qquad C_{Kj} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}; \qquad K_{ij} = C_{ij} - (C_{pi} + C_{Kj}),$$

де n, m – загальна кількість колонок і рядків; C_{ij} – початковий тариф комірки i-го рядка та j -ї колонки $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

Таблиця 10.2.4

	20	10	30	C_{pi}
15	5; – 2,3;	6; –4;	2; –4,3; $\boxed{15}$	4,3
10	3; –2,7;	4; –4,4; $\boxed{10}$	1; –3,7; $\boxed{0}$	2,7
35	1; –5,7; $\boxed{20}$	7; –2,4;	3; –2,7; $\boxed{15}$	3,7
C_{Kj}	3	5.7	2	

Заповнюємо табл. 10.2.5 максимально можливим постачанням комірки з найменшим від'ємним значенням K_{ij} (з найбільшою їх абсолютною величиною) у порядку ранжування від'ємних осереднених коефіцієнтів K_{ij}. Позначимо (у міру заповнення) заборонені рядки і колонки таблиці транспортної задачі з огляду на задоволення вимог постачальників та користувачів. У результаті в табл. 10.2.4 отримаємо оптимальний план розподілу постачання.

Осереднені коефіцієнти K_{ij} заборонених рядків і колонок у подальших розрахунках не розглядаються.

Таблиця 10.2.5

Комірка (*i*, *j*)	K_{ij}	**Максимально можливе постачання**	**Заборона рядків та колонок**
(3,1)	–5,7	20	Колонка j = 1
(2,2)	–4,4	10	Рядок i = 2, колонка j = 2
(1,3)	–4,3	15	Рядок i = 1
(3,3)	–2,7	15	Рядок i = 3, колонка j = 3

Завдання. Отримати 5-ма методами початковий розподіл перевезень для наведених нижче даних (табл. 10.2.6, 10.2.7).

Таблиця 10.2.6

Т-задача

Потужність постачальників	**Вимоги користувачів**		
	9*N*	**6*N***	**9*N***
9*N*	11 – *A*	3+*A*	4
8*N*	4	6+*A*	5
7*N*	1+*A*	3	7

Таблиця 10.2.7

Т-задача

Потужність постачальників	**Вимоги користувачів**		
	9*N*	**7*N***	**8*N***
10*N*	9 – *A*	2+*A*	5
8*N*	3	4+*A*	3
6*N*	1+*A*	2	8

10.3. Метод потенціалів

Існує кілька методів отримання оптимального рішення Т-задачі. Всі вони дають однакові результати. Ми розглядаємо метод потенціалів через деякі його переваги: він не вимагає складання збільшеної кількості додаткових таблиць з оцінками комірок; помилка у попередніх розрахунках виправляється на наступних кроках.

Загальний алгоритм знаходження оптимального рішення за методом потенціалів однаковий для всіх кроків і складається з трьох етапів:

1. Отримання таблиці перевезень вантажу або в результаті початкового розподілу (наприклад, за методом „північно-західного кута"; цей отриманий розподіл звичайно не є оптимальним, і його потрібно переглянути), або як результат перерозподілу перевезень за методом потенціалів.
2. Розрахунок потенціалів рядків (постачальників), колонок (користувачів) та вільних від постачання комірок.
3. Визначення циклу.
4. Перерозподіл постачання.

Розглянемо кожний з цих етапів більш детально.

10.3.1. Розрахунок потенціалів рядків (постачальників), колонок (користувачів) та вільних від постачання комірок

1. Починаємо визначення потенціалів постачальників α_i (табл. 10.3.1) з першого постачальника (першого рядка), для якого потенціал приймається рівним нулю $\alpha_1 = 0$ (в принципі, потенціал першого рядка можна прийняти довільним, але згідно з методом потенціалів він приймається рівним нулю, бо це спрощує розрахунки).

Потенціал колонки β_j визначається за формулою (розрахунок для колонки виконується лише при наявності у цій колонці заповненої комірки у першому рядку)

$$\gamma_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) = 0, \qquad (10.3.1)$$

де C_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу; α_i – потенціал постачальника (рядка); β_j – потенціал користувача (колонки); γ_{ij} – потенціал (ij) – комірки, де i – номер рядка, j – номер колонки. Звідси видно, що потенціали всіх заповнених (постачанням) комірок дорівнюють нулю.

Таблиця 10.3.1

Перший крок: визначення потенціалів та циклу

Потенціали рядків α_i	**Номер постачальника i**	**Постачання M_j**	**Вимоги користувачів N_j**		
			$j = 1$	**$j = 2$**	**$j = 3$**
			50	**80**	**120**
$\alpha_1 = 0$	$i = 1$	40	9 40	3 $\boxed{1}$	7 $\boxed{-2}$
$\alpha_2 = -4$	$i = 2$	60	5 10	6 50	5 $\boxed{-8}$
$\alpha_3 = 0$	$i = 3$	150	4 $\boxed{-5}$	2 2 30	9 120
Потенціали колонок β_j			$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 9$

На цьому завершується розгляд 1-го рядка таблиці, і ми переходимо до визначення потенціалу 2-го рядка.

2. Потенціал 2-го рядка визначають за формулою (10.3.1), користуючись уже отриманими потенціалами колонок (якщо існують заповнені комірки цих колонок у 2-му рядку). Після цього аналогічним чином визначають усі потенціали колонок, які мають заповнені комірки у 2-му рядку.

Але якщо у 2-му рядку не виявилося заповнених постачанням комірок, для яких визначені потенціали колонок, то переходять на наступний рядок.

Таким чином визначають потенціали всіх рядків і колонок. Після закінчення цих розрахунків рекомендується ще раз переглянути потенціали і виправити розрахунки.

3. Для всіх вільних від постачання комірок визначаємо потенціали цих комірок за формулою

$$\gamma_{ij} = C_{ij} - (\alpha_{-i} + \beta_j) \qquad (10.3.2)$$

і вказуємо їх у прямокутниках, що розміщуються у вільних комірках (потенціали всіх заповнених комірок дорівнюють нулю, і їх можна не розраховувати). Якщо потенціали всіх вільних комірок є додатними або дорівнюють нулю, то це означає, що ми отримали оптимальне рішення Т-задачі. Якщо такої ознаки немає, то ми переходимо до будування циклу. Нульова оцінка для порожньої комірки в оптимальному розв'язанні задачі означає порушення принципу одного оптимального рішення.

10.3.2. Визначення циклу

Вибирається найменше від'ємне значення потенціалу γ_{ij} (у даному випадку $\gamma_{23} = -8$). Для комірки (2,3) з найменшим від'ємним значенням потенціалу будується цикл (рис. 10.3.1): (2,3) – (2,2) – (3,2) – (3,3) – (2,3) .

Циклом зветься замкнений багатокутник, створений взаємно перпендикулярними лініями, які можуть пересікатись. Цей багатокутник має парну кількість вершин, одна з яких є виділеною порожньою коміркою (для неї створюється цикл), ***а всі інші вершини займають заповнені комірки.*** Ребра циклу із проміжними заповненими або вільними комірками не розглядаються, бо враховуються лише вершини циклу.

Правила створення циклу:

1. Цикл починається з порожньої комірки, яка нумерується цифрою "1" і може мати форму випуклого або невипуклого багатокутника. *Всі інші* вершини багатокутника займають *лише заповнені* комірки, які нумерують за порядком їх з'єднання: "2", "3", ... Таким чином, до циклу належать *комірки у вершинах циклу:* одна вільна, для якої створюється цикл, плюс заповнені комірки у вершинах, з яких створюється цикл.

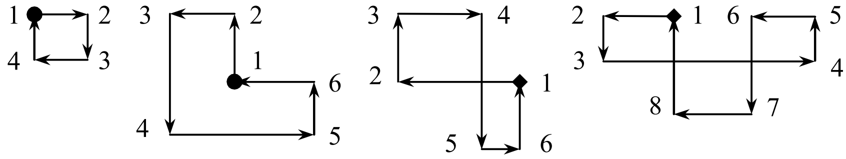


Рис. 10.3.1. Вигляд циклів Т-задачі

2. Комірки циклу нумерують (1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5, 6;…). Їх загальна кількість повинна бути парною. Кількість парних комірок дорівнює кількості непарних. Напрямок переміщення при нумерації не має значення (по/проти руху годинникової стрілки).

3. Якщо в таблиці заповнено $m + n - 1$ комірок, то для кожної вільної комірки можна побудувати ***лише один цикл.***
4. Цикл може мати форму випуклого та невипуклого багатокутника і може охоплювати лише частку заповнених комірок.
5. Комірки (порожні або заповнені), які пересікаються лініями циклу, але не входять у вершини, при розрахунках не розглядаються, бо вони у цикл не входять. У цикл входять лише вершини (одна з них – порожня, а інші – заповнені комірки).

10.3.3. Перерозподіл перевезення вантажу

Перед початком виконання перерозподілу перевезення вантажу потрібно підкреслити, що кількість незалежних рівнянь (кількість основних базисних змінних, або кількість заповнених комірок) дорівнює $m + n - 1 = 5 = \text{const}$. Тому кількість заповнених комірок повинна зберігатися, тобто звільнення від постачання однієї комірки повинно супроводжуватись заповненням іншої комірки. Отриманий цикл для порожньої комірки дозволяє визначити її нове завантаження. Порожня комірка з найнижчою від'ємною оцінкою є найвигіднішою для розміщення у ній нового постачання, яке забирається з однієї з заповнених парних комірок циклу.

Якщо в результаті розрахунків ми отримали нульове значення вантажу, призначеного для перевезення заповненою коміркою, то з цим нулем ми поводимось у подальших розрахунках, як зі звичайною цифрою. Якщо у процесі розрахунків ми отримуємо кілька однакових найменших значень вантажу для парних комірок циклу, то ми довільно обираємо одне з них для перенесення у вільну комірку, для якої створювався цей цикл.

Тепер перейдемо до прикладу табл. 10.3.1. Найменше значення вантажу у парній комірці визначеного циклу (нумерація виконується по вершинах циклу у будь-якому напрямку) переміщуємо у вільну комірку (2,3), для якої побудований цикл: з комірки (2,2) вантаж "50" переміщуємо у комірку (2,3). У новій табл. 10.3.2 діагональними рисками помічаємо комірки, які повинні завантажуватися (практично дублюємо ці діагональні риски з табл. 10.3.1 із врахуванням того, що з комірки (2,2) вантаж був знятий і перенесений у комірку (2,3). Таким чином ми маємо спочатку у табл. 10.3.2 позначення діагональними рисками комірок, у яких повинен розміщуватись вантаж, але без вказівки цього вантажу. І лише в одній комірці (2,3), для якої будувався цикл, вказаний вантаж для перевезення – “50”. У зв’язку з тим, що перерозподіл постачання охоплює лише комірки, які створюють цикл, то ми можемо для всіх інших комірок з постачанням залишити старе значення величини перевезеного вантажу. Наприклад, комірки (1,1) та (2,1) не були охоплені циклом, і тому їх вантаж не змінюється.

Таблиця 10.3.2

Результат першого кроку

α_i	M_i	N_j		
		50	**80**	**120**
$\alpha_1 = 0$	40	9 / 40	3 $\boxed{1}$	7 $\boxed{-2}$
$\alpha_2 = -4$	60	5 / 10	6 $\boxed{8}$	5 / 50
$\alpha_3 = 0$	150	4 $\boxed{-5}$	2 / 80	9 / 70
β_j		$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 9$

Далі виконується перерозподіл постачання для всіх охоплених циклом комірок (табл. 10.3.2). Перерозподіл виконується таким чином, щоб задовольнити вимоги користувачів та можливості постачальників.

На основі цього перерозподілу ми отримуємо нову табл. 10.3.2, яка є основою для виконання наступного кроку: знову виконуємо розрахунок потенціалів рядків (постачальників), колонок (користувачів) та вільних від постачання комірок; потім визначаємо цикл для комірки з найнижчим від’ємним потенціалом і знову виконуємо перерозподіл перевезення вантажу для охоплених циклом комірок.

Оптимальне рішення отримується (і відповідно зупиняються розрахунки), якщо потенціали вільних комірок є додатними або мають нульове значення. Нижче приводиться без коментарів подальший розрахунок Т-задачі за методом потенціалів (табл. 10.3.3, 10.3.4).

Таблиця 10.3.3

2-й крок за методом потенціалів

α_i	M_i	N_j		
		50	**80**	**120**
$\alpha_1 = 0$	40	9 / 40	3 / $\boxed{-4}$	7 / $\boxed{-7}$
$\alpha_2 = -9$	60	5 / $\boxed{5}$	6 / $\boxed{8}$	5 / 60
$\alpha_3 = -5$	150	4 / $\boxed{10}$	2 / 80	9 / 60
β_j		$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 7$	$\beta_3 = 14$

Таблиця 10.3.4

3-й крок за методом потенціалів

α_i	M_i	N_j		
		50	**80**	**120**
$\alpha_1 = 0$	40	9 / $\boxed{7}$	3 / $\boxed{3}$	7 / $\boxed{40}$
$\alpha_2 = -2$	60	5 / $\boxed{5}$	6 / $\boxed{8}$	5 / 60
$\alpha_3 = 2$	150	4 / 50	2 / 80	9 / 20
β_j		$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 0$	$\beta_3 = 7$

Всі оцінки вільних від вантажу комірок є додатними, тому у табл. 10.3.4 ми отримали оптимальний план перевезення вантажу.

Завдання. Розв'язати Т-задачі (табл. 10.3.5, 10.3.6).

Таблиця 10.3.5 Т-задача				
Постачальники	**Користувачі**			
	4*N*	**9*N***	**7*N***	**10*N***
2*N*	7 + *A*	3	2	4
15*N*	4	3 + *A*	5	2
10*N*	1	5	6 + *A*	3
3*N*	3	6	8	5 + *A*

Таблиця 10.3.6 Т-задача				
Постачальники	**Користувачі**			
	10*N*	**15*N***	**20*N***	**25*N***
30*N*	2 + *A*	3	8	7
5*N*	4	6 + *A*	3	1
15N	2	9	2 + *A*	3
20*N*	5	6	2	4 + *A*

Тут *N* – порядковий номер студента у групі. $A = \sqrt{N}$.

10.4. Відкриті моделі Т-задач

Відкритими називають моделі Т-задач, для яких виробнича потужність постачальників не дорівнює вимогам користувачів (табл. 10.4.1)

$$\sum_{i=1}^{m} M_i \neq \sum_{j=1}^{n} N_j .$$

Відкриті задачі переводять у закриті шляхом введення фіктивного постачальника або фіктивного користувача з нульовою вартістю перевезень одиниці вантажу $C_{ij} = 0$ відповідно по всьому рядку або по всій колонці. Далі Т-задачу розв'язують уже відомими методами до отримання додатних або нульових оцінок вільних комірок.

Приклад 1. Введення фіктивного постачальника

Припустимо, що підсумкова потужність постачальників $\sum_{i=1}^{m} M_i = 140$, а вимоги користувачів $\sum_{j=1}^{n} N_j = 200$. Задача відкрита, бо $\sum_{i=1}^{m} M_i < \sum_{j=1}^{n} N_j$. Тоді вводимо фіктивного постачальника Фп(60), після чого задача стає закритою. Вартість перевезення фіктивного постачальника дорівнює нулю для комірок усього рядка. Рішення отримуємо за відомим методом потенціалів до отримання додатних або нульових оцінок усіх вільних від перевезення комірок.

Таблиця 10.4.1

Введення фіктивного постачальника

α_i	M_i \ N_j	50	70	80
$\alpha_1 = 0$	60	3 $\boxed{-4}$	4 / 60	5 $\boxed{1}$
$\alpha_2 = 3$	80	10 / 50	8 $\boxed{1}$	7 / 30
$\alpha_3 = -4$	Фп(60)	0 $\boxed{-3}$	0 / 10	0 / 50
β_j		$\beta_1 = 7$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 4$

За один крок ми знайшли оптимальне рішення, бо у табл. 10.4.2 наступні оцінки порожніх комірок виявились додатними. Це означає закінчення розв'язання Т-задачі.

Таблиця 10.4.2

Результат 1-го кроку

α_i	M_i \ N_j	50	70	80
$\alpha_1 = 0$	60	3 / 50	4 / 10	5 $\boxed{1}$
$\alpha_2 = 3$	80	10 $\boxed{4}$	8 $\boxed{1}$	7 / 80
$\alpha_3 = -4$	Фп(60)	0 $\boxed{1}$	0 / 60	0 / 0
β_j		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 4$

У кінці розрахунків фіктивного постачальника вилучаємо і отримуємо оптимальний план перевезень згідно з існуючою потужністю постачальників та оптимальною функцією мети $F = 3 \cdot 50 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 80 = 150 + 40 + 560 = 220$.

Приклад 2. Введення фіктивного користувача

Підсумкова потужність постачальників $\sum_{i=1}^{m} M_i = 150$ більша за підсумкові вимоги користувачів $\sum_{j=1}^{n} N_j = 120$. Тому вводимо фіктивного користувача Фк(30) з нульовою вартістю перевезення до нього по всій відповідній колонці. Далі визначаємо початковий розподіл перевезень і отримуємо розв'язання задачі за методом потенціалів (табл. 10.4.3, 10.4.4).

Таблиця 10.4.3

Введення фіктивного користувача

$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{M_i}$ \ $\boldsymbol{N_j}$	**40**	**80**	**Фк(30)**
$\alpha_1 = 0$	40	7 $\boxed{7}$	2 40	0 $\boxed{2}$
$\alpha_2 = 3$	30	3 30	5 $\boxed{0}$	0 $\boxed{-1}$
$\alpha_3 = 2$	80	2 10	4 40	0 30
β_j		$\beta_1 = 0$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = -2$

Таблиця 10.4.4

Результат 1-го кроку

$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{M_i}$ \ $\boldsymbol{N_j}$	**40**	**80**	**Фк(30)**
$\alpha_1 = 0$	40	7 $\boxed{7}$	2 40	0 $\boxed{3}$
$\alpha_2 = 3$	30	3 0	5 $\boxed{0}$	0 30
$\alpha_3 = 2$	80	2 40	4 40	0 $\boxed{1}$
β_j		$\beta_1 = 0$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = -3$

За один крок ми знайшли оптимальне рішення, бо у табл. 10.4.4 наступні оцінки порожніх комірок виявились додатними та рівними нулю. Це означає закінчення розв'язання Т-задачі.

У кінці розрахунків фіктивного користувача вилучаємо і отримуємо оптимальний план перевезень згідно з існуючими вимогами користувачів та оптимальною функцією мети $F = 2 \cdot 40 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot \cdot 40 = 80 + 0 + 80 + 160 = 320$.

Завдання. Розв'язати Т-задачі (табл. 10.4.5, 10.4.6).

Таблиця 10.4.5

Т-задача

Постачальники	**Користувачі**		
	5*N*	**9*N***	**6*N***
2*N*	4 + *A*	4	5
11*N*	2	1 + *A*	3
14*N*	1	4	3 + *A*
3*N*	3	1	7

Таблиця 10.4.6

Т-задача

Постачальники	**Користувачі**			
	15*N*	**10*N***	**25*N***	**20*N***
30*N*	5 + *A*	2	6	8
15*N*	4	4 + *A*	2	3
5*N*	1	4	2 + *A*	5

Тут *N* – порядковий номер студента у групі. $A = \sqrt{N}$.

10.5. Виродження у транспортних задачах

Виродженість у Т-задачі означає отримання *нульового значення хоча б однієї основної змінної* базисного рішення (раніше ми розглянули такі Т-задачі – з *фіктивним постачальником або користувачем).* Тепер розглянемо випадок, коли при першому розподілі отримуємо нульове постачання на базі методу "північно-західного кута" (табл. 10.5.1).

Якщо спробувати побудувати цикли перерозподілу поставок при наявності лише чотирьох заповнених комірок, то ***виявилося б, що це***

неможливо. Але це в свою чергу суперечить твердженню, що для кожної комірки можна побудувати цикл. Що ж виникло? Виявляється, що число заповнених комірок (їх чотири) не відповідає вимозі по кількості заповнених комірок Т-задачі $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$.

Таблиця 10.5.1

Задача з виродженням

α_i	N_j / M_i	**40**	**90**	**20**
$\alpha_1 = 0$	40	2 / 40	5 / $\boxed{4}$	4 / $\boxed{4}$
$\alpha_2 = 4$	30	6 / 0	5 / 30	8 / $\boxed{4}$
$\alpha_3 = 3$	80	2 / $\boxed{-3}$	4 / 60	3 / 20
β_j		$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 0$

Тому в комірку (2.1) табл. 10.5.1 вводимо ще одну – нульову поставку. Нульова поставка приймається тому, що баланс по рядках і колонках уже встановлений. Комірку для нульової поставки можна брати будь-яку, аби вона була вільною. Але її потрібно обирати таким чином, щоб уникнути створення замкненого циклу із заповнених комірок, бо це унеможливлює подальше рішення. Вважається, що ми повинні ***дотримуватися "ступінчастості",*** яка отримується у методі "північно-західного кута". Тому обираємо комірку (2.1) з нульовим постачанням. Комірка (2.1) стає заповненою, і з цим нульовим заповненням ми поводимось, як з будь-якою іншою цифрою. Число поставок, яких не вистачає, може бути більше одиниці (наприклад: 2, 3…). Тоді і нульових поставок повинно бути 2, 3…

Розподіл поставок, який вміщує нульові поставки в заповнених комірках, зветься ***виродженим.*** Він відповідає виродженому базисному рішенню.

У табл. 10.5.2 показано рішення виродженої Т-задачі.

Таблиця 10.5.2

Оптимальний план Т-задачі з нульовим постачанням

α_i	M_i \ N_j	40	90	20
$\alpha_1 = 0$	40	2 / 40	5 $\boxed{1}$	4 $\boxed{1}$
$\alpha_2 = 1$	30	6 $\boxed{3}$	5 / 30	8 $\boxed{4}$
$\alpha_3 = 0$	80	2 / 0	4 / 60	3 / 20
β_j		$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 3$

10.6. Задача про оптимальне призначення

На виробництві виникає задача розподілу m працівників по n машинах таким чином, щоб при відомій продуктивності праці C_{ij} (i-го працівника на j-й машині) отримати максимальну загальну продуктивність праці. У цьому випадку математична модель нагадує модель Т-задачі $F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$ при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, $j = 1, \ldots, n$; $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, але зі своїми властивостями за деякими показниками:

1. У Т-задачі функція мети спрямована до мінімуму, а у даному випадку максимальна загальна продуктивність праці спрямована до максимуму.
2. Кожна машина, яка розглядається як “користувач” по відношенню до робітників, вимагає лише одного робітника.
3. Кожний робітник розглядається як “постачальник” лише одиниці робочої сили.
4. Задача про оптимальне призначення розглядається при $m = n$. У дійсності ця умова не завжди виконується, але за рахунок введення фіктивних робітників-“постачальників” або фіктивних машин-“користувачів” можна завжди виконати вказану умову. При цьому фіктивні робітники-“постачальники” та фіктивні машини-“користувачі” мають нульову продуктивність праці $C_{ij} = 0$.

Розглянемо рішення Т-задачі на прикладі табл.10.6.1. У цьому випадку кількість робітників $m = 3$, а кількість машин $n = 2$. Тому вводимо фіктивного "користувача"-машину з вимогою одного робітника і з нульовою продуктивністю праці $C_{ij} = 0$ по всій колонці. Розподілимо робітників за методом "північно-західного" кута. Ми можемо заповнити "постачанням" лише три комірки, бо X_{ij} може приймати лише два значення:

– $X_{ij} = 1$, якщо i-й працівник працює на j-й машині;
– $X_{ij} = 0$, якщо i-й працівник не працює на j-й машині.

Згідно з вимогами до Т-задачі, ми повинні заповнити "постачанням" 5 комірок, тому заповнюємо потрібну кількість комірок нульовим "постачанням".

Таблиця 10.6.1

Початковий розподіл задачі про оптимальне призначення

N_j \ M_j	**1**	**1**	**Фк(1)**
1	4 / 1	3 / 0	0
1	2	5 / 1	0 / 0
1	5	7	0 / 1

Далі треба виконати ще одну умову Т-задачі – спрямувати функцію мети до мінімуму. З цією метою продуктивність праці C_{ij} перетворимо на "втрату продуктивності праці", для чого виділяємо найбільшу продуктивність праці $C_{23} = 7$ і від неї віднімаємо всі інші продуктивності у комірках. У результаті ми отримуємо функцію мети

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при значеннях "втрат продуктивності праці", які показані у табл. 10.6.2 і які вже цілком задовольняють вимогам Т-задачі. Тому вирішуємо отриману Т-задачу за методом потенціалів (у табл. 10.6.2-10.6.4).

Таблиця 10.6.2

Розрахунок “втрат продуктивності праці”

α_i	N_j / M_i	**1**	**1**	**Фк(1)**
$\alpha_1 = 0$	1	3 / 1	4 / 0	7 $\boxed{-2}$
$\alpha_2 = -2$	1	5 $\boxed{4}$	2 / 1	7 / 0
$\alpha_3 = -2$	1	2 $\boxed{1}$	0 $\boxed{-2}$	7 / 1
β_j		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 9$

Таблиця.10.6.3

Результат першого кроку

α_i	N_j / M_i	**1**	**1**	**Фк(1)**
$\alpha_1 = 0$	1	3 / 1	4 / 0	7 $\boxed{-2}$
$\alpha_2 = -2$	1	5 $\boxed{4}$	2 / 0	7 / 1
$\alpha_3 = -4$	1	2 $\boxed{3}$	0 / 1	7 $\boxed{2}$
β_j		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 9$

У табл. 10.6.4 отримаємо рішення Т-задачі.

Таблиця.10.6.4

Результат першого кроку

α_i	N_j / M_i	**1**	**1**	**Фк(1)**
$\alpha_1 = 0$	1	3 / 1	4 $\boxed{2}$	7 / 0
$\alpha_2 = 0$	1	5 $\boxed{2}$	2 / 0	7 / 1
$\alpha_3 = -2$	1	2 $\boxed{1}$	0 / 1	7 $\boxed{2}$
β_j		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 7$

Після цього рішення знову переходимо на форму початкової табл. 10.6.1. У результаті отримуємо табл. 10.6.5.

Таблиця 10.6.5
Оптимальний розподіл призначень

M_i \ N_j	**1**	**1**
1	4 / 1	3
1	2	5 / 0
1	5	7 / 1

При цьому вказуються лише дійсні значення “постачання”. В результаті отримуємо функцію мети $F = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 11$. Робітник $i = 2$ не використовується.

Завдання. Розв’язати задачі про оптимальне призначення (табл. 10.6.6, 10.6.7).

Таблиця 10.6.6
Задача про оптимальне призначення

Фахівці	**Вимоги машин**		
	1	**1**	**1**
1	3 + *A*	4	*N*
1	7	4 + *A*	8
1	1	4	7 + *A*
1	4	2*A*	10

Таблиця 10.6.7
Задача про оптимальне призначення

Фахівці	**Вимоги машин**			
	1	**1**	**1**	**1**
1	3*A*	10	6	8
1	12	4*A*	4	3
1	5	*N*	7 + *A*	5

Тут N – порядковий номер студента у групі. $A = \sqrt{N}$.

10.7. Метод максимального потоку

Т-задача розв'язується не лише у матричній (табличній) формі, але й у мережевій формі, яка має перевагу у тому, що може врахувати пропускну спроможність окремих ділянок транспортної мережі. В мережевій формі легше враховувати навантаження та розвантаження на проміжних станціях, кожна з яких розглядається як вузол. У транспортній мережі (рис. 10.7.1) розрізняються такі елементи:

1. Початок "П", з якого починається маршрут.
2. Кінець "К", яким завершується маршрут.
3. Вузли 1, 2, 3 по кількості проміжних станцій. У загальному випадку вузли враховують додаткових постачальників та додаткових користувачів.
4. Шляхи: вони з'єднують вузли, і на них вказується позначення у квадратних дужках $[P_{ij}, x_{ij}]$, де P_{ij} – максимальна пропускна спроможність шляху між (i, j)-пунктами, x_{ij} – величина вантажу, яку можна перевезти. При цьому враховують обмеження по величині потоку x_{ij}:
   - x_{ij} не може перевищувати пропускну спроможність $0 \le x_{ij} \le P_{ij}$;
   - сумарний потік шляхів, які входять у вузол, дорівнює сумарному потоку, який з нього виходить (за винятком початку "П" та кінця "К") $\sum x_{ij}^{+} = \sum x_{ij}^{-}$.

Завдання полягає у тому, щоб потоки по дугах створювали максимально можливий загальний потік. Орієнтиром у цьому питанні може бути теорема Форда та Фолкерсона: "Для будь-якої мережі величина потоку з початку "П" у кінець "К" дорівнює мінімальній величині пропускної спроможності розрізу між "П" та "К". Для розв'язання задачі використовуємо алгоритм встановлення позначок, розроблений Фордом та Фолкерсоном.

Розрахунок починаємо з розгляду шляхів з початку "П" до кінця "К". Кожний новий шлях між "П" та "К" (шлях обираємо так, щоб по можливості охопити хоча б одну нову дугу) уточнює розподіл потоку по дугах. Але охоплення шляхами всіх дуг ще не означає завершення задачі і отримання максимально можливого потоку. Щоб впевнитись у отриманні максимального потоку, треба робити спроби "прориву" потоку від початку "П" до кінця "К" з додатковим потоком, який дорівнює різниці між максимальною пропускною спроможністю дуги та дійсним завантаженням. Робиться це тільки для шляхів, які недовантажені. Якщо така спроба виявилась марною, то на цьому процес розрахунків завершується. Для контролю завершення розрахунків можна також використовувати теорему Форда та Фолкерсона: максимальний потік дорівнює мінімальній величині пропускної спроможності розрізу між “П” та “К”.

Переходимо до розрахунків.

1. Рис. 10.7.1. Розглядаємо шлях “П – 1 – 2 – К”. На цьому шляху максимально можливий потік складає “2”. Тому у квадратних дужках для всіх указаних шляхів вказуємо отриманий потік і отримуємо рис. 10.7.2.

2. Рис. 10.7.2. Розглядаємо шлях “П – 1 – 3 – К”. Згідно з рис. 10.7.2 максимально можливий додатковий потік цього шляху дорівнює “3”, що ми позначаємо на рис. 10.7.3.

3. Рис. 10.7.3. Розглядаємо шлях “П – 2 – 3 – К”. Згідно з рис. 10.7.3 максимально можливий додатковий потік цього шляху дорівнює “1”, що ми позначаємо на рис. 10.7.4.

4. Рис. 10.7.4. Розглядаємо шлях “П – 2 – К”. Згідно з рис. 10.7.4 максимально можливий додатковий потік цього шляху дорівнює “3”, що ми позначаємо на рис. 10.7.5.

5. Рис. 10.7.5. Ми отримали оптимальний потік мережі “9”.

Робимо перевірку отриманого рішення: з початку “П” ми маємо можливість збільшити постачання між “П” та “К”. Виникає питання: чи можемо ми “прорватися” з таким збільшеним потоком до “К”, враховуючи, що потік, який входить у пункти, дорівнює потоку, який виходить з нього? Така спроба у нашому випадку завершилась невдачею. Це підтверджує вірне розв’язання задачі.

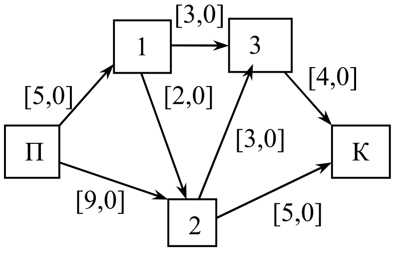


Рис. 10.7.1. Початок: пропускна спроможність мережі

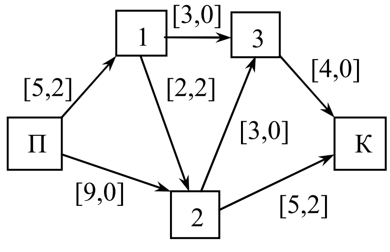


Рис. 10.7.2. Розподіл потоку після шляху П – 1 – 2 – К

Потрібно враховувати те, що можуть існувати кілька варіантів з оптимальним завантаженням мережі, що залежить від послідовності використання шляхів. Приклад такого варіанту завантаження мережі наведений на рис. 10.7.6.

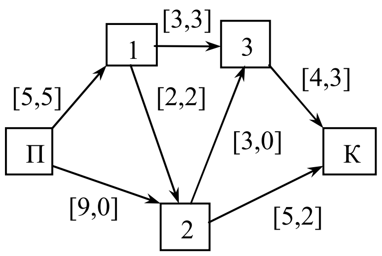


Рис. 10.7.3. Розподіл потоку після шляху П – 1 – 3 – К

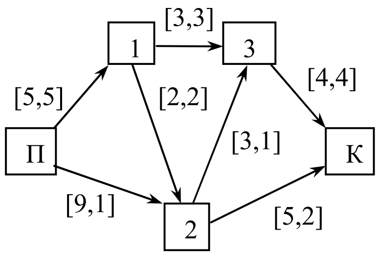


Рис. 10.7.4. Розподіл потоку після шляху П – 2 – 3 – К

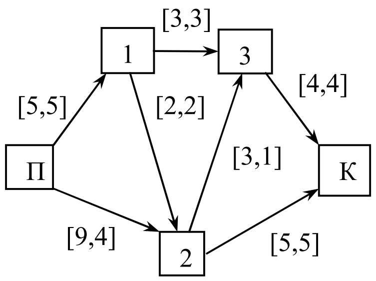


Рис. 10.7.5. Оптимальний розподіл потоку після шляху П – 2 – К

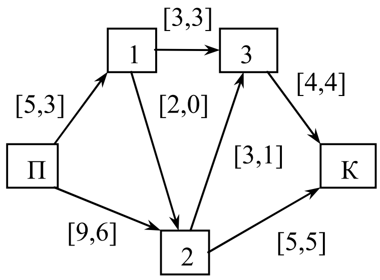


Рис. 10.7.6. Інший варіант оптимального завантаження мережі

Завдання. Розв'язати транспортну задачу методом максимального потоку для конфігурації шляхів рис. 10.7.1 при вказаній максимальній пропускній спроможності шляхів:

Завдання №1. 1. "П → 1" = [N, 0]. 5. "2 → К" = [6, 0].
2. "1 → 3" = [2N, 0]. 6. "1 → 2" = [5N, 0].
3. "3 → К" = [10, 0]. 7. "2 → 3" = [3N, 0].
4. "П → 2" = [0,5N; 0].

Завдання №2. 1. "П → 1" = [2N, 0]. 5. "2 → К" = [7, 0].
2. "1 → 3" = [N, 0]. 6. "1 → 2" = [N/2, 0].
3. "3 → К" = [5, 0]. 7. "2 → 3" = [N, 0].
4. "П → 2" = [N; 0].

Тут N – порядковий номер студента у групі.

11. ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

11.1. Загальні відомості про задачу комівояжера

Комівояжер повинен об'їхати по найкоротшому шляху N міст (починаючи з пункту 1), побувати у кожному з них лише один раз і повернутись у початок шляху – пункт 1. З цією задачею пов'язана велика кількість інших задач. Одна група з цих задач є варіантами задачі комівояжера: комівояжер повинен обрати шлях, який забезпечує: найменшу витрату часу або палива на шлях; найменшу вартість проїзду. Друга група з цих задач хоча і використовує методи розв'язання задачі комівояжера, але має інше практичне застосування: перевезення пошти або продуктів споживання у місті; з'єднання окремих пунктів лініями електропостачання, газопостачання, водопостачання; обробкаN деталей на одному верстаті, якщо відомий час або вартість переналагодження верстата для різних деталей. Тут треба пояснити, що використання методів розв'язання задачі комівояжера з проектуванням лінії електропостачання пов'язане з тим, що звичайно споживачів електричної енергії (а також водопостачання і т.д.) намагаються з'єднати таким чином, щоб лінія живлення створювала коло, бо це забезпечує найбільшу надійність надання електроенергії: якщо в одному місті лінія буде перервана, то є можливість забезпечити постачання по колу, з іншої сторони

Розглянемо перший варіант задачі: комівояжер повинен об'їхати по найкоротшому шляху N міст. Звичайно дані для розрахунку наводяться у таблиці (табл. 11.1 для $N = 4$).

Таблиця 11.1

Задача комівояжера

N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-	350	180	110
2	200	-	270	40
3	30	80	-	600
4	500	100	120	-

Задача полягає у тому, щоб мінімізувати функцію мети

$$F = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} C_{ij} \to \min,$$

де C_{ij} – довжина шляху між містами i та j; $i = \overline{1, N}$ – нумерація міст, з яких від'їжджають; $i = \overline{1, N}$ – нумерація міст, у які в'їжджають.

Усього комівояжер має обрати оптимальний варіант серед $(N-1)! = (4-1)! = 6$ маршрутів.

Для спрощення розрахунків можна скоротити на однакову кількість нулів у C_{ij} – довжині шляхів між містами. В результаті отримуємо табл. 11.2. Але потім, при отриманні розв’язання задачі, ми повинні відновити вказані реальні значення C_{ij}. Недозволені з будь-якої причини маршрути можуть вилучатися з розрахунків вилученням їх з розрахунку.

Таблиця 11.2

Спрощена задача комівояжера

N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-	35	18	11
2	20	-	27	4
3	3	8	-	60
4	50	10	12	-

Звичайно між містами може розглядатись лише одна відстань, і тому ми мали б заповнити лише половину табл. 11.1. Але, з іншого боку, ми розглядаємо навчальну задачу, яка повинна охоплювати загальний випадок. А загальний випадок якраз вимагає враховувати наявність різних шляхів між двома містами (наприклад, літаком, залізницею, автобусом).

Задача комівояжера може розв’язуватися різними методами. Нижче ми розглянемо метод, заснований на редукції рядків та колонок.

11.2. Розв’язання задачі комівояжера за методом редукції рядків та колонок

При розрахунках використовуємо табл. 11.2. Для оцінки можливої верхньої межі функції мети обираємо довільний маршрут комівояжера, наприклад (1,3) – (3,2) – (2,4) – (4,1), і отримуємо значення функції мети $F_b = 18 + 8 + 4 + 50 = 80$. Очевидно, що оптимальне значення функції мети F_0 повинне бути менше за F_b.

Розрахунок проїзду комівояжера розкладається на $(N-2)$ етапів. У межах кожного етапу алгоритм розрахунків однаковий.

Етап 1

Крок 1.1. Виконуємо редукцію рядків, для чого у табл. 11.2 помічаємо у кожному рядку і найменше значення C_{ij} і віднімаємо його від елементів даного рядка. Значення C_{ij} вказуємо у колонці A_i (табл. 11.3).

Таблиця 11.3

Крок 1.1. Редукція рядків

N	**1**	**2**	**3**	**4**	A_i
1	-	24	7	0	11
2	16	-	23	0	4
3	0	5	-	57	3
4	40	0	2	-	10

Крок 1.2. Виконуємо редукцію колонок, для чого у кожній колонці табл. 11.3 (в якій відсутні нульові елементи) помічаємо найменше значення оцінки шляху C_{ij} (далі – оцінка) і віднімаємо її з елементів даної колонки. Значення оцінок C_{ij} вказуємо у колонці B_j (табл. 11.4).

Таблиця 11.4

Крок 1.2. Редукція колонок

N	**1**	**2**	**3**	**4**	A_i
1	-	24	5	0	11
2	16	-	21	0	4
3	0	5	-	57	3
4	40	0	0	-	10
B_j	0	0	2	0	

Розраховуємо найнижчу можливу межу функції мети

$$F_{\min 1} = \sum_{i=1}^{N} A_i + \sum_{j=1}^{N} B_j = 11 + 4 + 3 + 10 + 0 + 0 + 2 + 0 = 30.$$

Очевидно, що оптимальне значення функції мети F_0, яке ми розраховуємо, повинно знаходитись у межах

$$F_{\min 1} \le F_0 \le F_b \text{ або } 30 \le F_0 \le 80.$$

Крок 1.3. Визначення одного з кроків оптимального шляху. Якщо у кожному рядку та кожній колонці табл. 11.4 було б лише по одному нулю (та шлях був би замкненим – це обов'язково перевіряється), то нульові комірки позначають оптимальний шлях комівояжера з оптимальною функцією мети F_0. На цьому рішення припиняється. Але у нашій табл. 11.4 це не спостерігається, тому розрахунки продовжуються

З цією метою для даних табл. 11.4 визначаємо штрафи a_i, b_j, які показані у колонці та рядку табл. 11.5:

– ***штраф рядка*** a_i, який дорівнює найменшому значенню оцінки комірок i-го рядка після першого нуля. Якщо у цьому рядку два або більше нулів, то $a_i = 0$. Штраф a_i визначає додаткові витрати, які виникають, якщо не використовувати одну нульову комірку у рядку;

Таблиця 11.5

Крок 1.3. Штрафи рядків та колонок

N	**1**	**2**	**3**	**4**	A_i	a_i
1	-	24	5	0	11	5
2	16	-	21	0	4	16
3	0	5	-	57	3	5
4	40	0	0	-	10	0
B_j	0	0	2	0		
b_j	16	5	5	0		

– ***штраф колонки*** b_j, який дорівнює найменшому значенню оцінки комірок j-ї колонки після першого нуля. Якщо у цій колонці два або більше нулів, то $b_j = 0$. Штраф b_j визначає додаткові витрати, які виникають, якщо не використовувати одну нульову комірку у колонці.

За даними табл. 11.5 розраховуємо для кожної нульової комірки функцію вторинного штрафу $\Phi_{ij} = a_i + b_j$ і вводимо розраховані дані у табл. 11.6.

Таблиця 11.6

Функція вторинного штрафу нульових комірок табл. 11.5

Нульові комірки (i, j)	(1,4)	(2,4)	(3,1)	(4,2)	(4,3)
Вторинний штраф Φ_{ij}	5	16	21^x	5	5

Найбільше значення $\Phi_{ij} = 21$ вказує, що у маршрут комівояжера потрібно внести комірку (3,1). Це базова комірка, з якої починається процес гілкування у розрахунках. Але цей вибір може виявитись і помилковим, тому це рішення потрібно перевірити (див. нижче). Обрану комірку (3,1) ми використовуємо для викреслення рядка $i = 3$ та колонки $j = 1$ у табл. 11.5. У результаті ми отримуємо табл. 11.7, яку потрібно переробити. Справа у тому, що у будь-якій таблиці комівояжера (і у скороченій, як у даному випадку) існує одна вимога, яка повинна виконуватись: у будь-якому рядку і у будь-якій колонці повинна існувати одна заборонена комірка.

Таблиця 11.7

Скорочення рядка $i = 3$ та колонки $j = 1$

N	**2**	**3**	**4**
1	24	5	0
2	-	21	0
4	0	0	-

У даному випадку такої забороненої комірки немає у рядку $i = 1$ та у колонці $j = 3$ (як бачимо, використана стара нумерація комірки з перестановкою рядка та колонки). Тому забороняємо до використання у розрахунках комірку $(i, j) = (1,3)$ і отримуємо табл. 11.8 а, яка використовується для розрахунків на другому етапі.

Таблиця 11.8 а

Таблиця етапу 2

N	**2**	**3**	**4**
1	24	-	0
2	-	21	0
4	0	0	-

Етап 2

Крок 2.1. Виконуємо редукцію рядків аналогічно кроку 1.1. Отримуємо $A_i^{/}$ дані табл. 11.8 б для рядків.

Таблиця 11.8 б

Етап 2. Редукція та штрафи рядків і колонок

N	**2**	**3**	**4**	$A_i^{/}$	$a_i^{/}$
1	24	-	0	0	24
2	-	21	0	0	21
4	0	0	-	0	0
$B_j^{/}$	0	0	0		
$b_j^{/}$	24	21	0		

Крок 2.2. Виконуємо редукцію колонок аналогічно кроку 1.2. Отримуємо дані $B_j^{/}$ табл. 11.8 б для колонок.

Якщо б дані $A_i^{/}$ та $B_j^{/}$ відрізнялися від нуля, то ми повинні були б визначити нову функцію

$$F_{\min 2} = F_{\min 1} + \sum_{i=1}^{N} A_i^{/} + \sum_{j=1}^{N} B_j^{/} = 30 + 0 + 0 = 30$$

і враховувати, що оптимальне значення функції мети повинно знаходитись у межа $F_{\min 2} \le F_0 \le F_b$.

Крок 2.3. Виконуємо редукцію колонок аналогічно кроку 1.3. Отримуємо штрафи $a_i^{/}$, $b_j^{/}$ табл. 11.8 б для рядків та колонок. За даними табл. 11.8 б розраховуємо для кожної нульової комірки функцію вторинного штрафу $\Phi_{ij}^{/} = a_i^{/} + b_j^{/}$ і вводимо розраховані дані у табл. 11.9.

Таблиця 11.9

Функція вторинного штрафу нульових комірок табл. 11.8 б

Нульові комірки (i, j)	(1,4)	(2,4)	(4,2)	(4,3)
Вторинний штраф Φ_{ij}	24^x	21	24	21

Ми отримали два найбільших значення штрафу $\Phi_{ij}^{/} = 24$. Обираємо довільно одне з найбільших однакових значень – комірку (1.4). Це означає, що комівояжер повинен на своєму шляху використати шлях (1,4). У табл. 11.8 б ми викреслюємо рядок $i = 1$ та колонку $j = 4$. У результаті ми отримуємо для етапу 3 табл. 11.10.

У табл. 11.10 забороняємо до використання у розрахунках комірку (i, j) = (4,3) і отримуємо табл. 11.11.

Таблиця 11.10
Етап 3

N	2	3
2	-	21
4	0	0

У результаті ми отримали скорочену матрицю оцінок проїзду з двома рядками і двома колонками. Далі розрахунки не виконуються, бо табл. 11.11 вказує маршрут завершення шляху комівояжера: (2,3) та (4,2).

Таким чином, маршрут комівояжера (3,1) + (1,4) + (2,3) + (4,2) = (1,4) + (4,2) + (2,3) + (3,1) є безперервним і має оцінку (оцінки – по табл. 11.2) F_0= 3 + 11 + 27 + 10 = 51. При цьому виконується умова $F_{\min 2} \le F_0 \le F_b$ або $30 \le 51 \le 80$.

Таблиця 11.11
Етап 3. Скорочена матриця оцінок проїзду

N	2	3
2	-	21
4	0	-

Отриманий шлях потрібно перевірити на оптимальність. З цією метою у початковій табл. 11.2 забороняємо до використання першу базову комірку (3,1) і отримуємо табл. 11.12.

По табл. 11.12 виконуємо редукцію рядків і колонок і отримуємо табл. 11.13, за даними якої розраховуємо

$$F_{\min}^{//} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{//} + \sum_{j=1}^{N} B_j^{//} =$$

$$=11+4+8+10+16+0+2+0=51.$$

Таблиця 11.12
Перевірка розрахунків

N	1	2	3	4
1	-	35	18	11
2	20	-	27	4
3	-	8	-	60
4	50	10	12	-

Тому що $F_{\min}^{//} > F_{\min 1}$, отримане рішення є вірним.

Таблиця 11.13
Перевірка розрахунків

N	1	2	3	4	$A_i^{//}$
1	-	24	7	0	11
2	16	-	23	0	4
3	-	0	-	52	8
4	40	0	2	-	10
$B_j^{//}$	16	0	2	0	

Таким чином, отриманий шлях є вірним, і з врахуванням даних табл. 11.13 функція мети $F_0 = 510$.

Якщо у розглянутій задачі комівояжера не дотримується умова $F_{\min} \leq F_0 \leq F_b$, то треба з самого початку зробити редукцію колонок, а потім – редукцію рядків. З цією метою рекомендується самостійно виконати розрахунки для задачі комівояжера табл. 11.14.

Таблиця 11.14
Задача комівояжера

N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-	5	8	7
2	2	-	2	3
3	4	5	-	15
4	2	6	5	-

11.3. Використання методу Монте-Карло у розв'язанні задачі комівояжера

Методами Монте-Карло називають будь-яку статистичну процедуру, яка використовує статистичну виборку. Для розв'язання задачі комівояжера використовуються датчики випадкових чисел ЕОМ. Замість ЕОМ ми використаємо урну з жетонами. Місто "1" є початковим, і тому "закладають в урну" жетони з номерами 2…N. Замість цього у ЕОМ можна розглядати номери 1…(N – 1). "Ретельно перемішавши жетони" (У ЕОМ ця операція не потрібна), витягають їх по одному і записують номери жетонів, які вважаються за отриманий маршрут. Для цього маршруту розраховують функцію мети і запам'ятовують як маршрут, так і функцію мети.

Після цього процедуру повторюють. Якщо функція мети не змінилась або має гірше значення, то результат не враховують. Якщо функція мети має краще значення, то нові кращі результати запам'ятовують, а старі викреслюють.

За допомогою ЕОМ ця процедура дозволяє за короткий термін оглянути велику кількість маршрутів і обрати серед них якщо не найкращий, то принаймні не найгірший маршрут.

11.4. Метод осереднених коефіцієнтів у задачі комівояжера

Для розв'язання задачі комівояжера за даними табл. 11.2 автор використав метод середніх коефіцієнтів K_{ij}, який застосовується в транспортній задачі. Отримані для цього випадку середні тарифи рядків (C_{pi}) та колонок (C_{Kj}) показані у табл. 11.15. Значення осереднених коефіцієнтів (K_{ij}) для кожної комірки наведені справа від початкових тарифів C_{ij} у табл. 11.15 (осереднені коефіцієнти K_{ij} можуть бути від'ємними або додатними).

Таблиця 11.15

Середні тарифи рядків (C_{pi}) та колонок (C_{Kj}) і осереднені коефіцієнти (K_{ij}) для даних табл. 11.2

n	1	2	3	4	C_{pi}
1	-	35; +5,75;	18; –12,25;	11; –23,75;	16
2	20; –10,75;	-	27; 0;	4; –27,5;	12,75
3	3; –33;	8; –23;	-	60; +23,5;	17,75
4	50; +13,75;	10; –21,25;	12; –20,25;	-	18
C_{Kj}	18,25	13,25	14,25	18,75	

Кількість кроків розрахунків дорівнює кількості міст.

Використовуємо такий алгоритм розрахунку:

1. На кожному кроці за початковими тарифами C_{ij} визначаємо значення величин середніх тарифів рядків (C_{pi}) та колонок (C_{Kj}) і осереднені коефіцієнти (K_{ij}). Ці дані наведені у табл. 11.15. По найменшому значенню осередненого коефіцієнта K_{ij} обираємо комірку оптимального шляху комівояжера і записуємо її дані у табл. 11.16:

Таблиця 11.16

Оптимальний шлях комівояжера

Номер кроку	**Комірка оптимального шляху (*i,j*)**	K_{ij}	**Початковий тариф C_{ij}**	**Заборонені рядок "*i*" та колонка "*j*"**		**Заборонена комірка (*i,j*)**
				i	***j***	
1	(3,1)	–33	3	3	1	(1,3)
2	(4,2)	–12,3	10	4	2	(2,4)
3	(1,4)	-	11	-	-	-
4	(2,3)	-	27	-	-	-

– номер кроку;
– адреса комірки оптимального шляху (i,j);
– осереднений коефіцієнт K_{ij};
– початковий тариф C_{ij};
– заборонені рядок і комірка (вони повторюють номери рядка і колонки комірки оптимального шляху). Вони закреслюються і не використовуються у подальших розрахунках. У результаті отримуємо скорочену таблицю для наступного кроку;
– для скороченої таблиці, яка залишилась після вказаних перетворень, забороняємо одну з комірок згідно з правилом: у будь-якому рядку та у будь-якій колонці повинна існувати одна заборонена комірка.

2. На наступному кроці виконуємо дії п. 1. Коли для відвідин залишається лише два шляхи, то вони входять в оптимальний шлях комівояжера без розрахунків, бо інших варіантів їх обрання не існує. Практично кількість кроків через це скорочується.

Розглянемо тепер розрахунок за даними табл. 11.15.

Крок 1. В оптимальний шлях комівояжера входить комірка (3,1) з найменшим осередненим коефіцієнтом $K_{ij} = K_{3,1} = -33$. Умовно "закреслюємо" рядок $i = 3$ та колонку $j = 1$. У скороченій таблиці забороняємо комірку $(i, j) = (1,3)$ згідно з правилом: у будь-якому рядку та у будь-якій колонці повинна існувати одна заборонена комірка. Заносимо дані у табл. 11.16.

Крок 2. За початковими тарифами C_{ij} у скороченій таблиці (вона не показана) знову розраховуємо значення C_{pi}, C_{Kj}, K_{ij}. В оптимальний шлях комівояжера входить комірка (4,2) з найменшим осередненим коефіцієнтом $K_{ij} = K_{4,2} = -12{,}3$. Умовно "закреслюємо" рядок $i = 4$ та колонку $j = 2$. У скороченій таблиці забороняємо комірку $(i, j) = (2,4)$ згідно з правилом: у будь-якому рядку та у будь-якій колонці повинна існувати одна заборонена комірка. Заносимо дані у табл. 11.16.

Кроки 3, 4. Для відвідин у комівояжера залишилось лише два шляхи: (1,4) та (2,3). Вони обираються без розрахунків і записуються в оптимальний шлях комівояжера (табл. 11.16).

Отриманий згідно з методом осереднених коефіцієнтів оптимальний шлях комівояжера (показаний у табл. 11.16) і відповідна функція мети нічим не відрізняються від результатів раніше виконаних розрахунків у розділі 11.2.

Завдання. Розв'язати задачу комівояжера (табл. 11.17, 11.18).

Таблиця 11.17

Задача комівояжера

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	N	60	$20A$	$5A$
2	$2A$	-	$4A$	80	100
3	140	150	-	$2N$	70
4	$40A$	120	70	-	N
5	$3N$	$A+6$	$4N$	90	-

Таблиця 11.18

Задача комівояжера

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	140	100	280	$15A$
2	100	-	150	$20A$	80
3	$4N$	$8N$	-	$10A$	70
4	$2N$	$3N$	4A	-	$4N$
5	$15A$	90	60	$30A$	-

Тут N – порядковий номер студента у групі. $A = \sqrt{N}$.

12. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

12.1. Математична модель задачі нелінійного програмування

Нелінійне програмування (НП) розглядає математичну модель, у якій використовуються нелінійні залежності або у функції мети F, або у системі обмежень.

У житті частіше зустрічаються нелінійні залежності, ніж лінійні. Типовими областями використання нелінійного програмування є планування промислового виробництва, управління ресурсами, контроль якості продукції, планування обслуговування та ремонту. Наприклад, задача нелінійна, якщо ефективність виробництва змінюється ***непропорційно масштабу*** використання ресурсів через розподілення витрат виробництва на змінні та умовно-постійні, через вплив різних зовнішніх та внутрішніх факторів.

Універсального методу розв'язання нелінійних екстремальних задач не існує, тому що вони надзвичайно різноманітні. Це пояснюється тим, що система нерівностей дає множину рішень, яка в загальному випадку не є випуклою, або кількість крайніх точок нескінченна. У зв'язку з цим методи НП розробляються під спеціальні класи задач.

Методів нелінійного програмування існує багато:

- класичний метод оптимізації (за допомогою множників Лагранжа);
- метод Куна – Таккера;
- метод прямого пошуку;
- градієнтний метод;
- метод Ньютона та його модифікації;
- оптимізація при наявності обмежень (методи змінних допусків, метод множників Лагранжа, метод штрафних функцій та інші).

Метод штрафних функцій у поєднанні ***з методами пошуку безумовного екстремуму є універсальним засобом*** рішення задач математичного нелінійного програмування.

Математична модель задачі нелінійного програмування має вигляд

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min) \qquad (12.1)$$

при $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i; i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n};$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i; i = \overline{k+1, m}, j = \overline{1, n}.$$

У даному випадку функція мети F може мати кілька екстремальних точок.

12.2. Критерій оптимальності у задачах з обмеженнями у вигляді рівностей

Якщо ми маємо задачу оптимізації з кількома рівняннями-обмеженнями

$$F = x_1 x_2 (1 - x_3)^2 (5 - x_4) \to \min; \quad 1 - x_1 - x_3 = 0; \quad 10 - 5x_2 + x_4 = 0,$$

то наявність рівнянь-обмежень дозволяє зменшити розмірність початкової задачі: для цього ми отримуємо

$$x_1 = 1 - x_3; \qquad x_4 = -10 + 5x_2$$

і підставляємо ці рівняння у функцію мети

$$F = 5x_2 (1 - x_3)^3 (3 - x_2) \to \min.$$

Тепер лише потрібно отримати мінімум функції мети. Такий метод спрощення математичної моделі за рахунок вилучення змінних можна використовувати лише у випадках, коли рівняння-обмеження можна розв'язати відносно деякого набору незалежних змінних. Якщо це неможливо виконати через складність функцій або через наявність багатьох рівнянь-обмежень, то доцільно використати метод множників Лагранжа.

12.3. Метод множників Лагранжа (класична задача оптимізації)

Вважаємо, що задача нелінійного програмування

$$F(X) \to \max(\min)$$

при обмеженнях $g_i(X) = b_i$, $i = \overline{1, m}$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має похідні dF/dx_j; dg_i/dx_j.

Для цієї задачі складаємо функцію Лагранжа

$$L = F(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(X)],$$

де λ_i, $i = \overline{1, m}$ – множники Лагранжа; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для функції Лагранжа шукаємо ***безумовний екстремум, тобто вважаємо, що координати змінюються без обмежень.*** З цією метою відповідні частинні похідні прирівнюють нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0; \; j = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(X) = 0; \; i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{12.2}$$

де $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Ми отримуємо систему $(n + m)$ рівнянь з $(n + m)$ невідомими: $x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Рішення системи (12.2) визначає точку X, в якій знаходиться екстремум функції $F(X)$. Далі поблизу отриманої точки досліджують функцію $F(X)$ за допомогою варіації X з урахуванням обмежень $g_i(X) = b_i$ для визначення типу екстремуму (максимуму або мінімуму).

Приклад 1. Знайти оптимальне рішення нелінійної задачі методом множників Лагранжа.

$$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min$$

при обмеженні $x_1 + x_2 = 8$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda(8 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо похідні від функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) \cdot 1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 5) \cdot 1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 8 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Отримали три рівняння з трьома невідомими, з яких із третього рівняння випливає

$$x_1 = 8 - x_2. \qquad (12.3)$$

Підставляємо (12.3) у перше рівняння і вирішуємо далі сумісно з другим:

$$\begin{cases} 2\left(8 - x_2 - 2\right) - \lambda = 0; \\ 2\left(x_2 - 5\right) - \lambda = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_2 + 12 - \lambda = 0; \\ 2x_2 - 10 - \lambda = 0; \end{cases}$$

$$-4x_2 + 22 = 0.$$

$$x_2^0 = 5\frac{1}{2}; \quad \lambda = 1; \quad x_1^0 = 2\frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримуємо оптимальне значення функції мети

$$F_{\text{Опт}}^0 = \left(x_1 - 2\right)^2 + \left(x_2 - 5\right)^2 = \left(2\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(5\frac{1}{2} - 5\right)^2 = \frac{1}{2}$$

при обмеженні $x_1^0 + x_2^0 = 2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 8.$

Після цього досліджують оптимум $F_{\text{екстр}}^0$ на мінімум та максимум. Для цього збільшуємо та зменшуємо змінну x_1:

1. $x_1 = 2$. Але ми повинні врахувати обмеження (12.3), з якого випливає $x_2 = 8 - x_1 = 6$. Тоді $F^0 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 = (2 - 2)^2 + (6 - 5)^2 = 1$ – функція мети збільшилась.
2. $x_1 = 3$. Із врахуванням обмеження (12.3) отримуємо $x_2 = 8 - x_1 = 8 - 3 = 5$, і тоді $F^0 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 = (3 - 2)^2 + (5 - 5)^2 = 1$ – функція мети збільшилась.

Тоді робимо висновок: у точці $x_1 = 2\frac{1}{2}$; $x_2 = 5\frac{1}{2}$ отриманий мінімум функції мети і остаточно

$$F_{\min}^0 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 = \left(2\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(5\frac{1}{2} - 5\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Складемо методом Лагранжа потрібну для рішення систему рівнянь (не вирішуючи її). Маємо початкову нелінійну математичну модель

$$F = 5x_1 x_2 x_3 \rightarrow \textit{екстремум}$$

при обмеженнях

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10;$$
$$5x_1x_2 + 7x_1x_3 + x_2x_3 = 15.$$

Складемо для цієї задачі функцію Лагранжа

$$L(X, \lambda) = 5x_1x_2x_3 + \lambda_1(10 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3) +$$
$$+ \lambda_2(15 - 5x_1x_2 - 7x_1x_3 - x_2x_3).$$

Тоді система рівнянь, яку потрібно вирішувати, визначається за похідними:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1 = 5x_2x_3 - 2\lambda_1 - \lambda_2(5x_2 + 7x_3) = 0; \\ \partial L/\partial x_2 = 5x_1x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2(5x_1 + x_3) = 0; \\ \partial L/\partial x_3 = 5x_1x_2 - 4\lambda_1 - \lambda_2(7x_1 + x_2) = 0; \\ \partial L/\partial \lambda_1 = 10 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0; \\ \partial L/\partial \lambda_2 = 15 - 5x_1x_2 - 7x_1x_3 - x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Тут невідомими екстремуму є x, x_2, x_3, λ_1, λ_2. Далі задача розв'язується відомими методами.

Завдання. Методом множників Лагранжа розв'язати задачі.

1. $F = (4x_1 - N)^2 + (x_2 - 3N)^2 \rightarrow \min;$
2. $F = (x_1 - A)^2 + (3x_2 - N)^2 \rightarrow \min;$

$3x_1 + Ax_2 = N; \quad 6x_1 + 3x_2 = N.$

Тут N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

12.4. Економічна інтерпретація множників Лагранжа

З економічної точки зору множники Лагранжа інтерпретують *як неявні (тіньові) ціни ресурсів,* які визначаються обмеженнями. Отримані оптимальні значення множників Лагранжа відіграють важливу роль в аналізі чутливості рішень.

Щоб пояснити ці особливості, розглянемо оптимізаційну задачу з m обмеженнями при n змінних

$$F(X) \rightarrow \min;$$

$$g_i(X) = b_i,$$

де $i = \overline{1,\ m}$; $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Для цієї задачі складаємо функцію Лагранжа

$$L = F(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(X)],$$

де λ_i, $i = \overline{1,\ m}$ – множники Лагранжа.

Відповідні частинні похідні прирівняємо до нуля $\dfrac{\partial L}{\partial b_i} = \dfrac{\partial F}{\partial b_i} - \lambda_i = 0$, звідки отримаємо $\dfrac{\partial L}{\partial b_i} = \dfrac{\partial F}{\partial b_i} - \lambda_i = 0$ та $\dfrac{\partial F}{\partial b_i} = \lambda_i$. Таким чином, швидкість зміни оптимального значення функції мети, яка викликається зміною величини ресурсу b_i, визначається оптимальним значенням множника Лагранжа. Тобто ціна, яка визначається як величина зміни оптимального значення функції мети під впливом одиничного збільшення ресурсу, задається множником Лагранжа.

12.5. Умови Куна – Таккера

Перед цим ми виявили, що множники Лагранжа можна використати при побудові критеріїв оптимальності з обмеженнями у вигляді рівностей. Кун та Таккер використали цей підхід також на випадок, коли обмеження задачі нелінійного програмування мають вигляд як рівностей, так і нерівностей. При цьому розглядається задача, коли функція мети і/або одне чи кілька лінійних обмежень у задачі лінійного програмування замінені нелінійними залежностями. Кун та Таккер виявили необхідні і достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування, вважаючи, що функція мети та функції обмежень диференціюються. Ці умови оптимальності відомі як умови Куна – Таккера, або задачі Куна – Таккера.

На деякому етапі процесу рішення задач отримуємо план $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Теореми Куна – Таккера дозволяють встановити оптимальність або неоптимальність припустимого плану екстремальної задачі. Ці умови звуться *критеріями оптимальності.* Наприклад, розглядається, чи є точка з заданими координатами точкою глобального мінімуму основної задачі опуклого програмування. Серед критеріїв оптимальності розрізняються необхідні і достатні умови. Достатні умови встановлюють оптимальність або неоптимальність плану. Необхідні умови служать для виділення з області припустимих планів більш вузької підмножини з оптимальним планом. Існують різні варіанти умов Куна – Таккера і різні приклади їх використання в теорії екстремальних задач. Вони використовуються для задач нелінійного програмування, у чисельних методах розв'язання задач математичного програмування. Вони дозволяють початкову задачу замінити задачею пошуку сідлової точки функції Лагранжа. "Прості" обмеження задачі Куна – Таккера дозволяють використати для її розв'язання методи, схожі з чисельними методами безумовної оптимізації, які достатньо добре вивчені.

Розглянемо загальну задачу нелінійного програмування

$$F(X) \to \min;$$

$$h_k(X) = 0, \quad k = \overline{1, K},$$

$$g_i(X) \geq 0, \quad i = \overline{1, m};$$

де $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n\}$, $j = \overline{1, n}$.

Визначення: нерівність $g_i(X) \geq 0$ зветься ***активною, або зв'язуючою,*** у точці $\overline{X}$, якщо $g_i(\overline{X}) = 0$, і ***неактивною, або незв'язуючою,*** якщо $g_i(\overline{X}) > 0$. Якщо є можливість виявити обмеження, які є неактивними у точці оптимуму ще перед початком розв'язання задачі, то всі ці обмеження $g_i(X) \geq 0$ можна вилучити і тим самим спростити модель.

Умови Куна – Таккера мають вигляд

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \left(u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) - \sum_{k=1}^{K} v_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = 0; \tag{12.4}$$

$$h_k(X) = 0, \quad k = \overline{1, K}, \tag{12.5}$$

$$g_i(X) \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{12.6}$$

$$u_i g_i(X) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \text{ (умова додаткової нежорсткості)}; \tag{12.7}$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{12.8}$$

$$j = \overline{1, n}$$

Додаткові змінні $u_i \geq 0$ є невід'ємними, у той час як на знак v_k обмежень немає.

Розглянемо умови Куна – Таккера на прикладі:

$$F(X) = 3x_1^2 - 2x_2 \to \min;$$

$$2x_1 + 5x_2 = 10;$$

$$3x_1 - 2 \geq 0;$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 12.$$

Перетворимо обмеження-нерівності так, щоб всі вони мали знак "≥0", і візьмемо відповідні похідні:

$$F(X) = 3x_1^2 - 2x_2 \to \min; \quad (12.9) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} = (6x_1;\ -2); \quad (12.13)$$

$$h_1 \to 2x_1 + 5x_2 - 10 = 0; \quad (12.10) \qquad \frac{\partial h_1}{\partial x_j} = (2;\ 5); \quad (12.14)$$

$$g_1 \to 3x_1 - 2 \geq 0; \quad (12.11) \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_j} = (3;\ 0); \quad (12.15)$$

$$g_2 \to 12 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \quad (12.12) \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_j} = (-2x_1;\ -2x_2); \quad (12.16)$$

$$j = \overline{1,2}$$

Умова Куна – Таккера для даного прикладу має вигляд

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - u_1\frac{\partial g_1}{\partial x_j} - u_2\frac{\partial g_2}{\partial x_j} - v_1\frac{\partial h_1}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, 2, \tag{12.17}$$

куди підставимо похідні $\frac{\partial}{\partial x_1}$ з рівнянь (12.13) – (12.16) і знаходимо

$$6x_1 - 3u_1 + 2u_2x_1 - 2v_1 = 0. \tag{12.18}$$

Відповідно за похідними $\frac{\partial}{\partial x_2}$ з рівнянь (12.13) – (12.16) знаходимо

$$-2 - u_1 \cdot 0 + 2u_2x_2 - 5v_1 = 0. \tag{12.19}$$

Тоді умови Куна – Таккера отримуємо у такому вигляді:

– з рівнянь (12.18) та (12.19)

$$6x_1 - 3u_1 + 2u_2x_1 - 2v_1 = 0;$$

$$-2 + 2u_2x_2 - 5v_1 = 0;$$

– з обмежень (12.10) – (12.12)

$$2x_1 + 5x_2 - 10 = 0;$$
$$3x_1 - 2 \geq 0;$$
$$12 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0;$$

– з рівняння (12.7) та (12.11), (12.12)

$$u_1 g_1 \rightarrow u_1(3x_1 - 1) = 0;$$
$$u_2 g_2 \rightarrow u_2(12 - x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Припустимість точки $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ до розгляду можна виявити з обмежень (12.10) – (12.12). Обрана точка не є оптимальною, якщо вона не відповідає умовам Куна – Таккера.

Існують різні умови Куна – Таккера, виконання яких не завжди є гарантією отримання оптимуму нелінійної задачі.

12.6. Метод прямого пошуку: метод конфігурацій

Методи прямого пошуку використовують лише функцію мети $F(x)$ без використання обмежень та похідних. **Метод конфігурацій**, що розглядається, запропонований Хуком та Дживсом у 1961 р. і є одним з **методів прямого пошуку**.

Алгоритм методу конфігурацій:

1. На початку розрахунків для функції мети $F(x) \rightarrow \min$ задаються:
   – $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – координатами базисної центральної точки;
   – h^0 – початковим кроком пошуку для всіх змінних $X = (x_1, x_2, .., x_n)$;
   – $\xi = |X^t - X^{t+1}|$ – точністю рішення або різницею координат між центральною точкою X^t та навколишньою точкою X^{t+1}, при якій не виявлений напрямок пошуку нової центральної точки X^{t+1} по відношенню до центральної точки X^t.
2. Шукаємо наступну центральну точку $F^1(X^1)$, для чого у функції мети у циклічному порядку x_j^0 змінюємо по черзі на $x_j^0 + h^0$. При цьому може виявитися, що збільшення деяких x_j^0 призводять до

зменшення $F^1(X^1)$, а інші $x_j^0 + h^0$ або не впливають на нове значення функції мети, або збільшують її. Ми змінюємо лише ті координати, які оптимізують функцію мети (у даному випадку – мінімізують, зменшують). Якщо збільшення координат x_j^0 або не впливає, або збільшує функцію мети, то зміна таких координат не враховується. Таким чином, координати нової центральної точки $X^1 = (x_1^0, x_2^1, x_3^1, x_4^0, \dots, x_n^0)$ можуть вміщувати координати як старої базисної точки x_j^0, так і нові значення $x_j^0 + h^0$, які найбільше зменшують $F(X)$.

3. Далі продовжуємо збільшувати значення $x_j^{t+2} = x_j^{t+1} + kh^0$, $j = \overline{1, n}$, де k – коефіцієнт “прискорення” пошуку (не обов’язково $k > 1$). При цьому знову запам’ятовують змінні, які найбільше зменшують функцію мети $F^{t+2}(X^{t+2})$. Таким чином, ми спочатку переміщуємось у просторі параметрів з додатним значенням h. При цьому у нову точку попадають тільки нові змінні, які зменшили функцію мети, тобто координати нової точки складаються з координат старої точки (які не зменшують функцію мети) і нових координат, розрахованих за допомогою h. Таке збільшення змінних продовжується, тільки якщо воно супроводжується зменшенням функції мети.

4. Якщо збільшення змінних не приводить далі до подальшого зменшення $F(X)$, то використовується зменшення координат $x_j^{t+1} = x_j^t - kh$, і знову повторюють процедуру вже з від’ємними значеннями h. Таким чином, розрахунок продовжується зі змінами знаку h.

5. Якщо подальша оптимізація за рахунок використання $\pm h$ не виявилась, то починається процес уточнення області екстремуму, за рахунок зменшення кроку $h^{t+1} = \frac{1}{2} h^t$. Процес уточнення припиняється, і пошук закінчується, якщо $h^{t+1} \le \xi$.

12.7. Метод штрафних функцій

Метод штрафних функцій у поєднанні з ***методами пошуку безумовного екстремуму,*** або методом конфігурацій, є універсальним засобом рішення задач нелінійного програмування.

Для нелінійної задачі з обмеженнями

$$F(X) \to \min$$

$$g_i(X) \geq b_i$$

$$i = \overline{1, m}$$

замість функції мети $F(X)$ використовується

$$\varphi(X) = F(X) + r\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X) - b_i} \to \min,$$

де $r\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X) - b_i}$ – додатна штрафна функція, яка при ***наближенні до межі обмеження різко зростає.*** Тому що $g_i(x) \geq b_i$, штрафна функція – додатна; r – довільний додатний коефіцієнт, що впливає на швидкість прийняття рішення (в області екстремуму зменшується).

Згідно з методом конфігурацій обирається початкова точка X^0, крок h^0, точність рішення ξ, значення коефіцієнта r. Циклічно задаються $x_j^{t+1} = x_j^t + h^t$ і використовують $\varphi(X^{t+1})$ замість $F(X^{t+1})$. Потім використовується "зворотний" напрямок, зменшують значення координат: $x_j^{t+1} = x_j^t - h^t$. Якщо подальша оптимізація не виявилась, починається процес скорочення кроку $h/2$ до $h^{t+1} \leq \xi$. На цьому пошук закінчується.

13. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

13.1. Загальні питання задачі динамічного програмування

Динамічне програмування виникло у 1950-1953 рр. на базі робіт Р. Беллмана та його співпрацівників. Спочатку розглядалася задача управління запасами, а потім число задач збільшилось. Метод динамічного програмування полягає у тому, що процес управління переміщенням функції мети в оптимум складається поступово, крок за кроком. При цьому використовується принцип оптимальності Р. Беллмана: "Якими б не були початковий стан e_1 та початкова стратегія X_1, наступні стратегії X_j повинні бути оптимальними по відношенню до поточного стану системи e_j". Тут X_1 та X_j – вектори змінних управління, які належить обирати на кожному кроці; e_1 та e_j – вектори параметрів, які описують стан системи. Використання принципу оптимальності гарантує отримання найкращого управління всім процесом.

Динамічне програмування має справу з марковськими системами, бо принцип оптимальності стверджує, що оптимальне управління системою на кожному кроці не залежить від попередніх подій і визначається лише самим станом.

Математичну модель динамічного програмування (ДП) розглянемо на прикладі

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j\,(x_j) \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b_0\,,$$

де $a_j \ge 0$; $x_j \ge 0$; $j = \overline{1,\ n}$.

Як бачимо, задача динамічного програмування за формою не відрізняється від задачі ЛП. Але вона має і свої властивості:

1. Наявність лише одного обмеження ($i = 1$).

2. Цілочисельність, бо a_j; x_j; b_0 – цілі числа.
3. Аддитивність $F = \sum_{j=1}^{n} f_j\,(x_j)$ або мультиплікативність $F = \prod_{j=1}^{n} f_j\,(x_j)$ функції мети, бо мультиплікативну функцію за рахунок логарифмування можна перетворити в аддитивну функцію.

Щокрокове рішення, під дією якого система переходить із поточного стану у новий стан, на кожному етапі не обов'язково повинне давати на даному етапі найвищий ефект, але повинне обиратися з урахуванням його впливу на майбутнє. Але майбутнього для останнього кроку не існує. Тому якщо відомий кінцевий стан системи, то розрахунок процесу динамічного програмування починається з кінця. Для процесів з визначеним початком ДП починається з початку. Якщо для процесу відомий як початок, так і кінець, то розрахунки процесу ДП можуть починатися як з початку, так і з кінця: результат буде однаковий

13.2. Задача розрахунку траєкторії літака

Літак у точці S_0 має швидкість v_0 та висоту H_0. Він повинен піднятися на висоту H_k і отримати швидкість v_k. Потрібно виконати функцію мети: мінімізувати витрати палива, якщо відома витрата палива при збільшенні швидкості від v_1 до v_2 при H = const, та відома втрата палива при збільшенні висоти від H_1 до H_2 при v = const. Для розв'язання задачі поділимо $(H_k – H_0)$ та $(v_k – v_0)$ відповідно на n_1 та n_2 однакових частин:

$$\text{ŕў}H = (H_k - H_0)/n_1\,; \qquad \text{ŕў}v = (v_k - v_0)/n_2\,.$$

Дані розрахунків зводимо у рис. 13.2.1.

Всі прямокутники спочатку порожні. Між прямокутниками вказані цифри витрат палива на збільшення висоти (вертикальні лінії) та збільшення швидкості (горизонтальні лінії). Початок позначений як S_0, а кінець – як S_k. Розрахунок починається з кінця S_k і переміщується у напрямку початку S_0: переміщуємось до прямокутників B_1, B_2; після цього переміщуємось до прямокутників C_1, C_2, C_3 і т.п. В усіх вказаних прямокутниках ми записуємо олівцем (щоб потім можна було виправити цифри) мінімальну кількість палива, що витрачається для досягнення кінцевої точки S_k.

Розглянемо більш детально алгоритм розрахунків:

1. У кінцевому прямокутнику записуємо витрати палива "0".

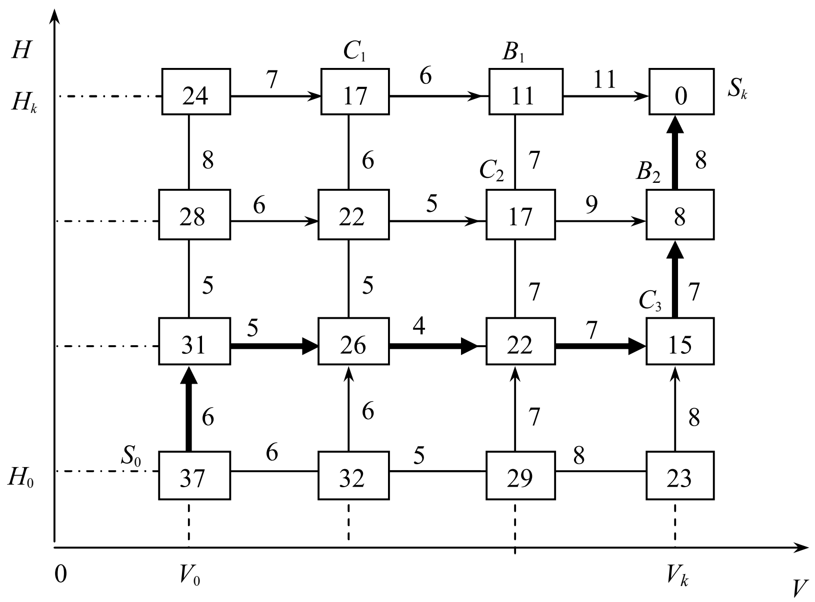


Рис. 13.2.1. Розрахунок витрат палива літаком

2. У прямокутниках B_1 та B_2 записуємо витрати палива відповідно “11” та “8", що витрачаються для досягнення кінцевої точки S_k. Можлива оптимальна траєкторія позначається стрілками, а заборонені шляхи не помічаються стрілками.

3. У точки B_1, B_2 можна попасти з точок C_1, C_2, C_3. Із точки C_2 на кінцеву точку можна йти шляхом на точку B_1 (з витратами палива 7 + 11 = 18) або на точку B_2 (з витратами палива 9 + 8 = 17). У прямокутнику C_2 ми пишемо найменшу витрату палива “17” і показуємо лише однією стрілкою можливу оптимальну траєкторію на точку B_2. Стрілка на точку B_1 не показується, бо цей шлях збільшить витрати палива.

Таким чином ми заповнюємо цифрами витрат палива всі інші прямокутники, отримуючи ряд можливих траєкторій, позначених стрілками. Оптимальну потрібну кількість палива ми отримуємо у початковому (стартовому) прямокутнику S_0 – цифру “37”.

4. Оптимальний шлях отримується переміщенням з початкової точки S_0 по незаборонених шляхах у кінцеву точку S_k (він показаний жирними стрілками).

Таким чином, ми отримали кількість витраченого палива та оптимальний шлях.

У даній задачі визначені всі умови переміщення для початкової та кінцевої точки. Тому процес отримання оптимальної траєкторії можна було б почати з початку – з точки S_0, позначаючи у прямокутниках мінімальну витрату палива при такому переміщенні. Кінцевий результат (кількість витраченого палива та оптимальна траєкторія) при цьому не змінюється. Але ми почали розрахунок з кінця, бо це – найбільш розповсюджений напрямок розрахунків у задачах динамічного програмування

Наведений розрахунок корисний тим, що він дозволяє наочно побачити всі виконані варіанти розрахунків, у тому числі і зайві. Здавалося б, що ми переглянули всі можливі варіанти, тобто отримали рішення методом перебору всіх можливих варіантів. Але насправді це не так. Методи динамічного програмування дозволяють скоротити розрахунки у 5-10 разів.

Завдання. Розрахувати траєкторію літака за наведеними нижче даними рис. 13.2.2.

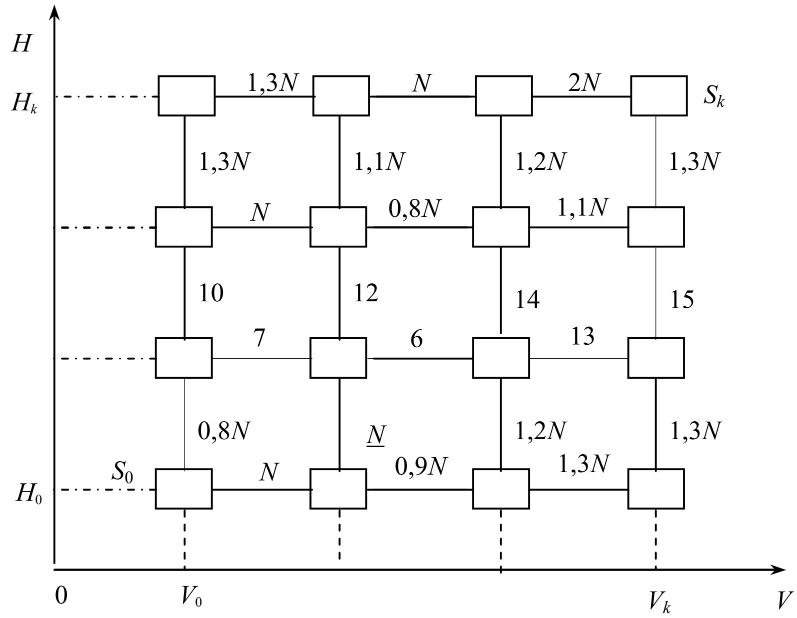


Рис. 13.2.2. Дані по витратах палива літаком

Тут N – порядковий номер студента у групі.

13.3. Отримання оптимального шляху у мережі

13.3.1. Динамічне програмування орієнтованої мережі

Припустимо, що ми маємо орієнтовану мережу, яка складається з пунктів 1...10 (ці номери показані у прямокутниках зліва) і з'єднуючих направлених дуг, на яких позначена одна з наведених нижче якостей (рис. 13.3.1.1):

- довжина шляху між пунктами (між містами, між вершинами);
- час, який потрібно витратити на шлях між пунктами;
- маса палива, що витрачається на шлях між пунктами;
- вартість проїзду між пунктами;
- вартість будування (шляху; електричної мережі; теплотраси; нафтопроводу; газопроводу; гідромережі) між пунктами;
- величина матеріальних витрат для подолання шляху (у випадку рішення задачі знаходження шляху з найменшими витратами).

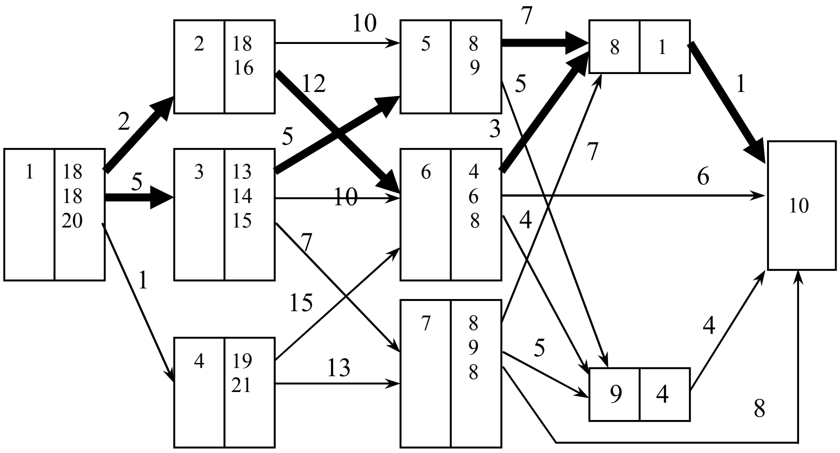


Рис. 13.3.1.1. Граф-схема орієнтованої мережі

Завдання полягає у тому, щоб використати вказані напрямки дуг і знайти шлях з початкового пункту "1" до кінцевого пункту "10", який забезпечує:

- найкоротший шлях;
- найменшу витрату часу;

– найменшу вартість проїзду або будування;
– найменші матеріальні витрати.

Розглянемо задачу знаходження найкоротшого шляху між містами: початком шляху у місті “1” та кінцем шляху у місті “10” (вважаємо, що на дугах вказана довжина шляху між містами). Кожне місто (за вилученням кінцевого пункту 10) позначається через два прямокутники: у прямокутнику зліва вказується порядковий номер міста, а прямокутник справа ***спочатку не заповнюється цифрами.*** При розрахунках у цих прямокутниках записуються цифри – найменша можлива відстань для обраного шляху від даного пункту до “кінця” 10. Прямокутник для кожного пункту – це наче відомий всім “вказівник шляху” для водіїв машин, що від’їжджають із даного пункту. Цей вказівник указує водієві відстань до “кінцевого “ пункту 10 для кожного шляху. Водій повинен вибрати найкоротший шлях, а всі інші – заборонити. Якщо зустрічаються однакові найменші значення довжини шляху, то вони вважаються рівноправно припустимими (не забороняються зайві однакові найкоротші шляхи).

Розрахунок починається з кінця. Спочатку заповнюються відповідні прямокутники для всіх пунктів (6, 7, 8, 9), які безпосередньо зв’язані з “кінцем” шляху 10. Наприклад, довжина шляху від пункту 8 до пункту 10 дорівнює “1”; тому у прямокутнику справа п. 8 вказуємо цифру “1”. Аналогічно довжина шляху між п. 6 та п. 10 дорівнює “6”, тому у прямокутнику справа п. 6 вказуємо для даного шляху цифру “6”. Таким же чином у прямокутники п. 7 та п. 9 вписуємо відповідні цифри “8” та “4”.

Далі продовжуємо заповнення прямокутників для пунктів, що найближче знаходяться до “кінця”, вважаючи “кінцем” найближчі пункти з заповненими прямокутниками:

– для шляху між п. 5 та п. 8 вказуємо у прямокутнику цифру “8” (бо довжина шляху між п. 5 та п. 8 дорівнює “7” та від п. 8 до п. 10 потрібно подолати відстань “1”; тому загальна відстань “7 + 1 = 8”);
– для шляху між п. 5 та п. 9 вказуємо у прямокутнику цифру “9” (бо довжина шляху між п. 5 та п. 9 дорівнює “5” та від п. 9 до п. 10 потрібно подолати відстань “4”; тому загальна відстань “5 + 4 = 9”);
– для п. 5 з двох шляхів з довжиною “8” та “9” вибираємо найкоротший шлях – між п. 5 та п. 8, відповідно, шлях між п. 5 та п. 9 забороняємо;
– для шляху між п. 6 та п. 8 вказуємо у прямокутнику цифру “4” (бо загальна відстань від кінця “3 + 1 = 4”). Для п. 6 ця

відстань є найкоротшою, тому шляхи "п. 6 – п. 10" та "п. 6 – п. 9" забороняємо.

Таким чином ми переміщуємося з кінця у початок із врахуванням для наступних пунктів лише залишеного для кожного міста найкоротшого шляху. Якщо існує кілька однакових найкоротших шляхів, то вони є рівноправними і враховуються. Довжина заборонених шляхів у подальших розрахунках не враховується, бо кожний пункт має лише один найкоротший шлях до кінця.

Розрахунок закінчується визначенням довжини шляху та обранням дозволеного маршруту. Маршрут вибирається з "початку" 1 до "кінця" 10 відкиданням заборонених шляхів.

Таким чином, динамічне програмування – це поетапне планування багатокрокового процесу з оптимізацією тільки одного кроку переходу у новий стан. Цей крок не обов'язково повинен давати найбільший ефект у поточному часі, але він повинен відповідати принципу оптимальності: яким би не був попередній шлях досягнення даного стану, кожний наступний крок повинен забезпечити оптимальну стратегію для частки шляху, яка починається з цього стану.

Задачу динамічного програмування розглядають також як процес поведінки деякої системи у часі, причому стан системи у кожний момент часу однозначно визначається набором параметрів та змінних.

Завдання. Розв'язати задачу орієнтованої мережі для конфігурації шляхів рис. 13.3.1.1 при вказаній у табл. 13.3.1.1 довжині шляхів.

Таблиця 13.3.1.1

Довжина шляхів мережі рис. 13.3.1.1

Шлях	Значення	Шлях	Значення	Шлях	Значення	Шлях	Значення
1-2	N	3-5	$2A$	5-8	$2N$	7-8	$2N$
1-3	7	3-6	12	5-9	4	7-9	N
1-4	2	3-7	17	6-8	26	7-10	$3N$
2-5	A	4-6	14	6-9	12	8-10	4
2-6	N	4-7	$2N$	6-10	N	9-10	12

Тут N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

13.3.2. Динамічне програмування неорієнтованої мережі

Задача відноситься до динамічного програмування.

На рис. 13.3.2.1 ми маємо ряд міст, які позначені вершинами графа.

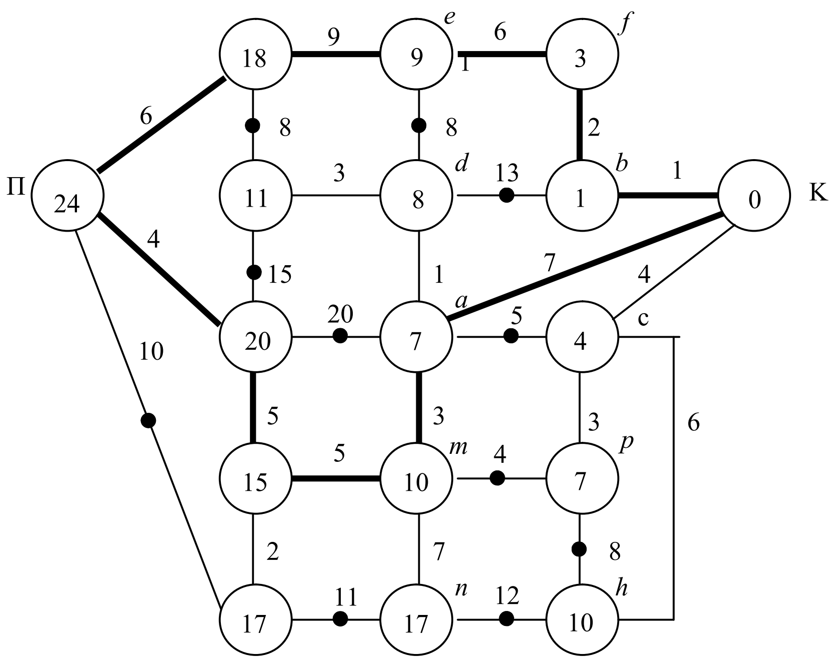


Рис. 13.3.2.1. Карта шляхів

Вершини з'єднуються дугами-шляхами, на яких можуть позначатися такі величини:

- довжина шляху між містами (між вершинами);
- час, який потрібно витратити на шлях між вершинами;
- маса палива, що витрачається на шлях між вершинами;
- вартість проїзду між вершинами;
- вартість будування (шляху; електричної мережі; теплотраси; нафтопроводу; газопроводу; гідромережі) між вершинами;
- величина, зворотна до прибутку від експлуатації шляху (у випадку рішення задачі знаходження шляху з найбільшим прибутком від експлуатації).

Завдання полягає у тому, щоб знайти шлях з початкового пункту “П” до кінцевого пункту “К”, який забезпечує:

- найкоротший шлях;
- найменшу витрату часу;
- найменшу вартість проїзду або будування;
- найбільший прибуток при експлуатації.

Розглянемо задачу знаходження найкоротшого шляху між містами “П” та “К”. Вважаємо, що на дугах вказана довжина шляху між містами. Практично ця задача замінюється на іншу: переміщуючись від кінця “К” до початку “П”, для кожного міста отримують найкоротший шлях до кінця, тобто кожне місто зв’язане з кінцем “К” найкоротшим шляхом, значення якого показують у колі вершини графа. Алгоритм рішення цієї задачі:

1. Міста-вершини позначаються **спочатку порожніми колами**, у яких олівцем будемо записувати довжину найкоротшого шляху від даного міста до кінцевого міста “К”. Олівець потрібно використовувати через можливість коригування отриманих даних.

2. Розрахунок починається з кінця “К”, переміщуючись по всіх можливих шляхах до початкового міста “П” таким чином, щоб **справа** від умовного січення ми залишали лише заборонені та дозволені шляхи та міста з визначеними відстанями до кінця “К”, а **зліва** – знаходились ще не визначені шляхи і міста.

3. Визначення довжини шляху міст д**о кінця “К”** виконується за такими правилами:
   - Шлях, що з’єднує два міста, **не забороняється,** якщо доданням довжини цього шляху до цифри, записаної у колі одного з цих двох міст, **ми отримуємо довжину шляху іншого міста (цифру, записану в його колі).** Якщо ж одне з цих двох міст не має розрахованого шляху, то ми просто записуємо цю цифру у колі.
   - Шлях, що з’єднує два міста, **забороняється, якщо доданням довжини цього шляху до довжини шляхів як одного, так і другого міста ми лише збільшуємо довжину шляхів цих міст до кінця “К”.**

Перейдемо тепер до розрахунків. Позначимо літерами *a, b, c, d, e, f, m, n, p, h* міста, які розташовані у кінці графа рис. 13.3.2.1.

У кінцеве коло “К” вказуємо у колі цифру “0” – це довжина шляху до кінцевої точки “К”.

Для міст *a*, *b*, *c*, що безпосередньо зв’язані шляхами з містом “К”, у колах вказуємо відповідні цифри “7”, “1”, “4”, які визначають довжину шляху від цих міст до кінця “К”. Для наступних міст ці всі заповнені кола a, b, c, розглядаються як своєрідний “кінець шляху”, до якого потрібно отримати оптимальний шлях проходження.

Тому далі записуємо:

- Для міст “f”, “d” – цифри “3” та “8”. Для міста “d” можливі варіанти: записати довжину шляху “К – a – d = 7 + 1 = 8” або записати довжину шляху “$К$ – b – d = 1 + 13 = 14”. У колі міста “d” вказуємо цифру “8”, а шлях “b – d” забороняємо (заборона позначена чорною точкою).
- Шляхи “e – d” та “a – c” забороняються згідно з наведеними раніше правилами заборони шляху і т.д.

Дозволені дуги створюють так зване “економічне дерево”. Дуги на ньому можуть створювати кола для паралельних шляхів з однаковою загальною довжиною. “Економічне дерево” дозволяє вибрати оптимальний шлях між пунктами “П” та “К”. При цьому інші паралальні шляхи можуть заборонятися.

Завдання. Розв’язати задачу неорієнтованої мережі, яка складається з міст із шляхами між ними. Довжина шляхів мережі вказана на рис. 13.3.2.2.

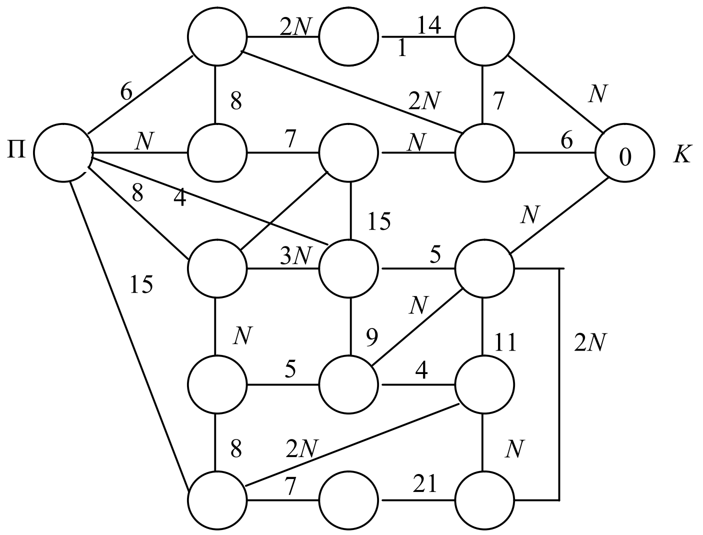


Рис. 13.3.2.2. Карта шляхів

Тут N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

13.4. Задача завантаження траспортного засобу (задача рюкзака)

Задача завантаження транспортного засобу (рюкзак, вантажна машина, вагон, судно, літак) відноситься до динамічного програмування. Розглянемо задачу завантаження на прикладі літака вантажністю G = 30 т за даними, наведеними у табл. 13.4.1.

Табл. 13.4.1

Дані для літака вантажністю G = 30 т

Тип речей i	**Кількість речей, штук**	**Вага g_i, тонн**	**Вартість v_i, тис. грн.**	**Максимальна кількість $X_{i\max} = G/g_i$**
1	$X1$	7	3	4
2	$X2$	9	4	3
3	$X3$	12	5	2

Математична модель задачі має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \le G; i = \overline{1, n},$$

де v_i, g_i, G_i, x_i – цілі числа; $x_{i\max} = \left|\frac{G_i}{g_i}\right|$ – максимально можлива кількість (ціле число) завантаження лише i-ю річчю (i = 1, 2, 3) всього літака.

Процес завантаження літака розбивають на три етапи (по кількості типів речей n). Згідно з принципом динамічного програмування, розрахунки починаються із становища, для якого рішення є відомим.

Етап 1 (рис. 13.4.1) складається із поступових завантажень літака лише речами $X1$, у межах від $X1$ = 0 до $X1$ = $X1$max = 4 додають по одній речі. На етапі 1 виконується всього одна таблиця.

Етап 2 (рис. 13.4.2) складається з 5-ти таблиць. Перша таблиця виконується при $X2$ = 0 = const поступовим додаванням речей $X1$ (тобто цілком повторюється завантаження етапу 1 (рис. 13.4.1). Після цього приймається зростаюче на одиницю значення $X2$ = 1 = const, і знову те, що залишається у літаку для довантаження (воно позначене як Е1), заповнюється речами $X1$ (для довантаження тут використовують дані при x_2 = 0 рис. 13.4.1, тобто з етапу 1). Після заповнення літака при $X2$ = 0, 1, 2, 3 (виконання чотирьох таблиць завантаження) виконується підсумкове результуюче завантаження: для цього при зростанні завантаження літака етапу 2 (Е2) беруться найкращі дані з $X2$ = 0, 1, 2, 3.

Етап 3 (рис. 13.4.3) починається із завантаження літака при $X3$ = 0 (тобто цілком повторюється результуюче завантаження етапу 2). Після цього приймається зростаюче на одиницю значення $X3$ = 1, 2, а те, що залишилось у літаку для довантаження, заповнюється речами ($X1$ + $X2$), які позначаються як Е2 і отримуються з результату виконання етапу 2. Після заповнення трьох таблиць завантаження літака при $X3$ = = 0, 1, 2 виконується таблиця підсумкового результуючого завантаження етапу 3: для цього при зростанні завантаження літака етапу 3 (Е3) беруться найкращі дані з таблиць для $X3$ = 0, 1, 2.

Таким чином, етап 1 (рис. 13.4.1), етап 2 (рис. 13.4.2), етап 3 (рис. 13.4.3) дають найкраще завантаження літака відповідно речами ($X1$), ($X1$ + $X2$), ($X1$ + $X2$ + $X3$). Найкраще завантаження літака речами ($X1$ + + $X2$ + $X3$) обирається з етапу 3 рис. 13.4.3.

Якщо літак потрібно завантажити більшою кількістю речей, то далі після етапу 3 складають продовження такого завантаження з використанням попередньо отриманих результатів. Тому звичайно розрахунки виконуються не лише для максимальної ваги.

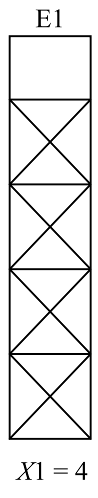


Рис. 13.4.1. Етап 1. Завантаження $X1$

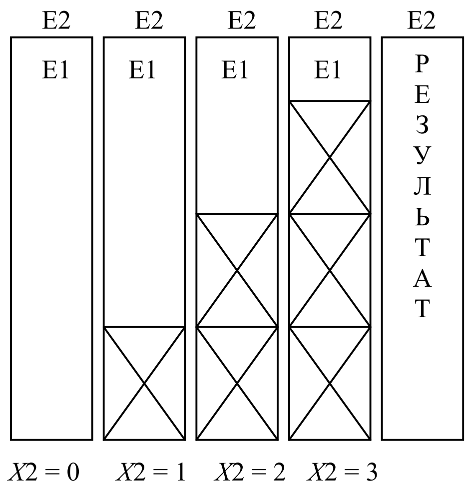


Рис. 13.4.2. Етап 2. Завантаження ($X1$ + $X2$)

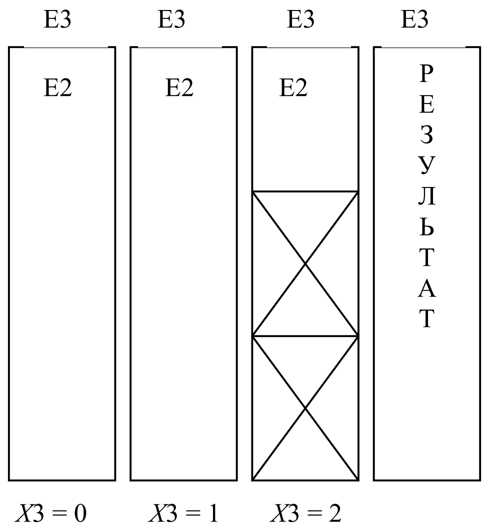


Рис. 13.4.3. Етап 3. Завантаження (*X*1 + *X*2 + *X*3)

Тепер перейдемо до конкретних розрахунків по етапах.

Табл. 13.4.2

Етап 1. Завантаження *X*1

Завантаження *e*, тонн	**Функція мети *F*1(*e*), тис. грн.**	**Кількість *X*1, штук**
0…6	0	0
7…13	3	1
14…20	6	2
21…27	9	3
28…30	12	4

Перший етап починається із завантаження літака лише однією річчю *X*1. Ці варіанти завантаження будуть потім використовуватись у інших етапах (у різних варіантах розподілу). Тому перебираємо варіанти завантаження літака, поступово збільшуючи вагу (і кількість *X*1) від нуля до максимуму ($0 \leq X1 \leq 4$) – табл. 13.4.2.

Завантаження літака у колонці *e* складається із двох підколонок:

1) лівої підколонки, яка дорівнює вазі вантажу *X*1, завантаженого у літак;

2) правої підколонки, яка практично менше на одиницю наступного вантажу і визначає діапазон зміни завантаження без зміни функції мети $F1(e)$.

Розглянемо етап 2, для якого складають завантаження речами $X1$ та $X2$ при поступовому збільшенні на одиницю кількості речей $X2$ = const у діапазоні $0 \le X2 \le 3$.

Для кожного значення Х*2* будуємо окрему таблицю. Всього ми отримуємо 5 варіантів завантаження:

Табл. 13.4.3 – завантажуємо у літак $X2 = 0$ = const, а решту завантажуємо речами $X1$ (воно повторює табл. 13.4.2) з функцією мети $F20$ (e).

Табл. 13.4.4 – завантажуємо у літак $X2 = 1$ = const, а решту – речами $X1$ з функцією мети $F21$ (e).

Табл. 13.4.5, 13.4.6 – завантажуємо у літак $X2 = 2, 3$ = const, а решту – речами $X1$ з функціями мети $F22$ (e)…$F23$ (e).

Після цього, маючи такий повний перебір можливого завантаження літака, складаємо результуючу кінцеву для етапу 2 табл. 13.4.7, у яку збираємо з табл. 13.4.3 – 13.4.6 усі діапазони завантаження з найбільшою функцією мети.

Табл. 13.4.3

Етап 2. Завантаження при *X*2 = 0 та *X*1 = 0…4

e, тонн	*F*20 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук
0…6	0	0	0
7…13	3	1	0
14…20	6	2	0
21…27	9	3	0
28…30	12	4	0

Табл. 13.4.4

Етап 2. Завантаження при *X*2 = 1 та *X*1 = 0…, 2

e, тонн	*F*21 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук
0…8	0	0	0
9…15	4	0	1
16…22	7	1	1
23…29	10	2	1
30	13	3	1

Табл. 13.4.5

Етап 2. Завантаження при *X*2 = 2 та *X*1 = 0, 1

e, тонн	*F*22 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук
0…17	0	0	0
18…24	8	0	2
25…30	11	1	2

Табл. 13.4.6

Етап 2. Завантаження при *X*2 = 3 та *X*1 = 0

e, тонн	*F*23 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук
0…26	0	0	0
27…30	12	0	3

Табл. 13.4.3 – 13.4.6 складаються із даних початкового завантаження речами $X2 = 0, 1, 2, 3$ етапу 2. З цих таблиць вибираємо найкраще завантаження у результуючу табл. 13.4.7 етапу 2.

Табл. 13.4.7

Етап 2. Результат завантаження ($X1 + X2$)

***e*, тонн**	***F*2 (*e*), тис. грн.**	***X*1, штук**	***X*2, штук**
0…6	0	0	0
7…8	3	1	0
9…13	4	0	1
14…15	6	2	0
16…17	7	1	1
18…20	8	0	2
21…22	9	3	0
23…24	10	2	1
25…26	11	1	2
27…29	12	0	3
30	13	3	1

Табл. 13.4.7 є уособленням найкращих результатів завантаження речами ($X1 + X2$) на етапі 2 і використовується як початкова таблиця 13.4.8 для 3-го етапу.

Розглянемо етап 3. Алгоритм завантаження літака на 3-му етапі подібний до етапу 2. Наприклад, якщо на 3-му етапі завантажимо у літак $X3 = 1$ шт. речей вагою 12 т і вартістю 5 тис. грн., то вільними для завантаження залишилось 30 – 12 = 18 т. Ці 18 т набираємо із табл. 13.4.8, яка вміщує найкращі результати завантаження літака речами ($X1 + X2$). Таким чином отримуємо табл. 13.4.9 – 13.4.10.

Підсумкова табл. 13.4.11 етапу 3 складається на базі даних табл. 13.4.8 – 13.4.10 шляхом обрання найбільшої функції мети.

Найкращий варіант завантаження речами ($X1 + X2 + X3$) обираємо з табл. 13.4.11 3-го етапу: $e = 30$; $x1 = 3$; $x2 = 1$; $x3 = 1$; $F = 13$ тис. грн. Близький до цього прибуток можна було б отримати від завантаження $e = 27$; $x1 = 0$; $x2 = 3$; $x3 = 0$; $F = 12$ тис. грн., але це завантаження гірше через зменшення прибутку.

Табл. 13.4.8

Етап 3. Завантаження при *X*3 = 0

e, тонн	*F*30 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук	*X*3, штук
0…6	0	0	0	0
7…8	3	1	0	0
9…13	4	0	1	0
14…15	6	2	0	0
16…17	7	1	1	0
18…20	8	0	2	0
21…22	9	3	0	0
23…24	10	2	1	0
25…26	11	1	2	0
30	13	3	1	0

Табл. 13.4.9

Етап 3. Завантаження при *X*3=1

e, тонн	*F*30 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук	*X*3, штук
0…11	0	0	0	0
12…18	5	0	0	1
19…20	8	1	0	1
21…25	9	0	1	1
26…27	11	2	0	1
28…30	12	1	1	1

Табл. 13.4.10

Етап 3. Завантаження при *X*3 = 2

e, тонн	*F*30 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук	*X*3, штук
0...23	0	0	0	0
24...30	10	0	0	2

Табл. 13.4.11

Етап 3. Результат завантаження

e, тонн	*F*30 (*e*), тис. грн.	*X*1, штук	*X*2, штук	*X*3, штук
0…6	0	0	0	0
7…8	3	1	0	0
9…11	4	0	1	0
12…13	5	0	0	1
14…15	6	2	0	0
16…17	7	1	1	0
18…18	8	0	2	0
19…20	8	1	0	1
21…22	9	3	0	0
21…22	9	0	1	1
23…24	10	2	1	0
25…25	11	1	2	0
26…26	11	1	2	0
27…29	12	1	1	1
30	13	3	1	0

У даному випадку деякі проміжні результати мають однакову вагу. З цих однакових результатів можна було залишати лише один (кілька результатів наведені лише для ілюстрації реально отриманих даних).

Завдання. Розв'язати задачі завантаження трюма судна вантажністю G за даними, наведеними у табл. 13.4.12 – 13.4.13.

Табл. 13.4.12
Дані для літака вантажністю $G = 7N$ тонн

Тип речей i	Кількість речей, штук	Вага gi, тонн	Вартість vi, тис. грн.
1	$X1$	$1,1N$	10
2	$X2$	$2N$	23
3	$X3$	$3N$	28

Табл. 13.4.13
Дані для літака вантажністю $G = 20N$ тонн

Тип речей i	Кількість речей, штук	Вага gi, тонн	Вартість vi, тис. грн.
1	$X1$	$3N$	30
2	$X2$	$5,5N$	60
3	$X3$	$9N$	85

Тут N – порядковий номер студента у групі.

13.5. Розподіл обмежених ресурсів

Галузь складається з $n = 3$ підприємств із порядковими номерами $j = 1, 2, \ldots, n$. Потрібно між ними розподілити ресурси $X = 4$ млн. грн. Очікуваний прибуток $\Delta S_{ij}(x_{ij})$ від вкладених ресурсів x_{ij} у кожне підприємство показаний у табл. 13.5.1.

Таблиця 13.5.1
Прибуток від капітальних вкладень

Ресурс x_{ij}	Прибуток ΔS_{ij} i-го ресурсу j-го підприємства, млн. грн.		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	0,24	0,28	0,26
2	0,50	0,56	0,52
3	0,70	0,70	0,65
4	0,90	0,78	0,80

Вважаємо, що прибуток підприємства не залежить від розподілу ресурсів по інших підприємствах. Функція мети полягає в отриманні максимального прибутку

$$F = \sum_{j=1}^{n} \text{ŕў}S_{ij}(x_{ij}) \to \max$$

при обмеженні $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le X$,

де $x_{ij} \ge 0; j = \overline{1, n}$; $X = 4$ млн. грн. – загальний ресурс.

Ця задача нагадує задачу рюкзака. Для спрощення розрахунків вважаємо, що розподіл вкладень виконується з градацією у 1 млн. грн., тобто підприємство може отримати 0, 1, 2, 3, 4 млн. грн. Розподіл виконується по етапах, кількість яких дорівнює кількості підприємств.

Етап Е1 складається з поступового збільшення ресурсів для підприємства $j = 1$ у межах $X1 = 0…4$ млн. грн. з визначенням відповідних прибутків ΔS_{ij}. Розрахунки при цьому не виконують, бо дані наведені у табл. 13.5.1.

Етап Е2: розраховуються прибутки від вкладень ресурсів у два підприємства ($X1 + X2$). З цією метою у підприємство $j = 2$ вкладається $X2 = 0, 1, 2, 3, 4$ млн. грн. = const. Для кожного випадку складають окрему таблицю розрахунків прибутку (табл. 13.5.2 – 13.5.13) і додають підприємству $j = 2$ вкладення ($X1$) з етапу Е1.

Етап Е3: розраховуються прибутки від вкладень ресурсів у три підприємства ($X1 + X2 + X3$). З цією метою у підприємство $j = 3$ вкладається $X3 = 0, 1, 2, 3, 4$ млн. грн. = const. Для кожного випадку складають окрему таблицю розрахунків прибутку (всього 5 таблиць) і додають підприємству $j = 3$ вкладення ($X1 + X2$) з етапу Е2.

Таблиця 13.5.2

Етап Е2. *X2* = 0, *X1* = 1…4

S_i	$\Delta S_i^{/}$	*X1*	*X2*
1	0,24	1	0
2	0,50	2	0
3	0,70	3	0
4	0,90	4	0

Таблиця 13.5.3

Етап Е2. *X2* = 1, *X1* = 1…3

S_i	$\Delta S_i^{/}$	*X1*	*X2*
1	0,28	0	1
2	0,52	1	1
3	0,78	2	1
4	0,98	3	1

Таблиця 13.5.4

Етап Е2. *X2* = 2, *X1* = 1…2

S_i	$\Delta S_i^{/}$	*X1*	*X2*
2	0,56	0	2
3	0,80	1	2
4	1,06	2	2

Таблиця 13.5.5

Етап Е2. *X2* = 3, *X1* = 1

S_i	$\Delta S_i^{/}$	*X1*	*X2*
3	0,70	0	3
4	0,94	1	3

Таблиця 13.5.6
Етап Е2. $X2 = 4$, $X1 = 0$

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$
4	0,78	0	4

Таблиця 13.5.7
Етап Е2. Результат

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$
1	0,28	0	1
2	0,56	0	2
3	0,80	1	2
4	1,06	2	2

Таблиця 13.5.8
Етап Е3. $X3 = 0$

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$	$X3$
1	0,28	0	1	0
2	0,56	0	2	0
3	0,80	1	2	0
4	1,06	2	2	0

Таблиця 13.5.9
Етап Е3. $X3 = 1$

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$	$X3$
1	0,26	0	0	1
2	0,54	0	1	1
3	0,82	0	2	1
4	1,06	1	2	1

Таблиця 13.5.10
Етап Е3. $X3 = 2$

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$	$X3$
2	0,52	0	0	2
3	0,80	0	1	2
4	1,08	0	2	2

Таблиця 13.5.11
Етап Е3. $X3 = 3$

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$	$X3$
3	0,65	0	0	3
4	0,93	0	1	3

Таблиця 13.5.12
Етап Е3. $X3 = 4$

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$	$X3$
4	0,8	0	0	4

Таблиця 13.5.13
Етап Е3. Результат

S_i	$\Delta S_i^{/}$	$X1$	$X2$	$X3$
1	0,28	0	1	0
2	0,56	0	2	0
3	0,80	1	2	0
3	0,80	0	1	2
4	1,08	0	2	2

Таким чином, ми отримаємо максимальний прибуток F = 1,08 млн. грн., якщо розподілимо ресурси між підприємствами за схемою $X1$ = 0 млн. грн.; $X2$ = 2 млн. грн.; $X3$ = 2 млн. грн.

Завдання. Розв'язати задачу по розподілу обмежених ресурсів. Дані наведені у табл. 13.5.14 – 13.5.15.

Таблиця 13.5.14

Прибуток від капітальних вкладень

Ресурс S_i	**Прибуток ΔS_i^j i-го ресурсу j-го підприємства, млн. грн.**		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	$0{,}1N + 0{,}03(-1)^N$	$0{,}14N + 0{,}04(-1)^N$	$0{,}08N + 0{,}02(-1)^N$
2	$0{,}17N + 0{,}05(-1)^N$	$0{,}20N + 0{,}06(-1)^N$	$0{,}15N + 0{,}05(-1)^N$
3	$0{,}25N + 0{,}07(-1)^N$	$0{,}22N + 0{,}07(-1)^N$	$0{,}26N + 0{,}07(-1)^N$
4	$0{,}30N + 0{,}09(-1)^N$	$0{,}28N + 0{,}09(-1)^N$	$0{,}27N + 0{,}09(-1)^N$

Таблиця 13.5.15

Прибуток від капітальних вкладень

Ресурс S_i	**Прибуток ΔS_i^j i-го ресурсу j-го підприємства, млн. грн.**		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	$0{,}12 + 0{,}03(-1)^N$	$0{,}16N + 0{,}04(-1)^N$	$0{,}11N + 0{,}02(-1)^N$
2	$0{,}19 + 0{,}05(-1)^N$	$0{,}22N + 0{,}06(-1)^N$	$0{,}17N + 0{,}05(-1)^N$
3	$0{,}26 + 0{,}07(-1)^N$	$0{,}23N + 0{,}07(-1)^N$	$0{,}28N + 0{,}07(-1)^N$
4	$0{,}33+0{,}09(-1)^N$	$0{,}30N+0{,}09(-1)^N$	$0{,}30N + 0{,}09(-1)^N$

Тут N – порядковий номер студента у групі.

13.6. Задача оптимальної заміни обладнання

При експлуатації виникає потреба заміни обладнання внаслідок зменшення прибутків з таких причин:

1. Вартість продукції P_t із зростанням часу t зменшується як через фізичне старіння, так і через зростаючі витрати на ремонт.
2. Експлуатаційні витрати EK_t з часом зростають через витрати на ремонт.

Наша мета – отримати максимальний прибуток, і тому коли цей прибуток зменшується, ми повинні контролювати цей процес і визначити термін, коли обладнання треба замінити на нове.

Вважаємо, що нам відомі статистичні дані про вартість продукції P_t, яку випускає обладнання; експлуатаційні витрати EK_t; вартість нового обладнання V_0 та залишкова вартість обладнання VZ_t віком t (табл. 13.6.1).

Таблиця 13.6.1

Статистичні дані експлуатації обладнання
(V_0 = 20 тис. грн., VZ_t = 0 тис. грн.)

Характеристика обладнання, тис. грн.	Вік обладнання t					
	0	1	2	3	4	5
P_t	40	37	33	29	25	20
EK_t	10	11	13	15	17	20

Якщо б у нас ставало питання заміни обладнання на t-му поточному році роботи обладнання, то ми повинні були б розрахувати прибуток для двох випадків (вважаємо, що обладнання на початок року має вік t років):

1. ***Обладнання не замінюється.*** Прибуток дорівнює $f_t^1 = P_t - EK_t$.
2. ***Обладнання замінюється.*** Прибуток дорівнює

$$f_t^2 = P_0 - EK_0 - V_0 + VZ_t,$$

де P_t, P_0 – вартість продукції, яку випускає обладнання віком t та нове обладнання (при t = 0 років); EK_t, EK_0 – експлуатаційні витрати на обладнання віком t та нове обладнання; V_0 – вартість нового обладнання (купівля, транспортування, встановлення, налагодження).

Якщо $f_t^1 < f_t^2$, то обладнання можна міняти. При цьому ми не розглядаємо прибутки від попередніх та наступних років, вважаємо їх рівними нулю.

Розглянемо задачу: потрібно отримати максимальний підсумковий прибуток за 5-річний плановий період з використанням операції заміни обладнання. Це вже відноситься до задачі динамічного програмування, і тому, згідно з алгоритмом динамічного програмування, починаємо розрахунок з кінця у двох варіантах (обладнання замінюється та не замінюється) для етапів Е = 5, 4, 3, 2, 1. Кількість етапів дорівнює кількості років.

Кожний етап розглядається на початку року 5-річчя. На кожному етапі обирається одне з двох можливих рішень: обладнання замінюється або не замінюється у залежності від величини розрахованого підсумкового прибутку. Більший прибуток (з цих двох варіантів) вказує обраний шлях, а менший прибуток визначає заборонений шлях. Врахуємо, що внаслідок заміни або незаміни обладнання може мати такий вік: на етапі 5 t = 1, 2, 3, 4 роки; на етапі 4 t = 1, 2, 3 роки; на етапі 3 t = 1, 2 роки; на етапі 2 t = 1 рік; на етапі 1 t = 0 років. Розрахунки виконуються за такими формулами для Е-го етапу:

1. ***Обладнання не замінюється***. Прибуток дорівнює

$$f^1_{E,t} = P_t - EK_t + f^{\max}_{E+1,t+1},$$

де $f^{\max}_{E+1,t+1}$ – найбільший підсумковий прибуток на наступному (Е+1)-му етапі при експлуатації обладнання віком (t +1) років; цей прибуток для етапу Е = 5 дорівнює нулю, бо ми розглядаємо лише 5-річний плановий період (все, що знаходиться за межами цього періоду, не враховуємо); Е – поточний номер етапу; (t +1) – вік обладнання у наступному етапі.

2. ***Обладнання замінюється***. Прибуток дорівнює

$$f^2_{E,t} = P_0 - EK_0 - V_0 + VZ_t + f^{\max}_{E+1,1}$$

де $f^{\max}_{E+1,1}$ – найбільший підсумковий прибуток на наступному (Е+1)-му етапі, коли вік нового обладнання буде t = 1 рік.

За цими формулами виконуємо розрахунки (табл. 13.6.2). У цій таблиці виділені рамками оптимальні напрямки заміни обладнання.

На основі розрахунків з табл. 13.6.2 можна зробити такі висновки (тепер переміщуємося з початку у кінець, з етапу 1 до етапу 2):

1. Найбільший прибуток за 5-річчя – 112 тис. грн. На першому етапі у нас нове обладнання (вартість його придбання та встановлення нами не враховується, бо це зроблено у минулому 5-річчі), тому питання про заміну не стає.

2. На етапі 2 вік обладнання стане t = 1 рік. Згідно з розрахунками ми не повинні замінювати обладнання, бо $f^1_{2,1} > f^2_{2,1}$.

3. На етапі 3 вік обладнання стане t = 2 роки. Згідно з розрахунками ми отримали рівні витрати $f^1_{3,2} = f^2_{3,2}$ = 56 тис. грн. У таких умовах вважається невигідним замінювати обладнання, бо прибутки забезпечуються рівними, але через рік ми будемо мати обладнання, новіше на 1 рік. Тому обладнання не замінюється.

4. На етапі 4 вік обладнання стане t = 3 роки. Згідно з розрахунками ми повинні замінити обладнання, бо $f^1_{4,3} < f^2_{4,3}$.

Таблиця 13.6.2

Розрахунки прибутків по етапах

ЕТАП 5. t = 1 рік $\boxed{f^1{}_{5,1}} = P_1 - \text{ЕК}_1 + f^{\max}{}_{6,2} = 37 - 11 + 0 =$ $= 26;$ $f^2{}_{5,1} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_1 + f^{\max}{}_{6,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 0 = 10.$	***ЕТАП 5. t = 2 роки*** $f^1{}_{5,2} = P_2 - \text{ЕК}_2 + f^{\max}{}_{6,3} = 33 - 13 + 0 =$ $= 20;$ $f^2{}_{5,2} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_2 + f^{\max}{}_{6,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 0 = 10.$
ЕТАП 5. t = 3 роки $f^1{}_{5,3} = P_3 - \text{ЕК}_3 + f^{\max}{}_{6,4} = 29 - 15 + 0 =$ $= 14;$ $f^2{}_{5,3} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_3 + f^{\max}{}_{6,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 0 = 10.$	***ЕТАП 5. t = 4 роки*** $f^1{}_{5,4} = P_4 - \text{ЕК}_4 + f^{\max}{}_{6,5} = 25 - 17 + 0 =$ $= 8;$ $f^2{}_{5,4} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_4 + f^{\max}{}_{6,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 0 = 10.$
ЕТАП 4. t = 1 рік $f^1{}_{4,1} = P_1 - \text{ЕК}_1 + f^{\max}{}_{5,2} = 37 - 11 + 20 =$ $= 46;$ $f^2{}_{4,1} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_1 + f^{\max}{}_{5,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 26 = 36.$	***ЕТАП 4. t = 2 роки*** $f^1{}_{4,2} = P_2 - \text{ЕК}_2 + f^{\max}{}_{5,3} = 33 - 13 +$ $+ 14 = 34;$ $f^2{}_{4,2} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_2 + f^{\max}{}_{5,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 26 = 36.$
ЕТАП 4. t = 3 роки $f^1{}_{4,3} = P_3 - \text{ЕК}_3 + f^{\max}{}_{5,4} = 29 - 15 +$ $+ 10 = 24;$ $\boxed{f^2{}_{4,3}} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_3 + f^{\max}{}_{5,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 26 = 36.$	***ЕТАП 3. t = 1 рік*** $f^1{}_{3,1} = P_1 - \text{ЕК}_1 + f^{\max}{}_{4,2} = 37 - 11 +$ $+ 36 = 62;$ $f^2{}_{3,1} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_1 + f^{\max}{}_{4,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 46 = 56.$
ЕТАП 3. t = 2 роки $\boxed{f^1{}_{3,2}} = P_2 - \text{ЕК}_2 + f^{\max}{}_{4,3} = 33 - 13 +$ $+ 36 = 56;$ $f^2{}_{3,2} = P_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_2 + f^{\max}{}_{4,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 46 = 56.$	***ЕТАП 2. t = 1 рік*** $\boxed{f^1{}_{2,1}} = P_1 - \text{ЕК}_1 + f^{\max}{}_{3,2} = 37 - 11 +$ $+ 56 = 82;$ $f^2{}_{2,1} = \text{P}_0 - \text{ЕК}_0 - V_0 + VZ_1 + f^{\max}{}_{3,1} =$ $= 40 - 10 - 20 + 0 + 62 = 72.$
ЕТАП 1. t = 0 років $\boxed{f^1{}_{1,0}} = P_0 - \text{ЕК}_0 + f^{\max}{}_{2,1} = 40 - 10 + 82 =$ $= 112.$	

5. На етапі 5 вік обладнання стане $t = 1$ рік. Згідно з розрахунками ми не повинні замінювати обладнання, бо $f^1_{5,1} > f^2_{5,1}$.

Таким чином ми визначили найбільший прибуток (112 тис. грн.) і термін заміни обладнання (на початку 4-го року – етапі 4).

Завдання. Розв'язати задачу по заміні обладнання. Статистичні дані експлуатації обладнання наведені у табл. 13.6.3, 13.6.4.

Таблиця 13.6.3

Статистичні дані експлуатації обладнання (V_0 = 15N тис. грн., VZ_t = 0 тис. грн.)

Характеристика обладнання, тис. грн.	Вік обладнання t					
	0	1	2	3	4	5
P_t, тис. грн.	$30N$+A	$27N$+2	$23N$	$20N$	$17N$	$12N$
EK_t, тис. грн.	$6N$	$8N$	$10N$	$11N$	$12N$	$13N$

Таблиця 13.6.4

Статистичні дані експлуатації обладнання (V_0 = 10N тис. грн., VZ_t = 0 тис. грн.)

Характеристика обладнання, тис. грн.	Вік обладнання t					
	0	1	2	3	4	5
P_t, тис. грн.	$20N + A$	$17N + 2$	$14N$	$12N$	$10N$	$8N$
EK_t, тис. грн.	$5N$	$6N$	$7N$	$8N$	$9N$	$10N$

Тут N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

13.7. Звільнення і найм робітників

Виробництво майже ніколи не буває рівномірно завантаженим внаслідок або сезонності робіт (сільськогосподарські роботи; підприємства по переробці сільськогосподарської продукції), або нерівномірності замовлень продукції у часі і т.п. Задача полягає у визначенні (при найменших витратах) фактичної кількості робітників по місяцях і мінімізації підсумкових витрат, пов'язаних з наймом та звільненням робітників і збитками підприємства за n місяців. Функція мети має вигляд

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} \{a|x_j - x_{j-1}| + b|x_j - m_j|\} \rightarrow \min,$$

де $a|x_j - x_{j-1}|$ – додаткові витрати на j-му місяці по найму та звільненню робітників у залежності від їх кількості; $a = 5$ – при наймі робітників, тобто якщо $x_j > x_{j-1}$; $a = 3$ – при звільненні робітників, тобто якщо $x_j < x_{j-1}$; $b|x_j - m_j|$ – додаткові витрати на j-му місяці для виробництва при відхиленні реальної кількості робітників x_j від ідеальної кількості робітників m_j у сторону збільшення або зменшення; $b = 2$ – кількість робітників більша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j > m_j$; $b = 7$ – кількість робітників менша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j < m_j$; $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ – порядковий номер місяця. При $j = 0$ нам відома початкова кількість робітників $x_0 = 3$ (табл. 13.7.1).

Дані по кількості робітників наведені у табл. 13.7.1.

Таблиця 13.7.1

Ідеальна та фактична кількість робітників

Найменування	**Кількість робітників по місяцях**			
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
m_j – ідеальна кількість робітників	-	1	3	2
x_j – фактична кількість робітників	$X0 = 3$	$X1$	$X2$	$X3$

Згідно з методом динамічного програмування при відомій початковій кількості робітників ($X0 = 3$, $j = 0$), рішення починається з кінця. Якщо відома кінцева кількість робітників, то розв'язання починається з початку. При двох відомих значеннях кількості робітників задачу можна розв'язувати як у прямому, так і у зворотному напрямках, і результат розрахунків буде однаковим.

Кількість етапів розрахунків дорівнює кількості місяців $n = 3$. На кожному j-му етапі (j-му місяці):

1. Задаються діапазоном можливої кількості робітників на попередньому (j-1)-му етапі $x_{j-1} = 0, 1, 2, 3,\ldots$ (максимальна величина x_{j-1} нам невідома, але початково вона приймається як найбільше значення ідеальної кількості робітників $m_j^{\max} = 3$ для всіх етапів).
2. Для кожного окремого значення $x_{j-1} = 0, 1, \ldots, m_j^{\max} = \text{const}$ попереднього етапу задаються зростаючою кількістю робітників даного j-го етапу $x_j = 0, 1, 2, 3,\ldots$ і враховують підсумкові витрати

$$F_j = f_j + F^*_{j+1} \to \min,$$

де f_j – витрати даного етапу внаслідок найму або звільнення робітників та відхилення їх кількості від оптимального значення m_j; F^*_{j+1} – найменші підсумкові витрати наступного (j+1)-го етапу (для кінцевого етапу $F^*_{j+1} = 0$).

3. Визначають перший мінімум функції $F_j(x_{j-1},x_j)$, бо ця функція є випуклою по відношенню до x_j, після чого збільшення x_j на даному етапі припиняємо.

Перейдемо до практичних розрахунків по етапах.

Етап Е3: $F_3 = a\left|x_3 - x_2\right| + b\left|x_3 - m_3\right| + F^*_4(x_3)$; $m_3 = 2$.

1. $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $F_3 = a\,|\,0 - 0\,| + 7\,|\,0 - 2\,| + 0 = 14$;
   $x_3 =1$, $F_3 = 5\,|\,1 - 0\,| + 7\,|\,1 - 2\,| + 0=12$;
   $x_3 = 2$, $F_3 = 5\,|\,2 - 0\,| + b\,|\,2 - 2\,| + 0=10$;
   $x_3 = 3$, $F_3 =5\,|\,3 - 0\,| + 2\,|\,3 - 2\,| + 0=17$.

2. $x_2 = 1$; $x_3 = 0$, $F_3 = 3\,|\,0 - 1\,| + 7\,|\,0 -2\,| + 0 = 17$;
   $x_3 = 1$, $F_3 = a\,|\,1 - 1\,| + 7\,|\,1 - 2\,| + 0 = 7$;
   $x_3 = 2$, $F_3 = 5\,|\,2 - 1\,| + b\,|\,2 - 2\,| + 0 = 5$;
   $x_3 = 3$, $F_3 = 5\,|\,3 - 1\,| + 2\,|\,3 - 2\,| + 0 = 12$.

3. $x_2 = 2$; $x_3 = 0$, $F_3 = 3\,|\,0 - 2\,| + 7\,|\,0 - 2\,| + 0 = 20$;
   $x_3 = 1$, $F_3 = 3\,|\,1 - 2\,| + 7\,|\,1 - 2\,| + 0 = 10$;
   $x_3 = 2$, $F_3 = a\,|\,2 - 2\,| + b\,|\,2 - 2\,| + 0 = 0$;
   $x_3 = 3$, $F_3 = 5\,|\,3 - 2\,| + 2\,|\,3 - 2\,| + 0 = 7$.

4. $x_2 = 3$; $x_3 = 0$, $F_3 = 3\,|\,0 - 3\,| + 7\,|\,0 - 2\,| + 0 = 23$;
   $x_3 = 1$, $F_3 = 3\,|\,1 - 3\,| + 7\,|\,1 - 2\,| + 0 = 13$;
   $x_3 = 2$, $F_3 = 3\,|\,2 - 3\,| + b\,|\,2 - 2\,| + 0 = 3$;
   $x_3 = 3$, $F_3 = a\,|\,3 - 3\,| + 2\,|\,3 - 2\,| + 0 = 2$;
   $x_3 = 4$, $F_3 = 5\,|\,4 - 3\,| + 2\,|\,4 - 2\,| + 0 = 9$.

5. $x_2 = 4$; $x_3 = 0$, $F_3 = 3\,|\,0 - 4\,| + 7\,|\,0 - 2\,| + 0 = 26$;
   $x_3 = 1$, $F_3 = 3\,|\,1 - 4\,| + 7\,|\,1 - 2\,| + 0 = 16$;
   $x_3 = 2$, $F_3 = 3\,|\,2 - 4\,| + b\,|\,2 - 2\,| + 0 = 6$;
   $x_3 = 3$, $F_3 = 3\,|\,3 - 4\,| + 2\,|\,3 - 2\,| + 0 = 5$;
   $x_3 = 4$, $F_3 = a\,|\,4 - 4\,| + 2\,|\,4 - 2\,| + 0 = 4$;
   $x_3 = 5$, $F_3 = 5\,|\,5 - 4\,| + 2\,|\,5 - 2\,| + 0 = 11$.

Як результат розрахунків етапу E3 отримуємо табл. 13.7.2.

Таблиця 13.7.2

Підсумкові дані E3

x_2	x_3	$F_3^*(x_2)$
0	2	10
1	2	5
2	2	0
3	3	2
4	4	4

Етап E2: $F_2 = a\left|x_2 - x_1\right| + b\left|x_2 - m_2\right| + F_3^*(x_2)$; $m_2 = 3$.

1. $x_1 = 0$; $x_2 = 0$, $F_2 = a\,|0 - 0| + 7|0 - 3| + 10 = 31$;
   $x_2 = 1$, $F_2 = 5|1 - 0| + 7|1 - 3| + 5 = 24$;
   $x_2 = 2$, $F_2 = 5|2 - 0| + 7|2 - 3| + 0 = 17$;
   $x_2 = 3$, $F_2 = 5|3 - 0| + b|3 - 3| + 2 = 12$;
   $x_2 = 4$, $F_2 = 5|4 - 0| + 2|4 - 3| + 4 = 26$.

2. $x_1 = 1$; $x_2 = 0$, $F_2 = 3|0 - 1| + 7|0 - 3| + 10 = 34$;
   $x_2 = 1$, $F_2 = a|1 - 1| + 7|1 - 3| + 5 = 19$;
   $x_2 = 2$, $F_2 = 5|2 - 1| + 7|2 - 3| + 0 = 12$;
   $x_2 = 3$, $F_2 = 5|3 - 1| + b|3 - 3| + 2 = 12$;
   $x_2 = 4$, $F_2 = 5|4 - 1| + 2|4 - 3| + 4 = 21$.

3. $x_1 = 2$; $x_2 = 0$, $F_2 = 3|0 - 2| + 7|0 - 3| + 10 = 37$;
   $x_2 = 1$, $F_2 = 3|1 - 2| + 7|1 - 3| + 5 = 22$;
   $x_2 = 2$, $F_2 = a|2 - 2| + 7|2 - 3| + 0 = 7$;
   $x_2 = 3$, $F_2 = 5|3 - 2| + b|3 - 3| + 2 = 7$;
   $x_2 = 4$, $F_2 = 5|4 - 2| + 2|4 - 3| + 4 = 16$.

4. $x_1 = 3$; $x_2 = 0$, $F_2 = 3|0 - 3| + 7|0 - 3| + 10 = 40$;
   $x_2 = 1$, $F_2 = 3|1 - 3| + 7|1 - 3| + 5 = 25$;
   $x_2 = 2$, $F_2 = 3|2 - 3| + 7|2 - 3| + 0 = 10$;
   $x_2 = 3$, $F_2 = a|3 - 3| + b|3 - 3| + 2 = 2$;
   $x_2 = 4$, $F_2 = 5|4 - 3| + 2|4 - 3| + 4 = 11$.

Як результат розрахунків етапу E2 отримуємо табл. 13.7.3.

Таблиця 13.7.3 Підсумкові дані Е2		
x_2	x_3	$F_3^*(x_2)$
0	3	12
1	2; 3	12
2	2; 3	7
3	3	2

Етап Е1: $F_1 = a\left|x_1 - 3\right| + b\left|x_1 - 1\right| + F_2^*(x_1)$; $m_1 = 1$.

1. $x_0 = 3$; $x_1 = 0$, $F_1 = 3|0 - 3| + 7|0 - 1| + 12 = 28$;
   $x_1 = 1$, $F_1 = 3|1 - 3| + b|1 - 1| + 12 = 18$;
   $x_1 = 2$, $F_1 = 3|2 - 3| + 2|2 - 1| + 7 = 12$;
   $x_1 = 3$, $F_1 = a|3 - 3| + 2|3 - 1| + 2 = 6$;
   $x_1 = 4$, $F_1 = 5|4 - 3| + 2|4 - 1| + 5 = 16$.

Як результат розрахунків етапу Е1 отримуємо табл. 13.7.4.

Тепер для отримання оптимального рішення переміщуємось у зворотному до розрахунків напрямку – з початку у кінець:

Таблиця 13.7.4 Підсумкові дані Е1		
x_0	x_1	$F_1^*(x_0)$
3	3	6

1. Для першого етапу Е1 у табл. 13.7.4 ми отримали оптимальні (мінімальні) підсумкові витрати $F_1^*(x_0) = 6$ при фактичній кількості робітників $x_1 = 3$.
2. Для другого етапу Е2 у табл. 13.7.3 кількості робітників на першому етапі $x_1 = 3$ відповідає оптимальна кількість робітників другого етапу $x_2 = 3$, тобто кількість робітників не змінюється.
3. Для третього етапу Е3 у табл. 13.7.2 кількості робітників на другому етапі $x_2 = 3$ відповідає оптимальна кількість робітників $x_3 = 3$, тобто кількість робітників не змінюється.

Таким чином, кількість робітників на всіх трьох етапах не змінюється, а мінімальні витрати при цьому досягають $F_1^*(x_0) = 6$.

Перевіримо ці дані розрахунком:

$F_3 = a|3 - 3| + 2|3 - 1|$ + {Витрати етапу Е1 при $m_1 = 1$}
+ $a|3 - 3| + b|3 - 3|$ + {Витрати етапу Е2 при $m_2 = 3$}
+ $a|3 - 3| + 2|3 - 2|$ = {Витрати етапу Е3 при $m_3 = 2$}
= 6. {Підсумкові витрати}

Завдання. Розв'язати задачі по найму та звільненню робітників на базі даних, які наведені у табл. 13.7.5, 13.7.6.

Таблиця 13.7.5
Ідеальна та фактична кількість робітників

Найменування	Кількість робітників по місяцях j			
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
m_j– ідеальна кількість робітників	-	2	1	3
x_j – фактична кількість робітників	$X0 = 4$	$X1$	$X2$	$X3$

$a = 1{,}3N$ – при наймі робітників, тобто якщо $x_j > x_{j-1}$;
$a = N$ – при звільненні робітників, тобто якщо $x_j < x_{j-1}$;
$b = 0{,}5N$ – кількість робітників більша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j > m_j$;
$b = 1{,}6N$ – кількість робітників менша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j < m_j$;
$X0 = N$ – початкова кількість робітників.

Таблиця 13.7.6
Ідеальна та фактична кількість робітників

Найменування	Кількість робітників по місяцях j			
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
m_j – ідеальна кількість робітників	-	1	3	2
x_j – фактична кількість робітників	$X0 = 4$	$X1$	$X2$	$X3$

$a = 1{,}4N$ – при наймі робітників, тобто якщо $x_j > x_{j-1}$;
$a = N$ – при звільненні робітників, тобто якщо $x_j < x_{j-1}$;
$b = 0{,}6N$ – кількість робітників більша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j > m_j$;
$b = 1{,}8N$ – кількість робітників менша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j < m_j$;
$X0 = N$ – початкова кількість робітників.
Тут N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$.

13.8. Управління виробництвом товарів та запасами на складах

Часто підприємству вигідно виробити в один із запланованих t етапів велику кількість товарів, з яких одна частка задовольняє поточний попит, а інша зберігається на складі для задоволення попиту на наступних етапах. Але підприємство витрачає кошти як на виробництво, так і на зберігання приладів. Тому виникає проблема мінімізації підсумкових витрат за t етапів виробництва при використанні даних табл. 13.8.1.

Таблиця 13.8.1

Запас, виробництво та попит на товари

Характеристика	**Номер етапу, *t***		
	1	**2**	**3**
Запас на складі на кінець етапу, S_t	S_1	S_2	$S_3 = 0$
Виробництво товарів, x_t	x_1	x_2	x_3
Попит на етапі, P_t	1	4	2

Математична модель має вигляд

$$F = \sum_{t=1}^{3} f_t = \sum_{t=1}^{3} [(4 + 5x_t) + (1 + S_t)] \to \min;$$ – функція мети (мінімізація витрат);

де $f_t = [(4 + 5x_t) + (1 + S_t)]$ – витрати на t-му етапі; $(4 + 5x_t)$ – витрати на виробництво товарів; $(1 + S_t)$ – витрати на зберігання товарів на складах; $S_0 = 0$ – запас товарів на складі перед першим етапом; $S_t = S_{t-1} + x_t - P_t \le 0$; 2 – кількість товару, що зберігається на складі на t-му етапі (для останнього етапу $S_3 = 0$, а для усіх інших етапів $S_t \le 2$); $x_t \le 3$ – обмеження по виробничій потужності; $t = 1,3$; $x_t \ge 0$; $S_t \ge 0$; x_t, S_t – цілі числа.

Особливість розрахунків витрат, коли нічого не зберігається ($S_t = 0$) та нічого не виробляється ($x_t = 0$), полягає у тому, що постійні витрати зберігають своє ненульове значення:

1. Хоча на складах обладнання не зберігається, але продовжуються витрати на заробітну плату комірникам, на амортизацію приміщень, обладнання та ін.
2. Хоча нічого не виробляється, але продовжуються витрати на заробітну плату робітникам, на амортизацію і збереження приміщень та обладнання, огляди та ін.

При розрахунках ми переміщуємося з останнього етапу t = 3 на перший етап t = 1. На кожному етапі ми розраховуємо суму витрат даного етапу на виробництво та зберігання плюс мінімальні підсумкові витрати наступного етапу f^*_{t+1} (для t = 3 вважаємо $f^*_4 = 0$, бо всі витрати за межами визначеного терміну не розглядаються).

Етап t = 3. $P_3 = 2$; $f_3 = (4+5x_3)+[1+(S_2+x_3-P_3)]+f_4^*(S_3)$;

$S_3 = S_2 + x_3 - P_3 = 0.$

Тут $f^*_4(S_3) = 0$, бо мінімальні підсумкові витрати 4-го, наступного, етапу не розглядаються, тобто усі витрати за межами періоду, що розглядається, вважаються рівними нулю і не враховуються.

Розрахунки наведені у табл. 13.8.2.

Таблиця 13.8.2

Розрахунок підсумкових витрат етапу t = 3. Попит P_3 = 2. На складі зберігається S_3 = 0 товарів

S_2	x_3			
	0	**1**	**2**	**3**
0			14+1+0	
1		9+1+0		
2	4+1+0			

У верхньому лівому кутку таблиці комірки не заповнені, бо ***вони не забезпечують попит етапу,*** тобто те, що зберігалось на складі з попереднього етапу (S_2), плюс вироблена на третьому етапі кількість товару (x_3) не задовольняють існуючий попит P_3 = 2. Таким чином, незаповнені комірки у верхньому лівому кутку для всіх етапів задовольняють умові $S_{t-1} + x_t < P_t$.

У нижньому правому кутку не заповнюються комірки, які ***не забезпечують умову зберігання товару на складі*** для наступного етапу (на складі дозволяється: зберігати "0" одиниць товару для останнього етапу та "2 " одиниці товару для усіх інших етапів). Тобто для комірок нижнього правого кутка задовольняється умова

$$S_{t-1} + x_t - P_t \begin{cases} = 0 & -\text{для останнього етапу;} \\ \le 2 & -\text{для всіх інших етапів.} \end{cases}$$

Таким чином, після останнього етапу t = 3 склад повинен бути порожнім, тобто повинна виконуватись рівність "S_3 = 0". Це є особливою вимогою лише для останнього етапу (на попередніх етапах розрахунки виконуються на основі нерівності “$S_t \le 2$”).

Витрати у заповнених комірках складаються з трьох цифр: 1-ша цифра вказує витрати на виробництво товару, 2-га цифра вказує витрати на зберігання товару, 3-я цифра вказує найменші витрати насту-

Етап t = 2. $P_2 = 4$; $f_2 = (4 + 5x_2) + [1 + (S_1 + x_2 - P_2)] + f_3^*(S_2)$, $S_2 = S_1 + x_2 - P_2$.

Розрахунки наведені у табл. 13.8.4 для $x_2 = 0...3$.

Таблиця 13.8.3

Мінімальні витрати етапу $t = 3$

S_2	x_3^*	$f_3^*(S_2)$
0	2	15
1	1	10
2	0	5

Таблиця 13.8.4

Розрахунок підсумкових витрат етапу $t = 2$. Попит $P_2 = 4$.

На складі може зберігатись $S_2 \le 2$ шт. товарів

S_1	x_2			
	0	**1**	**2**	**3**
0				
1				$19 + 1 + 15^*$
2			$14 + 1 + 15^*$	$19 + 2 + 10$

У верхньому лівому кутку таблиці не заповнені комірки, для яких $S_{t-1} + x_t < P_t$ (вони не забезпечують попит етапу). У правому нижньому кутку повинні не використовуватись комірки, для яких $S_{t-1} + x_t - P_t > 2$, у зв’язку з обмеженою кількістю місць зберігання на складі (у даному випадку комірки у правому нижньому кутку не розглянуті через обмеження по виробництву товарів $x_2 \le 3$).

Мінімальні витрати наступного $t = 3$ етапу $f_3^*(S_2)$ визначаються по табл. 13.8.3 для $S_2 = S_1 + x_2 - P_2$. Наприклад, для $S_1 = 2$ та $x_2 = 3$ отримуємо $S_2 = S_1 + x_2 - P_2 = 2 + 3 - 4 = 1$ і з табл. 13.8.3 отримуємо $f_3^*(S_2) = 10$.

При цьому для кожного рядка визначаємо мінімальні витрати. За даними табл. 13.8.4 з позначених мінімальних витрат складається табл. 13.8.5.

Таблиця 13.8.5

Мінімальні витрати етапу $t = 2$

S_1	x_2^*	$f_2^*(S_1)$
0	-	-
1	3	35
2	2	30

Етап t = 1. $P_1 = 1$; $f_1 = (4+5x_1)+[1+(S_0+x_1-P_1)]+f_2^*(S_1)$,
$S_1 = S_0 + x_1 - P_1$.

Розрахунки наведені у табл. 13.8.6. При цьому для кожного рядка визначаємо мінімальні витрати.

Таблиця 13.8.6

Розрахунок підсумкових витрат етапу t = 1. Попит P_1 = 1.

На складі може зберігатись $S_2 \leq$ 2 шт. товарів

S_0	x_1			
	0	**1**	**2**	**3**
0		9 + 1 + (–)	14 + 2 + 35*	19 + 3 + 30
1	4 + 1 + (–)	9 + 2 + 35*	14 + 3 + 30	
2	4 + 2 + 35*	9 + 3 + 30		

У табл. 13.8.6 значення “(–)” у розрахунках указують, що така можливість вироблення та зберігання продукції не припускається згідно з даними табл. 13.8.5. За даними табл. 13.8.6 складається табл. 13.8.7.

Основні рішення знаходимо з підсумкових таблиць із мінімальними витратами шляхом переміщення з початкового етапу t = 1 до кінцевого етапу t = 3:

Таблиця 13.8.7

Мінімальні витрати етапу t = 1

S_0	x_1^*	$f_1^*(S_0)$
0	2	51
1	1	46
2	0	41

- Етап 1, табл. 13.8.7. Якщо початковий запас на складах S_0 = 0, то ми повинні виробити x^*_1 = 2 товару і задовольнити попит P_1 = 1. Таким чином, склади на початок наступного етапу будуть мати S_1 = 1.
- Етап 2, табл. 13.8.5. Початковий запас на складах S_1 = 1, ми повинні виробити x_2^* = 3 товару і задовольнити попит P_2 = 4. Таким чином, склади у нас на початок наступного етапу будуть мати S_2 = 0 товару.
- Етап 3, табл. 13.8.3. Початковий запас на складах S_2 = 0. Ми повинні виробити x_3^* = 2 товару і задовольнити попит P_3 = 2. Таким чином, склади у нас будуть порожніми у кінці етапу t = 3.

Таким чином, мінімальні підсумкові витрати за три періоди $F = 51$, а вимоги до виробництва товарів та його зберігання мають вигляд: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$; $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$.

Завдання. Розв'язати задачі по управлінню виробництвом товарів та запасами на складах (табл. 13.8.8, 13.8.9).

Таблиця 13.8.8

Запас, виробництво та попит на товари

Характеристика	**Номер етапу, *t***			
	1	**2**	**3**	**4**
Запас на складі на кінець етапу, S_t	S_1	S_2	S_3	$S_4 = 0$
Виробництво товарів, x_t	x_1	x_2	x_3	x_4
Попит на етапі, P_t	3	1	5	2

- Витрати на виробництво товарів $CV_t = N(1 + 0{,}2x_t)$.
- Витрати на зберігання товарів на складах $CZ_t = N(0{,}3 + 0{,}2S_t)$.
- Обмеження по виробництву $x_t \le 4$.
- Обмеження по кількості місць на складах $S_{t-1} + x_t - P_t \le 3$.

Таблиця 13.8.9

Запас, виробництво та попит на товари

Характеристика	**Номер етапу, *t***			
	1	**2**	**3**	**4**
Запас на складі на кінець етапу, S_t	S_1	S_2	S_3	$S_4 = 0$
Виробництво товарів, x_t	x_1	x_2	x_3	x_4
Попит на етапі, P_t	3	1	7	5

- Витрати на виробництво товарів $CV_t = N(3 + 0{,}4x_t)$.
- Витрати на зберігання товарів на складах $CZ_t = N(0{,}4 + 0{,}5S_t)$.
- Обмеження по виробництву $x_t \le 4$.
- Обмеження по кількості місць на складах $S_{t-1} + x_t - P_t \le 4$.

Тут N – порядковий номер студента у групі.

13.9. Методи мережевого управління та планування

13.9.1. Елементи мережевого графа. Термінові параметри

Припустимо, що ми маємо виконати деякий проект, який розбивається на $i = 1...m$ робіт тривалістю T_i з потребами у нормах ресурсів R_i. Під нормами ресурсів R_i у даному випадку розуміємо кількість працівників, яку потрібно мати на одну добу для виконання роботи (у загальному плані це може бути сума грошей або кількість верстатів сумісно з працівниками, яку потрібно мати на добу, тощо). Норми ресурсів визначають із довідників або з досвіду. Нумерують роботи, починаючи з початку виконання проекту і наближуючись до кінця. Нам також відома послідовність виконання робіт: вона позначається переліком робіт, що можуть починатися після виконання даної i -ї роботи (табл. 13.9.1).

Таблиця 13.9.1

Дані для виконання проекту

Номер роботи i=1...m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Тривалість роботи T_i, діб	1	4	2	5	7	8	3	2	5	6
Норма ресурсів R_i, одиниць на добу (людей/добу)	6	8	9	20	4	2	15	21	5	8
Після виконання i-ї роботи можна виконувати такі роботи	5	6,7	8	5	9	9	8	10	-	-

При виконанні розрахунків використовується мережевий граф (рис. 13.9.1), у якому вершини відповідають *подіям* $П_J$ та $П_{J+1}$, а дуги – *роботам* "i".

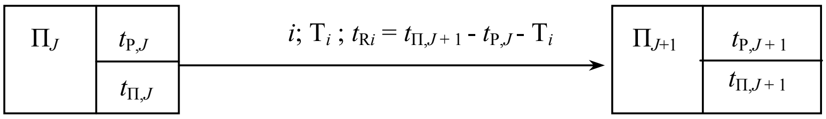


Рис. 13.9.1. Елементи мережевого графа

Події-вершини $П_J$ графа визначають завершення всіх робіт, *які входять у подію.* Події нумеруються $j = 0...N$. Нумерація подій починається з початкової події $П_0$ графа (подія при $j = 0$ – початок робіт проекту), переміщуючись до завершальної події $П_N$ (подія при $j = N$ означає завершення проекту). З кожною подією $П_J$ пов'язуються терміни:

t_{PJ} – ранній термін виконання події;

$t_{ПJ}$ – пізній термін виконання події.

Дуга-робота "i" відображається безперервною лінією. Робота "i", що не вимагає ні часу, ні ресурсів на її виконання, відображається пунктирною лінією. Дуга-робота "i" з'єднує дві події (наприклад, $П_J$ та $П_{J+1}$) і має напрямок, який спрямований від попередньої події у проекті $П_J$ до наступної $П_{J+1.}$ *Подія $П_J$ відбувається, якщо виконані всі дуги-роботи, які входять у подію $П_{J.}$* Дуга-робота, що виходить із події, може починатись лише тоді, коли відбувається подія, з якої вона виходить (тобто виконуються всі попередні роботи). Дуги-роботи між початковою подією $П_J$ і наступною подією $П_{J+I}$ позначаються трьома цифрами:

– перша цифра – номер роботи $i = 1...m$;
– через крапку з комою друга цифра – тривалість роботи (витрати часу T_i на виконання роботи: сюди входять терміни на виконання роботи працівниками, на затвердіння бетону, на звітності, на отримання потрібних матеріалів тощо);
– через крапку з комою третя цифра – резерв часу на виконання i-ї роботи $t_{Ri} = t_{П,J+1} - t_{P,J} - T_i$, де $t_{П,J+1}$ – пізній термін виконання наступної події $П_{J+1}$, куди дуга-робота входить; $t_{P,J}$ – ранній термін виконання попередньої події $П_{J,}$ звідки дуга-робота виходить; T_i – тривалість виконання i-ї роботи.

Таким чином, кожна робота має два терміни (ранній $t_{P,J}$ та пізній $t_{П,J}$) початку роботи та два терміни (ранній $t_{P,J+1}$ та пізній $t_{П,J+1}$) кінця роботи. Час, за який повинна бути виконана робота, дорівнює ($t_{П,J+1} - t_{P,J}$), а резерв часу на виконання i-ї роботи $t_{Ri} = t_{П,J+1} - t_{P,J} - T_i$.

13.9.2. Виявлення кількості подій

Спочатку визначимо кількість подій у проекті, дані для якого показані в табл. 13.9.1.

Згідно з табл. 13.9.1 у кінцеву подію $П_6$ входять роботи 9 та 10, бо після них не виконується жодна робота. Аналогічним чином у рядку "Після виконання i-ї роботи можна виконувати такі роботи" табл. 13.9.1 не знаходяться роботи 1, 2, 3, 4. Це означає, що перед роботами 1, 2, 3, 4 не знаходиться у проекті жодна інша робота. Тобто роботи 1, 2, 3, 4 виходять з початкової події $П_0$, бо вони не починаються з завершенням будь-якої іншої роботи.

Визначити кількість подій у проекті можна або шляхом переміщення з початку проекту у кінець, або навпаки – шляхом переміщення з кінця проекту у його початок.

Нумерацію подій зручніше виконати після визначення загальної кількості подій, якщо події визначаються при переміщенні з кінця у початок. Тому краще почнемо нумерацію подій, переміщуючись з початку проекту у його кінець і позначаючи номери подій та відповідні номери робіт.

Початок проекту позначимо як подію $П_0$. Як ми визначили раніше, з цієї події $П_0$ починаються роботи 1, 2, 3, 4. Але будь-які роботи повинні починатися і закінчуватись подією. Тому кінці робіт, які виходять з події $П_0$, теж позначимо подіями $П_1$, $П_2$, $П_3$ (нумерація довільна). Згідно з табл. 13.9.1 роботи 1 та 4 повинні завершуватись перед виконанням роботи з однаковим номером – 5. Тому роботи 1 та 4 завершуються однаковою подією $П_1$.

Після виконання робіт за номерами i = 1 та i = 4 відбувається подія $П_1$, і згідно з табл. 13.9.1 може починатись робота за номером i = 5. Тому з події $П_1$ бере початок робота i = 5, яка завершується подією $П_4$ (значення термінів t_{Pj}, t_{Rj}, $t_{Пj}$ у мережевому графі спочатку не заповнюємо, бо поки що ми визначаємо лише самі події).

Після виконання роботи за номером i = 2 відбувається подія $П_2$, і згідно з табл. 13.9.1 можуть починатися роботи за номером i = 6 та i = 7. Тому з події $П_2$ беруть початок робота i = 6 (вона завершується подією $П_4$) та робота i = 7 (вона завершується подією $П_3$).

Після виконання робіт за номерами i = 3 та i = 7 відбувається подія $П_3$, і згідно з табл. 13.9.1 може починатися робота за номером i = 8. Тому робота i = 8 бере початок з події $П_3$ і завершується подією $П_5$.

Робота i = 9 згідно з табл. 13.9.1 може починатись після завершення робіт i = 5 та i = 6; тому робота i = 9 починається з події $П_4$ і завершується кінцевою подією $П_6$.

Робота i = 10 згідно з табл. 13.9.1 може починатись після завершення роботи i = 8; тому робота i = 10 починається з події $П_5$ і завершується кінцевою подією $П_6$.

Ми отримали сім подій $П_0…П_6$, які з'єднані роботами i = 1...10. На отриманому графі для кожної i -ї роботи за даними табл. 13.9.1 позначаємо додатково через крапку з комою другу цифру роботи – її тривалість T_i.

На цьому початкова побудова мережевого графа рис. 13.9.2 завершується.

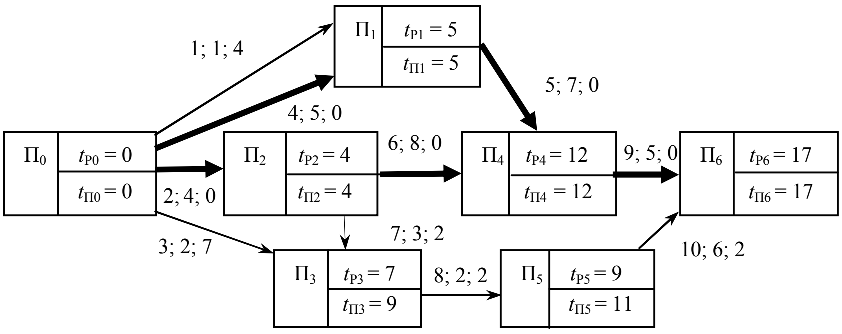


Рис. 13.9.2 .Визначення мережевого графа і подій у проекті

13.9.3. Визначення ранніх термінів виконання подій

Після визначення мережевого графа рис. 13.9.2 починаємо розраховувати *ранні терміни виконання подій* $t_{Pj.}$ Визначення цих термінів починається з *початкової події П*$_0$ графа при j = 0, переміщуючись до завершальної події П$_6$ і розглядаючи лише вхідні дуги-роботи для події.

Подія П$_0$. Для всіх початкових (вхідних) подій приймається ранній термін виконання рівним $t_{P0} = 0$.

Подія П$_{1.}$ Згідно з рис. 13.9.2 подія П$_1$ може відбутись і може починатись робота 5$\boxed{7}$, якщо виконані обидві вказані роботи (1 $\boxed{1}$ та 4 $\boxed{5}$). Тому ранній термін виконання події П$_1$ дорівнює найбільшому терміну при виконанні двох вказаних робіт. Тобто $t_{P1} = 5$, що і позначаємо у події П1 мережевого графа.

Подія П$_2$ відбувається після завершення лише однієї роботи 2 $\boxed{4}$. Тому ранній термін виконання події П$_2$ дорівнює $t_{P2} = 4$.

Подія П$_3$ відбувається після завершення двох робіт: 3 $\boxed{2}$ та 7 $\boxed{3}$. Робота 7 $\boxed{3}$ виконується після події П$_2$ з раннім терміном виконання t_{P2} = 4. Тому підсумковий термін виконання роботи 7 $\boxed{3}$ дорівнює (t_{P2} + 3) = (4 + 3) = 7. З отриманих термінів завершення вказаних двох робіт треба обрати найбільший, який і визначає ранній термін виконання події П$_3$, тобто $t_{P3} = 7$.

Подія П$_4$ відбувається після завершення двох робіт: 5 $\boxed{7}$ та 6 $\boxed{8}$. Робота 5 $\boxed{7}$ виконується після події П$_1$ з раннім терміном виконання t_{P1} = 5. Тому підсумковий термін виконання роботи 5 $\boxed{7}$ дорівнює (t_{P1} + 7) = (5 + 7) = 12, у той час як підсумковий термін виконання роботи 6 $\boxed{8}$

відповідно дорівнює ($t_{Р2}$ + 8) = (4 + 8) = 12. З цих двох термінів треба обрати найбільший, який і визначає ранній термін виконання події $П_4$. В даному випадку ці терміни однакові, і тому ранній термін виконання події $П_4$ дорівнює $t_{Р4} = 12$.

Подія $П_5$ відбувається після завершення роботи 8 $\boxed{2}$ і після події $П_3$ з раннім терміном виконання $t_{Р3} = 7$. Тому ранній термін виконання події $П_5$ дорівнює $t_{Р5} = t_{Р3} + 2 = 7 + 2 = 9$.

Подія $П_6$ відбувається після завершення двох робіт: 9 $\boxed{5}$ та 10 $\boxed{6}$. Але робота 9 $\boxed{5}$ виконується після події $П_4$ з $t_{Р4} = 12$, що викликає більше підсумкове значення раннього терміну виконання події $П_6$. Тому ранній термін виконання події $П_6$ дорівнює $t_{Р6} = t_{Р4} + 5 = 12 + 5 = 17$.

13.9.4. Визначення пізніх термінів виконання подій

Визначення пізніх термінів виконання робіт $t_{Пj}$ починаємо з *кінцевої події $П_6$*, переміщуючись проти напрямків вхідних дуг-робіт до початкової події $П_0$.

Подія $П_6$. Для кінцевої події вважається, що $t_{Пj} = t_{Рj}$. У даному випадку $t_{П6} = t_{Р6} = 17$, що ми і помічаємо у мережевому графі рис. 13.9.2.

Подія $П_5$. Пізній час виконання події $П_5$ визначається як різниця між пізнім терміном завершення кінцевої події $П_6$ та тривалістю $T_{10} = 6$ виконання роботи $i = 10$. Тобто пізній термін виконання події $П_5$ дорівнює $t_{П5} = t_{П6} – 6 = 17 – 6 = 11$. Ми бачимо, що ранній термін виконання події $П_5$ (тобто ранній термін початку виконання роботи $i = 10$) дорівнює $t_{Р5} = 9$, а розрахований пізній термін виконання цієї ж події (тобто можливий пізній термін початку виконання роботи $i = 10$) дорівнює $t_{П5} = 11$. Це означає, що робота $i = 10$ має резерв часу на її виконання. Дійсно, якщо робота $i = 10$ почнеться у ранній термін часу $t_{Р5} = 9$, то вона завершиться у час ($t_{Р5} + T_{10}$) = (9 + 6) = 15, що менше визначеного терміну завершення проекту "17" діб. Якщо ж робота $i = 10$ почнеться у пізній термін часу $t_{П5} = 11$, то вона завершиться у час ($t_{П5} + T_{10}$) = (11 + 6) = 17, що не суперечить визначеному терміну завершення проекту у "17" діб. Таким чином, початок роботи $i = 10$ може переміщуватись у часі у межах від 9 до 11 доби включно, і це не буде негативно впливати на термін завершення проекту.

Подія $П_4$ має пізній термін виконання роботи $t_{П4} = t_{П6} – 5 = 17 – 5 = 12$.

Подія $П_3$ має пізній термін виконання роботи $t_{П3} = t_{П5} – 2 = 11– 2 = 9$.

Подія $П_2$ має пізній термін виконання роботи $t_{П2} = t_{П3} – 3 = 9 – 3 = 6$ (якщо розглядати роботу 7; $\boxed{3}$ від події $П_3$) та $t_{П2} = t_{П4} – 8 = 12 – 8 = 4$

(якщо розглядати роботу 6; $\boxed{8}$ від події $П_4$). Серед цих термінів обираємо *найменше значення.* Це означає, що у зворотному напрямку ми теж враховуємо вплив лише найдовшого терміну виконання роботи; віднімання цього найдовшого терміну і дає нам найменше значення $t_{П2}$. Таким чином, пізній термін виконання роботи, який записується у мережевий граф для події $П_2$, дорівнює $t_{П2} = t_{П4} – 8 = 12 – 8 = 4$.

Подія $П_1$ має пізній термін виконання роботи $t_{П1} = t_{П4} – 7 = 12 – 7 = 5$.

Подія $П_0$ має пізній термін виконання роботи $t_{П0} = t_{П1} – 1 = 5 – 1 = 4$; $t_{П0} = t_{П1} – 5 = 5 – 5 = 0$; $t_{П0} = t_{П2} – 4 = 4 – 4 = 0$; $t_{П0} = t_{П3} – 2 = 9 – 2 = 7$. Серед цих значень обираємо найменшу величину $t_{П0} = 0$, яку і записуємо у мережевий граф.

На цьому визначення ранніх та пізніх термінів виконання подій завершується.

13.9.5. Критичний шлях. Критичні роботи та події. Виконання мережевого та лінійного графіка

Для визначення критичного шляху розраховуємо і вписуємо у мережевий граф для дуг-робіт третю цифру – резерв часу на виконання кожної роботи $t_{Ri} = t_{П,J+1} – t_{P,J} – T_i$, де $t_{П,J+1}$ – пізній термін виконання наступної події $П_{J+1}$ (кінця i-ї роботи); $t_{P,J}$ – ранній термін виконання попередньої події $П_J$ (початку i-ї роботи); T_i – тривалість виконання i-ї роботи. Ті роботи, які викликають $t_{Ri} = t_{П,J+1} – t_{P,J} – T_i = 0$, створюють *критичний шлях* – це шлях з найбільшою тривалістю виконання. Роботи і події критичного шляху звуться *критичними роботами і подіями* (критичні роботи показані на мережевому графі жирними лініями). На цьому виконання мережевого графа завершується. Критичний шлях *не бажано позначати по подіях* з однаковими раннім та пізнім термінами виконання, бо, як видно з рис. 13.9.2, робота “1, 1, 4” не є критичним шляхом, хоча і з’єднує події з вказаними ознаками.

Мережевий граф дає чітке уявлення про взаємний зв’язок робіт, але він *незручний з точки зору уявлення календарного графіка робіт.* Тому на базі мережевого графа виконують лінійний графік виконання робіт, у *якому довжина безперервної лінії дорівнює тривалості виконання робіт, а пунктирні лінії означають припустиму затримку у часі при виконанні некритичних робіт* (резерв у виконанні робіт).

1. Спочатку виконують критичний шлях, користуючись даними мережевого графа. Весь критичний шлях показаний на рис. 13.9.3 безперервними товстими лініями.

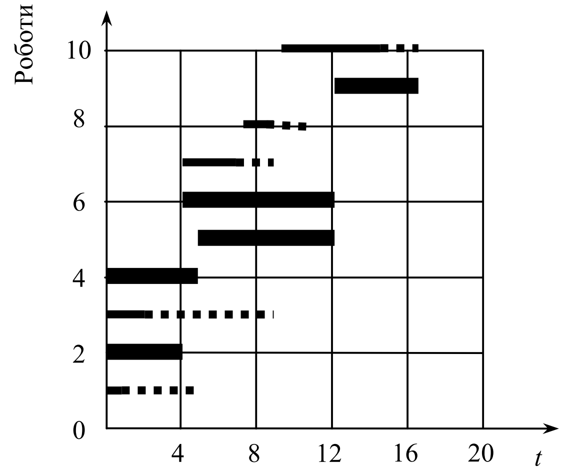


Рис. 13.9.3. Лінійний графік виконання робіт

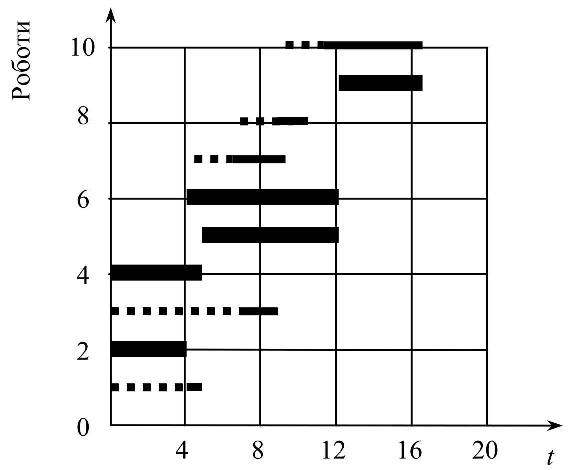


Рис. 13.9.4. Переміщення некритичних робіт у лінійному графіку

2. Потім на рис. 13.9.3 розглядають некритичні шляхи. Для них безперервними лініями позначається тривалість робіт t_j. Поча-

ток некритичної i -ї роботи відповідає часу $t_{P,J}$ – ранньому терміну виконання події у початку дуги-роботи, а завершення i-ї роботи дорівнює ($t_{P,J} + T_j$), де T_j – термін, потрібний для виконання i-ї роботи (див. рис. 13.9.1). Але ця i-та робота може бути завершена пізніше – у час $t_{П,J+1}$, який визначається по події у кінці i-ї роботи-дуги. Тут термін виконання i-ї роботи некритичного шляху t_j позначається безперервною, більш тонкою лінією, а можлива затримка у часі – пунктирною лінією. Розрахунки початків та кінців ліній некритичного шляху можна представити у вигляді табл. 13.9.2.

Таблиця 13.9.2

Координати робіт-дуг некритичних шляхів

Робота	Безперервна лінія		Пунктирна лінія	
	Початок t_{Pj}	Кінець ($t_{Pj} + t_j$)	Початок ($t_{Pj} + t_j$)	Кінець $t_{Пj}$
1	0	1	1	5
3	0	2	2	9
7	4	7	7	9
8	7	9	9	11
10	9	15	15	17

На цьому перший етап складання робіт лінійного графіка завершується. На рис. 13.9.4 графічно показана можливість переміщення початку і кінця робіт некритичних шляхів при безперервному їх виконанні у часі. Таке переміщення дає можливість перерозподіляти ресурси, пов'язані з виконанням робіт, і отримати більш рівномірне у часі завантаження роботою колективу працівників.

13.9.6. Послідовний метод розподілу обмежених ресурсів

Після отримання лінійного графіка робіт, який дає чітке уявлення про календарні терміни виконання робіт, переходять до визначення загальної потреби у ресурсах на кожний одиничний інтервал часу. Під потрібними ресурсами будемо розуміти гроші, працівників та машини, які вимірюються цілочисельно; тому і розрахунки виконуються над цілими числами.

За даними лінійного графіка виконання робіт рис. 13.9.3 та нормами ресурсів R_i (одиниць на добу) з табл. 13.9.1 ми можемо розрахувати щоденну потребу у ресурсах – у результаті отримуємо підсумкову ступінчасту криву потреби у ресурсах, згідно з якою визначаються щоденні потреби у ресурсах. Наприклад, згідно з лінійним графіком виконання робіт рис. 13.9.3 ми повинні у 1-й день виконувати роботи (1, 2, 3, 4), які згідно з даними табл. 13.9.1 вимагають підсумкового ресурсу (6 + 8 + 9 + 20) = 43 людей; на наступний день повинні виконуватись роботи (2, 3, 4) з потребами у ресурсах (8 + 9 + 20) = 37 людей. Тоді *при відсутності обмежень на щодобові ресурси* робота буде виконана вчасно за загальний термін $t_П$ = 17 діб згідно з розрахунками.

Але є й інший підхід до даної проблеми: на виконання проекту виділяється *постійна кількість робітників, яка лише у середньому задовольняє потреби на виконання робіт.* Тобто нам потрібно мати на перший день виконання робіт 43 людини, але у дійсності ми маємо всього лише 21 людину – приблизно вполовину менше. Природно, що в таких умовах ми не зможемо виконати проект за розрахований раніше термін $t_П$ = 17 діб – у дійсності цей термін збільшиться.

Нижче розглядається підхід, коли на виконання *проекту виділяються обмежені ресурси – середню кількість щодобової потреби людей,* яких потрібно розподілити по роботах.

При розподілі таких обмежених ресурсів керуються деякими *принципами:*

1. Виділяють ресурси на кожну роботу без перерв до її завершення (по принципу "почали роботу – завершили роботу").

2. Спочатку виконують найбільш важливі роботи і по змозі – усі інші точно згідно з графіком (якщо це дозволяють ресурси). Але часто буває, що ресурси не дозволяють виконувати роботи точно згідно з графіком. Тоді з робіт виділяють найважливіші, які виконують у першу чергу. Ознакою (критерієм) важливості роботи при інших рівних умовах є:
   - робота або належить до критичного шляху, або має найменший резерв часу (тобто наближається за властивостями до критичного шляху);
   - робота потребує найбільшої кількості ресурсів;
   - після виконання роботи відбувається наступна подія;
   - робота має найменший номер, тобто повинна виконуватись раніше за інші.

Для визначення розподілу ресурсів використовуються *два методи: послідовний та паралельний.* Розглянемо спочатку *послідовний метод.* Усі роботи ми розділяємо на етапи, які пов'язані з подіями проекту. Етап-подія пов'язаний з роботами, які виходять (починаються) з даної події

Спочатку у табл. 13.9.3 розраховуємо підсумкову величину ресурсів $S_{Ri} = T_i \cdot R_i$ в одиницях ресурсо-діб. Це дає нам змогу розрахувати *середнє значення потрібних ресурсів на 1 добу*

$S_{CP} = (\sum_{i=1}^{10} R_i \cdot \mathrm{T}_i)/t_{\Pi}$ = (6 + 32 + 18 + 100 + 28 + 16 + 45 + 42 + 25 + + 48) / 17 = 360 / 17 = 21,3 = 21 ресурсо-діб.

Тут підсумкове значення терміну виконання робіт t_{Π} = 17 діб ми *беремо з мережевого графа*. Результат округлюємо до найближчого цілого і порівнюємо з R_i (отримане середнє значення S_{CP} = 21 повинно бути більше або дорівнювати найбільшому R_i). Цим ми впевнюємося, що отримане середня величина ресурсів S_{CP} = 21 дозволить виконати будь-яку роботу. Якщо якась робота має більшу норму ресурсів R_i, то виконують відповідні запобіжні заходи:

– або збільшують величину S_{CP};
– або створюють спеціальні окремі резерви.

Робота розподіляється на етапи. Кожний етап стосується однієї події. В етапі передбачаються умови виконання всіх робіт події.

Переходимо тепер до розподілу ресурсів згідно з послідовним методом.

Етап 0 (стосується події $П_0$). Ми повинні на даному етапі виконати роботи (1, 2, 3, 4), які згідно з даними табл. 13.9.3 вимагають підсумкового ресурсу (6 + 8 + 9 + 20) = 43 людей, що неможливо, бо як ресурси ми маємо всього 21 працівника. Тому виділяємо роботу критичного шляху i = 4, яка потребує найбільшої кількості ресурсів, і виконуємо її. Виконувати якісь інші роботи ми не можемо – не вистачає ресурсів. Після завершення роботи i = 4 починаємо роботу критичного шляху i = 2, а також за одну добу виконуємо роботу i = 1 (щоб надати можливість відбутися події $П_1$). Після виконання роботи i = 1 починаємо і завершуємо за дві доби роботу i = 3. Таким чином, робота етапу події $П_0$ завершується на 9-ту добу, у той час як згідно з мережевим графом та лінійним графіком роботи події $П_0$ повинні завершуватись на 5-ту добу при наявності необмежених ресурсів.

Етап 1 (стосується події $П_1$). Цей етап може виконуватись після завершення робіт i = 1 та i = 4, тобто згідно з даними табл. 13.9.3 – з 7-ї доби. Ресурси дозволяють із цього терміну виконувати критичну роботу i = 5 події $П_1$.

Далі для інших етапів-подій порядок виконання робіт визначається аналогічним чином, як це показано у табл. 13.9.3. Отриманий розподіл ресурсів може переглядатися з точки зору покращення розподілу ресурсів та зменшення терміну виконання проекту.

Таблиця 13.9.3

Послідовний метод розподілу ресурсів при наявності постійної кількості людей (21 працівник)

Етап-подія		**$П_0$**				**$П_1$**	**$П_2$**		**$П_3$**	**$П_4$**	**$П_5$**
Номер роботи =*1...m*		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тривалість роботи T_i, діб		1	4	2	5	7	8	3	2	5	6
Норма ресурсів R_i, одиниць на добу (людей /добу)		6	8	9	20	4	2	15	21	5	8
Підсумкова величина ресурсів S_{Ri}, одиниці ресурсо-діб (людино-діб)		6	32	18	100	28	16	45	42	25	48
Календарні дати і терміни завершення етапів-подій $П_i$	1				20						
	2				20						
	3				20						
	4				20						
	5				20						
	6	6	8								
	7		8	9		4					
	8		8	9		4					
	9		8			4					
	10					4	2	15			
	11					4	2	15			
	12					4	2	15			
	13					4	2				
	14						2				
	15						2				
	16						2				
	17						2				
	18								21		
	19								21		
	20									5	8
	21									5	8
	22									5	8
	23									5	8
	24									5	8
	25										8

Таким чином, із табл. 13.9.3 випливає, що для виконання всього комплексу робіт при наявності обмеження у ресурсах ($S_{СР}$ = 21) вимагається 25 діб на виконання проекту замість розрахованих $t_{П}$ = 17 діб.

13.9.7. Паралельний метод розподілу обмежених ресурсів

Принципи використання паралельного методу розподілу обмежених ресурсів такі:

1. Основна мета – виконати найбільший обсяг робіт *за кожну добу* з врахуванням обмеження ($S_{СР}$ = 21).
2. Ресурси розподіляються кожну добу і вважаються вільними у початку та у кінці кожної доби. Тобто у початку кожної доби: деякі роботи виконані; інші ще не починались; деякі знаходяться у стадії виконання.
3. Припускаються перерви (розриви) у виконанні робіт, якщо це дозволяється технологією виконання робіт. Тобто дозволяються відхилення від правила "почав роботу – завершуй її".
4. У розрахунок приймаються лише ті роботи, які можуть виконуватись.

На початку кожної доби керівник робіт вирішує, які роботи виконувати. При інших рівних умовах переваги на виконання роботи надаються:

1. Вже початій роботі.
2. Роботі, яка знаходиться на критичному шляху або має найменший резерв часу.
3. Роботі, яка потребує найбільшої кількості ресурсів.

Отриманий за таких умов розподіл ресурсів показаний у табл. 13.9.4. Робота виконується таким чином, щоб охопити її найбільший об'єм, але не перевищувати обмежені ресурси ($S_{СР}$ = 21).

Таблиця 13.9.4

Паралельний метод розподілу ресурсів при наявності постійної кількості людей (21 працівник)

Етап-подія		**$П_0$**				**$П_1$**	**$П_2$**		**$П_3$**	**$П_4$**	**$П_5$**
Номер роботи =*1...m*		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тривалість роботи T_i , діб		1	4	2	5	7	8	3	2	5	6
Норма ресурсів R_i , одиниць на добу		6	8	9	20	4	2	15	21	5	8
Підсумкова величина ресурсів S_{Ri}, одиниці ресурсо-діб		6	32	18	100	28	16	45	42	25	48
Календарні дати і терміни завершення етапів-подій $П_i$	1				20						
	2				20						
	3				20						
	4				20						
	5				20						
	6	6	8								
	7		8	9		4					
	8		8	9		4					
	9		8			4					
	10					4	2	15			
	11					4	2	15			
	12					4	2	15			
	13								21		
	14								21		
	15					4	2				8
	16					4	2				8
	17						2				8
	18						2				8
	19						2				8
	20									5	8
	21									5	
	22									5	
	23									5	
	24									5	
	25										

Таким чином, за рахунок використання паралельного методу розподілу обмежених ресурсів у даному випадку термін виконання робіт скорочений на 1 добу.

14. Система масового обслуговування

14.1. Загальні відомості про СМО

У системах масового обслуговування (СМО) розглядаються черги і вирішуються питання по обслуговуванню ряду (потоку) вимог від людей, приладів, подій (рис. 14.1.1).

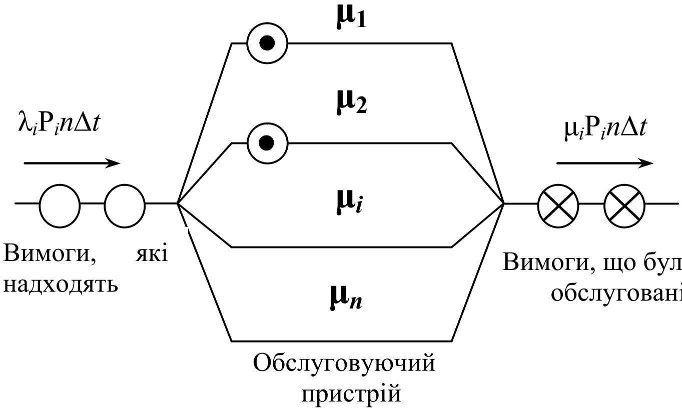


Рис. 14.1.1. Модель *n*-канальної СМО

Приклади СМО: черга у магазині (касир розглядається як прилад, що обслуговує чергу); телефонна станція (розглядається як прилад, що обслуговує потік замовлень на телефонні розмови); оператори ЕОМ (вони розглядаються сумісно з ЕОМ як прилад, що обслуговує потік інформації від приладів, підприємств та інших операторів); протиповітряна оборона (розглядається як прилад, що "обслуговує" потік "замовлень" від ворожих літаків); n робітників цеху, які можуть звертатися з вимогами інструменту до комірника ("приладу обслуговування"); n пасажирів у черзі за квитками до каси – приладу обслуговування; n запитів (вимог) електронних приладів до іншого електронного "приладу обслуговування" і т.п.

Вимоги на виконання робіт поступають у випадкові моменти часу, обслуговуючі пристрої задовольняють вимоги (обробляють їх) за випадковий термін. ***Кількість вимог*** є статистично оціненою величиною.

Таким чином, СМО має дві головні ознаки: обслуговуючий пристрій і чергу.

СМО розрізняються:

1. За конструкцією обслуговуючого пристрою: одноканальна, багатоканальна.
2. За дисципліною черги. Найбільше розповсюджено правило: перший прийшов – перший обслуговуєшся. Але у СМО розглядаються й інші варіанти обслуговування, наприклад:
   - вимоги за пріоритетом;
   - відсутність черги (якщо для обслуговування черги немає вільного каналу або якщо СМО зайнята, то вимога не задовольняється і зникає).

При аналізі СМО намагаються одержати такі характеристики:

- середню довжину черги;
- середній термін обслуговування;
- середній час, за який обслуговуючий пристрій не працює.

Для отримання математичної моделі СМО потрібно знати:

- конструкцію СМО;
- математичний опис потоку вимог, які поступають у СМО;
- опис дисципліни черги, способу обслуговування;
- математичний опис обробки вимог.

При дослідженні СМО звичайно вважають, що вхідний потік вимог підпорядковується закону Пуассона, за яким розглядають відносно рідкі події. За законом Пуассона ймовірність появи точно К подій із n за проміжок часу t

$$\mathrm{P}_n(k) = \left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=1\\ t=t_1}} = \frac{(\lambda t_1)^1 e^{-\lambda t_1}}{1!} \approx (\lambda t_1)^1 e^0 = \lambda t_1,$$

де $\lambda = 1/t_1$ – середнє число вимог (об'єктів), що надходять до СМО за одиницю часу (секунду, хвилину, годину, тиждень…); t_1 – середнє значення інтервалів часу між появами вимог, подій; k– кількість одночасних вимог.

Ймовірність появи однієї вимоги в інтервалі від t до $t + \Delta t$ дорівнює $\lambda \cdot \Delta t$ та не залежить від t, а ймовірність появи у цьому інтервалі більше однієї вимоги дуже мала (дорівнює нулю).

Обслуговування теж підкоряється експоненційному закону. Термін обслуговування окремої вимоги є випадковим з експоненційним законом розподілу і з інтенсивністю обслуговування $\mu = 1/t_2$, де t_2 – середній термін обслуговування однієї вимоги одним каналом обслуговування. Ймовірність закінчення обслуговування в інтервалі від t до $t + \Delta t$ дорівнює $\mu \cdot \Delta t$ і не залежить від t.

14.2. Рівняння для аналізу СМО

14.2.1. Основні рівняння СМО

Закон Бернуллі. В основі аналізу СМО лежить біноміальний закон Бернуллі, який дозволяє розраховувати ймовірність появи події “А” точно K разів при n незалежних іспитах (тільки для дискретних випадкових взаємно несумісних незалежних подій):

$$P_n(K) = C_n^K p^K q^{n-K} = \left(\frac{n!}{K!(n-K)!}\right) p^K q^{n-K},$$

$$C_n^K = \frac{n!}{K!(n-K)!};$$

де n – кількість незалежних іспитів; $P_n(K)$ – ймовірність появи подій “А” точно K разів при n незалежних іспитах; p – ймовірність появи однієї події “А”; $q = 1 - p$ – ймовірність протилежної події (непояви події “А”); K – кількість появи події “А” при n спостереженнях; C_n^K – сполучення по K елементів із n спостережень. Властивості сполучення: $C_n^n = C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$.

У принципі закон Бернуллі (і закони Лапласа та Пуассона, що з нього випливають) може використовуватись для визначення конструкції СМО – кількості каналів обслуговування та середнього строку обслуговування однієї вимоги.

Якщо прийняти $K = 0, 1, 2 \ldots, n$, то отримаємо повну групу взаємно несумісних подій, для якої сума відповідних ймовірностей

$$\sum_{K=0}^{n} P_n(K) = 1.$$

Значення ймовірностей для появи визначеного точного значення K подій показані у табл. 14.2.1 та на графіку рис. 14.2.1.

Таблиця 14.2.1

Біноміальний закон Бернуллі при $n = 10$, $p = 1/5$, $q = 1 - p = 4/5$

K	0	1	2	3	4	5
$P_n(K)$	0,108	0,268	0,302	0,201	0,088	0,026
K	6	7	8	9	10	
$P_n(K)$	0,0055	0,0008	0,7 E-4	0,4 E-5	0,1 E-6	

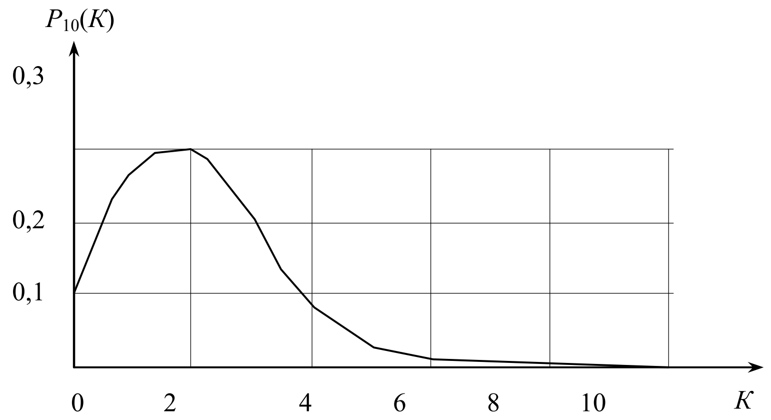


Рис. 14.2.1. Ймовірність появи точно K подій

Наприклад, для $K = 3$ отримуємо

$$P_{10} = \left(\frac{10!}{3!(10-3)!}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7 = 0{,}201.$$

На практиці значно частіше вимагається визначити оцінку ймовірності того, що подія "A" відбудеться у межах $K_1 \ldots K_2$. Це дорівнює площі від функції густини ймовірності появи події "A". Для взаємно незалежних подій з цією метою можна використовувати суми ймовірностей, наприклад:

$$P_{10}(0 \le K \le 3) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) =$$

$$= 0{,}108 + 0{,}268 + 0{,}302 + 0{,}201 = 0{,}879;$$

$$P_{10}(0 \le K \le 4) = 0{,}967; \quad P_{10}(0 \le K \le 5) = 0{,}993.$$

Ці дані теж можна показати у вигляді графіка рис. 14.2.2.

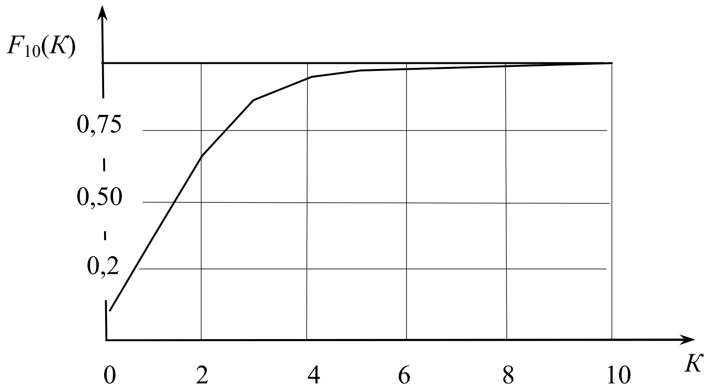


Рис. 14.2.2. Оцінка ймовірності появи 0…*К* подій

Аналіз результатів показує, що в цих умовах достатньо передбачити одночасну появу від 0 до 5 подій “А”, бо вони з′являться з ймовірністю 0,997. Ймовірність появи всіх інших подій дорівнює 1 – 0,997 = 0,007 (тобто з 1000 подій “А” лише 7 подій вийдуть за межі 0…5). Тому, щоб задовольнити попит, достатньо у вказаних умовах передбачити всього 5 каналів.

Формула Стірлінга. Формула Бернуллі дуже складна для обчислення, тому використовується формула Стірлінга

$m! = \sqrt{2\pi m} \cdot m^m e^{-m}$, у якій точність розрахунків збільшується при n → ∞.

Формула Лапласа. Подальші перетворення формули Бернуллі дозволяють отримати формулу Лапласа

$$P_n(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{\delta_K^2}{2\sigma^2}},$$

де $\sigma = \sqrt{npq}$; $\delta_K = K - (n+1)p \approx K - np$.

Із формули Лапласа випливає, що при $\delta_k = 0$ або при $K = K_0$ (тут K_0 – найімовірніша кількість подій “А”) отримуємо

$$\delta_K \approx K_0 - np = 0; \qquad K_0 = np$$

і ймовірність найімовірнішого числа подій K_0 дорівнює

$$P_n(K_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

З точністю до 3σ (тобто з ймовірністю 0,997) можна вважати, що всі події відбудуться, якщо виконується умова $K - K_0 \le 3\sigma$, або $K \le np + 3\sqrt{npq}$.

Приклад 1. Пункт зв'язку між двома містами обслуговує 1000 абонентів. Кожний абонент займає у середньому 6 хвилин за одну годину, тобто ймовірність вимоги лінії $p =$ 6 хв. / 60 хв. = 0,1; $q = 1 - p =$0,9.

Щоб задовольнити практично всі вимоги з ймовірністю 0,997, використовуємо правило 3σ":

$$K \le K_0 + 3\sigma = np + 3\sqrt{npq} = 1000 \cdot 0{,}1 + 3\sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} =$$

$$= 100 + 28{,}5 = 128{,}5,$$

тобто потрібно мати 129 каналів зв'язку.

Якщо число каналів збільшити до 150, то можна отримати кількість абонентів, які можуть обслуговуватись із ймовірністю 0,997. Для цього використовуються рівняння

$$K \le K_0 + 3\sigma, \qquad np + 3\sqrt{npq} - 150 = 0,$$

звідки

$$\sqrt{n} = \frac{-3\sqrt{pq} \pm \sqrt{9pq + 4p \cdot 150}}{2p} = \frac{-3\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9} \pm \sqrt{9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 4 \cdot 0{,}1 \cdot 150}}{2 \cdot 0{,}1} =$$

$$= \frac{-0{,}9 \pm \sqrt{0{,}81 + 60}}{0{,}2} = \frac{-0{,}9 \pm 7{,}8}{0{,}2} = 34{,}5;$$

$n = (\sqrt{n})^2 = 34{,}5^2 = 1190$ абонентів.

Приклад 2. Розрахуємо кількість місць для відвідувачів їдальні.

1. Середньостатистична кількість відвідувачів їдальні $N_2 = 90$ людей.
2. Кожний з відвідувачів у середньому займає місце за столом $\Delta t_1 = 12$ хвилин за 1 годину перерви. Тобто ймовірність вимагання однією людиною місця у їдальні p = 12 хв / 60 хв = 0,2. Припускаємо, що вимоги місць відвідувачами незалежні і тому кількість вимог може знаходитись у межах 0...N_2.
3. За формулою Лапласа найімовірніша кількість подій $K = K_0 = N \cdot p = 90 \cdot 0.2 = 18$ людей з вимогами стільців. Тобто найбільш ймовірною є поява 18 людей з вимогами. З точністю до 3σ (тобто трьох дисперсій, або з ймовірністю 0,997) можна вважати, що найбільша потрібна кількість місць K у їдальні при відомій кількості відвідувачів N_2 та ймовірності вимог місць $p = 0{,}2$ дорів-

нює $K = N_2 p + 3\sqrt{N_2 pq} = 90 \cdot 0{,}2 + 3\sqrt{90 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} =$ 18 + 11,4 = = 30 місць.

З урахуванням можливості майбутнього нарощування виробництва та збільшення кількості людей у 1,5 раза потрібно мати $K_1 = 1.5 \cdot K = 1.5 \cdot 30 = 45$ місць.

Приклад 3. Розрахуємо кількість місць для відвідувачів бібліотеки конструкторського бюро.

1. Загальна кількість співробітників $N_1 = 100$ людей.
2. Середньостатистично кількість людей-відвідувачів збільшується в обідню перерву, яка триває 1 годину. Тому кількість місць потрібно розраховувати саме по обідній перерві. Середньостатистична кількість людей – відвідувачів бібліотеки в обідню перерву дорівнює $N^1{}_2 = 0.15 \cdot N_1 = 0.15 \cdot 100 = 15$ людей. Приблизно 1/3 частина цих людей вибирає технічну літературу і працює з нею на робочому місці, тобто не вимагає місць у бібліотеці. Тоді загальна середньостатистична кількість людей, що вимагають місць у бібліотеці в обідню перерву, дорівнює $N_2 = 2/3 \cdot N^1{}_2 = 2/3 \cdot 15 = 10$ людей. Кожна людина займає місце у середньому 20 хвилин протягом обідньої перерви. Тобто ймовірність вимагання однією людиною місця $p = 20$ хв / 60 хв = 0,333.
3. За формулою Лапласа найбільша потрібна кількість місць K у бібліотеці при відомій кількості відвідувачів $N_2 = 10$ та ймовірності вимог місць $p = 0{,}333$ дорівнює $K = N_2 p + 3\sqrt{N_2 pq}$ = $= 10 \cdot 0.333 + \sqrt{10 \cdot 0{,}333 \cdot 0{,}667}$ = 3,33 + 4,47 = 8 місць.

Формула Пуассона. При великій кількості незалежних іспитів ($n >> 1$), малій ймовірності одного з іспитів $p = \lambda/n$ (тут $\lambda = \text{const}$) формула Лапласа дає помилки, і тому використовують асимтотичну формулу Пуассона

$$P_n(K) = \frac{\text{ѓЙ}e^{-\text{ѓЙ}}}{K!},$$

де $\lambda = pn = \text{const}$.

Ймовірність появи події “А” не більше за m разів

$$P_n\{K \le m\} = \sum_{K=0}^{m} \frac{\text{ѓЙ}e^{-\text{ѓЙ}}}{K!}.$$

Ймовірність того, що подія “А” при n іспитах зовсім не з’являється $P_n(0) = e^{-\lambda}$.

Формула Пуассона використовується для розрахунку різних подій. При цьому вважається, що

$$ѓЙ= pn = \frac{ѓЛ}{n_T} = \frac{ѓЛ}{n},$$

де v – середня кількість телефонних дзвінків за одиницю часу; v – середня кількість відмов пристрою за одиницю часу; v – середня кількість розпаду радіоактивних атомів за одиницю часу; v – середня кількість електронів, яка попадає на анод за одиницю часу; v – середня кількість зміни знаку при телеграфних повідомленнях за одиницю часу; $n_T = vT = n$ – число подій за досить великий період часу T; $n_t = vt$ – число подій за період часу t.

Ймовірність появи одного телефонного дзвінка, однієї відмови пристрою і т.п.

$$p = \frac{t}{T} = \frac{t}{\frac{n_T}{ѓЛ}} = \frac{ѓЛ}{n_T} = \frac{ѓЛ}{n}.$$

Постійна величина формули Пуассона $ѓЙ= pn = \frac{ѓЛn}{n} = ѓЛ,$ і формула Пуассона набуває вигляду

$$P(K, vt) = \frac{(vt)^K e^{-vt}}{K!}.$$

У довідниках наводяться значення $P(K, \lambda = vt)$.

14.2.2. Диференційні рівняння СМО

Стан S_i СМО визначається:

- в одноканальній СМО з очікуванням – довжиною черги i;
- у багатоканальній СМО з відмовами – кількістю зайнятих каналів i (у цій СМО черги немає: якщо всі канали зайняті, то вимога не обслуговується і зникає);
- у багатоканальній СМО з очікуванням – числом зайнятих каналів плюс довжиною черги.

Розглянемо досить велику кількість N таких ідентичних СМО. Позначимо через P_i ймовірність того, що СМО знаходиться на час t у стані S_i, а через ΔP_i – зміну ймовірності P_i за малий проміжок часу Δt.

У СМО вважається, що потік вимог підкоряється пуассонівському закону. Тому за малий термін Δt на жодну з N СМО не може надійти більше однієї вимоги, та жодна з N СМО за цей час не може обслужити більше за одну вимогу. Ймовірністю надходження або закінчення обслуговування двох або більшої кількості вимог за час Δt у N СМО можна знехтувати, бо ця ймовірність дуже мала (дорівнює нулю). Тобто СМО переходить із стану S_i у стан S_{i+1} або стан S_{i-1}. СМО не може перейти, наприклад, із стану S_i у стани S_{i+2} або S_{i-2}.

Тоді згідно з законом Пуассона (ймовірність появи точно k подій із n можливих за проміжок часу t) при умовах $k = 1$, $t = \Delta t$ ймовірність появи точно однієї події дорівнює

$$P_n(k) = \left[\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right] = \frac{(\lambda \Delta t)^1 e^{-\lambda \Delta t}}{1!} = \lambda \Delta t.$$

Таким чином, ймовірність надходження точно однієї події дорівнює $P_{надх} = \lambda\, \Delta t$, де λ – інтенсивність надходження вимог.

Одночасно вважається, що обслуговування теж підкоряється експоненціальному закону і тому ймовірність завершення обслуговування точно однієї події $P_{обсл} = \mu\, \Delta t$, де μ – інтенсивність обслуговування.

У результаті ми можемо скласти табл. 14.2.2 для станів S_{i-1}, S_i, S_{i+1} множини N СМО.

Таблиця 14.2.2

Взаємодія станів S_{i-1} та S_{i+1} зі станом S_i

Величина i	Стан СМО	Ймовірність стану	Кількість СМО з множини N	Складові частини зміни ймовірностей стану S_i за час Δt	Кількісний склад зміни стану S_i за час Δt
1	2	3	4	5	6
$i-1$	S_{i-1}	P_{i-1}	$P_{i-1}N$	$+\lambda_{i-1}\Delta t$ – черга; $-\mu_i\,\Delta t$ – обробка	$+(\lambda_{i-1}\Delta t)(P_{i-1}N)$; $-(\mu_i\,\Delta t)(P_i\,N)$
i	S_i	P_i	$P_i\,N$	ΔP_i	$\Delta P_i N$
$i+1$	S_{i+1}	P_{i+1}	$P_{i+1}N$	$-\lambda_i\,\Delta t$ – черга; $+\mu_{i+1}\,\Delta t$ – обробка	$-(\lambda_i\,\Delta t)(P_i\,N)$; $+(\mu_{i+1}\,\Delta t)(P_{i+1}\,N)$

У колонці 5 табл. 14.2.2 знаки "+" та "–" перед змінами ймовірностей за час Δt позначають збільшення або зменшення ймовірності стану S_i під впливом зміни довжини черги або обробки вимоги у СМО за час Δt.

У колонках 4 та 6 кількість СМО отримана як добуток ймовірностей на загальну кількість СМО. Але у колонці 6 для стану S_i прийнята кількість $\Delta P_i\ N$ (а не $\Delta P_i\ P_i\ N$). Пояснюється це тим, що тут під ΔP_i розуміють зміну ймовірності стану S_i по відношенню до всієї сукупності N СМО, а не лише тієї кількості ($P_i\ N$), що у даний момент знаходиться у стані S_i. У результаті з даних колонки 6 отримуємо рівняння для кількісної зміни станів СМО за час Δt

$$\Delta P_i\ N = +\lambda_{i-1}\Delta t P_{i-1} N - \mu_i \Delta t P_i\ N - \lambda_i \Delta t P_i\ N + \mu_{i+1}\Delta t P_{i+1} N,$$

звідки отримуємо диференційну форму

$$\frac{dP_i}{dt} = -[\lambda_i + \mu_i]P_i + \lambda_{i-1}P_{i-1} + \mu_{i+1}P_{i+1}. \qquad (14.2.1)$$

Отримане рівняння (14.2.1) можна використати для будування графа станів СМО рис. 14.2.3.

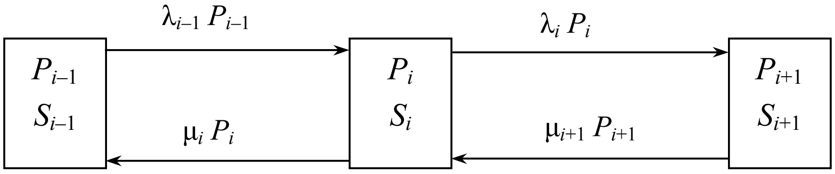


Рис. 14.2.3. Граф станів СМО

З графа станів рис. 14.2.3 можна отримати рівняння (14.2.1), а також – рівняння для початкового S_0 та кінцевого S_n станів СМО:

– якщо на рис. 14.2.3 прийняти, що $S_i = S_0$, то для початкового стану потоки $\lambda_{i-1}\ P_{i-1}$ та $\mu_i P_i$ відсутні, і тому

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1. \qquad (14.2.2)$$

– аналогічно для кінцевого стану відсутні потоки $\lambda_i\ P_i$ та $\mu_{i+1}\ P_{i+1}$, і тому

$$\frac{dP_n}{dt} = +\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_n P_n. \qquad (14.2.3)$$

Тут n+1 – загальна можлива кількість станів СМО.

Одне з рівнянь (14.2.2) та (14.2.3) є зайвим. Звичайно не розглядають рівняння (14.2.3), і замість нього використовується рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1, \qquad (14.2.4)$$

яке відображає повну групу – властивість суми ймовірностей для взаємно несумісних подій, бо події $S_0 \dots S_n$ є несумісними. Рівняння (14.2.1) – (14.2.4) можна розглядати сумісно з графом станів СМО рис. 14.2.1 і отримати граф станів СМО рис. 14.2.4.

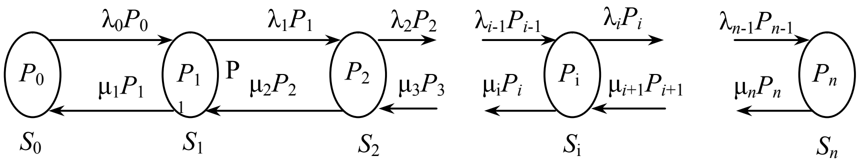


Рис. 14.2.4. Граф станів СМО S_0-S_n

З попередніх рівнянь (14.2.1) – (14.2.4) або з рис. 14.2.4 отримуємо систему рівнянь, яка у загальному вигляді описує роботу СМО:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1;$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_1) P_1 + \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -(\lambda_2 + \mu_2) P_2 + \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3;$$

. . . .

$$\frac{dP_i}{dt} = -(\lambda_i + \mu_i) P_i + \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1};$$

. . . .

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1,$$

з якої випливає інша система рівнянь:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1;$$

$$\frac{dP_0}{dt}+\frac{dP_1}{dt}=-\lambda_1 P_1+\mu_2 P_2;$$
$$\frac{dP_0}{dt}+\frac{dP_1}{dt}+\frac{dP_2}{dt}=-\lambda_2 P_2+\mu_3 P_3;$$
. . . .
$$\frac{dP_0}{dt}+\frac{dP_1}{dt}+\ldots+\frac{dP_i}{dt}=-\lambda_i P_i+\mu_{i+1} P_{i+1};$$
. . . .
$$\sum_{i=0}^{n} P_i=1,$$

Значний інтерес для СМО викликає не динаміка, а статика. У статичному режимі всі похідні дорівнюють нулю, і тому отримуємо

$$\lambda_0 P_0=\mu_1 P_1;$$
$$\lambda_1 P_1=\mu_2 P_2;$$
. . . .
$$\lambda_i P_i=\mu_{i+1} P_{i+1};$$
. . . .
$$\sum_{i=0}^{n} P_i=1,$$

де $i=\overline{1,n}$.

Рішення цієї системи рівнянь для статики має вигляд

$$P_1=\frac{\lambda_0 P_0}{\mu_1};\quad P_2=\frac{\lambda_1 P_1}{\mu_2}=\frac{\lambda_0\lambda_1 P_0}{\mu_1\mu_2};\ \ldots;\ P_i=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}P_0;\ P_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}P_0.$$

Звідси отримуємо ймовірність простоювання СМО:

$$1=\sum_{i=0}^{n} P_i=P_0\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i};\qquad P_0=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}}.$$

Приклад. Розрахуємо потоки вимог та потоки обслуговування для відвідувачів їдальні установи в обідню перерву.

1. Загальна кількість співробітників N_1 = 100 людей.
2. Середньостатистична кількість людей, що відвідує їдальню, $N_2 = 0{,}9\ N_1 = 0{,}9 \cdot 100 = 90$ людей.
3. Середній термін обслуговування одного відвідувача:
   - роздавальником – 22 сек.;
   - самообслуговування – 6 сек.;
   - касиром – 15 сек.;
   - переміщення – 5 сек.

Підсумковий термін обслуговування Δt_{Π} = 48 сек. = 0,0133 годин/людину.

4. Інтенсивність (потік) обслуговування $\mu = 1/\Delta t_{\Pi} = 1/0{,}0133 = 75$ людей/годину.
5. Обідня перерва – 1 година. Статистично середній час (проміжок часу), пов'язаний із появою нової вимоги, $\Delta t_B =$ $= 60/N_2$ = 60 хвилин/90 людей = 0,01111 хвилини/людину.
6. Інтенсивність (потік) вимог до обслуговування $\lambda = 1/\Delta t_B =$ $= 1/0{,}01111$ = 90 людей/годину.

14.3. *n*-канальна СМО з відмовами

Приклади таких СМО: телефонія (на вимогу відповідає: "зайнято"); черга з однієї вимоги (коли немає часу чекати) (рис. 14.3.1).

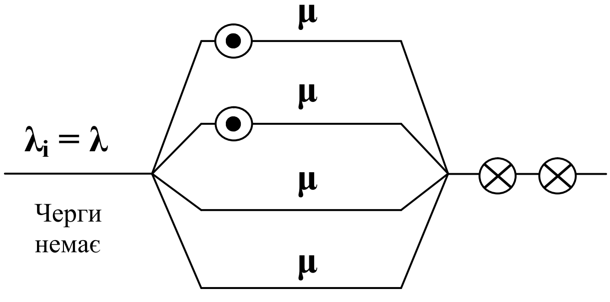


Рис. 14.3.1. *n*-канальна СМО з відмовами

Розглянемо СМО з однаковими n каналами обслуговування, з постійним потоком вимог $\lambda_i = \lambda = \text{const}$. У таких СМО вимога, що не задовольняється, зникає, черг немає, і стан СМО визначається кількістю зайнятих каналів k. У даному випадку інтенсивність надходження вимог $\lambda_i = \lambda = \text{const}$ (не залежить від стану S_i системи), а інтенсивність обслуговування вимог залежить від кількості зайнятих каналів

$$\mu_i = i \cdot \mu, \qquad i = \overline{1, n},$$

де i – кількість зайнятих каналів; μ – інтенсивність обслуговування одним каналом.

Ймовірність находження СМО у S_i-стані (одночасної роботи i каналів) знаходимо за формулою

$$P_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} P_0 = \frac{\lambda^i}{(1 \cdot \mu)(2 \cdot \mu) \ldots (i \cdot \mu)} = \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} P_0 = \frac{\rho^i}{i!} \cdot P_0,$$

де $\rho = \lambda/\mu$.

Ймовірність відсутності вимог P_0 знаходиться з виразу суми ймовірностей для повної групи взаємно несумісних подій

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1,$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\rho^i}{i!}}.$$

Ймовірність обробки вимог $P_{\text{обр}} = 1 - P_0$.

Ймовірність відмови в обслуговуванні визначається ймовірністю зайняття вимогами всіх n каналів ($i = n$)

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Середня кількість зайнятих каналів або вимог, що обслуговуються, дорівнює сумі добутків ймовірності станів на відповідну кількість зайнятих каналів

$$K = \sum_{i=1}^{n} i P_i = P_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^i}{(i-1)!}.$$

Приклад 1. Для СМО з $n = 3$; $\text{ŕН} = \dfrac{\text{ŕЙ}}{\text{ŕК}} = 2$:

1. Ймовірність відсутності вимог на обслуговування

$$P_0 = \frac{1}{1 + \text{ŕП} + \frac{1}{2}\text{ŕП}^2 + \frac{1}{6}\text{ŕП}^3} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{6}2^3} = 0{,}16\,.$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні

$$P_n = \frac{\text{ŕП}^n}{n!}P_0 = \frac{2^3 0{,}16}{3!} = 0{,}21.$$

3. Середня кількість зайнятих каналів

$$K = \sum_{i=1}^{n} iP_i = P_0\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{ŕП}^i}{(i-1)!} = P_0\,(\text{ŕН} + \text{ŕП}^2 + \frac{\text{ŕП}^3}{2!}) = 0{,}16\cdot(2 + 2^2 + \frac{2^3}{2}) = 1{,}58.$$

Приклад 2. Для СМО з $n = 3$; $\text{ŕН} = \dfrac{\text{ŕЙ}}{\text{ŕК}} = 2$; $P_n = 0{,}4$; $K = 1{,}2$.

Завдання. Скласти граф станів СМО з кількістю каналів $n = 4 + A/2$. (Тут n – ціле число; N – порядковий номер студента у групі). Для графа станів скласти диференційні рівняння, з них отримати рівняння для статичного режиму. Виконати розрахунки статичного режиму для $\text{ŕН} = \dfrac{\text{ŕЙ}}{\text{ŕК}} = A$.

14.4. Одноканальна СМО з очікуванням

Під станом S_i таких СМО розуміють загальну кількість вимог (сумісно у черзі та у каналі обслуговування). Інтенсивність надходження вимог $\lambda_i = \lambda = \text{const}$ та обробки вимог $\mu = \text{const}$ не залежить від стану СМО (рис. 14.4.1).

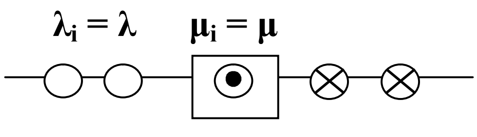


Рис. 14.4.1. Одноканальна СМО з чергою

Ймовірність знаходження СМО у S_i-стані знаходимо за формулою

$$P_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} P_0 = \frac{\lambda^i}{\mu^i} P_0 = \rho^i \cdot P_0,$$

де $\rho = \lambda/\mu$.

Ймовірність відсутності вимог P_0 знаходиться з виразу суми ймовірностей для повної групи взаємно несумісних подій $\sum_{i=0}^{n} P_i = 1$,

звідки $$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \rho^i} = \frac{1}{\dfrac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1}} = \frac{\rho - 1}{\rho^{n+1} - 1}.$$

Тут ми використовуємо відоме з математики рівняння

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n = \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1}$$

як геометричну прогресію при $\rho < 1$, яка відповідає формулі $a_i = a_1 \rho^i$ з сумою членів $S_n = a_1(\rho^n - 1)/(\rho - 1)$.

У даному випадку при розрахунках потрібно знати величину n. З цією метою можна користуватися статистичними даними, які залежать від конкретного призначення СМО та загальної кількості користувачів. Наприклад, якщо розглядати місто на 5 тисяч мешканців (5 тис. – це загальна кількість користувачів), то для кінотеатру цього міста n = 100 – статистична максимально можлива довжина черги для цього міста на найбільш напружений сеанс (максимально можлива кількість вимог місць у кінотеатрі), відносно якої і потрібно аналізувати роботу СМО (тобто роботу каси з продажу білетів).

Ймовірність обробки вимог $P_{обр} = 1 - P_0$.

Відмови в обслуговуванні немає, бо черга може бути нескінченно великою.

Середня кількість вимог, яка знаходиться у СМО (з врахуванням вимог, що знаходяться у черзі, та тієї, що знаходиться у каналі обслуговування), дорівнює сумі добутків ймовірностей станів на відповідні кількості вимог, що обслуговуються:

$$K_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} i P_i.$$

При великій величині n значення $K_\Sigma = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots = \dfrac{\rho}{1 - \rho}$.

Середня кількість вимог, що обслуговується, дорівнює нулю, якщо канал вільний, та одиниці в усіх інших випадках. Ця середня кількість вимог дорівнює сумі добутків ймовірності станів на відповідну кількість зайнятих каналів (що у всіх випадках дорівнює одиниці)

$$K_{обсл} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i = P_0 \sum_{i=1}^{n} \rho^i = P_0 (-1 + 1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n) =$$

$$= P_0 \left(-1 + \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1} \right) = P_0 \frac{\rho^{n+1} - \rho}{\rho - 1}.$$

Середня довжина черги $K_{черг} = K_{\Sigma} - K_{обсл}$.

Середній час чекання обслуговування $t_{чек} = K_{черг}/\mu$ (тому що середній термін обслуговування однієї вимоги дорівнює $\tau_{обсл} = 1/\mu$).

Завдання. Скласти граф станів СМО з кількістю вимог у черзі $n = 4 + A/2$ (тут n – ціле число; $A = \sqrt{N}$; N – порядковий номер студента у групі). Для графа станів скласти диференційні рівняння, з них отримати рівняння для статичного режиму. Виконати розрахунки статичного режиму для $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = A/3$.

14.5. Багатоканальна СМО з очікуванням

Потік вимог до СМО має постійну інтенсивність $\lambda_i = \lambda = \text{const}$, а інтенсивність обробки вимог n-канальної СМО $\mu_i = \begin{cases} i\mu \text{ при } i \le n; \\ n\mu \text{ при } i > n. \end{cases}$

Система зберігає працездатність, якщо (див. нижче) $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < n.$

Стан системи S_i визначається довжиною черги та кількістю зайнятих каналів, тобто залежить від загальної кількості вимог m. При наявності вільних каналів черги немає. У даному випадку при розрахунках потрібно знати величину m – максимально можливу кількість вимог СМО, для чого можна використати статистичні дані в залежності від умов конкретного використання СМО (рис. 14.5.1).

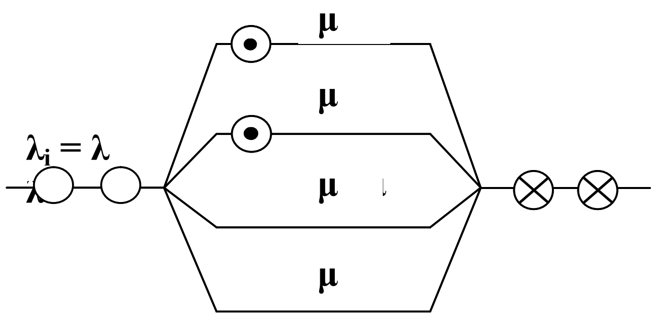


Рис. 14.5.1. *n*-канальна СМО з очікуванням

Ймовірність знаходження СМО у S_i-стані знаходимо за формулами для двох варіантів:

1. Для $i \le n$ (стан S_i визначається кількістю зайнятих каналів обслуговування)

$$P_i^{'} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} P_0 = \frac{\lambda^i P_0}{\mu\, 2\mu\, 3\mu \ldots i\mu} = \frac{\rho^i P_0}{i!}, \qquad (15.5.1)$$

де $\rho = \lambda/\mu$.

2. Для $n < i < \infty$

$$P_i^{''} = \frac{\lambda^i P_0}{[\mu\, 2\mu \ldots n\mu](n\mu)^{i-n}} = \frac{\lambda^i P_0}{n!\,\mu^n n^{i-n} \mu^{i-n}} = \frac{\lambda^i P_0}{n!\,\mu^i n^{i-n}} = \frac{\rho^i P_0}{n!\, n^{i-n}}. \quad (15.5.2)$$

Тут випадок $n < i < \infty$ розглядається з точки зору його розвитку з самого початку, починаючи з випадку, коли заповнений один канал, потім другий і так до $i > n$.

Ймовірність відсутності вимог P_0 знаходиться з виразу суми ймовірностей для повної групи взаємно несумісних подій з врахуванням двох можливих варіантів станів СМО

$$P_0 \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\rho^i}{n!\, n^{i-n}} \right] = 1, \quad P_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\rho^i}{n!\, n^{i-n}} \right],$$

де m – загальна максимально можлива кількість станів СМО (звичайно вважається, що $m > n$; якщо $m < n$, то використовується попередній аналіз багатоканальної СМО без черг); $(m - n)$ – загальна максимально можлива величина черги (якщо $m = \infty$, то і черга нескінченна).

Якщо $m = \infty$, то для знайдених $P_i^{'}, P_i^{''}$ співвідношення $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ приймає вигляд

$$P_0 \left\{ [1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}] + \frac{\rho^n}{n!}[1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots] \right\} = 1.$$

Вважаємо, що

$$1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \rho / n} = \frac{n}{n - \rho}$$

і тоді

$$P_0 = 1 / \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!\,(n-\rho)} \right].$$

Ймовірність обробки вимог $P_{\text{обр}} = 1 - P_0$.

Відмови в обслуговуванні немає, бо черга може бути нескінченно великою.

Середня кількість вимог, яка знаходиться у СМО (з врахуванням вимог, що знаходяться у черзі, та тих, що знаходяться у каналах обслуговування), дорівнює сумі добутків ймовірностей станів на відповідні кількості вимог

$$K_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} iP_i = \sum_{i=1}^{n} i\, P_i^{'} + \sum_{i=n+1}^{m} i\, P_i^{''}.$$

У даному випадку *у другому додатку* враховується не кількість зайнятих каналів (вона дорівнює "*n*"), а загальна кількість вимог, що обслуговується (вона дорівнює "*i*").

Середня кількість вимог, що обслуговується (черга СМО при цьому не розглядається), дорівнює сумі добутків ймовірності станів на відповідну кількість зайнятих каналів

$$K_{\text{обсл}} = \sum_{i=1}^{n} iP_i^{'} + n \sum_{i=n+1}^{m} P_i^{''}.$$

Середня довжина черги $K_{черг} = K_\Sigma - K_{обсл} = \sum_{i=n+1}^{m} i\, P_i^{''} - n \sum_{i=n+1}^{m} P_i^{''}$.

Середній час чекання обслуговування $t_{\text{чек}} = K_{\text{черг}}/\mu$ (тому що середній термін обслуговування однієї вимоги дорівнює $\tau_{\text{обсл}} = 1/\mu$).

Завдання. Скласти граф станів СМО з кількістю каналів $n = 4 + A/2$; кількістю вимог у черзі $m = n + A/2$ (тут n, m – цілі числа; $A = \sqrt{N}$;

N – порядковий номер студента у групі). Для графа станів скласти диференційні рівняння, з них отримати рівняння для статичного режиму. Виконати розрахунки статичного режиму для $\text{ŕН} = \frac{\text{ŕЙ}}{\text{ŕК}} = A/4$.

14.6. Системи масового обслуговування “оператори – апаратно-програмний комплекс”

Апаратно-програмний комплекс (АПК) на рис. 14.6.1 розглядається як обслуговуючий прилад по відношенню до n операторів Оп1…ОпN.

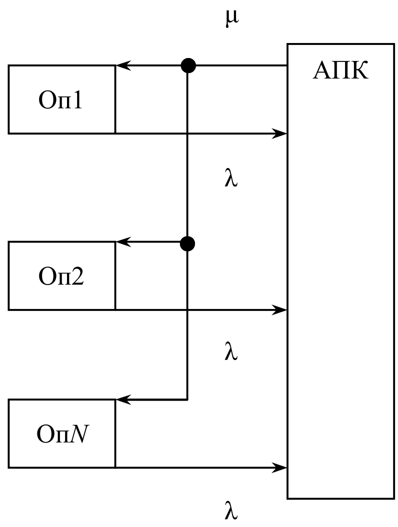


Рис. 14.6.1. СМО “оператори – АПК”

Кожний оператор у середньому витрачає час $T_{оп}$ на прийняття, обробку та передачу однієї вимоги, і тоді інтенсивність потоку завдань від одного оператора $\lambda = 1/T_{оп}$. Вважаємо, що кожний оператор вводить інформацію у свою віртуальну машину (отже, вони можуть працювати паралельно), але АПК на базі однієї ЕОМ працює у режимі розподілу часу і у середньому витрачає час $T_{ЕОМ}$ на прийняття, обробку та передачу інформації по одній вимозі. Тоді інтенсивність потоку інформації від ЕОМ до операторів дорівнює $\mu = 1/T_{ЕОМ}$. Будемо вважати, що завдання знаходиться ***у пультовій фазі,*** якщо його обробляє оператор, і у ***системній фазі,*** якщо його обробляє АПК (ЕОМ). Стан СМО S_j ($J = 0, 1, 2, \ldots, n$) визначається кількістю вимог операторів у системній фазі, що обробляє ЕОМ – АПК. Тобто ми маємо $(n + 1)$ станів S_0, $S_1, \ldots, S_n$ з ймовірністю існування $P_0, P_1, \ldots P_n$. Ці стани означають:

S_0 – у системній фазі немає жодного завдання, всі завдання знаходяться у операторів (у пультовій фазі);

S_1 – одне завдання знаходиться у системній фазі;

…………………………………………………………………

S_n – n завдань знаходяться у системній фазі.

Таким чином, ми вважаємо дану СМО як багатоканальну при введенні інформації операторами та одноканальну при обробці інформації. Відповідний граф станів СМО має вигляд рис. 14.6.2.

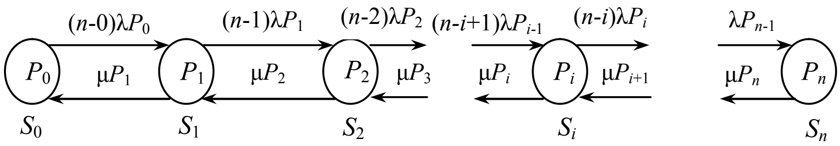


Рис. 14.6.2. Граф станів СМО *S_0-S_n*

З графу станів отримуємо рівняння

$$\frac{dP_0}{dt} = -n\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -(n-1)\lambda P_1 + \mu P_2 + n\lambda P_0 - \mu P_1;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -(n-2)\lambda P_2 + \mu P_3 + (n-1)\lambda P_1 - \mu P_2;$$

. . . .

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-1} - \mu P_n;$$

. . . .

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1,$$

з яких випливає інша система рівнянь:

$$\frac{dP_0}{dt} = -n\lambda P_0 + \mu P_1 = 0;$$

$$\frac{dP_0}{dt} + \frac{dP_1}{dt} = -(n-1)\lambda P_1 + \mu P_2 = 0;$$

$$\frac{dP_0}{dt} + \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = -(n-2)\lambda P_2 + \mu P_3 = 0;$$

. . . .

$$\frac{dP_0}{dt} + \frac{dP_1}{dt} + \ldots + \frac{dP_i}{dt} = -(n-i)\lambda P_i + \mu P_{i+1} = 0;$$

. . . .

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1,$$

У статичному режимі всі похідні дорівнюють нулю, і тому отримуємо

$$n\lambda P_0 = \mu P_1;$$

$$(n-1)\lambda P_1 = \mu P_2;$$

. . . .

$$(n-i)\lambda P_i = \mu P_{i+1};$$

. . . .

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1,$$

де $i = \overline{1, n}$.

Рішення цієї системи рівнянь для статики має вигляд

$$P_1 = \frac{n\lambda P_0}{\mu}; \quad P_2 = \frac{(n-1)\lambda P_1}{\mu} = \frac{(n-1)n\lambda^2 P_0}{\mu^2}; \ \ldots; \ P_i = \frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0.$$

Звідси отримуємо ймовірність простоювання СМО (коли кількість вимог $i = 0$):

$$1 = \sum_{i=0}^{n} P_i = P_0 \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2; \qquad P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}.$$

АПК зайнятий обробкою запитів (вимог) операторів з ймовірністю

$$P_{зан} = 1 - P_0,$$

де P_0 – ймовірність відсутності вимог.

Якщо АПК зайнятий, то він обслуговує μ програм в одиницю часу. Тому пропускна спроможність АПК АСУ

$$A = (1 - P_0)\,\mu$$

Середній потік запитів до АПК

$$A = \lambda(n - w),$$

де $(n - w)$ середня кількість операторів, що знаходяться у пультовій фазі; w – середня кількість операторів у системній фазі.

Цей потік повинен дорівнювати пропускній спроможності АПК, і тому

$$(1 - P_0)\mu = \lambda(n - w),$$

звідки середня кількість операторів у системній фазі

$$w = n - (1 - P_0)\frac{\mu}{\lambda}$$

На кожний із w запитів АПК витрачає час $T_{обсл}$. Тому середній час відгуку АПК $T_{відг} = w\, T_{обсл.}$

Розраховані дані дозволяють скласти вимоги до параметрів АПК.

15. ТЕОРІЯ ІГОР

15.1. Безкоаліційна гра. Матрична гра

Прийняття рішень по багатьох процесах у виробництві, економіці, політиці і т.д. ускладнюється тим, що вони охоплюють велику кількість суперечливих і часто протилежних інтересів для різних сторін, кожна з яких має власні можливості впливати на ці процеси. У конфлікті, що виникає, діють дві або більше ворогуючих сторін в умовах невизначеності дій супротивника. Іноді як конфліктуюча сторона діє "природа", під якою розуміють процес, аналогічний природі: природа не використає помилку ворога, не обирає найкращі рішення, а лише послідовно виконує властиві їй дії. Теорія ігор розглядає моделювання виробничих, фінансових, торгівельних операцій, військових дій (планування операцій, обрання систем зброї, охорона об'єктів від нападу, переслідування цілі та ін.), спортивних змагань та ігор (шахмат, шашок, доміно, картярських ігор), аукціонів, арбітражних суперечок, виборів у парламент. Необхідність робити хід, не знаючи відповіді супротивної сторони, надає грі інтерес та особливу гостроту.

Ми повинні скласти математичну модель, у якій треба відобразити такі компоненти конфлікту:

1. Зацікавлені сторони.
2. Інтереси сторін.
3. Можливі дії сторін з визначенням правил цих дій.

Матрична гра – це антагоністична гра гравців Г1 та Г2, які мають кінцеву кількість стратегій. Гру описують прямокутною матрицею: рядки матриці відповідають стратегіям першого гравця Г1, а колонки – стратегіям другого гравця Г2. Якщо у кожну комірку запишемо виграш гравця Г1, то отримаємо так звану матрицю гри (матрицю виграшів, платіжну матрицю).

Гра відбувається таким чином:

1. Гравець Г1 вибирає в матриці гри рядок, який є його стратегією. Ця стратегія невідома для Г2.

2. Гравець Г2 вибирає в матриці гри колонку (або власну стратегію). Ця стратегія невідома для Г1.

3. Гравець Г1 отримує від Г2 виграш, який записаний у комірці на пересіченні рядка і колонки. Якщо це число є від'ємним, то це означає програш для Г1. Якщо виграш гравця Г1 точно дорівнює програшу гравця Г2, то такі ігри звуться іграми з нульовою сумою. Вони вивчені найкраще.

У теорії ігор використовують визначені принципи гри. Наприклад, вважається, що гравці грають досить обережно, розумно, без зайвого ризику:

1. Г1 використовує принцип максиміна: для кожної стратегії обирається *найгірший для Г1* (мінімальний) виграш, і серед них вибирається *гарантований* максимальний виграш. Максимін позначається через α. Тобто гравець Г1 керується у своїх діях не можливим максимальним виграшем, а гарантованим найбільшим виграшем серед мінімальних виграшів.

2. Г2 використовує принцип мінімакса: для кожної стратегії обирається *найгірший для Г2* (максимальний) програш, і серед них вибирається *гарантований* найменший програш. Мінімакс позначається через β. Тобто гравець Г2 керується у своїх діях не можливим мінімальним програшем, а гарантованим найменшим програшем серед максимальних програшів.

Це зветься відповідно мінімаксною та максимінною стратегіями. Якщо α=β, то така гра зветься *грою з сідловою точкою:* її особливість полягає у тому, що гравці вимушені дотримуватись мінімаксної та максимінної стратегій, які є єдино можливим оптимальним способом дій для двох гравців (тобто це є розв'язанням задачі). Якщо сідлова точка не існує, то для розв'язання задачі використовується *змішана стратегія,* яка пов'язана з випадковим обранням гравцями *на кожному ході* однієї стратегії серед кількох так званих *чистих* (позначених у матриці гри) *стратегій*.

Результатом гри є або виграш, або програш.

15.2. Ризик. Авантюра. Перестрахування

У житті часто неможливо передбачити результат власних дій: ризикованого іспиту побудованої конструкції, складної операції, переходу вулиці і т.п. ***Треба ризикувати***. Досвід людства свідчить: хто вміє вчасно ризикувати, той виявляється у великому виграші. Згадаймо полководців, хірургів, випробувачів літаків, політичних діячів, власний досвід. Недарма кажуть: “Ризик – благородна справа”, “Сміливість міста бере”, “Хто ризикує – той п’є шампанське”.

Важлива риса ризику: успіх розглядається у середньостатистичному сенсі, він можливий не обов’язково у кожному конкретному випадку, а у середньому, в результаті багатьох ризикованих дій. Таким чином ***ризик – це розрахований вимушений образ дії*** в умовах невизначеності, який у середньостатистичному розумінні ***приводить до успіху***. Ризик без успіху нікого не задовольняє.

Всяке відхилення від розрахованого ризику веде або до ***авантюризму*** (що в окремому випадку також може принести успіх), або до перестрахування. У обох випадках середньостатистично це означає програш. *У* житті іноді неможливо відмовитись від ризикованих дій (війна, екстремальні ситуації, лікарська операція, робота на ринок), і завдання полягає у тому, щоб обрати шлях до успіху, розрахувати ризик

Це нагадує гру. Недарма кажуть: “Життя – це гра”. І до цього можна ще додати: “Життя – це повсякденний ризик”. І наше у цілому успішне життя є свідченням того, що ми непогано пристосувались до визначених правил гри.

15.3. Оцінка гри: “ризик + виграш + витрати”

Людина вимушена ризикувати у житті дуже часто. Але щоб ризик був виправданий, треба отримати оцінку гри, яка складається з трьох компонентів:

1. Міри ризику (ймовірності поразки або успіху, шансів на успіх або невдачу).
2. Можливої величини виграшу у грі. Ніхто не буде ризикувати без оцінки можливого виграшу, який і є основним стрижнем у грі, бо грають, щоб вигравати.
3. Можливої величини програшу у грі: матеріальне забезпечення гри плюс інші види втрат.

Розглянемо ці складові оцінки гри більш детально.

Мірою ризику є ймовірність похибки, ймовірність поразки при прийнятті рішення.

Приклад: кидаємо вгору монету. У цьому випадку ймовірність появи герба або цифри дорівнює 50%, і тому кажуть, що ризик дорівнює 50%. Ризик передбачення появи двох гербів підряд дорівнює $1 - 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$, тобто ризик збільшився з 0,5 до 0,75.

Ризикувати можна тоді, коли ризик менше за 50%, це зрозуміло. Але у дійсності виявляється, що люди йдуть на значно більший ризик. Прикладом може бути:

- Лотерея з дуже малою ймовірністю виграшу.
- Парі на змаганнях, коли гроші ставляться проти виграшу фаворита.

В чому справа? І виявляється, що справа ця пов'язана з *оцінкою людиною* величини виграшу у грі, корисності ризику для того, хто на нього йде. Людина, яка йде на ризик, розглядає та оцінює дві величини (рис. 15.3.1):

1. ***Корисність*** *Кр,* яка є функцією можливого виграшу.
2. ***Шкідливість*** *Шк,* яка є функцією можливого програшу, можливих витрат, можливої шкоди.

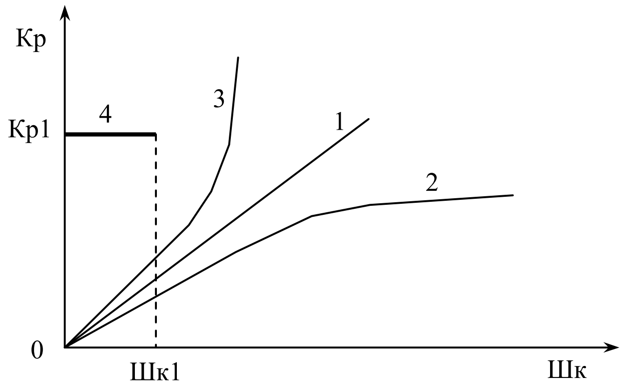


Рис. 15.3.1. Оцінка корисності Кр та шкідливості Шк ризику:
1 – розрахована розумна оцінка; 2 – обережна перестрахувальна оцінка; 3 – переоцінка корисності; 4 – цільова оцінка

На оцінку корисності Кр та шкідливості Шк ризику накладають свої особливості індивідуальні суб'єктивні якості людини:

- розум, досвід, мета;
- темперамент, характер, схильність до ризику;

– суб’єктивність оцінки ситуації;
– матеріальний стан і т.п.

У результаті ***розрахована, зважена позиція*** в оцінці корисності Кр ***може деформуватися*** і набувати таких виглядів:

1. Пряма 1 – розрахована, науково обгрунтована оцінка корисності Кр (найгірший результат: скільки витратив – стільки отримав, програшу немає).
2. Крива 2 – обережна, перестрахувальна оцінка (корисність Кр зменшується, шкідливість Шк перебільшується).
3. Крива 3 – смілива, ризикована оцінка (корисність Кр перебільшується, шкідливість Шк зменшується).
4. Ламана 4 – цільова оцінка: ризикуючий згодний іти на витрати (шкідливість) у межах “0…Шк1”, беручи до уваги можливу максимальну корисність Кр1 (ризикуючого задовольняє лише великий виграш, менший виграш його не задовольняє).

Недарма даються такі назви для відношення до ризику: легковажне, рівне, обережне, перебільшуюче, зменшуюче. При обмежених ресурсах для людини є характерним перехід на криві 2 та 3 – перебільшується або корисність, або шкідливість.

Таким чином, доходимо висновку, що людина приймає рішення з врахуванням ризику, корисності та шкідливості.

15.4. Нижня (MaxMin) α та верхня (MinMax) β ціна гри

У загальному випадку гра має такий вигляд:

1. Розглядається деяка операція (дія), у якій беруть участь дві сторони (Г1 та Г2) з протилежними інтересами.
2. Визначаються правила гри.
3. Умови гри звичайно записуються у вигляді платіжної матриці або матриці гри табл. 15.4.1, у якій показаний виграш гравця Г1 у залежності від стратегій С1i та С2j (i = 1, …, m; j = 1, …, n). Результати дії (одного ходу) сторін знаходяться у комірці L(С1i, С2j) платіжної матриці на перехресті обраних гравцями Г1 та Г2 стратегій С1i та С2j. Стратегією зветься однозначний опис дій гравця при його персональному ході. На будь-яку стратегію С1i гравця Г1 гравець Г2 відповідає своєю стратегією С2j.

4. Цілі гравців: Г1 намагається забезпечити собі максимальний виграш – максимум функції $L(C1i, C2j)$, а Г2 намагається зробити свій програш мінімальним за рахунок обрання відповідної стратегії. Таким чином, цілі гравців Г1 та Г2 є протилежними.

5. Розв'язання задачі полягає у тому, що треба знайти найкращі (оптимальні) стратегії сторін, а також очікуваний середній результат (виграш).

Вважаємо, що гравці діють без зайвого ризику і використовують мінімаксну та максимінну стратегії. Тому гравець Г1 обирає у кожному рядку мінімальне значення виграшу, яке і позначається у колонці як значення Ai для кожної стратегії С1i (наприклад, для стратегії С11 гарантований найменший виграш дорівнює "2"). Далі гравець Г1 обирає серед найменших значень Ai найбільшу величину "6", яка і визначає обрану ним стратегію С12. Стратегія С12 забезпечить гравцю Г1 гарантований мінімаксний виграш, або *нижню ціну гри* $\alpha = 6$ (у табл. 15.4.1 помічено зіркою), яка є найбільшою *гарантованою* величиною серед усіх найменших виграшів.

Таблиця 15.4.1

Платіжна матриця (матриці гри)

Стратегія Г1	**Стратегія Г2**			**Мінімальний виграш Г1, *Ai***
	С21	**С22**	**С23**	
С11	2	4	5	2
С12	9	6*	11	6*
С13	3	5	8	3
Максимальний програш Г2, *Bj*	9	6*	11	-

Аналогічно гравець Г2 обирає у кожній колонці максимальне значення програшу, яке і позначається у колонці як значення Bj для кожної стратегії С2j (наприклад, для стратегії С23 гарантований найбільший програш дорівнює "11"). Далі гравець Г2 обирає серед найбільших значень Bj найменшу величину "6", яка і визначає обрану ним стратегію С22. Стратегія С22 забезпечить гравцю Г2 ***гарантований*** максимінний програш, або ***верхню ціну гри*** $\beta = 6$ (у табл. 15.4.1 помічено зіркою), яка і є гарантованою найменшою величиною серед усіх найбільших програшів.

З табл. 15.4.1 випливає, що нерівність

$$A_i \le L(C1_i, C2_j) \le B_j; \qquad i = 1...m; \quad j = 1...n$$

дотримується при будь-яких значеннях стратегій С1*i, C2j*; тому якщо використаємо *Ai* = α та *Bj* = β, то отримуємо α ≤ β, тобто нижня ціна гри не перевищує верхньої ціни гри.

Для розглянутого прикладу α = β = С = 6. Значення С = 6 у цьому випадку зветься ***ціною гри,*** бо для Г1 немає стратегії, яка б ***гарантувала*** йому виграш більший за α = 6. З іншого боку, у гравця Г2 немає стратегії, яка б ***гарантувала*** йому програш, менший за β = 6. Тоді С12 та С22 звуться ***оптимальними стратегіями,*** які забезпечують гарантовану ціну гри С = 6.

Комірку матриці (С12, С22), яка визначає ціну гри С = 6, звуть ***сідловою точкою,*** бо значення С є максимумом колонки та мінімумом рядка, на перетині яких знаходиться С.

Гру, яка має ціну, звуть ***грою з сідловою точкою.*** Гру з сідловою точкою звуть справедливою, якщо С = 0, і несправедливою у протилежному випадку при С ≠ 0. Щоб несправедливу гру зробити справедливою, перед початком кожної нової партії гравець Г1 повинен заплатити гравцю Г2 величину С.

Загальне значення нижньої та верхньої ціни гри α = β = С зветься також ***чистою ціною гри***. Сукупність стратегій, які дають сідлову точку (оптимальне рішення), зветься ***"рішенням гри у чистих стратегіях"***. У випадках, коли α ≠ β, рішення знаходиться у ***змішаних стратегіях***, які отримуються на кожному ході гравців ***випадковим чергуванням чистих стратегій***.

Приклад: "гра у футбол". Перед змаганням кожна з двох футбольних команд (їх позначаємо як окремих гравців Г1 та Г2) розглядає стратегії, яких потрібно дотримуватись у матчі. Стратегії можуть бути різноманітними (вони можуть бути пов'язані з навальним наступом, міцною обороною, складом та розміщенням гравців на полі, створенням окремих груп гравців з особливими завданнями і т.п.). Для спрощення задачі вважаємо, що кожна команда Г1 та Г2 визначила по дві власні стратегії: С11, С12 для Г1 та С21, С22 для Г2 (табл. 15.4.2). У матриці гри записані умовні оцінки ігрової ситуації на користь гравця Г1 на випадок атаки гравця Г2.

Переходимо до розв'язання задачі:

1. Гравець Г1 з кожного рядка обирає найгірші для нього оцінки виграшу і помічає найкращу оцінку "2" зірочкою: вона і вказує на оптимальну стратегію С12.

2. Гравець Г2 з кожної колонки обирає найгірші для нього оцінки програшу (найбільший програш) і помічає найкращу оцінку "2" зірочкою: вона і вказує на оптимальну стратегію С22.
3. На пересіченні обраних стратегій ("ходів" у грі) виявилася сідлова точка "2", яку теж помічаємо зірочкою. Ми отримали розв'язання задачі: гравець Г1 буде дотримуватися стратегії С12, гравець Г2 – стратегії С22. Гарантована найменша оцінка на користь Г1 дорівнює "2". Коли відомі такі, хоча б приблизні, оцінки ситуації, яка буде складатись у грі, то тоді можна краще підготувати команду до майбутніх дій.

Таблиця 15.4.2

Платіжна матриця гри у футбол

Гравець Г1	**Гравець Г2**		**Найгірший результат для Г1**
	С21	**С22**	
С11	– 1	1	–1
С12	4	2^*	2^*
Найгірший результат для Г2	4	2^*	

15.5. Мішана стратегія

Нижче наводяться розмірковування для загального випадку (табл. 15.5.1).

Таблиця 15.5.1

Матриця гри

Г1	**Г2**				**α**
	С21	С22	…	С2n	
С11	α11	α12	…	α1n	α1
С12	α21	α22	…	α2n	α2
…	…	…	…	…	…
С1m	αm1	αm2	…	αmn	αm
β	β1	β2	…	βn	

Сторона Г1 має m стратегій, а сторона Г2 має n стратегій (***гра m · · n***). Треба знайти найкращі (оптимальні) стратегії сторін, а також очікуваний середній виграш (результат).

При рішенні гри використовуються поняття $\alpha = \text{MaxMin}(\alpha i)$ – максимін, або нижня ціна гри, та $\beta = \text{MinMax}(bj)$ – мінімакс, або верхня ціна гри.

Раніше ми вже розглянули випадок, коли $\alpha = \beta$, тобто гра має ***сідлову точку*** – елемент гри, який одночасно є максміном та мінмаксом (з нижньою та верхньою ціною гри).

Але найбільша кількість ігор не має сідлової точки. Приклад такої гри наведений у табл. 15.5.2 з позначеним у комірках виграшем Г1.

Якщо керуватися принципами максиміна та мінімакса, то гравець Г1 отримує максимін $\alpha = 3$ і вибере стратегію С12. Гравець Г2 отримує мінімакс $\beta = 4$ і вибере стратегію С22. У даному випадку сідлової точки немає. Для такої гри невідомо, що ж відбудеться: виходить, що Г2 згоджується на програш "4", у той час як гравець Г1 має за мету отримати виграш лише "3". Тут є неузгодженість, яку потрібно розв'язати. Іншими словами, відсутність сідлової точки означає затруднення у визначенні оптимальної стратегії гравців.

Таблиця 15.5.2
Гра без сідлової точки

Г1	**Г2**		**α**
	С21	**С22**	
С11	7	2	2
С12	3	4	3*
β	7	4*	

Вихід з положення полягає у використанні такого алгоритму, який зветься ***мішаною стратегією:***

1. Різниця між "3" та "4" розглядається як нічийна область, за рахунок якої кожен із гравців може намагатися покращити свій результат: Г1 – збільшуючи свій виграш від "3" до "4", а Г2 – зменшуючи свій програш від "4" до "3". Єдине, що ми можемо стверджувати, – це те, що при розв'язанні задачі цифри виграшу Г1 та програшу Г2 повинні співпадати і що це рішення знаходиться в області "3...4".

2. Обидва гравці приховують стратегію, яку обирають (зберігають секретність ходів). Такий намір тяжко виконати, якщо гравці будуть обирати стратегію на основі деяких ***розумних міркувань або розрахунків***, бо супротивнику нічого не забороняє повторити їх і зробити тотожні висновки. Тоді супротивник буде мати перевагу, бо він буде вибирати найкращу для себе стратегію. Найкраще рішення полягає у тому, щоб стратегія обиралась ***випадково, але сама схема рандомізації повинна бути розумною***. Кажуть, що у випадках, коли $\alpha \neq \beta$ і немає сід-

лової точки, рішення знаходиться у ***змішаних стратегіях,*** які отримуються на кожному ході гравців ***випадковим чергуванням чистих стратегій***.

Припустимо, що гравець Г1 обирає чисті стратегії С11 та С12 з ймовірностями Р11 = 1/6 та Р12 = 5/6, а гравець Г2 обирає чисті стратегії С21 та С22 з ймовірностями Р21 = 1/3 та Р22 = 2/3. Тоді середньостатистичні виграші гравця Г1 та гравця Г2, відповідно, дорівнюють

$$L\Gamma 1 = \mathrm{P11}\cdot\mathrm{P21}\cdot\mathrm{A11}+\mathrm{P11}\cdot\mathrm{P22}\cdot\mathrm{A12}+\mathrm{P12}\cdot\mathrm{P21}\cdot\mathrm{A21}+\mathrm{P12}\cdot\mathrm{P22}\cdot\mathrm{A22} =$$

$$=(1/6)\cdot(1/3)\cdot 7+(1/6)\cdot(2/3)\cdot 2+(5/6)\cdot(1/3)\cdot 3+(5/6)\cdot(2/3)\cdot 4 = 11/3;$$

$$L\Gamma 2 = \mathrm{P21}\cdot\mathrm{P11}\cdot\mathrm{A11}+\mathrm{P21}\cdot\mathrm{P12}\cdot\mathrm{A21}+\mathrm{P22}\cdot\mathrm{P11}\cdot\mathrm{A12}+\mathrm{P22}\cdot\mathrm{P12}\cdot\mathrm{A22}=11/3.$$

Гравці Г1 та Г2 ***покращили свої результати за рахунок "нічийної області", а виграш дорівнює програшу***. Можна впевнитись виконанням розрахунків, що отриманий результат – найкращий для обох гравців. Таким чином, ***іноді корисно обирати стратегію випадковим чином***. Стратегія, яка використовує випадкове обрання, зветься ***мішаною*** стратегією на відміну від ***чистої стратегії*** без такого випадкового обрання. Випадкове обрання повинно мати число виходів, яке дорівнює числу чистих стратегій гравця, але ймовірності обрання таких виходів потрібно розраховувати.

Але тому, що гра набуває ***випадкового характеру***, виграш повинен розглядатись у середньостатистичному сенсі (бо випадковими будуть результати кожної гри, і розмову можна вести лише про ***середні їх значення***).

У випадку, коли гравець Г1 має кінцеву кількість m чистих стратегій, його мішана стратегія пов'язується з набором ймовірностей Р1 = = {Р11, Р12, …, Р1m}, яка складає повну групу, і тому $\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P1}_i = 1;\quad \mathrm{P1}_i \ge 0.$ Аналогічно для гравця Г2 $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{P2}_j = 1;\quad \mathrm{P2}_j \ge 0.$

Позначимо множину змішаних стратегій гравців Г1 та Г2 відповідно через $\mathrm{C1}_i, \mathrm{C2}_j,\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$ Якщо гравець Г1 вибирає змішану стратегію (С1, Р1), а гравець Г2 вибирає (С2, Р2), то очікуваний виграш дорівнює

$$\mathrm{B}(\mathrm{P1},\mathrm{P2}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{P1}_i\, a_{ij}\,\mathrm{P2}_j,$$

де $\mathrm{P1}_i$, $\mathrm{P2}_j$ – ймовірність використання стратегій С1, С2; a_{ij} – значення комірки матриці гри.

У матричній формі ці рівняння мають вигляд B(P1, P2) = P1 · A · · $P2^T$, де P1, P2 – ймовірності використаних стратегій; A – матриця гри; $P2^T$ – транспонована матриця P2.

Значення P1 · A · $P2^T$ є середнє очікування виграшу гравця Г1. Г1 повинен так вибрати P1, щоб отримати максимум P1 · A · $P2^T$. ***Це і є максимінна стратегія Г1 на противагу аналогічній мінімаксній стратегії Г2.***

При використанні змішаних стратегій нижній виграш Г1 точно дорівнює верхньому програшу Г2. Загальна величина цих двох величин зветься значенням гри. Обрана стратегія є оптимальною як для гравця Г1, так і для гравця Г2 у тому сенсі, що не існує інша стратегія, яка б давала їм кращий оптимальний гарантований очікуваний результат.

15.6. Графічне уявлення сідлової точки та мішаної стратегії

Графічне уявлення сідлової точки та мішаної стратегії розглянемо на прикладі матричної гри 2х2 (табл. 15.6.1).

1. Спочатку розглянемо зміну стратегій ***для гравця Г1.*** З цією метою на вісі 0*X* рис. 15.6.1 для *X* = 0 проведемо вертикальну лінію 0 – C11 для стратегії C11 і на ній помітимо значення виграшів A11 та A12 гравця Г1. Відповідно для *X* = 1 проведемо вертикальну лінію K – C12 для стратегії C12 і на ній помітимо значення виграшів A21 та A22 гравця Г1.

Таблиця 15.6.1
Матриця гри

Г1	**Г2**		**α**
	C21	**C22**	
C11	A11	A12	
C12	A21	A22	
β			

Відрізок OK = 1 розглядається як сума ймовірностей використання стратегій C11 та C12, що складають повну групу, і тому сума ймовірностей P11 + P12 = 1. Якщо ми знаходимось у точці 0 (використовуємо стратегію C11), то ймовірності P11 = 1, P12 = 0. У точці K ми використовуємо стратегію C12, і тоді ймовірності P11 = 0, P12 = 1.

Якщо вісь 0 – *X* позначити як вісь 0 – P12, то у точці “0” ми будемо мати P12 = 0, а у точці K – значення P12 = 1. Ймовірність стратегії C11 розраховується за формулою P11 = 1 – P12. Проміжні точки відрізка 0K зображують змішані стратегії, коли з деякою ймовірністю P11 та P12 використовуються стратегії C11 та C12.

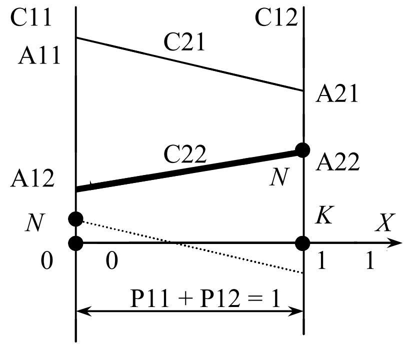


Рис. 15.6.1. Середньостатистична зміна виграшу Г1 при переході від С11 до С12

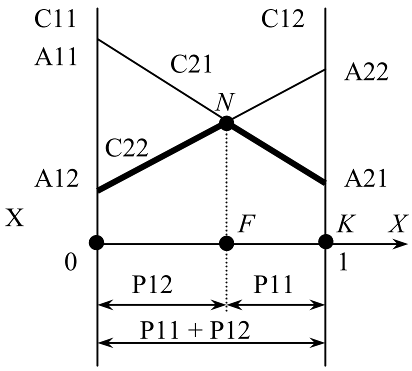


Рис. 15.6.2. Випадок пересічення прямих А11 – А21, А12 – А22

2. Розглянемо ***гравця Г2. Стратегії гравця Г2*** охоплюють виграші (табл. 15.6.1): стратегія С21 – виграші А11, А21; стратегія С22 – виграші А12, А22. Вважаємо, що при мішаних стратегіях, коли випадково чергуються стратегії С11 та С12, і при поступовому збільшенні ймовірності Р12 у середньостатистичному сенсі змінюються відповідні виграші по прямих лініях А11 – А21 та А12 – А22 для стратегій супротивника Г2. Тому ці прямі лінії на рис. 15.6.1 позначені як С21, С22. Якщо б лінії А11 – А21 та А12 – А22 змінювалися по кривій лінії, то це б означало надання переваги одній із стратегій (С11, Р11) або (С12, Р12). Але цього допустити не можна, щоб супротивник Г2 не виявив у середньостатистичному сенсі цю тенденцію.

3. Після побудови графіка рис. 15.6.1 розглянемо рішення гри ***при наявності сідлової точки*** (прямі А11 – А21 та А12 – А22 не пересікаються):

– гравець Г1 вибирає мінімальні виграші А12 (для першого рядка матриці табл. 15.6.1) та А22 (для другого рядка матриці табл. 15.6.1) і серед них – нижню ціну гри, максимін α = А22;
– гравець Г2 вибирає максимальні виграші А11 (для першої колонки матриці табл. 15.6.1) та А22 (для другої колонки матриці табл. 15.6.1) і серед них – нижню ціну гри, мінімакс β = А22.

Це означає, що у нас є рішення – сідлова точка *N*, бо прямі С21 та С22 не пересікаються. Як рішення гри вибирається точка *N* із стратегіями С22 та С12 при ціні гри α = β = А22 у чистих стратегіях і при ймовірностях Р11 = 0, Р12 = 1, Р21 = 0, Р22 = 1.

Помітимо, що якщо значення виділеної прямої А12 – А22 з найменшими виграшами збільшується зі зростанням *X*, то використовується стратегія С12 з Р12 = 100%.

4. Розглянемо інший варіант зміни прямих А11 – А21 та А12 – А22 теж ***при наявності сідлової точки.*** Припустимо, що пряма А11 – А21 опустилася паралельно самій собі і зайняла положення, вказане пунктирною лінією. У цьому випадку:

- гравець Г1 серед мінімальних виграшів А11, А21 вибирає максимін α = А11;
- гравець Г2 серед максимальних виграшів А11, А22 вибирає мінімакс β = А11.

Ми знову отримали сідлову точку ціни гри α = β = А11 у чистих стратегіях С11 та С21 при ймовірностях Р11 = 1, Р12 = 0, Р21 = 1, Р22 = 0.

Помітимо, що якщо значення виділеної пунктирної прямої А11 – А21 (рис. 15.6.1) з найменшим виграшем зменшується зі зростанням *X,* то використовується стратегія С11 з Р11 = 100%.

5. Розглянемо тепер випадок, коли прямі А11 – А21 та А12 – А22 пересікаються у точці *N* (рис. 15.6.2). Це означає відсутність сідлової точки (рис. 15.6.2).

Найменші середньостатистичні значення виграшів позначаються виділеною жирною ламаною лінією А12 – *N* – А21. Найбільше значення середньостатистичного виграшу спостерігається у точці *N* і дорівнює відрізку *NF* (рис. 15.6.2). З рис. 15.6.2 (коли сідлової точки немає) випливає, що пряма А12 – *N* характеризується зростанням виграшів при зростанні Р12. Тому відрізок 0*F* = Р12. Звідси відрізок *FK* = Р11. У теорії ігор доведено, що ламана А11 – *N* – А21 є випуклою, і тому ці висновки стосуються будь-яких ліній типу А12 – *N* та *N* – А21. Але якщо вона випукла, то значення виграшу справа від точки *N* зростає зі зростанням Р12, і тому 0*F* = Р12. Відповідно *FK* = Р11 = 1 – Р12.

Впевнимось у відсутності сідлової точки за даними рис. 15.6.2:

- гравець Г1 серед мінімальних виграшів А12, А21 вибирає максимін α = А21;
- гравець Г2 серед максимальних виграшів А11, А22 вибирає мінімакс β = А22.

Таким чином, сідлової точки немає. У відсутності сідлової точки можна впевнитись у будь-якому випадку пересічення вказаних прямих.

Переміщення точки *N* вздовж осі *X* призводить до зміни величин ймовірностей Р11 та Р12.

15.7. Розрахунок ймовірностей та ціни гри мішаної стратегії

Розглянемо розрахунки ймовірностей P11, P12, P21, P22, з якими повинні використовуватись відповідні стратегії C11, C12, C21, C22. Але спочатку для матриці гри табл. 15.7.1 виконаємо рис. 15.7.1 та рис. 15.7.2.

Таблиця 15.7.1
Матриця гри

Г1	Г2	
	C21	C22
C11	A11	A12
C12	A21	A22

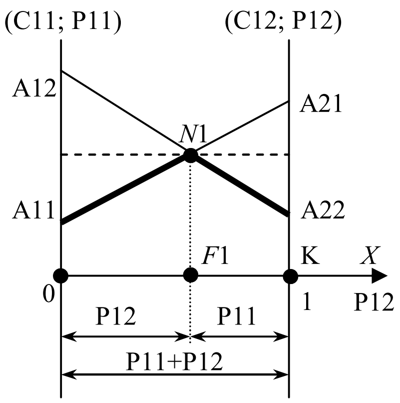


Рис. 15.7.1. Розрахунок ймовірностей мішаної стратегії гравця Г1

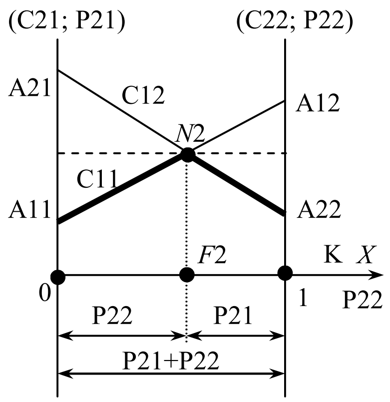


Рис. 15.7.2. Розрахунок ймовірностей мішаної стратегії гравця Г2

Рис. 15.7.1 та рис. 15.7.2 будуються аналогічно рис. 15.6.1 і виконуються для конкретних величин A11, A12, A21, A22. Реальне співвідношення цих величин можна побачити безпосередньо на рисунках: з них видно, що величини A12 та A21 рис. 15.7.1 та рис. 15.7.2 не однакові. Але ми виконуємо розрахунки у загальному вигляді, і тому ця обставина не має значення.

1***. Рис. 15.7.1 стосується стратегій C11, C12 та ймовірностей P11, P12 гравця Г1.*** На вісі $0X$ рис. 15.7.1 для $X = 0$ проведемо вертикальну лінію 0 – (C11, P11) для стратегії C11 і на ній помітимо значення виграшів A11 та A12 гравця Г1. Відповідно для $X = 1$ проведемо вертикальну лінію K – (C12, P12) для стратегії C12 і на ній помітимо значення виграшів A21 та A22 гравця Г1.

Відрізок 0К = 1 розглядається як сума ймовірностей використання стратегій С11 та С12, що складають повну групу, і тому сума ймовірностей Р11 + Р12 = 1. Якщо ми знаходимось у точці 0 (використовуємо стратегію С11), то ймовірності Р11 = 1, Р12 = 0. У точці К ми використовуємо стратегію С12, і тоді ймовірності Р11 = 0, Р12 = 1.

Якщо вісь 0 – *X* позначити як вісь 0 – Р12, то у точці "0" ми будемо мати Р12 = 0, а у точці К – значення Р12 = 1. Ймовірність стратегії С11 розраховується за формулою Р11 = 1 – Р12. Проміжні точки відрізка 0К зображують змішані стратегії, коли з деякою ймовірністю Р11 та Р12 використовуються стратегії С11 та С12.

У подібних трикутниках А11А12*N*1 та А21А22 *N*1 рис. 15.7.1 проведемо перпендикуляр через точку *N*1. Цей перпендикуляр показаний пунктиром; точкою *N*1 він розділяється на відрізки, які дорівнюють Р12 та Р11. З подібності вказаних трикутників випливає

$$\frac{P12}{A12-A11}=\frac{P11}{A21-A22}; \qquad P12=\frac{A12-A11}{A21-A22}P11=\frac{A12-A11}{A21-A22}(1-P12);$$

$$P12=\frac{A12-A11}{A12+A21-A11-A22}; \qquad P11=1-P12.$$

2**. *Рис. 15.7.2 стосується стратегій С21, С22 та ймовірностей Р21, Р22 гравця Г2.*** На осі 0*X* рис. 15.7.2 для *X = 0* проведемо вертикальну лінію 0 – (С21, Р21) для стратегії С21 і на ній помітимо значення виграшів А21 та А11 гравця Г2. Відповідно для *X* = 1 проведемо вертикальну лінію К – (С22, Р22) для стратегії С22 і на ній помітимо значення виграшів А12 та А22 гравця Г2.

Відрізок 0К = 1 рис. 15.7.2 розглядається як сума ймовірностей використання стратегій С21 та С22, що складають повну групу, і тому сума ймовірностей Р21 + Р22 = 1. Якщо ми знаходимось у точці 0 (використовуємо стратегію С21), то ймовірності Р21 = 1, Р22 = 0. У точці К ми використовуємо стратегію С22, і тоді ймовірності Р21 = 0, Р22 = 1.

Якщо вісь 0 – *X* позначити як вісь 0 – Р22, то у точці "0" ми будемо мати Р22 = 0, а у точці К – значення Р22 = 1. Ймовірність стратегії С21 розраховується за формулою Р21 = 1 – Р22. Проміжні точки відрізка 0К зображують змішані стратегії, коли з деякою ймовірністю Р21 та Р22 використовуються стратегії С21 та С22.

У подібних трикутниках А11А21*N*2 та А12А22 *N*2 рис. 15.7.1 проведемо перпендикуляр через точку *N*2. Цей перпендикуляр показаний пунктиром; точкою *N*2 він розділяється на відрізки, які дорівнюють Р22 та Р21. З подібності вказаних трикутників випливає

$$\frac{\text{P22}}{\text{A21}-\text{A11}}=\frac{\text{P21}}{\text{A12}-\text{A22}};\qquad \text{P22}=\frac{\text{A21}-\text{A11}}{\text{A12}-\text{A22}}\text{P21}=\frac{\text{A21}-\text{A11}}{\text{A12}-\text{A22}}(1-\text{P22});$$

$$\text{P22}=\frac{\text{A21}-\text{A11}}{\text{A12}+\text{A21}-\text{A11}-\text{A22}};\qquad \text{P21}=1-\text{P22}$$

Покажемо, що в обох випадках точно виконується рівність ціни гри для обох гравців Г1 та Г2 (тобто $N1F1 = N2F2$). Для цього розглянемо рис. 15.7.3 та рис. 15.7.4, які отримані з рис. 15.7.1 та рис. 15.7.2.

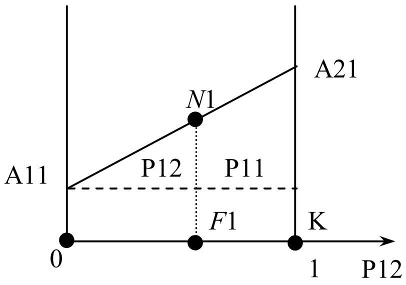


Рис. 15.7.3. Розрахунок ціни гри з боку гравця Г1

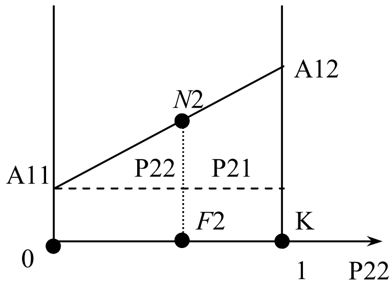


Рис. 15.7.4. Розрахунок ціни гри з боку гравця Г2

Врахуємо, що відрізок $0F1$ = P12, а ймовірність P12 змінюється у межах 0…1. Тоді величина відрізка $N1F1$ рис. 15.7.3, який знаходиться на прямій A11 – A21, розраховується за формулою

$$N1F1=\text{A11}+\text{P12}(\text{A21}-\text{A11})=\text{A11}+\frac{(\text{A12}-\text{A11})(\text{A21}-\text{A11})}{\text{A12}+\text{A21}-\text{A11}-\text{A22}}.$$

Аналогічним способом виконується розрахунок по рис. 15.7.4 для гравця Г2

$$N1F1=\text{A11}+\text{P22}(\text{A12}-\text{A11})=\text{A11}+\frac{(\text{A12}-\text{A11})(\text{A21}-\text{A11})}{\text{A12}+\text{A21}-\text{A11}-\text{A22}}.$$

З подальших перетворень можна отримати

$$N1F1=\frac{\text{A12A21}-\text{A11A22}}{\text{A12}+\text{A21}-\text{A11}-\text{A22}}.$$

15.8. Розрахунок мішаної стратегії при наявності супротивника з більш ніж двома стратегіями

Припустимо, що гравець Г1 має дві, а Г2 – чотири стратегії (табл. 15.8.1). Середньостатистична зміна виграшів у залежності від ймовірності використання стратегій $C1_1$ та $C1_2$ гравця Г1 за даними табл. 15.8.1 показана на рис. 15.8.1.

Таблиця 15.8.1

Матриця гри з чотирма стратегіями Г2

Стратегії Г1, $C1_i$	**Виграші a_{ij}**	**Стратегії Г2, $C2_j$**			
		$C2_1$	**$C2_2$**	**$C2_3$**	**$C2_4$**
$C1_1$	a_{1j}	5	10	0	15
$C1_2$	a_{2j}	2	0	8	3

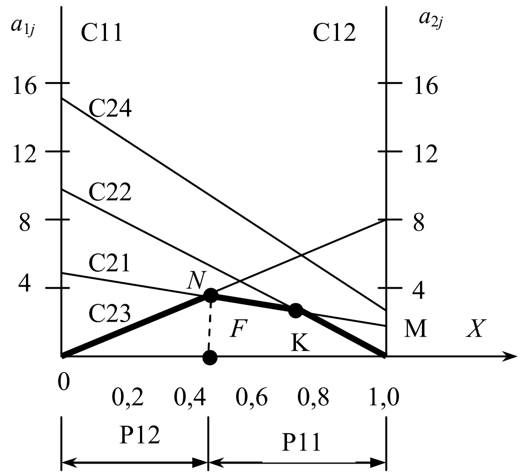


Рис. 15.8.1. Середньостатистична зміна виграшів гравця Г1

Ці графіки будуються за виразом (тут враховується, що $P1_2 = 0\ldots1$)

$$y = a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})P1_2,$$

який отримується з подібності трикутників (рис. 15.8.2):

$$\frac{P1_2}{\Delta Y} = \frac{1}{a_{2j} - a_{1j}}; \quad \Delta Y = P1_2(a_{2j} - a_{1j}); \qquad Y = a_{1j} + \Delta Y = a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})P1_2.$$

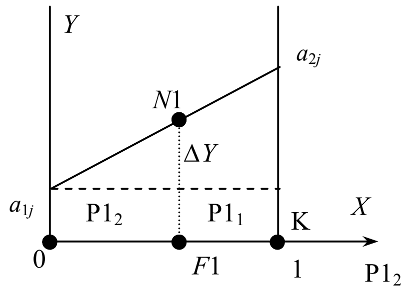


Рис. 15.8.2. Розрахунок ціни гри з боку гравця Г1

Жирна ламана лінія МК*N*0 рис. 15.8.1 визначає максимінний середньостатистичний виграш, найбільше значення якого *NF* визначає ціну гри, відрізки 0*F* та *F*М визначають ймовірності (відповідно $P1_2$ та $P1_1$) використання стратегій $C1_2$ та $C1_1$ гравцем Г1.

Розв’язання задачі пояснюється таким чином:

1. У теорії ігор доводиться, що ламана МК*N*0 є завжди випуклою. Тому якщо точка *N* є найвищою, то всі інші точки знаходяться нижче.
2. Зліва від точки *N* використовуються виділені прямі, у яких збільшується значення *Y* зі зростанням значення *X,* і тому вся ця область охоплюється ймовірністю $P1_2$.
3. Справа від точки *N* використовуються виділені прямі, у яких зменшується значення *Y* зі зростанням *X*, і тому вся ця область охоплюється ймовірністю $P1_1$.
4. Якщо пряма *N*К є паралельною вісі *X*, то всю цю пряму або будь-який її відрізок відносять до $P1_1$ або $P1_2$, бо це не змінює результату розрахунку.

Графо-аналітичне розв’язання задачі за даними табл. 15.8.1 має такий алгоритм:

1. Будуємо прямі лінії середньостатистичної зміни виграшів рис. 15.8.1. На цих лініях виділяємо ламану лінію МК*N*0 з мінімальними середньостатистичними виграшами.

2. Визначаємо положення точки N, у якій знаходиться рішення, і визначаємо дві лінії $C2_1$ та $C2_3$, які створюють цю точку пересічення. Для стратегій $C2_1$ та $C2_3$ складаємо рівняння

$$y_{C21} = a_{11} + (a_{21} - a_{11})P1_2 = 5 + (2-5)P1_2 = 5 - 3P1_2;$$

$$y_{C23} = a_{13} + (a_{23} - a_{13})P1_2 = 0 + (8-0)P1_2 = 8P1_2.$$

З рівності $y_{C21} = y_{C23}$ отримуємо

$$5 - 3P1_2 = 8P1_2; \qquad P1_2 = 5/11; \qquad P1_1 = 1 - P1_2 = 6/11$$

Оптимальне рішення (найбільший можливий виграш для Г1) або ціна гри (див. рис. 15.8.2) дорівнює

$$NF = a_{1j} + \Delta Y = a_{13} + P1_2(a_{23} - a_{13}) = 0 + (8-0)(5/11) = 40/11.$$

Результати розрахунків: $NF = 40/11$; $P1_1 = 6/11$; $P1_2 = 5/11$.

15.9. Приклади матричних ігор

Гра "Відкриття крамниці". Молода людина вирішила відкрити крамницю по продажу товарів. Постало питання про визначення цін на товари. Бувалі досвідчені люди йому сказали, що прибуток крамниці залежить від ціни на товар: якщо ціна висока, то покупців стає менше і прибуток зменшується; а якщо ціна менша, то прибуток може збільшитись за рахунок зростання кількості покупців і відповідної реклами, яка створюється крамниці. Поради з досвідченими людьми та власний досвід допомогли створити матрицю гри (табл. 15.9.1).

У табл. 15.9.1 гравець Г1 – це молода людина, Г2 – покупці. Відповідні стратегії означають: С11 – підвищення ціни на товари; С12 – зменшення ціни на товари; С21 – купувати товар; С22 – не купувати товар. У комірках таблиці записаний очікуваний прибуток крамниці (виграш гравця Г1). Як бачимо, задача має сідлову точку, що вказує на доцільність зниження цін.

Таблиця 15.9.1
Гра "Відкриття крамниці"

Г1	**Г2**		**α**
	С21	**С22**	
С11	8	7	7
С12	12	10^*	10^*
β	12	10^*	

Гра "Оптово-роздрібна торгівля". Підприємство виробляє товари Т1 та Т2. Постало питання про вихід на ринок з оптовою або роздрібною продажею товарів. Досвід бувалих людей показує, що за один вихід на ринок середньостатистично можна отримати прибуток

1. З оптовою торгівлею: за товар Т1 – 10 тис. грн., або за товар Т2 – 4 тис. грн.

2. З роздрібною торгівлею: за товар Т1 – 3 тис. грн., або за товар Т2 – 8 тис. грн.

У табл. 15.9.2 гравець Г1 – це підприємство, а Г2 – ринок. Відповідні стратегії означають: С11 – оптовий продаж товарів; С12 – роздрібний продаж товарів; С21 – купівля товару Т1; С22 – купівля товару Т2. У комірках таблиці записаний очікуваний прибуток підприємства (виграш гравця Г1). Як бачимо, задача не має сідлової точки: гравець Г1 готується отримати прибуток 4 тис. грн., у той час як ринок готовий заплатити 8 тис. грн. Ці цифри не є рівними. Але підприємство може отримати лише стільки грошей, скільки отримає з ринку. Вихід у даному випадку полягає у змішаній стратегії.

Таблиця 15.9.2

Гра "Оптово-роздрібна торгівля"

Г1	**Г2**		**α**
	С21	**С22**	
С11	10	4	4^*
С12	3	8	3
β	10	8^*	

Ймовірність використання оптової торгівлі

$$\mathrm{P1}_2 = \frac{a_{12} - a_{11}}{a_{12} + a_{21} - a_{11} - a_{22}} = \frac{4-10}{4+3-10-8} = \frac{6}{11}.$$

Ймовірність використання роздрібної торгівлі

$$\mathrm{P1}_1 = 1 - \mathrm{P1}_2 = 5/11\,.$$

Прибуток

$$NF = a_{12} + \mathrm{P1}_2(a_{22} - a_{12}) = 4 + (8-4)(6/11) = 6\frac{2}{11} \text{ тис. грн.}$$

Гра "Напад на об'єкт ворога Г2". У комірках табл. 15.9.3 наведені ймовірності поразки об'єкта ворога при використанні стратегій:

1. Нападаючою стороною (Г1): С11 – літаків та танків; С12 – танків та десанту; С13 – десанту та ракетного обстрілу.

2. Обороняючою стороною (Г2): С21 – літаків та ракет; С22 – мін та артилерії; С23 – артилерії та літаків.

Таблиця 15.9.3 Гра “Напад на об’єкт ворога Г2”				
Г1	Г2			α
	С21	С22	С23	
С11	0,5	0,3	0,7	0,3
С12	0,9	0,4*	0,6	0,4*
С13	0,2	0,1	0,8	0,1
β	0,9	0,4*	0,8	

Задача має сідлову точку, що вказує на доцільність використання стратегій С12 та С22.

15.10. Коли ворог – природа

Гра з “природою” має такі особливості:

- Стан “природи” (Г2) нам невідомий, але ми можемо зробити припущення, які і визначають її “стратегії” ($C2_j$, $j = \overline{1,n}$), кожна з яких відбувається з деякою ймовірністю $P2_j$. Природа (гравець Г2) не використовує помилки Г1, не запам’ятовує його дії.
- Гравець Г1 має власні стратегії $C1_i$, $i = \overline{1, m}$.
- Кожній парі стратегій відповідає виграш a_{ij} (табл. 15.10.1).

Таблиця 15.10.1 Матриця гри з “природою”				
Стратегії Г1	**Стратегії Г2**			
	$C2_1$; $P2_1$	**$C2_2$; $P2_2$**	**…**	**$C2_n$; $P2_n$**
$C1_1$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
$C1_2$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
$C1_m$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Треба вибрати стратегію $C1_i$, яка б забезпечила найбільший можливий виграш для Г1 у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання стратегій $C2_j$.

Як приклад стратегії $C2_j$ можна розглядати погодні умови. При цьому можливі три варіанти рішень:

1. Ймовірності $P2_j$ відомі. Тоді кожна стратегія $C1_i$ гравця Г1 оцінюється як сума добутків ймовірностей стратегій $C2_j$ на відповідні виграші a_{ij} стратегії $C1_i$

$$G1_i = \sum_{j=1}^{n} P2_j a_{ij}. \qquad (15.10.1)$$

Найбільше значення з цих сум $G1_i$ вказує на оптимальну для гравця Г1 стратегію. Тобто тут використовується критерій прийняття рішень в умовах ризику.

2. Ймовірності $P2_j$ не відомі, але є відомості про їх відносні значення:
   - Якщо вважають усі стратегії рівноймовірними, то розраховують $P2_j = \frac{1}{n} = \text{const}$ і далі використовують формулу (15.10.1).
   - Якщо можна ймовірності $P2_j$ ранжувати у ряд за ознакою величини ймовірності, то дослідник визначає згідно з цим рядом їх ймовірність, яка зменшується. Після цього використовують формулу (15.10.1).
   - Ймовірності $P2_j$ визначаються опитом експертів, після цього використовують формулу (15.10.1).
3. Ймовірності $P2_j$ невідомі, але відомі вимоги щодо дій, оцінка їх результатів. У цьому випадку можна скористатися критеріями Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.

Критерій Вальда. Виграш повинен бути не менший, ніж найбільше його значення у найгірших умовах. Для кожного рядка стратегій $C1_i$ вибираємо найменше значення a_{ij} і серед них обираємо найбільшу величину, яка і вкаже оптимальну стратегію $C1_i$.

Критерій Лапласа заснований на рівновеликості всіх ймовірностей $P2_j$. Тому для кожного рядка розраховують середнє значення
$G_i^{Л} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ і по максимальній величині $C_i^{Л}$ визначають оптимальну стратегію $C1_i$.

Критерій Севіджа вимагає уникнення занадто великого ризику у будь-яких умовах. З цією метою потрібно побудувати матрицю ризику, для чого в кожній колонці матриці табл. 15.10.1 знаходиться максимальне значення $a_{ij}^{\max}$ і заповнюються комірки нової таблиці значеннями

$b_{ij} = a_{ij}^{\max} - a_{ij}$. Після цього з нової таблиці вибирається з кожного рядка найбільше значення ризику, і серед них найменша величина ризику вкаже оптимальну стратегію $C1_i$ гравця Г1.

Критерій “оптимізму – песимізму” Гурвіца розраховується за формулою

$$G_{C1i} = \mathrm{K}\mathrm{Min}\,a_{ij} + (1-\mathrm{K})\mathrm{Max}\,a_{ij},$$

де К = 0…1 – коефіцієнт оптимізму; $\mathrm{Min}a_{ij}$ – мінімальне значення a_{ij} у i-му рядку; $\mathrm{Max}a_{ij}$ – максимальне значення a_{ij} у i-му рядку.

З отриманих для кожного рядка розрахованих критеріїв Гурвіца обирають максимальне значення, яке і вказує потрібну стратегію гравця Г1.

15.11. Приклади гри з природою

Припустимо, що планується військова операція: нанесення авіацією гравця Г1 удару по об’єкту гравця Г2 (природи). Гравець Г1 може вибрати 4 стратегії – нанесення удару з 4-х сторін: С11 – з півночі, С12 – зі сходу, С13 – з півдня, С14 – з заходу. Ефективність дій авіації Г1 залежить від стратегії $C2_j$ – стану “природи” та ймовірностей $P2_j$ використання цих стратегій $C2_1$ – ясно, ймовірність $P2_1$; $C2_2$ – пасмурно, ймовірність $P2_2$; $C2_3$ – туман, дощ.

Кожна пара стратегій Г1 та Г2 дає результат, ефективність якого показана у табл. 15.11.1.

Таблиця 15.11.1

Ефективність дії авіації

Спосіб дії Г1	**Стратегії природи (Г2)**		
	С21	**С22**	**С23**
С11	0,32	0,4	0,25
С12	0,6	0,7	0,4
С13	0,8	0,65	0,2
С14	0,65	0,25	0,3

Треба забезпечити найбільший можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій $C2_j$.

1. ***Припустимо, що ці ймовірності відомі:*** $P2_1$ = 0,6; $P2_2$ = 0,3; $P2_3$ = 0,1. Тоді оцінка стратегій гравця Г1 для кожного рядка дорівнює згідно з рівнянням (15.10.1):

$$G1 = 0,6 \cdot 0,32 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,25 = 0,343,$$
$$G2 = 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,61,$$
$$G3 = 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,65 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,695^{*},$$
$$G4 = 0,6 \cdot 0,65 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,495.$$

З критеріїв $G1 \ldots G4$ обираємо найбільше значення $G3$ = 0,695, яке вказує на необхідність вибору стратегії С13 гравцем Г1: напад потрібно виконати з півдня.

2. ***Ймовірності $P2_j$ нам невідомі,*** але є деякі відомості про їх відносні значення.

   2.1. Припустимо, що всі стратегії є ***рівноймовірними,*** тобто $P2_j$ = 1/3 = const:

$$G1 = (0,32 + 0,4 + 0,25)/3 = 0,323,$$
$$G2 = (0,6 + 0,7 + 0,4)/3 = 0,567^{*},$$
$$G3 = (0,8 + 0,65 + 0,2)/3 = 0,550,$$
$$G4 = (0,65 + 0,25 + 0,3)/3 = 0,400.$$

Обирається стратегія С12: гравець Г1 повинен виконати напад зі сходу.

   2.2. Ймовірності ***ранжуються у ряд за їх величиною:*** $P2_1 > P2_2 > P2_3$. Вважаємо, що ймовірності у порівнянні з сусідньою меншою збільшуються у 2 рази. Тоді можна записати ($P2_1 = 4X$) > ($P2_2 = 2X$) > ($P2_3 = X$). Враховуючи, що всі ймовірності складають повну групу, отримуємо рівняння $4X + 2X + X = 1$, звідки маємо P21 = 4/7; P22 = 2/7; P23 = 1/7. Після цього можна розрахувати оцінки стратегій:

$$G1 = (4/7)0,32 + (2/7)0,4 + (1/7)0,25 = 0,323,$$
$$G2 = (4/7)0,6 + (2/7)0,7 + (1/7)0,4 = 0,600,$$
$$G3 = (4/7)0,8 + (2/7)0,65 + (1/7)0,2 = 0,672,$$
$$G4 = (4/7)0,65 + (2/7)0,25 + (1/7)0,3 = 0,485.$$

Висновок: гравець Г1 обирає стратегію С13 – напад з півдня.

3. ***Розрахунки за критеріями Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.***

3.1. ***Критерій Вальда***. Для рядків стратегій $C1_i$ найгірші значення ефективності (табл. 15.11.1): С11 → 0,25; С12 → 0,4*; С13 → 0,2; С14 → 0,25. Висновок: гравець Г1 обирає стратегію С12 – напад зі сходу.

3.2. ***Критерій Лапласа***. Розрахунок співпадає з раніше отриманою оцінкою стратегій гравця Г1 для рівноймовірних значень $P2_j$.

3.3. ***Критерій Севіджа***. Будуємо матрицю ризику табл. 15.11.2 зі значеннями елементів матриці,

$$b_{ij} = a_{ij}^{\max} - a_{ij}$$

де $a_{ij}^{\max}$ – максимальне значення елементів a_{ij} для j-ї колонки; a_{ij} – поточне значення коефіцієнті a_{ij} для поточної колонки.

Таблиця 15.11.2

Матриця ризику

Спосіб дії Г1	**Стратегії природи (Г2)**		
	С21	**С22**	**С23**
С11	0,48	0,3	0,15
С12	0,2	0	0
С13	0	0,05	0,2
С14	0,15	0,45	0,1

Для кожного рядка табл. 15.11.2 вибирається найменше значення ризику (С11 → 0,48; С12 → 0,2*; С13 → 0,2*; С14 → 0,45), а з отриманих ризиків обираємо найменший. У даному випадку ми маємо два найменші однакові значення. Вибираємо дві рівноцінні стратегії Сl2 та С13.

3.4. ***Критерій Гурвіца.*** Враховує найбільше $\mathrm{Max}a_{ij}$ та найменше $\mathrm{Min}a_{ij}$ значення коефіцієнтів a_{ij} для кожного рядка при К = 0…1. Розрахунок виконується за формулою

$$G_{C1i} = \mathrm{KMin}a_{ij} + (1 - \mathrm{K})\,\mathrm{Max}a_{ij}.$$

Таким чином

$$G1 = 0{,}1 \cdot 0{,}25 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}4 = 0{,}385,$$

$$G2 = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}7 = 0{,}670,$$

$$G3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}8 = 0{,}740^{*},$$

$$G4 = 0{,}1 \cdot 0{,}25 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}65 = 0{,}611.$$

Вибираємо стратегію С13.

Завдання

№ 1. Скласти матрицю власної гри (наприклад: виробник – покупець; футбол; гра на гроші; охорона об'єкта та ін. у чистих стратегіях) на двох гравців, три стратегії у кожного гравця з їх поясненнями. Дати пояснення умов гри. Виграші по комірках визначити самостійно. Отримати сідлову точку. Зробити висновки.

№ 2. Розрахувати ймовірності та ціни гри мішаної стратегії згідно з даними табл. 3.2.1 та табл. 3.2.2. Дати визначення і пояснення мішаної стратегії. Тут $A = \sqrt{N}$; N – порядковий номер студента у групі.

№ 3. Гра "Відкриття крамниці". Молода людина вирішила відкрити крамницю по продажу товарів. Поради з досвідченими людьми та власний досвід допомогли створити матрицю гри (табл. 3.3.1).

Таблиця 3.2.1
Матриця гри

Г1	Г2	
	С21	С22
С11	2N	N
С12	А	3N

Таблиця 3.2.2
Матриця гри

Г1	Г2	
	С21	С22
С11	2A	2N
С12	N	A

Таблиця 3.3.1
Гра "Відкриття крамниці"
(N – порядковий номер студента у групі)

Г1	Г2		α
	С21	С22	
С11	0,15N	0,1N	
С12	0,2N	0,3N	
β			

У табл. 3.3.1 гравець Г1 – це молода людина, Г2 – покупці. Відповідні стратегії означають: С11 – підвищення ціни на товари; С12 – зменшення ціни на товари; С21 – купувати товар; С22 – не купувати товар. У комірках таблиці записаний очікуваний прибуток крамниці (виграш гравця П1).

№ 4. Гра "Оптово-роздрібна торгівля". Підприємство виробляє товари Т1 та Т2.

Таблиця 3.4.1
Гра “Оптово-роздрібна торгівля”

Г1	Г2		α
	С21	С22	
С11	$3N$	$1{,}5N$	
С12	N	$4N$	
β			

У табл. 3.4.1 гравець Г1 – це підприємство, а Г2 – ринок. Відповідні стратегії означають: С11 – оптовий продаж товарів; С12 – роздрібний продаж товарів; С21 – купівля товару Т1; С22 – купівля товару Т2. У комірках таблиці записаний очікуваний прибуток підприємства (виграш гравця Г1).

№ 5. Гра “Напад на об’єкт ворога Г2”. У комірках табл. 3.5.1 наведені ймовірності поразки об’єкта ворога при використанні стратегій:

1. Нападаючою стороною (Г1): С11 – літаків та танків; С12 – танків та десанту; С13 – десанту та ракетного обстрілу.
2. Обороняючою стороною (Г2): С21 – літаків та ракет; С22 – мін та артилерії; С23 – артилерії та літаків.

Таблиця 3.5.1
Гра “Напад на об’єкт ворога Г2”

Г1	**Г2**			**α**
	С21	**С22**	**С23**	
С11	0,2	0,4	0,7	
С12	0,85	$0{,}02N + 0{,}4$	0,6	
С13	0,2	$0{,}01N$	$0{,}01N$	
β				

№ 6. Припустимо, що планується військова операція: нанесення авіацією гравця Г1 удару по об’єкту гравця Г2 (природи). Гравець Г1 може вибрати 4 стратегії – нанесення удару з 4-х сторін: С11 – з півночі, С12 – зі сходу, С13 – з півдня, С14 – з заходу. Ефективність дій авіації Г1 залежить від стратегії $C2_j$ – стану “природи” та ймовірностей $P2_j$ використання цих стратегій $C2_1$ – ясно, ймовірність $P2_1$; $C2_2$ – пасмурно, ймовірність $P2_2$; $C2_3$ – туман, дощ, ймовірність $P2_3$.

Кожна пара стратегій Г1 та Г2 дає результат, ефективність якого показана у табл. 6.1.

Таблиця 3.6.1

Ефективність дії авіації
(N – порядковий номер студента у групі)

Спосіб дії Г1	**Стратегії природи (Г2)**		
	С21	**С22**	**С23**
С11	0,32	0,05N	0,25
С12	0,022N	0,03N	0,02N
С13	0,03N	0,025N	0,2
С14	0,25N	0,25	0,3

Треба забезпечити найбільший можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій $C2_j$.

№ 6.1. Ймовірності дорівнюють $P2_3 = 0{,}01N$; $P2_2 = 0{,}03N$; $P2_3 = 0{,}01N$.

№ 6.2. Розв’язати задачу № 6.1, якщо всі стратегії є рівноймовірними.

№ 6.3. Розв’язати задачу № 6.1, якщо ймовірності стратегій ранжуються у ряд за їх величиною: $P2_1 > P2_2 > P2_3$. Вважаємо, що ймовірність у порівнянні з сусідньою меншою збільшується у 1,5 раза. Скласти рівняння по визначенню (Р21; Р22; Р23), враховуючи, що всі ймовірності складають повну групу. Після цього розрахувати оцінки стратегій.

№ 6.4. Розв’язати задачу № 6.1 з використанням критеріїв Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.

16. ВИКОРИСТАННЯ ЕОМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

16.1. Використання програми на мові Турбо Паскаль

Наведена нижче програма для розв'язання задач лінійного програмування розроблена доцентом кафедри комп'ютерних технологій к.т.н. Цибенком Б.О. у 1978 році. Вона дозволяє отримувати як нецілочисельне, так і цілочисельне рішення задачі лінійного і нелінійного програмування і добре зарекомендувала себе на практиці. Підкреслені рядки наведеної нижче програми при розв'язанні власної задачі – змінюють. Змінні у задачі користувача у програмі позначені як *X*[1], *X*[2], *X*[3]. Нижче програми наведений приклад її переналагодження на розв'язання задачі користувача.

```
PROGRAM OPTIMIZATION;
USES Crt,Powell;
TYPE  MyPowell = object(OptimPowell)
{ MyPowell-ім'я функції користувача}
FUNCTION GoalFunction(var X: VariablesType) : real; virtual;
end;
VAR ch :char;
FUNCTION MyPowell.GoalFunction(var X: VariablesType) : real;  {Функція
мети користувача}
{Задача про ящик найбільшого об'єму. FUNCTION MyPowell.
GoalFunction – функція мети користувача. MyPowell додаток. GoalFunction
залишається без зміни. X – незалежні змінні}
VAR I : integer;F : real;
BEGIN   Inc(NumbCallFunc);
for I:=1 to NumbVars do
X[I] := X[I] * ScalesVar[I];
F :=MaxMin*X[1] * X[2] * X[3];
if NumbCallFunc > 1 then begin
for I:=1 to 3 do begin  Restrictions[I] := X[I];  Restrictions[I+3] := 42 - X[I];
end;
```

```
Restrictions[7] := 72 - (X[1] + 2*X[2] + 2*X[3]);
for I:=1 to NumbRest do  {штрафні додатки до функції мети}
if Restrictions[I] < 0.0 then F := F + sqr(Restrictions[I] / FineFactor);end;
GoalFunction := F; for I:=1 to NumbVars do X[I] := X[I] / ScalesVar[I];
end;
CONST
InVariables : VariablesType ={Початкові значення незалежних змінних}
(1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
InScalesVar : VariablesType ={Очікувані значення змінних у точці екстре-
муму}
(15.0,5.0,5.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
VAR MyObject : MyPowell; fx : real; i : byte;

 {ГОЛОВНА ПРОГРАМА}
BEGIN {ініціалізація об'єкта}
MyObject.Init( InVariables, InScalesVar,
-1,         {MaxMin    : shortint; (+1) – пошук мінімуму, (-1) – максимуму}
7,          {NumbRest  : byte;  кількість обмежень у моделі}
3,          {NumbVars  : byte;  кількість незалежних змінних}
2,{Convergation : byte; (1) – ознака припинення оптимізації (2) – збіль-
шення штрафу}
{1 – зразу після збіжності}
{2 – процес повторюється при збільшеному штрафі}
2,          {PrintOrNo    : byte; вивед. на екран проміжн. результатів}
{0 – вивед. проміжн. результатів не виконувати}
{2 – результати оптимізації по ітераціях}
{1 - (2) + значення припусків}
0.001,      {Accuracy    : real;  точн. досягн. екстремуму одномірн. пощуку}
0.01,       {FirstStep   : real;  початкове значення кроку по змінних}
0.01);      {FineFactor  : real; штрафний коефіцієнт << 1.0}
clrscr;
fx:=MyObject.GoalFunction(MyObject.Variables); {виклик функції мети для
виведення}
writeln('початкове значення функції мети F= ',fx);
MyObject.Call_OptimPowell;{виклик процедури оптимізації методом Пау-
елла}
writeln;writeln;
writeln('Результати оптимізації');
with MyObject do begin {виведення результатів оптимізації}
writeln('Загальна кількість розрахунків ЦФ N= ',NumbCallFunc:4);
writeln('Значення ЦФ= ',MaxMin*GoalFunction(Variables));
writeln('Значення незалежних змінних:');
for I:=1 to NumbVars do begin
write(Variables[I]*ScalesVar[i],' ');
if (i mod 3)=0 then writeln; end;
writeln;   writeln('Значення обмежень:');
for I:=1 to NumbRest do begin write(Restrictions[I],' ');
```

```
     if (i mod 3)=0 then writeln; end; writeln;
     end;  writeln('Для виходу натисніть будь-яку клавішу'); Ch:=ReadKey;
END.
```

Розглянемо використання програми.

1. Відкриваємо програму у середовищі Турбо Паскаль.
2. Приводимо математичну модель до вигляду, коли функція мети повинна наближатись до максимуму (або до мінімуму), а нерівності – мати знак "≥", наприклад: $F = 2X1 + 3X2 \rightarrow \max$; $500 - 2X1 - 3X2 \geq 0$; $-20 + X1 - 20X2 \geq 50$.
3. Змінюємо програму (редагуємо її) згідно з даними табл. 16.1.

Таблиця 16.1

Зміна даних у програмі Цибенка Б.О. при рішенні власної задачі

Існуючі команди	Замінити на:
…F :=MaxMin*X[1] * X[2] * X[3]; …	…F :=MaxMin*(2*X[1] + 3*X[2]); … {Це замінили функцію мети F}
for I:=1 to 3 do begin Restrictions[I] := X[I]; Restrictions[I+3] := 42 – X[I]; end; Restrictions[7] := 72 – (X[1] + 2*X [2] + 2*X[3]); {Це функції обмеження}	Restrictions[1]:= 500 – 2*X[1] – 3*X[2]; Restrictions[2]:= –20 + X[1] – 20* X[2]; {Тут вказують функції обмежень. Таких обмежень можна вказати багато – до 150 та більше)
CONST InVariables : VariablesType = {Початкові значення незалежних змінних} 1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0, 1.0,1,1,1,1,1,1,1,1,1); InScalesVar : VariablesType = {Очікувані значення змінних у точці екстремуму} (15.0,5.0,5.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0, 1.0,1,1,1,1,1,1,1,1,1);	Це початкові змінні задачі користувача, які поступово уточнюються. Все це можна залишити у програмі без зміни.
MyObject.Init(InVariables, InScalesVar, ±1,7,3,2,2,0.001,0.01,0.01);	Представити у вигляді (у програмі змінені лише перші три цифри, бо все інше можна не змінювати): MyObject.Init(InVariables, InScalesVar, -1, 2, 2, 2, 2, 0.001, 0.01, 0.01);

16.2. Використання EXCEL для розв'язання задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування можна розв'язувати за допомогою програми Solver, яка входить у надбудови EXCEL пакета Microsoft Office. Але спочатку треба впевнитись у тому, що ця програма завантажена: меню Tools (Сервис) → Add-Ins (Надстройки)… → *діалогове вікно Add-Ins* (*Надстройки*), встановити прапорець ☑ Solver Add-in, OK → Програма Solver завантажується. Якщо завантаження не виконується, то це означає, що треба виконати з CD ROM більш повне завантаження EXCEL.

Перед пуском програми Solver початкові дані повинні бути оформленими у вигляді таблиці EXCEL. Її оформлення відрізняється від задачі ЛП, бо спочатку в окремій таблиці EXCEL визначаються суми, і лише потім окремо вказуються потрібні обмеження для цих сум.

ПРИКЛАД. Розглянемо задачу ЛП у стандартній формі: отримати максимальний виторг від виробництва Товару 1 і Товару 2. При вказаних у табл. 16.2.1 даних отримуємо математичну модель.

Таблиця 16.2.1

Дані задачі ЛП

Матеріал	**Ресурс**	**Норма витрат, кг/шт.**	
		Товар 1	**Товар 2**
Мідь	30 кг	0,5 кг/шт.	0,3 кг/шт.
Деревина	50 кг	0,4 кг/шт.	0,8 кг/шт.
Кількість, шт.	-	X_1	X_2
Вартість, грн.	-	10	15

$$F \to 10\,X_1 + 15\,X_2 \to \max; \tag{16.1}$$
$$0{,}5\,X_1 + 0{,}3\,X_2 \le 30; \tag{16.2}$$
$$0{,}4\,X_1 + 0{,}8\,X_2 \le 50. \tag{16.3}$$

Цю математичну модель ми повинні оформити у вигляді табл. 16.2.2 на робочому аркуші EXCEL, якщо завантажена програма Solver. На базі моделі (16.1) – (16.3) у нижченаведених рівняннях (16.4) – (16.7) ми спочатку визначаємо суми відповідних виразів (зліва у цих рівняннях указані адреси комірок, у які вводяться відповідні формули; обмеження у вигляді "F → max", " ≤ 30", " ≤ 50" спочатку не враховуються):

$$\$C\$7 = F = \$C\$4 + \$C\$5 = 10X1 + 15X2; \qquad (16.4)$$
$$\$D\$7 = \$D\$4 + \$D\$5 = 0{,}5X1 + 0{,}3X2; \qquad (16.5)$$
$$\$E\$7 = \$E\$4 + \$E\$5 = 0{,}4X1 + 0{,}8X2; \qquad (16.6)$$
$$\$B\$7 = \$B\$4 + \$B\$5 = X1 + X2. \qquad (16.7)$$

Формули (16.4) – (16.7) ми вносимо у відповідні комірки

Таблиця 16.2.2

Дані задачі ЛП у робочому аркуші EXCEL

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	Рішення задачі лінійного програмування				
2					
3	Назва	Кількість	Витрати	Мідь	Деревина
4	Товар 1	= *X*1	= 10 · SB$5	= 0,5 · $B$4	= 0,4 · $B$4
5	Товар 2	= *X*2	= 15 · SB$5	= 0,3 · $B$5	= 0,8 · $B$5
6					
7	Підсумок	= $B$4 + $B$5	= $C$4 + $C$5	= $D$4 + $D$5	= $E$4 + $E$5

Але у дійсності у комірки $B$4 та $B$5 табл. 16.2.2 ми повинні внести не "= *X*1" та "= *X*2" (як це показано на них), а відповідно "= 0" та "= 0" (це означає, що початкові значення змінних "*X*1 = 0" та "*X*2 = 0", а потім програма Solver надасть їм оптимальні величини; значення "= *X*1" та "= *X*2" *введені у комірки* $B$4 та $B$5 навмисно – з метою інформації, де будуть виводитись рішення системи Solver щодо оптимальної величини цих змінних). Після заповнення комірок табл. 16.2.2 формулами всі комірки вказують нульові значення (це тому, що *X*1 = 0 та *X*2 = 0).

Далі переходимо до введення обмежень на отримані суми у табл. 16.2.2: виділити отриману таблицю на робочому аркуші EXCEL → → Меню Tools → Solver… → ***ДВ Solver Parameters. У ДВ Solver Parameters*** виконати такі дії:

- у вікні Set Target Cell ввести адресу функції мети ($C$7);
- серед перемикачів "Equal To:" вибрати перемикач Max;
- у вікні By Changing Cells вказати, у яких комірках треба, щоб програма змінювала значення для отримання оптималь-

ного результату; з цією метою введіть курсор у це вікно і на робочому аркуші виділіть комірки $B$4, $B$5, щоб вони автоматично вписались у це вікно як $B$4:$B$5;

- при натисненні кн. Guess виділяється діапазон комірок, на які є посилання у функції мети; кн. Change, Delete змінюють або вилучають введені обмеження;
- у вікні Subject to the Constraints треба ввести потрібні обмеження ладачі ЛП: для цього 1ЛКМ на кн. Add → ***ДВ Add Constraint*** (Додати обмеження), у полі Cell Reference ввести адресу комірки, у якій зберігається сума функції мети ($C$7), у полі Constraint ввести MAX – в результаті ми повинні отримати у цьому ДВ вигляд "$C$7 → MAX". Кн. Add. →
- У попередньому ***ДВ Solver Parameters*** з'явиться таке ж обмеження "$C$7 → MAX"

Далі ***ДВ Add Constraint*** залишається відкритим, і ми повинні ввести у ньому наступне обмеження: у полі Cell Reference зробити посилання на комірки $B$4, $B$5 *і вибрати операцію INT (ціле число), кн. Add →*

У ***ДВ Solver Parameters*** з'являться обмеження "$B$4: $B$5 = *INTEGER".*

Таким же чином за допомогою ***ДВ Add Constraint*** ми задаємо обмеження $D$7 <= 30; $E$7 < = 50.

Для збереження заданих параметрів у ДВ треба зберегти книгу EXCEL.

Для ініціалізації розрахунків виконати дії: виділити отриману таблицю на робочому аркуші EXCEL → Меню Tools → Solver… → ***ДВ Solver Parameters,*** кн. Solver → у табл. 16.2.2 з'являються результати розрахунків з повідомленням про виконання роботи. На цьому розрахунки завершуються.

Якщо потрібно внести у табл. 16.2.2 нові розрахунки для нових даних, то виконують дії: виділити отриману таблицю на робочому аркуші EXCEL → Меню Tools → Solver… → ***ДВ Solver Parameters, кн. Options… → ДВ Solver Options,*** встановити опцію Keep Solver Solution. У результаті таблиця буде оновлена, але початкові значення зберігаються і їх можна відновити (але при встановленні опції Restore Original Value і відсутності завдання на складання звіту попередні дані будуть вилучені).

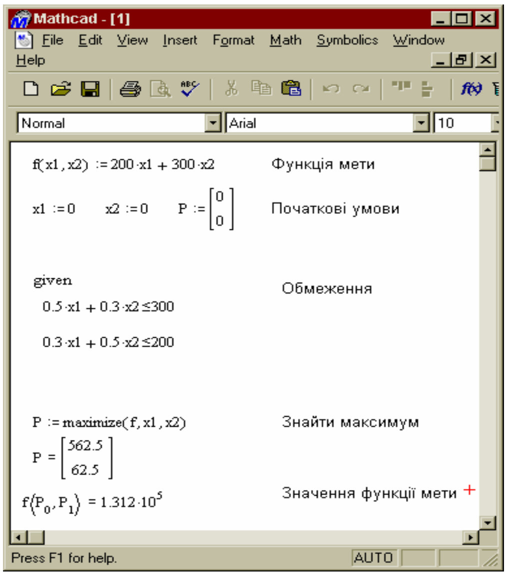
У результаті розрахунків ми отримали інформацію про початкові і розраховані значення параметрів; зберігаються також всі попередні розрахунки.

Рішення Solver можна зберегти як сценарій: виділити отриману таблицю на робочому аркуші EXCEL → Меню Tools → Solver… → ***ДВ Solver Parameters,*** кн. Options…→ ***ДВ Solver Options:***

Кн. Save Model – зберігається сукупність параметрів та обмежень сумісно з робочим листом: відкривається ***ДВ Save Model,*** у якому вказують область адрес моделі. Модель зберігається у вертикальному інтервалі комірок, який починається з виділеної комірки.

Кн. Load Model завантажує модель.

16.3. Використання MathCad для розв’язання задач лінійного програмування



Математична модель для розв’язання задачі має вигляд:

$F_1 = 200X_1 + 300X_2 \rightarrow \max.$

$0{,}5X_1 + 0{,}3X_2 \le 300;$

$0{,}3X_1 + 0{,}5X_2 \le 200;$

$X_1, X_2 \ge 0.$

Задача реалізована у середовищі MathCad.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ “ВІПОЛ”, 2000. – 688 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учебник для вузов. – Киев: Вища школа, 1975. - 319 с.
3. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1984. – 224 с.
4. Математические методы исследования операций. – Киев: Вища школа, 1979. – 312 с.
5. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
7. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 383 с.
8. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
9. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
10. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
11. Карлин С. Математические игры в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. – 838 с.
12. Кондратенко Г.В. Фаззифікація якісних сигналів у нечітких системах підтримки прийняття рішень // Вестник ХГТУ. – 2002. – № 14. – С. 74-81.
13. Kondratenko Y.P. The fuzzy model for efficient solving ship’s transportation problem // Proc. of Int. Conf. “Contemporary systems on business control” CSBS’2001, 4-6 June, 2001, Lipetsk, Russia, pp. 56-60.
14. Гожий А.П. Применение генетических алгоритмов для решения задач дискретной оптимизации в САПР // Вестник ХДТУ. – Хмельницкий: ХДТУ. – 2002.
15. Цыбенко Б.А., Стрелковский И.В. Методы машинного проектирования и оптимизации элементов судна. – Николаев: НКИ, 1983. – 38 с.
16. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Академія, 1998. – 272 с.
17. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.

Зміст

КУТКОВЕЦЬКИЙ
Валентин Якович

доктор технічних наук, професор

Дослідження операцій

Навчальний посібник

Редактори *О.Шатун, О.Шемчук.*
Молодший редактор *А.Млеко*.
Технічний редактор, комп'ютерна верстка *І.Терентієва*.
Друк, фальцювально-палітурні роботи *С.Волинець.*

Здано до набору 24.04.2002. Підписано до друку 17.12.2003. Папір офсетний. Формат 60x84$^1/_{16}$. Гарнітура "Таймс". Обл.-вид. арк. 9,2. Умовн. друк. арк. 16,3. Наклад 300 прим. Зам. № 569-к.

Видавництво МДГУ ім. Петра Могили.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 1175 від 25.12.2002 р.
54003, м. Миколаїв, вул. 68 Десантників, 10.