Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Навчально-науковий інститут комп’ютерних інформаційних технологій
Кафедра комп’ютеризованих систем управління

Лабораторна робота №
з дисципліни «Телекомунікаційні технології комп’ютерних мереж»
на тему «Формування коду Хемінга»
Варіант №6

Виконав:
студент ННІКІТ
групи СП-325
Клокун В. Д.
Перевірив:
Пушкін Ю. О.

Київ 2018

1 Мета роботи

Ознайомитись з методиками формування простого і посиленого кодів Хемінга. Здобути практичні навички побудови кодів.

2 Хід роботи

Відповідно до варіанта для виконання роботи дано число $N = 164_{\text{dec}}$.

2.1 Формування простого коду Хемінга

Нехай слово A — результат кодування заданого числа N кодом Хемінга. Для формування слова A перетворюємо задане число N в двійкову систему числення:

$$N = 164_{\text{dec}} = 10100100_{\text{bin}}.$$

Як бачимо, кількість біт передаваної інформації $m = 8$. Простий код Хемінга розрахований на коригування 1 помилки в даних, тому кількість контрольних розрядів k має задовольняти нерівність:

$$\begin{aligned} k &\geqslant \log_2(k + m + 1), \\ &\geqslant \log_2(k + 9). \end{aligned}$$

Найменшим числом, яке задовольняє нерівність, є $k_{\min} = 4$, що і буде кількістю контрольних розрядів. Позначимо загальну кількість розрядів, тобто довжину слова A як $|A|$ та обчислимо її:

$$|A| = m + k_{\min} = 8 + 4 = 12.$$

Код Хемінга передбачає, що контрольні розряди розташовуються на позиціях слова a_i, де $i = 2^b, b \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Тому запишемо слово A, залишаючи ще невідомі контрольні розряди a_1, a_2, a_4, a_8 пустими:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ A = & \square & \square & 1 & \square & 0 & 1 & 0 & \square & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Щоб знайти значення контрольного розряду, необхідно обчислити суму по модулю 2 (позначається $\oplus$) усіх розрядів, які він покриває. Щоб визначити розряди, які покриває контрольний розряд, зобразимо порядкові номери i розрядів слова A у десятковій та двійковій системах числення (табл. 1). До контрольної групи C_j ввійдуть ті розряди, в яких біт $i_j = 1$.

Табл. 1: Номер розряду i слова A у двійковій та десятковій системах числення

	i_{bin}			
i_{dec}	i_4	i_3	i_2	i_1
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
Контрольна група (якщо $i_j = 1$)	C_4	C_3	C_2	C_1

Розглянувши двійкове представлення індексів розрядів (табл. 1), визначили приналежність розрядів до кожної контрольної групи:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}\},\\
C_2 &= \{a_2, a_3, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}\},\\
C_3 &= \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_{12}\},\\
C_4 &= \{a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}.
\end{aligned}$$

Обчислимо контрольні розряди кожної контрольної групи, вважаючи значення пустих контрольних розрядів за 0:

$$\begin{aligned}
C_1 \mapsto a_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1,\\
C_2 \mapsto a_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1,\\
C_3 \mapsto a_4 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,\\
C_4 \mapsto a_8 &= a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1.
\end{aligned}$$

Впишемо знайдені контрольні розряди:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12}\\[1em]
A = & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Таким чином ми отримали слово $A = 111101001100_{\text{bin}}$, закодувавши задане число N кодом Хемінга.

Для перевірки правильності кодування необхідно обчислити суму по модулю 2 для кожної контрольної групи. Якщо кодування виконано правильно, кожна сума s_i повинна дорівнювати 0. Виконуємо обчислення:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0,\\
s_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,\\
s_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0,\\
s_4 &= a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0.
\end{aligned}$$

Як бачимо, усі суми дорівнюють 0, тому кодування виконано правильно.

2.2 Формування посиленого коду Хемінга

Нехай слово B — результат кодування заданого числа N посиленим кодом Хемінга. Оскільки принцип посиленого кодування Хемінга аналогічний простому, щоб сформувати слово B для заданого числа N, до слова A (пп. 2.1) додаємо розряд b_{13}, який міститиме загальний біт парності p. Значення p буде сумою по модулю 2 усіх розрядів слова:

$$b_{13} = p = \bigoplus_{i=1}^{12} b_i = 1.$$

Вписуємо отримане значення b_{13}:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\[1ex]
B = & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1}
\end{array}$$

Таким чином ми сформували слово B, яке містить задане число N, закодоване посиленим кодом Хемінга. Таке кодування дозволяє коригувати 1 помилку та виявляти 2.

2.3 Декодування та емуляція передачі

При передачі даних приймається слово, закодоване одним з кодів Хемінга, його контрольні розряди відкидаються та обчислюються заново за тим же алгоритмом, яким проводилось кодування (описані в пп. 2.1, 2.2). В залежності від результату обчислення та його відповідності отриманим контрольним розрядам робиться висновок, чи були дані передані правильно.

2.3.1 Для простого коду Хемінга

Припустимо, що передавач відправив слово C, а приймач отримав слово C'. Число S' складається з контрольних розрядів слова C', як вони і були отримані; число S'' — з контрольних розрядів, заново обчислених приймачем з розрядів даних. Для виявлення помилки обчислюється синдром E:

$$E = S' \oplus S''.$$

Якщо $E = 0$, тобто всі контрольні розряди співпадають, помилки при передачі не виявлені і відсутні, якщо відбулось не більше 1 помилки. Якщо E містить лише один розряд $e_i = 1$, тобто контрольні розряди відрізняються лише одним бітом, то при передачі виникла помилка лише в цьому контрольному розряді. В інших випадках значення синдрому E буде вказувати на індекс розряду, в якому відбулась помилка.

Наприклад: нехай при передачі передавач відправив слово A (пп. 2.1):

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ A = & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Приймач отримав слово A', і відбулась 1 помилка у розряді a'_5 (тут і далі помилкові розряди позначаються колом). Тоді отримане слово A' виглядатиме так:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 & a'_6 & a'_7 & a'_8 & a'_9 & a'_{10} & a'_{11} & a'_{12} \\ A' = & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Запишемо заново обчислюване слово A'', відкинувши отримані контрольні розряди:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 & a''_5 & a''_6 & a''_7 & a''_8 & a''_9 & a''_{10} & a''_{11} & a''_{12} \\ A'' = & \boxed{} & \boxed{} & 1 & \boxed{} & 1 & 1 & 0 & \boxed{} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Обчислюємо контрольні розряди слова A'' за отриманими розрядами даних:

$$\begin{aligned} a''_1 &= a''_1 \oplus a''_3 \oplus a''_5 \oplus a''_7 \oplus a''_9 \oplus a''_{11} = 0, \\ a''_2 &= a''_2 \oplus a''_3 \oplus a''_6 \oplus a''_7 \oplus a''_{10} \oplus a''_{11} = 1, \\ a''_4 &= a''_4 \oplus a''_5 \oplus a''_6 \oplus a''_7 \oplus a''_{12} = 0, \\ a''_8 &= a''_8 \oplus a''_9 \oplus a''_{10} \oplus a''_{11} \oplus a''_{12} = 1. \end{aligned}$$

Вписуємо обчислені контрольні розряди слова A'':

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 & a''_5 & a''_6 & a''_7 & a''_8 & a''_9 & a''_{10} & a''_{11} & a''_{12} \\ A'' = & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Таким чином отримані числа $S' = 1111$ та $S'' = 0101$, з їх допомогою обчислюємо розряди синдрому e_1, e_2, e_3, e_4:

$$\begin{aligned} e_1 &= a''_8 \oplus a'_8 = 1 \oplus 1 = 0, \\ e_2 &= a''_4 \oplus a'_4 = 0 \oplus 1 = 1, \\ e_3 &= a''_2 \oplus a'_2 = 1 \oplus 1 = 0, \\ e_4 &= a''_1 \oplus a'_1 = 0 \oplus 1 = 1. \end{aligned}$$

З обчислених значень розрядів синдрому складаємо його значення $E = 0101_{\text{bin}} = 5_{\text{dec}}$, що вказує на помилку у розряді a'_5. Для її виправлення достатньо змінити значення помилкового розряду a'_5.

2.3.2 Для посиленого коду Хемінга

Алгоритм декодування та перевірки помилок для посиленого коду Хемінга аналогічний простому (ппп. 2.3.1), але внесення додаткового загального розряду парності p вносить особливості інтерпретації контрольних розрядів (табл. 2).

Табл. 2: Виявлення помилок у посиленому коді Хемінга; E — синдром, p — загальний біт парності

E	p	Тип помилки	Опис
0	0	Немає	При передачі помилки не відбулось
≠0	1	Одиночна	Помилку можна виправити: у синдромі зберігається позиція помилкового розряду
≠0	0	Подвійна	Помилку неможливо виправити
0	1	Парність	Помилка виникла лише у загальному біті парності p, її можна виправити

Наприклад: нехай при передачі передавач відправив слово B (пп. 2.2):

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ B = & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Приймач отримав слово B', і виникло 2 помилки: у розрядах b'_5 і b'_{10}. Тоді отримане слово B' виглядатиме так:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & b'_5 & b'_6 & b'_7 & b'_8 & b'_9 & b'_{10} & b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ B' = & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Запишемо заново обчислюване слово B'', відкинувши отримані контрольні розряди:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & b''_1 & b''_2 & b''_3 & b''_4 & b''_5 & b''_6 & b''_7 & b''_8 & b''_9 & b''_{10} & b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ B'' = & \boxed{} & \boxed{} & 1 & \boxed{} & 1 & 1 & 0 & \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{} \end{array}$$

Обчислюємо контрольні розряди $b''_1, b''_2, b''_3, b''_4$ слова B'' за отриманими розрядами даних (загальний біт парності $p = b_{13}$ при розрахунках контрольних розрядів не враховується):

$$\begin{aligned} b''_1 &= b''_1 \oplus b''_3 \oplus b''_5 \oplus b''_7 \oplus b''_9 \oplus b''_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0, \\ b''_2 &= b''_2 \oplus b''_3 \oplus b''_6 \oplus b''_7 \oplus b''_{10} \oplus b''_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0, \\ b''_4 &= b''_4 \oplus b''_5 \oplus b''_6 \oplus b''_7 \oplus b''_{12} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0, \\ b''_8 &= b''_8 \oplus b''_9 \oplus b''_{10} \oplus b''_{11} \oplus b''_{12} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0. \end{aligned}$$

Вписуємо обчислені контрольні розряди $b''_1, b''_2, b''_3, b''_4$:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & b''_1 & b''_2 & b''_3 & b''_4 & b''_5 & b''_6 & b''_7 & b''_8 & b''_9 & b''_{10} & b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ B'' = & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{} \end{array}$$

Обчислюємо загальний біт парності $p = b''_{13} = \bigoplus_{i=1}^{12} b''_i = 0$ та вписуємо його в обчислене слово B'':

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & b''_1 & b''_2 & b''_3 & b''_4 & b''_5 & b''_6 & b''_7 & b''_8 & b''_9 & b''_{10} & b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ B'' = & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

Таким чином отримані числа $S' = 1111$ та $S'' = 0000$, з їх допомогою обчислюємо розряди синдрому e_1, e_2, e_3, e_4:

$$\begin{aligned} e_1 &= b''_8 \oplus b'_8 = 0 \oplus 1 = 1, \\ e_2 &= b''_4 \oplus b'_4 = 0 \oplus 1 = 1, \\ e_3 &= b''_2 \oplus b'_2 = 0 \oplus 1 = 1, \\ e_4 &= b''_1 \oplus b'_1 = 0 \oplus 1 = 1. \end{aligned}$$

Як бачимо, синдром $E \neq 0$, і біт парності $p = 0$, тому робимо висновок, що під час передачі сталась подвійна помилка, яку неможливо виправити.

3 Висновок

Виконуючи дану лабораторну роботу, ми ознайомились з методиками формування простого і посиленого кодів Хемінга, а також здобули практичні навички побудови кодів.