Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Навчально-науковий інститут комп’ютерних інформаційних технологій
Кафедра комп’ютеризованих систем управління

Робота
для ліквідації академічної різниці
з дисципліни «Алгоритми та методи обчислень»
Варіант 3

Виконав:
студент ННІКІТ СП-225
Клокун Владислав

Київ 2017

Завдання 1. Дано масив цілих чисел $A = \{3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2\}$. Необхідно відсортувати його в порядку зростання методами вставки, бульбашки та методом шейкера. Намалювати блок-схему для методу шейкера.

Розв'язання 1. *Сортування бульбашкою.* За один повний цикл проходу по масиву виконує порівняння одного елемента з іншим. Якщо вони знаходяться в неправильному порядку, міняє їх місцями.

1. $A = [3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2]$.
2. $A = [1, -13, 3, 8, 15, 21, 17, -4, 2, 63]$.
3. $A = [-13, 1, 3, 8, 15, 17, -4, 2, 21, 63]$.
4. $A = [-13, 1, 3, 8, -4, 2, 15, 17, 21, 63]$.
5. $A = [-13, 1, 3, 8, -4, 2, 15, 17, 21, 63]$.
6. $A = [-13, 1, 3, -4, 2, 8, 15, 17, 21, 63]$.
7. $A = [-13, 1, -4, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63]$.
8. $A = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63]$.

Сортування вставками. На кожному кроці обираємо один з елементів і вставляємо його на потрібну позицію, доки вхідні дані не закінчаться.

1. $A = [3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2]$.
2. $A = [-13, 1, 3, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2]$.
3. $A = [-13, -4, 3, 8, 15, 63, 21, 17, 1, 2]$.
4. $A = [-13, -4, 1, 8, 15, 63, 21, 17, 3, 2]$.
5. $A = [-13, -4, 1, 2, 15, 63, 21, 17, 3, 8]$.
6. $A = [-13, -4, 1, 2, 3, 63, 21, 17, 15, 8]$.
7. $A = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 21, 17, 15, 63]$.
8. $A = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63]$.

Сортування методом шейкера. Двосторонній алгоритм сортування бульбашкою.

1. $A = [3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2]$.
2. $A = [1, -13, 3, 8, 15, 21, 17, -4, 2, 63]$.
3. $A = [-13, 1, -4, 3, 8, 15, 21, 17, 2, 63]$.
4. $A = [-13, -4, 1, 3, 8, 15, 17, 2, 21, 63]$.
5. $A = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63]$.

Завдання 2. Довести, що задану програму можна застосовувати до наданих станів машини Поста. Вказати результат роботи машини Поста, якщо початковий стан стрічки: 111001.

1. ? 3; 2.	4. ? 6; 5.	7. ? 8; 9
2. → 1.	5. ← 1.	8. ?
3. → 4.	6. → 7	9. → 4

Розв'язання 2. Припустимо, що каретка знаходиться на першій комірці. Розберемо програму покроково.

Команда	Стан	Пояснення
1 ? 3; 2	1110011	Мітка є, отже перехід до команди 2
2 → 1	1110011	Зсув каретки вправо і перехід до команди 1
1 ? 3; 2	1110011	Мітка є, отже перехід до команди 2
2 → 1	1110011	Зсув каретки вправо і перехід до команди 1
1 ? 3; 2	1110011	Мітка є, отже перехід до команди 2
2 → 1	1110011	Зсув каретки вправо і перехід до команди 1
1 ? 3; 2	1110011	Мітки немає, отже перехід до команди 3
3 → 4	1110011	Зсув каретки вправо перехід до команди 4
4 ? 6; 5	1110011	Мітки немає отже перехід до команди 6
6 → 7	1110011	Зсув каретки вправо перехід до команди 7
7 ? 8; 9	1110011	Мітка є, отже перехід до команди 9
9 → 4	1110011	Зсув каретки вправо перехід до команди 4
4 ? 6; 5	1110011	Мітка є отже перехід до команди 5
5 ← 1	1110011	Зсув каретки вліво перехід до команди 1
1 ? 3; 2	1110011	Мітка є, отже перехід до команди 2
2 → 1	1110011	Зсув каретки вправо і перехід до команди 1
1 ? 3; 2	1110011	Мітка є, отже перехід до команди 2
2 → 1	1110011	Зсув каретки вправо і перехід до команди 1
1 ? 3; 2	11100110	Мітки немає, отже перехід до команди 3
Далі вважаємо, що справа нескінченно багато порожніх комірок		
3 → 4	11100110	Зсув каретки вправо, перехід до команди 4
4 ? 6; 5	111001100	Мітки немає, отже перехід до команди 6
6 → 7	111001100	Зсув каретки вправо, перехід до команди 7
7 ? 8; 9	1110011000	Мітки немає, отже перехід до команди 8
8 !	1110011000	Завершення програми

Завдання 3. Є 6 міст. Необхідно розвезти товар у кожне місто таким чином, що побувати у кожному місті лише один раз. Вартість перевезення із одного міста в інше відома і задана таблицею. Знайти найменшу ціну, за яку можна здійснити таке

перевезення.

Місто	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	3	5	7	4
2	3	∞	7	8	9	4
3	4	9	∞	6	8	9
4	9	5	8	∞	4	10
5	2	1	15	6	∞	3
6	10	2	5	4	9	∞

Розв'язання 3. Складемо таблицю відстаней, визначивши мінімальні значення в кожному рядку.

Місто	1	2	3	4	5	6	d_i
1	∞	8	3	5	7	4	3
2	3	∞	7	8	9	4	3
3	4	9	∞	6	8	9	4
4	9	5	8	∞	4	10	4
5	2	1	15	6	∞	3	1
6	10	2	5	4	9	∞	2

Виконуємо редукцію рядків, віднімаючи від кожного елемента рядку значення d_i.

Місто	1	2	3	4	5	6	d_i
1	∞	5	0	2	4	1	3
2	0	∞	4	5	6	1	3
3	0	5	∞	2	4	5	4
4	5	1	4	∞	0	6	4
5	1	0	14	5	∞	2	1
6	8	0	3	2	7	∞	2

Визначаємо мінімальні значення в кожному стовпчику.

Місто	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	0	2	4	1
2	0	∞	4	5	6	1
3	0	5	∞	2	4	5
4	5	1	4	∞	0	6
5	1	0	14	5	∞	2

Місто	1	2	3	4	5	6
6	8	0	3	2	7	∞
d_j	0	0	0	2	0	1

Виконуємо редукцію стовпчиків.

Місто	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	0	0	4	0
2	0	∞	4	3	6	0
3	0	5	∞	0	4	4
4	5	1	4	∞	0	5
5	1	0	14	3	∞	1
6	8	0	3	0	7	∞
d_j	0	0	0	2	0	1

Знайдемо оцінки для комірок, що містять значення 0.

Місто	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	0^3	0^0	4	0^0
2	0^0	∞	4	3	6	0^0
3	0^0	5	∞	0^0	4	4
4	5	1	4	∞	$\mathbf{0^5}$	5
5	1	0^1	14	3	∞	1
6	8	0^0	3	0^0	7	∞

Знайшовши частину найкоротшого шляху: $4 \to 5 = 5$, виконуємо редукцію матриці та знаходимо мінімальні значення у рядках.

Місто	1	2	3	4	6	d_i
1	∞	5	0	0	0	0
2	0	∞	4	3	0	0
3	0	5	∞	0	4	0
5	1	0	14	∞	1	0
6	8	0	3	0	∞	0

Оскільки всі мінімальні елементи дорівнюють 0, редукція не внесе жодних змін. Також видно, що мінімальні елементи у рядках також дорівнюють 0, тому одразу знаходимо оцінки і шукаємо комірку з максимальною оцінкою.

Місто	1	2	3	4	6
1	∞	5	$\mathbf{0^3}$	0^0	0^0
2	0^0	∞	4	3	0^0
3	0^0	5	∞	0^0	4
5	1	0^1	14	∞	1
6	8	0^0	3	0^0	∞

Отримали ділянку оптимального шляху: $1 \to 3 = 3$. Виконуємо редукцію і виключаємо зворотний шлях, встановлюючи значення ∞ у відповідній комірці.

Місто	1	2	4	6
2	0	∞	3	0
3	∞	5	0	4
5	1	0	∞	1
6	8	0	0	∞

Мінімальні значення у рядках і стовпчиках — 0, тому переходимо до пошуку максимальних оцінок.

Місто	1	2	4	6
2	0^1	∞	3	0^1
3	∞	5	$\mathbf{0^4}$	4
5	1	0^1	∞	1
6	8	0^0	0^0	∞

Отримали ділянку шляху $3 \to 4 = 6$. Виконуємо редукцію.

Місто	1	2	6
2	0	∞	0
5	1	0	1
6	8	0	∞

Редукція стовпчиків і рядків знов не внесе змін, тому переходимо до оцінок.

Місто	1	2	6
2	0^1	∞	0^1
5	1	0^1	1
6	8	$\mathbf{0^8}$	∞

Отримали відрізок $6 \to 2 = 2$. Виконуємо редукцію та виключаємо зворотній шлях.

Місто	1	6
2	0	∞
5	1	1

Бачимо, що у рядку 5 мінімальний елемент — 1. Проведемо редукцію рядків і перейдемо до оцінок.

Місто	1	6
2	0^∞	∞
5	0	0^∞

Після редукції отримаємо дві останні ділянки $5 \to 6 = 3$, $2 \to 1 = 3$. Таким чином маємо повний шлях: $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1 = 21$.

Завдання 4. Дано систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими, необхідно знайти її розв'язки методом Гауса. Обчислити визначник та знайти обернену матрицю.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання 4. *Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.* Для розв'язання СЛАР, необхідно звести її до одиничної матриці. Для представимо систему у вигляді матриці та будемо виконувати перетворення рядків:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Щоб отримати $a_{11} = 1$, розділимо перший рядок на 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -0{,}5 & -1{,}5 & 1{,}5 & 2 \end{array}\right) =$$

$$
=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -0,75 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -0,5 & -1,5 & 1,5 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -0,5 & 0,625 & 1,625 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -0,75 \\ 0 & 0 & -2 & 1,5 & 3,5 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1,625 & 1,625 \end{array}\right)=
$$

$$
=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -0,5 & 0,625 & 1,625 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -0,75 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -1,75 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1,625 & 1,625 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -0,75 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -1,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & -1 \end{array}\right)=
$$

$$
=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -0,75 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -1,75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3,75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)
$$

З отриманої матриці очевидно: $x_1 = 1{,}25$, $x_2 = -0{,}25$, $x_3 = -3{,}25$, $x_4 = -2$.
Обчислення визначника.

$$
\left|\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -0,5 & -1,5 & 1,5 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1,5 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1,625 \end{array}\right|=
$$

$$
=\left|\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{array}\right|=2\cdot 4\cdot(-2)\cdot 0,5=-8.
$$

Обчислення оберненої матриці. Для обчислення оберненої матриці запишемо задану систему у матричному вигляді, записавши допоміжну одиничну матрицю:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=
$$

$$
=\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & -1,5 & 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=
$$

$$
=\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & -1,5 & 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=
$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}625 & 0{,}375 & 0{,}125 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1{,}5 & 0{,}5 & -1{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 1{,}625 & -0{,}625 & 0{,}125 & 0 & 1 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}625 & 0{,}375 & 0{,}125 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}75 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 1{,}625 & -0{,}625 & 0{,}125 & 0 & 1 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}75 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 1{,}25 & -0{,}75 & 1 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}75 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2{,}5 & -1{,}5 & 2 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}75 & -0{,}125 & 0{,}125 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & -0{,}375 & 0{,}375 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}75 & 2{,}625 & -1{,}625 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2{,}5 & -1{,}5 & 2 \end{array}\right).$$

Бачимо, що зліва утворилась одинична матриця, тобто ми знайшли шукану обернену матрицю A^{-1}.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}125 & 0{,}125 & -0{,}5 \\ 0{,}25 & -0{,}375 & 0{,}375 & -0{,}5 \\ -1{,}75 & 2{,}625 & -1{,}625 & 1{,}5 \\ -2 & 2{,}5 & -1{,}5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Необхідно здійснити k-ту ітерацію для знаходження розв'язку рівняння $2x^2+5x-1=0$ методом дотичних на проміжку $[-2, 10]$, якщо $x^{(k)}=1$.

Розв'язання 5. Процес пошуку розв'язку можна поділити на такі кроки:

1. Пошук відрізків, що містять єдиний корінь.
2. Власне ітерація — пошук більш точного значення кореня.

Нехай є точки $A=F(x_0)$, $B=F(x_1)$, тоді:

$$\frac{y-f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{x-x_1}{(x_1-x_0)}.$$

Точка перетину прямої з віссю OX:

$$x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1).$$

Уточнюємо розв'язок: $F(X(k)) = 1$, $X(k) - X(k-1)$ — приріст $X(k)$ в результаті ітерації попереднім значенням $X(k)$.

Складаємо таблицю для першої ітерації:

	X	$F(x)$
X_2	$-1{,}85$	$3{,}38$
X_3	-1	$3{,}72$

Отже $X_2 = x_1 - x\,(x_1 - 1) = 11{,}85$.

Завдання 6. Нехай потрібно розв'язати систему нелінійних рівнянь методом простих ітерацій до четвертого наближення. Знайти область визначення для невідомих, якщо задано: $x_1^{(0)} = 1{,}5$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 2$.

$$\begin{cases} x_1^2 - \frac{x_2}{3} = 2, \\ x_2 + 5x = -1, \\ x_3 - x_1^3 + 3x_2^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання 6. Спочатку виразимо кожну змінну через іншу таким чином:

$$x_1 = \sqrt{\frac{x_2}{3} + 2},$$
$$x_2 = 5x_1 - 1,$$
$$x_3 = x_1^3 - 3x_2^2 + 2.$$

З отриманих виразів очевидна область визначення $D(y)$ кожної змінної: $x_1 \geqslant 1$, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Підставляємо у праві частини рівнянь початкові умови і знаходимо значення невідомих на першій ітерації:

$$x_1 = \sqrt{0 + 2} = 1{,}4742,$$
$$x_2 = 5 \cdot 1{,}5 - 1 = 6{,}5,$$
$$x_3 = 1{,}5^3 - 0 + 2 = 5{,}375.$$

Аналогічно для подальших ітерацій, для другої ітерації:

$$x_1 = \sqrt{4{,}83} = 2{,}2,$$
$$x_2 = 5 \cdot 1{,}47 - 1 = 6{,}35,$$
$$x_3 = 1{,}47^3 - 3 \cdot 8{,}5^2 + 2 = -211{,}58.$$

Третя ітерація:

$$x_1 = \sqrt{4{,}12} = 2{,}03,$$
$$x_2 = 5 \cdot 2{,}2 - 1 = 10,$$
$$x_3 = 2{,}2^3 - 3 \cdot 6{,}35^2 + 2 = -108{,}312.$$

Четверта ітерація:

$$x_1 = \sqrt{5{,}33} = 2{,}3,$$
$$x_2 = 5 \cdot 2{,}03 - 1 = 9{,}2,$$
$$x_3 = 2{,}03^3 - 3 \cdot 10^2 + 2 = -293{,}9.$$

Завдання 7. Нехай дано дослідні дані попиту та пропозиції, а також ціну на певну продукцію. Необхідно оцінити похибку розв'язку методом найменших квадратів, якщо зроблено припущення, що залежність попиту та ціни визначається за формулою $S = 3c^2 + 1$, а пропозиції від ціни $P = 4c + 5$.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
c_i	2	3	7	2	5	3
P_i	3	3	6	8	10	2
c_i	3	6	4	2	9	4

Розв'язання 7. Запишемо рівняння трендів для функцій $P(c)$ та $S(c)$:

$$\begin{cases} an + b\sum c = \sum P, \\ a\sum c + b\sum c^2 = \sum P \cdot c, \end{cases} \tag{1}$$

де n — кількість пар P — c, a і b — коефіцієнти лінійного рівняння:

$$P = ac + b. \tag{2}$$

Складаємо таблицю.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	Сума
c	2	3	7	2	5	3	22
P	3	3	6	8	10	2	32
c^2	4	9	49	4	25	9	100
P^2	9	9	36	64	100	4	222
$P \cdot c$	6	9	42	16	50	6	129

Підставляємо дані таблиці в систему (1):

$$\begin{cases} 6a + 22b = 32 \\ 22a + 100b = 129. \end{cases}$$

Розв'язавши отриману СЛАР отримаємо: $a = 3{,}121$, $b = 0{,}603$. Підставимо отримані значення у лінійне рівняння (2): $P = 0{,}603c + 3{,}121$.

Обчислимо похибку початкового припущення $P = 4c + 5$:

$$\Delta a = 4 - 0{,}603 = 3{,}397,$$
$$\Delta b = 5 - 3{,}121 = 1{,}879.$$

Оскільки функція $S = 3c^2 + 1$ квадратична, її СЛАР має такий вигляд:

$$\begin{cases} an + b\sum t + c\sum t^2 = \sum S, \\ a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3 = \sum S \cdot t \\ a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4 = \sum S \cdot t^2, \end{cases} \tag{3}$$

де a, b, c — коефіцієнти квадратного рівняння, t — ціна, n — кількість пар S — t.

Складаємо таблицю для функції $S(c)$.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	Сума
t	2	3	7	2	5	3	22
S	3	3	4	2	9	4	28
t^2	4	9	49	4	25	9	100
t^3	8	27	343	8	125	27	538
t^4	16	81	2401	16	625	81	3220
S^2	9	36	16	4	81	16	162
$S \cdot t$	6	18	28	4	45	12	113
$S \cdot t^2$	12	54	196	8	225	36	531

За даними таблиці складаємо систему:

$$\begin{cases} 6a + \ \ 22b + \ \ 100c = 28 \\ 22a + 100b + \ \ 538c = 113 \\ 100a + 538b + 3220c = 531. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо: $a = -9{,}624$, $b = 7{,}439$, $c = -0{,}779$.
Підставляємо у рівняння:

$$S = -0{,}779t^2 + 7{,}439t - 9{,}624.$$

Визначаємо похибку початкового припущення:

$$\begin{aligned} \Delta a &= -0{,}779 - 3 = 3{,}779, \\ \Delta b &= \ \ \ 7{,}439 - 1 = 7{,}439, \\ \Delta c &= \ \ \ 9{,}624 + 1 = 8{,}624. \end{aligned}$$

Завдання 8. Знайти значення функції в точці $x = 2$ за заданою таблицею, використовуючи формулу Лагранжа.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
x_i	1	3	4
$y_i(x_i)$	5	3	2

Розв'язання 8. Будуємо поліном Лагранжа за заданою таблицею:

$$L(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_0)}.$$

Підставляємо значення з таблиці:

$$\begin{aligned} L(x) &= 5 \cdot \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-1)} \\ &= 5 \cdot \frac{x^2 - 7x + 12}{6} + 3 \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{-2} + 2 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{9} \\ &= \frac{15 \cdot (x^2 - 7x + 12) - 27 \cdot (x^2 - 5x + 4) + 4 \cdot (x^2 - 4x + 3)}{18} \\ &= \frac{15x^2 - 105x + 180 - 27x^2 + 135x - 108 + 4x^2 - 16x + 12}{18} \\ &= \frac{-8x^2 + 14x + 84}{18}. \end{aligned}$$

Знаходимо значення функції в точці $x = 2$:

$$L(2) = \frac{-8 \cdot 4 + 14 \cdot 2 + 84}{18} = 4{,}44.$$

Завдання 9. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона за заданою таблицею.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
x_i	1	3	4
$y_i(x_i)$	5	3	2

Розв'язання 9. Складемо систему розділених різниць:

$$f_{10} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -1,$$

$$f_{11} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1,$$

$$f_{20} = \frac{f_{11} - f_{10}}{x_2 - x_0} = 0.$$

Запишемо формулу інтерполяційного поліному Ньютона і підставимо туди отримані значення:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + f_{10}(x - x_0) + f_{20}\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &= \; 5 - 1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (x - x_0)\,(x - x_1) \; = 6 - x. \end{aligned}$$