Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Факультет кібербезпеки, комп'ютерної та програмної інженерії
Кафедра комп'ютеризованих систем управління

Лабораторна робота № 1.3
з дисципліни «Дослідження операцій»
на тему «Симплексний метод розв'язку задачі лінійного програмування.
Метод штучного базису»

Виконав:
студент ФККПІ
групи СП-425
Клокун В. Д.
Перевірила:
Яковенко Л. В.

Київ 2019

1. Завдання роботи

Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant -2, \\ -2x_1 + -2x_2 + 1x_3 = 4, \\ x_3 \leqslant -5, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Хід роботи

Щоб розв'язати поставлену задачу симплексним методом, спочатку треба звести її до матричного вигляду. Нехай $\boldsymbol{c}$ — вектор коефіцієнтів при керованих змінних у цільовій функції, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{ub}}$ — матриця коефіцієнтів при керованих змінних у нерівностях обмежень зверху, $\boldsymbol{x}$ — вектор керованих змінних, $\boldsymbol{b}_{\mathbf{ub}}$ — вектор вільних членів при нерівностях обмежень зверху, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{eq}}$ — матриця коефіцієнтів при керованих змінних у рівняннях обмежень, $\boldsymbol{b}_{\mathbf{eq}}$ — вектор вільних членів при рівняннях обмежень, $\boldsymbol{l}$ — вектор обмежень керованих змінних знизу, $\boldsymbol{u}$ — вектор обмежень керованих змінних зверху. Тоді задачу лінійного програмування можна представити так:

$$\min_{x_1,x_2,x_3} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \quad \text{враховуючи такі обмеження:} \quad \boldsymbol{A}_{\mathbf{ub}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}_{\mathbf{ub}},\ \boldsymbol{A}_{\mathbf{eq}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{\mathbf{eq}},\ \boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{u}.$$

Так як одне з обмежень — нерівність виду $\boldsymbol{ax} \geqslant b$, приведемо її до вигляду $\boldsymbol{ax} \leqslant b$. Для цього помножимо обидві частини нерівності $x_1 + x_2 \geqslant -2$ на -1, змінимо знак і отримаємо нерівність $-x_1 + -x_2 \leqslant 2$. Тоді маємо задачу:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -1x_1 + -1x_2 + 0x_3 \leqslant 2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \leqslant -5, \\ -2x_1 + -2x_2 + 1x_3 = 4, \\ 0 \leqslant x_i \leqslant \infty, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Запишемо задачу у матричному представленні:

$$\boldsymbol{c} = (-4, -3, 2) \quad \boldsymbol{A}_{\mathbf{eq}} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{\mathbf{eq}} = (4) \qquad \boldsymbol{l} = (0, 0, 0)$$
$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{ub}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{\mathbf{ub}} = (2, -5) \quad \boldsymbol{u} = (\infty, \infty, \infty).$$

Отримане матричне представлення подає умову задачі у вигляді, зручному для програмного розв'язання симплекс-методом. Отримавши зручне представлення умови задачі, розробляємо програму, яка розв'яже поставлену задачу (лістинг А.1), і запускаємо її (рис. 1).

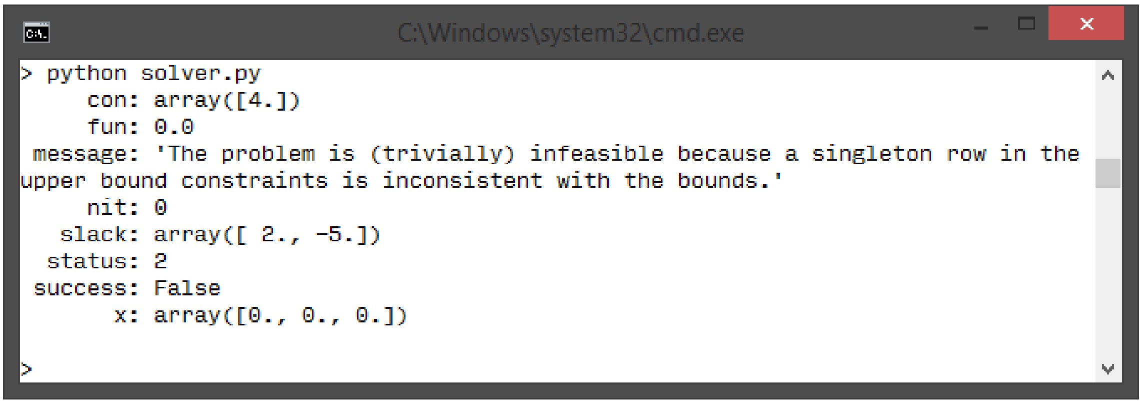

Рис. 1: Результат розв'язання задачі програмою

В результаті бачимо, як розроблена програма повідомляє, що дана задача не має розв'язків, оскільки обмеження значень керованих змінних зверху, накладені нерівностями обмежень, несумісні із загальними обмеженнями значень керованих змінних. Дійсно: не існує такого значення x_3, при якому буде істинною система нерівностей $\{x_3 \leqslant -5,\ x_3 \geqslant 0\}$, а тому задача не має розв'язків.

3. Висновок

Виконуючи дану лабораторну роботу, ми навчились використовувати симплекс-метод для розв'язання задач лінійного програмування, а також розробляти програмне забезпечення для допомоги при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом.

A. Програма для розв'язку поставленої задачі

Лістинг A.1: Початковий код програми для розв'язання поставленої задачі лінійного програмування симплекс-методом

```python
from scipy.optimize import linprog

# Objective function coefficients
c = [-4, -3, 2]

# Upper bound ineqality constraints coefficients
A_ub = [
    [-1, -1, 0],
    [0, 0, 1],
]

```

```python
# Upper bound inequality (less than) constraints vector
b_ub = [
    2,
    -5
]

# Equation constraints coefficients
A_eq = [
    [-2, -2, 1],
]
# Equation constraints vector
b_eq = [
    4,
]

# Variable bounds (x_{1, 2, 3} \geqslant 0)
x1_bounds = (0, None)
x2_bounds = (0, None)
x3_bounds = (0, None)

# Solve the problem
res = linprog(
    c=c,
    A_ub=A_ub,
    b_ub=b_ub,
    A_eq=A_eq,
    b_eq=b_eq,
    bounds=[x1_bounds, x2_bounds, x3_bounds],
    method="revised-simplex",
)

# Print the result
print(res)
```

Лістинг А.2: Файл з описом залежностей розробленої програми

```
numpy==1.17.2
scipy==1.3.1
```