

ПРАКТИКУМ

Заняття 1. Предмет, методи та завдання курсу «Дослідження операцій». Побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей

Питання для розгляду:

1. Основні поняття дисципліни. Методи та завдання курсу.
2. Математичне моделювання в теорії дослідження операцій. Методика проведення дослідження операцій.
3. Поняття економіко-математичної моделі. Основні види економіко-математичних моделей та задачі, які вирішуються з їх допомогою.
4. Економічна і математична постановка задачі математичного програмування. Основні економічні задачі, які розв'язуються з допомогою методів математичного програмування.

Основні поняття та терміни

Операція, дослідження операцій, математична модель, оптимізаційна модель, математичне програмування, цільова функція, система обмежень

Задача 1. Фірма спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів) обмежені. Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в таблиці.

Вид продукції	Норма витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум.од.
	Робочого часу, люд.-год	Листового заліза, м ²	Скла, м ²	
Морозильна камера	8	3	3	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	50	--

Записати економіко-математичну модель визначення виробничої програми, виконання якої забезпечить отримання максимального доходу від реалізації продукції.

Задача 2. Фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 30 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 6 га посівних площ. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведено в таблиці.

Показник	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів (в розрахунку на 1 га)	6	30	350
Затрати праці механізаторів, людино-змін (з розрахунку на 1 га)	3	9	100
Урожайність, т/га	5	48	--
Прибуток, тис. грн./т	1,1	2	--

Записати економіко-математичну модель визначення плану розподілу посівних площ між двома культурами, за якого фермер отримає максимальні прибутки.

Задача 3. Продукція чотирьох видів А, В, С, D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведена в таблиці.

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції, год			
	А	В	С	Д
1	2	3	4	2
2	3	1	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн. для верстаті 1 і 15 грн. – для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 – 380 машино-годин. Ціна одиниці продукції видів А, В, С і D складає відповідно

75, 70, 60 і 45 грн. Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Задача 4. Для виготовлення трьох видів виробів А, В, С використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу на фрезерному обладнанні складають для виробу А – 3, В – 6, С – 5 верстато-годин відповідно; на токарному обладнанні для виробу А – 2, В – 7, С – 3 верстато-годин; на зварювальному обладнанні для виробу А – 6, В – 5, С – 7 верстато-годин; на шліфувальному обладнанні для виробу А – 5, В – 8, С – 6 верстато-годин. Загальний фонд робочого часу фрезерного обладнання складе 130 од, токарного, – 220 од, зварювального, – 210 од, шліфувального, – 260 од. Прибуток від реалізації одного виробу А складе 9 грн, В - 12 грн, С - 11 грн.

Записати модель визначення кількості виробів кожного виду, яку слід виготовити підприємству, щоб прибуток від реалізації був максимальний.

Задача 5. Кредитний аналітик розглядає 10 клопотань про надання кредитів юридичним особам. Для кожного з проектів є розраховані величини економічних ефектів від їхньої реалізації (Eff) та необхідна сума залучених коштів(MD), тис. грн:

Eff	1,2	1,3	1	0,8	0,9	0,6	1,3	1,7	2,1	1,5
MD	95	91	45	24	110	25	15	45	90	35

Кредитний портфель банку може складати не більше 250 тис.грн. Побудувати модель максимізації економічного ефекту кредитного портфелю при заданому обмеженні.

Задача 6. За заданих вихідних умов функціонування підприємства визначити виробничу програму, яка максимізує величину прибутку. Загальний обсяг ресурсів: трудових — 1600 ум. од., матеріальних — 1000 ум. од.

Види продукції	Витрати ресурсів на одиницю продукції		Попит на продукцію		Прибуток з одиниці продукції, ум. од.
	трудові ум.од.	матеріальні, ум.од.	нижня межа	верхня межа	
1	2,4	0,8	10	80	12
2	2,8	2,0	0	100	16
3	2,6	1,8	40	400	20

Задача 7. Для заключення договорів підприємець повинен побувати в 4 містах: А, В, С, D, відстані між якими в км вказано в таблиці (жодне з трьох міста не знаходяться на одній прямій з іншими)

	A	B	C	D
A	-	630	570	140
B	630	-	390	1050
C	570	390	-	45
D	140	1050	45	-

Підприємець, виїхавши з міста А, повинен відвідати всі міста, побувавши в кожному з них один і тільки один раз і повернутися в А. Необхідно визначити таку послідовність об'їзду міст, при якій довжина маршруту буде найменшою.

Побудувати економіко-математичну модель задачі.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Основні етапи розвитку дослідження операцій як напряму науки.
2. Предмет, об'єкт та методи дослідження операцій.
3. Основні завдання дисципліни.
4. Структура оптимізаційної економіко-математичної моделі.
5. Основні етапи побудови оптимізаційної економіко-математичної моделі.
6. З якою метою проводиться дослідження операцій в організаційних, економіко-виробничих системах?
7. Структура економетричної моделі та характеристика її складових. З якою метою до економетричної моделі включають випадкову складову?

8. Поняття та види економіко-математичних моделей. Завдання, які вирішуються з допомогою економіко-математичних моделей різних видів.

9. Показати необхідність переходу вивчення виробничих то соціально-економічних явищ і процесів від вербальних економіко-математичних моделей до їх кількісного аналізу.

Задача 1. Підприємство може виготовляти чотири види продукції: П1, П2, П3, П4. Норми витрат ресурсів і прибуток від одиниці кожного виду ресурсу наведені в таблиці.

Показники	Продукція				Ресурси
	П1	П2	П3	П4	
Трудові ресурси, людино-зміни	2,5	2,5	2	1,5	100
Напівфабрикати, кг	4	10	4	6	260
Обладнання, станко-зміни	8	7	4	10	370
Прибуток від од. продукції	40	50	100	80	

Записати математичну модель випуску продукції, який максимізує прибутки якщо:

1. кількість одиниць третьої продукції повинна бути в 3 рази більшою кількості одиниць першої продукції;

2. першої продукції слід випускати не менше 25 одиниць, третьої – не більше 30, а другої і четвертої – у співвідношенні 1:3.

Задача 2. Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 грн. на місяць. Хвилина радіо реклами коштує фірмі 5 грн., а телереклами – 90 грн. Фірма має намір використовувати радіо рекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіо реклами. Записати модель знаходження розподілу коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяги збуту продукції фірми будуть найбільшими.

Задача 3. Клієнт доручив брокеру біржі розмістити 100 000 дол. США на фондовому ринку, сформувати портфель цінних паперів щоб отримати максимально можливі відсотки від вкладеного капіталу. Вибір обмежений чотирма можливими об'єктами інвестицій – акції А, В, С і D, які дозволяють отримати відповідно 6, 8, 10 і 9% річних від вкладеної суми. При цьому

клієнт доручив не менше половини інвестицій вкласти в акції А і В. З метою забезпечення ліквідності не менше 25% загальної суми капіталу потрібно розмістити в акції D. Враховуючи прогнози на фондовому ринку, в акції С можна вкладати не більше 20% капіталу. Визначити оптимальну з точки зору максимізації річних прибутків структуру інвестиційного портфеля (побудувати модель).

Задача 4. З вокзалу м.Київ щодня відправляються швидкі та пасажирські поїзди.

Тип вагона		Багаж-ний	Пошто-вий	Плац-карт	Купей-ний	СВ
К-сть вагонів в поїзді	швидкий	1	1	8	4	1
	Пасажир-ський	1	0	5	6	3
Пасажиromісткість, чол.				58	40	32
Парк вагонів		10	8	80	70	30

Побудувати математичну модель, за допомогою якої розраховується максимально можлива кількість пасажирів, яку можна відправити з вокзалу.

Задача 5. Є наступні техніко-економічні показники виробництва:

Показники	Види продукції			Запаси
	А	В	С	
Собівартість в-цтва од. продукції, грн.	22	26	35	
Прибуток від реалізації од.продукції, грн.	5	7	8	
Питомі витрати ресурсів, од. Р1	5	3	--	250
Р2	1	--	3	280
Р3	2	5	2	390

Обов'язковим є виготовлення 1 од. продукції А, 3 од. продукції В, 2 од. продукції С. Побудувати математичну модель визначення виробничої програми максимізації доходу від реалізації продукції підприємства.

Заняття 2. Побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей. Графічний метод розв'язку задачі лінійного програмування.

1. Математична та економічна постановка задачі лінійного програмування.
2. Задача оптимального планування виробництва.
3. Задача про дієту (про склад суміші).
4. Транспортна задача.
5. Задача оптимального розподілу виробничих потужностей.
6. Задача про призначення.
7. Задача комівояжера.
8. Задача оптимального розподілу капіталовкладень.
9. Форми запису задачі лінійного програмування.
10. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
11. Графічний метод розв'язку задачі лінійного програмування.
12. Властивості розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом.
13. Альтернативний оптимум та його графічне тлумачення.

Основні поняття та терміни

Лінійне програмування, математична і економічна постановка ЗЛП, цільова функція, система обмежень, пряма, півплощина, многокутник розв'язків, вектор-градієнт.

Задача 1. Підприємство має деякі запаси сировини (тис.т) і час роботи обладнання (верстато-годин) і може виготовляти продукцію двома різними технологічними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один день і загальний ресурс при кожному способі задані в таблиці (у грош.од). При першому способі виробництва підприємство випускає за один день 3 тис. виробів , при другому - 5 тис. виробів .

Виробничий ресурс	Витрати ресурсів за 1 день при роботі		Загальний ресурс
	1-а технологія	2-а технологія	
Сировина	1,5	1,7	150
Обладнання	0,5	0,9	70

Скільки днів повинне працювати підприємство по кожному з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продукції? (записати економіко-математичну модель та розв'язати її графічним методом).

Задача 2. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць – А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в таблиці.

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	А	В	
1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А – 50 грн., а моделі В – 30 грн. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попит на модель В більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень. Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, за яких прибуток фірми буде максимальним.

Задача 3. Розв'язати графічним методом:

$$L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 5; \quad x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 4. Розв'язати графічним методом:

$$L = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5. Розв'язати графічним методом:

$$L = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ -3x_1 - 10x_2 \geq 30, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 \leq 7; \quad x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 6. Для поліпшення фінансового стану фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоспроможної продукції, для чого в одному з цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що вимагає 19 м кв. площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 тис. грош. од., при цьому вона може купити обладнання двох видів. Придбання одного комплекту обладнання 1-го вигляду коштує 1 тис. грош.од., 2-го вигляду – 3 тис. грош.од. Придбання одного комплекту обладнання 1-го вигляду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 грош.од., а одного комплекту обладнання 2-го вигляду – на 4 грош. од. Знаючи, що для установки одного комплекту обладнання 1-го вигляду вимагається 2 м кв. площі, а для обладнання 2-го вигляду – 1 м кв. площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Які задачі лінійного програмування можна розв'язати графічним методом?
2. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?
3. Суть алгоритму графічного методу розв'язку задач лінійного програмування.
4. Геометричний зміст розв'язків нерівностей, рівнянь та їх систем.
5. Яким чином можна побудувати вектор-градієнт?

6. Розв'язати графічним методом:

$$L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 \leq 18, \\ x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. Розв'язати графічним методом:

$$L = -4x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 10x_2 \geq 10, \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ x_1 \leq 7; x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати графічним методом:

$$L = -x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, \\ -8x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 12, \\ x_1 \leq 9; x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9. Туристична фірма за сезон обслуговує в середньому 7500 туристів, маючи в своєму розпорядженні флотилію з двох типів суден, характеристики яких наведено в таблиці.

Показники	Корабель 1	Корабель 2	Ресурс
Пасажиромісткість, чол.	2000	1000	60000
Пальне, т	12000	7000	
Екіпаж, чол..	250	100	

Дохід від експлуатації корабля типу “1” – 5 млн грн., типу “2” – 2 млн грн. Побудувати ЕММ визначення оптимальної з точки зору максимізації доходу кількості кораблів кожного типу, яку слід експлуатувати і визначити цю кількість.

Заняття 3,4. Симплексний метод розв'язку задачі лінійного програмування. Метод штучного базису

Питання для розгляду:

1. Канонічна форма задачі лінійного програмування.
2. Правила зведення задачі лінійного програмування до канонічної форми.
3. Суть алгоритму симплексного методу.
4. Початковий опорний план.
5. Перехід від одного опорного плану до іншого.
6. Критерій оптимальності опорного плану.
7. Метод штучного базису.
8. Властивості розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Основні поняття та терміни

Лінійне програмування, канонічна форма ЗЛП, допоміжні змінні, фіктивні змінні, симплекс-таблиця, розв'язковий елемент, правило чотирикутника, опорний план, індексна стрічка, симплекс-перетворення, метод штучного базису.

Задача 1. Кондитерська фабрика для виготовлення трьох видів карамелі А, В і С використовує 3 види основної сировини: цукор, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1т карамелі кожного виду наведені в таблиці. В ній же вказані обсяги сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також прибуток від реалізації 1т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1т карамелі			Загальні запаси сировини, т
	А	В	С	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	--	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1т продукції, грн	200	250	300	

Побудувати оптимізаційну модель і визначити такий план виробництва карамелі, який би забезпечував максимальний прибуток від її реалізації.

Задача 2. Конкуренція змушує торгівельні підприємства займатися ще й випуском та реалізацією продукції власного виробництва, наприклад салатів, піци тощо. Норми витрат на виробництво різних видів піци, запаси ресурсів та вартість готової продукції наведені в таблиці.

Продукти	Норми витрат на виготовлення 100 шт. піци			Запаси продуктів, кг
	асорті	грибна	салями	
Гриби	6	7	2	40
Ковбаса	5	2	8	36
Тісто	10	8	6	50
Ціна за 100шт.,грн.	1000	800	700	

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать підприємству отримання максимально можливого доходу (побудувати економіко-математичну модель і розв'язати її симплекс-методом).

Задача 3. Фірма виготовляє і продає столи, шафи і стільці з деревини хвойних і широколистих порід. Витрати кожного виду деревини в кубометрах на одиницю виробу, запаси деревини та ціна реалізації одиниці виробу наведені в таблиці.

Виріб	Витрати сировини, м³		Ціна виробу, грн.
	хвойні	широколисті	
Стіл	0,15	0,2	500
Шкаф	0,3	0,1	800
Стілець	--	0,1	100
Запаси деревини, м³	80	40	

Визначити оптимальну кількість продукції кожного виду, яку необхідно виготовляти і продавати для отримання максимального доходу.

Задача 4. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0; \ x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Задача 5. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$\begin{cases} L = 5x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 6. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 7. Взуттєва фабрика може виготовляти три види взуття: чоловіче, жіноче і дитяче. На кожну пару чоловічого, жіночого і дитячого взуття відповідно необхідно клею 20, 20 і 10 г, шкіри 4, 2 і 1 дм². Вартість однієї пари чоловічого, жіночого та дитячого взуття складає 350, 400 і 200 грн. Запаси клею складають 3 т, шкіри – 4000 м². Розглянути наступні 2 операції: в першій операції всі наявні ресурси використовуються повністю, а в другій остання вимога не є обов'язковою. В обох операціях мета полягає в виборі такого плану виробництва взуття, при якому вартість виготовленої продукції буде максимальною. Знайти оптимальні стратегії в обох операціях і порівняти отримані операції.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Основні етапи побудови оптимізаційної економіко-математичної моделі.
2. З якою метою проводиться дослідження операцій в організаційних, економіко-виробничих системах?
3. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?
4. Які є форми запису задачі лінійного програмування?
5. Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим?
6. Основні аналітичні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.

7. Для розв'язування яких математичних задач застосовують симплексний метод?

8. Суть алгоритму симплексного методу.

9. Умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.

10. Як обирати розв'язковий стовпець і розв'язковий рядок в симплекс-таблиці?

11. Суть методу штучного базису.

12. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq -2,$$

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_3 \leq -5,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0$$

13. Розв'язати задачу лінійного програмування методом штучного базису:

$$L = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0$$

14. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$L = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 10,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8,$$

$$x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0$$