МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

СИСТЕМИ
ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Лабораторний практикум
для студентів сеціальності 123
«Комп'ютерна інженерія»

Київ 2020

УДК 004.896 (076.5)
Р584

Укладачі: *Д.П. Кучеров* – д.техн.наук, с.н.с.;
Г.П. Росінська – канд.техн.наук, доц.

Рецензент: *Т.Ф.Шмельова* – д. техн. наук, професор.

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № _____ від ____________ р.).

Системи підтримки прийняття рішень: лабораторний практикум / уклад.: Д.П. Кучеров, Г.П. Росінська. – К.: НАУ, 2020. – 44 с.

У лабораторному практикумі з дисципліни «Системи підтримки прийняття рішень» наведено основні теоретичні відомості, приклади розв'язку поставлених задач з використанням запронованих методів СППР, завдання до лабораторних робіт, контрольні питання.

Для студентів спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія» освітньо-професійної програми «Системне програмування».

Вступ

Мистецтво прийняття найкращих рішень є сутністю будь-якої сфери людської діяльності. Розвиток науки, ускладнення економічних і соціальних зв'язків і відносин привели до розробки спеціальної галузі наукового знання - теорії прийняття рішень. В міру ускладнення задач з'явилося багато різних напрямків цієї науки, які мають справу з однією і тією ж проблемою аналізу можливих способів дії з метою знаходження оптимального в даних умовах рішення проблеми.

В даний час необхідність використання підходів і методів ТПР в управлінні очевидна. Виявлення залежності між окремими складними процесами і явищами, які раніше здавалися не пов'язаними один з одним, призводять до різкого зростання труднощів прийняття обгрунтованих рішень. Витрати на їх здійснення безперервно збільшуються, наслідки помилок стають все серйозніше, а звернення до професионального досвіду та інтуїції не завжди призводить до вибору найкращої стратегії.

Мета лабораторних робіт – залучити студентів до вивчення методологічно-організаційних особливостей прийняття управлінських рішень та набуття практичних навичок із проектування, створення та застосування систем підтримки прийняття рішень на базі нових інформаційних технологій та обчислювальної техніки.

Дисципліна «Системи підтримки прийняття рішень» є теоретичною та практичною основою сукупності знань та вмінь, що формують професійний профіль фахівця у галузі інформаційних управляючих систем та технологій.

Кожну лабораторну роботу студент повинен виконати самостійно відповідно до задачі, визначеної викладачем. Перед виконанням кожної лабораторної роботи студент має продемонструвати викладачу досягнутий рівень індивідуальної підготовки: надати в електронному та друкованому вигляді робочі матеріали щодо виконання лабораторної роботи. Виконавши лабораторну роботу, студент повинен показати результати роботи, відповісти на додаткові запитання, скласти письмовий звіт на підставі результатів виконаної роботи, який має складатися з титульного аркуша, завдань, порядку виконання роботи, проілюстрованого екранними формами результів роботи та висновків.

Лабораторна робота 1

ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Мета: ознайомлення з основним принципом теорії прийняття рішень, методами, класами задач теорії прийняття рішень. Визначення системи підтримки прийняття рішень.

Основні теоретичні відомості

Під прийняттям рішень розуміється вибір найкращого варіанта рішення з безлічі допустимих альтернатив.

У загальному випадку процес прийняття рішень включає в себе два етапи. На першому етапі формалізується і вирішується поставлена задача. На другому результат пред'являється Особі, яка приймає рішення (ОПР). Це той, на кому лежить відповідальність за прийняте рішення, той, хто підписує наказ або інший документ, в якому представлено рішення. Зазвичай це генеральний директор чи голова правління фірми, командир військової частини, мер міста і т.п., словом - відповідальний працівник. Але іноді діє колективна ОПР, наприклад, Рада директорів фірми.

ОПР або схвалює результат поставленої задачі або відкидає. Таким чином, процес прийняття рішень може бути циклічним, тому важливо, щоб ОПР володіла методами і могла сама поставити задачу, або аналітик, який працює з задачею, був "в команді" і розумів суть проблеми, яку необхідно вирішити.

Основний принцип теорії прийняття рішень (ТПР), сформулювали Нейман і Моргенштерн: особа, яка приймає рішення, має завжди вибирати альтернативу з максимально очікуваною корисністю. Цей результат будується на ряді аксіом, його називають *гіпотезою очікуваної корисності.* Тому і задачі формулюються відповідним чином: чим корисніше альтернатива - тим вище кількісна оцінка - "чим більше, тим краще".

У загальному випадку задача ТПР будується наступним чином:

1. встановлюються всі можливі способи дій – альтернативи;
2. встановлюються їх послідовність та кількісна оцінка;
3. встановлюються цілі учасників процесу прийняття рішень;

4. встановлюються природа впливу на цей процес різних випадкових і детермінованих керуючих факторів.

Потім підбирається відповідна модель і метод розв'язання задачі.

В рамках сучасної ТПР розроблені моделі для опису практично всіх типів задач прийняття рішень, кожному з яких відповідають певні аналітичні методи. Існує досить багато класифікацій задач теорії прийняття рішень:

- з урахуванням часу: статичні та динамічні;
- по кількості цілей дослідження: одна або кілька;
- за кількістю критеріїв: один або кілька;
- за структурою учасників: з одним учасником, двома, кінцевим числом і нескінченним;
- за характером вихідних даних: детерміновані і стохастичні і т.д.

Кожному класу задач відповідають методи ТПР: лінійне і нелінійне програмування, критеріальний аналіз, теорія ігор і варіаційних рядів.

Всі ці класифікації охоплюють нерівноцінні області проблем, багато з дисциплін перекривають один одного по постановці задач та методів їх розв'язку.

Системний підхід при прийнятті рішень

Під час обговорення проблем прийняття рішень часто говорять про системний підхід, систему, системний аналіз. Мова йде про те, що треба розглядати проблему в цілому, а не "висмикувати" для обговорення якусь одну частину, хоча і важливу. Так, наприклад, при масовому житловому будівництві можна "висмикнути" частину - вартість квадратного метра в будинку. Тоді найбільш дешеві будинки - п'ятиповерхівки. Якщо ж поглянути системно, врахувати вартість транспортних та інженерних комунікацій (підведення електроенергії, води, тепла і ін.), то оптимальним рішенням вже є дев'ятиповерхові будинки.

Визначень поняття «система» багато, але загальним в них є те, що про систему говорять як про множину, між елементами якої існують зв'язки. Цілісність системи забезпечуються тим, що взаємозв'язки всередині системи є суттєво сильнішими, ніж зв'язок будь-якого її елемента з будь-яким елементом, що лежить за межами системи. За визначенням дійсного члена Російської академії наук Н.Н.Моисеева: "Системний аналіз - це дисципліна, що займається проблемами прийняття рішень в умовах, коли вибір альтернативи вимагає аналізу складної інформації різної фізичної природи" [1].

Сучасні методи прийняття рішень

При прийнятті рішень застосовують весь арсенал методів сучасної прикладної математики. Вони використовуються для оцінки ситуації та прогнозування при виборі цілей, для генерування безлічі можливих варіантів рішень і вибору найкращого з них.

Перш за все можна виділити різні методи оптимізації (математичного програмування). Коли критеріїв багато, то використовують різні методи згортки критеріїв, а також інтерактивні комп'ютерні системи, які дозволяють знаходити рішення в процесі діалогу людини та ЕОМ.

Застосовують *імітаційне моделювання*, яке базується на комп'ютерних системах і відповідають на питання: "Що буде, якщо ...?", *метод статистичних випробувань (Монте-Карло)*, *моделі надійності* та *масового обслуговування*. При прийнятті рішень застосовують також *ймовірносно-статистичні моделі* та *методи аналізу даних*.

На особливу увагу заслуговують проблеми невизначеності і ризику, пов'язані як з природою, так і з поведінкою людей. Розроблені різні способи опису невизначеностей: імовірнісні моделі, теорія нечіткості, інтервальна математика. Для опису конфліктів (конкуренції) корисна теорія ігор. Для структуризації ризиків використовують дерева причин та наслідків.

Необхідно виділити, що дуже корисні і різні прості прийоми прийняття рішень [2]. Наприклад, при порівнянні двох можливих місць роботи дуже допомагає таблиця з трьох стовпців. У лівому з них перераховані характеристики робочого місця: заробіток, тривалість робочого часу, час у дорозі від будинку до роботи, надійність підприємства, можливості для професійного росту, характеристики робочого місця і безпосереднього керівництва і ін. А в двох інших стовпцях - оцінки цих характеристик, в "натуральних" показниках або у відсотках від максимуму. Іноді при погляді на подібну таблицю все відразу стає ясно. Але можна обчислити значення узагальненого показника, увівши вагові коефіцієнти та склавши зважені оцінки уздовж стовпців. Не менш корисно зобразити на папері можливі варіанти рішення, яке належить прийняти, а також можливі реакції осіб і організацій на ті чи інші варіанти рішення, а потім і можливі відповіді на ці реакції. Корисні таблиці доводів "за" і "проти" та ін.

Приклад: Припустимо, що відповідно з діловими зобов'язаннями вам необхідно протягом п'яти тижнів п'ять разів відвідати місто В (а живете ви в місті А). Ви повинні бути в місті В у понеділок першого тижня і остаточно повернутися в місто А в середу п'ятого тижня. Квиток з міста А в місто В і назад коштує 400 дол. Проте ви можете отримати 20% знижки від вартості квитка, якщо виліт доведеться на кінець тижня. Крім того, слід врахувати, що вартість квитка тільки в одну сторону дорівнює 75% вартості замовленого квитка. Ви, звичайно, хочете мінімізувати вартість перельотів. Як це зробити?

Описану ситуацію можна розглядати як задачу прийняття рішень, де для пошуку оптимального рішення вимагається визначити три основних компоненти.

1. Що в даному випадку вважати *альтернативним* рішенням?
2. Якими *обмеженнями* потрібно задовольнити можливі рішення?
3. За яким *критерієм* повинні відбиратися альтернативні рішення?

В задачі можна встановити наступні *альтернативи*:

1. Купівля п'яти замовлених квитків А-В-А(тобто з міста А в місто В і назад).
2. Купівля одного квитка в одну сторону А-В, чотирьох квитків А-В-А, що захоплюють кінець тижня, і одного "односпрямованого" квитка В-А.
3. Купівля квитка А-В-А для першого тижня, причому між датами вильотів повинен бути понеділок; для останнього тижня придбання квитка А-В-А, між датами якого повинна бути середа, причому перший і останній квитки повинні захоплювати останні дні тижня; купівля чотирьох квитків А-В-А, між датами яких також є останні дні тижня.

Обмеженнями в даній задачі є дні прибуття: понеділок першого тижня і середа п'ятого.

В даному прикладі *критерієм* для оцінки можливих альтернатив є ціна квитків. Альтернатива, що забезпечує найнижчу вартість квитків, буде найкращою. В даному випадку маємо наступні варіанти:

1: ціна квитків=5*400=2000 дол.

2: ціна квитків=0,75*400+4*0,8*400+0,75*400=1800 дол.

3: ціна квитків=5*(0,8*400)=1600 дол.

Очевидно, що найкращою є третя альтернатива [3].

Системи підтримки прийняття рішень

В даний час методи прийняття рішень зазвичай реалізуються у вигляді комплексів комп'ютерних програм, які називаються системами підтримки прийняття рішень СППР. Оскільки застосування систем підтримки прийняття рішень є досить трудомістким, ці методи і системи найбільш часто застосовуються в тих завданнях, в яких витрати на розробку і освоєння СППР окупають себе. До таких завдань відносяться, наприклад, задачі планування діяльності корпорацій, завдання конструювання складних технічних систем, завдання вибору варіантів експлуатації дорогого обладнання і т.д.

З іншого боку, здешевлення комп'ютерів та розробка масових відносно простих графічних засобів робить використання систем підтримки прийняття рішень дешевим, доступним і наочним, що дозволяє використовувати їх людьми в повсякденному житті. Як приклад можна привести супутникові засоби орієнтування на місцевості, що стали загальнодоступними.

Теорія прийняття рішень і особливо методи, що розвиваються на її основі базуються на знаннях осіб, які приймають участь в процесі прийняття рішень. Тому розуміння сутності процесу прийняття рішення і можливостей особи в цьому процесі є основою для створінь і аналізу методів, а також й систем призначених для підтримки осіб, які приймають рішення.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант завдання слід отримати у викладача.

1. Яку модель мотоцикла запустити в серію? Вихідні дані для прийняття рішення наведені в таблиці. Розберіть чотири критерії прийняття рішення: песимістичний, оптимістичний, середнього прибутку, мінімальної вигоди.

Ціна на бензин	Мотоцикл "Вітязь"	Мотоцикл "Комар"
Низька (20%)	900	700
Середня (60%)	700	600
Висока (20%)	100	400

2. Проаналізуйте твердження "максимум прибутку при мінімумі витрат". Як можна позбутися від його суперечливості? Запропонуйте якомога більше способів.

3. Чи доцільно, на Ваш погляд, купити 1000 квитків лотереї з метою розбагатіти?

4. Чи має сенс твердження "мета роботи фірми - максимізація прибутку"?

Контрольні питання:

1. Дати визначення поняттю *прийняття рішень.*
2. Що можна віднести до завдань *прийняття рішень*?
3. Основи *теорії прийняття рішень*.
4. Процес прийняття рішень.
5. Люди та їх ролі в процесі прийняття рішень:
   - особа, яка приймає рішення;
   - власник проблеми;
   - учасник активної групи;
   - виборець;
   - член групи, що ухвалює погоджені рішення;
   - експерт;
   - консультант з прийняття рішень;
   - помічник ОПР.
6. Дати визначення поняттю *альтернатива*. Види альтернатив. Їх мінімальна кількість.

Лабораторна робота 2

МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Мета: ознайомлення з методом аналізу ієрархій. Студент має представити структуру прийняття рішення отриманої задачі в умовах визначеності з двома ієрархічними рівнями, та обрати оптимальну альтернативу.

Основні теоретичні відомості

Моделі лінійного, динамічного і т.д. програмування є прикладом прийняття рішень в умовах визначеності. Ці моделі застосовують лише в тих випадках, коли альтернативні розв'язки можна зв'язати між собою точними лінійними функціями. Але існує й інший підхід до прийняття рішень в умовах визначеності, коли визначаються деякі кількісні показники, що забезпечують числову шкалу переваг для можливих альтернативних розв'язків. Цей підхід відомий як ***метод аналізу ієрархій***.

Етапи розв'язку завдання:

1. Якщо є n критеріїв на заданому рівні ієрархії, то створюється матриця А розмірності $n \times n$, яка називається матрицею парних порівнянь. Вона відображує судження особи, що ухвалює рішення, щодо важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується таким чином, що критерій у рядку i (i=1, 2, …, n) оцінюється щодо кожного з критеріїв, представлених n стовпцями. Позначимо через a_{ij} елемент матриці А, що перебуває на перетинанні i –рядка й j – стовпця. Відповідно до методу аналізу ієрархій для опису згаданих оцінок використовуються цілі числа від 1 до 9. При цьому a_{ij}=1 означає, що i –й та j – й критерій однаково важливі, a_{ij}=5 відображує думку, що i –й критерій значно важливіше, чим j – й, а a_{ij}=9 указує, що i –й критерій надзвичайно важливіше j – го. Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно. На матрицю парних порівнянь накладаються наступні обмеження:

якщо $a_{ij}=k$, то $a_{ji}=1/k$.

усі діагональні елементи a_{ij} матриці A повинні бути рівні 1, тому що вони виражають оцінки критеріїв щодо самих себе.

2. Визначити відносні ваги w критеріїв і альтернатив шляхом нормалізації матриці А (розподіл елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця). Відносні ваги w, що шукаються обчислюються тепер у вигляді середніх значень елементів відповідних рядків нормалізованої матриці А.

3. Визначити погодженість матриці А. Погодженість означає, що розв'язок буде погоджений з визначеннями парних порівнянь критеріїв або альтернатив. З математичної точки зору погодженість матриці А означає, що $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ для всіх i, j і k. Властивість погодженості вимагає лінійної залежності стовпців (і рядків) матриці А. Зокрема, стовпці матриці порівняння розміром 2×2 є залежними, і, отже, така матриця завжди є *погодженою*. Не всі матриці порівнянь є погодженими, тому що будуються на основі людських суджень. При цьому необхідно визначити: чи є рівень непогодженості прийнятним.

4. Ідеально погоджена матриця A породжує нормалізовану матрицю N, у якій усі стовпці однакові.

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}.$$

Матриця порівнянь А може бути отримана з матриці N шляхом розподілу елементів i-го стовпця на w_i (це процес, зворотний знаходженню матриці N з A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи наведене визначення матриці A, маємо

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

У компактній формі умова погодженості матриці A формулюється в такий спосіб. Матриця A буде погодженою тоді й тільки тоді, коли

$$Aw = nw,$$

де w – вектор стовпець відносних ваг w_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Коли матриця A не є погодженою, відносна вага w_i апроксимується середнім значенням n елементів i-й рядка нормалізованої матриці N. Позначивши через $\overline{w}$ обчислену оцінку (середнє значення в рядку), умова погодженості матриці можна записати

$$A\overline{w} = n_{max}\overline{w},$$

де $n_{\max} \geq n$. У випадку $n_{\max} = n$ матриця порівняння A є ідеально погодженою.

Рівень непогодженості матриці A обчислюється з виразу:

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

де $CI = \frac{n_{\max} - n}{n-1}$ - коефіцієнт погодженості матриці А,

$RI = \frac{1{,}98(n-2)}{n}$ - стохастичний коефіцієнт погодженості матриці А.

Стохастичний коефіцієнт погодженості RI визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнта CI для великої вибірки генерованих випадковим образом матриць порівняння А.

Якщо $CR \leq 0{,}1$, рівень непогодженості є прийнятним. А якщо ні, то рівень непогодженості матриці порівняння A є високим і особі, що ухвалює рішення, рекомендується перевірити елементи парного порівняння a_{ij} матриці A з метою одержання більш погодженої матриці.

Значення n_{max} обчислюється на основі матричного рівняння $A\overline{w} = n_{\max}\overline{w}$, при цьому неважко помітити, що i-е рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j = n_{\max}\overline{w}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = 1$, сума елементів у стовпці розрахункової матриці може бути записана в наступному виді

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j\right) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = n_{\max}.$$

У такий спосіб величину n_{max} можна визначити шляхом обчислення вектор-стовпця $A\overline{w}$ з наступним підсумовуванням його елементів.

Використовуючи отримані вагові коефіцієнти розраховується комбінована вага для кожної альтернативи. Альтернатива, комбінований ваговий коефіцієнт якої є найбільшим, являє собою оптимальний розв'язок.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива). Представити структуру прийняття рішення отриманої задачі в умовах визначеності з двома ієрархічними рівнями.

1. Відділ кадрів фірми звузив пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: Стив (S), Джейн (J) і Майса (M). Кінцевий відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (C), досвід роботи (К) та рекомендації (Р). Відділ кадрів використовує матрицю A (наведену нижче) для порівняння трьох критеріїв. Після проведених співбесід із трьома претендентами, побудовані матриці AC, AO і AP. Якого із трьох кандидатів слід прийняти на роботу?

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} C & O & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ O \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_c = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_o = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_p = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Кевин і Джун Парки (К і Д) купують новий будинок. Розглядаються три варіанти А, В та С. Парки встановили два критерії для вибору будинку: площа зеленої галявини (Л) і близькість до місця роботи (Б), а також розробили матриці порівнянь, наведені нижче. Необхідно оцінити три будинки в порядку їх пріоритету й обчислити коефіцієнт погодженості кожної матриці.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} К & Д \end{matrix} \\ \begin{matrix} К \\ Д \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_к = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} Л & Б \end{matrix} \\ \begin{matrix} Л \\ Б \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_Д = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} Л & Б \end{matrix} \\ \begin{matrix} Л \\ Б \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_{КЛ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{КБ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{ДЛ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{ДБ} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Автор книги по дослідженню операцій визначив три критерії для вибору видавництва, яке буде друкувати його книгу: відсоток авторського гонорару (R), рівень маркетингу (M) і розмір авансу (A). Видавництва H і P виявили цікавість до видання книги. Використовуючи наведені нижче матриці порівняння, необхідно дати оцінку двом видавництвам і оцінити погодженість розв'язку.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} R & M & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ M \\ A \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_R = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_M = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4. Професор політології планує передбачити результат виборів у місцеву шкільну раду. Кандидати I, B і S балотуються на одне місце. Професор ділить усіх виборців на три категорії: ліві (L), центристи (C) і праві (R). Оцінка кандидатів ґрунтується на трьох факторах: педагогічний досвід (О), відношення до дітей (Д) і характер (Х). Нижче наведені матриці порівняння для першого ієрархічного рівня, пов'язаного із градацією виборців (ліві, центристи й праві).

$$A = \begin{array}{c} \\ L \\ C \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_L = \begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_c = \begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_R = \begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Професор згенерував ще дев'ять матриць порівняння для трьох кандидатів на другому ієрархічному рівні, пов'язаному з педагогічним досвідом, відношенням до дітей і характером. Потім був використаний метод аналізу ієрархій для відомості цих матриць до наступних відносних ваг.

	Ліві			Центристи			Праві		
Кандидат	О	Д	Х	О	Д	Х	О	Д	Х
I	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	0,2	0,7	0,1	0,3
B	0,5	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4	0,1	0,4	0,2
S	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,2	0,5	0,5

Використовуючи цю інформацію, необхідно визначити, хто з кандидатів виграє вибори.

Контрольні питання:

1. Дати визначення поняттю *альтернатива*. Види альтернатив. Їх мінімальна кількість.
2. Дати визначення поняттю *критерії*. Види критеріїв.
3. Чим визначається складність завдань прийняття рішень?
4. Шкала оцінок за критеріями.
5. Основні завдання прийняття рішень.
6. Умови, в яких приймаються рішення.

Лабораторна робота 3

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ. КРИТЕРІЙ ОЧІКУВАНОГО ЗНАЧЕННЯ

Мета: ознайомлення з методом прийняття рішень в умовах ризику. Студент має представити отриману задачу у вигляді дерева рішень, прийняти рішення в умовах ризику обравши оптимальну альтернативу.

Основні теоретичні відомості

Якщо рішення приймається в умовах ризику, то вартості альтернативних рішень зазвичай описуються ймовірносними розподілами. З цієї причини прийняте рішення грунтується на використанні критерію *очікуваного значення*, відповідно до якого альтернативні рішення порівнюються з точки зору максимізації очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат. Такий підхід має свої недоліки, які не дозволяють використовувати його в деяких ситуаціях. Для них розроблені модифікації згаданого критерію.

Критерій очікуваного значення

Критерій очікуваного значення зводиться або до максимізації очікуваного (середнього) прибутку, або до мінімізації очікуваних витрат. В даному випадку мається на увазі, що прибуток (витрати), пов'язаний з кожним альтернативним рішенням, є випадковою величиною.

Дерево рішень. У наведеному нижче прикладі розглядається проста ситуація, пов'язана з прийняттям рішення при наявності кінцевого числа альтернатив і точних значень матриці доходів.

Приклад: Припустимо, що ви хочете вкласти на фондовій біржі 10 000 дол. в акції однієї з двох компаній: А чи В. Акції компанії А є ризикованими, але можуть принести 50% прибутку від суми інвестиції протягом наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливі, сума інвестиції може знецінитися до 20%. Компанія В забезпечує безпеку інвестицій з 15% прибутку в умовах підвищення котирувань на біржі і тільки 5% в умовах зниження котирувань. Всі аналітичні публікації, з якими можна познайомитися (а вони завжди є в достатку в кінці року), з імовірністю 60%

прогнозують підвищення котирувань і з ймовірністю 40% зниження котирувань. В яку компанію слід вкласти гроші?

Інформація, що пов'язана з прийняттям рішення, підсумована в наступній таблиці.

Альтернативні рішення	Прибуток за рік від інвестування 10000 дол.	
	в умовах підвищення котирувань	в умовах зниження котирувань
Акції компанії А	5000	-2000
Акції компанії В	1500	500
Імовірність події	0,6	0,4

Ця завдача може бути також представлена у вигляді дерева рішень, показаного на рис.3.1. Використовується два типи вершин: квадрат цє " вирішальна " вершина, а коло " випадкова ". Таким чином, з вершини 1 (" вирішальна ") виходять дві гілки, що представляють альтернативи, пов'язані з купівлею акцій компанії А чи В. Далі дві гілки, що виходять з " випадкових " вершин 2 і 3, відповідають випадкам підвищення та пониження котирувань на біржі з можливостями їх появи і відповідними платежами.

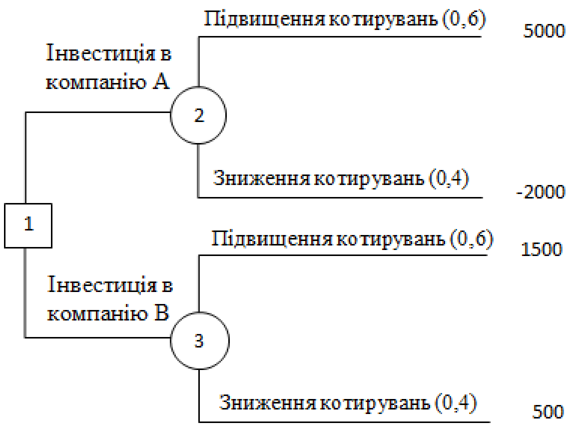

Рис.3.1. Дерево рішень задачі

Виходячи із схеми рис.3.1 отримуємо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив.

Для акцій компанії А: 5000 × 0,6 + (-2000) × 0,4 = 2 200 (дол.).
Для акцій компанії В: 1500 × 0,6 + 500 × 0,4 = 1 100 (дол.).
Правильним рішенням, заснованим на цих обчисленнях, є покупка акцій компанії А.

В теорії прийняття рішень підвищення і зниження котирувань на біржі називаються *станами природи*, можливими реалізаціями яких є випадкові події (в даному випадку з вірогідністю 0,6 і 0,4). У загальному випадку задача прийняття рішень може складатися з *n* станів природи та *m* альтернатив.

Якщо p_j ймовірність *j*-го стану природи, а a_{ij} - платіж, пов'язаний з прийняттям рішення *i* при стані природи *j* ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$), тоді очікуваний платіж для рішення *i* обчислюється у вигляді:

$$MV_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n,\ i = 1, 2, ..., n,$$

де за визначенням $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Найкращим рішенням буде або $MV_i{}^* = max_i \{MV_i\}$ або $MV_i{}^* = \min_i \{ MV_i \}$, в залежності від того, чи є платіж в задаче прибутком або витратами.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

1. Вас запросили на телевізійну гру *Колесо фортуни*. Колесо керується електронним чином за допомогою двох кнопок, які забезпечують колесу сильне (В) або слабке (Н) обертання. Саме колесо розділене на 2 рівні області - білу (Б) та червону (К). Вам повідомили, що в білій області колесо зупиняється з ймовірністю 0,3, а в червоній - 0,7. Плата, яку ви отримуєте за гру, дорівнює (в дол.) наступному:

	Б	К
Н	800	200
В	–2500	1000

a) Зобразіть відповідне дерево рішень.
b) Як слід нажимати на кнопку?

2. Фермер Мак-Кой може вирощувати або кукурудзу, або соєві боби. Імовірність того, що ціни на майбутній урожай цих культур підвищаться, залишаться на тому ж рівні або знизяться, дорівнює відповідно 0,25; 0,30 та 0,45. Якщо ціни зростуть, урожай кукурудзи дасть 30 000 дол. чистого прибутку, а урожай соєвих бобів - 10 000 дол. Якщо ціни залишаться незмінними, Мак-Кой лише покриє витрати. Але якщо ціни стануть нижчими, урожай кукурудзи і соєвих бобів призведе до втрат в 35 000 та 5 000 дол.

a) Зобразіть цю задачу у вигляді дерева рішень.

b) Яку культуру слід вирощувати Мак-Кою?

3. Припустимо, у вас є можливість вкласти гроші в три інвестиційні фонди відкритого типу: простий, спеціальний (що забезпечує максимальний довгостроковий прибуток від акцій дрібних компаній) та глобальний. Прибуток від інвестиції може змінитися в залежності від умов ринку. Існує 10%-ва ймовірність, що ситуація на ринку цінних паперів погіршиться, 50%-ва - що ринок залишиться помірним і 40%-ва - ринок буде зростати. Наступна таблиця містить значення відсотків прибутку від суми інвестицій.

Альтернатива (фонди)	Процент прибутку від інвестування %		
	Ринок, що погіршується	Помірний ринок	Ринок, що зростає
Простий	+ 5	+ 7	+ 8
Спеціальний	- 10	+ 5	+ 30
Глобальний	+ 2	+ 7	+ 20

a) Зобразіть цю задачу у вигляді дерева рішень.

b) Який фонд відкритого типу вам слід вибрати?

4. Припустимо, у вас є можливість вкласти гроші або в 7,5% облігації, які продаються за номінальною ціною, або в спеціальний фонд, який виплачує лише 1% дивідендів. Якщо існує ймовірність інфляції, процентна ставка зросте до 8%, і в цьому випадку номінальна вартість облігацій збільшиться на 10%, а ціна акцій фонду - на 20%. Якщо прогнозується спад, то процентна ставка знизиться до 6%. При цих умовах очікується, що номінальна вартість облігацій підніметься на 5%, а ціна акцій фонду збільшиться на 20%. Якщо стан економіки залишиться незмінним, ціна акцій фонду збільшиться на 8%, а номінальна вартість облігацій не зміниться. Економісти оцінюють в 20% шанси настання інфляції і в 15% - настання спаду. Ваше рішення щодо інвестицій приймається з урахуванням економічних умов наступного року.

a) Зобразіть цю задачу у вигляді дерева рішень.

b) Чи будете ви купувати акції фонду або облігації?

Контрольні питання:

1. Основні завдання прийняття рішень.
2. Умови, в яких приймаються рішення.
3. Використання критерія очікуваного значення.
4. Дайте визначення поняття дерево рішень.
5. Домінуючі та доміновані альтернативи.
6. Множина Еджворта-Парето (Е-П).

Лабораторна робота 4

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ. АПОСТЕРІОРНІ ЙМОВІРНОСТІ БАЙЕСА. ФУНКЦІЯ КОРИСНОСТІ

Мета: ознайомлення з методами прийняття рішень в умовах ризику. Студент має представити отриману задачу у вигляді дерева рішень, прийняти рішення в умовах ризику обравши оптимальну альтернативу.

Основні теоретичні відомості

В цій лабораторній розглядаються дві модифікації критерію очікуваного значення. Перша полягає у визначенні апостеріорної ймовірності на основі експерименту над досліджуваною системою, друга - у визначенні корисності реальної вартості грошей.

Апостеріорні ймовірності Байеса

При формулюванні критерію очікуваного значення, розподіли ймовірностей, які використовуються виходять, як правило, з накопиченої раніше інформації. У деяких випадках виявляється можливим перерахувати ці ймовірності за допомогою поточної і / або отриманої раніше інформації, яка зазвичай ґрунтується на дослідженні вибіркових (або експериментальних) даних. Отримувані при цьому ймовірності називають ***апостеріорними*** (або ***байесовськими***), на відміну від ***апріорних***, отриманих з вихідної інформації. Приклад показує, як розглянутий в лабораторній роботі 3, критерій очікуваного значення можна модифікувати так, щоб скористатися новою інформацією, що міститься в апостеріорних ймовірностях.

Приклад: Повернемося до прикладу лабораторної роботи 3, апріорні ймовірності 0,6 і 0,4 підвищення та зниження котирувань акцій на біржі були визначені з наявних публікацій фінансового характеру.

Припустимо, замість того, щоб повністю покладатися на ці публікації, ви вирішили провести приватне дослідження шляхом консультацій з експертом, який добре разбирається в питаннях, що стосуються фондової біржі. Експерт висловить спільну думку "за" або "проти" інвестицій, яка в подальшому визначається кількісно наступним чином. При підвищенні котирувань його думка з 90% -ною вірогідністю буде "за", при зниженні котирувань вірогідність його думки "за" зменшиться до 50%. Яким чином можна отримати користь з цієї додаткової інформації?

Думка експерта фактично представляє умовні ймовірності "за-проти" при заданих станах природи у вигляді підвищення та зниження котирувань. Введемо наступні позначення:

v_1 - думка "за",

v_2 - думка "проти",

m_1 - підвищення котирувань,

m_2 - зниження котирувань.

Думку експерта можна записати у вигляді імовірнісних співвідношень наступним чином:

$$P\{v_1|m_1\} = 0{,}9,\ P\{v_1|m_2\} = 0{,}1,$$
$$P\{v_2|m_1\} = 0{,}5,\ P\{v_2|m_2\} = 0{,}5.$$

За допомогою цієї додаткової інформації задача вибору рішення можна сформулювати наступним чином:

1. Якщо думка експерта "за", акції якої компанії слід купувати - А чи В?

2. Якщо думка експерта "проти", то, знову-таки, - акції якої компанії слід купувати - А чи В?

Розглянуту задачу можна представити у вигляді дерева рішень, показаного на рис.4.1. Вузлу 1 відповідає випадкова подія (думка експерта) з відповідними можливостями "за" чи "проти". Вузли 2 та 3 представляють вибір між компаніями А та В при відомій думці експерта "за" або "проти" відповідно. Вузли 4-7 відповідають випадковим подіям, пов'язаним з підвищенням і зниженням котирувань.

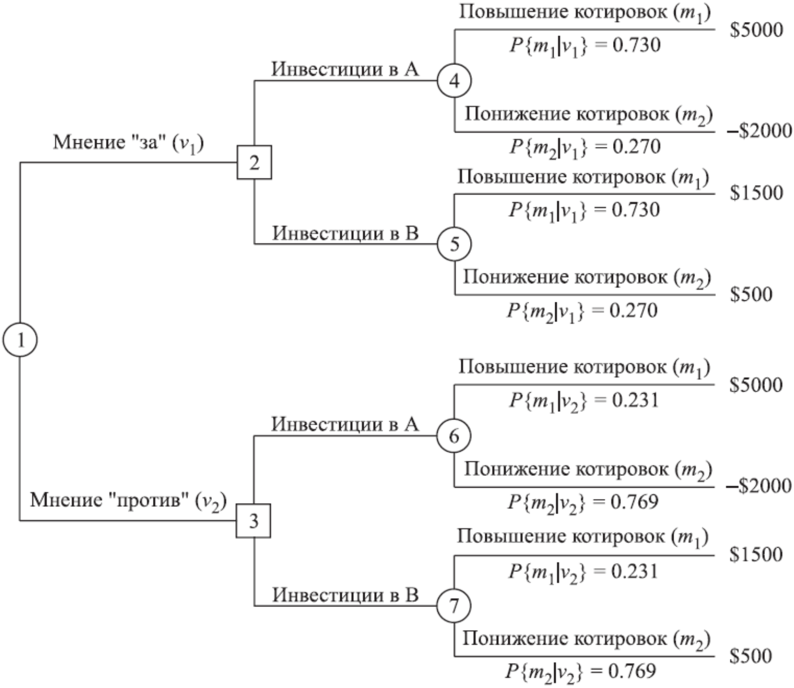

Рис.4.1. Дерево рішень задачі

Для оцінки різних альтернатив, показаних на рис.4.1, необхідно обчислити апостеріорні ймовірності $P\{m_i|v_j\}$, зазначені на відповідних гілках, що виходять з вузлів 4-7. Ці апостеріорні ймовірності обчислюються з урахуванням додаткової інформації, що міститься в рекомендаціях експерта, за допомогою наступних дій.

Крок 1. Умовні ймовірності $P\{v_j|m_i\}$, для задачі запишемо наступним чином.

$P\{v_j|m_i\}$ =

	V_1	V_2
m_1	0,9	0,1
m_2	0,5	0,5

Крок 2. Обчислюємо ймовірності спільної появи подій.

При заданих апріорних ймовірностях $P\{m_1\} = 0,6$ і $P\{m_2\} = 0,4$ ймовірності спільної появи подій визначаються множенням першго та другого рядків таблиці, отриманих на кроці 1, на 0,6 та 0,4 відповідно. В результаті маємо наступне

$P\{ m_i|v_j \}$ =

	V_1	V_2
m_1	0,54	0,06
m_2	0,20	0,20

Сума всіх елементів цієї таблиці дорівнює 1.

Крок 3. Обчислюємо абсолютні ймовірності.

Ці ймовірності виходять шляхом підсумовування елементів відповідних стовпців таблиці, отриманої на кроці 2. У підсумку маємо наступне

$P\{v_1\}$	$P\{v_2\}$
0,74	0,26

Крок 4. Визначаємо апостеріорні ймовірності.

Ці ймовірності обчислюються в результаті поділу кожного стовпця таблиці, отриманої на кроці 2, на елемент відповідного стовпця таблиці, обчисленої на кроці 3, що приводить до наступних результатів (округленим до трьох десяткових знаків).

	V_1	V_2
m_1	0,730	0,231
m_2	0,270	0,769

Це ті ймовірності, які показані на рис.2. Вони відрізняються від вихідних апріорних ймовірностей $P\{m_1\} = 0,6$ і $P\{m_2\}= 0,4$.

Тепер можна оцінити альтернативні рішення, засновані на очікуваних платежах для вузлів 4-7.

Думка "за"

Дохід від акцій компанії А в вузлі 4 = 5000 × 0,730 + (-2000) × 0,270 = **3110** (дол.).

Дохід від акцій компанії В в вузлі 5 = 1500 × 0,730 + 500 × 0,270 = **1230** (дол.).

Рішення: Інвестувати в акції компанії А.

Думка "проти"

Дохід від акцій компанії А в вузлі 6 = 5000 × 0,231 + (-2000) × 0,769 = **-383** (дол.).

Дохід від акцій компанії В в вузлі 7 = 1500 × 0,231 + 500 × 0,769 = **731** (дол.).

Рішення: Інвестувати в акції компанії В.

Зауважимо, що попередні рішення еквівалентні твердженням, що плати які очікуються в вузлах 2 і 3 рівні 3110 і 731 дол. відповідно (рис.2). Отже, при відомих ймовірностях $P\{v_1\} = 0,74$ і $P\{v_2\} = 0,26$, обчислених на кроці 3, можна визначити очікувану плату для всього дерева рішень.

Функції корисності.

У попередніх прикладах, *критерій очікуваного значення* застосовувався лише в тих ситуаціях, де платежі виражалися у вигляді реальних грошей. Найчастіше виникають ситуації, коли при аналізі слід використовувати швидше *корисність*, ніж реальну величину платежів. Для демонстрації цього припустимо наступне. Існує шанс 50 на 50, що інвестиція в 20000 дол. Або принесе прибуток в 40000 дол., або буде повністю втрачена. Відповідно очікуваний прибуток дорівнює 40000 × 0,5-20000 × 0,5 = 10000 дол. Хоча тут очікується прибуток у вигляді чистого доходу, різні люди можуть по різному інтерпретувати отриманий результат. Інвестор, який йде на ризик, може вкласти гроші, щоб з ймовірністю 50% отримати прибуток в 40000 дол. Навпаки, обережний інвестор може не висловити бажання ризикувати втратою 20000 дол.

З цієї точки зору очевидно, що різні індивідууми проявляють різне ставлення до ризику, тобто вони виявляють різну корисність по відношенню до ризику.

Визначення корисності є суб'єктивним. Воно залежить від нашого ставлення до ризику. В цій лабораторній роботі представлено систематизовану процедуру числової оцінки ставлення до ризику особи, яка приймає рішення. Кінцевим результатом є функція корисності, яка займає місце реальних грошей.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

1. Фірма " Електра " отримує 75% електронних деталей від постачальника А та 25% від постачальника В. Частка браку в продукції постачальниками А і В становить 1 і 2% відповідно. При перевірці п'яти деталей з отриманої партії виявлена лише одна дефектна. Визначте ймовірність того, що партія отримана від постачальника А. Проведіть аналогічні обчислення щодо постачальника В. (Підказка. Імовірність появи бракованої деталі в партії підпорядковується біноміальному закону розподілу.)

a) Побудуйте відповідне дерево рішень.

b) Знайдіть оптимальне рішення задачі.

2. Поверніться до проблеми вибору рішення фермером МакКоем з лабораторної роботи 3. Фермер має додатковий вибір, пов'язаний з використанням землі як пасовища, що гарантовано принесе йому прибуток в 7500 дол. Фермер отримав також додаткову інформацію від брокера, що стосується ступеня стабільності майбутніх цін на продукцію. Оцінки брокера "сприятливий - несприятливий" виражаються кількісно у вигляді наступних умовних ймовірностей.

$P\{a_j|s_i\}$ =

	a_1	a_2
s_1	0,15	0,85
s_2	0,50	0,50
s_3	0,85	0,15

В даному випадку a_1 і a_2 - оцінки брокера "сприятливий" і "несприятливий", а s_1, s_2 і s_3 представляють зміни в майбутніх цінах: відповідно "зниження", "без змін", "підвищення".

a) Побудуйте відповідне дерево рішень.

b) Знайдіть оптимальне рішення задачі.

3. Припустимо, що в задачі з прикладу є додатковий вибір, пов'язаний з інвестуванням 10000 дол. В надійний депозит, який приносить 8% прибутку. Порада вашого експерта як і раніше відноситься до інвестування через біржу.

a) Побудуйте відповідне дерево рішень.

b) Яке оптимальне рішення в цьому випадку? (Порада. Використовуйте ймовірності $P\{v_1\}$ і $P\{v_2\}$, отримані на кроці 3 в прикладі, для обчислення очікуваної суми інвестування через біржу.)

4. Припустимо, ви є автором роману, який обіцяє бути популярним. Ви можете або самостійно надрукувати роман, або здати його у видавництво. Видавництво пропонує вам 20000 дол. за підписання контракту. Якщо роман буде користуватися попитом, буде продано 200000 примірників, в іншому випадку - лише 10000 примірників. Видавництво виплачує авторський гонорар в сумі один долар за екземпляр. Дослідження ринку, проведене видавництвом, свідчить про те, що існує 70%-ва ймовірність, що роман буде популярним. Якщо ж ви самі надрукуєте роман, то понесете втрати в сумі 90000 дол, пов'язані з друкуванням і маркетингом, але в цьому випадку кожен проданий екземпляр принесе вам прибуток в два долари.

a) Беручи до уваги наявну інформацію, ви приймете пропозицію видавництва або будете друкувати роман самостійно?

b) Припустимо, що ви уклали договір з літературним агентом на дослідження, пов'язане з потенційним успіхом роману. Виходячи з попереднього досвіду, компанія сповіщає вас, що якщо роман буде користуватися попитом, то дослідження передбачить невірний результат в 20% випадків.

Якщо ж роман не стане популярним, то дослідження передскаже вірний результат в 85% випадків. Як ця інформація вплине на ваше рішення?

Контрольні питання:

1. Апостеріорні ймовірності Байеса.
2. Що таке функція корисності.
3. В якому випадку використовуються дерева?
4. Побудова дерев. Навести приклад.
5. Способи подання інформації при прийнятті рішень в умовах ризику.
6. Чим визначається складність завдань прийняття рішень?

Лабораторна робота 5

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета: ознайомлення з методом прийняття рішень в умовах невизначенності. Студент має розв'язати отриману задачу в умовах невизначеності, використавши критерії для аналізу ситуації.

Основні теоретичні відомості

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, вимагає визначення альтернативних дій, яким відповідають платежі, залежні від (випадкових) станів природи. Матрицю платежів задачі прийняття рішень з *m* можливими діями та *n* станами природи можна представити таким чином.

	s_1	s_2	...	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	...	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	...	$v(a_2, s_n)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	...	$v(a_m, s_n)$

Елемент a_i представляє i-е можливе рішення, а елемент s_j - j-й стан природи. Плата (або дохід), яка пов'язана з рішенням a_i і станом s_j, дорівнює $v(a_i, s_j)$.

Відмінність між прийняттям рішень в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності імовірнісний розподіл, який відповідає станам s_j, $j = 1, 2, ..., n$, або невідомий, або не може бути визначений. Цей недолік інформації зумовив розвиток наступних критеріїв для аналізу ситуації, пов'язаної з прийняттям рішень.

1. Критерій Лапласа.
2. Мінімаксний критерій.
3. Критерій Севіджа.
4. Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються за ступенем консерватизму, який проявляє індивідуум, що приймає рішення, перед обличчям невизначеності.

Критерій Лапласа спирається на *принцип недостатньої підстави*, який говорить, що, оскільки розподіл ймовірностей станів $P(s_j)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що вірогідності всіх станів природи рівні між собою, тобто $P\{s_1\}= P\{s_2\}= \dots = P\{s_n\} = 1/n$.

При цьому, якщо $v(a_i,s_j)$ представляє одержуваний прибуток, то найкращим рішенням є

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v\left(a_i, s_j\right)\right\}.$$

Якщо величина $v(a_i,s_j)$ представляє витрати особи, яка приймає рішення, то оператор "max" замінюється на "min".

Максиміний (***мінімаксний***) ***критерій*** заснований на консервативному обережному поводженні особи, що приймає рішення, і зводиться до вибору найкращої альтернативи з найгірших.

Якщо величина $v(a_i,s_j)$ представляє одержуваний прибуток, то відповідно до *Максиміного критерія* як оптимальне обирається рішення, що забезпечує

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_j} v\left(a_i, s_j\right)\right\}.$$

Якщо величина $v(a_i,s_j)$ представляє втрати, використовується *мінімаксний критерій*, який визначається наступним співвідношенням:

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v\left(a_i, s_j\right)\right\}.$$

Критерій Севіджа прагне пом'якшити консерватизм *мінімаксного* (*максимінного*) *критерію* шляхом заміни матриці платежів (виграшів або програшів) $v(a_i,s_j)$ матрицею втрат $r(a_i, s_j)$, яка визначається наступним чином.

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), & \text{если } v - \text{доход}, \\ v(a_i, s_j) - \min\limits_{a_k}\{v(a_k, s_j)\}, & \text{если } v - \text{потери}. \end{cases}$$

Щоб показати, як *критерій Севіджа* "пом'якшує" *мінімаксний* (*максиміний*) *критерій*, розглянемо наступну матрицю платежів $v(a_i,s_j)$:

	s_1	s_2	Максимум строк
a_1	11000	90	11000
a_2	10000	10000	10000←мінімакс

Застосування *мінімаксного критерію* призводить до того, що рішення a_2 з фіксованими втратами в 10000 дол. найбільш прийнятний. Однак можна вибрати і a_1, так як в цьому випадку існує можливість втратити лише 90 дол., якщо реалізується стан s_2, при потенційному виграші 11000 дол.

Подивимося, який результат вийде, якщо в мінімаксний критерій замість матриці платежів $v(a_i,s_j)$ використати матрицю втрат $r(a_i, s_j)$.

	s_1	s_2	Максимум строк
a_1	1000	0	1000←мінімакс
a_2	0	9910	9910

Як бачимо, *мінімаксний критерій*, який застосовується до матриці втрат, приводить до вибору рішення a_1 як пріоритетного.

Критерій Гурвіца охоплює ряд різних підходів до прийняття рішень - від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного). Нехай $0 \leq \alpha \leq 1$ і величини $v(a_i, s_j)$ представляють доходи.

Тоді рішенням, за *критерієм Гурвіца*, буде вираз:

$$\max_{a_i}\left\{\alpha\max_{s_j} v\left(a_i,s_j\right)+\left(1-\alpha\right)\min_{s_j} v\left(a_i,s_j\right)\right\}.$$

Параметр α - *показник оптимізму*. Якщо $\alpha = 0$, *критерій Гурвіца* стає консервативним, так як його застосування еквівалентно застосуванню звичайного мінімаксного критерія. Якщо $\alpha = 1$, *критерій Гурвіца* стає занадто оптимістичним, бо розраховує на найкращі з найкращих умов. Можемо конкретизувати ступінь оптимізму (або песимізму) належним вибором величини α з інтервалу [0, 1]. При відсутності яскраво вираженої схильності до оптимізму або песимізму вибір $\alpha = 0{,}5$ представляється найбільш розумним.

Якщо величини $v(a_i, s_j)$ представляють втрати, то критерій приймає наступний вигляд:

$$\min_{a_i}\left\{\alpha\min_{s_j} v\left(a_i,s_j\right)+\left(1-\alpha\right)\max_{s_j} v\left(a_i,s_j\right)\right\}.$$

Приклад: Національна школа виживання підбирає місце для будівництва літнього табору в центрі Аляски з метою тренування людей на виживання в умовах дикої природи. Школа вважає, що число учасників збору може бути 200, 250, 300 або 350 осіб. Вартість літнього табору буде мінімальною, оскільки він будується для задоволення тільки певних невеликих потреб. Відхилення в сторону зменшення або збільшення щодо потреб тягнуть за собою додаткові витрати, зумовлені будівництвом зайвих потужностей або втратою можливості отримати прибуток в разі, коли деякі потреби не задовольняться. Нехай змінні a_1 - a_4 представляють можливі розміри табору (на 200, 250, 300 або 350 осіб), а змінні s_1 - s_4 - відповідно число учасників збору.

Таблиця містить матрицю вартостей (в тисячах доларів), що відноситься до описаної ситуації.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Описана ситуація аналізується з точки зору чотирьох розглянутих вище критеріїв.

Критерій Лапласа. При заданих ймовірності P{s_j} = *1/4*, *j* = *1,2,3,4*, очікувані значення витрат для різних можливих рішень обчислюються наступним чином.

$$M\{a_1\} = (1/4)(5 + 10 + 18 + 25) = 14\,500,$$

$$M\{a_2\} = (1/4)(8 + 7 + 12 + 23) = \mathbf{12\,500} \leftarrow \text{Оптимум},$$

$$M\{a_3\} = (1/4)(21 + 18 + 12 + 21) = 18\,000,$$

$$M\{a_4\} = (1/4)(30 + 22 + 19 + 15) = 21\,500.$$

Мінімаксний критерій. Цей критерій використовує вихідну матрицю вартостей.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	**21** ← **минимакс**
a_4	30	22	19	15	30

Критерій Севіджа. Матриця втрат визначається за допомогою вирахування чисел 5, 7, 12 і 15 з елементів стовпців від першого до четвертого відповідно.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	**8** ← **минимакс**
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Критерій Гурвіца. Результати обчислень містяться в наступній таблиці.

Альтернатива	Минимум строк	Максимум строк	α(минимум строки) + (1 – α)(максимум строки)
a_1	5	25	25 – 20α
a_2	7	23	23 – 16α
a_3	12	21	21 – 9α
a_4	15	30	30 – 15α

Використовуючи відповідне значення для α, можна визначити оптимальну альтернативу. Наприклад, при $\alpha = 0{,}5$ оптимальними є або альтернатива a_1, або a_2, тоді як при $\alpha = 0{,}25$ оптимальним є рішення a_3.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

1. Хенк - старанний студент, який зазвичай отримує хороші оцінки, зокрема тому, що має можливість повторити матеріал в ніч перед іспитом. Перед завтрашнім іспитом Хенк зіткнувся з невеликою проблемою. Його однокурсники організували на всю ніч вечірку, в якій він хоче брати участь. Хенк має три альернатіви:

a_1 - брати участь у вечірці всю ніч,

a_2 - половину ночі брати участь у вечірці, а половину - вчитися,

a_3 - вчитися всю ніч.

Професор, який буде приймати завтрашній іспит, непередбачуваний, і іспит може бути легким (s_1), середнім (s_2) або важким (s_3). Залежно від складності іспиту і часу, витраченого Хенком на повторення, можна чекати наступні екзаменаційні бали.

	S_1	S_2	S_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

a) Який вибір Хенк повинен зробити (грунтуючись на кожному з чотирьох критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності).

b) Припустимо, що Хенк більш зацікавлений в оцінці (в буквеному виразі), яку він отримає на іспиті. Оцінкам від A до D, що означає здачу іспиту, відповідає 90, 80, 70 і 60 балів.

При числі балів нижче 60 студент отримує оцінку F, яка свідчить про те, що іспит не складено. Чи змінить таке ставлення до оцінок вибір Хенка?

2. У наближенні посівного сезону фермер Мак-Кой має чотири альтернативи: a_1 - вирощувати кукурудзу;

a_2 - вирощувати пшеницю;

a_3 - вирощувати соєві боби;

a_4 - використовувати землю під пасовища.

Платежі, пов'язані з зазначеними можливостями, залежать від кількості опадів, які умовно можна розділити на чотири категорії:

s_1 - сильні опади;

s_2 - помірні опади;

s_3 - незначні опади;

s_4 - посушливий сезон.

Платіжна матриця (в тис. дол.) оцінюється таким чином.

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Що повинен посіяти Мак-Кой?

3. Один з N верстатів повинен бути обраний для виготовлення Q одиниць певної продукції. Мінімальна і максимальна потреба в продукції дорівнює Q * і Q ** відповідно. Виробничі витрати TC_l на виготовлення Q одиниць продукції на верстаті і включають фіксовані витрати K_i і питомі витрати c_i на виробництво одиниці продукції і виражаються формулою $TC_l = K_i + c_iQ$.

а) Вирішіть задачу за допомогою кожного з чотирьох критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

b) Вирішіть задачу при наступних даних, припускаючи, що $1000 < Q < 4000$.

Станок i	K_i (дол.)	C_i (дол.)
1	100	5

2	40	12
3	150	3
4	90	8

Контрольні питання:

1. Способи подання інформації при прийнятті рішень в умовах невизначеності.
2. Критерії Лапласа, Севіджа, Гурвіца, мінімаксний.
3. Від чого залежить застосування того чи іншого критерію?
4. В якому випадку використовуються дерева?
5. Дати визначення поняттю *альтернатива*. Види альтернатив. Їх мінімальна кількість.
6. Шкала оцінок за критеріями.

Лабораторна робота 6

ТЕОРІЯ ІГОР. ОПТИМАЛЬНЕ РІШЕННЯ ГРИ ДВОХ ОСІБ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ

Мета: ознайомлення з теорією ігор, стратегія гри двох осіб з нульовою сумою.

Основні теоретичні відомості

У теорії ігор розглядаються ситуації, пов'язані з прийняттям рішень, в яких два розумних противника мають конфліктуючі цілі. До числа типових прикладів відноситься рекламування конкуруючих товарів і планування військових стратегій протиборчих армій. Ці ситуації прийняття рішень відрізняються від розглянутих раніше, де природа не розглядається в ролі недоброзичливця.

В ігровому конфлікті беруть участь два противника, іменовані *гравцями*, кожен з яких має певну множину (кінцеве або нескінченне) можливих виборів, які називаються *стратегіями*. З кожною парою стратегій пов'язаний *платіж*, який один з гравців виплачує іншому. Такі ігри відомі як *гри двох осіб з нульовою сумою*, так як виграш одного гравця дорівнює програшу іншого.

У такій грі достатньо задати результати у вигляді платежів для одного з гравців.

При позначенні гравців через А та В з числом стратегій m і n відповідно гру зазвичай представляють у вигляді матриці платежів гравцеві А:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Таке уявлення матричної гри означає, що якщо гравець А використовує стратегію i, а гравець В - стратегію j, то платіж гравцеві А становить a_{ij} і, отже, гравцеві В - $-a_{ij}$

Оптимальне рішення гри двох осіб з нульовою сумою

Оскільки гри беруть свій початок в конфлікті інтересів, оптимальним рішенням гри є одна або кілька таких стратегій для кожного з гравців, при цьому будь-яке відхилення від даних стратегій не покращує плату того чи іншого гравця. Ці рішення можуть бути у вигляді єдиної *чистої* стратегії або декількох стратегій, які є *змішаними* відповідно до заданих можливостей. Розглянуті нижче приклади демонструють перераховані ситуації.

Приклад: Дві компанії А і В продають два види ліків проти грипу. Компанія А рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) і в газетах (A_3). Компанія В, на додаток до використання радіо (B_1), телебачення (B_2) і газет (B_3), розсилає також поштою брошури (B_4). Залежно від уміння і інтенсивності проведення рекламної кампанії, кожна з компаній може залучити на свою сторону частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена нижче матриця характеризує відсоток клієнтів, залучених або втрачених компанією А.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Минимумы строк
A_1	8	−2	9	−3	−3
A_2	6	**5**	6	8	**5** максимин
A_3	−2	4	−9	5	−9
Максимумы столбцов	8	**5**	9	8	
	минимакс				

Рішення гри засновано на забезпеченні *найкращого результату з найгірших* для кожного гравця. Якщо компанія А вибирає стратегію A_1, то незалежно від того, що робить компанія В, найгіршим результатом є втрата компанією А 3% ринку на користь компанії В. Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно при виборі стратегії A_2 найгіршим результатом для компанії А є збільшення ринку на 5% за рахунок компанії В. Нарешті, найгіршим результатом при виборі стратегії A_3 є втрата компанією А 9% ринку на користь компанії В. Ці результати містяться в стовпці " Мінімуми рядків ". Щоб досягти найкращого результату з найгірших, компанія А вибирає стратегію A_2, так як вона відповідає найбільшому елементу стовпчика "Мінімуми рядків ".

Розглянемо тепер стратегії компанії В. Так як елементи матриці є платежами компанії А, критерій *найкращого результату з найгірших* для компанії В відповідає вибору мінімаксного значення. В результаті приходимо до висновку, що вибором компанії В є стратегія B_2.

Оптимальним рішенням у грі є вибір стратегій A_2 і B_2, тобто обом компаніям слід проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь компанії А, так як її ринок збільшиться на 5%. У цьому випадку говорять, що *ціна гри* дорівнює 5% і що компанії А і В використовують стратегії, відповідні *седлової точки*.

Рішення, що відповідає седловій точці, гарантує, що жодної компанії немає сенсу намагатися вибрати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (B_1, B_3 або B_4), то компанія А може зберегти свій вибір стратегії A_2, що призведе до більшої втрати ринку компанією В (6 або 8%).

З тих же причин компанії А немає резону використовувати іншу стратегію, бо якщо вона застосує, наприклад, стратегію A_3, то компанія В може використовувати свою стратегію B_3 і збільшити свій ринок на 9%. Аналогічні висновки мають місце, якщо компанія А буде використовувати стратегію A_1.

Оптимальне рішення гри, що відповідає седловій точці, не обов'язково має характеризуватися чистими стратегіями. Замість цього оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій, як це зроблено в наступному прикладі.

Приклад: Два гравця А і В грають в гру, засновану на підкиданні монети. Гравці одночасно і незалежно один від одного вибирають герб (Г) або решку (Р). Якщо результати двох підкидань монети збігаються (тобто ГГ або РР), то гравець А отримує один долар від гравця В. Інакше гравець А платить один долар гравцеві В.

Наступна матриця платежів гравцеві А показує величини мінімальних елементів рядків і максимальних елементів стовпців, відповідних стратегій обох гравців.

	$B_Г$	$B_Р$	Минимумы строк
$A_Г$	1	–1	–1
$A_Р$	–1	1	–1
Максимумы столбцов	1	1	

Максиміна і мінімаксна величини (ціни) для цієї гри дорівнюють -1 дол. та 1дол. відповідно. Так як ці величини не рівні між собою, гра не має рішення в чистих стратегіях. Зокрема, якщо гравець А використовує стратегію АГ, гравець В вибере стратегію ВР, щоб отримати від гравця А один долар. Якщо це трапиться, гравець А може перейти до стратегії АР, щоб змінити результат гри і отримати один долар від гравця В. Постійне спокуса кожного гравця перейти до іншої стратегії вказує на те, що рішення у вигляді чистої стратегії неприйнятно. Замість цього обидва гравці повинні використовувати належну випадкову комбінацію своїх стратегій. У розглянутому прикладі оптимальне значення ціни гри знаходиться десь між максиміною та мінімаксною цінами для цієї гри:

Максиміна (нижня) ціна ≤ ціна гри ≤ мінімаксна (верхня) ціна.

Отже, в даному випадку ціна гри повинна лежати в інтервалі [-1, 1], що вимірюється в доларах.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

1. Визначте рішення, яке визначається сідловою точкою, відповідно чисті стратегії та ціну гри для наступних ігор, в яких платежі задані для гравця А.

a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	–4	–5	6
A_2	–3	–4	–9	–2
A_3	6	7	–8	–9
A_4	7	3	–9	5

2. У наступних іграх задані платежі гравцеві A. Вкажіть область значень для параметрів p і q, при яких пара (2, 2) буде сідловою точкою в кожній грі.

a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	q	6
A_2	p	5	10
A_3	6	2	3

b)

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	10	7	q
A_3	4	p	6

3. Вкажіть область, якій належить ціна гри в кожному з наступних випадків, припускаючи, що платежі задані для гравця A.

a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	9	6	0
A_2	2	3	8	4
A_3	–5	–2	10	–3
A_4	7	4	–2	–5

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	9	6	8
A_2	–2	10	4	6
A_3	5	3	0	7
A_4	7	–2	8	4

c)

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	1
A_2	5	2	3
A_3	4	2	–5

d)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	1	3
A_2	4	8	0	–6
A_3	6	–9	–2	4

4. Дві фірми виробляють два конкуруючих товари. Кожен товар в даний час контролює 50% ринку. Поліпшивши якість товарів, обидві фірми збираються розгорнути рекламні кампанії. Якщо вони не будуть цього робити, то існуючий стан ринку не зміниться. Однак якщо будь-яка фірма буде більш активно рекламувати свої товари, то інша фірма втратить відповідний відсоток своїх споживачів. Дослідження ринку показує, що 50% потенційних споживачів отримують інформацію за допомогою телебачення, 30% - через газети і 20% - по радіо.

а) Сформулюйте задачу у вигляді гри двох осіб з нульовою сумою і виберіть відповідні кошти реклами для кожної фірми.

b) Вкажіть інтервал значень, якому належить ціна гри. Чи може кожна фірма діяти з єдиною чистою стратегією?

Контрольні питання:

1. Дати визначення поняттю прийняття рішень.
2. Критерій найкращого результату з найгірших.
3. Дати визначення седлової точки.
4. Поясніть теорію ігор.
5. Що таке стратегія?
6. Ціна гри.

.

Лабораторна робота 7

ТЕОРІЯ ІГОР. РІШЕННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР У ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ

Мета: ознайомлення з теорією ігор, змішані стратегії.

Основні теоретичні відомості

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях може бути знайдено або графічно, або методами лінійного програмування. Графічний метод можна застосовувати для вирішення ігор, в яких хоч один гравець має дві *чисті стратегії*. Цей метод графічно пояснює поняття *сідлової точки*. Методами лінійного програмування може бути вирішена будь-яка гра двох осіб з нульовою сумою.

Графічне рішення ігор.

Розглянемо гру 2 × n, в якій гравець A має дві стратегії.

	y_1	y_2	…	y_n
	B_1	B_2	…	B_n
x_1: A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
$1 - x_1$: A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

Гра передбачає, що гравець A змішує стратегії A_1 і A_2 з відповідними можливостями x_1 і $1\text{-}x_1$, $0 \le x_1 \le 1$. Гравець B змішує стратегії B_1, B_2, ..., B_n з вірогідністю y_1, y_2, ..., y_n , де $y_j \ge 0$, $j = 1, 2, ..., n$, і $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1$. В цьому випадку очікуваний виграш гравця A, що відповідає *j*-й чистій стратегії гравця B, обчислюється у вигляді $(a_{1j} - a_{2j})\, x_1 - a_{2j}$, $j = 1, 2, ..., n$.

Отже, гравець A шукає величину x_1, яка максимізує мінімум очікуваних виграшів

Приклад: Розглянемо наступну гру 2 × 4, в якій платежі виплачуються гравцеві A.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	–1
A_2	4	3	2	6

Гра не має рішення в чистих стратегіях, і, отже, стратегії повинні бути змішаними. Очікувані виграші гравця А, відповідні чистим стратегіям гравця В, наведені в наступній таблиці.

Чистые стратегии игрока *B*	Ожидаемые выигрыши игрока *A*
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

На рис. 7.1 зображені чотири прямі лінії, відповідні чистим стратегіям гравця В. Щоб визначити найкращий результат з найгірших, побудована нижня пряма огинає чотири зазначені прямі (вона позначена на малюнку товстими лінійними сегментами), яка представляє мінімальний (найгірший) виграш для гравця А незалежно від того, що робить гравець В. Максимум (найкраще) нижньої прямої, що огинає, відповідає максиміному рішенню в точці $x_1^* = 0{,}5$. Ця точка визначається перетином прямих 3 та 4. Отже, оптимальним рішенням для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з вірогідністю 0,5 і 0,5 відповідно. Відповідна ціна гри v визначається підстановкою $x_1 = 0{,}5$ в рівняння або прямої 3, або 4, що приводить до наступного.

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 3,} \\ -7\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 4.} \end{cases}$$

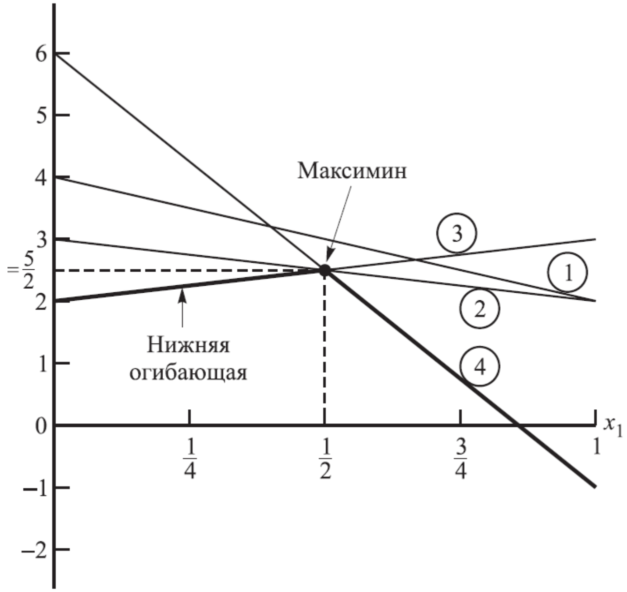

Рис. 7.1. Графічне рішення гри двох осіб з нульовою сумою

Оптимальна змішана стратегія гравця В визначається двома стратегіями, які формують нижню пряму, що огибає. Це означає, що гравець В може змішувати стратегії B_3 і B_4, в цьому випадку $y_1 = y_2 = 0$ і $y_4 = 1 - y_3$. Відповідно, платежі що очікуються гравцем В, та відповідають чистим стратегіям гравця А, мають наступний вид.

Чистые стратегии игрока *A*	Ожидаемые платежи игрока *B*
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

Найкраще рішення з найгірших для гравця В є точкою мінімуму верхньої прямої, що огібає заданих двох прямих. Ця процедура еквівалентна рішенням рівняння:

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6.$$

Його рішенням є $y_3 = 7/8$, що визначає ціну гри $v = 4 \times (7/8) - 1 = 5/2$.

Таким чином, рішенням гри для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними можливостями 0,5 і 0,5, а для гравця В змішування стратегій B_3 і B_4 з вірогідністю 7/8 і 1/8. (Насправді гра має альтернативне рішення для гравця В, так як Максиміна точка на рис.7.1 визначається більш ніж двома прямими. Будь-яка опукла лінійна комбінація цих альтернативних рішень також є рішенням задачі.)

Для гри, в якій гравець А має *m* стратегій, а гравець В тільки дві, рішення знаходиться аналогічно. Головна відмінність полягає в тому, що тут будуються графіки функцій, що представляють очікувані платежі другого гравця, відповідні чистим стратегіям гравця А. В результаті ведеться пошук мінімаксної точки верхньої обвідної побудованих прямих.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

1. Вирішіть графічно гру з підкиданням монет (приклад з лабораторної роботи 6).

2. Робін часто їздить між двома містами. При цьому є можливість вибрати один з двох маршрутів: маршрут А являє собою швидкісне шосе в чотири смуги, маршрут В – довгу дорогу, що обдувається вітром.

Патрулювання доріг здійснюється обмеженим числом поліцейських.

Якщо все поліцейські розташовані на одному маршруті, Робін з її пристрасним бажанням їздити дуже швидко, без сумніву, отримає штраф у 100 дол. За перевищення швидкості.

Якщо поліцейські патрулюють на двох маршрутах в співвідношенні 50 на 50, то є 50% -ва ймовірність, що Робін отримає штраф у 100 дол. На маршруті А і 30% -ва ймовірність, що вона отримає такий же штраф на маршруті В. Крім того, маршрут В довше, тому бензину витрачається на 15 дол. більше, ніж на маршруті А. Визначте стратегію як для Робін, так і для поліції.

3. Вирішіть графічно наступні ігри, в яких платежі виплачують гравцеві А.

a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	–3	7
A_2	2	4	–6

b)

	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	6	5
A_3	5	7

4. Дана наступна гра двох осіб з нульовою сумою.

	B_1	B_2	B_3
A_1	5,0	50,0	50,0
A_2	1,0	1,0	0,1
A_3	10,0	1,0	10,0

Перевірте, що змішані стратегії з можливостями (1/6, 0, 5/6) для гравця А і з вірогідністю (49/54, 5/54, 0) для гравця В є оптимальними, та визначте ціну гри.

Контрольні питання:

1. Дати визначення поняттю змішана стратегія.
2. Графічний метод.
3. Метод лінійного програмування.
4. Дати визначення: чиста стратегія.
5. Поясніть теорію ігор.
6. Що таке стратегія?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

2. Науман Э. Принять решение, но как? - М.: Мир, 1987. - 198 с.

3. Таха Х., Введение в исследование операций. – М.: Мир, 2001. – 912с.

4. Эддоус М., Стэнфилд Р. Теория принятия решений. – М.: Аудит, Юнити, 1997. – 590с.

5. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений. – М.: Синтег, 1998. – 376с.

6. Варфоламеев, В. И. Принятие управленческих решений [Текст]: учеб. пособ. для вузов. / В. И. Варфоламеев, С. Н. Воробьёв. – М.: КУДИЦОБРАЗ, 2001. – 288 с.

7. Василенко, В. А. Теорія і практика розробки управлінських рішень [Текст] : навч. посіб. / В. А. Василенко. – К.: ЦНЛ, 2002. – 420 с.

8. Гаврилова, Т. А. Базы знаний интеллектуальных систем [Текст]: учебное пособие / Т. А. Гаврилова, В. Ф. Хорошевский. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с. – ISBN 5-272-00071-4.

9. Эддоус, М. Методы принятия решений [Текст]: учебное пособие / М. Эддоус, Р. Стэнфилд, И. И. Елисеева. – М.: Аудит: ЮНИТИ, 1997. – 590 с. – ISBN 5-85177-027-9.

10. Колпаков, В. М. Теория и практика принятия управленческих решений [Текст]: учеб. пособие / В. М. Колпаков. – [изд. 2-е, перераб. и доп.]. – К.: МАУП, 2004. – 504 с.

11. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М. Радио и связь, 1993. – 278с.

12. Ларичев О.И., Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решений. – М.: Наука; Физматлит, 1996. -208с.

Навчальне видання

СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Лабораторний практикум
для студентів спеціальності 123
«Комп'ютерна інженерія»
освітньо-професійної програми
«Системне програмування»

Укладачі:
Кучеров Дмитро Павлович
Росінська Галина Павлівна

Редактор
Коректор
Комп'ютерна верстка

Підп. до друку __.__.__. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. __. Обл.-вид. арк. 3.
Тираж 50 прим. Замовлення № ___.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002