

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Інститут електроніки та систем управління
Факультет аерокосмічних систем управління
Кафедра електротехніки і світлотехніки

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
Курс лекцій

Київ 2008

Курс лекцій з дисципліни “Теоретичні основи електротехніки” написаний за навчальною програмою підготовки студентів Інституту заочного та дистанційного навчання зі спеціальностей 8.090603 “Електротехнічні системи електроспоживання”, 8.100107 “Обладнання повітряних суден” та 8.090605 “Світлотехніка і джерела світла”. Курс лекцій включає три частини: першу частину, що вивчається на другому курсі в четвертому семестрі, другу та третю частини, що вивчаються відповідно в п’ятому та шостому семестрах третього курсу.

До першої частини дисципліни входять розділи: “Лінійні електричні кола постійного струму” і “Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму в ustalених режимах”; до другої – “Трифазні електричні кола”, “Несинусоїдні електричні напруги і струми”, “Чотириполусники” і “Нелінійні кола”; до третьої – “Перехідні процеси у електричних колах”, “Кола з розподіленими параметрами” і “Теорія електромагнітного поля”.

Автор лекцій – кандидат технічних наук, доцент Сірий Д.Т.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

ЧАСТИНА I

Розділ I. Лінійні електричні кола постійного струму

Вступ

Дисципліна «Теоретичні основи електротехніки» є галуззю знань, в якій вивчаються електричні та магнітні явища і їх практичне застосування.

Предметом дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» є вивчення якісної і кількісної сторін електромагнітних явищ та процесів, що відбуваються в електричних та магнітних колах постійного та змінного струму при сталих та перехідних режимах, та знайомство з положеннями теорії електромагнітного поля.

В процесі вивчення дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» студенти засвоюють теорію електричних і магнітних кіл постійного і змінного струмів в усталених і перехідних режимах, теорію електромагнітного поля; набувають навичок з проведення експериментальних досліджень, використання методів розрахунку електричних і магнітних кіл та складних електромагнітних явищ, що спостерігаються в електротехнічних пристроях та приладах в процесі їх експлуатації.

Для фахівців зазначених спеціальностей дисципліна ТОЕ є визначальною, формуючою їх електротехнічну освіту. Дисципліна базується на законах фізики з широким залученням багатьох розділів математики: диференціального, інтегрального та операторного числень, теорії функції комплексної змінної, рядів Фур'є, інтегралів Дюамеля тощо.

Тема 1. Елементи та параметри електричних кіл

1.1. Електричне коло та його елементи

Електричне коло – це сукупність пристроїв та об'єктів, що утворюють шлях для електричного струму, електромагнітні процеси в яких можуть бути описані за допомогою понять про електрорушійну силу, струм та напругу.

Основними складовими частинами електричного кола (рис. 1.1) є джерела електричної енергії (1), приймачі (споживачі) електричної енергії (2) та пристрої для захисту, передачі і розподілу електричної енергії (3).

В джерелах електричної енергії (гальванічні елементи, акумулятори, термоелементи, генератори тощо) відбувається перетворення хімічної, теплової, механічної чи інших сторонніх енергій в електричну.

В споживачах електричної енергії (електролампи, нагрівачі пристрої, електродвигуни тощо) відбувається перетворення електричної енергії в світлову, теплову, механічну чи інші види енергії.

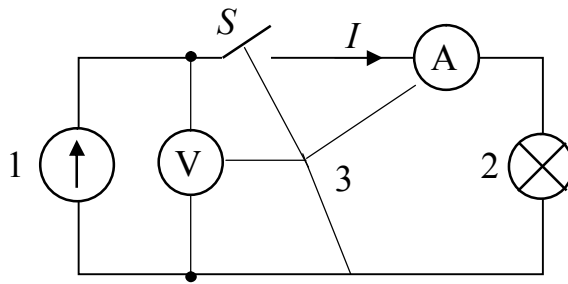


Рис. 1.1

До пристроїв захисту, передачі і розподілу електричної енергії відносяться провід, приладдя комутації, управління, розподілу та захисту а також контрольно-вимірвальна апаратура.

На рис.1.1 приведені найпростіше електричне коло. Якщо в цьому колі замкнути вимикач S , то утвориться замкнутий шлях (коло), по якому під дією ЕРС джерела енергії буде протікати електричний струм I . Визначення величини струму I є метою розрахунку любого електричного кола.

З метою спрощення процесу аналізу та розрахунку електричних кіл використовують ряд ідеалізацій. Однією з таких ідеалізацій є введення поняття елемента електричного кола. Це дозволяє всі реальні електротехнічні пристрої та об'єкти і все електричне коло в цілому подати як сукупність цих елементів.

Елементом електричного кола називається окремий пристрій, що входить до складу електричного кола і виконує в ньому певну функцію.

Розрізняють пасивні і активні елементи електричного кола.

1.2. Позитивний напрям електричного струму та напруги

Електричним струмом називається упорядкований рух заряджених частинок під дією електричного поля.

Термін «електричний струм» і поняття про напрямок струму були введені французьким фізиком А.Ампером.

За позитивний напрям струму вважають напрямок руху позитивних зарядів, тобто від позитивного полюсу джерела електричної енергії до негативного в колах постійного струму, або від більшого потенціалу до меншого в колах змінного струму.

При розрахунку електричних кіл позитивний напрям струму вибирається довільно і позначається стрілкою на лінії проводу. Якщо при розрахунку струм вийшов з від'ємним знаком, то це вказує на те, що його дійсний напрям протилежний вибраному. При вказаному напрямку струму на рис. 1.2 означає, що $V_1 > V_2$.

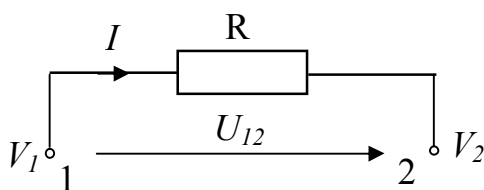


Рис. 1.2

Позитивний напрям напруги співпадає з позитивним напрямом струму.

$$U_{12} = IR = V_1 - V_2.$$

1.3. Пасивні елементи електричного кола

До пасивних елементів електричного кола відносяться резистори, індуктивні котушки та конденсатори.

1.3.1. Резистори

Резистор – це елемент електричного кола, призначений для використання його електричного опору.

Якщо в резисторі враховується тільки його опір, то він називається ідеалізованим. В ідеалізованому резисторі проходить тільки незворотний процес перетворення електричної енергії в теплову. Умовне графічне зображення резисторів приведено на рис. 1.3.

Параметром резистора на постійному струмі є електричний опір постійному струму.

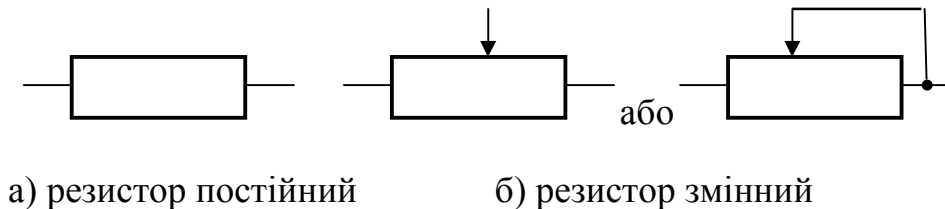


Рис. 1.3

Електричний опір – це скалярна величина, що дорівнює відношенню постійної напруги на ділянці електричного кола до постійного струму в ньому, при відсутності на ділянці ЕРС

$$R = \frac{U}{I} [\Omega, \text{Ом}].$$

Одиницею вимірювання електричного опору являється *Ом* (за ім'ям німецького вченого Г.Ома). *Ом* – це опір провідника, між кінцями якого при силі струму 1*A* виникає напруга 1*B*.

Опір резистора при заданій величині струму *I* характеризує інтенсивність перетворення електричної енергії в теплову.

Перетворення електричної енергії в теплову широко застосовується на ЛА. Це пристрої від обмерзання, обігрівів приладів, системи управління тощо. Але наявність опору в пристроях і об'єктах в багатьох випадках являється причиною небажаних теплових втрат. Це має місце в генераторах, двигунах, електричних вимірювальних пристроях тощо. В таких пристроях стараються їх електричний опір зробити як можна меншим.

Потужність, яка виділяється на резисторі, дорівнює

$$P = I^2 R [\text{Вт}].$$

Енергія, яка виділяється на резисторі за час *t*, дорівнює

$$W = P t = I^2 R t [\text{Дж}].$$

Опір циліндричного дроту визначається за формулою

$$R = \rho l/S,$$

де: l – довжина дроту [м];
 S – площа поперечного перерізу [м²];
 ρ – питомий електричний опір [Ом м].

Величина ρ , яка приведена в довідниках, відповідає температурі 20°C. При іншій температурі опір визначається за формулою

$$R_t = R [1 + \alpha (t^\circ - 20^\circ \text{C})],$$

де: α – температурний коефіцієнт опору матеріалу дроту.

Часто користуються замість опору зворотною величиною, яка називається електричною провідністю

$$G = \frac{1}{R} = \frac{S}{\rho l} = \gamma \frac{S}{l},$$

де γ – питома електрична провідність [См/м].

Одиницею вимірювання провідності являється Сіменс [S, См].

Залежність напруги на резисторі від струму в ньому $U(I)$ називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ).

Якщо електричний опір резистора завжди постійний і не залежить від величини і напрямку струму чи напруги, то такий резистор називається лінійним, а його ВАХ має вигляд прямої лінії (рис. 1.4).

Резистор називається нелінійним, якщо його опір залежить від величини та напрямку струму чи напруги. ВАХ таких резисторів має нелінійний характер.

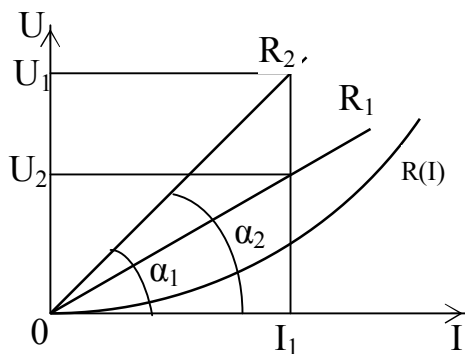


Рис. 1.4

$$\begin{aligned} R_1 &= U_1 / I_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \\ R_2 &= U_2 / I_1 = \operatorname{tg} \alpha_2, \\ \alpha_2 &> \alpha_1 \text{ і } R_2 > R_1. \end{aligned}$$

1.3.2. Індуктивна котушка

Індуктивна котушка – це елемент електричного кола, призначений для використання його індуктивності.

Якщо в індуктивній котушці враховується тільки індуктивність, то вона називається ідеалізованою. Струм, який протікає в ідеалізованій котушці, утворює тільки магнітний потік Φ [Вб].

Магнітний потік, обумовлений струмом в індуктивній котушці і зчеплений з усіма її витками w , називається потокозчепленням самоіндукції

$$\Psi = \Phi w \text{ [Вб]}.$$

Параметром індуктивної котушки є індуктивність.

Індуктивність – це скалярна величина, що дорівнює відношенню потокозчеплення самоіндукції елемента до струму в ньому

$$L = \Psi / I \text{ [Гн, Гн]}.$$

Одиницею індуктивності є Генрі [Н, Гн].

Індуктивність характеризує здатність елемента збуджувати магнітне поле (потокозчеплення). Чим більша індуктивність, тим більше потокозчеплення буде збуджувати елемент при протіканні по ньому одного і того ж струму.

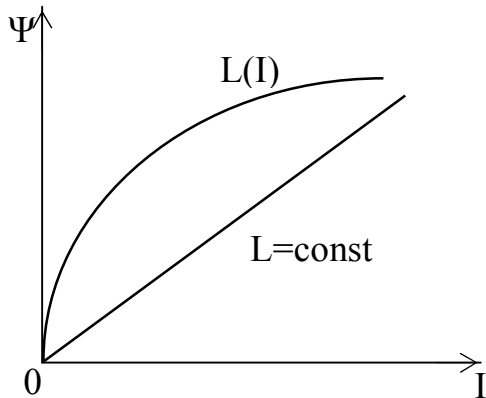


Рис. 1.5

Залежність потокозчеплення самоіндукції Ψ від струму I елемента називається вебер-амперною характеристикою. Ця залежність може бути лінійною або нелінійною, відповідно індуктивність теж може бути лінійною або нелінійною.

Якщо потокозчеплення самоіндукції елемента змінюється за часом, то в ньому виникає ЕРС самоіндукції

$$e_L = - \frac{d\psi}{dt}.$$

Знак “-”, згідно закону Ленца, відображає принцип електромагнітної інерції, за яким ЕРС самоіндукції визиває струм, який створює перепону зміні потокозчеплення.

Якщо індуктивність елемента постійна, то

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Умовне графічне зображення індуктивної котушки, у відповідності до ГОСТ 2.723-68 (СЕ СЭВ 869-78), приведене на рис. 1.6.



Рис. 1.6

Енергія, запасена в магнітному полі індуктивної котушки, дорівнює:

$$W_m(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t u_L i dt = \int_0^t L \frac{di}{dt} \cdot i dt = L \int_0^t i di = \frac{Li^2}{2}.$$

1.3.3. Конденсатори

Конденсатор – це елемент електричного кола, призначений для використання його ємності.

Якщо в конденсаторі враховується тільки ємність, то він називається ідеалізованим. Ідеалізований конденсатор збуджує тільки електричне поле. В теорії електричних кіл будемо розглядати тільки ідеалізовані конденсатори.

Параметром конденсатора є електрична ємність.

Електрична ємність – це скалярна величина, яка дорівнює відношенню заряду конденсатора до напруги між його електродами (пластинами):

$$C=Q/U.$$

Одиницею електричної ємності є фарада [F, Ф], назву одиниці дано за ім'ям англійського вченого М.Фарада.

Чим більше ємність конденсатора, тим більше буде його заряд при одній і тій же напрузі між електродами.

Залежність заряду від напруги на обкладинках конденсатора називається кулон-вольтною характеристикою.

Якщо ємність конденсатора постійна, то такий елемент називається лінійним, а його кулон-вольтна характеристика – пряма лінія. Якщо ємність конденсатора змінюється в залежності від напруги, то він називається нелінійним, його кулон-вольтна характеристика нелінійна.

При зарядці і розрядці конденсатора через нього протікає електричний струм, величина якого може бути визначена за формулою: $i = \frac{dq}{dt}$.

Якщо величина ємності конденсатора постійна, то струм через конденсатор буде дорівнювати: $i = C \frac{du_c}{dt}$.

Енергія, яка накопичується в електричному полі конденсатора, дорівнює:

$$W_e = \int_0^t p dt = \int_0^t u_c C \frac{du_c}{dt} dt = C \int_0^t u_c du_c = \frac{Cu_c^2}{2}.$$

Умовне графічне зображення конденсатора, у відповідності до ГОСТ 2.728-74 (СТ СЭВ 864-78), приведене на рис. 1.7).



Рис. 1.7

1.4. Активні елементи електричного кола та їх параметри

До активних елементів електричного кола відносяться джерела електричної енергії.

Принципи роботи джерел електричної енергії різні:

- електромеханічні генератори, які перетворюють механічну енергію в електромагнітну;
- електрохімічні джерела (акумуляторні батареї);
- термогенератори, які перетворюють теплову енергію в електромагнітну;
- фотогенератори (фотоелементи), які перетворюють світлову енергію в електромагнітну.

Основною характеристикою джерел електричної енергії є залежність напруги на їх затискачах від струму, який віддається в навантаження, тобто вольт-амперна характеристика (ВАХ) джерела. В загальному випадку ВАХ джерела можуть бути лінійними і нелінійними.

В залежності від області застосування і властивостей джерел, їх прийнято умовно розділяти на джерела електрорушійної сили (ЕРС) і джерела струму.

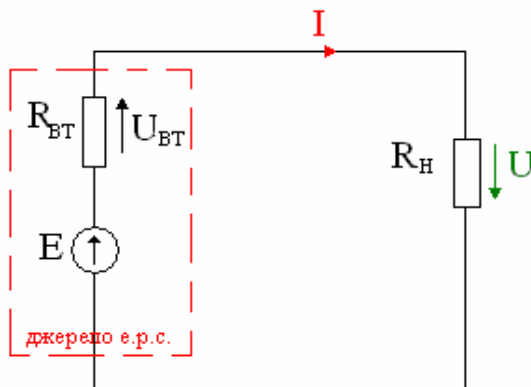
ЕРС – це скалярна величина, яка характеризує здатність стороннього поля визивати електричний струм.

1.4.1. Джерело електрорушійної сили

Джерелом ЕРС називається джерело електричної енергії, яке характеризується ЕРС і внутрішнім електричним опором (E і $R_{\text{вн}}$), при цьому $R_{\text{вн}} \ll R_{\text{н}}$.

Напрямок ЕРС вказується стрілкою в середині кружка, що вказує на напрямок зростання потенціалу в середині джерела за рахунок сторонніх сил (рис. 1.8).

Під дією ЕРС джерела E в колі буде протікати електричний струм I , який визве падіння напруги на внутрішньому опорі $R_{\text{вн}}$:



$$U_{\text{вн}} = IR_{\text{вн}}.$$

Тоді напруга на затискачах джерела буде дорівнювати:

$$U = E - IR_{\text{вн}} \quad (1.1)$$

Це і є зовнішня характеристика джерела ЕРС.

$$\text{Звідси: } IR_{\text{н}} = E - IR_{\text{вн}},$$

$$\text{або } I = \frac{E}{R_{\text{н}} + R_{\text{вн}}} \quad - \text{ закон Ома для}$$

замкнутого нерозгалуженого кола.

Величина струму прямо пропорційна ЕРС джерела і обернено пропорційна повному опору кола.

Повний опір кола R – це сума внутрішнього опору джерела і опору приймача, тобто: $R = R_{\text{вн}} + R_{\text{н}}$.

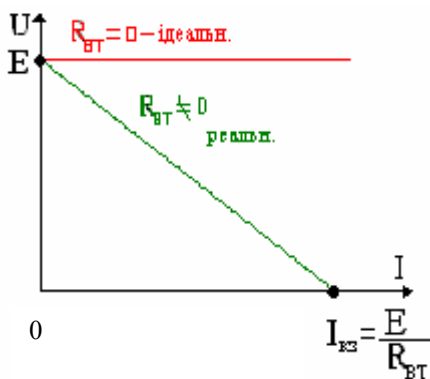


Рис. 1.9

При постійних E і $R_{\text{вн}}$ зовнішня характеристика джерела – це пряма лінія, яка проходить через точку E на осі ординат і точку $I_{\text{кз}}$ на осі абсцис, де $I_{\text{кз}} = \frac{E}{R_{\text{вн}}}$ – струм короткого замикання, коли $U = 0$ ($R = 0$).

Зобразимо зовнішню характеристику реального джерела ЕРС (рис. 1.9).

Струм короткого замикання, звичайно, в багато разів перевищує дозволений струм джерела, тому такий режим є аварійним

Із виразу (1.1) слідує, що падіння напруги на $R_{вт}$ приводить до зменшення напруги на приймачі.

При $R_{вт}=0$ напруга на затискачах джерела ЕРС буде постійною і дорівнюватиме ЕРС, тобто не залежить від струму навантаження. Таке джерело ЕРС називається ідеальним.

В режимі, близькому до режиму ідеального джерела ЕРС, працюють джерела енергії, в яких внутрішній опір в багато разів менший опору навантаження, тобто коли $R_{вт} \ll R_n$.

Приклад: – авіаційний акумулятор.

1.4.2. Джерела струму

Джерелом струму називається джерело електричної енергії, яке характеризується струмом в ньому і внутрішньою провідністю (J і $G_{вт}$), при цьому $R_{вт} \gg R_n$ (рис. 1.10).

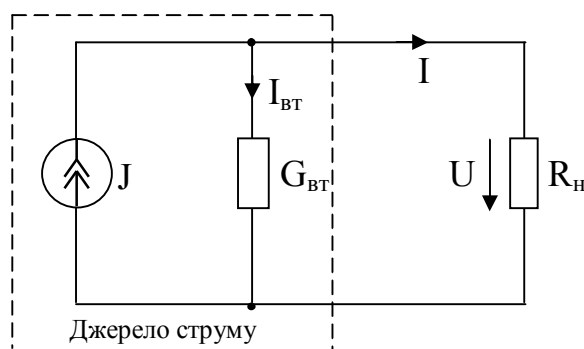


Рис. 1.10

J – струм джерела струму;
 $G_{вт}$ – внутрішня провідність;
 I – струм навантаження;
 $I_{вт}$ – струм, що проходить через $G_{вт}$.

За I законом Кірхгофа:

$$J = I_{вт} + I.$$

Враховуючи, що $I_{вт} = U G_{вт}$,

звідки:
$$U = \frac{I_{вт}}{G_{вт}} = \frac{J - I}{G_{вт}},$$

отримаємо:
$$U = \frac{J}{G_{вт}} - \frac{I}{G_{вт}}$$
 – це зовнішня характеристика джерела

струму.

Із даного виразу слідує, що при постійних J та $G_{вт}$ зовнішня характеристика джерела струму – це пряма лінія, яка проходить через точку $J/G_{вт}$ на осі ординат і точку J на осі абсцис.

Зобразимо зовнішню характеристику реального джерела струму (рис. 1.11).

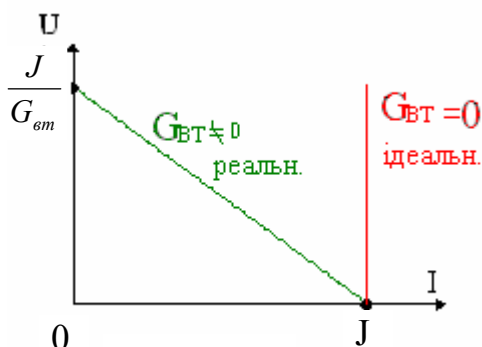


Рис. 1.11

Таким чином, в режимі короткого замикання при $U = 0$ і $R_n = 0$, весь струм джерела струму J проходить через споживач.

В режимі холостого ходу, при $R_n = \infty$ і $I = 0$, весь струм J проходить через внутрішню провідність $G_{вт}$, а напруга на затискачах джерела струму буде дорівнювати $J/G_{вт}$.

При $G_{вт} = 0$ струм джерела J буде постійним незалежно від величини опору навантаження R_n . Напруга на навантаженні в цьому випадку буде дорівнювати:
$$U = J R_n.$$

Такі джерела називаються ідеальними джерелами струму. Його зовнішня характеристика – це пряма, паралельна осі ординат U .

Ідеальне джерело струму – це джерело струму, внутрішня провідність $G_{вт}$ якого дорівнює нулю.

В режимі, близькому до режиму ідеального джерела струму, працюють джерела енергії, в яких внутрішній опір в багато разів більше опору навантаження, тобто $R_{вт} \gg R_n$.

Приклад:– електронне (лампове) джерело, у якого струм навантаження залишається практично постійним.

1.4.3. Еквівалентні перетворення джерел

Для спрощення розрахунку електричних кіл джерело ЕРС. може бути замінено джерелом струму або навпаки (рис. 1.12). Така заміна повинна бути

еквівалентною.

Формули еквівалентної взаємної заміни джерел приведені на рис. 1.12.

Таким чином, джерело струму, еквівалентне джерелу ЕРС, повинне генерувати струм, рівний струму КЗ джерела ЕРС, і мати паралельну провідність

$$G_{вт} = \frac{1}{R_{вт}}.$$

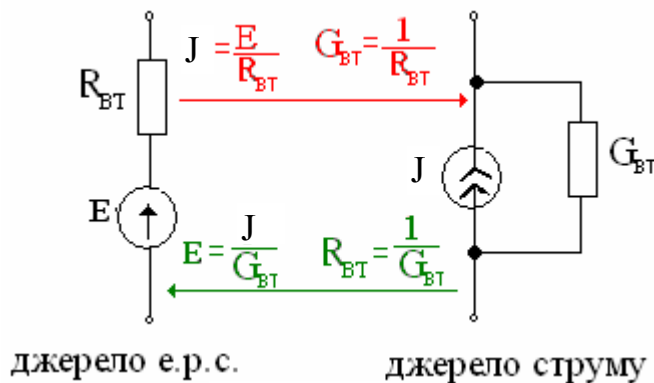


Рис. 1.12

1.5. Лінійні електричні кола та геометрія електричного кола

Електричне коло називається лінійним, якщо всі елементи, які входять в нього (активні і пасивні), являються лінійними, тобто електричні опори, індуктивності і ємності ділянок цього кола не залежать від величин та напрямків струмів і напруг.

Процеси в лінійних електричних колах описуються лінійними диференціальними або алгебраїчними рівняннями. Усталені процеси в лінійних електричних колах постійного струму описуються лінійними алгебраїчними рівняннями.

Лінійні кола являються ідеалізацією реальних кіл.

В реальних колах електричний опір елементів, звичайно, змінюється за рахунок нагріву їх струмом, що протікає в них.

Крім того, зовнішні характеристики джерел електричної енергії неможна вважати лінійними.

Але в багатьох задачах електричне коло можна вважати лінійним. Це пояснюється тим, що в робочому діапазоні змін струмів і напруг кола,

нелінійність ВАХ його елементів незначна і не впливає на точність результатів розрахунку.

Для полегшення розрахунку електричних кіл складається їх електрична схема.

Схемою електричного кола називається графічне зображення електричного кола, яке має умовне позначення його елементів і показує послідовність їх з'єднання.

При зображенні схеми електричного кола користуються умовними графічними позначеннями, які встановлені Держстандартами.

Основними елементами схем електричних кіл являються: гілка, вузол, контур, а також двополіусник та чотириполіусник.

Розглянемо ці поняття на прикладі конкретного електричного кола (рис. 1.13).

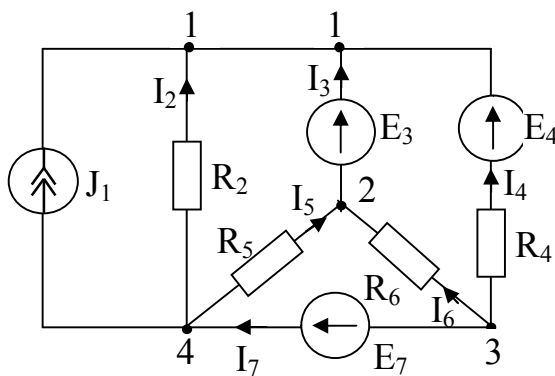


Рис. 1.13

Гілка – це ділянка електричного кола, вздовж якої протікає один і той же струм.

Число гілок позначається буквою p . Для приведеного кола $p=7$.

Гілки бувають активними (з джерелом електричної енергії) і пасивними (без джерела енергії). Гілка може складатися із одного пасивного або активного елемента, а

також представляти собою послідовне з'єднання декількох елементів.

Вузол – це місце з'єднання трьох і більше гілок.

Розрізняють поняття геометричного і потенціального вузлів. Геометричні вузли можуть бути об'єднані в один потенціальний вузол.

Число вузлів кола позначається буквою q , для приведеного кола $q=4$.

Контур – це замкнутий шлях, який проходить через декілька гілок і вузлів розгалуженого електричного кола. Число контурів позначається буквою n .

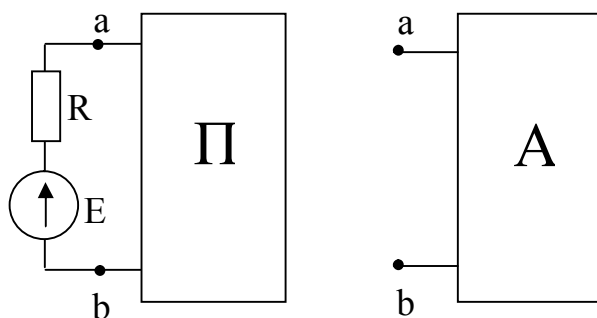


Рис. 1.14

Двополіусник – це частина електричного кола з двома відокремленими затискачами, котрі називаються полюсами. На електричних схемах двополіусник зображається у вигляді прямокутника (рис.1.14).

В середині прямокутника вказуються позначення двополіусника: П – пасивний, в якому відсутні активні елементи; А –

активний, в якому є активні елементи.

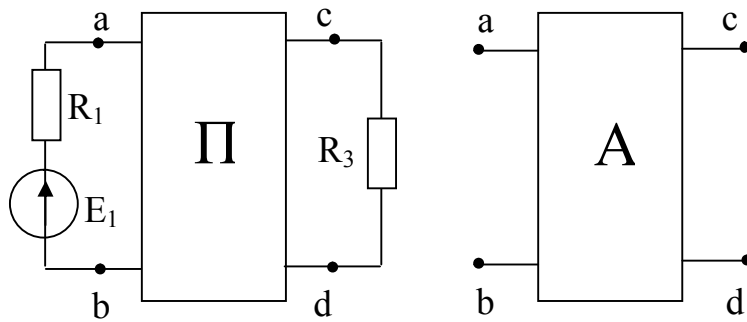


Рис. 1.15

Чотириполюсник – це частина електричного кола, яка має дві пари клем (полюсів), які можуть бути вхідними (a і b), або вихідними (c і d) (рис. 1.15).

Чотириполюсники можуть бути пасивними (П) і активними (А).

Тема 2. Теорія та розрахунок електричних кіл постійного струму

2.1. Основні закони електричних кіл

2.1.1. Закон Ома для ділянки кола

Як відомо, закон Ома для простого кола має наступний вигляд:

$$I = \frac{E}{R_n + R_{em}}.$$

Простим електричним колом називається одноконтурне коло, або коло, яке в результаті простих перетворень може бути зведене до одноконтурного.

Закон Ома може бути застосований не тільки до простого електричного кола, але й до окремої її ділянки.

Розглянемо ділянку кола (рис. 2.1):

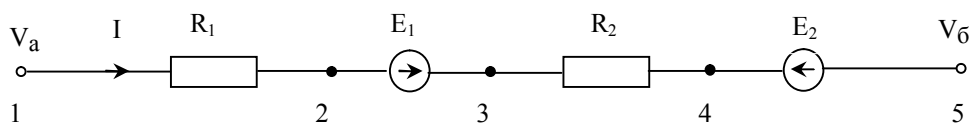


Рис. 2.1

Вважаємо, що потенціали точок 1 і 5 відомі і дорівнюють відповідно V_a та V_b . Задамося напрямом струму I і визначимо потенціали решти точок.

Для вибраного напрямку струму потенціал $V_2 < V_1$ на величину падіння напруги на R_1 і дорівнює $V_2 = V_1 - R_1 I$.

Потенціал $V_3 > V_2$, так як на цій ділянці включене джерело ЕРС і напрям переходу від точки 2 до точки 3 співпадає з напрямом ЕРС, тому

$$V_3 = V_2 + E_1.$$

Потенціал $V_4 < V_3$ і дорівнює $V_4 = V_3 - R_2 I$.

Потенціал $V_5 < V_4$ і дорівнює $V_5 = V_4 - E_2$, так як напрям переходу від точки 4 до точки 5 не співпадає з напрямом ЕРС.

Просумуємо окремо ліву і праву частини отриманих рівнянь:

$$V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V_1 - R_1 I + V_2 + E_1 + V_3 - R_2 I + V_4 - E_2.$$

Вирішимо останнє рівняння відносно струму I :

$$I = \frac{V_1 - V_5 + E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \text{ — це є закон Ома для ділянки кола.}$$

В загальному випадку закон Ома для ділянки кола записується так:

$$I = \frac{V_a - V_b + \sum E_k}{\sum R_k}.$$

де $V_a - V_b = U_{ab}$ — різниця потенціалів між крайніми точками a і b при позитивному напрямку струму від точки a до точки b ;

$\sum E_k$ — алгебраїчна сума ЕРС, діючих на ділянці електричного кола (ЕРС записується з позитивним знаком, якщо її напрям співпадає з вибраним напрямом струму, і навпаки);

$\sum R_k$ – повний опір ділянки кола.

Закон Ома для пасивної ділянки кола:

$$I = \frac{V_a - V_b}{\sum R_k} = \frac{U_{ab}}{\sum R_k}.$$

Частковим випадком є відома формула:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Якщо в результаті розрахунку струм I вийшов з від'ємним знаком, то це означає, що дійсний напрямок струму протилежний вибраному.

2.1.2. Перший закон Кірхгофа

Дійсний для вузла електричного кола і читається так:

«Алгебраїчна сума струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю»

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Перший закон Кірхгофа являється наслідком неперервності струму і не накопичення зарядів у вузлах електричного кола.

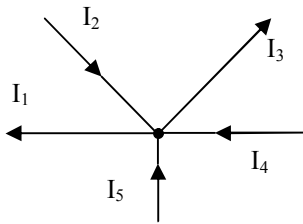


Рис. 2.2

Струми, які течуть до вузла, будемо вважати додатними, а які витікають – від'ємними.

Для вузла електричного кола рис. 2.2 маємо:

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

Для електричного кола, яке має q вузлів, за першим законом Кірхгофа можна скласти $(q - 1)$ незалежних рівнянь.

2.1.3. Другий закон Кірхгофа

Другий закон Кірхгофа дійсний для контуру електричного кола.

Для одержання другого закону Кірхгофа розглянемо зовнішній контур 1-2-3-4 електричного кола рис. 2.3.

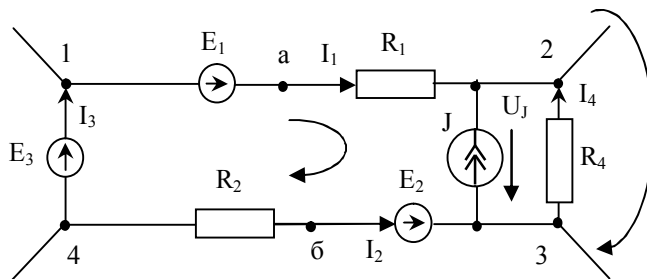


Рис. 2.3

Вважаємо заданими електрорушійні сили E_k , струми I_k і їх напрямки, опори резисторів R_k і потенціал точки 1 V_1 .

Визначимо потенціали інших точок контуру.

Вкажемо напрям обходу зовнішнього контуру 1-2-3-4 і послідовно визначимо

потенціали всіх його точок:

$$V_a = V_1 + E_1, V_2 = V_a - R_1 I_1, V_3 = V_2 + R_4 I_4,$$

$$V_6 = V_3 - E_2, V_4 = V_6 + R_2 I_2, V_1 = V_4 + E_3.$$

Складемо окремо ліву і праву частини отриманих рівнянь:

$$V_a + V_2 + V_3 + V_6 + V_4 + V_1 = V_1 + E_1 + V_a - R_1 I_1 + V_2 + R_4 I_4 + \\ + V_3 - E_2 + V_6 + R_2 I_2 + V_4 + E_3.$$

$$\text{Маємо: } E_1 - E_2 + E_3 = R_1 I_1 - R_4 I_4 - R_2 I_2.$$

В загальному випадку:

$$\sum_{k=1}^m E_k = \sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^n U_{Rk} - \text{це є другий закон Кірхгофа.}$$

де: m – число джерел ЕРС в даному контурі;

n – число пасивних елементів в цьому контурі.

Другий закон Кірхгофа читається так:

«Алгебраїчна сума ЕРС в довільному контурі електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на пасивних елементах цього контуру».

Для складання рівнянь за II законом Кірхгофа необхідно:

- вибрати позитивні напрями струмів у гілках;
- довільно задатися напрямом обходу контуру;
- зі знаком "+" беремо ЕРС і спади напруг від тих струмів, напрямом яких співпадає з напрямом обходу контуру і навпаки.

Якщо в контурі є джерела струму з напругою U_{Jk} на їх затискачах, то II закон Кірхгофа приймає такий вигляд:

$$\sum_{k=1}^m E_k = \sum_{k=1}^n I_k R_k + \sum_{k=0}^p U_{Jk},$$

де p – число джерел струму.

Наприклад, рівняння за II законом Кірхгофа для внутрішнього контуру електричного кола рис. 2.3 запишеться так:

$$E_1 - E_2 + E_3 = I_1 R_1 + U_J - I_2 R_2.$$

Якщо ж в контурі і всі ЕРС замінити напругами на їх затискачах, напрям яких протилежний напрямку ЕРС, то рівняння за другим законом Кірхгофа приймає такий вигляд:

$$\sum_{k=1}^m U_k = 0,$$

де m – число активних та пасивних елементів контура.

2.1.4. Закон Джоуля-Ленца

При протіканні електричного струму по проводу відбувається його нагрів. Це говорить про те, що електрична енергія джерела W перетворюється в теплову Q .

Російський академік Е. Х. Ленц і англійський вчений Джоуль незалежно один від одного дослідним шляхом встановили, що кількість тепла Q , яке виділяється струмом в проводі, пропорційне квадрату струму, опору провідника і часу протікання струму, тобто витраченій джерелом електричній енергії:

$$Q = W = I^2 R T \text{ [J, Дж]}.$$

В міжнародній системі одиниць $СИ$ одиницею енергії і тепла є джоуль.

Цей закон представляє собою частковий випадок закону збереження і перетворення енергії.

Електрична енергія за одиницю часу називається потужністю:

$$P = \frac{W}{T} = I^2 R.$$

Враховуючи, що $IR = U$, отримаємо:

$$P = IU \text{ [W, Вт]}.$$

2.2. Потенціальна діаграма

Потенціальною діаграмою називається графічне зображення розподілу потенціалів вздовж контуру в залежності від опорів елементів цього контуру.

Розглянемо замкнутий контур (рис. 2.4,а).

За відомими E_k ; R_k ; I_k визначимо потенціали точок V_k .

Задамося напрямками струмів у гілках і напрямком обходу.

При побудові потенціальної діаграми будемо враховувати такі правила:

1. Якщо струм в резисторі співпадає з напрямком обходу, то потенціал наступної точки зменшується, і навпаки.

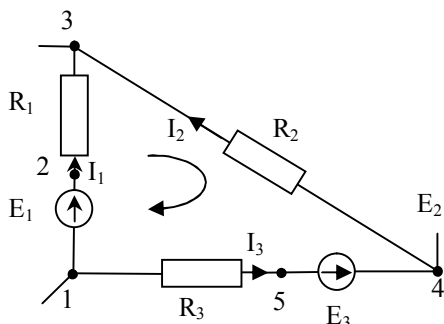


Рис. 2.4,а

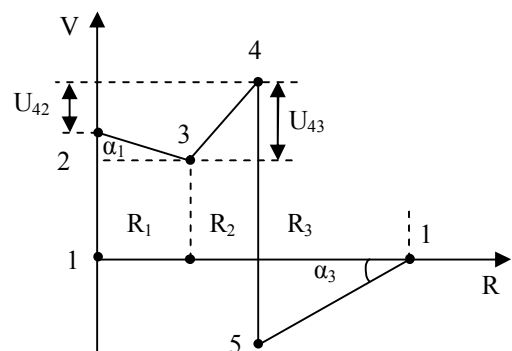


Рис 2.4,б

2. Якщо напрямок ЕРС співпадає з напрямком обходу контуру, то потенціал наступної точки збільшується, і навпаки.

3. Потенціал однієї із точок приймаємо рівним нулю.

Нехай $V_I=0$, тоді:

$$V_2 = V_1 + E_1 \rightarrow V_3 = V_2 - R_1 I_1 \rightarrow V_4 = V_3 + R_2 I_2 \rightarrow V_5 = V_4 - E_3 \rightarrow V_1 = V_5 + R_3 I_3.$$

При побудові потенціальної діаграми (рис. 2.5,б) по осі абсцис відкладаються в масштабі опори ділянок (елементів) контуру в порядку їх слідування при обході контуру.

По осі ординат відкладаються значення потенціалів.

На потенціальній діаграмі тангенси кутів нахилу відрізків прямих ліній пропорційні величині струмів, які протікають у відповідних гілках:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_2 - V_3}{R_1} = I_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{V_5 - V_1}{R_3} = I_3.$$

Потенціальна діаграма дозволяє визначити різницю потенціалів між будь-якими точками контуру і струми в гілках.

2.3. Розрахунок складних електричних кіл методом еквівалентних перетворень

Цей метод заснований на еквівалентному перетворенні послідовних і паралельних з'єднань пасивних і активних елементів та перетворенні з'єднань зіркою і трикутником. В результаті цих перетворень складне електричне коло змінюється в просте одноконтурне, де визначають струм за законом Ома. Процес зміни конфігурації кола до одного контуру називається прямим ходом методу (рис. 2.5). В процесі перетворення бажано більше зберегти вузлів вихідного кола, які в одноконтурному колі є точками 1, 2, 3 (рис. 2.5,в). Приймавши потенціал одного із вузлів рівним нулю, знаходимо потенціали інших вузлів одноконтурного кола. За потенціалами вузлів та законом Ома для ділянки кола знаходимо на зворотному ході струми в гілках вихідної схеми.

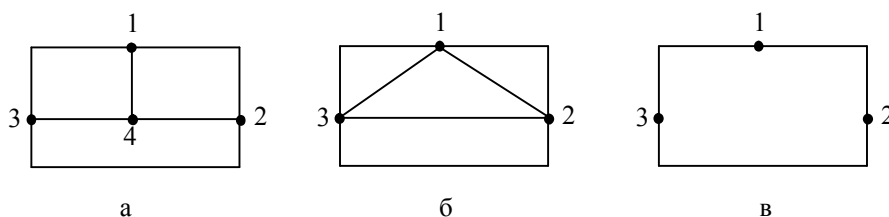


Рис. 2.5

Усі перетворення повинні бути еквівалентними, для цього повинні виконуватись наступні умови еквівалентності перетворень:

- потужність, яку споживає коло до і після перетворень, повинна бути однаковою;
- струми і напруги на тих ділянках кола, котрі не підлягали перетворенню, повинні залишитися незмінними.

Метод перетворення не вимагає складання систем алгебраїчних рівнянь і тому є більш наочним і в багатьох випадках дозволяє значно спростити розрахунок.

Схеми стандартних еквівалентних перетворень, що застосовуються найчастіше у практичних розрахунках як пасивних так і активних дво- і триполосників, і відповідні формули таких перетворень зведені до табл.2.1. Розглянемо деякі з них.

2.3.1. Послідовне з'єднання резисторів

Це таке з'єднання, при якому через всі елементи протікає один і той же струм.

Зобразимо електричну схему послідовного з'єднання n резисторів (рис 2.6).

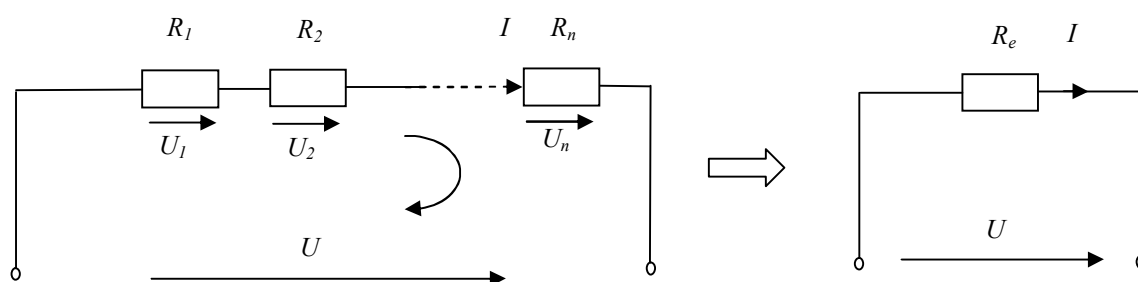


Рис. 2.6

За II законом Кірхгофа для даної схеми маємо:

$$0 = -U + U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = IR_e,$$

$$\text{де: } R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні резисторів еквівалентний (загальний) опір кола дорівнює сумі опорів окремих резисторів.

Послідовне з'єднання елементів застосовують часто для ділення напруги.

2.3.2. Паралельне з'єднання резисторів

Це таке з'єднання, при якому всі ділянки кола приєднуються до одної пари вузлів, тобто знаходяться під дією однієї і тієї ж напруги.

Зобразимо електричну схему паралельного з'єднання n резисторів (рис. 2.7).

За I законом Кірхгофа маємо:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = \frac{U}{R_e},$$

$$\text{де: } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \text{ або } G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n.$$

Таким чином, при паралельному з'єднанні резисторів еквівалентна

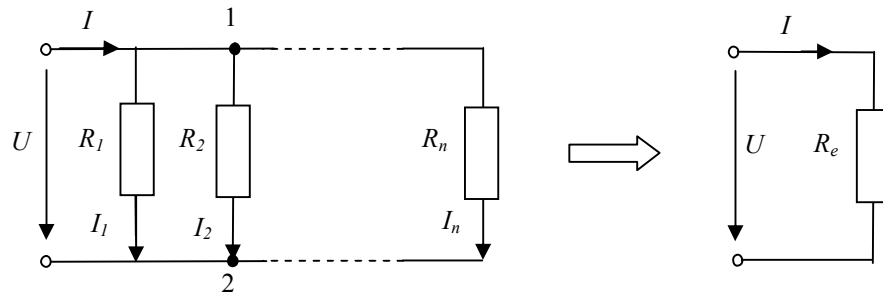


Рис 2.7

провідність кола дорівнює сумі провідностей окремих гілок.

Розглянемо частковий випадок, коли два резистори з'єднані паралельно (рис 2.8).

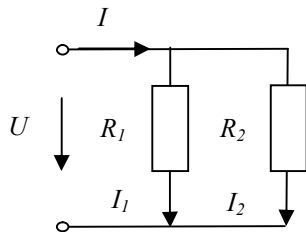


Рис 2.8

В цьому випадку:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \text{ або } R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{U(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \Rightarrow U = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Визначимо струми в гілках:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \text{ і } I_2 = \frac{U}{R_2}, \text{ після підстановки } U \text{ маємо:}$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ і } I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \text{це правило}$$

"чужої гілки".

Струм в одній із двох паралельних гілок дорівнює струмові в нерозгалуженій частині кола, помноженому на опір "чужої" гілки і поділеному на суму опорів обох гілок.

2.3.3. Змішане з'єднання резисторів

Змішаним з'єднанням резисторів називається поєднання послідовного і паралельного з'єднань (рис. 2.9):

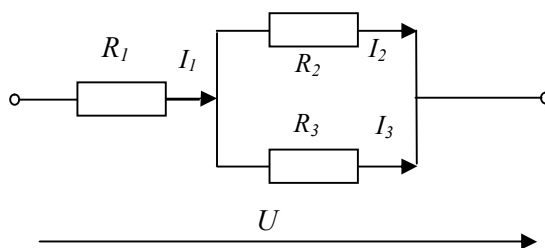


Рис 2.9

Еквівалентний опір такого кола дорівнює:

$$R_e = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Порядок розрахунку кола:

- визначаємо еквівалентний опір R_e ;

- визначаємо струм в нерозгалуженій ділянці кола: $I_1 = \frac{U}{R_e}$;

- визначаємо напругу на паралельній ділянці: $U_{23} = I_1 R_{23}$;

- визначаємо струми в гілках: $I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}$ і $I_3 = \frac{U_{23}}{R_3}$.

2.3.4. З'єднання резисторів "зіркою" та "трикутником"

З'єднанням "трикутником" називається з'єднання трьох елементів кола в замкнутий контур з трьома вершинами (рис. 2.10,а).

З'єднанням "зіркою" називається з'єднання трьох елементів кола у вигляді трьох променів, які розходяться із одного вузла (рис. 2.10,б).

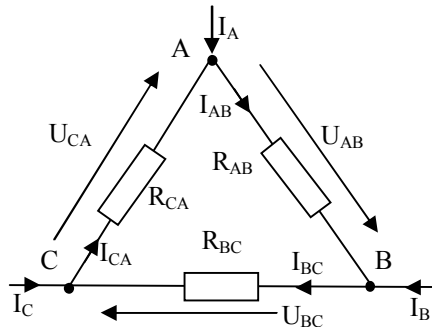


Рис. 2.10,а

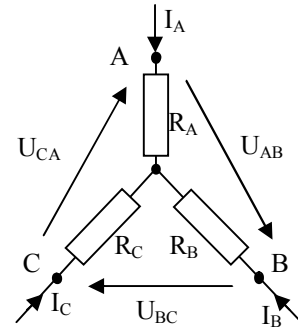


Рис. 2.10,б

Часто при розрахунку електричних кіл необхідно перейти від з'єднання "зіркою" до "трикутника" і навпаки. При цьому перетворення повинні бути еквівалентними, тобто повинні виконуватися умови еквівалентності перетворень:

– потужність з'єднання "трикутником" повинна дорівнювати потужності з'єднання "зіркою":

$$P_T = P_3;$$

– напруги між точками А, В, С "трикутника" і "зірки" та струми, що підходять до цих точок, повинні бути рівними:

$$U_{ABT} = U_{AB3}, \quad U_{BCT} = U_{BC3}, \quad U_{CAT} = U_{CA3}; \quad I_{AT} = I_{A3}; \quad I_{BT} = I_{B3}; \quad I_{CT} = I_{C3}.$$

Крім цього в даному випадку достатньою умовою еквівалентності перетворень є рівність опорів між кожною парою точок при вимкнутій третій точці в обох схемах. Далі використаємо цю умову для виводу формул еквівалентного переходу від "зірки" до "трикутника".

Нехай в обох схемах вимкнута точка А і тому в них $I_A = 0$. Знайдемо опори між точками В і С в обох схемах і прирівняємо їх:

$$R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{CA})}{R_{BC} + (R_{AB} + R_{CA})}. \quad (2.1)$$

Для випадку вимкнення точки В маємо:

$$R_A + R_C = \frac{R_{CA}(R_{AB} + R_{BC})}{R_{CA} + (R_{AB} + R_{BC})}. \quad (2.2)$$

При вимкнутій точці С маємо:

$$R_A + R_B = \frac{R_{AB}(R_{BC} + R_{CA})}{R_{AB} + (R_{BC} + R_{CA})}. \quad (2.3)$$

Тепер складемо перші два рівняння і віднімемо від них третє рівняння:

$$R_B + R_C + R_C + R_A - R_B - R_A = \frac{R_{BC}R_{AB} + R_{BC}R_{CA} + R_{CA}R_{AB} + R_{CA}R_{BC} - R_{AB}R_{CA} - R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

Звідки

$$R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Аналогічно знаходимо:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \quad R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Таким чином, формули еквівалентного переходу від "трикутника" до "зірки" мають такий вид:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \quad R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \quad R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}. \quad (2.4)$$

Якщо розрахувати систему рівнянь (2.4) відносно R_{AB}, R_{BC}, R_{CA} , то одержимо формули еквівалентного переходу від "зірки" до "трикутника":

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}; \quad R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}; \quad R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}. \quad (2.5)$$

Приклади інших еквівалентних перетворень приведені в таблиці 2.1.

2.4. Складне електричне коло

Складне електричне коло – це розгалужене електричне коло, що має дві і більше активних гілок.

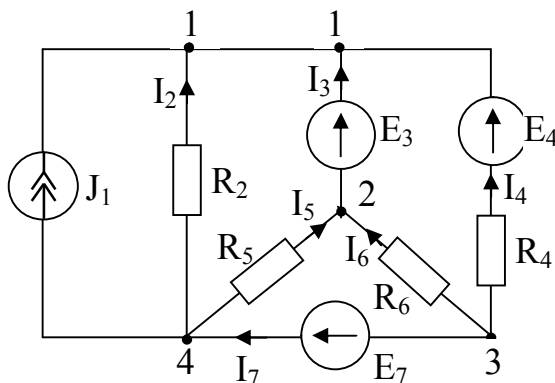


Рис. 1.11

Розглянемо складне електричне коло (рис.2.11).

Коло має: гілок $p=7$; вузлів $q=4$; незалежних контурів $n=p-(q-1)=4$.

Розрахувати електричне коло – це значить за заданими параметрами джерел електричної енергії та опорами пасивних елементів визначити струми у всіх гілках кола.

За відомими струмами потім розраховуються напруги на окремих ділянках кола, потужності, що віддаються джерелами та споживаються приймачами.

Таблиця 2.1

Еквівалентні перетворення

№ п/п	Схема	Еквівалентна схема	Формули перетворення
1			$r_3 = \sum_{i=1}^K r_i$
2			$g_i = \frac{1}{r_i}; g_3 = \sum_{i=1}^K g_i;$ $r_3 = \frac{1}{g_3}$
3			$r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$
4			$r_3 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$
5			$r_1 = \frac{r_{12} r_{31}}{r_{12} + r_{31} + r_{23}};$ $r_2 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{12} + r_{31} + r_{23}};$ $r_3 = \frac{r_{23} r_{31}}{r_{12} + r_{31} + r_{23}}$
6			$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3};$ $g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3};$ $g_{31} = \frac{g_3 g_1}{g_1 + g_2 + g_3};$ $r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3};$ $r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1};$ $r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}$
7			$\frac{1}{C_3} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{C_i}$
8			$C_3 = \sum_{i=1}^K C_i$
9			$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{13}}{C_{23}};$ $C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12} C_{23}}{C_{31}};$ $C_3 = C_{23} + C_{31} + \frac{C_{23} C_{31}}{C_{12}}$
10			$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3};$ $C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3};$ $C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$

11			$I = \frac{E}{r}$
12			$E = I \cdot r$
13			$r_s = \sum_{i=1}^K r_i;$ $E_s = \sum_{i=1}^K E_i$
14			$r_s = \sum_{i=1}^K r_i; I_s = \frac{\sum_{i=1}^K I_{pi}}{\sum_{i=1}^K r_i}$
15			$g_s = \sum_{i=1}^K g_i; r_s = \frac{1}{g_s};$ $I_s = \sum_{i=1}^K I_i; g_i = \frac{1}{r_i}$
16			$g_s = \sum_{i=1}^K g_i; r_s = \frac{1}{g_s};$ $E_s = \frac{\sum_{i=1}^K E_i g_i}{\sum_{i=1}^K g_i}$
17			$r_s = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2};$ $E_s = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}$
18			$E_s = E + J r$ $r_s = r$
20			
21			$E_i = J r_i; E_i = J; E_s = J r_s$

Задачі, в яких за відомою конфігурацією електричного кола та параметрами його елементів визначаються струми, напруги та потужності на всіх ділянках кола, відносяться до задач аналізу електричних кіл.

Задачі, в яких за заданими функціями електричних кіл необхідно визначити їх структуру та параметри, відносяться до задач синтезу електричних кіл.

В подальшому ми будемо розглядати лише задачі аналізу електричних кіл.

Для розрахунку складних електричних кіл використовують методи:
еквівалентних перетворень;
рівнянь Кірхгофа;
контурних струмів;
накладання;
пропорційного перерахування;
вузлових потенціалів;
еквівалентного генератора тощо.

2.5. Розрахунок складних електричних кіл методом рівнянь Кірхгофа

Розрахунок складних електричних кіл даним методом полягає в складанні рівнянь за I-м та II-м законами Кірхгофа для вузлів та контурів електричного кола.

Загальне число рівнянь повинно бути рівним числу невідомих струмів, тобто числу гілок електричного кола p . При цьому рівняння повинні бути алгебраїчно незалежними.

За I-м законом Кірхгофа складається $q-1$ рівнянь (q -е рівняння є наслідком попередніх $q-1$ рівнянь і, отже, являється залежним).

Вузли, відносно яких складаються незалежні рівняння за I-м законом Кірхгофа, називаються незалежними. В електричному колі, що має q вузлів, будь-які $q-1$ вузли являються незалежними, а останній, що залишився – залежним.

За II-м законом Кірхгофа складаються решта рівнянь для незалежних контурів, кількість яких можна визначити за формулою: $n=p-(q-1)$,

де p – число гілок;

q – число вузлів;

n – число незалежних контурів.

Незалежним контуром називається контур електричного кола, що відрізняється від інших контурів хоча б однією гілкою.

Для забезпечення незалежності рівнянь, складених за II законом Кірхгофа, необхідно, щоб вони відповідали незалежним контурам, якими є елементарні контури.

Елементарним називається контур, що не містить внутрішніх гілок. На рис. 1.12 контури I та II – елементарні контури.

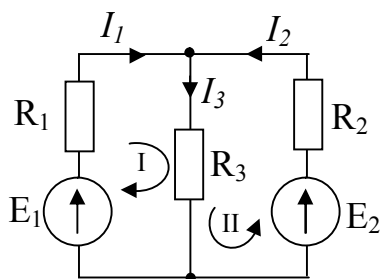


Рис. 1.12

Розглянемо послідовність розрахунку складного кола методом рівнянь Кірхгофа на конкретному прикладі (рис. 1.13).

Виконаємо аналіз схеми: $p=6$; $q=4$.

Отже, за I-м законом Кірхгофа необхідно скласти $q-1=3$ рівнянь, а за II-м – решту $n=p-(q-1)=3$ рівнянь.

Складемо рівняння за I-м законом Кірхгофа, для цього довільно задамося напрямками струмів в гілках:

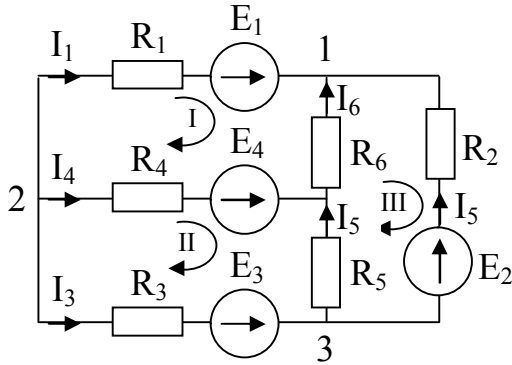


Рис. 1.13

$$1 \text{ вузол: } I_1 + I_2 + I_6 = 0;$$

$$2 \text{ вузол: } -I_1 - I_3 - I_4 = 0;$$

$$3 \text{ вузол: } I_3 - I_5 - I_2 = 0.$$

Якщо скласти рівняння для четвертого вузла, то воно виявиться наслідком трьох попередніх і може бути одержане складанням записаних трьох рівнянь.

Складемо рівняння за II-м законом Кірхгофа, для цього виберемо три незалежних контури і довільно задамося напрямом обходу:

$$\text{I контур: } R_1 I_1 - R_6 I_6 - R_4 I_4 = E_1 - E_4;$$

$$\text{II контур: } R_4 I_4 - R_5 I_5 - R_3 I_3 = E_4 - E_3;$$

$$\text{III контур: } R_6 I_6 - R_2 I_2 + R_5 I_5 = -E_2.$$

Якщо скласти рівняння для четвертого (зовнішнього) контуру, то воно буде залежним, так як в четвертому контурі немає нових гілок.

Розв'язавши цю систему з 6-ти рівнянь визначимо 6 невідомих струмів.

Якщо при розрахунку виявиться, що струм має від'ємне значення, то це означає, що його дійсний напрям протилежний вибраному.

Знаючи струми в гілках можна за законом Ома визначити спади напруг на елементах кола.

Якщо електричне коло окрім джерел ЕРС містить ще й джерела струму, струми яких являються заданими величинами, то в цьому випадку число

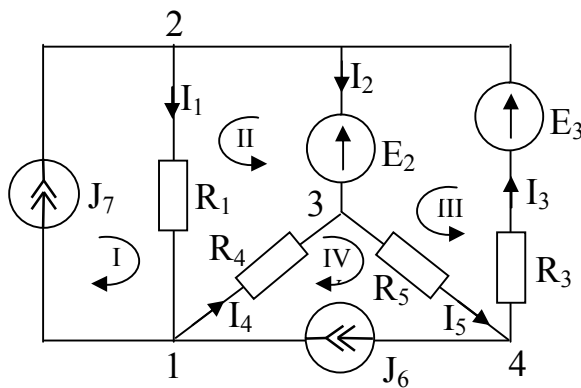


Рис. 1.14

Розглянемо електричне коло (рис. 1.14).

Проведемо аналіз кола: $p=7$; $q=4$; $n_J=2$.

незалежних рівнянь для визначення невідомих струмів дорівнює $p - n_J$, де n_J – число гілок з ідеальними джерелами струму.

Тоді за II законом Кірхгофа необхідно скласти $n=p-(q-1)-n_J$ незалежних рівнянь. При цьому необхідно враховувати, що незалежні контури, для яких складаються рівняння за II законом Кірхгофа не повинні містити гілки з ідеальними джерелами струму.

За I-м законом Кірхгофа складемо $q-l=3$ рівнянь:

$$1 \text{ вузол: } -J_7 + I_1 - I_4 + J_6 = 0;$$

$$2 \text{ вузол: } J_7 - I_1 - I_2 + I_3 = 0;$$

$$3 \text{ вузол: } I_2 + I_4 - I_5 = 0.$$

За II-м законом Кірхгофа складемо $n=p-(q-l)-n_j=7-3-2=2$ рівнянь для II та III контурів, в які не входять ідеальні джерела струму:

$$\text{II контур: } I_1 R_1 + I_4 R_4 = E_2;$$

$$\text{III контур: } I_3 R_3 + I_5 R_5 = E_3 - E_2.$$

Недоліком методу рівнянь Кірхгофа є його складність, так як необхідно розв'язувати систему p рівнянь.

Правильність розрахунку електричних кіл перевіряється за допомогою рівняння балансу потужностей.

2.6. Баланс потужностей

Правильність розрахунку електричних кіл перевіряється за допомогою рівняння балансу потужностей: «Алгебраїчна сума потужностей, що віддаються джерелами електричної енергії, дорівнює арифметичній сумі потужностей, що споживаються приймачами»

$$\Sigma P_0 = \Sigma P_n, \text{ або } \Sigma E_k I_k = \Sigma I_k^2 R_k.$$

Добуток $E_k I_k$ береться з додатнім знаком, якщо напрямки ЕРС та струму в гілці співпадають, тобто джерело віддає енергію в коло. Добуток $E_k I_k$ береться з від'ємним знаком, якщо напрямки ЕРС та струму в гілці протилежні, тобто джерело споживає енергію.

Якщо в електричному колі крім джерел ЕРС є ще й джерела струму, то рівняння балансу потужностей запишеться в такому вигляді:

$$\Sigma (E_k I_k + U_{Jk} J_k) = \Sigma I_k^2 R_k,$$

де $U_{Jk} J_k = P_{Jk}$ – потужність k -го джерела струму.

Добуток $U_{Jk} J_k$ береться з додатнім знаком, якщо напрямки струму та напруги джерела струму протилежні.

Добуток $U_{Jk} J_k$ береться з від'ємним знаком, якщо напрямки струму та напруги джерела струму співпадають.

2.7. Розрахунок складних електричних кіл методом контурних струмів

Метод контурних струмів являється одним з основних методів розрахунку лінійних кіл постійного струму.

Метод оснований на застосуванні II закону Кірхгофа і дозволяє скоротити число розв'язуваних рівнянь.

В цьому випадку необхідно скласти стільки рівнянь, скільки незалежних контурів є в розглянутому колі, тобто $n=p-(q-l)$ рівнянь.

При цьому рівняння складається для контурних струмів.

Контурним струмом називається умовний розрахунковий струм, що протікає через всі елементи тільки даного контуру.

Контурні струми позначаються на схемах вигнутими стрілками, а індекси позначаються римськими цифрами.

Розглянемо розрахунок складного електричного кола методом контурних струмів на конкретному прикладі. (рис. 2.15).

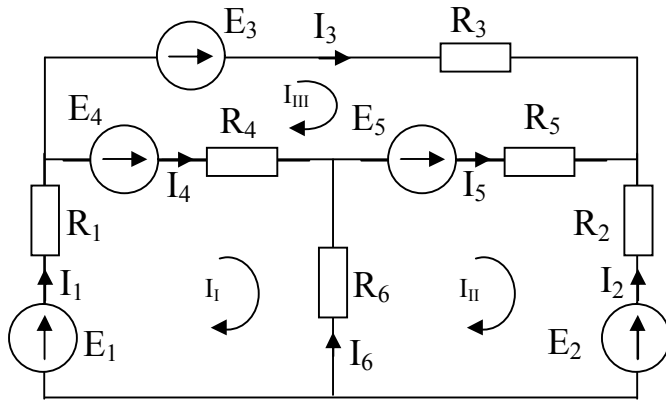


Рис. 2.15

Проведемо аналіз схеми:
 $p=6$; $q=4$; $n=p-(q-1)=3$.

Отже, необхідно скласти 3 контурних рівнянь.

Виберемо незалежні контури, задамо напрямки контурних струмів I_I , I_{II} та I_{III} , а також напрямки струмів в гілках I_1, \dots, I_6 .

Складемо за II законом Кірхгофа систему рівнянь для контурних струмів, так звані

контурні рівняння. При цьому напрямки обходу контурів визначаються напрямком контурних струмів:

$$\begin{cases} I_I(R_1+R_4+R_6)-I_{II}R_6-I_{III}R_4=E_1+E_4; \\ -I_I R_6+I_{II}(R_2+R_5+R_6)-I_{III}R_5=E_5-E_2; \\ -I_I R_4-I_{II}R_5+I_{III}(R_3+R_4+R_5)=E_3-E_5-E_4. \end{cases}$$

Введемо наступні поняття.

Власний опір контуру – це сума опорів всіх елементів, що входять до даного контуру. Будемо позначати його R_{mm} :

$$\begin{aligned} R_{II} &= R_1 + R_4 + R_6 - \text{власний опір контуру I;} \\ R_{22} &= R_2 + R_5 + R_6 - \text{власний опір контуру II;} \\ R_{33} &= R_3 + R_4 + R_5 - \text{власний опір контуру III.} \end{aligned}$$

Взаємний опір контуру – це опір, що належить двом суміжним контурам. Будемо позначати його R_{mn} :

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_{21} = R_6 - \text{взаємний опір I та II контурів;} \\ R_{13} &= R_{31} = R_4 - \text{взаємний опір I та III контурів;} \\ R_{23} &= R_{32} = R_5 - \text{взаємний опір II та III контурів.} \end{aligned}$$

Контурна ЕРС – це алгебраїчна сума ЕРС, що входять в даний контур.

$$\begin{aligned} E_I &= E_1 + E_4 - \text{контурна ЕРС контуру I;} \\ E_{II} &= E_5 - E_2 - \text{контурна ЕРС контуру II;} \\ E_{III} &= E_3 - E_5 - E_4 - \text{контурна ЕРС контуру III.} \end{aligned}$$

Тоді контурні рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{cases} I_I R_{11} - I_{II} R_{12} - I_{III} R_{13} = E_I; \\ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -I_I R_{21} + I_{II} R_{22} - I_{III} R_{23} &= E_{II}; \\ I_I R_{31} - I_{II} R_{32} + I_{III} R_{33} &= E_{III}. \end{aligned}$$

Розв'язавши дану систему трьох рівнянь з трьома невідомими, визначимо контурні струми I_I, I_{II}, I_{III} .

На основі контурних струмів визначаємо дійсні струми в гілках електричного кола. При цьому необхідно врахувати наступні правила.

1. В гілці, яка входить лише в один контур, дійсний струм дорівнює контурному струму.

$$I_1 = I_I; \quad I_2 = -I_{II}; \quad I_3 = I_{III}.$$

2. В гілці, що належить двом суміжним контурам, дійсний струм дорівнює алгебраїчній сумі контурних струмів:

$$I_4 = I_I - I_{III}; \quad I_5 = I_{II} - I_{III}; \quad I_6 = I_{II} - I_I.$$

Правильність розрахунку електричного кола перевіряється за допомогою рівнянь балансу потужностей:

$$\sum E_k I_k = \sum I_k^2 R_k.$$

Для нашого випадку одержимо:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_5 I_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Якщо в електричному колі є вітки з джерелами струму, то число контурних рівнянь можна зменшити на число цих віток. При цьому незалежні контури вибираються так, щоб кожна вітка з джерелом струму входила тільки в один контур. Тоді контурний струм в них буде дорівнювати струму джерела струму (див. задачу № 6).

2.8. Розрахунок складних електричних кіл методом вузлових потенціалів. Коло з двома вузлами

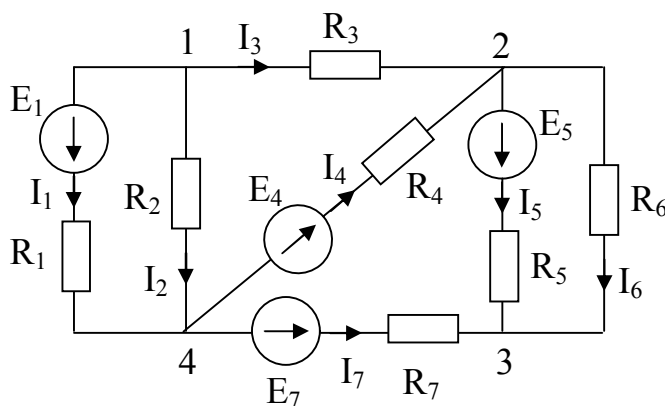


Рис. 2.16

Метод вузлових потенціалів заснований на застосуванні першого закону Кірхгофа і являється одним з основних методів розрахунку лінійних кіл постійного струму.

Розглянемо застосування методу на прикладі конкретного електричного кола (рис. 2.16).

Довільно задамо додатні напрями струмів в гілках. Скористаємося законом Ома для ділянки кола:

$$I = \frac{V_a - V_b + \sum E_k}{\sum R_k} = (V_a - V_b + \sum E_k) \sum G_k.$$

Знаючи потенціали вузлів V_1, V_2, V_3, V_4 можна записати вирази для струмів в гілках:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (V_1 - V_4 + E_1) G_1; \\ I_2 &= (V_1 - V_4) G_2; \\ I_3 &= (V_1 - V_2) G_3; \\ I_4 &= (V_4 - V_2 + E_4) G_4; \\ I_5 &= (V_2 - V_3 + E_5) G_5; \\ I_6 &= (V_2 - V_3) G_6; \\ I_7 &= (V_4 - V_3 + E_7) G_7. \end{aligned} \right\} \quad \text{де} \quad G_1 = 1/R_1; G_2 = 1/R_2; \dots - \text{провідності гілок.}$$

Як видно з виразів для струмів, їх значення залежать не від абсолютних величин потенціалів, а від їх різниці. Тому можна збільшити, або зменшити значення всіх потенціалів вузлів на одну і ту ж величину. При цьому різниця потенціалів між вузлами електричного кола буде залишатися сталою.

Змінимо потенціали всіх вузлів на таку величину, щоб потенціал одного з вузлів став рівним нулю.

Вузол, потенціал якого дорівнює нулю, називається базисним.

Нехай $V_4=0$, тоді потенціали решти $q-1$ вузлів визначаються відносно потенціалу базисного вузла.

Визначимо потенціали V_1, V_2 та V_3 , для цього складемо рівняння за I-м законом Кірхгофа для цих вузлів:

$$\begin{aligned} 1 \text{ вузол:} & \quad -I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ 2 \text{ вузол:} & \quad I_3 + I_4 - I_5 - I_6 = 0; \\ 3 \text{ вузол:} & \quad I_5 + I_6 + I_7 = 0. \end{aligned}$$

Підставимо в ці рівняння вирази для струмів, враховуючи, що $V_4=0$:

$$\begin{cases} -(V_1 + E_1)G_1 - V_1G_2 - (V_1 - V_2)G_3 = 0; \\ (V_1 - V_2)G_3 + (-V_2 + E_4)G_4 - (V_2 - V_3 + E_5)G_5 - (V_2 - V_3)G_6 = 0; \\ (V_2 - V_3 + E_5)G_5 + (V_2 - V_3)G_6 + (-V_3 + E_7)G_7 = 0. \end{cases}$$

Перетворимо одержану систему рівнянь:

$$\begin{cases} -V_1G_1 - E_1G_1 - V_1G_2 - V_1G_3 + V_2G_3 = 0; \\ V_1G_3 - V_2G_3 - V_2G_4 + E_4G_4 - V_2G_5 + V_3G_5 - E_5G_5 - V_2G_6 + V_3G_6 = 0; \\ V_2G_5 - V_3G_5 + E_5G_5 + V_2G_6 - V_3G_6 - V_3G_7 + E_7G_7 = 0. \end{cases}$$

або:

$$\begin{cases} V_1(G_1 + G_2 + G_3) - V_2G_3 = -E_1G_1; \\ -V_1G_3 + V_2(G_3 + G_4 + G_5 + G_6) - V_3(G_5 + G_6) = E_4G_4 - E_5G_5; \\ -V_2(G_5 + G_6) + V_3(G_5 + G_6 + G_7) = E_5G_5 + E_7G_7. \end{cases}$$

Таким чином, одержали систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Визначимо значення потенціалів V_1 , V_2 , V_3 , а потім за законом Ома для ділянки кола визначимо струми в гілках.

Одержану систему рівнянь можна записати одразу на основі структури електричного кола та заданих напрямків ЕРС та джерел струму в гілках. Для цього введемо допоміжні поняття та позначення.

Власна провідність вузла – це сума провідностей гілок, що з'єднуються з цим вузлом. Позначається G_{kk} :

$G_{11}=G_1+G_2+G_3$ – власна провідність 1 вузла;

$G_{22}=G_3+G_4+G_5+G_6$ – власна провідність 2 вузла;

$G_{33}=G_5+G_6+G_7$ – власна провідність 3 вузла.

Взаємна провідність двох вузлів – це сума провідностей гілок, що з'єднують ці два вузли. Позначається G_{km} :

$G_{12}=G_{21}=G_3$ – взаємна провідність 1 та 2 вузлів;

$G_{23}=G_{32}=G_5+G_6$ – взаємна провідність 2 та 3 вузлів.

Вузловий струм – це алгебраїчна сума добутків ЕРС джерела кожної гілки, що з'єднуються з цим вузлом, на її провідність. Позначається $\sum E_k G_k$.

Якщо електричне коло містить джерела струму, то вузловий струм визначається так:

$$\sum (E_k G_k + J_k),$$

де J_k – струми джерел струму.

При цьому з додатнім знаком беруться ЕРС та струми, що направлені до вузла та навпаки.

Таким чином, вузлове рівняння, тобто рівняння, складене для вузла електричного кола, має наступну структуру:

- ліва частина – це алгебраїчна сума, взята із знаком «плюс», добутку потенціалу вузла та власної провідності вузла, а також взятих із знаком «мінус» добутків загальних провідностей даного вузла з рештою сусідніх вузлів електричного кола та потенціалу відповідного вузла;

- права частина – вузловий струм даного вузла.

Наприклад, вузлове рівняння для k -го вузла:

$$V_k G_{kk} - V_1 G_{k1} - V_2 G_{k2} - \dots - V_m G_{km} = \sum (E_k G_k + J_k).$$

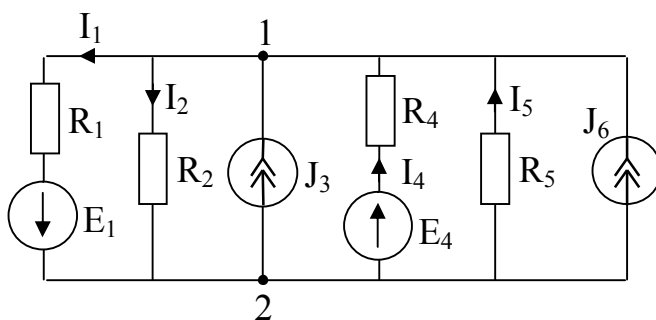


Рис. 2.17

Метод вузлових потенціалів найбільш доцільно застосовувати, коли кількість вузлів набагато менша кількості незалежних контурів, тобто $(q-1) < n$.

Особливо ефективний цей метод для розрахунку електричних кіл з двома вузлами. В цьому випадку

складається лише одне вузлове рівняння.

Розглянемо електричне коло (рис. 2.17).

Виконаємо аналіз кола: $p=6$, $q=2$, $n=p-(q-1)=5$, $q < n$.

Прийmemo $V_2=0$, тоді вузлове рівняння для вузла 1 запишеться в вигляді:

$$V_1 (G_1 + G_2 + G_4 + G_5) = -E_1 G_1 + J_3 + E_4 G_4 - J_6.$$

Звідси:
$$V_1 = \frac{-E_1 G_1 + J_3 + E_4 G_4 - J_6}{G_1 + G_2 + G_4 + G_5}.$$

За законом Ома для ділянки кола визначаємо струми в гілках:

$$I_1 = \frac{V_1 + E_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{V_1}{R_2}; \quad I_4 = \frac{-V_1 + E_4}{R_4}; \quad I_5 = \frac{-V_1}{R_5}.$$

В загальному випадку потенціал одного з вузлів електричного кола з двома вузлами визначається за формулою:

$$V_1 = \frac{\sum (E_k G_k + J_k)}{G_{11}}.$$

Якщо в електричному колі є вітка, що має тільки джерело ЕРС, то число вузових рівнянь можна зменшити. Для цього потенціал першого вузла цієї вітки приймаємо рівним нулю, тоді потенціал другого вузла цієї вітки буде дорівнювати ЕРС. Для інших вузлів складаємо звичайні вузові рівняння (див. задачу № 9).

2.9. Метод еквівалентного генератора

Даний метод застосовується для розрахунку струму в одній гілці складного електричного кола, а також для визначення залежності струму від опору гілки.

Розглянемо електричне коло (рис. 2.18).

Визначимо струм I_4 та встановимо залежність $I_4 = f(R_4)$.

Для цього розіб'ємо складне коло на дві частини:

I частина – гілка, в якій визначається струм, тобто виділена гілка;

II частина – вся решта кола, тобто двополюсник.

Двополюсники бувають активні (що мають джерела електричної енергії) та пасивні (що не містять джерел електричної енергії).

Метод еквівалентного генератора оснований на теоремі про активний двополюсник, яка визначається так:

«Будь-який активний двополюсник по відношенню до виділеної гілки можна розглядати як еквівалентний генератор з внутрішнім опором R_{em} та ЕРС, що дорівнює напрузі холостого ходу U_{xx} між входними затискачами двополюсника при розімкненій виділеній гілці».

Тоді вихідна схема прийме вигляд, зображений на (рис. 2.19). Тут струм I_4 можна визначити за законом Ома:

$$I_4 = \frac{U_{xx}}{R_{em} + R_4}.$$

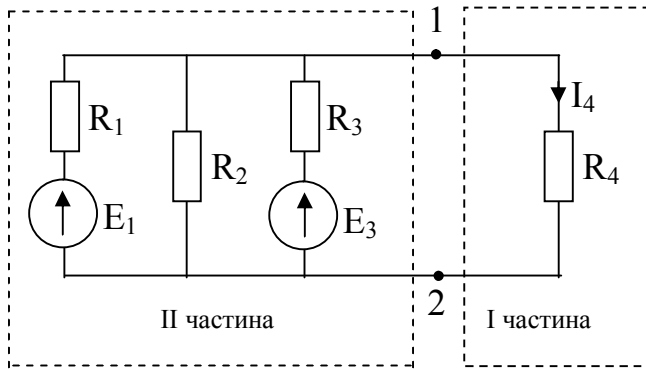


Рис. 2.18

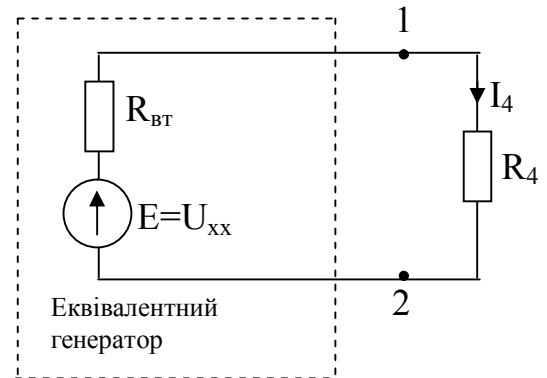


Рис. 2.19

В загальному випадку

$$I_k = \frac{U_{xx}}{R_{\text{вв}} + R_k}.$$

Розглянемо послідовність розрахунку струму в виділеній гілці.

1. Визначаємо напругу холостого ходу U_{xx} , для чого зобразимо розрахункову схему, в якій розіркнемо виділену гілку (рис. 2.20).

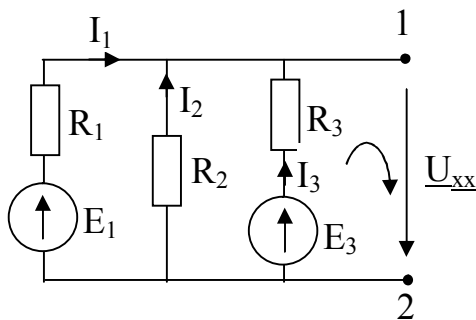


Рис. 2.20

Вкажемо напругу холостого ходу на затискачах виділеної гілки (вона, звичайно, співпадає з напрямом струму).

Задамося додатнім напрямом струмів в гілках.

Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, в який входить U_{xx} :

$$I_3 R_3 + U_{xx} = E_3,$$

$$\text{звідси} \quad U_{xx} = E_3 - I_3 R_3.$$

Визначимо струм I_3 , для цього використаємо метод вузлових потенціалів, так як маємо схему з двома вузлами.

Нехай $V_2 = 0$, тоді $V_1 (G_1 + G_2 + G_3) = E_1 G_1 + E_3 G_3$.

Звідси: $V_1 = \frac{E_1 G_1 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$, а струм дорівнює: $I_3 = (V_2 - V_1 + E_3) G_3$.

Одержимо кінцевий вираз для напруги U_{xx} :

$$U_{xx} = E_3 - V_2 + V_1 - E_3 = V_1 - V_2.$$

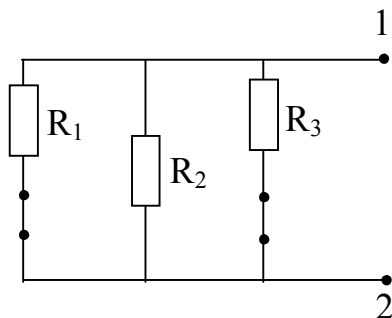


Рис. 2.21

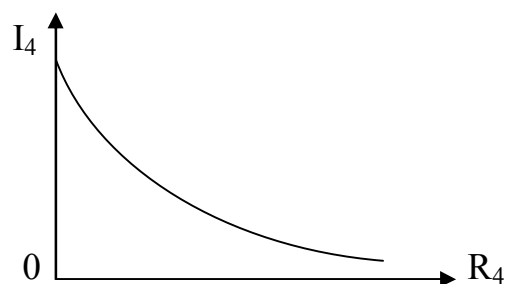


Рис. 2.22

2. Визначимо внутрішній опір R_{em} відносно затискачів 1 та 2. Для цього на розрахунковій схемі (рис. 2.21) видалимо всі джерела електричної енергії. При цьому точки підключення ідеальних джерел ЕРС замикаються накоротко, а гілки з ідеальними джерелами струму видаляються.

Тоді:

$$R_{em} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}.$$

3. Визначимо струм в виділеній гілці:

$$I_4 = \frac{U_{xx}}{R_{вт} + R_4}.$$

4. Змінюючи R_4 від 0 до ∞ , побудуємо залежність $I_4 = f(R_4)$ (рис. 2.22).

2.10. Принцип та метод накладання

Принцип накладання (суперпозиції) полягає в тому, що струм в будь-якій гілці електричного кола, викликаний дією декількох джерел, дорівнює сумі струмів в цій гілці, що викликані кожним джерелом окремо (при рівності нулю решти ЕРС або струмів джерел):

$$I_i = I_i^1 + I_i^2 + \dots + I_i^k,$$

де I_i^k – струм в i -тій гілці, викликаний дією k -го джерела.

Принцип суперпозиції можна застосовувати лише до лінійних електричних кіл.

Для доказу методу накладання скористаємось системою контурних рівнянь, що визначають контурні струми в електричному колі рис. 2.15, яка була одержана в методі контурних струмів.

Згідно з теорією визначників, контурні струми можуть бути одержані за формулами:

$$I_I = \frac{\Delta_I}{\Delta}; \quad I_{II} = \frac{\Delta_{II}}{\Delta}; \quad I_{III} = \frac{\Delta_{III}}{\Delta}, \quad \text{де}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad \text{– головний визначник системи,}$$

$\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}$ – часткові визначники системи, що дорівнюють:

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} E_I & -R_{12} & -R_{13} \\ E_{II} & R_{22} & -R_{23} \\ E_{III} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{II} = \begin{vmatrix} R_{11} & E_I & -R_{13} \\ -R_{21} & E_{II} & -R_{23} \\ -R_{31} & E_{III} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{III} = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти визначники Δ_I , Δ_{II} , Δ_{III} по елементах стовпців, то вирази для контурних струмів приймуть такий вигляд:

$$I_I = E_I \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{II} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{III} \frac{\Delta_{31}}{\Delta}; \quad I_{II} = E_I \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{II} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{III} \frac{\Delta_{32}}{\Delta}; \quad I_{III} = E_I \frac{\Delta_{13}}{\Delta} + E_{II} \frac{\Delta_{23}}{\Delta} + E_{III} \frac{\Delta_{33}}{\Delta},$$

де Δ_{km} – алгебраїчні доповнення ($k=1,2,3$; $m=1,2,3$), одержані з головного визначника шляхом викреслювання у ньому k -го рядка та m -го стовпця та множенням одержаного визначника на $(-1)^{k+m}$.

Вирази для контурних струмів можна записати в наступному вигляді:

$$I_I = I_I^1 + I_{II}^2 + I_{III}^3; \quad I_{II} = I_I^1 + I_{II}^2 + I_{III}^3; \quad I_{III} = I_I^1 + I_{II}^2 + I_{III}^3;$$

де I_I^1 – частина контурного струму першого контуру, що викликана першим джерелом ЕРС і т.д.

Таким чином, одержані вирази для контурних струмів представляють собою аналітичний вираз метода накладання для контурних струмів. Але контурний струм дорівнює дійсному струму, якщо гілка входить лише в один контур. Ця умова завжди може бути забезпечена відповідним вибором незалежних контурів.

Отже, метод накладання справедливий і для дійсних струмів гілок кола.

Розглянемо розрахунок складного електричного кола методом накладання на конкретному приладі (рис. 2.23).

Порядок розрахунку:

1. Визначимо струм в гілках кола при наявності лише ЕРС E_I , при цьому вважаємо, що $E_2 = 0$.

Зобразимо відповідну електричну схему (рис. 2.23,б).

Струми в електричному колі в цьому випадку будуть дорівнювати

$$I_I^1 = \frac{E_I}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{E_I (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \quad I_2^1 = -I_I^1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_3^1 = I_I^1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

2. Визначимо струми в гілках кола при наявності лише ЕРС E_2 , при цьому вважаємо, що $E_I = 0$.

Зобразимо відповідну електричну схему (рис. 2.23,в).

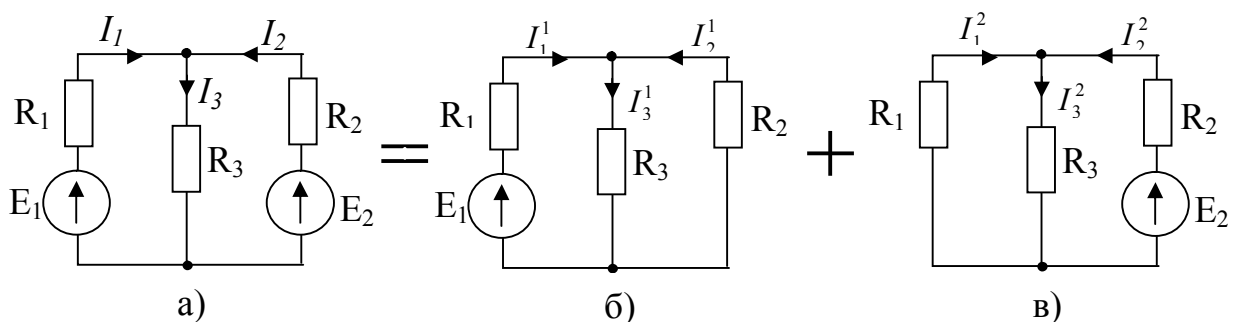


Рис. 2.23

Струми в електричному колі в цьому випадку дорівнюватимуть:

$$I_2^2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{E_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \quad I_1^2 = -I_2^2 \frac{R_3}{R_1 + R_3}; \quad I_3^2 = I_2^2 \frac{R_2}{R_1 + R_3}.$$

3. На основі принципу накладання визначимо дійсні величини струмів в вихідній схемі:

$$I_1 = I_1^1 + I_1^2; \quad I_2 = I_2^1 + I_2^2; \quad I_3 = I_3^1 + I_3^2.$$

Метод накладання трохи громіздкий та не зручний для розрахунку. Разом з тим в ряді випадків застосування цього методу дозволяє швидко визначити струм в одній гілці, дослідити вплив зміни однієї з ЕРС. на зміну струмів в гілках, а також вирішити деякі інші задачі.

2.11. Метод пропорційного перерахування

Метод пропорційного перерахування використовується для визначення струмів у порівняно простих електричних колах з послідовно-паралельним з'єднанням елементів і при наявності одного джерела електричної енергії. Сутність методу полягає в тому, що для самої віддаленої від джерела енергії гілки задаються значенням струму, наприклад, $1A$, а потім послідовно визначають струми в інших гілках, використовуючи перший і другий закони

Кірхгофа (рис.2.24). Далі визначають напругу на затискачах ab , яка у загальному випадку не буде дорівнювати ЕРС джерела напруги. Тоді, обчисливши коефіцієнт $k = E/U_{ab}$, множать його на значення знайдених струмів, визначаючи тим самим дійсні струми в гілках схеми.

Так, для схеми (рис.2.24) маємо:

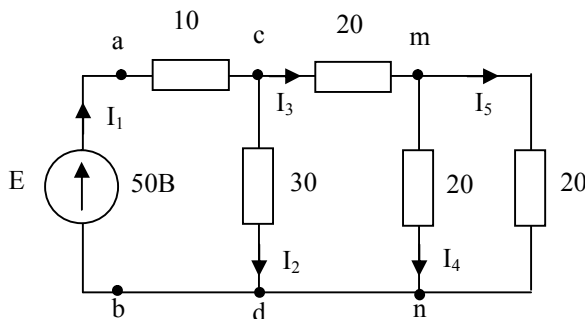


Рис. 2.24

$$I_5' = 1 A, \quad U_{mn}' = 20 B$$

$$I_4' = \frac{U_{mn}'}{R_4} = 1 A, \quad I_3' = I_4' + I_5' = 2 A, \quad U_{cd}' = 20 I_3' + 20 I_4' = 60 B,$$

$$I_2' = \frac{U_{cd}'}{R_2} = 2 A, \quad I_1' = I_2' + I_3' = 4 A, \quad U_{ab}' = 10 I_1' + 30 I_2' = 100 B,$$

$$k = \frac{E}{U_{ab}'} = \frac{50}{100} = 0,5.$$

Отже, дійсні струми в гілках будуть дорівнювати:

$$I_1 = I_1' k = 2 A, \quad I_2 = 1 A, \quad I_3 = 1 A, \quad I_4 = 0,5 A, \quad I_5 = 0,5 A.$$

Для складних електричних кіл з декількома джерелами енергії можлива модифікація методу, заснована на тому, що у двох гілках, які сходяться до одного вузла, задаються значеннями струмів, наприклад, I_1 , помноженими на коефіцієнти пропорційності k_1 і k_2 . Далі, використовуючи перший і другий закони Кірхгофа, виражають струми в інших гілках через введені коефіцієнти. Потім, використовуючи другий закон Кірхгофа для двох контурів, які раніше не брали участі у складанні рівнянь, одержують систему з двох рівнянь, рішення якої і дає значення невідомих коефіцієнтів k_1 і k_2 . Далі визначають струми в кожній гілці схеми.

Наприклад, для схеми (рис.2.25) можна задати значення в першій і другій гілках:

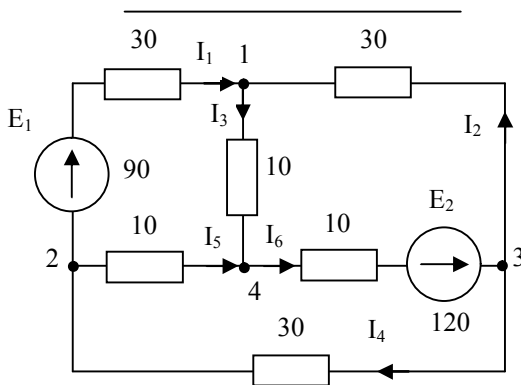


Рис. 2.25

$$I_1=1 \quad k_1=k_1, \quad I_2=1 \quad k_2=k_2.$$

Якщо обійти контур, який містить гілки зі струмами I_1 , I_2 і I_4 , то за другим законом Кірхгофа можна одержати:

$$30I_1 - 30I_2 + 30I_4 = 90,$$

$$\text{або} \quad 30k_1 - 30k_2 + 30I_4 = 90,$$

$$\text{звідки} \quad I_4 = 3 + k_2k_1.$$

Інші струми в гілках визначаємо за першим законом Кірхгофа:

$$I_3 = I_1 + I_2 = k_1 + k_2, \quad I_5 = I_4 - I_1 = 3 + k_2 - 2k_1,$$

$$I_6 = I_2 + I_4 = 3 + 2k_2 - k_1.$$

Для визначення коефіцієнтів пропорційності k_1 і k_2 складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для лівого і правого контурів:

$$30I_1 + 10I_3 - 10I_5 = E_1,$$

$$30I_2 + 10I_3 + 10I_6 = E_2,$$

або

$$30k_1 + 10k_1 + 10k_2 - 30 - 10k_2 + 20k_1 = 90,$$

$$30k_2 + 10k_1 + 10k_2 + 30 + 20k_2 - 10k_1 = 120.$$

З першого рівняння безпосередньо визначається:

$$k_1 = 2,$$

а з другого –

$$k_2 = 1,5.$$

Використовуючи формули, які визначають струми через коефіцієнти k_1 і k_2 , одержуємо:

$$I_1 = 2 \text{ A}, \quad I_2 = 1,5 \text{ A}, \quad I_3 = 3,5 \text{ A}, \quad I_4 = 2,5 \text{ A}, \quad I_5 = 0,5 \text{ A}, \quad I_6 = 4 \text{ A}.$$

2.12. Принцип компенсації та взаємності

2.12.1. Принцип компенсації

Будь-яка частинка електричного кола з напругою U еквівалентна джерелу ЕРС E з тією ж напругою, тобто $E=U$, або будь-яка електрична гілка з струмом I еквівалентна джерелу струму того ж значення, тобто $J=I$ (рис. 2.26).

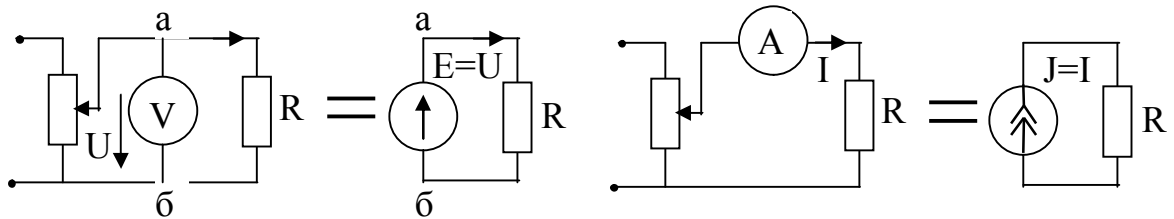


Рис. 2.26

Для будь-якого резистора електричного кола можна стверджувати, що він може бути замінений ЕРС, чисельно рівною падінню напруги на цьому резисторі і направленою назустріч струму в цьому резисторі (рис. 2.27).

Докажемо це твердження, для чого добавимо в гілку з резистором R дві

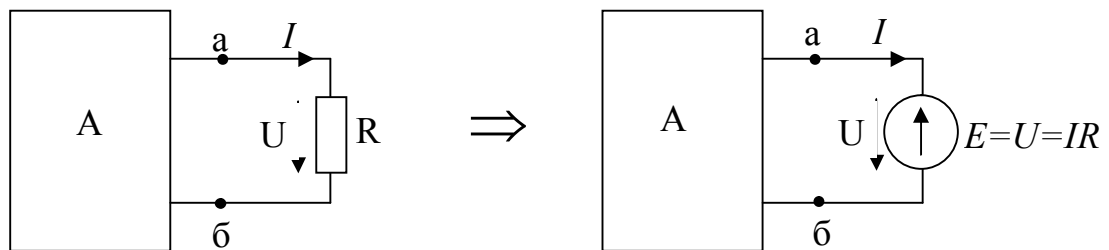


Рис. 2.27

ЕРС, що дорівнюють за величиною напрузі на резисторі R та направлені назустріч одна одній: $E_1=E_2=U=RI=E$ (рис. 2.28). При цьому струм I не зміниться.

Складемо рівняння за II-м законом Кірхгофа для контуру $a-g-v-a$:

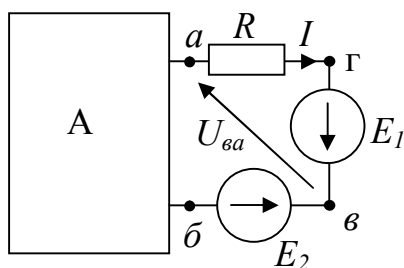


Рис. 2.28

$$RI + U_{ga} = E_1,$$

$$\text{звідси } U_{ga} = E_1 - IR = IR - IR = 0.$$

Це означає, що потенціали точок a та v рівні і їх можна об'єднати, закоротивши елементи R та E_1 . Залишається лише ЕРС $E_2=U=IR=E$, направлене назустріч струму.

Принцип компенсації застосовується до лінійних та нелінійних кіл.

2.12.2. Принцип взаємності

Струм в гілці k , що створюється джерелом ЕРС в гілці m , дорівнює струму в гілці m , що створюється тим самим джерелом, переміщеним в гілку k .

Для доказу цього принципу використаємо метод контурних струмів. Розглянемо електричне коло (рис. 2.29).

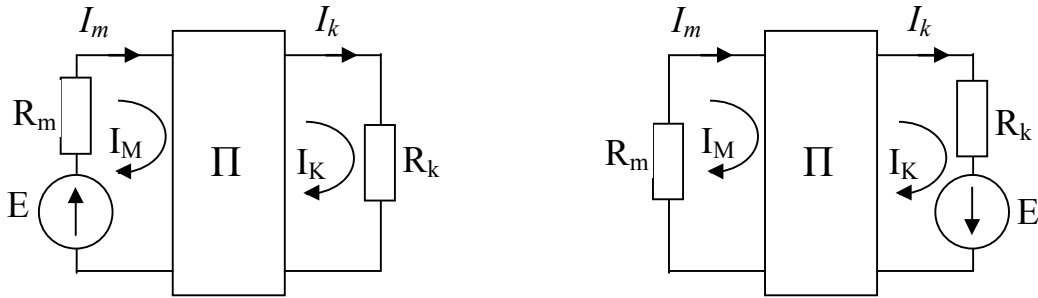


Рис. 2.29

Якщо скористатися методом визначників, то струм I_k в контурі k , викликаний ЕРС E в контурі m буде дорівнювати:

$$I_k = E \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}.$$

А струм I_m в контурі m , викликаний тією ж ЕРС E , перенесеною в контур k , буде дорівнювати:

$$I_m = E \frac{\Delta_{km}}{\Delta},$$

де Δ – головний визначник системи контурних рівнянь;

Δ_{mk} , Δ_{km} – часткові визначники системи контурних рівнянь.

Так як головний визначник Δ симетричний відносно головної діагоналі, то часткові визначники

$$\Delta_{mk} = \Delta_{km}, \quad \text{тому струми} \quad I_k = I_m.$$

При цьому напрямок ЕРС E , що переноситься в гілку k , по відношенню до напрямку струму I_k повинен бути таким самим, як і напрямок цієї ЕРС до переносу по відношенню до напрямку струму I_m .

Принцип взаємності виконується не для всіх лінійних кіл.

2.13. Енергія і потужність кола постійного струму

Розглянемо одноконтурне електричне коло постійного струму (рис. 2.30), де

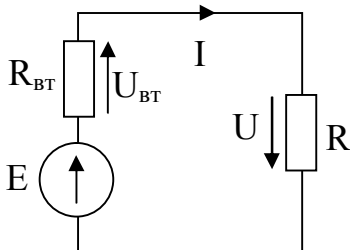


Рис. 2.30

E – ЕРС джерело електричної енергії;

$R_{вт}$ – внутрішній опір;

R – опір приймача.

Складемо рівняння за II-м законом

Кірхгофа:

$$E = U_{вт} + U.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $I t$,

тоді

$$E I t = U_{em} I t + U I t,$$

де $W_{\partial} = E I t$ – електрична енергія, що виробляється джерелом;

$W_{em} = U_{em} I t = I^2 R_{em} t$ – електрична енергія, що перетворюється в середині самого джерела в теплову енергію;

$W = U I t = I^2 R t$ – електрична енергія, що передається приймачу і перетворюється в ньому в інші види енергії.

Щоб оцінити працездатність джерел електричної енергії, необхідно порівнювати їх за кількістю електричної енергії, що виробляється ними за одиницю часу, тобто за потужністю

$$P_{\partial} = \frac{W_{\partial}}{t} = \frac{E I t}{t} = E I.$$

Одиниці вимірювання:

– енергія: джоуль [J, Дж];

– потужність: ватт [W, Вт].

2.14. Передача енергії від активного двополюсника приймачу. Умови передачі максимальної потужності

Розглянемо активний двополюсник, до якого підключено приймач електричної енергії R_n (рис. 2.31).

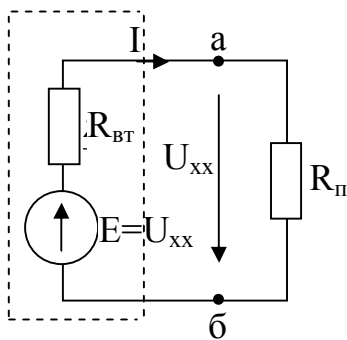


Рис. 2.31

Струм в приймачі дорівнює:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_{em} + R_n} = \frac{E}{R_{em} + R_n}.$$

Потужність, що споживається приймачем дорівнює:

$$P_n = I^2 R_n = \frac{E^2 R_n}{(R_{em} + R_n)^2}.$$

Одержаний вираз характеризує залежність потужності приймача від його опору $P_n(R_n)$.

Залежність потужності приймача від струму в ньому визначимо із рівняння балансу потужностей

$$U_{xx} I = I^2 R_{em} + I^2 R_n,$$

звідки

$$P_n = U_{xx} I - I^2 R_{em}.$$

Бачимо, що потужність залежить від струму за параболічним законом. Для побудови залежності $P_n(I)$ знайдемо значення P_n для струмів:

1. $I = 0$, $R_n = \infty$ – режим холостого ходу, $P_n = 0$.

2. $I = I_{max}$, $R_n = 0$ – режим короткого замикання, $I_{max} = I_{\kappa z} = \frac{U_{xx}}{R_{em}}$, $P_n = 0$.

3. Струм, для якого $P_n = P_{n,max}$, знайдемо із умови максимуму $\frac{dP_n}{dI} = 0$.

Маємо $U_{xx} - 2R_{\text{вм}} I = 0$.

Звідси $I = \frac{U_{xx}}{2R_{\text{вм}}} = \frac{I_{\text{кз}}}{2}$, при цьому $R_n = R_{\text{вм}}$.

Таким чином, для струму $I = I_{\text{кз}}/2$, коли $R_n = R_{\text{вм}}$. (цей режим роботи електричного кола називається узгодженим режимом), потужність досягає максимального значення:

$$P_n = R_n I^2 = \frac{R_n U_{xx}^2}{(2R_{\text{вм}})^2} = \frac{R_n E^2}{4R_{\text{вм}}^2} = \frac{E^2}{4R_{\text{вм}}}.$$

Графік залежності $P_n(I)$ приведено на рис. 2.32.

Коефіцієнт корисної дії джерела дорівнює:

$$\eta = \frac{P_n}{P_{\text{д}}}, \quad P_{\text{д}} = EI = \frac{E^2}{R_{\text{вм}} + R_n}, \quad P_n = \frac{R_n E^2}{(R_n + R_{\text{вм}})^2}.$$

Тоді

$$\eta = \frac{R_n E^2 (R_n + R_{\text{вм}})}{(R_n + R_{\text{вм}})^2 E^2} = \frac{R_n}{R_n + R_{\text{вм}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_{\text{вм}}}{R_n}}.$$

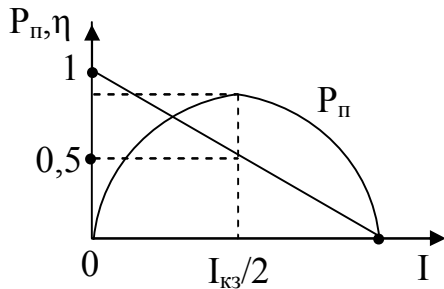


Рис. 2.32

Цей вираз виражає залежність коефіцієнту корисної дії (ККД) від опору навантаження R_n .

Знайдемо залежність коефіцієнту корисної дії від струму приймача I :

$$\eta = \frac{P_n}{P_{\text{д}}} = \frac{U_{xx} I - R_{\text{вм}} I^2}{U_{xx} I} = 1 - \frac{R_{\text{вм}} I}{U_{xx}} = 1 - \frac{I}{I_{\text{кз}}}.$$

Побудуємо залежність $\eta = f(I)$

(рис. 2.32).

Якщо $R_n = R_{\text{вм}}$, то $\eta = 0,5$, це низький коефіцієнт корисної дії. Для того, щоб одержати високий ККД, необхідно щоб $R_n \gg R_{\text{вм}}$ (для $R_n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 1$). Вибір співвідношення величин R_n та $R_{\text{вм}}$ називається узгодженням навантаження. При $R_n = R_{\text{вм}}$ маємо узгоджений режим роботи електричного кола.

Приклади розрахунку електричних кіл постійного струму

Задача №1

Визначити струми в гілках електричного кола, схема якого зображена на рис. P2.1,а, якщо: $U = 130 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$, $R_4 = 12 \text{ Ом}$, $R_5 = 24 \text{ Ом}$.

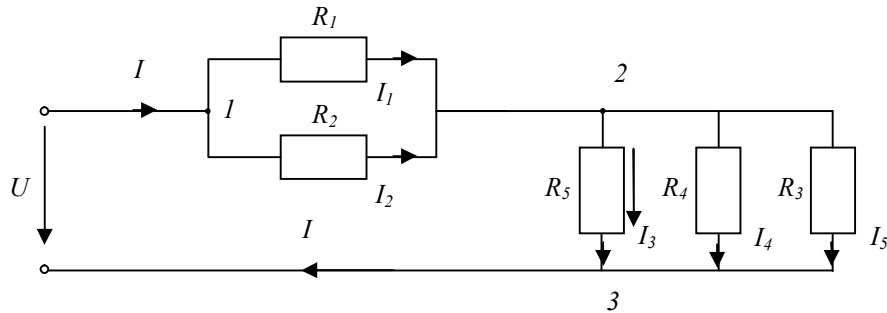


Рис. P2.1,а

Розв'язання

1. Замінімо кожне паралельне з'єднання резисторів одним еквівалентним резистором (рис. P2,б) та знайдемо їх опори.

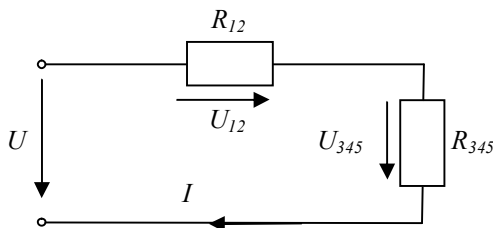


Рис. P2.1,б

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6 \text{ Ом},$$

$$\frac{1}{R_{345}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3+2+1}{24} = \frac{1}{4}; \quad R_{345} = 4 \text{ Ом}.$$

2. Визначимо струм в електричному колі (рис. P2.1,б)

$$I = \frac{U}{R_{12} + R_{345}} = \frac{120}{6 + 4} = 12 \text{ А}$$

3. Знайдемо струми кожної гілки.

За правилом «чужої гілки»:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 15}{10 + 15} = 7,2 \text{ А}$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 10}{10 + 15} = 4,8 \text{ А}$$

За допомогою напруги на паралельних гілках:

$$U_{345} = R_{345} \cdot I = 4 \cdot 12 = 48 \text{ В}.$$

$$I_3 = \frac{U_{345}}{R_3} = \frac{48}{8} = 6 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{U_{345}}{R_4} = \frac{48}{12} = 4 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{345}}{R_5} = \frac{48}{24} = 2 \text{ А}.$$

Задача №2

Визначити струми в гілках електричного кола, схема якого зображена на рис. P2.2,а, за допомогою еквівалентних перетворень та закону Ома. Перевірити розрахунок за балансом потужностей.

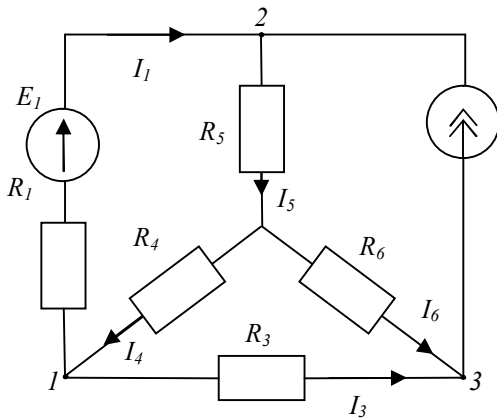


Рис. P2.2,а

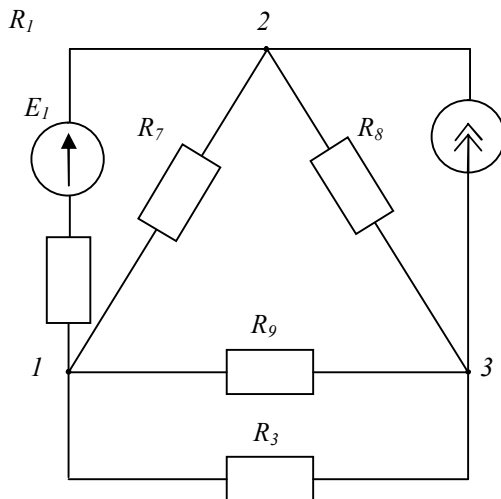


Рис. P2.2,б

Параметри електричного кола:
 $E_1 = 75 \text{ В}$; $J_2 = 9 \text{ А}$; $R_1 = 3,5 \text{ Ом}$;
 $R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 3 \text{ Ом}$; $R_5 = 5 \text{ Ом}$,
 $R_6 = 7,5 \text{ Ом}$.

Розв'язання

1. Перетворимо «зірку» резисторів R_4, R_5, R_6 в еквівалентний «трикутник» резисторів R_7, R_8, R_9 , і підрахуємо їх опори.

$$R_7 = R_4 + R_5 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_6} = 3 + 5 + \frac{3 \cdot 5}{7,5} = 10 \text{ Ом}$$

$$R_8 = R_5 + R_6 + \frac{R_5 \cdot R_6}{R_4} = 5 + 7,5 + \frac{5 \cdot 7,5}{3} = 25 \text{ Ом}$$

$$R_9 = R_4 + R_6 + \frac{R_4 \cdot R_6}{R_5} = 3 + 7,5 + \frac{3 \cdot 7,5}{5} = 15 \text{ Ом}$$

2. Замінімо (рис. P2.2,б):

а) паралельно з'єднані резистори R_3 та R_9 одним еквівалентним R_{39} :

$$R_{39} = \frac{R_3 \cdot R_9}{R_3 + R_9} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6 \text{ Ом}$$

б) джерело струму J_2 джерелом

ЕРС:

$$E_{28} = J_2 \cdot R_8 = 9 \cdot 25 = 225 \text{ В};$$

в) дві паралельні гілки – з джерелом Е.Р.С. E_1 та резисторами R_1, R_7 – одною гілкою з джерелом Е.Р.С. E_{17} і еквівалентним резистором R_{17} (дивись табл.2.1, стор. 21):

$$E_{17} = \frac{E_1 \cdot R_7}{R_1 + R_7} = \frac{75 \cdot 10}{2,5 + 10} = 60 \text{ В}; \quad R_{17} = \frac{R_1 \cdot R_7}{R_1 + R_7} = \frac{2,5 \cdot 10}{2,5 + 10} = 2 \text{ Ом}$$

3. Визначимо струм простого кола (рис. P2.2,в).

Два джерела ЕРС, діючих зустрічно, замінимо одним еквівалентним:

$$E_e = E_{28} - E_{17} = 225 - 60 = 165 \text{ В}$$

Три послідовно з'єднаних резистори замінимо одним еквівалентним:

$$R_e = R_{17} + R_{39} + R_8 = 2 + 6 + 25 = 33 \text{ Ом}$$

Тоді за законом Ома:

$$I = \frac{E_{\text{екв.}}}{R_{\text{екв.}}} = \frac{165}{33} = 5 \text{ А}$$

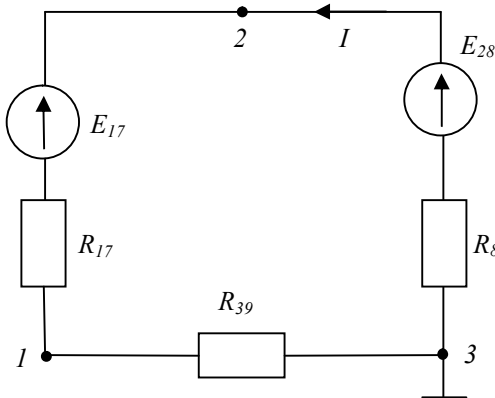


Рис. P2.2,в

4. Приймаємо потенціал точки 3 в схемі (рис. P2.2,в) рівним нулю $V = 0$ і визначаємо відносно цієї точки потенціали точок 1 та 2:

$$V_1 = R_{39} \cdot I = 6 \cdot 5 = 30 \text{ В};$$

$$V_2 = -R_8 \cdot I + E_{28} = -25 \cdot 5 + 225 = 100 \text{ В}.$$

Внаслідок еквівалентності перетворень вузлові точки 1,2,3 початкової схеми (рис. P2.2,а) мають такі ж потенціали.

5. Задаємося позитивними напрямками струмів в гілках (рис. P2.2,а) і визначимо їх значення:

а) за законом Ома:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2 + E_1}{R_1} = \frac{30 - 100 + 7,5}{2,5} = 2 \text{ А}; \quad I_2 = J_2; \quad I_3 = \frac{V_1 - V_3}{R_3} = \frac{30 - 0}{10} = 3 \text{ А}.$$

б) За I законом Кірхгофа:

$$\text{для вузла 1: } I_4 = I_1 + I_3 = 2 + 3 = 5 \text{ А};$$

$$\text{для вузла 2: } I_5 = I_1 + I_2 = 2 + 9 = 11 \text{ А};$$

$$\text{для вузла 3: } I_6 = I_2 - I_3 = 9 - 3 = 6 \text{ А};$$

6. Перевіряємо за балансом потужностей:

$$\sum P_{\text{дж.}} = \sum P_{\text{сп.}}$$

$$\sum P_{\text{дж.}} = E_1 \cdot I_1 + (V_2 - V_3) \cdot J_2 = 75 \cdot 2 + 100 \cdot 9 = 1050 \text{ Вт}$$

$$\sum P_{\text{сп.}} = \sum R_k \cdot I_k^2 = 2,5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 11^2 + 7,5 \cdot 6^2 = 1050 \text{ Вт}$$

Баланс виконується, отже, задача розв'язана правильно.

Задача № 3

В електричному колі рис. P2.3,а визначити струм, що показує амперметр, якщо: $E_1 = 24 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = 1 \text{ Ом}$. Опором амперметра нехтуємо.

Рішення

1. Визначимо еквівалентний опір кола. Для цього спростимо його схему, враховуючи паралельні з'єднання резисторів R_1 , R_4 та R_2 , R_3 . Послідовність спрощення приведена на рис. P2.3, б, в.

$$R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{1 \cdot 4}{1 + 4} = 0,8 \text{ Ом}, \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = 1,2 \text{ Ом}.$$

$$R_e = R_{14} + R_{23} + R_5 = 0,8 + 1,2 + 1 = 3 \text{ Ом}.$$

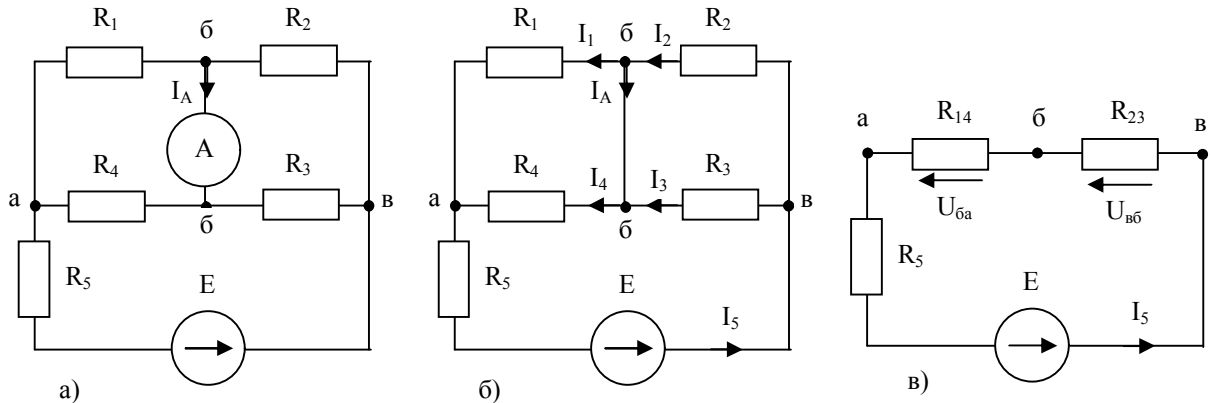


Рис. P2.3

2. Визначимо струм в гілці з джерелом ЕРС I_5 :

$$I_5 = \frac{E}{R_e} = \frac{24}{3} = 8 \text{ А}.$$

3. Знаходимо струми I_2 та I_1 .

Струм I_2 знайдемо за законом Ома:

$$I_2 = \frac{U_{6б}}{R_2} = \frac{I_5 R_{23}}{R_2} = \frac{8 \cdot 1,2}{3} = 3,2 \text{ А},$$

а струм I_1 знайдемо за правилом "чужої гілки":

$$I_1 = \frac{I_5 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{8 \cdot 4}{1 + 4} = 6,4 \text{ А}.$$

4. Знаходимо струм амперметра за I-м законом Кірхгофа для вузла б:

$$I_A = I_2 - I_1 = 3,2 - 6,4 = -3,2 \text{ А}.$$

Струм I_A направлений в протилежну сторону попередньо довільно вибраному.

Задача № 4

Розрахувати електричне коло (рис. P2.4,а) методом еквівалентних перетворень, якщо $R_1 = R_2 = R_3 = 6 \text{ Ом}$, $R_4 = 3,6 \text{ Ом}$, $R_5 = 9 \text{ Ом}$, $R_6 = 4 \text{ Ом}$, $E = 30 \text{ В}$.

Рішення

Перетворимо вихідне коло (рис. P2.4,а) в одноконтурне (рис. P2.4,г). Послідовність еквівалентних перетворень показана на рис. P2.4,б,в.

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 6 + 6 + \frac{6 \cdot 6}{6} = 18 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 6 + 6 + \frac{6 \cdot 6}{6} = 18 \text{ Ом};$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} = 6 + 6 + \frac{6 \cdot 6}{6} = 18 \text{ Ом};$$

$$R_{124} = \frac{R_{12} R_4}{R_{12} + R_4} = \frac{18 \cdot 3,6}{18 + 3,6} = 3 \text{ Ом};$$

$$R_{235} = \frac{R_{23} R_5}{R_{23} + R_5} = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = 6 \text{ Ом};$$

$$R = \frac{R_{31} (R_{124} + R_{235})}{R_{31} + (R_{124} + R_{235})} = \frac{18 \cdot (3 + 6)}{18 + 3 + 6} = 6 \text{ Ом}.$$

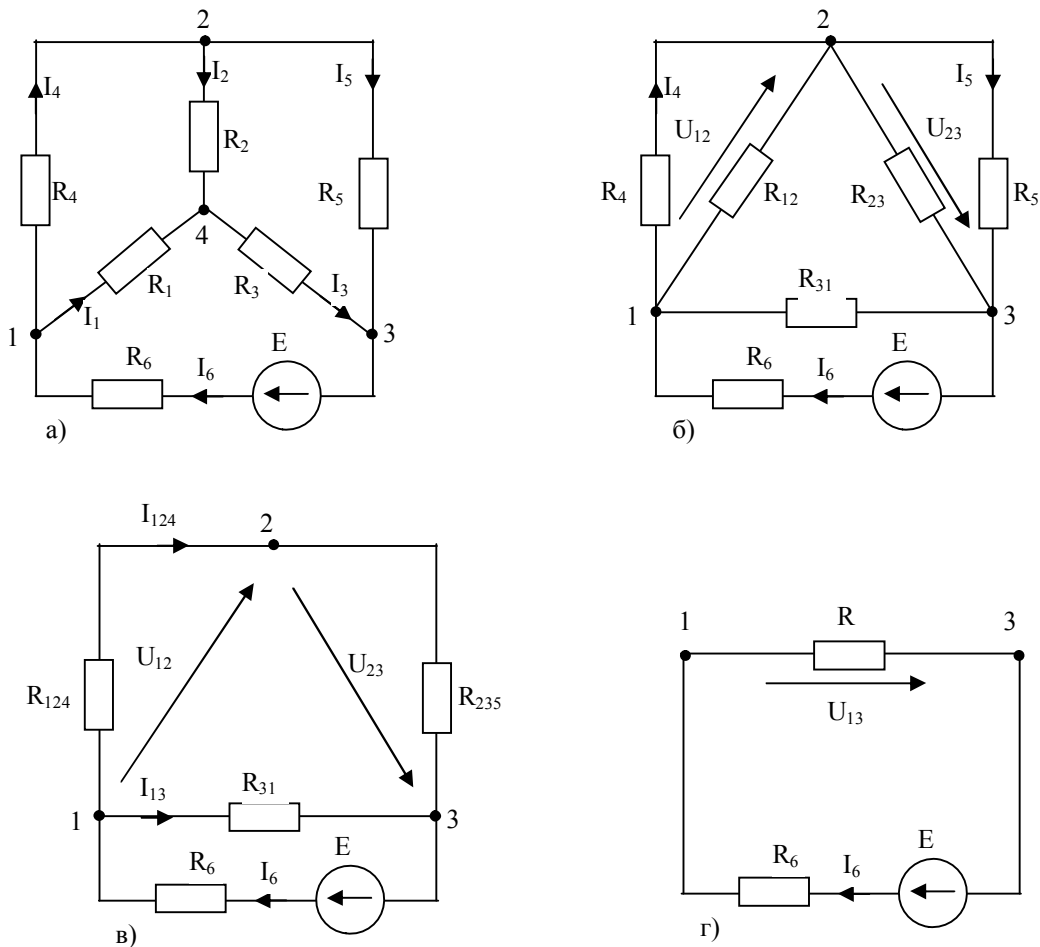


Рис. P2.4

2. Визначимо струми в усіх гілках вихідного кола. Для цього скористаємося законом Ома, правилом "чужої гілки" та першим законом Кірхгофа:

$$I_6 = \frac{E}{R_6 + R} = \frac{30}{4 + 6} = 3 \text{ A};$$

$$U_{13} = R I_6 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ A};$$

$$I_{31} = \frac{U_{13}}{R_{31}} = \frac{18}{18} = 1 \text{ A};$$

$$I_{124} = I_{235} = I_5 - I_{31} = 3 - 1 = 2 \text{ A};$$

$$U_{12} = R_{124} I_{124} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ B};$$

$$U_{23} = R_{235} I_{235} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ B};$$

$$I_4 = \frac{U_{12}}{R_4} = \frac{6}{3,6} = 1,66 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{U_{23}}{R_5} = \frac{12}{9} = 1,33 \text{ A};$$

$$I_1 = I_6 - I_4 = 3 - 1,66 = 1,34 \text{ A}; \quad I_2 = I_4 - I_5 = 1,66 - 1,34 = 0,32 \text{ A};$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,34 - 0,32 = 1,02 \text{ A}.$$

Отже, зміна конфігурації кола до одного контуру, що називається прямим ходом,, виконується від схеми рис. P2.4,а до схеми рис. P2.2,г, а розрахунок струмів в усіх гілках початкового кола здійснюється на зворотному ході.

Задача № 5

Розрахувати методом еквівалентних перетворень електричне коло рис. P2.5,а, якщо $J = 3 \text{ A}$, $E_3 = 6 \text{ B}$, $E_5 = 22 \text{ B}$, $E_6 = 12 \text{ B}$, $R_1 = 4 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 10 \text{ Ом}$, $R_6 = 8 \text{ Ом}$.

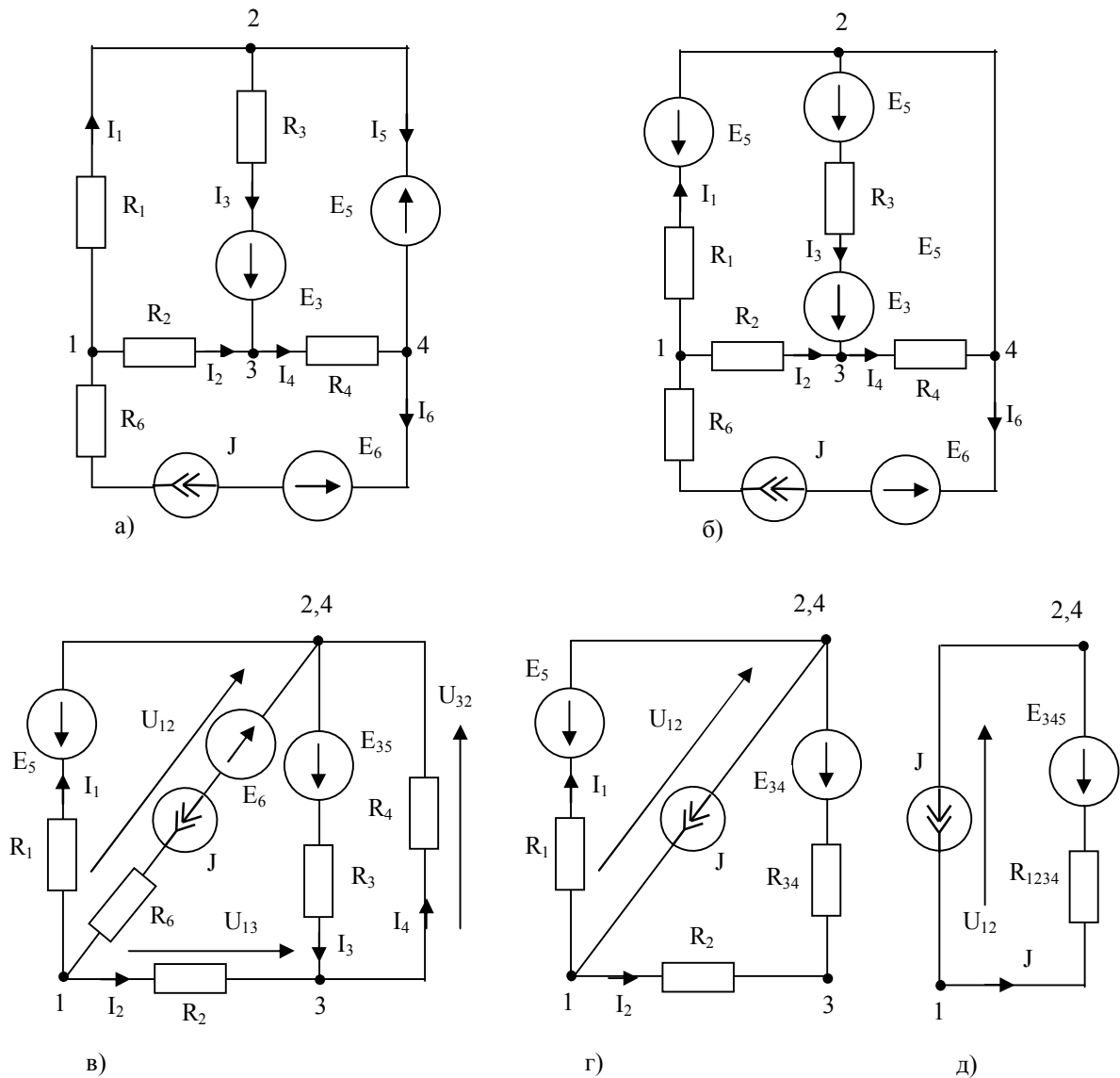


Рис. P2.5

Рішення

Перетворимо вихідне коло (рис. P2.5,а) в одноконтурне (рис. P2.5,д). Для цього виконаємо такі еквівалентні перетворення:

1. Перенесемо ідеальне джерело ЕРС E_5 із п'ятої вітки в першу і третю вітки, що приєднані до 2 вузла (рис. P2.5,б). Потенціали вузлів 2 і 4 стануть однаковими і їх можна об'єднати в одну точку 2,4 (рис. P2.5,в). Тут загальна ЕРС третьої вітки E_{35} дорівнює:

$$E_{35} = E_3 + E_5 = 6 + 22 = 28 \text{ В.}$$

2. Замінімо третю і четверту вітки, які з'єднані паралельно, однією еквівалентною віткою з послідовним з'єднанням E_{34} та R_{34} (рис. P2.5,г):

$$E_{34} = \frac{E_{35} R_4}{R_3 + R_4} = \frac{28 \cdot 10}{2 + 10} = 23 \frac{1}{3} \text{ В}, \quad R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2 \cdot 10}{2 + 10} = \frac{5}{3} \text{ Ом}.$$

Вітка з ідеальним джерелом струму J включає джерело ЕРС E_6 та резистор R_6 . Їх можна виключити, тому що опір ідеального джерела струму J нескінченно великий і величини E_6 та R_6 не впливають на розподіл струму в колі.

3. Перетворимо схему (рис. P2.5,г) в одноконтурну (рис. P2.5,д). Для цього паралельні активні вітки замінімо однією еквівалентною віткою з послідовним з'єднанням E_{345} та R_{1234} :

$$E_{345} = \frac{E_{34} R_1 + E_5 (R_{34} + R_2)}{(R_{34} + R_2) + R_1} = \frac{23 \frac{1}{3} \cdot 4 + 22 \cdot (\frac{5}{3} + 5)}{\frac{5}{3} + 5 + 4} = 22,5 \text{ В},$$

$$R_{1234} = \frac{R_1 (R_{34} + R_2)}{(R_{34} + R_2) + R_1} = \frac{4 \cdot (\frac{5}{3} + 5)}{\frac{5}{3} + 5 + 4} = 2,5 \text{ Ом}.$$

4. Визначимо струми в вихідній схемі. Розрахунок ведемо в зворотному напрямі, починаючи зі схеми рис. P2.5,д, де визначимо потенціали вузлів V_1 , $V_{2,4}$ (або напругу U_{12}):

$$V_1 = 0, \quad V_{2,4} = -J R_{1234} - E_{345} = -3 \cdot 2,5 - 22,5 = -30 \text{ В.}$$

За законом Ома визначаємо струми I_1 та I_2 в схемі рис. P2.5,г:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_{2,4} - E_5}{R_1} = \frac{30 - 22}{4} = 2 \text{ А}, \quad I_2 = \frac{V_1 - V_{2,4} - E_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{30 - \frac{70}{3}}{5 + \frac{5}{3}} = 1 \text{ А}.$$

Знаходимо потенціал вузла 3:

$$V_3 = V_1 - I_2 R_2 = -5 \text{ В.}$$

Тепер із рис. P2.5,в знайдемо I_4 :

$$I_4 = \frac{V_3 - V_{2,4}}{R_4} = \frac{-5 + 30}{10} = 2,5 \text{ A}.$$

Струми I_3 та I_5 знаходимо із вихідної схеми за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 - I_4 &= 0, & I_3 &= I_4 - I_2 = 1,5 \text{ A}; \\ I_5 + I_4 - I_6 &= 0, & I_5 &= I_6 - I_4 = 0,5 \text{ A}. \end{aligned}$$

Отже: $I_1 = 2 \text{ A}; I_2 = 1 \text{ A}; I_3 = 1,5 \text{ A}; I_4 = 2,5 \text{ A}; I_5 = 0,5 \text{ A}; I_6 = 3 \text{ A}.$

5. Зробимо перевірку за балансом потужностей:

$$\sum P_{\text{дж}} = \sum P_{\text{ен}},$$

$$\sum P_{\text{дж}} = E_3 I_3 - E_5 I_5 + U_{14} J = 88 \text{ Вт}, \quad (U_{14} = U_{12} = V_1 - V_{2,4} = 30 \text{ В})$$

$$\sum P_{\text{ен}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 88 \text{ Вт}.$$

Задача № 6

Розрахувати методом контурних струмів електричне коло, схема якого приведена на рис. P2.6,а. Схему попередньо привести до триконтурної. Параметри елементів кола: $E_1 = 18 \text{ В}; E_2 = 24 \text{ В}; J = 5 \text{ А}; R_1 = 6 \text{ Ом}; R_2 = R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}, R_5 = 1 \text{ Ом}; R_6 = 12 \text{ Ом}.$

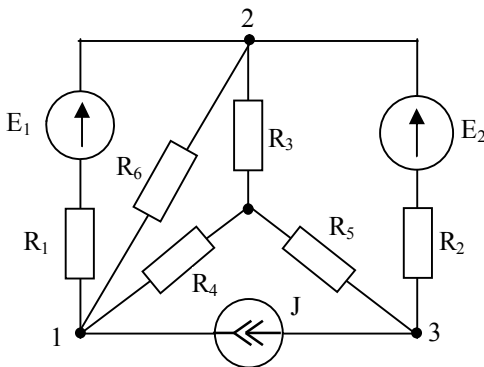


Рис. P2.6,а

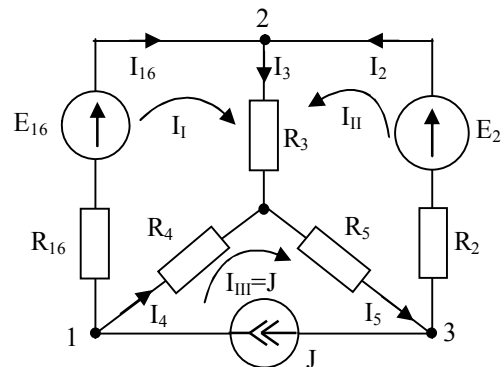


Рис. P2.6,б

Рішення

1. Спростимо коло, замінивши дві паралельні гілки – першу та шосту – одною еквівалентною. (рис. P2.6,б).

Визначимо ЕРС джерела еквівалентної гілки та її опір:

$$E_{16} = \frac{E_1 R_6}{R_1 + R_6} = \frac{18 \cdot 12}{6 + 12} = 12 \text{ В}; \quad R_{16} = \frac{R_1 R_6}{R_1 + R_6} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \text{ Ом}.$$

2. Спрощена схема має 6 гілок та 4 вузли. А тому число незалежних контурів в ній :

$$n = p - (q - 1) = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Завдяки ідеальному джерелу струму число контурних рівнянь скорочується на одиницю.

$$n = p - (q - 1) - n_J = 2.$$

При цього незалежні контури треба вибрати так, щоб гілка з джерелом струму входила тільки в один із них.

Обираємо незалежні контури та позитивні напрямки контурних струмів в них і показуємо їх на схемі.

3. Обходячи контури в напрямку контурних струмів, запишемо контурні рівняння:

$$(R_{I6} + R_3 + R_4)I_I + R_3I_{II} - R_4J = E_{I6};$$

$$(R_2 + R_3 + R_5)I_{II} + R_3I_I + R_5J = E_2;$$

$$I_{III} = J.$$

Підставивши відомі величини, отримаємо:

$$(4 + 2 + 2)I_I + 2I_{II} = 12 + 10;$$

$$2I_I + (2 + 2 + 1)I_{II} = 24 - 5;$$

$$I_{III} = 5.$$

або

$$8I_I + 2I_{II} = 22;$$

$$2I_I + 5I_{II} = 19.$$

4. Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо контурні струми. Для цього помножимо друге рівняння на 4 і віднімемо від нього перше.

$$\begin{array}{r} 8I_I + 20I_{II} = 76; \\ - 8I_I + 2I_{II} = 22; \\ \hline \end{array}$$

$$18I_{II} = 54.$$

Отже

$$I_{II} = 54/18 = 3 \text{ A};$$

$$I_I = (22 - 2I_{II})/8 = (22 - 6)/8 = 2 \text{ A}.$$

5. Вибираємо позитивні напрямки дійсних струмів в гілках і визначаємо кожний струм як алгебраїчну суму контурних струмів, що протікають в цій гілці.

$$I_{I6} = I_I = 2 \text{ A}; \quad I_2 = I_{II} = 3 \text{ A}; \quad I_3 = I_I + I_{II} = 2 + 3 = 5 \text{ A};$$

$$I_4 = J - I_I = 5 - 2 = 3 \text{ A}; \quad I_5 = I_{II} + J = 3 + 5 = 8 \text{ A}.$$

6. Визначаємо струми в 1-ій та 6-ій гілках початкової схеми. Для цього спочатку визначимо напругу U_{12} на цих гілках.

За законом Ома

$$I_{I6} = (V_1 - V_2 + E_{I6})/R_{I6},$$

звідки

$$U_{12} = V_1 - V_2 = R_{I6}I_{I6} - E_{I6} = 4 \cdot 2 - 12 = -4 \text{ В}.$$

Отже

$$I_1 = (U_{12} + E_1) / R_1 = (-4 + 18) / 6 = 2,33 \text{ A}; \quad I_6 = U_{21} / R_6 = 4 / 12 = 0,33 \text{ A}.$$

7. Зробимо перевірку за балансом потужностей:

$$\sum P_{\text{дж}} = \sum P_{\text{сп}},$$

$$\sum P_{\text{дж}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_{13} J,$$

$$U_{13} = I_4 R_4 + I_5 R_5 = 14 \text{ В},$$

$$\sum P_{\text{дж}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_{13} J = 184 \text{ Вт},$$

$$\sum P_{\text{сп}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 184 \text{ Вт}.$$

Задача № 7

Розрахувати електричне коло постійного струму (рис. P2.7) методом контурних струмів, якщо $E_1 = 12 \text{ В}$, $E_2 = 16 \text{ В}$, $E_3 = 10 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 7 \text{ Ом}$, $R_5 = 7 \text{ Ом}$, $R_6 = 7 \text{ Ом}$. Визначити напругу між точками **a** і **b**. Результати розрахунків перевірити методом балансу потужностей.

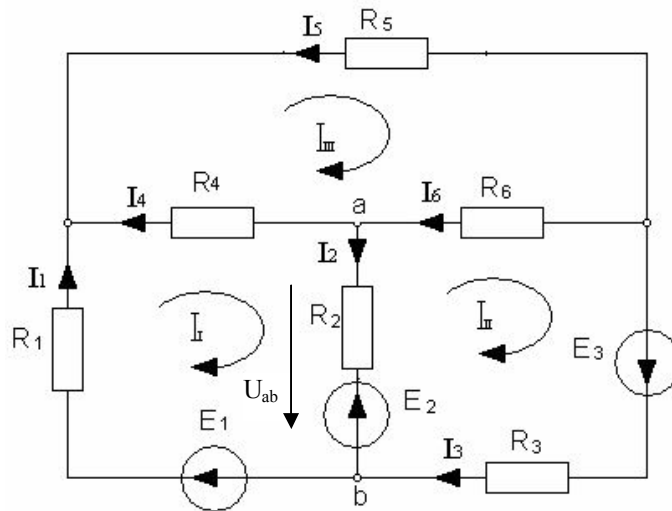


Рис. P2.7

Рішення

Вибираємо незалежні контури, задаємо напрямки контурних струмів та співпадаючі з ними напрямки обходу контурів.

За другим законом Кірхгофа складаємо контурні рівняння для трьох незалежних контурів:

$$\begin{cases} I_I (R_1 + R_2 + R_4) - I_{II} R_2 - I_{III} R_4 = E_1 - E_2, \\ -I_I R_2 + I_{II} (R_3 + R_2 + R_6) - I_{III} R_6 = E_3 + E_2, \\ -I_I R_4 - I_{II} R_6 + I_{III} (R_6 + R_4 + R_5) = 0. \end{cases}$$

Після підстановки числових значень одержимо:

$$\begin{cases} 12I_I - 4I_{II} - 7I_{III} = -4, \\ -4I_I + 13I_{II} - 7I_{III} = 26, \end{cases}$$

$$-7I_I - 7I_{II} + 21I_{III} = 0.$$

Вирішимо цю систему рівнянь методом визначників:

$$I_I = \Delta_1 / \Delta \quad I_{II} = \Delta_2 / \Delta \quad I_{III} = \Delta_3 / \Delta.$$

Підрахуємо головний Δ та часткові $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -7 \\ -4 & 13 & -7 \\ -7 & -7 & 21 \end{vmatrix} = 1323,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_I & -R_{12} & -R_{13} \\ E_{II} & R_{22} & -R_{23} \\ E_{III} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -7 \\ 26 & 13 & -7 \\ 0 & -7 & 21 \end{vmatrix} = 2562,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_I & -R_{13} \\ -R_{21} & E_{II} & -R_{23} \\ -R_{31} & E_{III} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -7 \\ -4 & 26 & -7 \\ -7 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 4746,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & E_I \\ -R_{21} & R_{22} & E_{II} \\ -R_{31} & -R_{32} & E_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 13 & 26 \\ -7 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2436.$$

Знаходимо контурні струми:

$$I_I = 2562 / 1323 = 1,94 \text{ A},$$

$$I_{II} = 4746 / 1323 = 3,58 \text{ A},$$

$$I_{III} = 2436 / 1323 = 1,84 \text{ A}.$$

Знаходимо дійсні струми

$$I_1 = I_I = 1,94 \text{ A}, \quad I_2 = I_I - I_{II} = 1,94 - 3,58 = -1,64 \text{ A}, \quad I_3 = I_{II} = 3,58 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{III} - I_I = 1,84 - 1,94 = -0,1 \text{ A}, \quad I_5 = -I_{III} = -1,84 \text{ A},$$

$$I_6 = I_{III} - I_{II} = 1,84 - 3,58 = -1,74 \text{ A}.$$

Визначимо напругу між точками **a** і **b**.

Із контуру, утвореного U_{ab} - b - E_2 - R_2 - a , за II законом Кірхгофа маємо:

$$U_{ab} - I_2 R_2 = E_2, \quad \text{звідки } U_{ab} = E_2 + I_2 R_2 = 16 - 6,56 = 9,44 \text{ В}.$$

Перевірка за балансом потужностей

$$\sum P_{\text{джер}} = \sum P_{\text{сп}},$$

$$\sum P_{\text{джер}} = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 = 88 \text{ Вт},$$

$$\sum P_{\text{сп}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 88 \text{ Вт}.$$

Задача № 8

Розрахувати електричне коло постійного струму (рис. P2.8) методом вузлових потенціалів, якщо $E_1 = 12 \text{ В}$, $E_2 = 16 \text{ В}$, $E_3 = 10 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 7 \text{ Ом}$, $R_5 = 7 \text{ Ом}$, $R_6 = 7 \text{ Ом}$. Визначити напругу між точками 2 і 4. Результати розрахунків перевірити методом балансу потужностей.

Рішення

Візьмемо 3 вузол за базисний і приймемо потенціал цього вузла рівним нулю, тобто $\varphi_3 = 0$.

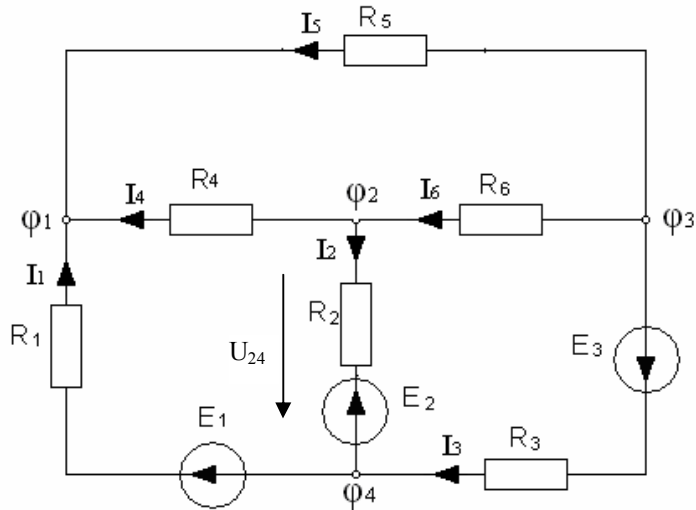


Рис. P2.8

Для визначення потенціалів інших вузлів складемо систему вузлових рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1(q_5 + q_1 + q_4) - \varphi_2q_4 - \varphi_4q_1 = E_1q_1, \\ -\varphi_1q_4 + \varphi_2(q_2 + q_4 + q_6) - \varphi_4q_2 = E_2q_2, \\ -\varphi_1q_1 - \varphi_2q_2 + \varphi_4(q_1 + q_3 + q_2) = E_3q_3 - E_1q_1 - E_2q_2. \end{cases}$$

Тут: $q_1 = 1/R_1 = 1 \text{ См}$, $q_2 = 1/R_2 = 0,25 \text{ См}$, $q_3 = 1/R_3 = 0,5 \text{ См}$,
 $q_4 = 1/R_4 = 0,14 \text{ См}$, $q_5 = 1/R_5 = 0,14 \text{ См}$. $q_6 = 1/R_6 = 0,14 \text{ См}$.

Після підстановки числових значень одержимо:

$$\begin{cases} 1,28\varphi_1 - 0,14\varphi_2 - 1\varphi_4 = 12, \\ -0,14\varphi_1 + 0,53\varphi_2 - 0,25\varphi_4 = 4, \\ -1\varphi_1 - 0,25\varphi_2 + 1,75\varphi_4 = -11. \end{cases}$$

Вирішимо цю систему рівнянь методом визначників:

$$\varphi_1 = \Delta_1 / \Delta \quad \varphi_2 = \Delta_2 / \Delta \quad \varphi_4 = \Delta_4 / \Delta.$$

Головний та часткові визначники відповідно дорівнюють:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1,28 & -0,14 & -1 \\ -0,14 & 0,53 & -0,25 \\ -1 & -0,25 & 1,75 \end{vmatrix} = 0,476, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -0,14 & -1 \\ 4 & 0,53 & -0,25 \\ -11 & -0,25 & 1,75 \end{vmatrix} = 5,645,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1,28 & 12 & -1 \\ -0,14 & 4 & -0,25 \\ -1 & -11 & 1,75 \end{vmatrix} = 6,145, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1,28 & -0,14 & 12 \\ -0,14 & 0,53 & 4 \\ -1 & -0,25 & -11 \end{vmatrix} = 1,38.$$

Потенціали вузлів дорівнюють:

$$\varphi_1 = 6,145 / 0,476 = 12,91 \text{ В}$$

$$\varphi_2 = 5,84 / 0,476 = 12,27 \text{ В}$$

$$\varphi_4 = 1,38 / 0,476 = 2,9 \text{ В}$$

Знаходимо струми в гілках за законом Ома:

$$I_1 = (\varphi_4 - \varphi_1 + E_1) / R_1 = 2 \text{ А}, \quad I_2 = (\varphi_2 - \varphi_4 - E_2) / R_2 = -1,66 \text{ А},$$

$$I_3 = (\varphi_3 - \varphi_4 + E_3) / R_3 = 3,55 \text{ А}, \quad I_4 = (\varphi_2 - \varphi_1) / R_4 = -0,1 \text{ А},$$

$$I_5 = (\varphi_3 - \varphi_1) / R_5 = -1,84 \text{ А}, \quad I_6 = (\varphi_3 - \varphi_2) / R_6 = -1,75 \text{ А}.$$

Напруга між вузлами 2 і 4:

$$U_{24} = \varphi_2 - \varphi_4 = 12,27 - 2,9 = 9,37 \text{ В}$$

Перевірка за рівнянням балансу потужностей

$$\sum P_{\text{джер}} = \sum P_{\text{сп}},$$

$$\sum P_{\text{джер}} = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 = 88 \text{ Вт},$$

$$\sum P_{\text{сп}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 88 \text{ Вт}.$$

Задача № 9

Розв'язати методом вузлових потенціалів електричне коло, схема якого зображена на рис. Р2.8. Параметри елементів кола: $E_2 = 10 \text{ В}$; $E_3 = 24 \text{ В}$; $J_1 = 3 \text{ А}$; $J_6 = 5 \text{ А}$; $R_1 = 4 \text{ Ом}$; $R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_5 = 1 \text{ Ом}$.

Розв'язання

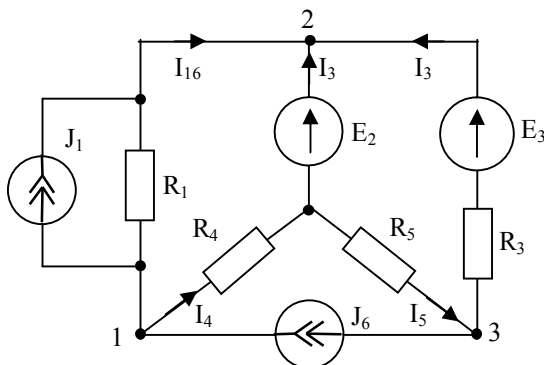
1. В колі 4 вузли, але наявність гілки з ідеальним джерелом ЕРС дозволяє скоротити на одиницю число вузлових рівнянь, складених за методом вузлових потенціалів.

Приймаємо $V_4 = 0$.

Тоді $V_3 = E_2 = 10 \text{ В}$ і для визначення потенціалів решти вузлів досить скласти два рівняння.

2. Складемо систему вузлових рівнянь:

$$(G_1 + G_4) V_1 - G_1 V_3 = -J_1 + J_6,$$



$$(G_3 + G_5)V_2 - G_3V_3 = -E_3G_3 - J_6.$$

Підставивши відомі величини, отримаємо:

$$(1/4 + 1/2)V_1 = -3 + 5 + 10/4;$$

$$(1/2 + 1)V_2 = -24/2 - 5 + 10/2.$$

3. Визначаємо потенціали вузлів:

$$3/4V_1 = 9/2; \quad V_1 = 6 \text{ В};$$

$$3/2V_2 = -12; \quad V_2 = -8 \text{ В}.$$

4. Обираємо позитивні напрямки струмів в гілках і визначаємо їх за законом Ома, а для гілки без опору – за першим законом Кірхгофа:

$$I_1 = (V_2 - V_1)/R_1 = (10 - 6)/4 = 1 \text{ А}; \quad I_3 = (V_2 - V_3 + E_3)/R_3 = (-8 - 10 + 24)/2 = 3 \text{ А};$$

$$I_4 = (V_1 - V_4)R_4 = 6/2 = 3 \text{ А}; \quad I_5 = (V_4 - V_2)/R_5 = 8/1 = 8 \text{ А}.$$

Для вузла 4:

$$I_4 - I_2 - I_5 = 0.$$

Звідки

$$I_2 = I_4 - I_5 = 3 - 8 = -5 \text{ А}$$

Дійсний напрямок струму I_2 протилежний вказаному на схемі.

5. Перевіримо розрахунок за балансом потужностей:

$$\Sigma P_{\text{дж}} = \Sigma P_{\text{сн}}.$$

$$\Sigma P_{\text{дж}} = (V_3 - V_1)J_1 + E_2I_2 + E_3I_3 + (V_1 - V_2)J_6 = 104 \text{ Вт}.$$

$$\Sigma P_{\text{сн}} = R_1I_1^2 + R_3I_3^2 + R_4I_4^2 + R_5I_5^2 = 104 \text{ Вт}$$

Баланс потужностей виконується, отже розрахунок виконаний правильно.

Задача № 10

Визначити струм гілки з опором R_6 (рис. P2.10,а), якщо $E_1 = 150 \text{ В}$, $E_6 = 40 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 30 \text{ Ом}$, $R_4 = 10 \text{ Ом}$, $R_5 = 20 \text{ Ом}$, а R_6 приймає значення 3; 18 та 28 Ом.

Рішення

Для розрахунку струму шостої гілки скористаємося методом еквівалентного генератора, відповідно якому

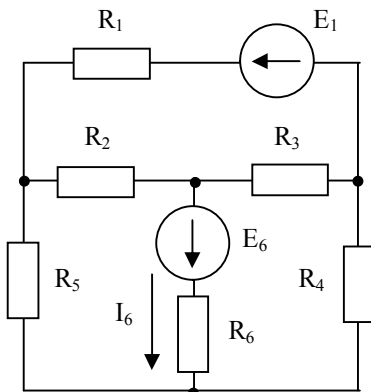


Рис. P2.10,а

$$I = \frac{U_x}{R_B + R_6}.$$

1. Накреслимо розрахункову схему холостого ходу (рис. P2.10,б) і визначимо напругу холостого ходу U_x . Схему холостого ходу одержуємо з початкової схеми шляхом виключення резистора R_6 , струм в якому треба розрахувати.

Напруга U_x визначається з рівняння, яке складається за другим законом Кірхгофа для контуру, в який входить розірвана гілка, наприклад, контур з елементами R_2 , R_5 та E_6 . Для цього обираємо напрямок обходу контуру, позитивний напрямок напруги U_x (в напрямку I_6) і складаємо рівняння:

$$R_2 I_{2x} + U_x - R_5 I_{5x} = E_6,$$

звідки

$$U_x = E_6 - R_2 I_{2x} + R_5 I_{5x}.$$

В схемі холостого ходу треба визначити струми I_{2x} та I_{5x} , що можна зробити в даному випадку на підставі закону Ома:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 30 + 30 = 60 \text{ Ом};$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 10 + 20 = 30 \text{ Ом}; \quad R_{2345} = \frac{R_{23} \cdot R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30} = 20 \text{ Ом};$$

$$R_e = R_1 + R_{2345} = 30 + 20 = 50 \text{ Ом}; \quad I_{1x} = \frac{E_1}{R_e} = \frac{150}{50} = 3 \text{ А};$$

$$I_{2x} = \frac{I_{1x} \cdot R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = \frac{3 \cdot 30}{60 + 30} = 1 \text{ А}; \quad I_{5x} = I_{1x} - I_{2x} = 3 - 1 = 2 \text{ А}.$$

Отже $U_x = E_6 - R_2 I_{2x} + R_5 I_{5x} = 40 - 30 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 50 \text{ В}.$

2. Для визначення R_e використовуємо розрахункову схему в вигляді пасивного двополюсника, підключеного до клем видаленого резистора. Для

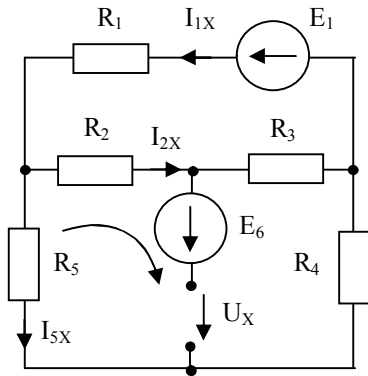


Рис. P2.6,б

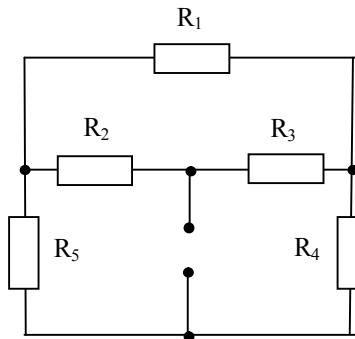


Рис. P2.6,в

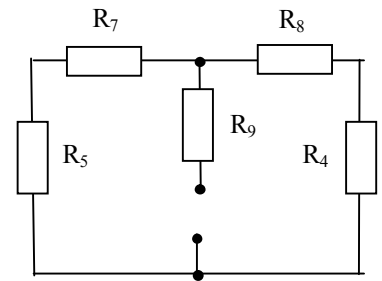


Рис. P2.6,г

цього виключимо зі схеми холостого ходу джерела ЕРС, замкнувши їх клемми накоротко (рис. P2.10,в). R_e визначаємо відносно клем видаленої гілки.

Для визначення R_e перетворимо „трикутник” R_1 , R_2 , R_3 (рис. P2.10,в) в еквівалентну „зірку” (рис. P2.10,г):

$$R_7 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30 + 30} = 10 \text{ Ом};$$

$$R_8 = R_9 = R_7 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{57} = R_5 + R_7 = 20 + 10 = 30 \text{ Ом};$$

$$R_{48} = R_4 + R_8 = 10 + 10 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_{5748} = \frac{R_{57} \cdot R_{48}}{R_{57} + R_{48}} = \frac{30 \cdot 20}{30 + 20} = 12 \text{ Ом};$$

$$R_e = R_9 + R_{5748} = 10 + 12 = 22 \text{ Ом}.$$

3. Визначаємо струм в резисторі R_6 :

$$\text{при } R_6=3 \text{ Ом: } I_6 = \frac{U_x}{R_6 + R_6} = \frac{50}{22 + 3} = 2 \text{ А},$$

$$\text{при } R_6=18 \text{ Ом: } I_6 = \frac{50}{22 + 18} = 1,25 \text{ А},$$

$$\text{при } R_6=18 \text{ Ом: } I_6 = \frac{50}{22 + 28} = 1 \text{ А}.$$

Розділ II. Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму в ustalених режимах

Тема 3. Теорія та розрахунок лінійних електричних кіл однофазного синусоїдного струму

3.1. Основні визначення

Змінним струмом i (ЕРС – e , напругою – u) називається струм (ЕРС, напруга), який змінюється за часом.

Таким чином $i, e, u = f(t)$.

Змінний струм може змінювати не тільки величину, але і напрямок (рис. 3.1).

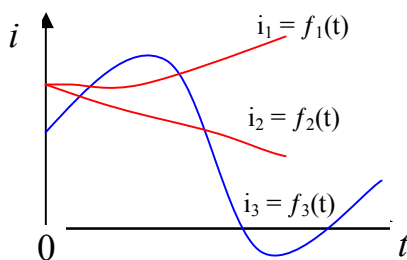


Рис. 3.1

Значення електричного струму в довільний момент часу називається миттєвим струмом.

$i = f_1(t)$ – миттєвий струм,

$u = f_2(t)$ – миттєва напруга,

$e = f_3(t)$ – миттєва ЕРС.

Електричний струм, миттєве значення якого повторюється через рівні проміжки часу, називається періодичним

$i = f(t) = f(t + kT)$, T – період.

Періодом електричного струму називається найменший інтервал часу, по скінченні якого миттєві значення періодичного електричного струму повторюється (рис. 3.2).

Величина, обернена періоду електричного струму, називається, частотою електричного струму $f = \frac{1}{T}$ [Гц]

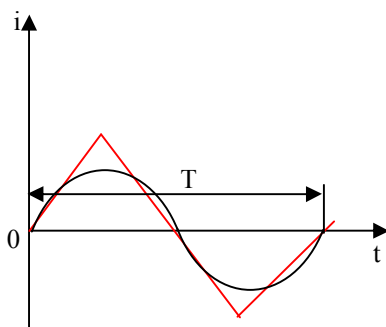


Рис. 3.2

В техніці найбільшого використання набув синусоїдний періодичний електричний струм.

Періодичний електричний струм, який є синусоїдною функцією часу, називається синусоїдним струмом.

Промислова частота синусоїдного струму – 50Гц, в авіації використовується синусоїдний струм змінної частоти 400...900Гц та стабільної частоти 400Гц.

3.2. Одержання синусоїдної ЕРС

Нехай в однорідному магнітному полі постійного магніту з постійною кутовою швидкістю ω в напрямку проти годинникової стрілки обертається незамкнений виток АС (рис. 3.3).

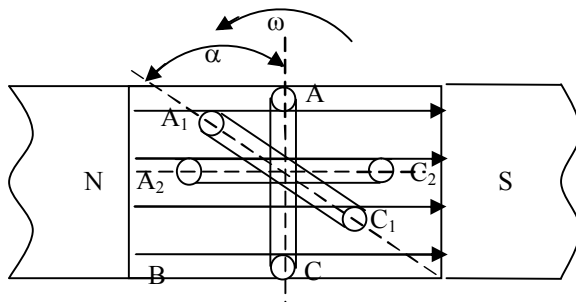


Рис. 3.3

АС – початкове положення витка (рамки).

При обертанні витка магнітний потік $\Phi = BS$, що пронизує площу витка, буде змінюватись за законом косинуса:

- положення АС: $t=0$, $\alpha=0$, $\phi = \Phi_m$;

- положення A^1C^1 : $t=t_1$, $\alpha=\omega t$, $\phi = \Phi_m \cos \alpha < \Phi_m$;

- положення A^2C^2 : $t=t_2$, $\alpha=90^\circ$, $\phi=0$;

- положення СА: $t=t_3$, $\alpha=180^\circ$, $\phi = -\Phi_m$;

де $\alpha = \omega t$ – кут між напрямком вектора магнітної індукції B і площиною витка S .

Таким чином

$$\phi = \Phi_m \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t,$$

тут ϕ – миттєве значення магнітного потоку,

Φ_m – максимальне значення магнітного потоку.

За законом електромагнітної індукції у витку буде наводитись ЕРС самоіндукції

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (\Phi_m \cos \alpha) = \Phi_m \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \omega \Phi_m \sin \alpha = E_m \sin \omega t,$$

де $E_m = \omega \Phi_m$ – амплітуда ЕРС в одному витку; якщо в магнітному полі обертається не один виток, а w , то :

$$E_m = w \omega \Phi_m.$$

$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ – кутова частота (швидкість зміни кута α).

Так як за період T рамка робить повний оберт в 2π радіан, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \left[\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right].$$

Отже, у витку наводиться синусоїдна ЕРС $e = E_m \sin \omega t$.

Якщо при $t = 0$ виток вже був повернутий від вертикалі на кут ψ_e , то весь кут дорівнює $\alpha = \omega t + \psi_e$, а ЕРС буде:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \text{ – це аналітичний вираз миттєвої ЕРС.}$$

На такому принципі працюють генератори синусоїдного струму.

3.3. Синусоїдна напруга і струм. Часова діаграма. Зсув фаз

Якщо до обмотки (котушки) генератора (або до витку на рис. 3.3) приєднати споживач, то потече синусоїдний струм i , який на ньому створить синусоїдну напругу u :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

де: I_m, U_m, E_m – амплітуди синусоїдних i, u, e – це максимальні їх значення;

$\omega t + \psi_{i(e,u)}$ – фаза струму i (e, u) – це аргумент синусоїдної функції;

ψ_i, ψ_u, ψ_e – початкові фази – це значення фази при $t = 0$.

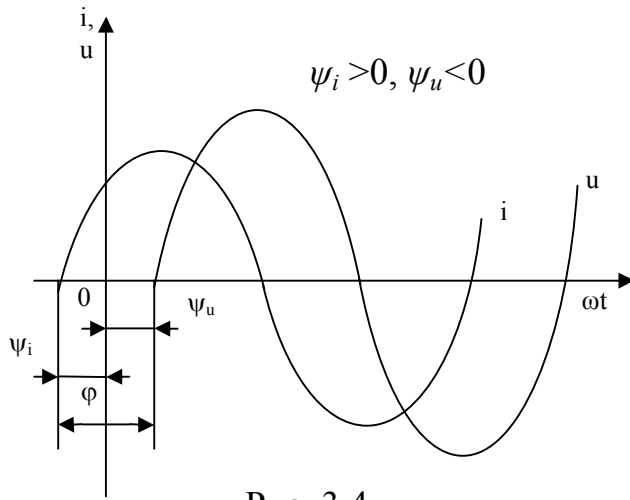


Рис. 3.4

Початкові фази відраховуються від початку синусоїди при її переході від від'ємних до додатних значень до початку координат. Додатна початкова фаза відкладається вліво від початку координат, а від'ємна – вправо.

Побудуємо часові діаграми u та i (рис. 3.4).

Різниця початкових фаз напруги і струму називається зсувом фаз між напругою і струмом: $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

3.4. Векторні діаграми

Синусоїдну величину можна графічно зобразити не тільки в вигляді синусоїди, але і вектором, що обертається. Це можливо тому, що проекція вектора, який обертається навколо початку координат, на вісь ординат змінюється в часі за законом синуса.

Покажемо це для ЕРС $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

Зобразимо систему координат і відкладемо під кутом ψ_e до осі абсцис вектор $\overline{OA} = E_m$ (рис. 3.5). Домовимося додатні початкові фази відкладати від осі абсцис проти годинникової стрілки, а від'ємні – за годинниковою стрілкою.

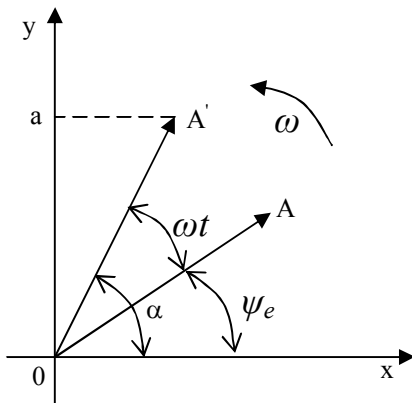


Рис. 3.5

Далі, починаючи з моменту часу $t=0$, будемо обертати вектор \overline{OA} навколо початку координат проти годинникової стрілки. Частота обертання ω дорівнює кутовій частоті синусоїдної ЕРС. На момент часу t вектор \overline{OA} повернеться на кут ωt і буде розташований під кутом $\alpha = \omega t + \psi_e$ до осі абсцис. Його проекція на вісь ординат

$Oa = OA \sin \alpha$, але $OA = E_m$, $\alpha = \omega t + \psi_e$, тоді

$Oa = e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ – це миттєве значення синусоїдної ЕРС.

Векторна діаграма – це сукупність векторів, які зображають синусоїдні ЕРС, струми та напруги однакової частоти.

Векторні діаграми використовують для додавання або віднімання кількох синусоїдних величин. Наприклад, потрібно скласти дві ЕРС (рис. 3.6):

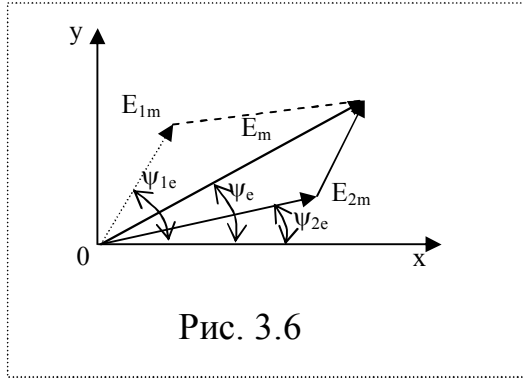


Рис. 3.6

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1e}),$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2e}).$$

Будуємо векторну діаграму

$$\overline{E_m} = \overline{E_{1m}} + \overline{E_{2m}},$$

з якої находимо E_m і ψ_e .

$$\text{Тоді } e = e_1 + e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

3.5. Діючі та середні значення змінних струмів, ЕРС, напруг

Для виміру змінного струму користуються методом його порівняння з постійним струмом.

При протіканні через провідник змінного або постійного струму спостерігаються такі загальні явища:

виділяється певна кількість тепла;

діє електромагнітна сила;

через поперечний переріз провідника за одиницю часу проходить визначена кількість електрики.

На основі цих загальних дій для характеристики змінного струму вводяться ще два значення (крім миттєвого значення і амплітуди):

діюче – $I(E, U)$;

середнє – $I_c(E_c, U_c)$.

Діючий змінний струм визначеної величини створює таку ж механічну і теплову дію, як і постійний струм тієї ж величини.

3.5.1. Діючі значення

За діючий змінний струм приймають такий постійний струм, котрий за один і той же час T виділяє в тому ж резисторі R , таку ж кількість тепла Q , що і даний змінний струм.

Кількість тепла, що виділяється в резисторі R за час T (один період) постійним та змінним струмами дорівнює:

$$Q_- = I^2 RT, \quad Q = \int_0^T i^2 R dt.$$

Прирівнюємо ці значення: $Q_- = Q$, або

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt, \quad \text{звідси} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} - \text{діючий струм}.$$

Діючим струмом називається середнє квадратичне значення змінного електричного струму за період.

Аналогічно: $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$

Нехай змінний струм змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

Визначимо зв'язок між діючим струмом I та амплітудою I_m .

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{2} dt - \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогічно знаходимо

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m.$$

Електровимірювальні прилади реагують на діючі значення I , U , E , і їх шкали відградувані в діючих величинах.

При розрахунках електричних кіл змінного струму задаються напрямками діючих I , U , E .

3.5.2. Середні значення

Середнім значенням змінного струму називається величина такого постійного струму, при якому за період через поперечний перетин проводу проходить така ж кількість електричного заряду, як і при даному змінному струмі.

Кількість електричного заряду від постійного та змінного струмів відповідно визначається за формулами

$$Q = IT = I_c T; \quad Q = \int_0^T i dt.$$

Прирівнюючи ці значення одержимо

$$I_c = \frac{1}{T} \int_0^T i dt, \quad \text{аналогічно} \quad U_c = \frac{1}{T} \int_0^T u dt; \quad E_c = \frac{1}{T} \int_0^T e dt.$$

Якщо період T виразити через 2π , то формули приймуть такий вигляд:

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i d\omega t, \quad U_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\omega t, \quad E_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e d\omega t.$$

Для синусоїдних струмів, напруг та ЕРС середнє значення за повний період дорівнює нулю, так як площі від'ємних та додатних напівхвиль синусоїд рівні і різні за знаком. Тому для періодичних величин, симетричних

відносно осі часу, прийнято середнє значення визначати за додатний напівперіод, або по модулю.

Визначимо середнє значення синусоїдного струму

$$I_c = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = -\frac{2I_m}{\omega T} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{2I_m T}{2\pi T} \cos \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{I_m}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2I_m}{\pi}.$$

Тобто
$$I_c = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0.637 I_m,$$

аналогічно
$$U_c = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0.637 U_m, \quad E_c = \frac{2E_m}{\pi} \approx 0.637 E_m.$$

Електричні вимірювальні прилади магнітоелектричної системи реагують на середнє значення струму, напруги та ЕРС.

3.6. Заміна реальних кіл змінного струму колами з зосередженими параметрами

В колах змінного струму електромагнітні процеси носять складний характер, так як електричне та магнітне поля являються змінними величинами.

Зміна магнітного поля призводить до виникнення ЕРС самоіндукції $e_L = -\frac{d\psi}{dt}$, або для лінійних кіл $e_L = -L \frac{d\psi}{dt}$.

ЕРС самоіндукції наводиться на будь-якій ділянці електричного кола, отже індуктивність присутня на будь-якій ділянці кола (реостат, проводи тощо)

Зміна електричного поля призводить до появи струмів зміщення в діелектриках

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{C du}{dt}.$$

Струми зміщення існують не тільки в діелектрику конденсатора, але і між проводами, витками котушок тощо. Отже, електрична ємність розподілена вздовж усього кола.

Електричний опір також розподілений вздовж всього кола.

Таким чином, будь-яка ділянка електричного кола змінного струму має електричний опір R , індуктивність L , та ємність C .

На практиці для зручності розрахунку кіл змінного струму вважають, що електричні опори, індуктивності та ємності зосереджені на окремих ділянках. Такі кола називаються колами з зосередженими параметрами.

Закони Ома та Кірхгофа справедливі для будь-яких електричних кіл та будь-яких значень струмів і напруг (постійні і миттєві).

3.7. Кола синусоїдного струму з резистором

Розглянемо фізичні процеси в електричному колі, що містить лише активний опір R (рис. 3.7).

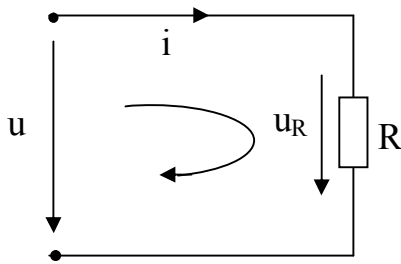


Рис. 3.7

До таких кіл відносяться електричні кола, що містять лампи накаливання, нагрівальні елементи, реостати, резистори тощо.

Хай прикладена напруга змінюється за синусоїдним законом: $u = U_m \sin \omega t$, $\psi_u = 0$.

За законом Ома для миттєвих значень визначимо миттєвий струм у колі:

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

де $I_m = \frac{U_m}{R}$ – амплітудне значення струму (закон Ома для амплітудних значень), або $I\sqrt{2} = \frac{U\sqrt{2}}{R}$, тоді $I = \frac{U}{R}$ – закон Ома для діючих значень;

початкова фаза струму $\psi_i = 0$.

З виразів для миттєвих струму та напруги видно, що на активному опорі струм та напруга співпадають за фазою, тому зсув фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

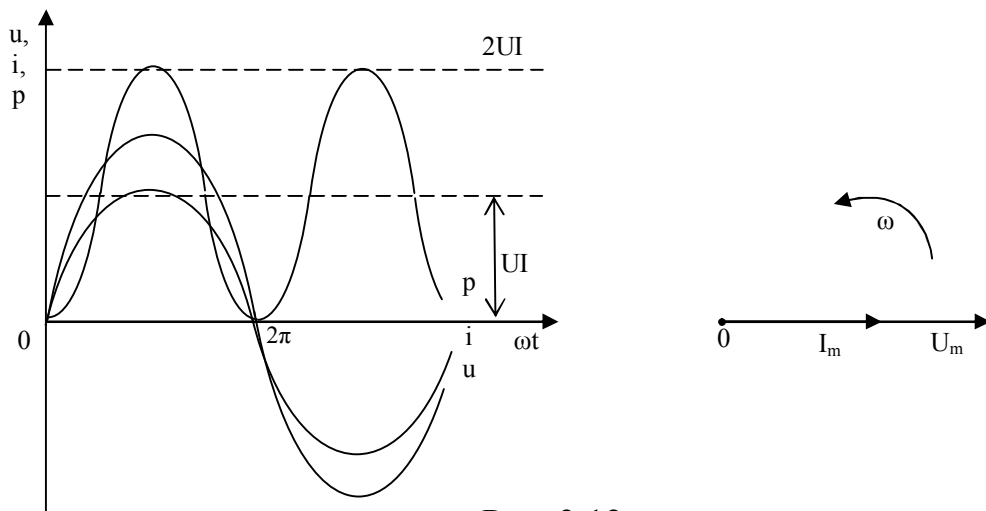


Рис. 3.12

Розглянемо енергетичні процеси в даному колі.

Миттєва потужність – це добуток миттєвої напруги на миттєвий струм

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) = UI(1 - \cos 2\omega t).$$

З одержаного виразу видно, що миттєва потужність змінюється за косинусоїдою з подвійною кутовою частотою навколо сталої складової UI , залишаючись завжди додатною. Це говорить про те, що потік електричної енергії завжди направлений від джерела до приймача, де енергія неодмінно перетворюється в інший вид енергії (теплову, механічну тощо).

Побудуємо часові та векторні діаграми (рис. 3.8).

Активна потужність – це середнє арифметичне миттєвої потужності, тому

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt - \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos 2\omega t dt = UI.$$

Отже, активна потужність в колі синусоїдного струму з резистором дорівнює сталій складовій миттєвої потужності

$$P = UI = I^2 R = U^2 G, \text{ звідси: } R = \frac{P}{I^2}, \text{ або } G = \frac{P}{U^2}.$$

Енергія, що поглинається резистором за час T , дорівнює

$$W = \int_0^T P dt = PT = UIT.$$

3.8. Електричне коло синусоїдного струму з індуктивною котушкою

Розглянемо фізичні процеси, які відбуваються в колі синусоїдного струму, яке має тільки індуктивну котушку (рис. 3.9).

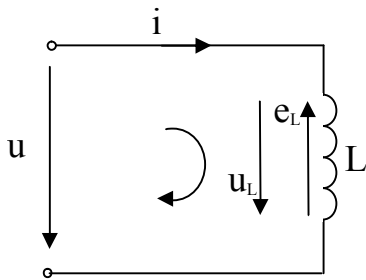


Рис. 3.9

Активний опір і міжвиткову ємність не беремо до уваги, тобто маємо ідеальну індуктивну котушку.

Нехай в котушці протікає синусоїдний струм

$$i = I_m \sin \omega t, \quad \varphi_i = 0.$$

Потокозчеплення самоіндукції в котушці буде дорівнювати:

$$\psi_i = Li \quad \text{або} \quad \psi_i = \phi w, \quad \text{тоді} \quad Li = \phi w.$$

Звідси

$$\phi = \frac{L}{w} i = \frac{L}{w} I_m \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t,$$

де $\Phi_m = \frac{LI_m}{w}$ – амплітуда магнітного потоку.

Магнітний потік за фазою збігається з електричним струмом.

Змінне магнітне поле в витках котушки збуджує ЕРС самоіндукції:

$$\begin{aligned} e_L &= -d\psi/dt = -L di/dt = -L d/dt (I_m \sin \omega t) = -\omega LI_m \cos \omega t = \\ &= \omega LI_m \sin(\omega t - \pi/2) = E_m \sin(\omega t - \pi/2), \end{aligned}$$

де $E_m = \omega LI_m$ – амплітуда ЕРС самоіндукції,

$\psi_L = -\pi/2$ – початкова фаза ЕРС.

Отже, ЕРС самоіндукції відстає по фазі від струму в котушці на 90° .

ЕРС самоіндукції викликає струм, який згідно закону Ленца протидіє зміні струму, що його обумовлює. За умов збільшення струму ЕРС самоіндукції діє назустріч струму, а за умов зменшення – у напрямку струму, протидіючи його зменшенню.

Для того, щоб у котушці протікав змінний струм, необхідно на її затискачах мати напругу, яка б компенсувала ЕРС самоіндукції:

$$u = u_L = -e_L = L di/dt,$$

або $u_L = L di/dt = L d/dt (I_m \sin \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \pi/2),$

де $U_m = \omega L I_m$ – амплітуда напруги,
 $\psi_L = \pi/2$ – початкова фаза.

Отже, напруга на котушці випереджає по фазі струм у ній на 90° , а ЕРС самоіндукції – на 180° .

Амплітуда струму дорівнює:

$$I_m = U_m / \omega L \text{ – закон Ома для амплітудних значень,}$$

$$I = U / \omega L \text{ – закон Ома для діючих значень.}$$

Для електричного кола з індуктивною котушкою закон Ома справедливий тільки для амплітудних і діючих значень. Для миттєвих значень закон Ома застосовувати не можна, так як миттєві струм і напруга зсунуті по фазі.

Величина $X_L = \omega L = 2\pi f L$ [Ом] називається індуктивним опором.

$$B_L = 1/X_L = 1/\omega L \text{ [См] – індуктивна провідність.}$$

Індуктивний опір пропорційний індуктивності котушки, а також частоті змінно струму. Зі збільшенням частоти індуктивний опір збільшується.

Зобразимо часові й векторні діаграми кола з індуктивною котушкою (рис. 3.10).

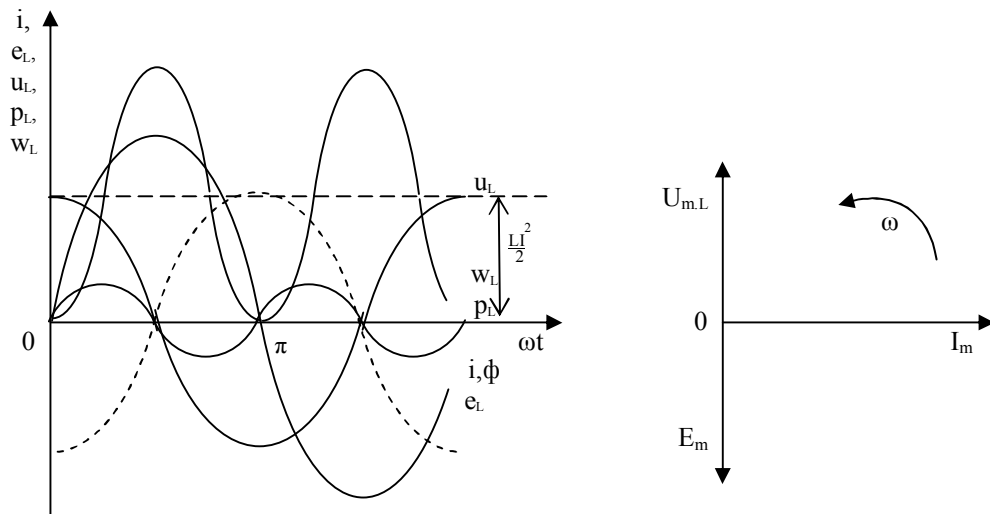


Рис. 3.10

Розглянемо енергетичні процеси в колі з індуктивною котушкою.

Миттєва потужність:

$$p_L = u i = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t$$

де $UI = \omega L I^2 = X_L I^2 = Q_L$ [вар, var] – реактивна потужність.

Отже, реактивна потужність змінюється за синусоїдним законом з подвійною кутовою частотою, а вісь симетрії збігається з віссю абсцис (рис. 3.10).

Активна потужність:

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0.$$

Тобто, активна потужність ідеальною котушкою не споживається.

Миттєва енергія:

$$w_L = \int p_L dt = \int u i dt = \int i L \frac{di}{dt} dt = L \int i di = \frac{Li^2}{2}.$$

Після підстановки значення струму маємо:

$$w_L = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI_m^2}{4} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{LI_m^2}{4} (1 - \cos 2\omega t).$$

Отже, миттєва енергія має постійну складову $LI_m^2/4$ і змінну складову, яка змінюється по косинусоїді з подвійною кутовою частотою (рис. 3.10).

Із часових діаграм для i , p_L , w_L видно, що за першу і третю чверті періоду, коли струм в колі збільшується від 0 до I_m , миттєва потужність позитивна, тому енергія від джерела іде до приймача і дорівнює:

$$w_L = L \int_0^{I_m} i di = \frac{LI^2}{2} \Big|_0^{I_m} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

За другу і четверту чверті періоду, коли струм зменшується від I_m до 0, миттєва потужність від'ємна. Отже, електрична енергія, накопичена в магнітному полі котушки, повертається джерелу електричної енергії і дорівнює:

$$w_L = L \int_{I_m}^0 i di = \frac{LI^2}{2} \Big|_{I_m}^0 = -\frac{LI_m^2}{2}.$$

Таким чином, у колі з індуктивною котушкою відбувається періодичний обмін енергією між джерелом і котушкою.

3.9. Електричне коло синусоїдного струму з конденсатором

Розглянемо фізичні процеси в колі синусоїдного струму, яке має тільки ідеальний конденсатор (рис. 3.11).

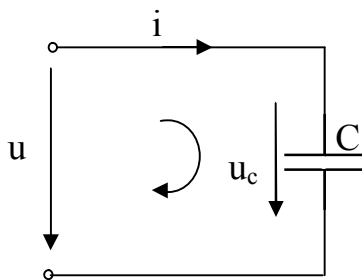


Рис. 3.11

Нехай до ідеального конденсатора прикладена синусоїдальна напруга,

$$u = U_m \sin \omega t, \quad \psi_u = 0.$$

За другим законом Кірхгофа маємо

$$u_c - u = 0, \quad u_c = u.$$

Тоді миттєвий заряд на обкладинках конденсатора буде дорівнювати:

$$q = C u_c = C U_m \sin \omega t.$$

Через конденсатор протікатиме струм:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad \psi_i = \pi/2.$$

Початкова фаза струму $\psi_i = \pi/2$, тому в ідеальному конденсаторі струм випереджає напругу на його затискачах на 90° .

Зобразимо часові й векторні діаграми (рис. 3.12).

Амплітуда миттєвого струму дорівнює:

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} - \text{закон Ома для амплітудних значень.}$$

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{X_c} - \text{закон Ома для діючих значень,}$$

де: $X_c = \frac{1}{\omega C}$ [Ом] – ємнісний опір конденсатора.

$$B_c = \frac{1}{X_c} = \omega C \text{ [См]} - \text{ємкісна провідність.}$$

Для електричного кола з конденсатором закон Ома справедливий для амплітудних і діючих значень. Для миттєвих значень його застосовувати не можна, так як миттєві струм і напруга зсунуті по фазі.

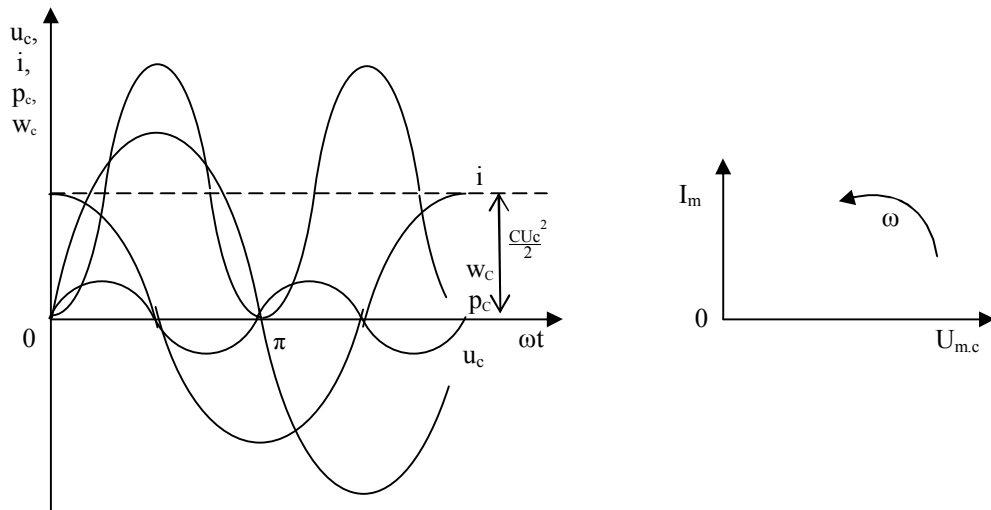


Рис. 3.12

Розглянемо енергетичні процеси в колі з ідеальним конденсатором.

Миттєва потужність:

$$p_c = u_c i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) U_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t,$$

де $UI = \frac{U^2}{X_c} = X_c I^2 = Q_c$ [вар, var] – реактивна потужність.

Отже, реактивна потужність змінюється за синусоїдним законом з подвійною кутовою частотою навколо осі абсцис (рис. 3.12).

Активна потужність:

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0.$$

Тобто, активна потужність ідеальним конденсатором не споживається.

Миттєва енергія:

$$w_c = \int p_c dt = \int u_c i dt = \int u_c C \frac{du_c}{dt} dt = C \int u_c du_c = \frac{C u_c^2}{2}.$$

Після підстановки значення напруги маємо:

$$w_c = \frac{CU_{m.c}^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{CU_{m.c}^2}{4} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{CU_c^2}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Отже, миттєва енергія має постійну складову $CU_c^2/2$ і змінну складову, яка змінюється по косинусоїді з подвійною кутовою частотою (рис. 3.12).

Із часових діаграм для u_c , p_c , w_c видно, що за першу і третю чверті періоду, коли напруга на конденсаторі збільшується від 0 до $|U_{m.c}|$, миттєва потужність додатна, а миттєва енергія збільшується. Це говорить про те, що конденсатор заряджається, енергія направлена від джерела до конденсатора і дорівнює

$$w_c = \int_0^{\frac{T}{4}} u_c i dt = \int_0^{U_{m.c}} u_c C \frac{du_c}{dt} = \frac{C u_c^2}{2} \Big|_0^{U_{m.c}} = \frac{CU_{m.c}^2}{2}.$$

За другу й четверту чверті періоду, коли напруга на конденсаторі зменшується від $|U_{m.c}|$ до 0, миттєва потужність від'ємна, а миттєва енергія зменшується. Це говорить про те, що конденсатор розряджається, енергія, накопичена в його електричному полі, повертається джерелу і дорівнює

$$w_c = \int_0^{\frac{T}{4}} u_c i dt = \int_{U_{m.c}}^0 u_c C \frac{du_c}{dt} = \frac{C u_c^2}{2} \Big|_{U_{m.c}}^0 = -\frac{CU_{m.c}^2}{2}.$$

Таким чином, у електричному колі з ідеальним конденсатором активна потужність не споживається, а відбувається періодичний обмін енергією між джерелом і конденсатором.

3.10. Розрахунок електричного кола синусоїдного струму з послідовним з'єднанням R , L , C

Нехай у колі з послідовним з'єднанням R , L , C (рис. 3.13) протікає синусоїдний струм:

$$i = I_m \sin \omega t, \quad \psi_i = 0.$$

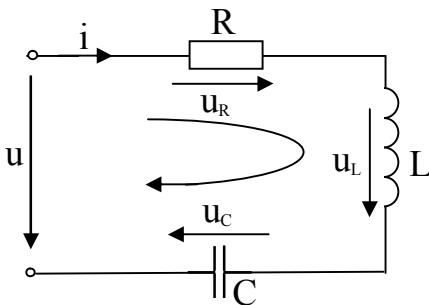


Рис. 3.13

Розглянемо фізичні процеси в колі та знайдемо u , φ , U , U_R , U_L , U_C .

За другим законом Кірхгофа:

$$u_R + u_L + u_C = u, \quad (3.1)$$

$$\text{або} \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int i dt = u.$$

Спершу знайдемо складові рівняння (3.1), а потім всю напругу u .

Для синусоїдального струму маємо:

$$u_R = Ri = R I_m \sin \omega t = U_{m.R} \sin \omega t.$$

$$\text{Зсув фаз} \quad \varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Щодо значення зсуву фаз можливі три випадки:

1. $X_L > X_C$ (або в колі з R, L) $\varphi > 0$ – коло носить індуктивний характер.
2. $X_L < X_C$ (або в колі з R, C) $\varphi < 0$ – коло носить ємнісний характер.
3. $X_L = X_C$, $\varphi = 0$ – коло носить активний характер (резонанс напруг).

Визначивши з векторної діаграми U та φ , можна тепер записати вираз для шуканої прикладеної напруги u .

$$\text{Так як} \quad U_m = \sqrt{2} U, \quad \psi_u = \varphi + \psi_i = \varphi, \quad (\psi_i = 0),$$

$$\text{то} \quad u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi).$$

Якщо усі сторони трикутника напруг розділити на струм I , то отримаємо йому подібний трикутник опорів (рис. 3.15).

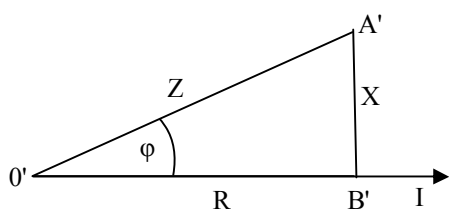


Рис. 3.15

Тут:

$$\begin{aligned} O'B' \rightarrow R &= \frac{U_a}{I} = Z \cos \varphi = \sqrt{Z^2 - X^2} = \\ &= \sqrt{Z^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{– активний} \end{aligned}$$

опір,

$$A'B' \rightarrow X = \frac{U_p}{I} = Z \sin \varphi = \sqrt{Z^2 - R^2} \quad \text{– реактивний опір,}$$

$$O'A' \rightarrow Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{– повний опір кола,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{– зсув фаз.}$$

Якщо усі сторони трикутника напруг помножити на струм I , то отримаємо йому подібний трикутник потужностей (рис. 3.16).

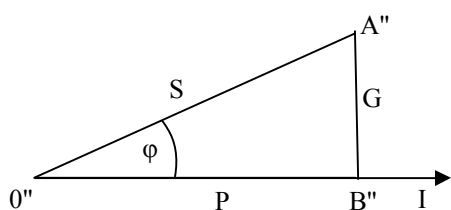


Рис. 3.16

Тут:

$$O''B'' \rightarrow P = U_a I = R I^2 = S \cos \varphi = UI \cos \varphi \text{ [ват]}$$

– активна потужність,

$$A''B'' \rightarrow Q = U_p I = R X I^2 = S \sin \varphi = UI \sin \varphi \text{ [вар]}$$

– реактивна потужність,

$$O''A'' \rightarrow S = UI = Z I^2 = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [ВА]} \quad \text{–}$$

повна потужність,

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} \quad \text{– зсув фаз:}$$

З усіх потужностей тільки активна потужність P характеризує величину виконаної роботи за одиницю часу.

Відношення

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi$$

називається коефіцієнтом потужності, воно характеризує повноту використання повної потужності кола S і має важливе техніко-економічне значення.

3.11. Розрахунок кола синусоїдного струму з паралельним з'єднанням R, L, C

Хай до кола з паралельним з'єднанням R, L, C (рис. 3.15) прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$, $\psi_u = 0$.

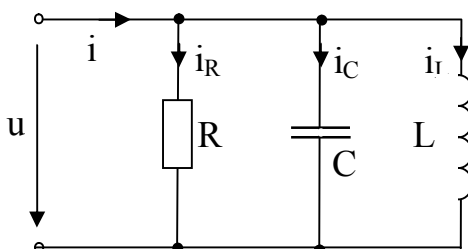


Рис. 3.15

За першим законом Кірхгофа маємо:

$$i_R + i_L + i_C = i, \quad (3.2)$$

або в інтегрально-диференційній формі запису

$$u/R + 1/L \int u dt + C du_c/dt = i.$$

Враховуючи, що $u = u_R = u_C = u_L$, спершу знайдемо струми в гілках, а потім струм на вході кола.

$$i_R = u/R = U_m/R \sin \omega t = GU_m \sin \omega t = I_{mR} \sin \omega t;$$

$$i_C = C du_c/dt = C d(U_m \sin \omega t)/dt = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) = I_{mC} \sin(\omega t + \pi/2);$$

$$i_L = 1/L \int u dt = 1/L \int (U_m \sin \omega t) dt = -U_m/\omega L \cos \omega t = U_m/\omega L \sin(\omega t - \pi/2) = I_{mL} \sin(\omega t - \pi/2).$$

Тут $I_{mR} = U_m/R = GU_m$; $I_{mC} = \omega C U_m = B_C U_m$; $I_{mL} = U_m/\omega L = B_L U_m$,

або для діючих значень:

$$I_R = U/R = GU; I_C = \omega C U = B_C U; I_L = U/\omega L = B_L U,$$

де $B_L = 1/\omega L = 1/X_L$ [См] – індуктивна провідність;

$B_C = \omega C = 1/X_C$ [См] – ємнісна провідність.

Так як кожен доданок рівняння (3.2) змінюється за синусоїдним законом, то струм в нерозгалуженій ділянці кола повинен бути синусоїдним. Тоді:

$$I_{mR} \sin \omega t + I_{mL} \sin(\omega t - \pi/2) + I_{mC} \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

В цьому рівнянні невідомі I_m (або I) та ψ_i . При $\psi_u = 0$, $\psi_i = \psi_u - \varphi = -\varphi$.

Для визначення I та ψ_i зобразимо синусоїдні струми векторами для діючих значень і перейдемо до векторного рівняння:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C. \quad (3.3)$$

В відповідності з рівнянням (3.3) побудуємо векторну діаграму струмів (рис. 3.16). За базисний вектор, відносно якого будувати інші вектори, прийнемо вектор напруги, так як вона являється загальною для всіх елементів кола. Нехай $\vec{I}_L > \vec{I}_C$.

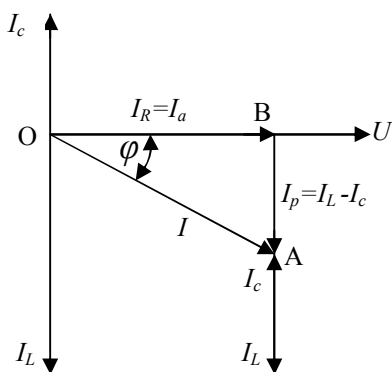


Рис. 3.16

На векторній діаграмі струмів $\triangle OAB$ називається трикутником струмів.

$OB \rightarrow I_a = I_R = UG = I \cos \varphi = \sqrt{I^2 - I_p^2}$ – активна

складова струму;

$AB \rightarrow I_p = I_L - I_C = U(1/\omega L - \omega C) = U(B_L - B_C) = UB = I \sin \varphi = \sqrt{I^2 - I_a^2}$ – реактивна складова

струму,

де $B_L - B_C = B$ [См] – реактивна провідність кола.

$$OA \rightarrow I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{U^2 G^2 + U^2 B^2} =$$

$$= U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = U \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2} = UY \text{ – закон Ома для}$$

паралельного з'єднання R, L, C .

Тут: $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2} = 1/Z$ – повна провідність кола.

Зсув фаз: $\varphi = \arctg(I_p/I_a) = \arctg((B_L - B_C)/G)$.

Можливі випадки:

1. $B_L > B_C$, тобто $B > 0$, $\varphi > 0$ – коло носить індуктивний характер.
2. $B_L < B_C$, тобто $B < 0$, $\varphi < 0$ – коло носить ємнісний характер.
3. $B_L = B_C$, $\varphi = 0$ – коло носить активний характер (резонанс струмів).

Тепер, знаючи I та φ , знаходимо I_m і φ :

$$I_m = I\sqrt{2}, \quad \psi_i = \psi_u - \varphi = -\varphi.$$

Отже, струм на вході кола дорівнює

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi).$$

Розглянуті методи розрахунку синусоїдних кіл з використанням векторних діаграм називаються методом векторних діаграм.

Якщо всі сторони трикутника струмів поділити на напругу, то отримаємо йому подібний трикутник провідностей (рис. 3.17).

$OB' \rightarrow G = I_a/U = Y \cos \varphi = \sqrt{Y^2 - B^2}$ – активна провідність;

$BA' \rightarrow B = I_p/U = Y \sin \varphi = \sqrt{Y^2 - G^2} = B_L - B_C = 1/\omega L - \omega C$ – реактивна провідність;

$OA' \rightarrow Y = I/U = 1/Z = \sqrt{B^2 + G^2}$ – повна провідність;

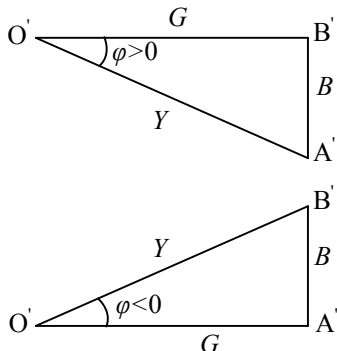


Рис. 3.17

$\varphi = \arctg(B/G) = \arctg((1/\omega L - \omega C)/G)$ – зсув фаз.

Якщо всі сторони трикутника струмів помножити на напругу, то отримаємо йому подібний трикутник потужностей (рис. 3.18).

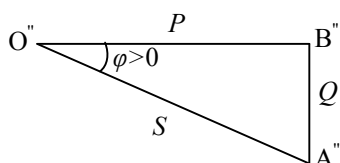


Рис. 3.18

$P = I_a U = GU^2 = UI \cos \varphi = S \cos \varphi = \sqrt{S^2 - Q^2}$ [Вт] – активна потужність;

$Q = I_p U = BU^2 = UI \sin \varphi = S \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2}$ [Вар] – реактивна потужність;

$S = UI = YU^2 = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [ВА] – повна потужність;

$\varphi = \arctg (Q/P)$ – зсув фаз.

3. 12. Енергетичні процеси в колах змінного струму

Розглянемо енергетичні процеси в колі з послідовним з'єднанням R, L, C . (рис. 3.19).

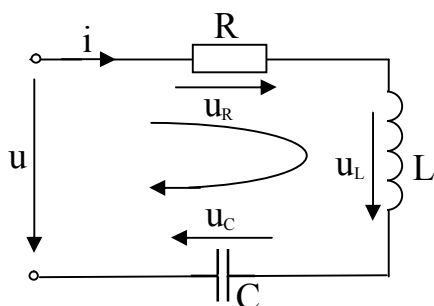


Рис. 3.19

За II законом Кірхгофа

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Помножимо всі члени цього рівняння на струм i

$$u i = u_R i + u_L i + u_C i.$$

Враховуючи, що $p = ui$; $p_R = u_R i = Ri^2$;
 $u_L = L di/dt$; $i_C = C du_C/dt$,

отримаємо:

$$\begin{aligned} p &= Ri^2 + Li di/dt + u_C C du_C/dt = Ri^2 + d(Li^2/2)/dt + d(C u_C^2/2)/dt = \\ &= Ri^2 + dw_L/dt + dw_C/dt = p_R + p_L + p_C, \end{aligned}$$

де: $p_R = Ri^2$ – миттєва потужність активного опору, котра характеризує процес перетворення електромагнітної енергії в тепло;

$p_L = dw_L/dt$ – миттєва потужність індуктивної котушки. При $p_L > 0$ енергія джерела йде на утворення магнітного поля котушки, при $p_L < 0$ – енергія магнітного поля котушки повертається джерелу;

$p_C = dw_C/dt$ – миттєва потужність конденсатора. При $p_C > 0$ енергія джерела йде на утворення електричного поля конденсатора, при $p_C < 0$ енергія, яка накопичена в електричному полі конденсатора, повертається джерелу.

Нехай струм та напруга змінюються за синусоїдним законом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad \text{тоді}$$

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_i) = U_m I_m / 2 [\cos(\psi_u - \psi_i) - \\ &- \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = \\ &= P - S \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = P - S \cos(2\omega t + \psi_p). \end{aligned}$$

На графіку (рис. 3.20) бачимо:

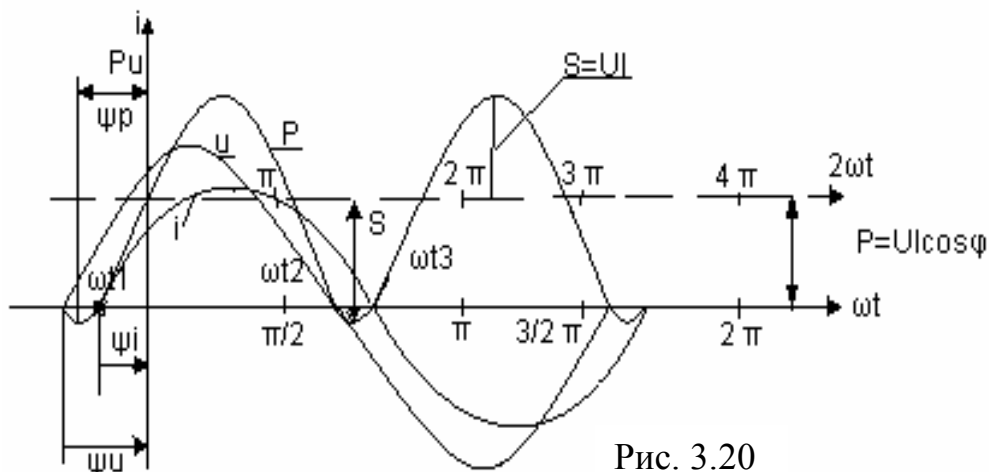


Рис. 3.20

- при $\omega t_1 < \omega t < \omega t_2$ – миттєва потужність позитивна, джерело віддає енергію в коло;

- при $\omega t_2 < \omega t < \omega t_3$ – миттєва потужність від'ємна, електричне коло віддає енергію джерелу.

При збільшенні реактивного опору і зменшенні активного опору крива миттєвої потужності буде все більше опускатися вниз. При $R=0$, вона буде симетрична відносно осі абсцис, тобто буде проходити періодичний обмін енергією між джерелом і електричним колом.

3.13. Еквівалентні параметри лінійного пасивного двополюсника

Розглянемо лінійний пасивний двополюсник (рис. 3.21).

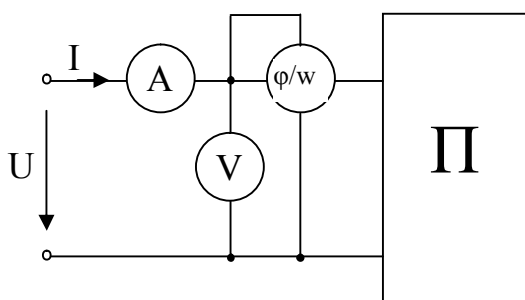


Рис. 3.21

Дано: $u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_u)$;

$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i)$.

Визначимо потужності, які споживає двополюсник:

$$\begin{aligned} S &= UI = ZI^2 = YU^2, \\ P &= UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2, \\ Q &= UI \sin \varphi = XI^2 = BU^2. \end{aligned}$$

Із цих рівнянь можна отримати:

$$\begin{aligned} Z &= U/I; & R &= Z \cos \varphi; & X &= Z \sin \varphi; \\ Y &= I/U; & G &= Y \cos \varphi; & B &= Y \sin \varphi; \end{aligned}$$

Із цього слідує, що будь який пасивний двополюсник з енергетичної точки зору можна уявити у вигляді двохелементної схеми заміщення з послідовним з'єднанням опорів R і X або паралельним з'єднанням провідностей G і B (рис. 3.22).

Схемою заміщення електричного кола називається схема, яка відображає властивості кола при деяких умовах.

Опори Z , R , X і провідності Y , G , B називаються еквівалентними параметрами пасивних двополусників. Їх можна визначити дослідним шляхом за показами вольтметра V , амперметра A , фазометра φ чи ватметра W та наступними розрахунками:

$$Z=U/I; \quad R=P/I^2; \text{ (чи } R=Z\cos\varphi); \quad X=\pm\sqrt{Z^2-R^2};$$

$$Y=I/U; \quad G=P/U^2; \text{ (чи } G=Y\cos\varphi); \quad B=\pm\sqrt{Y^2-G^2}.$$

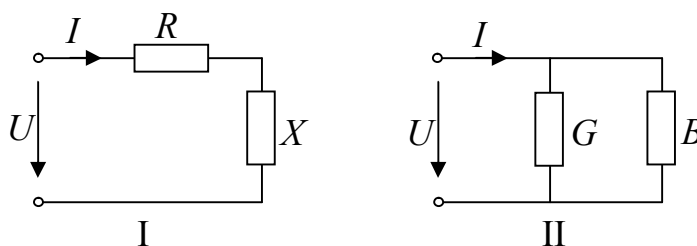


Рис. 3.22

Виходячи із рівності потужностей, які споживаються еквівалентними схемами заміщення, можна отримати формули еквівалентного переходу від послідовної схеми заміщення до паралельної і навпаки

$I \rightarrow II$		$II \rightarrow I$
$G = RI^2/U^2 = R/Z^2 = R/(R^2 + X^2);$		$R = GU^2/I^2 = G/Y^2 = G/(G^2 + B^2);$
$B = XI^2/U^2 = X/Z^2 = X/(R^2 + X^2);$		$X = BU^2/I^2 = B/Y^2 = B/(G^2 + B^2);$
$Y = ZI^2/U^2 = Z/Z^2 = 1/Z.$		$Z = YU^2/I^2 = Y/Y^2 = 1/Y.$

Таким чином, якщо відомі параметри однієї із еквівалентних схем двополусника, то параметри другої схеми можна визначити за параметрами відомої схеми.

Цими формулами користуються також при аналітичному розрахунку кін синусоїдного струму, замінюючи послідовні ділянки кола паралельними і навпаки. Цей метод отримав назву методу еквівалентних опорів і провідностей.

3.14. Основні положення символічного методу

Раніше ми розглянули розрахунок електричних кіл синусоїдного струму методом векторних діаграм та методом еквівалентних опорів і провідностей. Ці методи є достатньо складними, особливо при розрахунку розгалужених та складних електричних кіл.

Тому широке практичне застосування одержав символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму. (Метод був введений американським вченим Штейнметчем, в Росії його став застосовувати академік Міткевич).

Для наочності розрахунок електричних кіл символічним методом супроводжується побудовою векторних діаграм.

Символічний метод оснований на застосуванні комплексних чисел.

З математики відомо, що комплексне число можна виразити точкою, або радіус-вектором на комплексній площині (рис. 3.24) і записати аналітично в трьох формах: алгебраїчній, тригонометричній та показниковій:

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha},$$

де $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ – модуль комплексного числа;

$\alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}$ – аргумент комплексного числа;

$\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}$ – Формула Ейлера.

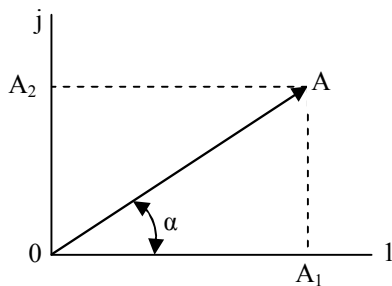


Рис. 3.24

01 – вісь дійсних чисел;

0j – вісь уявних чисел.

Для переходу від однієї форми комплексного числа до іншої використовуються такі формули:

$$\pm j = \cos 90^\circ \pm j \sin 90^\circ = e^{\pm j90^\circ},$$

$$-1 = \cos 180^\circ \pm j \sin 180^\circ = e^{\pm j180^\circ},$$

$$1 = \cos 360^\circ \pm j \sin 360^\circ = e^{\pm j360^\circ}.$$

При додаванні або відніманні краще використовувати алгебраїчну форму запису, а при множенні та діленні – показникову форму.

Наприклад: $\underline{A} = A_1 + jA_2 = Ae^{j\alpha}$; $\underline{B} = B_1 + jB_2 = Be^{j\beta}$.

$$\underline{A} + \underline{B} = (A_1 + B_1) + j(A_2 + B_2); \quad \underline{A} - \underline{B} = (A_1 - B_1) + j(A_2 - B_2);$$

$$\underline{AB} = Ae^{j\alpha} Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)};$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}.$$

Два комплексних числа називаються спряженими, якщо їх модулі рівні, а аргументи рівні, але протилежні за знаком (рис. 3.25)

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha};$$

$$\underline{A}^* = A_1 - jA_2 = A(\cos \alpha - j \sin \alpha) = Ae^{-j\alpha}.$$

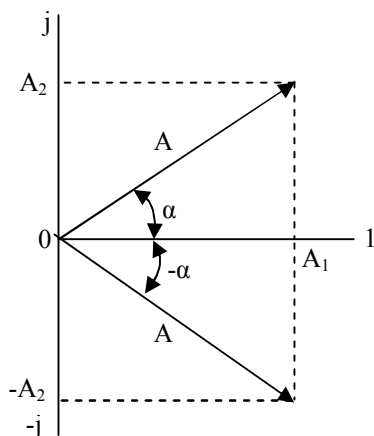


Рис. 3.25

Добуток комплексно-спряжених чисел дорівнює дійсному числу:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2 = A_1^2 + A_2^2.$$

Таким чином, комплексне число можна подати радіус-вектором і навпаки, – радіус-вектор може бути поданий комплексним числом.

Зобразимо вектор струму I_m на комплексній площині під кутом $\alpha = \psi_i$ (рис. 3.26):

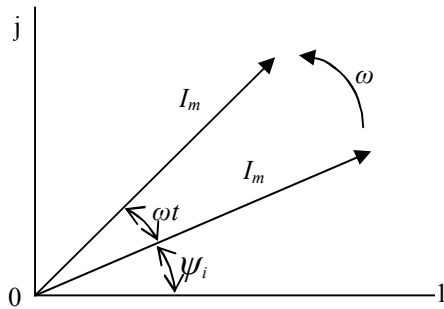


Рис. 3.26

Як радіус-вектор його можна записати в комплексній формі:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

Примусимо вектор I_m обертатися з частотою ω . Тоді через час t він займе положення $\alpha = \omega t + \psi_i$. Вектор, що обертається, в комплексній формі записується у вигляді:

$$\underline{I}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t},$$

де $\underline{I}(t)$ – комплексний миттєвий струм,

$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ – комплексна амплітуда струму,

$e^{j\omega t}$ – оператор обертання.

Запишемо комплексний миттєвий струм в тригонометричній формі:

$$\underline{I}(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Бачимо, що синусоїдну функцію можна подати у вигляді уявної частини комплексного числа, тобто проекції радіус-вектора на вісь уявних чисел. Умовно це записується так:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = J_m(\underline{I}_m e^{j\omega t}).$$

Символ J_m (уявний) означає, що при переході від комплексного числа до синусоїдної функції, необхідно брати лише уявну частину. Можна записати іншим чином:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \doteq \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{I}(t),$$

де i – оригінал; \doteq – знак відповідності;

$\underline{I}(t)$ – зображення – це допоміжна величина, що не має фізичного змісту, але зручна для розрахунку.

Отже, комплексним числом можна зобразити синусоїдну функцію.

Аналогічно

$$u \doteq \underline{U}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}; \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \quad \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U e^{j\psi_u};$$

$$e \doteq \underline{E}(t) = \underline{E}_m e^{j\omega t}; \quad \underline{E}_m = E_m e^{j\psi_e}; \quad \underline{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = E e^{j\psi_e}.$$

Приклад:

1. Дано: $i = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$. Визначимо $\underline{I}_m, \underline{I}$.

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 10 e^{j30^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} \text{ A}.$$

2. Дано: $\underline{I} = 5 e^{-j60^\circ} \text{ A}$. Визначимо \underline{I}_m, i .

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ A},$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 5\sqrt{2} e^{-j60^\circ} \text{ A}.$$

3.15. Застосування символічного методу для розрахунку кіл синусоїдного струму

Символічним методом називається метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму, оснований на представленні струму, напруги та ЕРС комплексними числами.

Цей метод дозволяє замінити лінійні інтегро-диференціальні рівняння, що описують синусоїдні кола, на алгебраїчні рівняння, а також застосовувати для розрахунку електричних кіл синусоїдного струму основні закони та методи розрахунку електричних кіл постійного струму в тій самій формі запису.

Розглянемо методику застосування символічного методу на прикладі електричного кола з послідовним з'єднанням R, L, C (рис. 3.27).

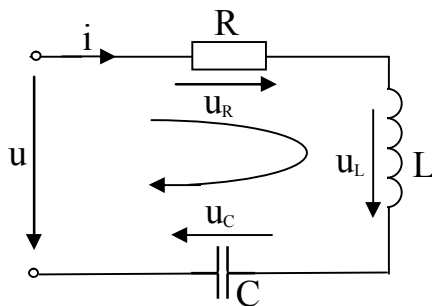


Рис. 3.27

Нехай: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Визначимо: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$,

де I_m, ψ_i — ?

За II законом Кірхгофа маємо:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3.4)$$

З метою використання символічного методу перейдемо до зображень:

$$u = \underline{U}_m e^{j\omega t}, \text{ де } \underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u};$$

$$i = \underline{I}_m e^{j\omega t}, \text{ де } \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i};$$

$\frac{di}{dt} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}$, — похідна від синусоїдної функції замінюється добутком $j\omega$ на її комплексне зображення;

$\int i dt = \frac{1}{j\omega} \underline{I}_m e^{j\omega t}$, — інтеграл синусоїдної функції замінюється діленням на $j\omega$ її комплексного зображення.

Підставимо одержані вирази у вихідне рівняння

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Скоротимо обидві частини на $\sqrt{2} e^{j\omega t}$, одержимо:

$$\underline{U} = R \underline{I} + j\omega L \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}. \quad (3.5)$$

Звідси:
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} - \text{закон Ома в символічній формі,}$$

де $\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX = Ze^{j\varphi}$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$.

Таким чином, ми від вихідного інтегрально-диференційного рівняння (3.4) перейшли до алгебраїчного (3.5).

Запишемо вираз для комплексного струму в показниковій формі:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ze^{j\varphi}} = Ie^{j(\psi_u - \varphi)} = Ie^{j\psi_i}.$$

Комплексний струм – це комплексна величина, модуль якої дорівнює діючому синусоїдному струму, а аргумент дорівнює початковій фазі цього струму.

Знаючи комплексний струм в показниковій формі можна записати вираз для миттєвого струму

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i).$$

3.16. Комплексний електричний опір та комплексна електрична провідність

Нехай відомі: $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$, $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$.

Візьмемо відношення $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u - \psi_i)}$.

Враховуючи, що $\frac{U}{I} = Z$, а $\psi_u - \psi_i = \varphi$, одержимо

$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Ze^{j\varphi} = \underline{Z}$ – комплексний опір кола.

Запишемо комплексний опір в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C});$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

При $X > 0$ перед j стоїть знак “+”, – коло має індуктивний характер, при $X < 0$ перед j стоїть знак “-”, – коло має ємнісний характер.

Знайдемо відношення $\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{I}{U}e^{j(\psi_i - \psi_u)}$.

Враховуючи, що $\frac{I}{U} = Y$, а $-(\psi_u - \psi_i) = -\varphi$, одержимо:

$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = Ye^{-j\varphi} = \underline{Y}$ – комплексна провідність.

Запишемо комплексну провідність в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G - jB = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right);$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{G}.$$

При $B > 0$, перед j стоїть знак “-”, – коло має індуктивний характер, при $B < 0$, перед j стоїть знак “+”, – коло має ємнісний характер.

Для комплексних опору та провідності завжди виконується рівність:

$$\underline{ZY} = 1, \quad \text{звідси:} \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

3.17. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Зображення синусоїдних функцій комплексними числами спрощує розрахунок синусоїдних кіл, так як дозволяє перейти від інтегро-диференціальних рівнянь електричної рівноваги до алгебраїчних відносно зображень.

Наприклад, для послідовного з'єднання R, L, C :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \underline{U}(t) = \underline{I}(t) \left[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right].$$

Розрахувавши це рівняння ми знаходимо не оригінал, а зображення. При цьому можна використовувати всі методи розрахунку кіл постійного струму. Це ми доведемо, якщо виразимо закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі.

3.17.1. Закон Ома

Для кола з послідовним з'єднанням R, L, C маємо:

$$\underline{U} = \underline{I} \left[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right] = \underline{IZ},$$

звідси $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ – закон Ома в комплексній формі.

3.17.2. Закони Кірхгофа

I закон Кірхгофа.

Алгебраїчна сума миттєвих значень струмів в вузлі дорівнює нулю:

$$\sum i_k = 0.$$

Це справедливо для будь-якого закону зміни струму, в тому числі і синусоїдного. Перейдемо до зображень:

$$i_k = I_{km} \sin(\omega t + \psi_{ik}) = \underline{I}_k(t) = \underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t}.$$

Якщо $\sum i_k = 0$, то сума зображень також дорівнює нулю.

Тоді $\sum \underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t} = 0$, або $\sum \underline{I}_k = 0$ – 1-й закон Кірхгофа.

Алгебраїчна сума комплексних струмів в вузлі дорівнює нулю.

II закон Кірхгофа.

Алгебраїчна сума миттєвих значень ЕРС. в замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень напруг на всіх ділянках цього контуру.

Для контуру з послідовним з'єднанням R, L, C одержимо:

$$\sum e_k = \sum (u_R + u_L + u_C) = \sum (R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt).$$

Перейдемо до комплексних миттєвих величин:

$$\sum \underline{E}_k(t) = \sum \underline{I}_k(t) \left[R_k + j(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}) \right] = \sum \underline{I}(t) \underline{Z}_k,$$

$$\text{або } \sum \underline{E}_k \sqrt{2} e^{j\omega t} = \sum \underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{Z}_k,$$

$$\text{або } \sum \underline{E}_k = \sum \underline{I}_k \underline{Z}_k - \text{II-й закон Кірхгофа.}$$

Алгебраїчна сума комплексних ЕРС, діючих в замкненому контурі, дорівнює алгебраїчній сумі комплексних напруг на всіх ділянках цього контуру.

Одержані вирази для законів Ома та Кірхгофа в комплексній формі мають той же вигляд, що й для кіл постійного струму. Різниця в тому, що в цих виразах потрібно записувати струм, напругу та ЕРС. в комплексній формі.

Отже, для розрахунку комплексних струмів та напруг, тобто зображень, справедливі всі розрахункові формули та методи, вивчені раніше для кіл постійного струму, тому що вони основані на законах Ома та Кірхгофа.

3.18. Визначення комплексної повної потужності за комплексною напругою та комплексним струмом

Для кола синусоїдного струму потужності знаходяться за формулами:

$$P = UI \cos \varphi; Q = UI \sin \varphi; S = UI, \quad \text{де} \quad \varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Нехай відомі комплексна напруга та струм:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u}; \underline{I} = I e^{j\psi_i}; \underline{I}^* = I e^{-j\psi_i}.$$

Визначимо P та Q за комплексним струмом та напругою. Враховуючи, що в аргументі ми повинні одержати різницю початкових фаз напруги та струму, тобто $\psi_u - \psi_i$, то візьмемо спряжений комплексний струм. Тоді одержимо:

$$\underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = U I e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U I e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ = \underline{S},$$

$$\text{звідси:} \quad \underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* - \text{комплексна повна потужність.}$$

3.19. Баланс потужностей

Для перевірки правильності розрахунків кіл синусоїдного струму символічним методом застосовують рівняння балансу потужностей в комплексній формі.

В колах синусоїдного струму алгебраїчна сума комплексних потужностей, що віддаються джерелами електричної енергії, дорівнює сумі комплексних потужностей, що споживаються приймачами.

$$\sum \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum \underline{Z}_k I_k^2.$$

При цьому, якщо напрям комплексних ЕРС та струму в гілці співпадають, то добуток $\underline{E}_k \underline{I}_k^*$ береться з додатнім знаком і навпаки.

3.20. Розрахунок кіл синусоїдного струму символічним методом

3.20.1. Прості кола

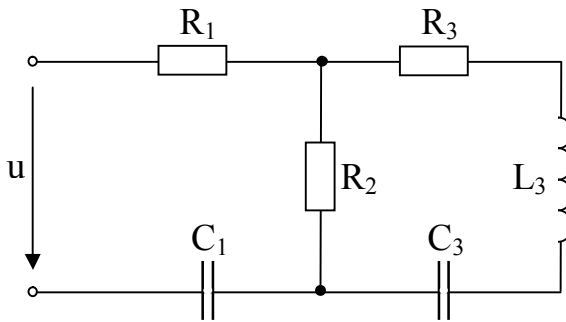


Рис. 3.28

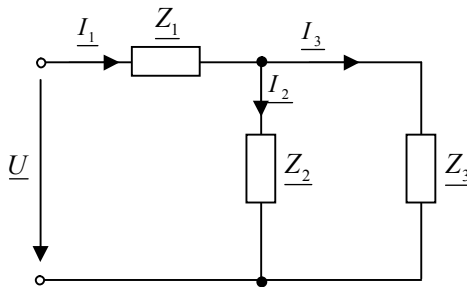


Рис. 3.29

Дано: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$,

$R_k; L_k; C_k$. (рис. 3.28).

Визначити: $i_1; i_2; i_3, P, Q, S$.

Рішення:

1. Перейдемо до розрахункової схеми з комплексними параметрами (рис. 3.29), для чого визначимо комплексні опори гілок:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_1 = R - j \frac{1}{\omega C_1};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2;$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = R_3 + j(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3});$$

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u}.$$

2. Визначимо еквівалентний комплексний опір кола:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

$$\underline{Z}_{ек} = \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_1; (\underline{Z}_{ек} = R_{ек} + jX_{ек}).$$

3. Визначимо комплексні струми:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ек}} = I_1 e^{j\psi_{i1}}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = I_2 e^{j\psi_{i2}}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = I_3 e^{j\psi_{i3}}.$$

Перевірка: $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$.

4. Запишемо дійсні миттєві струми:

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_{i1}); \quad i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_{i2}); \quad i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_{i3}).$$

5. Визначимо комплексні потужності джерела та приймачів:

$$\underline{S}_d = \underline{U} \underline{I}_1^* = U e^{j\psi_u} I_1 e^{-j\psi_i} = UI_1 e^{j\varphi} = UI_1 \cos \varphi + jUI_1 \sin \varphi = P_d + jQ_d;$$

$$\underline{S}_n = \underline{Z}_{ек} I_1^2 = (R_{ек} + jX_{ек}) I_1^2 = R_{ек} I_1^2 + jX_{ек} I_1^2 = P_n + jQ_n;$$

$$P_n = R_{ек} I_1^2; \quad Q_n = X_{ек} I_1^2; \quad S_d = UI_1 = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

6. Перевіримо баланс потужностей:

$$\underline{S}_d = \underline{S}_n; \quad \underline{U} \underline{I}_1 = \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_3^2.$$

3.20.2. Складні електричні кола

Розрахунок складних кіл синусоїдного струму символічним методом виконується аналогічно розрахунку електричних кіл постійного струму, тобто за допомогою тих самих методів, але всі величини представлені в комплексній формі.

Нехай задано складне електричне коло синусоїдного струму (рис.3.30).

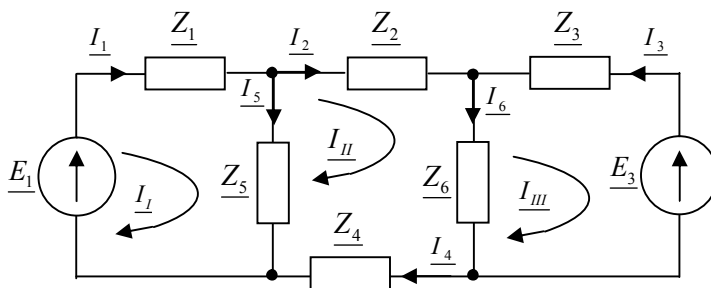


Рис. 3.30

Дано: $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{Z}_k$.

Визначити: $\underline{I}_k, \underline{U}_k, P, Q, S$.

Рішення:

1. Виконаємо розрахунок методом контурних струмів, для цього визначимо незалежні контури та задамося в них напрямками контурних струмів.

Число незалежних

контурів: $n = p - (q - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$.

2. Складемо систему контурних рівнянь:

$$\begin{aligned} \underline{I}_I (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_5) - \underline{I}_{II} \underline{Z}_5 &= \underline{E}_1, \\ -\underline{I}_I \underline{Z}_5 + \underline{I}_{II} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) - \underline{I}_{III} \underline{Z}_6 &= 0, \\ -\underline{I}_{II} \underline{Z}_6 + \underline{I}_{III} (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6) &= -\underline{E}_3. \end{aligned}$$

Розрахувавши систему, визначимо комплексні контурні струми $\underline{I}_I, \underline{I}_{II}, \underline{I}_{III}$.

3. Задамо напрямки дійсних струмів в гілках і визначимо їх комплексні значення:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{II}; \quad \underline{I}_3 = -\underline{I}_{III}; \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_{II}; \quad \underline{I}_5 = \underline{I}_I - \underline{I}_{II}; \quad \underline{I}_6 = \underline{I}_{II} - \underline{I}_{III}.$$

4. За комплексними струмами визначаємо дійсні струми в гілках.

5. Визначимо комплексні падіння напруги на ділянках електричного кола $\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k$, а за їх значеннями визначимо дійсні падіння напруги.

6. Визначимо потужності джерел та приймачів:

$$\underline{S}_d = \sum \underline{E}_k \underline{I}_k^* = P_d + jQ_d; \quad S_d = \sqrt{P_d^2 + Q_d^2}$$

$$\underline{S}_n = \sum \underline{I}_k^2 \underline{Z}_k.$$

7. Перевірка за балансом потужностей: $\underline{S}_d = \underline{S}_n$.

3.21. Топографічна діаграма

Топографічна діаграма – це векторна діаграма напруг кола змінного струму, в якій напруги на всіх елементах контуру побудовані в послідовності розміщення елементів в контурі, тому кожній точці на топографічній діаграмі відповідає визначена точка електричного кола.

Топографічна діаграма будується за результатами розрахунку кола символьним методом і дозволяє:

- визначити графічно як величину, так і початкову фазу напруги між будь-якими точками електричного кола;
- перевірити правильність розрахунку електричного кола (для кожного контуру векторна діаграма напруг повинна бути замкнута);
- детальніше вивчити фізичні процеси в колі.

За початок відліку на топографічній діаграмі вибирають довільну точку вихідного електричного кола і приймають потенціал її рівним нулю, тобто сумішають її з початком координат комплексної площини.

Послідовність побудови топографічної діаграми розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад № 1. Побудувати топографічну діаграму для кола рис. 3.31,а,

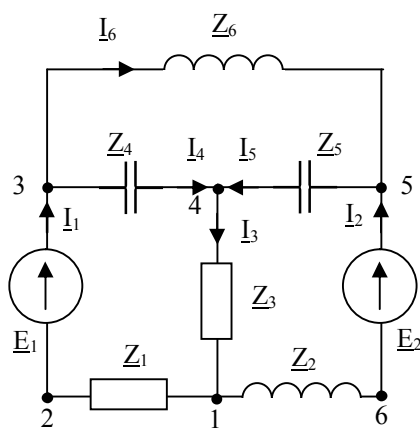


Рис. 3.31,а

якщо $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = j150 \text{ В}$, $Z_1 = 40 \text{ Ом}$,
 $Z_2 = j20 \text{ Ом}$, $Z_3 = Z_4 = Z_5 = -j10 \text{ Ом}$, $Z_6 = j15 \text{ Ом}$,
 $I_1 = -1,69 + j3,73 \text{ А}$, $I_2 = 4,97 + j5,59 \text{ А}$,
 $I_3 = 3,28 + j9,32 \text{ А}$, $I_4 = 11,63 + j7,43 \text{ А}$,
 $I_5 = -8,35 + j1,89 \text{ А}$, $I_6 = -13,32 - j3,7 \text{ А}$.

Рішення

I спосіб: – з використанням променевої діаграми струмів та діючих напруг на ідеальних елементах кола.

1. Будуємо променеву векторну діаграму струмів – сукупність векторів всіх струмів кола, що виходять з початку координат комплексної площини. Таким чином задаємо напрями струмів у всіх гілках кола (рис. 3.31,б).

2. Задаємося на схемі електричного кола точкою нульового потенціалу, нехай $\underline{U}_1 = 0$, від якої будемо починати побудову топографічної діаграми. Ця точка на топографічній діаграмі відповідає початку координат. Вказуємо напрям обходу контуру, наприклад 1-2-3-4-5-6-1.

3. Для контуру з вибраною початковою точкою складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для векторів напруг на всіх елементах контуру, починаючи від вибраної точки. ЕРС джерел енергії можна замінити спадами напруг на їх затискачах, які рівні їм, але протилежні за напрямом.

$$\bar{U}_{12} - \bar{U}_{23} + \bar{U}_{34} - \bar{U}_{45} + \bar{U}_{56} - \bar{U}_{61} = 0. \quad (1)$$

4. Знаходимо діючі значення напруг:

$$U_{12} = Z_1 I_1; U_{23} = E_1; U_{34} = Z_4 I_4; U_{45} = Z_5 I_5; U_{56} = E_2; U_{61} = Z_2 I_2.$$

4. На комплексній площині з початку координат в вибраному масштабі відкладаємо діючі значення напруг в послідовності розміщення елементів контуру чи за рівнянням (1), орієнтуючи їх відносно напрямів струмів в гілках, зображених на променевій діаграмі. Напруги на резисторах відкладаються за напрямом струму в них, напруги на реактивних елементах – під кутом $\pm 90^\circ$ до струму (L чи C). Наступний вектор напруги будується з кінця попереднього і орієнтується відносно свого струму. Кінець останнього вектора прийде в початок координат. ЕРС чи напруга на ній орієнтуються відносно координатних осей за їх комплексною величиною, записаною в алгебраїчній формі (рис. 3.31,б).

II спосіб: – з використанням комплексних напруг на елементах кола чи гілках кола, записаних в алгебраїчній формі.

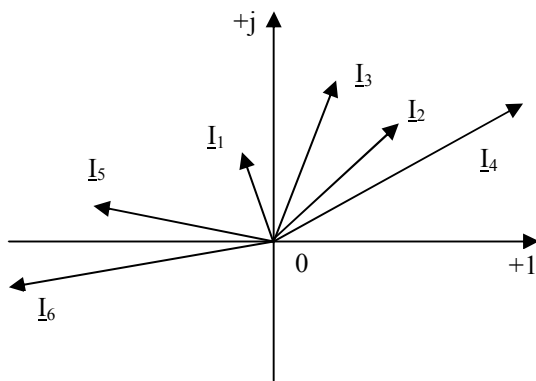


Рис. 3.31,б

$$\frac{M_I}{M_U} = \frac{2A}{20V}$$

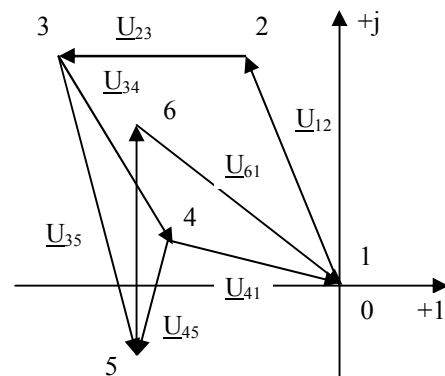


Рис. 3.31,в

1. Як і в першому випадку, приймаємо потенціал однієї із точок кола рівним нулю і вказуємо напрям обходу контуру.

2. Складаємо рівняння для замкнутих контурів за другим законом Кірхгофа для комплексних напруг на пасивних і активних елементах в послідовності їх розміщення, починаючи їх обхід з точки нульового потенціалу. При цьому напруги на пасивних елементах кола, напрям обходу яких співпадає з напрямом струму в них, беруться з додатним знаком і навпаки. Напруги на джерелах ЕРС беруться додатними при їх зустрічному обході і навпаки. Наприклад, для контуру 1-2-3-4-5-6-1:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{23} + \underline{U}_{34} - \underline{U}_{45} + \underline{U}_{56} - \underline{U}_{61} = 0. \quad (2)$$

3. Знаходимо комплексні напруги на всіх елементах контуру і записуємо їх в алгебраїчній формі (напрямок напруг врахований в рівнянні (2)):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = 40 (-1,69 + j3,73) = -67,6 + j149,2 \text{ В}, \\ \underline{U}_{23} &= \underline{E}_1 = 100 \text{ В}, \\ \underline{U}_{34} &= \underline{Z}_4 \underline{I}_4 = -j10 (11,63 + j7,43) = 74,3 - j116,3 \text{ В}, \\ \underline{U}_{45} &= \underline{Z}_5 \underline{I}_5 = -j10 (-8,35 + j1,89) = 18,9 + j83,5 \text{ В}, \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{56} = E_2 = j150 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{61} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = j20 (4,97 + j5,59) = -111,8 + j99,4 \text{ В}.$$

4. Будуємо на комплексній площині в вибраному масштабі вектори напруг в послідовності розміщення елементів в контурі чи за рівнянням (2). Початок першого вектора напруги суміщаємо з початком координат, а наступний вектор будуємо з кінця попереднього як з початку координат: – по осі дійсних чисел відкладаємо дійсну частину комплексної напруги, а по осі уявних чисел – уявну частину, знайдену координату з'єднуємо з кінцем попереднього вектора і т. д. Кінець останнього вектора прийдеться в початок координат (рис.3.31,в).

III спосіб: – з використанням комплексних потенціалів, знайдених для кожної точки контуру.

1. Приймаємо потенціал однієї із точок електричного кола рівним нулю і вказуємо напрям обходу контуру, наприклад, 1-2-3-4-5-6-1. Нехай $\underline{V}_1 = 0$.

2. Послідовно визначаємо комплексні потенціали точок і записуємо їх в алгебраїчній формі:

$$\underline{V}_1 = 0; \underline{V}_2 = \underline{V}_1 - \underline{U}_{12} = -\underline{U}_{12}, \text{ (знак } \underline{V}_2 \text{ протилежний знаку напруги } \underline{U}_{12}),$$

$$\underline{V}_3 = \underline{V}_2 + \underline{E}_1; \underline{V}_4 = \underline{V}_3 - \underline{U}_{34}; \underline{V}_5 = \underline{V}_4 + \underline{U}_{45}; \underline{V}_6 = \underline{V}_5 - \underline{E}_2.$$

3. Будуємо на комплексній площині в вибраному масштабі точки, що відповідають потенціалам точок схеми електричного кола (як для кінців векторів струмів променевої діаграми).

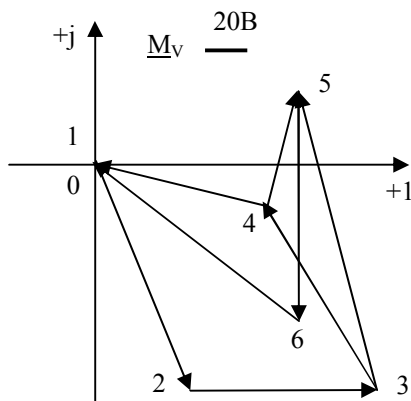


Рис. 3.31,г

4. Знаходимо напруги між окремими точками, для цього достатньо їх з'єднати. Відрізок, що з'єднує точки з різними потенціалами, визначає різницю потенціалів цих точок електричного кола, тобто визначає напругу між цими точками кола. Але на цій діаграмі вектори напруг будуть направлені назустріч додатному напрямку напруг між цими точками на схемі (рис. 3.31,г). Справа в тому,

що напруга направлена за струмом, тобто до вузла, куди тече струм, а потенціал більший того вузла, звідки тече струм, а це протилежні напрями. Тому топографічна діаграма, побудована за потенціалами (рис. 3.31,г), симетрична відносно початку координат до топографічної діаграмі, побудованої за спадами напруг (рис. 3.31,в). Всі інші співвідношення – спади напруг між різними точками схеми, зсув фаз між ними – залишаються незмінними.

3.22. Кругові діаграми

При проектуванні електричних пристроїв, особливо електричних машин, виникає необхідність дослідження режимів роботи при зміні одного

із параметрів схеми заміщення пристрою. При цьому за даними розрахунків будуються графіки зміни деяких електричних величин (I , P , U , Q , $\cos\varphi$ тощо) в залежності від змінного параметру.

При використанні відомих методів розрахунку кіл змінного струму для побудови графіків необхідно багато разів повторити рішення тієї ж задачі, що дуже складно. В таких випадках використовують графічний метод дослідження кіл змінного струму за допомогою кругових діаграм.

3.22.1. Кругова діаграма нерозгалуженого кола з сталим реактивним і змінним активним опором

Обґрунтування методу.

Для електричного кола з послідовним з'єднанням X_L і R (рис. 3.32) за другим законом Кірхгофа маємо:

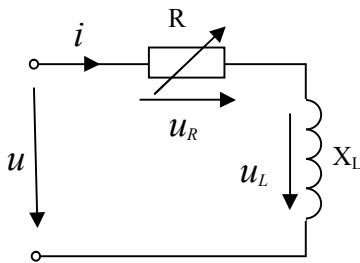


Рис. 3.32

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R\underline{I} + jX_L\underline{I}$$

При незмінній прикладеній напрузі $\underline{U} = \text{const}$ і змінному активному опорі $R = \text{var}$ відповідно буде змінюватися струм \underline{I} в колі і при $R=0$ дорівнюватиме струму короткого замикання

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}}{jX_L}.$$

При $R = \infty$ (розрив кола, холостий хід) $\underline{I} = 0$.

Проміжні значення струму знайдемо, якщо розділимо рівняння напруг на jX_L :

$$\frac{\underline{U}}{jX_L} = \frac{R\underline{I}}{jX_L} + \underline{I}, \quad \text{або} \quad \underline{I}_K = \underline{I} + \left\{ -j \frac{R}{X_L} \underline{I} \right\} = \text{const}.$$

Тобто, сума двох векторів (другий вектор відстає від струму \underline{I} на 90°) є величина стала і рівна струму короткого замикання, що відповідає випадку, коли кінець вектора струму \underline{I} переміщається по колу діаметром \underline{I}_K , яке проходить через початок вектора \underline{I} і кінець вектора $\left\{ -j \frac{R}{X_L} \underline{I} \right\}$.

Побудова кругової діаграми.

Для побудови кругової діаграми необхідно визначити \underline{I}_K , коли $R = 0$, тому він є чисто індуктивним і відстає від \underline{U} на 90° . В масштабі струму відкладаємо $OA \equiv \underline{I}_K$ і перпендикулярно до нього в масштабі напруг $OF \equiv \underline{U}$ (рис.3.33). За напрямом \underline{I}_K в масштабі опору відкладаємо X_L (це може бути той же відрізок OA). З точки A (в цьому випадку) проводимо пряму AR перпендикулярно до \underline{I}_K , на якій в масштабі опору відкладаємо значення R . Наприклад, відклавши $R \equiv AB$ і провівши пряму OB , одержимо трикутник опорів OAB , гіпотенуза якого $OB \equiv Z$. На OA , як на діаметрі, будуюмо напівколо OCA – це є кругова діаграма струму (рис. 3.33). Аналогічно на OF , як на діаметрі, будуюмо кругову діаграму напруг OGF .

дорівнюватиме струму короткого замикання $I_K = \frac{U}{R}$. При $X_L = \infty$ одержимо $I = 0$.

Проміжні значення струму знайдемо, якщо розділимо рівняння напруг на R :

$$\frac{U}{R} = I + \frac{jX_L I}{R}, \quad \text{або} \quad I_K = I + j \frac{X_L}{R} I = \text{const}.$$

Це можливо в колі діаметром I_K , де хорди I та $j \frac{X_L}{R} I$ перетинаються під кутом 90° .

Струм короткого замикання I_K є активним ($X_L = 0$), тому з ним співпадає напруга U .

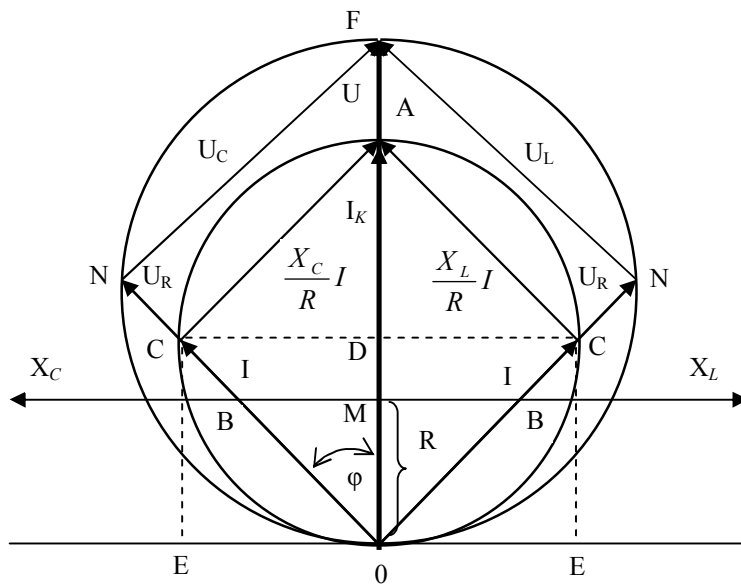


Рис. 3.36

Побудова кругової діаграми.

В одному напрямі (вертикально) відкладаємо в відповідних масштабах I_K , U та R :

$$OA \equiv I_K; OF \equiv U; OM \equiv R.$$

Індуктивний опір X_L відкладаємо в перпендикулярному напрямі від точки M вправо, а ємнісний опір (для кола з R , C (рис. 3.35)) – вліво.

З центру $OA \equiv I_K$ будується кругова

діаграма струму, а з центру $OF \equiv U$ – кругова діаграма напруг.

Визначення параметрів за круговою діаграмою.

Відклавши реактивний опір X_L чи X_C в масштабі опору відрізком MB і провівши пряму OB до перетину з круговою діаграмою струму в точці C , одержимо вектор струму $I \equiv OC$.

На кругових діаграмах: $OC \equiv I$; $ON \equiv U_R$; $OB \equiv Z$ і співпадають за напрямом; $OE \equiv I_p$; $OD \equiv I_a$; $ON \equiv U_R$; $NF \equiv U_L$.

В масштабі потужності $OC \equiv S$; $OD \equiv P$; $OE \equiv Q$.

В масштабі коефіцієнта потужності $ON \equiv \cos \phi$; $OF \equiv \cos \phi = 1$.

3.22.3. Кругова діаграма розгалуженого кола зі змінним активним опором

Побудуємо кругову діаграму для розгалуженого електричного кола, зображеного на рис. 3.37. Тут опори $Z_1 = R_1 + jX_{1L}$, $Z_2 = R_2 + jX_{2L}$ незмінні, а опір резистора R змінюється, при цьому при незмінній напрузі $U = \text{const}$ струм в першій гілці I_1 не змінюється.

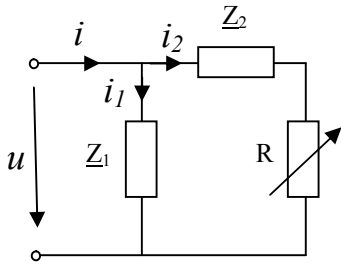


Рис. 3.37

Друга гілка представляє собою нерозгалужену ділянку, для якої побудова кругової діаграми подібна раніше розглянутим випадкам. Особливість кругової діаграми обумовлена наявністю саме першої гілки.

Струм в першій гілці незмінний, тому при холостому ході в другій гілці ($R = \infty$) струм $I_2 = 0$, а загальний струм $I = I_1$. При короткому замиканні в другій гілці ($R = 0$) $I_2 = I_{2K}$, а загальний струм $I_K = I_1 + I_{2K}$.

Отже, при зміні R від ∞ до 0 струм на вході змінюється від I_1 до I_K , при цьому кінець вектора I переміщається по дузі кола з хордою I_{2K} .

Побудова кругової діаграми виконується в такій послідовності (рис. 3.38):

- визначаємо I_1 і I_{2K} ;

- будуємо вектор \underline{U} (вертикальний відрізок $O'F$) і вектор струму I_1 під кутом

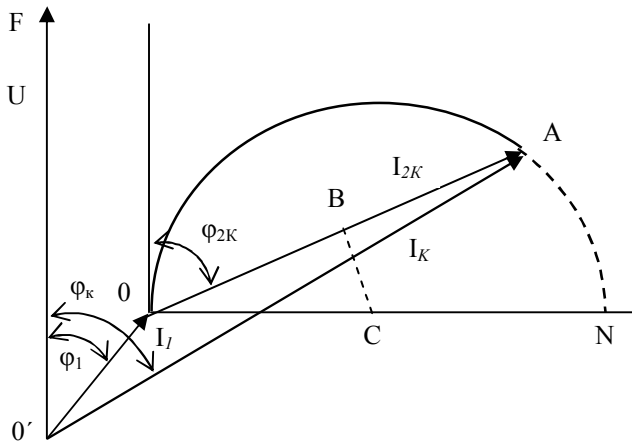


Рис. 3.38

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{1L}}{R_1} \text{ до вектора } \underline{U};$$

- з кінця вектора I_1 проводимо вектор I_{2K} (відрізок OA) під кутом

$$\varphi_{2K} = \arctg \frac{X_{2L}}{R_2} \text{ до вектора } \underline{U};$$

- на відрізку OA , як на хорді, будуємо дугу кола, центр якого C можна визначити, якщо з середини хорди провести перпендикуляр BC до перетину з горизонтальною лінією ON , перпендикулярною до вектора \underline{U} .

Лінія ON є діаметром кола кругової діаграми струму. Відрізок $O'A$ є струмом I_K (при $R = 0$) в масштабі струму.

Приклади розрахунку електричних кіл синусоїдного струму

Задача № 1

Визначити струм в електричному колі (рис. Р3.1,а), активну, реактивну та повну потужності, якщо дано:

$$u = 141 \sin \omega t \text{ В}; \quad R_1 = 20 \text{ Ом}; \quad R_2 = 10 \text{ Ом}; \quad L_1 = 15,9 \text{ Гн}; \quad C_1 = 13,3 \text{ мкФ}; \\ X_{L2} = 10 \text{ Ом}; \quad X_{C2} = 60 \text{ Ом}; \quad f = 400 \text{ Гн}.$$

Зобразити векторну діаграму напруг кола, трикутники напруг, опорів та потужностей.

Розв'язання

1. Визначимо опори ділянок кола та повний комплексний опір всього кола.

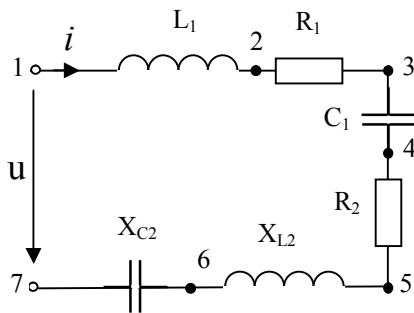


Рис. Р3.1,а

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 400 = 2512 \text{ с}^{-1};$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2512 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{10^6}{2512 \cdot 13,3} = 30 \text{ Ом};$$

$$R_e = R_1 + R_2 = 20 + 10 = 30 \text{ Ом};$$

$$X_e = X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2} = 40 + 10 - 30 - 60 = -40 \text{ Ом};$$

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{30^2 + (-40)^2} = 50 \text{ Ом}.$$

2. Визначимо діючий та миттєвий струми кола:

$$I = \frac{U}{Z_e}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}; \quad I = \frac{100}{50} = 2 \text{ А};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \left(-\frac{40}{30} \right) = -53^\circ 10';$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i;$$

$$\text{звідси} \quad \psi_i = \psi_u - \varphi = 53^\circ 10'; \quad i = 2\sqrt{2} \sin(2512t + 53^\circ 10') \text{ А}.$$

3. Визначимо потужності:

$$P = R_e I^2 = 30 \cdot 2^2 = 120 \text{ Вт}; \quad Q = X_e \cdot I^2 = -40 \cdot 2^2 = -160 \text{ вар}, \quad S = UI = 100 \cdot 2 = 200 \text{ ВА},$$

або

$$S = Z_e I^2 = 50 \cdot 2^2 = 200 \text{ ВА}.$$

4. Для побудови векторної діаграми напруг кола визначимо напруги на елементах кола:

$$U_{12} = X_{L1} I = 40 \cdot 2 = 80 \text{ В};$$

$$U_{23} = R_1 I = 20 \cdot 2 = 40 \text{ В};$$

$$U_{34} = X_{C1} I = 30 \cdot 2 = 60 \text{ В};$$

$$U_{45} = R_2 I = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В};$$

$$U_{56} = X_{L2} I = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В};$$

$$U_{67} = X_{C2} I = 60 \cdot 2 = 120 \text{ В}.$$

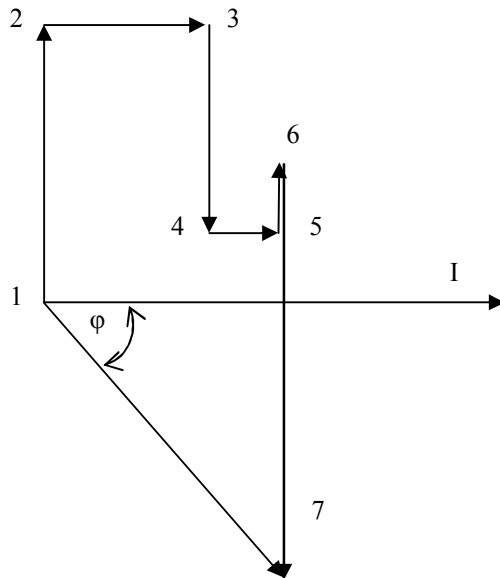


Рис. Р3.1,б

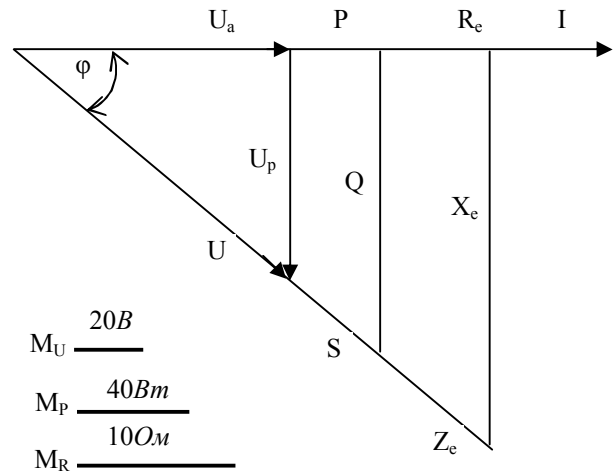


Рис. Р3.1,в

5. За результатами розрахунку креслимо векторну діаграму напруг (рис. Р3.1,б) та трикутники напруг, опорів і потужностей (рис. Р3.1,в).

Примітка: Трикутник напруг отримуємо шляхом проекції вектора U на напрямок вектора I . Трикутники опорів та потужностей подібні трикутнику напруг.

Задача № 2

Визначити коефіцієнт потужності кола (рис. Р3.2), активний опір котушки R_k та її індуктивність L , якщо прилади показали:

$$U_1 = 200 \text{ В} ; U_2 = 100 \text{ В} ; I = 2 \text{ А} ; P = 320 \text{ Вт} ; f = 50 \text{ Гц}.$$

Розв'язання:

1. Визначимо повний опір кола:

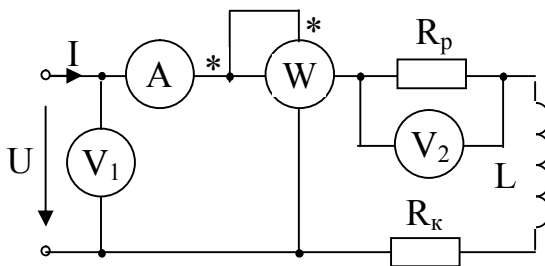


Рис. Р3.2

$$Z_e = \frac{U_1}{I} = \frac{200}{2} = 100 \text{ Ом}.$$

2. Визначимо еквівалентний активний опір кола:

$$R_e = \frac{P}{I^2} = \frac{320}{2^2} = 80 \text{ Ом}.$$

3. Визначимо опір реостата:

$$R_p = \frac{U_2}{I} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Ом}.$$

4. Розрахуємо активний опір

катушки:

$$R_k = R_e - R_p = 80 - 50 = 30 \text{ Ом}.$$

5. Знайдемо індуктивний опір кола:

$$X_L = \sqrt{Z_e^2 - R_p^2} = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60 \text{ Ом}.$$

6. Знайдемо індуктивність котушки:

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{60}{2\pi 50} = 0,19 \text{ Гн}.$$

7. Визначимо коефіцієнт потужності кола:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI} = \frac{320}{200 \cdot 2} = 0,8, \quad \text{або} \quad \cos \varphi = \frac{R_e}{Z_e} = \frac{80}{100} = 0,8.$$

Задача № 3

Визначити струми в гілках та в нерозгалуженій ділянці кола (рис. Р3.3,а), якщо $U = 100 \text{ В}$, $R_1 = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $X_L = 8 \text{ Ом}$, $X_C = 50 \text{ Ом}$. Розрахувати потужності P , Q та S .

Накреслити векторну діаграму струмів, трикутники струмів, провідностей та потужностей.

Рішення

А. Метод векторних діаграм

1. Визначимо струм в паралельних гілках:

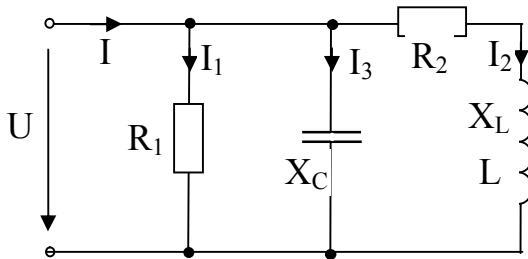


Рис. Р3.3,а

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{50} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = \frac{100}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 10 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U}{X_C} = \frac{100}{50} = 2 \text{ А}.$$

2. Креслимо векторну діаграму струмів (рис. Р3.3,б), для чого знаходимо активну та реактивну складові струму в гілці з котушкою:

$$I_{2a} = I_2 \cos \varphi_2 = I_2 \frac{R_2}{Z_2} = 10 \cdot \frac{6}{10} = 6 \text{ А}, \quad I_{2p} = I_2 \sin \varphi_2 = I_2 \frac{X_L}{Z_2} = 8 \text{ А}.$$

3. Знаходимо струм в нерозгалуженій ділянці кола. На підставі діаграми:

$$I = \sqrt{(I_1 + I_{2a})^2 + (I_{2p} - I_3)^2} = \sqrt{(2 + 6)^2 + (8 - 2)^2} = 10 \text{ А},$$

$$\varphi = \arctg \frac{I_{2p}}{I_a} = \arctg \frac{6}{8} = 36^\circ 50'; \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 36^\circ 50') \text{ А}.$$

Б. Метод еквівалентних опорів і провідностей

1. Для визначення струму на вході кола розрахуємо провідності гілок і всього кола:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ См};$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{6}{6^2 + 8^2} = 0,06 \text{ См};$$

$$B_L = \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{6}{6^2 + 8^2} = 0,08 \text{ См};$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ См};$$

$$G_e = G_1 + G_2 = 0,08 \text{ См};$$

$$B_e = B_L - B_C = 0,06 \text{ См};$$

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = 0,1 \text{ См}.$$

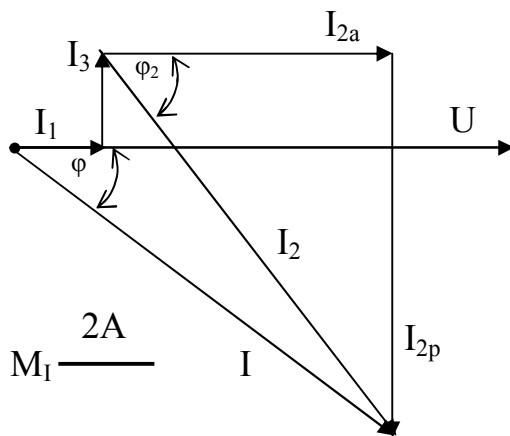


Рис. Р3.3,б

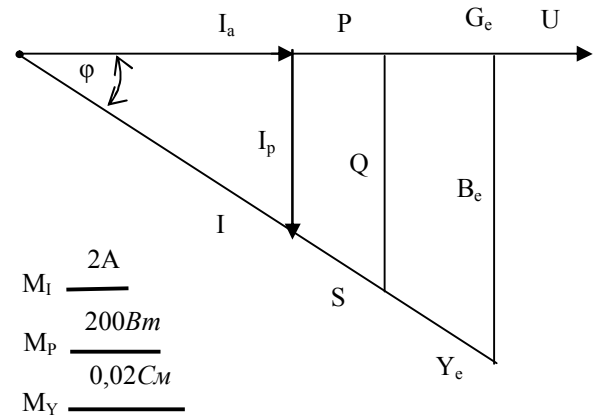


Рис. Р3.3,в

2. Визначимо струм в нерозгалуженій ділянці кола за законом Ома:

$$I = Y_e \cdot U = 0,1 \cdot 100 = 10 \text{ А}, \quad \varphi = \arctg \frac{B_e}{G_e} = \arctg \frac{0,06}{0,08} = 36^\circ 50'; \quad \psi_i = \psi_u - \varphi;$$

$$i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ 50') \text{ А}.$$

3. Знаходимо потужності:

$$P = U^2 G_e = 100^2 \cdot 0,08 = 800 \text{ Вт}; \quad Q = U^2 B_e = 100^2 \cdot 0,06 = 600 \text{ вар};$$

$$S = UI = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ ВА}.$$

4. Креслимо трикутники струмів, провідностей та потужностей (рис. Р3.3,в).

Задача № 4

До синусоїдного кола (рис. Р3.4,а) прикладена синусоїдна напруга $\underline{u} = 100\sqrt{2} \sin 2500 t$ В. Параметри елементів кола : $R_1 = 6$ Ом; $L_1 = 0,8$ мГн; $R_2 = 1$ Ом; $L_2 = 1,2$ мГн; $C = 40$ мкФ.

Символічним методом розрахувати струми в гілках, напруги на ділянках кола, а також реактивну та повну потужність. Накреслити векторну діаграму струмів і топографічну діаграму.

Розв'язання

1. Відповідно позитивному напрямку прикладеної напруги обираємо позитивні напрямки струмів в гілках.

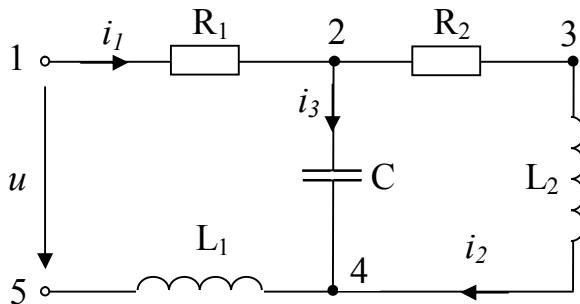


Рис. Р3.4,а

2. Розраховуємо опори елементів кола:

$$x_1 = \omega L_1 = 2500 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ Ом},$$

$$x_2 = \omega L_2 = 2500 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 3 \text{ Ом},$$

$$x_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2500 \cdot 40} = 10 \text{ Ом}.$$

3. Перейдемо до розрахункової схеми з комплексними параметрами.

Запишемо вирази для комплексної напруги на клеммах кола та комплексних опорів гілок.

Резистор R_1 та котушка L_1 включені послідовно, а тому вважаємо, що вони складають одну гілку з опором \underline{Z}_1 . таким чином:

$$\underline{U} = 100\text{В}; \quad \underline{Z}_1 = R_1 + jx_1 = (6 + j2) \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jx_2 = (1 + j3) \text{ Ом} \quad \underline{Z}_3 = jx_3 = -j10 \text{ Ом}$$

4. Розраховуємо еквівалентний комплексний опір паралельних гілок та всього кола:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(1 + j3)(-j10)}{1 + j3 - j10} = \frac{10(3 - j)(1 + j7)}{(1 - j7)(1 + j7)} =$$

$$= \frac{10(3 - j + j21 + 7)}{50} = \frac{10 + j20}{5} = (2 + j4) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 6 + j2 + 2 + j4 = 8 + j6 = 10 e^{j36^\circ 50'} \text{ Ом}.$$

Визначаємо струми в гілках кола:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{100}{8 + j6} = 8 - j6 = 10^{-j36^\circ 50'} \text{ А};$$

отже $\underline{I}_1 = 10 \text{ А}; \quad \psi_{i_1} = -36^\circ 50'.$

По правилу чужої гілки знаходимо:

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(8-j6)(-j10)}{1+j3-j10} = \frac{10(-6-j8)}{(1-j7)} = \frac{10(-6-j8)(1+j7)}{50} = \\ &= \frac{-6-j8-j42+56}{5} = \frac{5-j50}{5} = (10-j10) = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ A};\end{aligned}$$

отже: $I_2 = 14,1 \text{ A}$; $\psi_{i_2} = -45^\circ$;

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(8-j6)(1+j3)}{1-j7} = \frac{(8-j6+j24+18)(1+j7)}{50} = \frac{26+j18+j182-126}{50} = \\ &= -2+j4 = 4,48e^{-j63^\circ 50'} = 4,48e^{j116^\circ 30'} \text{ A};\end{aligned}$$

отже: $I_3 = 4,48 \text{ A}$; $\psi_{i_2} = -116^\circ 30'$.

5. Перевіримо за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \quad 8-j6-10+j10+2-j4=0;$$

6. Розрахуємо потужність:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I} = 100(8+j6) = (800+j600) \text{ VA};$$

Отже: $P=800 \text{ Вт}$; $Q=600 \text{ вар}$; $S=1000 \text{ ВА}$.

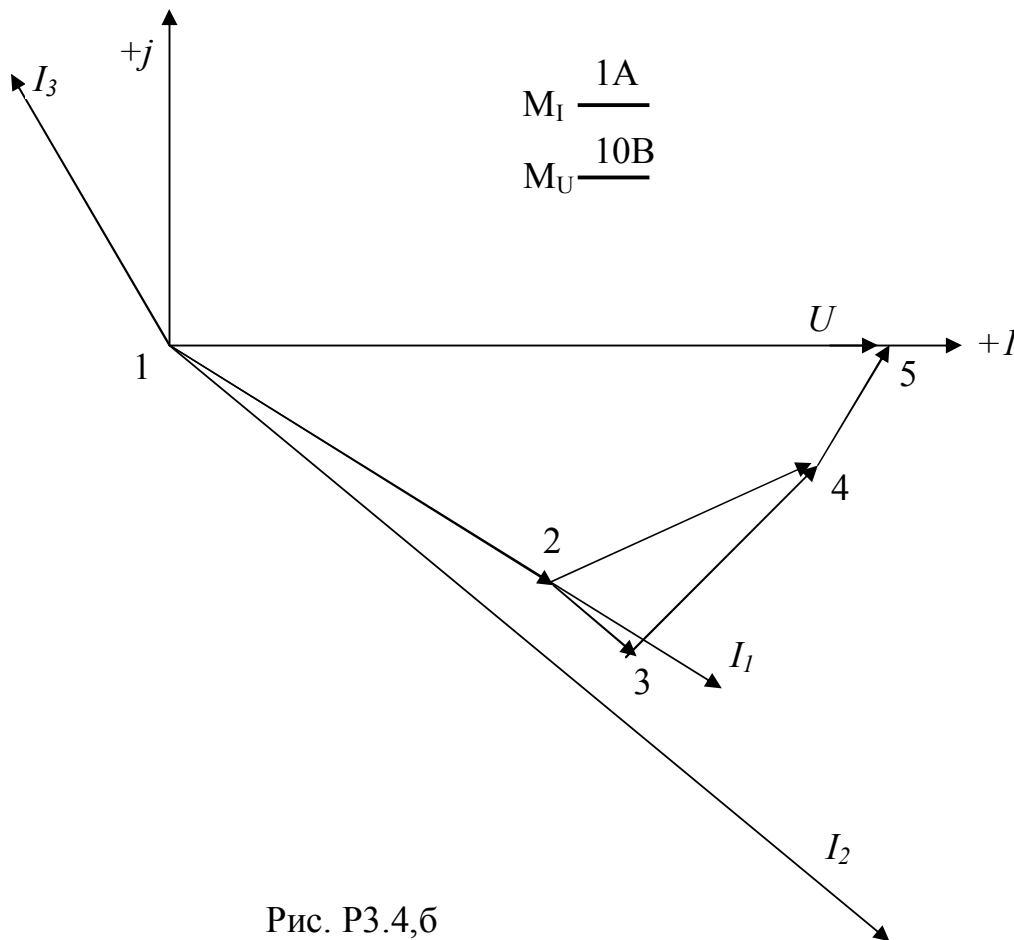


Рис. Р3.4,б

7. Для зображення топографічної діаграми розрахуємо напруги на ділянках кола:

$$\underline{U}_{12} = R_1 \underline{I}_1 = 6(8 - j6) = (48 - j36)B;$$

$$\underline{U}_{23} = R_2 \underline{I}_2 = 1(10 - j10) = (10 - j10)B;$$

$$\underline{U}_{34} = jx_2 \underline{I}_2 = j3(10 - j10) = (30 + j30)B;$$

$$\underline{U}_{45} = jx_1 \underline{I}_1 = j2(8 - j6) = (12 + j16)B;$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа:

$$\sum \underline{U}_k = 0; \quad 48 - j36 + 10 - j10 + 30 + j30 + 12 + j16 - 10 = 0;$$

Креслимо векторну діаграму струмів та топографічну діаграму (рис. Р3.4,б), для чого скористаємося алгебраїчною формою запису комплексних напруг.

Задача №5

До джерела синусоїдного струму $J=4A$, внутрішня провідність якого дорівнює $\underline{Y}_e = (0,1 + j0,2)Cm$, підключені дві паралельні гілки з опорами $\underline{Z}_1 = (1 - j3)Om$ та $\underline{Z}_2 = j10Om$ (рис. Р3.5).

Визначити струм в гілках та потужність джерела струму.

Розв'язання

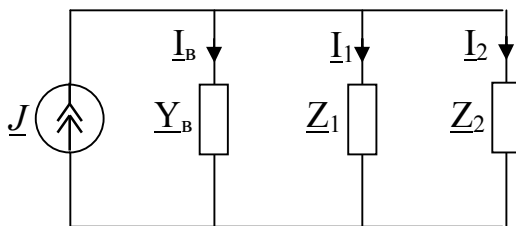


Рис. Р3.5

1. Визначимо комплексні провідності паралельних гілок і всього кола:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{1 - j3} = \frac{1 + j3}{1 + 3^2} = (0,1 + j0,3)Cm;$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{j10} = -j0,1 Cm;$$

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_e + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 0,1 - j0,2 + 0,1 + j0,3 - j0,1 = 0,2 Cm;$$

2. Розрахуємо напругу на паралельних гілках (на клеммах джерела струму):

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}} = \frac{4}{0,2} = 20B.$$

3. Знайдемо струми в гілках:

$$\underline{I}_e = \underline{U} \underline{Y}_e = 20(0,1 - j0,2) = (2 - j4) A;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \underline{Y}_1 = 20(0,1 + j0,3) = (2 + j6) A;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U} \underline{Y}_2 = 20(-j0,1) = -j2 A.$$

Перевірка: $\underline{I}_e + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}; \quad 2 - j4 + 2 + j6 - j2 = 4; \quad 4=4.$

4. Визначаємо потужність джерела:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I} = 20 \cdot 4 = 80Vm;$$

Задача № 6

Розрахувати струми електричного кола, приведенного на рис. Р3.6, якщо $e_1 = 50\sqrt{2} \sin \omega t, B$; $e_2 = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 90), B$; $\underline{Z}_3 = 15 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_4 = j25 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_5 = (5 + j5) \text{ Ом}$; $\underline{Z}_6 = -j10 \text{ Ом}$.

Перевірити розрахунок за балансом потужностей. Накреслити топографічну діаграму.

Розв'язання

1. Для вибору методу розрахунку визначаємо число гілок, вузлів та незалежних контурів:

$$p=6; q=4; n=p-(q-1)=3.$$

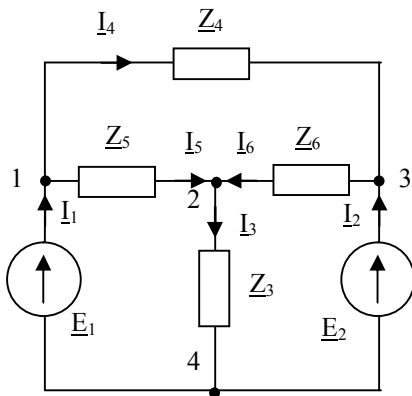


Рис. Р3.6,а

Отже, для розрахунку кола методом контурних струмів треба скласти і розв'язати систему трьох рівнянь.

Так як коло має дві гілки з ідеальними джерелами ЕРС, число рівнянь за методом вузлових потенціалів можна скоротити. Так, якщо прийняти потенціал вузла 4 рівним нулю, то потенціали вузлів 1 та 3 відповідно дорівнюють: $\underline{V}_1 = \underline{E}_1$; $\underline{V}_3 = \underline{E}_2$.

Таким чином, залишається невідомим тільки потенціал вузла 2 і для його визначення досить розв'язати одне рівняння. А тому обираємо метод вузлових потенціалів.

2. Приймаємо $\underline{V}_4 = 0$ і складаємо рівняння для визначення \underline{V}_2 :

$$\underline{V}_2 \left(\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_5} + \frac{1}{\underline{Z}_6} \right) - \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_5} - \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_6} = 0;$$

$$\underline{V}_1 = \underline{E}_1 = 50 \text{ В};$$

$$\underline{V}_3 = \underline{E}_2 = 50e^{j90^\circ} = j50 \text{ В};$$

3. Підставляємо в рівняння відомі величини:

$$\underline{V}_2 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{5 + j5} + \frac{1}{-j10} \right) = \frac{50}{5 + j5} + \frac{50j}{-j10};$$

$$\underline{V}_2 \frac{j2(1 + j) + j6 - 3(1 + j)}{j30(1 + j)} = \frac{10}{1 + j} - 5;$$

$$\underline{V}_2 \frac{j2 - 2 + j6 - 3 - j3}{j30(1 + j)} = \frac{10 - j10}{2} - 5;$$

$$\underline{V}_2 \frac{-5 + j5}{j30(1 + j)} = 5 - j5 - 5;$$

$$\underline{V}_2 = \frac{(-j5) j30(1 + j)}{-5(1 - j)} = \frac{-30(1 + j2 - 1)}{2} = -j30 \text{ В.}$$

4. Обираємо позитивні напрямки струмів в гілках і за законом Ома визначаємо величини цих струмів:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{-j30}{15} = -j2 \text{ А};$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_3}{\underline{Z}_4} = \frac{50 - j50}{j25} = \frac{(2 - j2)(-j)}{1} = (-2 - j2) \text{ А};$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{\underline{Z}_5} = \frac{50 + j30}{5 + j5} = \frac{(10 + j6)(1 - j)}{2} = 5 + j3 - j5 + 3 = (8 - j2) \text{ А};$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{V}_3 - \underline{V}_2}{\underline{Z}_6} = \frac{j50 + j30}{-j10} = -8 \text{ А.}$$

5. Струми в гілках з джерелами ЕРС визначимо за I-м законом Кірхгофа.

$$\text{Для вузла 1: } \underline{I}_1 = \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = -2 - j2 + 8 - j2 = (6 - j4) \text{ А};$$

$$\text{Для вузла 3: } \underline{I}_2 = \underline{I}_6 + \underline{I}_4 = -8 + 2 + j2 = (-6 + j2) \text{ А};$$

6. Перевіримо за балансом потужностей:

$$\sum S_{\text{кдж}} = \sum S_{\text{ксп}};$$

$$\sum S_{\text{кдж}} = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = 50(6 + j4) + j50(-6 - j2) =$$

$$= 300 + j200 + 100 - j300 = (400 - j100) \text{ ВА.}$$

$$\sum S_{\text{ксп}} = \sum \underline{Z}_k \underline{I}_k^2 = 15 \cdot 2^2 + j25(2^2 + 2^2) + (5 + j5)(8^2 + 2^2) + (-j10) \cdot 8^2 =$$

$$= 60 + j200 + 340 + j340 - j640 = (400 - j100) \text{ ВА.}$$

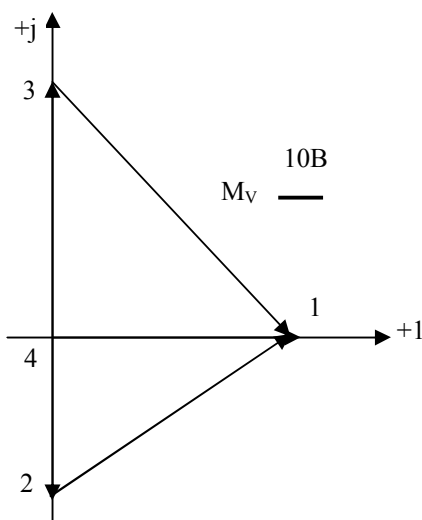


Рис. Р3.6,б

Баланс потужностей втримується, що свідчить про правильність розрахунку.

7. Креслимо типографічну діаграму (рис. Р3.6,б). Для цього на комплексній площині наносимо точки, які відповідають потенціалам вузлів, і з'єднуємо їх між собою.

$$\underline{U}_{34} = \underline{V}_3 - \underline{V}_4 = \underline{V}_3;$$

$$\underline{U}_{14} = \underline{V}_1 - \underline{V}_4 = \underline{V}_1;$$

$$\text{а } \underline{U}_{41} = \underline{V}_4 - \underline{V}_1 = -\underline{V}_1.$$

Задача № 7

В схемі (рис. РЗ.6,а) визначити струм \underline{I}_3 методом еквівалентного генератора.

Розв'язання

1. Струм \underline{I}_3 визначаємо за формулою:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_3}.$$

2. Накреслимо розрахункову схему для визначення напруги холостого ходу третьої гілки \underline{U}_x (рис. РЗ.7,а).

3. Для першого контуру за II законом Кірхгофа маємо:

$$\underline{Z}_5 \underline{I} + \underline{U}_x = \underline{E}_1, \quad \underline{U}_x = \underline{E}_1 - \underline{Z}_5 \underline{I},$$

де

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_1 - \underline{E}_2}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6} = \frac{50 - j50}{5 + j5 - j10} = \frac{50(1 - j)}{5(1 - j)} = 10 \text{ A},$$

тоді $\underline{U}_x = \underline{E}_1 - \underline{Z}_5 \underline{I} = 50 - (5 + j5)10 = -j50 \text{ B}.$

4. Накреслимо схему пасивного двополюсника (рис. РЗ.7,б) і визначимо його вхідний опір:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_5 \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6} = \frac{(5 + j5)(-j10)}{5 + j5 - j10} = \frac{10 \cdot 5(1 - j)}{5(1 - j)} = 10 \text{ Ом}.$$

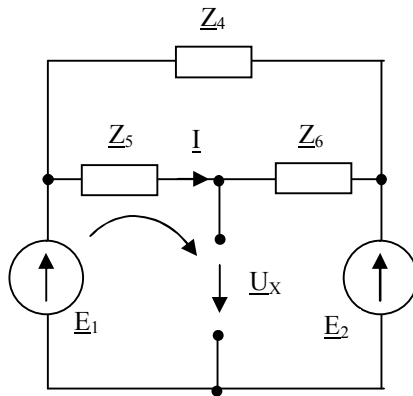


Рис. РЗ.7,а

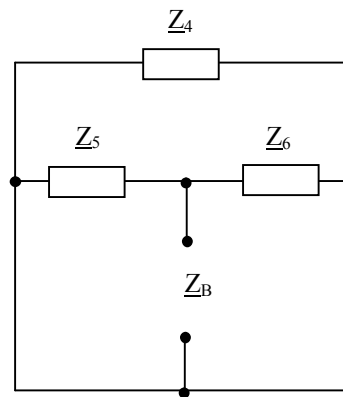


Рис. РЗ.7,б

5. Визначаємо струм:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_3} = \frac{-j50}{10 + 15} = -j2 \text{ A}.$$

Для струму \underline{I}_3 отримали те ж значення, що і при розрахунку методом вузлових потенціалів.

Тема 4. Резонансні явища в електричних колах

Вступ

В колах змінного струму, що містять індуктивні котушки та конденсатори, можливі випадки, коли їх еквівалентний реактивний опір або еквівалентна реактивна провідність дорівнюють нулю, тобто $X = X_L - X_C = 0$ або $B = B_L - B_C = 0$.

Струм та напруга у цьому випадку співпадають за фазою, а коло носить активний характер. Таке явище називається резонансом.

Резонанс – це такий стан електричного кола, яке містить котушки індуктивності та конденсатори, при якому зсув фаз між напругою та струмом дорівнює нулю $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Розрізняють два види резонансу:

резонанс напруг, що виникає в колах з послідовним з'єднанням R, L, C ;

резонанс струмів, що виникає в колах з паралельним з'єднанням R, L, C .

Резонансні явища знаходять широке застосування в авіаційному обладнанні літальних апаратів:

в схемах автоматичного регулювання частоти перетворювачів постійного струму в змінний;

в блоках підвищення та пониження частоти;

в коректорах частоти приводів постійної частоти обертання.

Дослідити резонансні явища в електричному колі означає:

визначити кутову частоту, при якій в колі настає резонанс;

визначити залежність струму в колі, або напруги на його ділянці від частоти, індуктивності або ємності;

розглянути енергетичні процеси при резонансі.

4.1. Резонанс напруг

Розглянемо коло з послідовним з'єднанням R, L, C (рис. 4.1).

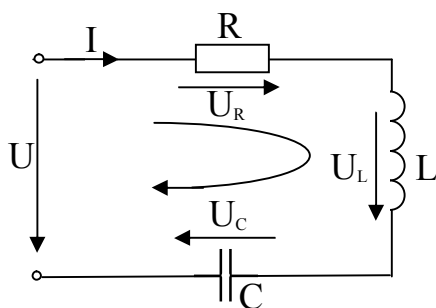


Рис. 4.1

До кола прикладемо синусоїдну напругу: $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$.

Нехай в даному колі індуктивний опір дорівнює ємнісному, тобто $X_L = X_C$, тоді реактивний опір кола буде дорівнювати: $X = X_L - X_C = 0$,

а повний опір $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$, тобто повний опір дорівнює активному опору.

В цьому випадку струм в колі досягне максимального значення, а напруга на індуктивній котушці $U_L = X_L \cdot I$ та конденсаторі $U_C = X_C \cdot I$ за умови, що $X_L = X_C \gg R$, значно перевищує напругу, прикладену до кола.

Тому резонанс в колі з послідовним з'єднанням R, L, C одержав назву резонансу напруг.

Резонанс напруг – це явище резонансу на ділянці електричного кола, що містить послідовне з'єднання котушок індуктивності та конденсаторів.

Побудуємо векторну діаграму для випадку резонансу напруг (рис. 4.2)

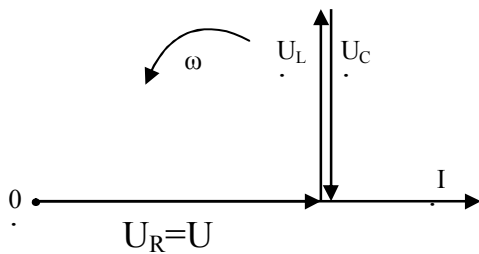


Рис. 4.2

$$\bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \bar{U}.$$

Отже, при резонансі напруг, напруга на активному опорі дорівнює напрузі, прикладеній до кола:

$$U_R = I \cdot R = U.$$

З діаграми також бачимо, що струм співпадає за фазою з напругою. Таким чином, резонанс напруг в колі з послідовним з'єднанням R, L, C настане при умові:

$$X_L = X_C \quad \text{або} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \omega^2 LC = 1.$$

З останнього виразу бачимо, що резонансу можна досягнути змінюючи L, C або ω .

При $L=\text{const}; C=\text{const}$ резонанс настає при кутовій частоті, що дорівнює:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{частота особистих коливань контуру.}$$

При $L=\text{const}; \omega=\text{const}$ резонанс наступить при ємності:

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

При $C=\text{const}; \omega=\text{const}$ резонанс наступить при індуктивності:

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}.$$

Напруги на індуктивній котушці та на конденсаторі при резонансі будуть дорівнювати:

$$U_{L0} = \omega_0 L \cdot I = \frac{1}{\sqrt{LC}} L \cdot I = I \sqrt{\frac{L}{C}} = I \cdot \rho;$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot I = \frac{\sqrt{LC}}{C} \cdot I = I \sqrt{\frac{L}{C}} = I \cdot \rho,$$

де $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – хвильовий опір контуру:

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ [Ом]}.$$

Реактивна потужність при резонансі дорівнює нулю:

$$Q = I^2 (X_L - X_C) = 0, \quad \text{так як } X_L = X_C,$$

тоді повна потужність дорівнює активній:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P,$$

а коефіцієнт потужності дорівнює одиниці:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} = 1.$$

4.2 Добротність та згасання контуру

Відношення напруги на котушці індуктивності або конденсаторі до напруги на затискачах кола при резонансі називається добротністю контуру:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{\omega_0 LI}{RI} = \frac{\rho}{R}.$$

В технічних пристроях $Q=5\dots 5000$.

Добротність контуру показує в скільки разів при резонансі напруга на індуктивній котушці або на конденсаторі більше, ніж напруга, прикладена до кола.

Добротність резонансного контуру тим більша, чим менший активний опір контуру.

Величина, обернена добротності, називається затуханням резонансного контуру:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}.$$

4.3 Частотні характеристики кола з послідовним з'єднанням R, L, C

Частотні характеристики – це залежності величин X, X_L, X_C, Z та φ від частоти прикладеної напруги. При цьому $\omega=0\dots\infty$.

Зобразимо вказані залежності (рис. 4.3):

1. $X_L = \omega L$ – лінійна залежність; $X_L(0) = 0$; $X_L(\infty) = \infty$.
2. $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – гіпербола; $X_C(0) = \infty$; $X_C(\infty) = 0$.
3. $X = X_L - X_C$; $X(0) = -\infty$; $X(\omega_0) = 0$; $X(\infty) = \infty$.
4. $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – парабола; $Z(0) = \infty$; $Z(\omega_0) = R$; $Z(\infty) = \infty$.
5. $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$; $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$; $\varphi(\omega_0) = 0$; $\varphi(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

При $\omega < \omega_0$ – ємнісний характер кола;

при $\omega = \omega_0$ – активний характер кола;

при $\omega > \omega_0$ – індуктивний характер кола.

Резонансні характеристики – це залежності U_L, U_C, I від частоти прикладеної напруги ω (або від значень L та C).

Побудуємо резонансні характеристики в залежності від частоти (рис. 4.4). Нехай $\omega=0\dots\infty$.

$$1. I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad I(0) = 0; \quad I(\omega_0) = \frac{U}{R}; \quad I(\infty) = 0.$$

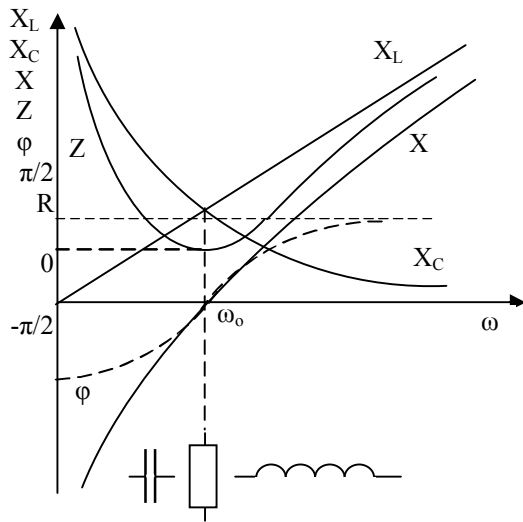


Рис. 4.3

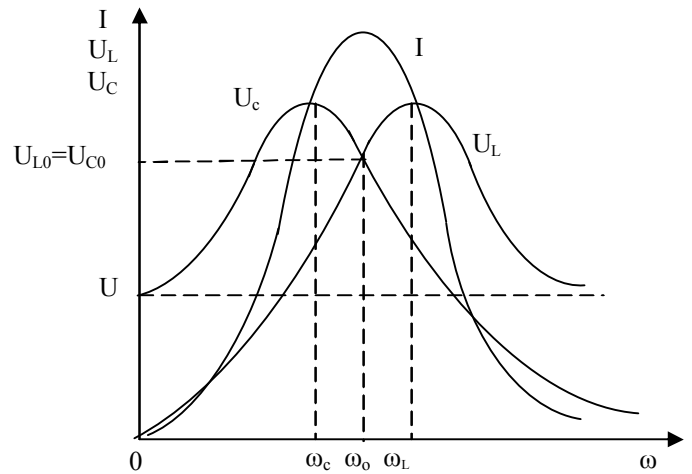


Рис. 4.4

$$2. U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}; \quad U_C(0) = U; \quad U_C(\omega_0) = U \frac{\rho}{R} = UQ$$

$$U_C(\infty) = 0.$$

Для визначення частоти ω_C , при якій U_C досягає максимуму, дослідимо підкореневий вираз на мінімум:

$$\frac{d}{d\omega} (R^2 \omega^2 C^2 + \omega^4 L^2 C^2 - 2\omega^2 LC + 1) = 0;$$

$$2R^2 C^2 \omega + 4L^2 C^2 \omega^3 - 4LC\omega = 0 \quad | : 2\omega C,$$

$$R^2 C + 2L^2 C \omega^2 - 2L = 0;$$

$$2L^2 C \omega^2 = 2L - R^2 C;$$

$$\omega^2 = \frac{2L}{2L^2 C} - \frac{R^2 C}{2L^2 C} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} = \frac{1}{LC} (1 - \frac{R^2 C}{2L}) = \omega_0^2 (1 - \frac{R^2}{2\rho^2}) = \omega_0^2 (1 - \frac{1}{2Q^2}).$$

Таким чином $\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}; \quad \omega_C < \omega_0$, так як підкореневий вираз менший за одиницю.

$$3. U_L = \omega LI = \frac{\omega UL}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + (1 - \frac{1}{\omega^2 LC})^2}}.$$

Частота ω_L , при якій U_L досягає максимуму, визначається аналогічно попередньому випадку і дорівнює:

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}}; \quad \omega_L > \omega_0, \text{ тому що підкореневий вираз менший за}$$

одиницю.

Максимальні значення напруги на індуктивній котушці та конденсаторі будуть дорівнювати:

$$U_{L \max} = U_L(\omega_L) = U_{C \max} = U_C(\omega_C) = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{4\rho^2}}} = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}}.$$

4.4. Резонанс струмів, добротність та згасання контуру

Розглянемо коло з паралельним з'єднанням R, L, C (рис. 4.5)

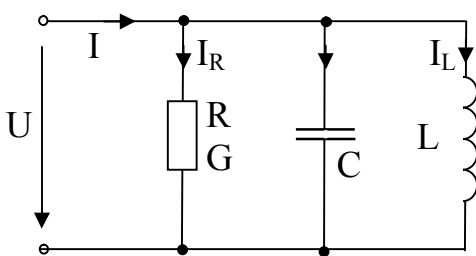


Рис. 4.5

До кола прикладемо синусоїдну напругу $u = U_m \sin \omega t$.

Нехай в колі $B_L = B_C$, тоді $B = B_L - B_C = 0$, а $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G$, тобто повна провідність кола дорівнює активній.

В цьому випадку струм в нерозгалуженій ділянці кола I досягне максимального значення ($I = UG$), а струми в гілках з індуктивністю I_L та ємністю I_C за

умови, що $B_L = B_C \gg G$, значно перевищать струм в нерозгалуженій ділянці кола. Тому резонанс в колі з паралельним з'єднанням R, L, C одержав назву резонансу струмів.

Резонанс струмів – це явище резонансу на ділянці електричного кола, що містить паралельне з'єднання R, L, C .

Побудуємо векторну діаграму для випадку резонансу струмів (рис. 4.6):

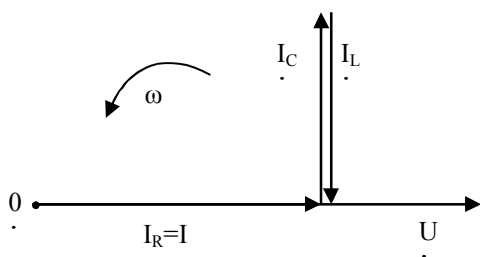


Рис. 4.6

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C.$$

Отже, при резонансі струмів струм в резисторі дорівнює струму в нерозгалуженій ділянці кола, а струм і напруга на вході кола співпадають за фазою.

Таким чином, загальною умовою резонансу струмів для даного кола

являється: $B_L = B_C$; або $\frac{1}{\omega L} = \omega C$, або $\omega^2 LC = 1$.

Отже, резонансу струмів можна досягти змінюючи L, C або ω , відповідно будемо мати резонансні параметри: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $L_o = \frac{1}{\omega^2 C}$; $C_o = \frac{1}{\omega^2 L}$.

При резонансі струмів струми в індуктивній котушці та конденсаторі будуть однакові:

$$I_{Lo} = B_L U = \frac{1}{\omega_o L} U = \frac{\sqrt{LC}}{L} U = U \sqrt{\frac{C}{L}} = U\gamma;$$

$$I_{Co} = B_C U = \omega_o C U = \frac{C}{\sqrt{LC}} U = U \sqrt{\frac{C}{L}} = U\gamma;$$

де $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} = B_{Lo} = B_{Co}$ [См] – хвильова провідність.

Реактивна потужність при резонансі

$Q = U^2 (B_L - B_C) = 0$, тоді $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P$, а коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \frac{P}{S} = 1$.

Відношення струму в гілці з індуктивністю, або струму в гілці з ємністю до струму в нерозгалуженій ділянці кола при резонансі називають добротністю контуру

$$\frac{I_{Lo}}{I_o} = \frac{I_{Co}}{I_o} = \frac{U\gamma}{UG} = \frac{\gamma}{G} = Q.$$

Величина, обернена добротності, називається згасанням резонансного контуру

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{G}{\gamma}.$$

Для збільшення добротності контуру необхідно $G \downarrow$, тобто $R \uparrow$.

Нехай $R \rightarrow \infty$, в цьому випадку в колі маємо тільки ідеальні індуктивність та ємність, $Y = 0$ і $Z = \frac{1}{Y} \rightarrow \infty$. Отже, струм в нерозгалуженій ділянці кола буде дорівнювати нулю, при цьому енергія від джерела не надходить, а відбуваються лише періодичні коливання енергії між магнітним полем котушки та електричним полем конденсатора.

В реальних електричних колах індуктивна котушка та конденсатор мають активний опір (рис. 4.7, а)

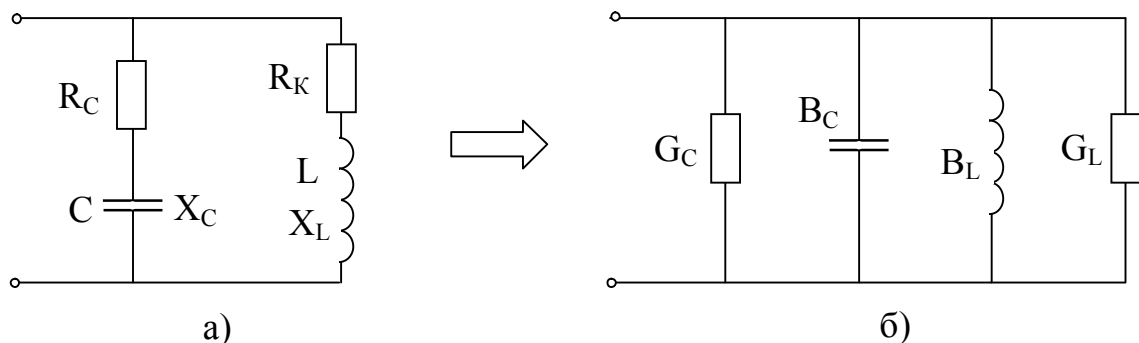


Рис. 4.7

В цьому випадку необхідно враховувати еквівалентні індуктивні та ємності провідності (рис. 4.7, б):

$$B_{L\text{ ек}} = B_{C\text{ ек}}, \text{ де } B_{L\text{ ек}} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2};$$

$$B_{C\text{ ек}} = \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{1}{\frac{\omega C}{R_C^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Тоді:

$$\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{\frac{\omega C}{R_C^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}},$$

звідси знаходимо резонансну частоту в реальному контурі

$$\omega = \sqrt{\frac{L - R_L^2 C}{LC(L - R_C^2 C)}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - R_L^2 \gamma^2}{1 - R_C^2 \gamma^2}}.$$

4.5. Частотні характеристики кола з паралельним з'єднанням R, L, C

Частотні характеристики – це залежність величин B_L , B_C , B , Y та φ від частоти прикладеної напруги. Зобразимо вказані залежності (рис. 4.8).

1) $B_L = \frac{1}{\omega L}$ – гіпербола; $B_L(0) = \infty$; $B_L(\infty) = 0$.

2) $B_C = \omega C$ – лінійна залежність; $B_C(0) = 0$, $B_C(\infty) = \infty$.

3) $B = B_L - B_C$; $B = \frac{1}{\omega L} - \omega C$; $B(0) = \infty$; $B(\omega_0) = 0$; $B(\infty) = -\infty$.

4) $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$; – парабола; $Y = \sqrt{G^2 + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}$;

$Y(0) = \infty$; $Y(\omega_0) = G$; $Y(\infty) = \infty$.

5) $\varphi = \arctg \frac{B}{C}$; $\varphi(0) = +\frac{\pi}{2}$; $\varphi(\omega_0) = 0$; $\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

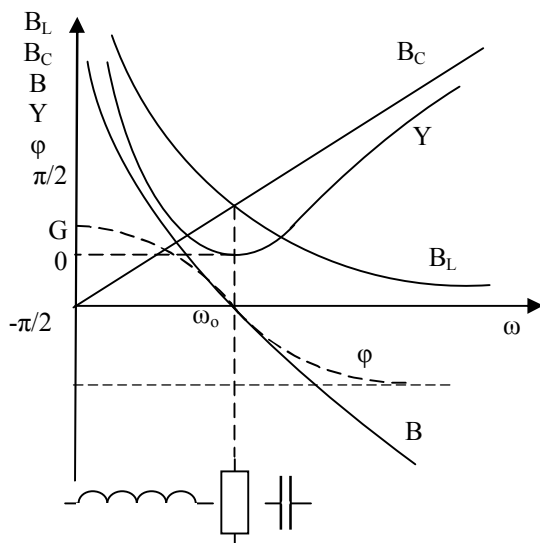


Рис. 4.8

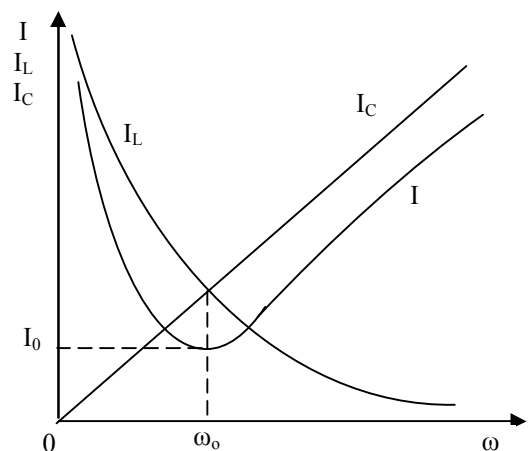


Рис. 4.9

Резонансні характеристики – це залежності I_L , I_C , I від частоти прикладеної напруги.

Зобразимо вказані залежності (рис. 4.9)

$$1) I_L = B_L U = \frac{U}{\omega L} - \text{гіпербола. } I_L(0) = \infty; I_{LO}(\omega_0) = \gamma U; I_L(\infty) = 0.$$

$$2) I_C = B_C U = \omega C U - \text{лінійна залежність. } I_C(0) = 0; I_{CO}(\omega_0) = \gamma U; I_C(\infty) = \infty.$$

$$3) I = U \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} - \text{парабола } I(0) = \infty; I(\omega_0) = UG, I(\infty) = \infty.$$

Ці характеристики справедливі для ідеального резонансного контуру. В випадку реального контуру необхідно врахувати активні опори котушки індуктивності та конденсатора.

4.6. Енергетичні процеси при резонансі

Розглянемо енергетичні процеси при резонансі на прикладі контуру з послідовним з'єднанням R, L, C .

До кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega_0 t$. Так як коло при резонансі носить активний характер, то струм буде дорівнювати $i = I_{mo} \sin \omega_0 t$, а напруга на конденсаторі буде відставати від струму на 90° , тобто

$$u_C = U_{mc} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{mc} \cos \omega_0 t.$$

Визначимо миттєві значення енергії:

$$w_m = \frac{L i^2}{2} = \frac{L I_{mo}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{L I_{mo}^2}{4} (1 - \cos 2\omega_0 t),$$

$$w_e = \frac{C u_C^2}{2} = \frac{C U_{mc}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{C U_{mc}^2}{4} (1 + \cos 2\omega_0 t).$$

Враховуючи, що при резонансі

$$U_{mc} = I_{mo} X_C = \frac{I_{mo}}{\omega_0 C} = I_{mo} \frac{\sqrt{LC}}{C} = I_{mo} \frac{\sqrt{L}}{C}; U_{mc}^2 = I_{mo}^2 \frac{L}{C}.$$

Підставимо одержане значення в вираз для w_e :

$$w_e = \frac{C I_{mo}^2 L}{4C} (1 + \cos 2\omega_0 t) = \frac{L I_{mo}^2}{4} (1 + \cos 2\omega_0 t).$$

Отже, максимальна енергія, накопичена в електричному полі конденсатора, дорівнює максимальній енергії, накопиченій в магнітному полі котушки індуктивності.

Визначимо миттєву енергію резонансного контуру:

$$w = w_m + w_e = \frac{L I_{mo}^2}{2} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{L I_{mo}^2}{2}.$$

Таким чином, миттєва енергія, накопичена в магнітному і електричному полях при резонансі, є величиною сталою і не залежить від часу.

Зобразимо часові діаграми миттєвих енергій (рис. 4.10).

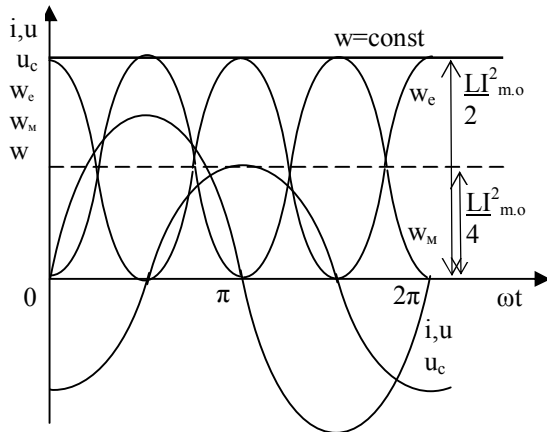


Рис. 4.10

З часових діаграм видно, що при резонансі напруг, магнітне та електричне поля безперервно обмінюються енергією. Коло поводить себе як активний опір, тому повертання енергії з магнітного та електричного полів джерелу немає.

В випадку паралельного з'єднання R, L, C , тобто при резонансі струмів, енергетичні процеси будуть аналогічними. В цьому випадку струм в котушці буде відставати від напруги на конденсаторі на 90° . Тому всі

висновки, приведені вище, будуть справедливими і для паралельного контуру.

4.7. Підвищення коефіцієнта потужності та його практичне значення

Економічне значення коефіцієнта потужності $\cos \varphi$ полягає в тому, що від його величини залежать витрати на експлуатацію, а також ефективність використання електрообладнання.

Розглянемо декілька приймачів електричної енергії, що працюють з однаковою активною потужністю, напругою, але при різних $\cos \varphi$, тобто $P = \text{const}; U = \text{const}, \cos \varphi = \text{var}$.

В цьому випадку:

$$P = UI \cos \varphi, \quad \text{звідси} \quad I = \frac{P}{U \cos \varphi}.$$

Отже, з зменшенням $\cos \varphi$, струм буде збільшуватись, а це призводить:

- до збільшення втрат енергії на активних опорах кола, тобто $\Delta P = R_e I^2$;
- до збільшення перерізу проводів, що призводить до збільшення їх маси;
- до збільшення вартості системи;
- до зменшення ККД та ефективності використання енергетичних систем.

Тому виникає необхідність підвищення коефіцієнта потужності кола. Це досягається шляхом вмикання паралельно до приймача з низьким

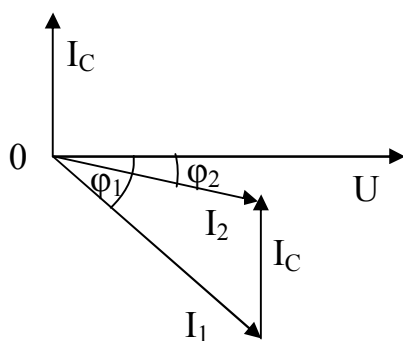


Рис. 4.11

коефіцієнтом потужності батареї конденсаторів, що пояснює векторна діаграма на (рис. 4.11).

I_C – струм батареї конденсаторів.

I_1 – струм навантаження.

I_2 – струм навантаження з урахуванням конденсаторів.

$\varphi_2 < \varphi_1; \cos \varphi_2 > \cos \varphi_1$.

Приклади розрахунку електричних резонансних кіл

Задача №1

До кола (рис. Р4.1) прикладена синусоїдна напруга $u = 100\sqrt{2} \sin 2500t$ В. Визначити індуктивність L_0 , при якій коло буде настроєне в резонанс, а також ρ , Q , d , U_{L0} , U_{C0} , U_C , ω_L , i , ω_C , якщо $R=1,6$ Ом, $C=25$ мкФ.

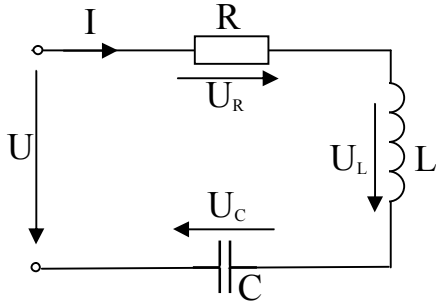


Рис. Р4.1

Рішення

1. В даному колі відбувається резонанс напруг. Умова резонансу напруг:

$$X_L = X_C, \quad \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

$$\text{або} \quad \omega^2 LC = 1.$$

2. Знаходимо резонансну індуктивність

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{2500^2 \cdot 10^{-6}} = 6,4 \text{ мГн}$$

3. Визначимо хвильовий опір, добротність та згасання контуру:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6}}} = 16 \text{ Ом},$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{16}{1,6} = 10, \quad d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} = \frac{1,6}{16} = 0,1.$$

4. Розрахуємо діючі напруги на індуктивній котушці U_{L0} та конденсаторі U_{C0} при резонансі. Для цього скористаємося формулою:

$$\frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = Q.$$

Звідси:

$$U_{L0} = U_{C0} = QU = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ В},$$

$$U_{ML0} = U_{MCO} = 1000 \sqrt{2} \text{ В}$$

5. Запишемо вирази для миттєвих струму в колі i , напруги на конденсаторі u_C , та енергії, яка накопичується в електричному та магнітному полях конденсатора ω_e і індуктивної котушки ω_m .

$$i = I_{mo} \sin \omega t$$

При резонансі $Z=R$, тому

$$I_{mo} = \frac{U_m}{R} = \frac{100\sqrt{2}}{1,6} = 62,5\sqrt{2} \text{ А},$$

$$i = 62,5\sqrt{2} \sin 2500t \text{ А}.$$

Напруга на конденсаторі відстає від струму по фазі на 90° :

$$u_c = U_{mco} \sin(2500t - 90^\circ) = -U_{mco} \cos 2500t \text{ В}$$

Відомо, що

$$\omega_e = \frac{cu_c^2}{2}, \quad \omega_m = \frac{L \cdot i^2}{2}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{CU_{mco}^2}{2} \cos^2 2500t = \frac{CU^2}{4} (1 + \cos 5000t) = \\ &= \frac{25 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6}{4} (1 + \cos 5000t) = 12,5(1 + \cos 5000t) \text{ Дж} . \\ \omega_m &= \frac{LI_{mo}^2}{2} \sin^2 2500t = \frac{LI^2}{4} (1 - \cos 5000t) = \\ &= \frac{6,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 62,5^2}{4} (1 - \cos 5000t) = 12,5(1 - \cos 5000t) \text{ Дж} . \end{aligned}$$

Висновки:

для резонансу напруг характерно:

- напруги на індуктивній котушці та конденсаторі при резонансі в Q раз більші за прикладену до кола напругу;
- при резонансі відбувається безперервний обмін енергією між електричним полем конденсатора та магнітним полем індуктивної котушки;
- енергія, яка споживається від джерела енергії, повністю перетворюється в теплову енергію. Тому для джерела енергії все коло еквівалентне активному опору.

Задача №2

Для кола (рис. Р4.2,а) визначити значення ємності конденсатора, при якій в колі наступить резонанс при $\omega_0 = 2500 \text{ с}^{-1}$. Параметри кола: $R = 14 \text{ Ом}$, $L = 19,6 \text{ мГн}$.

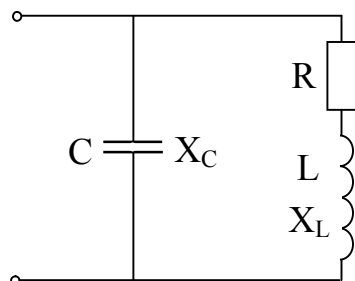


Рис. Р4.2,а

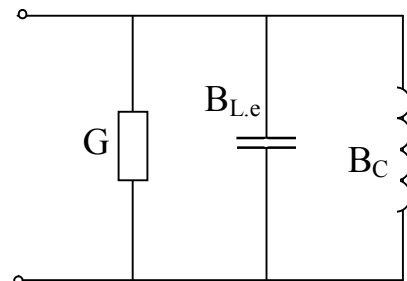


Рис. Р4.2,б

Рішення:

В цьому колі спостерігається резонанс струмів (РС).

Умова РС:

$$B_{L.e} = B_C .$$

Для визначення B_{Le} зробимо еквівалентне перетворення вітки з послідовним з'єднанням опорів R , X_L в паралельне з'єднання провідностей B_{Le} , G

$$B_{L.e} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad B_C = \omega C .$$

Тепер умова РС запишеться так:

$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \omega C ,$$

звідки

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{19,6 \cdot 10^{-3}}{14^2 + 2500^2 \cdot 19,6^2 \cdot 10^{-6}} = 7,6 \text{ мкФ} .$$

Висновок:

– якщо послідовно з реактивним елементом стоїть резистор, то потрібно, використовуючи формули еквівалентного переходу від послідовного з'єднання опорів до паралельного з'єднання провідностей, перейти до еквівалентної схеми (рис. P4.2,б). потім із умови резонансу визначаємо необхідну резонансну величину C_0 , L_0 або ω_0 .

Задача №3

В колі (рис. P4.3,а) має місце резонанс при частоті $\omega_0 = 1000 \text{ 1/c}$. Визначити ємність конденсатора C , якщо $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $R_2 = 500 \text{ Ом}$.

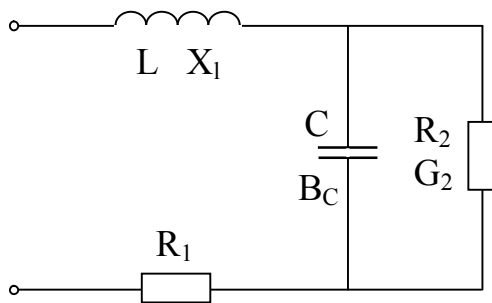


Рис. P4.3,а

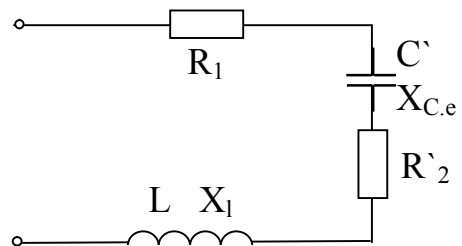


Рис. P4.3,б

Рішення

1. Визначаємо тип резонансу. В цьому колі має місце резонанс напруг.
2. Умова резонансу напруг:

$$X_L = X_{Ce} .$$

Щоб знайти X_{Ce} , треба звільнитися від R_2 .

Для цього перейдемо від паралельного з'єднання провідностей B_2, G_2 до послідовного з'єднання опорів $R_2', X_{C.e}$ (рис. Р4.3,б)

$$X_{C.e} = \frac{B_c}{G_2^2 + B_c^2} = \frac{\omega C}{G_2^2 + \omega^2 C^2}, \quad R_2' = \frac{G_2}{G_2^2 + B_c^2}.$$

3. Тепер умова РН через параметри кола запишеться так:

$$\omega L = \frac{\omega C}{G^2 + \omega^2 C^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$0,2 = \frac{C}{\frac{1}{25 \cdot 10^4} + 10^6 C^2}; \quad 0,2 = \frac{25 \cdot 10^4 C}{1 + 25 \cdot 10^{10} C^2};$$

$$0,2 + 5 \cdot 10^{10} C^2 - 25 \cdot 10^4 C = 0,$$

$$C^2 - 5 \cdot 10^{-6} C + 0,04 \cdot 10^{-10} = 0,$$

$$C_{1,2} = 2,5 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{6,25 \cdot 10^{-12} - 4 \cdot 10^{-12}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \pm 1,5 \cdot 10^{-6},$$

$$C_1 = 4 \text{ мкФ}; \quad C_2 = 1 \text{ мкФ}.$$

Висновок:

– якщо в колі зі змішаним з'єднанням елементів зустрічається паралельне з'єднання пасивних елементів, то, використовуючи формули еквівалентного переходу, необхідно перейти до послідовного з'єднання (рис. Р4.3,б), а потім із умови резонансу напруг визначаємо резонансні величини ω_0, L_0, C_0 .

Задача №4

В колі (рис. Р4.4) визначити струми в гілках та напруги на них, якщо: $U=200 \text{ В}, R_1=50 \text{ Ом}, L_1=0,2 \text{ Гн}, R_2=50 \text{ Ом}, C_2=5 \text{ мкФ}, L_3=0,1 \text{ Гн}, C_3=10 \text{ мкФ}, I_A=0$.

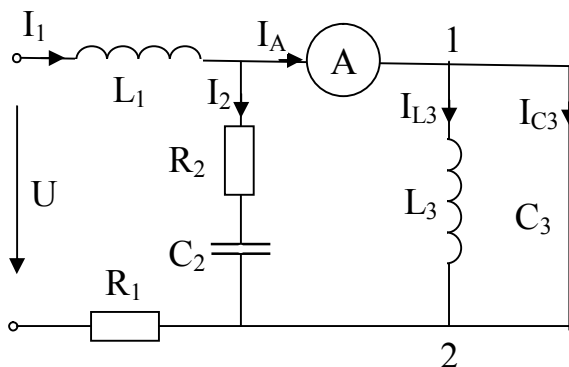


Рис. Р4.4

Рішення

1. Визначимо кутову частоту ω напруги зовнішнього джерела енергії. Для цього скористаємося умовою, що $I_A=0$. В цьому випадку на ділянці з паралельним з'єднанням L_3 та C_3 має місце резонанс струмів, тому $B_L=B_C$, або

$$\frac{1}{\omega_0 L_3} = \omega_0 C_3.$$

Звідси:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \text{ } 1/c.$$

2. Знаходимо реактивні опори ділянок кола:

$$X_{L1} = \omega_0 L_1 = 10^3 \cdot 0,2 = 200 \text{ Ом}$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_0 C_2} = \frac{10^6}{10^3 \cdot 5} = 200 \text{ Ом}$$

3. Визначимо струм I_1 . Так як $I_A=0$, то елементи кола R_1 , L_1 , R_2 та C_2 з'єднані послідовно і тому

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{Z_{12}} = \frac{200}{\sqrt{(50 + 50)^2 + (200 - 200)^2}} = \frac{200}{100} = 2 \text{ А}.$$

На цій ділянці кола спостерігається резонанс напруг, так як $X_{L1}=X_{C2}$.

4. Знаходимо напругу на паралельних вітках:

$$U_{12} = U_{L3} = U_{C3} = Z_2 I_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} \cdot I_2 = \sqrt{50^2 + 200^2} \cdot 2 = 412 \text{ В}.$$

5. Визначаємо струми в паралельних гілках:

$$I_{C3} = I_{L3} = \frac{U_3}{\omega L_3} = \frac{412}{10^3 \cdot 0,1} = 4,12 \text{ А}.$$

Висновок:

– в колах змінного струму при відповідному підборі параметрів їх елементів можна спостерігати і резонанс струмів і резонанс напруг.

Тема 5. Електричні кола з взаємною індукцією

5.1. Взаємна індукція в колах змінного струму

Електричні кола, які мають загальний магнітний потік, називаються колами з взаємною індукцією або індуктивно зв'язаними (або з індуктивним зв'язком).

Якщо магнітне поле однієї індуктивної котушки частково зціплене з витками другої котушки, то такі індуктивні котушки називаються індуктивно зв'язаними.

Розглянемо дві індуктивні котушки, розташовані рядом (рис. 5.1).

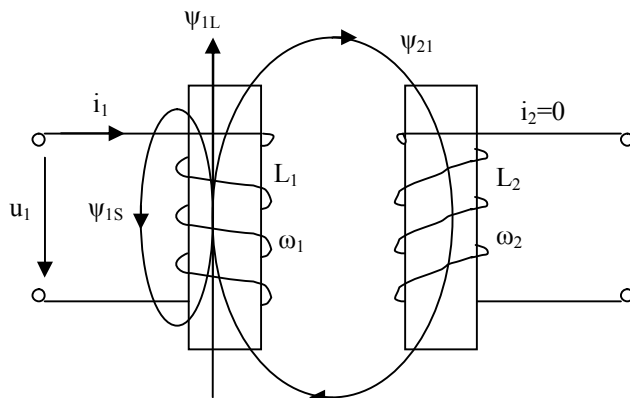


Рис. 5.1

Нехай перша котушка підключена до джерела напруги і по ній протікає струм i_1 , а друга котушка вимкнута, тому $i_2=0$.

Навколо першої котушки виникає магнітне поле.

Магнітний потік, зчеплений з витками першої котушки і обумовлений струмом в ній, називається потокозчепленням самоіндукції:

$$\psi_{1L} = \omega_1 \Phi_1 = L_1 i_1 \text{ [Вб]}.$$

Напрямок потокозчеплення визначається за правилом правої руки. Але може бути, що частина магнітного потоку першої котушки зчеплена з витками другої котушки.

Магнітний потік, обумовлений струмом в першій котушці, і зчеплений з витками другої котушки (тобто частина потокозчеплення самоіндукції I котушки) називається потокозчепленням взаємної індукції:

$$\psi_{21} = \psi_{2M} = M_{21} \cdot i_1,$$

де $M_{21} = \psi_{21}/i_1$ – взаємна індуктивність між першою та другою котушками, залежить від форми, розмірів, взаємного розташування котушок та магнітних властивостей середовища.

Решта потокозчеплення самоіндукції першої котушки, яка зчеплена тільки з власними витками називається потокозчепленням розсіяння:

$$\psi_{1s} = L_{1s} i_1,$$

де L_{1s} – індуктивність розсіяння першої котушки.

Таким чином:

$$\psi_{1L} = \psi_{21} + \psi_{1s}$$

Якщо струм в першій котушці змінюється за часом, то і потокозчеплення будуть змінними величинами. За законом Фарадея в першій котушці буде наводитися ЕРС самоіндукції:

$$e_{1L} = -d\psi_{1L}/dt = -L_1 \cdot di_1/dt,$$

а в другій – ЕРС взаємної індукції:

$$e_{2L} = -d\psi_{21}/dt = -M_{21} \cdot di_1/dt.$$

Тепер розглянемо інший випадок, коли друга котушка підключена до джерела напруги і в ній протікає струм i_2 , а перша котушка вимкнута і $i_1=0$. Маємо:

$\psi_{2L} = L_2 \cdot i_2$ – потокозчеплення самоіндукції другої котушки;

$\psi_{12} = \psi_{1M} = M_{12} \cdot i_2$ – потокозчеплення взаємоіндукції;

$\psi_{2S} = L_{2S} i_2$ – потокозчеплення розсіювання другої котушки.

де: M_{12} – взаємна індуктивність між другою і першою котушками;

L_{2S} – індуктивність розсіювання другої котушки.

Теж вірно:

$$\psi_{2L} = \psi_{12} + \psi_{2S}.$$

Якщо струм в другій котушці змінний, то одержимо ЕРС самоіндукції e_{2L} та ЕРС взаємної індукції e_{12} :

$$e_{2L} = -d\psi_{2L}/dt = -L_2 \cdot di_2/dt;$$

$$e_{12} = -d\psi_{12}/dt = -M_{12} \cdot di_2/dt.$$

В лінійних індуктивно зв'язаних котушках зазвичай

$$M_{12} = M_{21} = M \text{ [Гн]}.$$

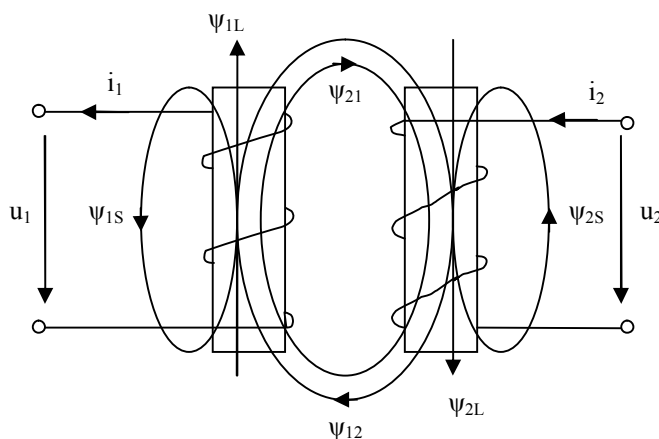


Рис. 5.2

Тепер розглянемо загальний випадок, коли в обох котушках протікають змінні струми i_1 та i_2 (рис. 5.2). В цьому випадку загальне потокозчеплення кожної котушки буде складатися із потокозчеплення самоіндукції та взаємоіндукції. Наприклад, в першій котушці:

$$\psi_1 = \psi_{1L} \pm \psi_{12}$$

Так як потокозчеплення самоіндукції обумовлює ЕРС самоіндукції, а потокозчеплення взаємоіндукції – ЕРС взаємоіндукції, то загальна ЕРС в І котушці буде:

$$e_I = e_{IL} \pm e_{I2}.$$

Можливі два випадки включення котушок – узгоджене та зустрічне, від чого і залежать знаки “+” або “-”.

Узгодженим називається таке включення котушок, при якому потокозчеплення самоіндукції та взаємоіндукції і ними обумовлені ЕРС співпадають за напрямом, тобто мають однакові знаки.

Зустрічним називається таке включення котушок, при якому потокозчеплення самоіндукції та взаємної індукції і ними обумовлені ЕРС направлені протилежно, тобто мають різні знаки.

Для визначення знака ЕРС взаємоіндукції вводять поняття однойменних затискачів.

Затискачі двох котушок називаються однойменними, якщо при однаковому напрямку струмів відносно них потокозчеплення самоіндукції та взаємної індукції співпадають за напрямом (рис. 5.3).

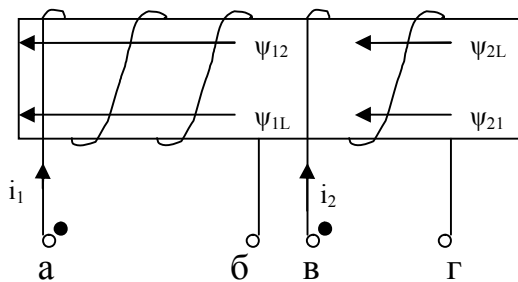


Рис. 5.3

a і *в*, *б* і *г* – однойменні затискачі.

На електричних схемах однойменні затискачі позначаються крапками.

Чим менше потокозчеплення розсіяння, тим ближче потокозчеплення взаємної індукції до потокозчеплення самоіндукції.

Для оцінювання ступеню магнітного зв'язку між котушками користуються коефіцієнтами зв'язку та розсіяння:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} - \text{коефіцієнт зв'язку. } (K = \frac{E_m}{E_{m \max}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}).$$

Коефіцієнт зв'язку показує, яку частину реально обумовлена ЕРС взаємної індукції складає від тої максимальної ЕРС, яку б змогла навести одна котушка в другій в ідеальному випадку.

Коефіцієнт розсіяння:

$$\sigma = 1 - K^2 = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 \cdot L_2}.$$

При сильному магнітному зв'язку між контурами $K \rightarrow 1$, а $\sigma \rightarrow 0$.

5.2. Послідовне з'єднання котушок при їх узгодженому та зустрічному включенні

Розглянемо послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок в колі синусоїдного струму при узгодженому включенні (рис. 5.4).

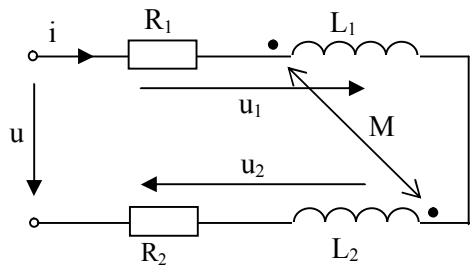


Рис. 5.4

До кола прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Складемо рівняння за II законом Кірхгофа:

$$u = u_1 + u_2$$

Враховуючи, що

$$u_1 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}; \quad u_2 = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt},$$

одержимо:

$$u = R_1 i + (L_1 + M) \frac{di}{dt} + R_2 i + (L_2 + M) \frac{di}{dt} = (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Перейдемо до комплексної форми запису:

$$\underline{U} = (R_1 + R_2) \underline{I} + j\omega \underline{L} (L_1 + L_2 + 2M). \quad (5.1)$$

Позначимо:

$R_1 + R_2 = R$ – еквівалентний активний опір кола,

$L_1 + L_2 + 2M = L_y$ – еквівалентна індуктивність при узгодженому включенні.

Тоді: $\underline{U} = R \underline{I} + j\omega L_y \underline{I}$, звідси $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L_y} = I e^{j\psi_i}.$

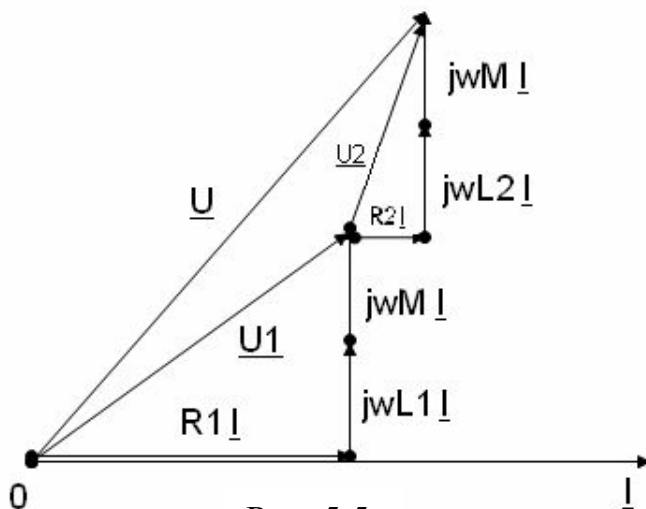


Рис. 5.5

Таким чином, при послідовному узгодженому включенні двох індуктивно зв'язаних котушок їх еквівалентна індуктивність дорівнює сумі індуктивностей котушок плюс подвоєне значення взаємної індуктивності

$$L_y = L_1 + L_2 + 2M.$$

Зобразимо векторну діаграму напруг при узгодженому включенні

катушок (рис. 5.5). Для цього використаємо рівняння електричної рівноваги в комплексній формі (5.1).

При зустрічному включенні катушок напрямок струму відносно однойменних затисків буде протилежним, тому знаки при ЕРС самоіндукції та взаємної індукції будуть різними.

В цьому випадку рівняння електричної рівноваги буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = R_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I} + R_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I} = \\ &= \underline{I} [(R_1 + R_2) + j\omega (L_1 + L_2 - 2M)],\end{aligned}$$

де $L_3 = L_1 + L_2 - 2M$ – еквівалентна індуктивність при зустрічному включенні катушок.

Зобразимо векторну діаграму напруг (рис. 5.6) при зустрічному включенні катушок для випадку $L_2 < M < L_1$.

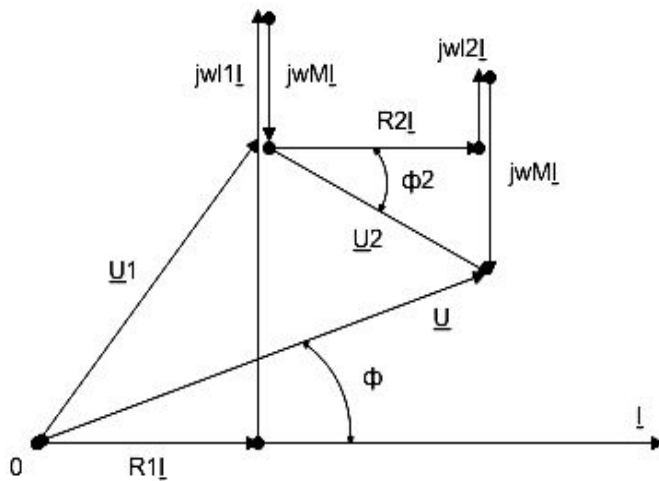


Рис. 5.6

В цьому випадку вектор U_2 відстає від струму, чим утворюється ефект “несправжньої ємності”.

Коло в цілому носить індуктивний характер, тому що завжди як додатна фізична величина

$$L_3 = L_1 + L_2 - 2M > 0.$$

Величина взаємної індуктивності M може бути визначена експериментально за знайденими

$$L_y = L_1 + L_2 + 2M \quad \text{та} \quad L_3 = L_1 + L_2 - 2M$$

за формулою: $L_y - L_3 = 4M$.
Звідси:

$$M = \frac{L_y - L_3}{4}.$$

5.3. Паралельне з'єднання катушок при їх узгодженому та зустрічному включенні

Розглянемо паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних катушок в колі синусоїдального струму при їх узгодженому включенні (рис. 5.7).

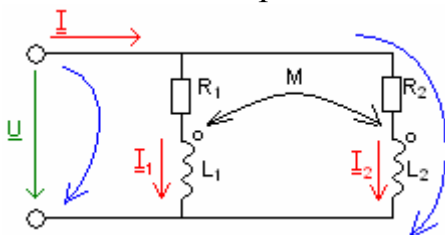


Рис. 5.7

До кола прикладемо синусоїдну напругу

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_u)$$

Задамо напрямок обходу і складемо

два рівняння за II-м законом Кірхгофа в комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \\ \underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j\omega L_1; \\ Z_2 &= R_2 + j\omega L_2; \\ Z_m &= j\omega M, \end{aligned}$$

тоді одержимо:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ \underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_m \underline{I}_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ \underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_m \underline{I}_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Визначимо струми \underline{I}_1 та \underline{I}_2 за методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2; \quad \Delta_I = \begin{vmatrix} \underline{U} & \underline{Z}_m \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m); \quad \Delta_{II} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ \underline{Z}_m & \underline{U} \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m);$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e},$$

$$\text{де } \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + j^2 \omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 - 2j\omega M} = R_e + j\omega L_y.$$

Припустимо, що $R_1 = R_2 = 0$, тоді $R_e = 0$,

В цьому випадку одержимо

$$j\omega L_y = \frac{-\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}{j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} = \frac{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

Звідси $L_y = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$ — еквівалентна індуктивність при

паралельному узгодженому включенні двох котушок.

Аналогічно може бути визначена еквівалентна індуктивність при паралельному зустрічному включенні двох індуктивних котушок. Вона дорівнює:

$$L_3 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} < L_y.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 5.8) для узгодженого включення паралельно з'єднаних котушок в відповідності з рівняннями (5.2) та (5.3):

- будуємо вектори струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2 ;
- будуємо $R_1 \underline{I}_1; j\omega L_1 \underline{I}_1; j\omega M \underline{I}_2$;
- будуємо $R_2 \underline{I}_2; j\omega L_2 \underline{I}_2; j\omega M \underline{I}_1$.

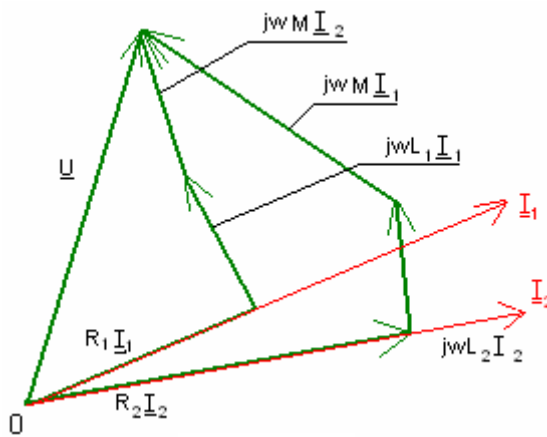


Рис. 5.8

Для плавної зміни індуктивності кола застосовують варіометри. Вони складаються з двох котушок різного діаметра, причому одна обертається в середині другої. Котушки можуть бути з'єднані послідовно і паралельно при узгодженому та зустрічному включенні. Тому їх індуктивність буде змінюватись від $L_{\max} = L_1 + L_2 + 2M_{\max}$ до

$$L_{\min} = \frac{L_1 L_2 - M_{\max}^2}{L_1 + L_2 + 2M_{\max}}$$

5.4. Повітряний трансформатор

Трансформатор – це статичний пристрій, призначений для перетворення змінного струму однієї напруги, в змінний струм тієї ж частоти, але іншої за величиною напруги.

Трансформатор був винайдений в 1876 році російським інженером Яблочковим П.М.

Повітряний трансформатор складається з двох електрично не зв'язаних, нерухомих котушок без феромагнітних осердь. Такий трансформатор являється лінійним.

5.4.1. Основні рівняння повітряного трансформатора

Зобразимо електричну схему трансформатора (рис.5.9)

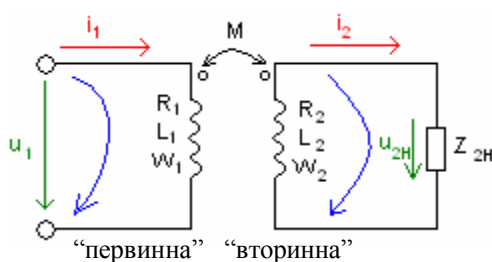


Рис. 5.9

Обмотка, до якої підключене джерело електричної енергії, називається первинною.

Обмотка, до якої підключений приймач, називається вторинною.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = n \quad - \quad \text{коефіцієнт}$$

трансформації.

Нехай до затискачів первинної обмотки прикладена напруга u_1 , тоді в ній буде протікати струм i_1 . У вторинній обмотці виникне ЕРС взаємної індукції і в ній з'явиться струм i_2 .

Запишемо рівняння електричної рівноваги для повітряного трансформатора, для цього вкажемо напрямки струмів, напруг та задамо напрям обходу.

При складанні рівняння за II законом Кірхгофа для кіл з взаємною індукцією будемо користуватись таким правилом для визначення знака перед $j\omega M$:

«Якщо відносно однойменних затискачів напрям обходу котушки L_1 співпадає з напрямом струму в котушці L_2 , то перед $j\omega M$ беремо додатній знак, якщо напрямки протилежні – беремо від’ємний знак.

Тепер запишемо рівняння:

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + U_{2H} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Це основні рівняння повітряного трансформатора.

У вторинній обмотці в якості джерела електричної енергії виступає ЕРС взаємної індукції $-M \frac{di_1}{dt}$.

Для синусоїдних величин основні рівняння трансформатора можна записати в символічній формі:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2; \\ 0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_{2H} - j\omega M \underline{I}_1. \end{cases}$$

5.4.2. Режим роботи трансформатора

А. Режим холостого ходу

В цьому випадку вторинна обмотка розімкнута, тобто $I_2 = 0$. Струм I_1 викличе у вторинній обмотці ЕРС взаємної індукції E_2 . Тоді основні рівняння трансформатора приймуть вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1; \\ \underline{E}_2 = -j\omega M \underline{I}_1. \end{cases}$$

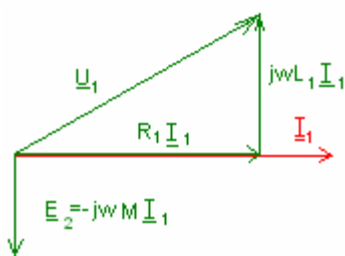


Рис. 5.10

Зобразимо векторну діаграму трансформатора для режиму холостого ходу (рис. 5.10).

З дослідження холостого ходу трансформатора можна визначити коефіцієнт взаємної індукції M :

$$E_2 = \omega M I_1, \quad \text{звідси } M = \frac{E_2}{\omega I_1}.$$

Б. Режим навантаження

Нехай вторинна обмотка замкнута на приймач $Z_{2H} = R_{2H} + jX_{2H}$, тоді основні рівняння трансформатора приймуть вигляд:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2; \quad (5.6)$$

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_{2H} \underline{I}_2 + jX_{2H} \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1. \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_1; \\ -\underline{U}_{2H} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_2; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega \underline{I}_1 (L_1 - M) + j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2); \\ -\underline{U}_{2H} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega \underline{I}_2 (L_2 - M) - j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2). \end{cases}$$

На основі одержаних рівнянь будуємо схему заміщення трансформатора (рис. 5.12).

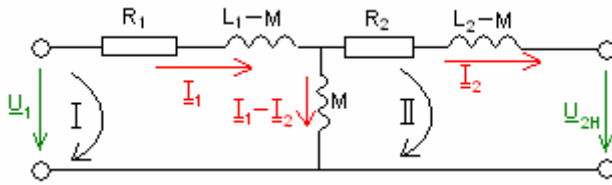


Рис. 5.12

Схеми заміщення дозволяють звести розрахунки трансформаторів до розрахунку електричних кіл змінного струму.

Приклади розрахунку електричних кіл з взаємною індукцією

Задача №1

Розрахувати електричне коло з паралельним з'єднанням двох індуктивно зв'язаних котушок (рис. P5.1,а) при їх узгодженому ввімкненні,

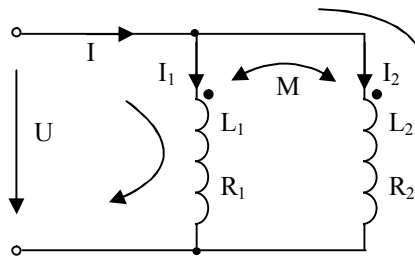


Рис. P5.1,а

якщо: $U = 115 \text{ В}$; $R_1 = 11,5 \text{ Ом}$; $R_2 = 23 \text{ Ом}$; $X_{L1} = 11,5 \text{ Ом}$; $X_{L2} = 23 \text{ Ом}$; $X_M = 23 \text{ Ом}$.

Побудувати векторні діаграми струмів та напруг. Визначити активну потужність, яка споживається електричним колом та кожною гілкою окремо.

Розв'язання

1. Складемо систему рівнянь за I та II законами Кірхгофа для кола. Для цього задамося струмами в гілках та напрямком обходу контурів

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \\ R_1 \underline{I}_1 + jX_{L1} \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2 &= \underline{U}, \\ R_2 \underline{I}_2 + jX_{L2} \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 &= \underline{U}. \end{aligned}$$

2. Підставимо в рівняння числові значення:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \\ 11,5 \underline{I}_1 + j11,5 \underline{I}_1 + j23 \underline{I}_2 &= 115, \\ 23 \underline{I}_2 + j23 \underline{I}_2 + j23 \underline{I}_1 &= 115, \end{aligned}$$

або:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \\ (1 + j) \underline{I}_1 + j2 \underline{I}_2 &= 10, \\ j2 \underline{I}_1 + 2(1 + j) \underline{I}_2 &= 10. \end{aligned}$$

3. Розрахуємо систему рівнянь, та знайдемо струми \underline{I} , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + j & j2 \\ j2 & 2(1 + j) \end{vmatrix} = 2(1 + j)(1 + j) - j2 \cdot j2 = 4(1 + j),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & j2 \\ 10 & 2(1 + j) \end{vmatrix} = 20(1 + j) - j20 = 20,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 + j & 10 \\ j2 & 10 \end{vmatrix} = 10(1 + j) - j20 = 10(1 - j),$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{4(1 + j)} = 5 \frac{1 - j}{(1 + j)(1 - j)} = 5 \frac{1 - j}{2} = 2,5(1 - j) = 3,52 e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10(1 - j)}{4(1 + j)} = -j2,5 = 2,5 e^{-j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2,5 - j2,5 - j2,5 = 2,5 - j5 = 5,6 e^{-j63^\circ 30'} \text{ А}.$$

4. Визначимо напруги на окремих елементах кола

$$\begin{aligned}
 R_1 I_1 &= 11,5 \cdot 2,5(1 - j) = 28,75 (1 - j) \text{ В}, \\
 jX_{L1} I_1 &= j11,5 \cdot 2,5(1 - j) = 28,75 + j28,75 \text{ В}, \\
 jX_M I_2 &= j23 (-j2,5) = 57,5 \text{ В}, \\
 R_2 I_2 &= 23 (-j2,5) = -j57,5 \text{ В}, \\
 jX_{L2} I_2 &= j23 (-j2,5) = 57,5 \text{ В}, \\
 jX_M I_1 &= j23 \cdot 2,5(1 - j) = 57,5 + j57,5 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

5. Будуємо векторну діаграму струмів та напруг, використовуючи алгебраїчну форму запису комплексних струмів та напруг.

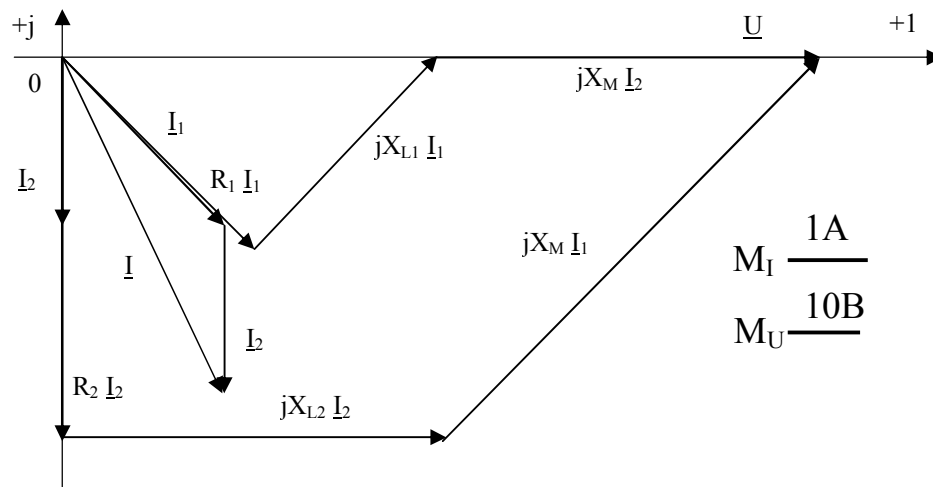


Рис. Р5.1,б

6. Визначимо активні потужності кола та окремих гілок:

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = 115 (2,5 + j5,0) = 287,5 + j575 \text{ ВА}, \\
 \underline{S}_1 &= \underline{U} \underline{I}_1^* = 115 (2,5 + j2,5) = 287,5 + j287,5 \text{ ВА}, \\
 P_1 &= 287,5 \text{ Вт}, & Q &= 287,5 \text{ вар}, \\
 \underline{S}_2 &= \underline{U} \underline{I}_2^* = 115 \cdot j2,5 = j287,5 \text{ ВА}, \\
 P_2 &= 0, & Q_2 &= 287,5 \text{ вар}.
 \end{aligned}$$

Бачимо, що в другій гілці активна потужність $P_2 = 0$. Активна потужність від джерела енергії споживається тільки першою гілкою $P_1 = 287,5$ Вт. Але в другій гілці мають місце теплові втрати, так як в гілці є активний опір $R_2 = 23$ Ом, і дорівнюють:

$$P_2' = R_2 I_2^2 = 23 \cdot 2,5^2 = 143,75 \text{ Вт}.$$

Теплові втрати в першій гілці дорівнюють

$$P_1' = R_1 I_1^2 = 11,5 (2,5 \cdot \sqrt{2})^2 = 143,75 \text{ Вт}.$$

При цьому в першу гілку від джерела енергії поступає активна потужність $P_1 = 287,5$ Вт, а на теплові втрати витрачається $P_1' = 143,75$ Вт. Тому залишок $P_1'' = P_1 - P_1' = 143,75$ Вт за рахунок взаємної індукції, тобто за допомогою магнітного поля, передається в другу гілку, де і перетворюється в тепло.

Задача № 2

Знайти взаємну індуктивність M двох індуктивно зв'язаних котушок при їх послідовному з'єднанні, якщо електровимірювальні прилади при узгодженому та

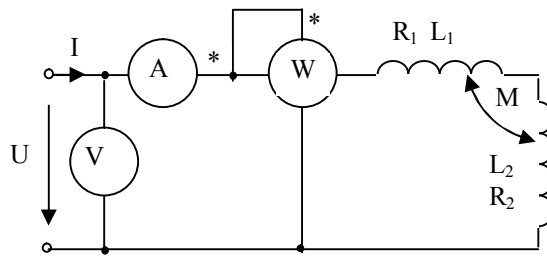


Рис. P5.2

зустрічному включенні котушок показали (рис. P5.2):

– в першому досліді:

$$U_1 = 120 \text{ В}, I_1 = 12 \text{ А}, P_1 = 864 \text{ Вт},$$

– в другому досліді:

$$U_2 = 60 \text{ В}, I_2 = 5 \text{ А}, P_2 = 150 \text{ Вт}.$$

В якому досліді індуктивні котушки були ввімкнені узгоджено?

Розв'язування

1. Знаходимо повний опір кола в першому та другому досліді:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{120}{12} = 10 \text{ Ом} . \quad Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{60}{5} = 12 \text{ Ом} .$$

При узгодженому ввімкненні індуктивних котушок їх еквівалентна індуктивність більша, чим при зустрічному ($L_y > L_3$) тому $Z_y > Z_3$. Таким чином в другому досліді котушки були включені узгоджено.

2. Визначимо індуктивність L_y та L_3 :

$$Z_y = Z_2 = 12 \text{ Ом} , \quad R_y = R_1 + R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{150}{5^2} = 6 \text{ Ом} .$$

$$X_y = \omega L_y = \sqrt{Z_y^2 - R_y^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10,4 \text{ Ом} .$$

$$L_y = \frac{X_y}{\omega} = \frac{10,4}{\omega} \text{ Гн} .$$

$$Z_3 = Z_1 = 10 \text{ Ом} , \quad R_3 = R_y = R_1 + R_2 = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{864}{144} = 6 \text{ Ом} .$$

$$X_3 = \omega L_3 = \sqrt{Z_3^2 - R_3^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ Ом} , \quad L_3 = \frac{X_3}{\omega} = \frac{8}{\omega} \text{ Гн} .$$

3. Розрахуємо взаємну індуктивність

$$M = \frac{L_y - L_3}{4} = \frac{10,4 - 8}{4\omega} = \frac{2,4}{4\omega} = \frac{0,6}{\omega} \text{ Гн} .$$

Таким чином, для визначення взаємної індуктивності двох індуктивно зв'язаних котушок достатньо виконати два досліди: – при узгодженому та зустрічному їх ввімкненні та послідовному з'єднанні.

Задача № 3

Розрахувати електричне коло (рис. P5.3), якщо $U = 200 \text{ В}$, $X_1 = \omega L_1 = 20 \text{ Ом}$, $X_4 = \omega L_4 = 10 \text{ Ом}$, $X_3 = \frac{1}{\omega c_3} = 20 \text{ Ом}$, $X_2 = \omega L_2 = 10 \text{ Ом}$, $X_M = \omega M = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$. Перевірити баланс потужностей.

Розв'язування

1. Скористаємося методом контурних струмів:

$$\begin{aligned} (\underline{z}_1 + \underline{z}_3) \underline{I}_I - (\underline{z}_3 + \underline{z}_M) \underline{I}_{II} &= \underline{U} , \\ -(\underline{z}_3 + \underline{z}_M) \underline{I}_I + (\underline{z}_2 + \underline{z}_3 + \underline{z}_4) \underline{I}_{II} &= 0 , \end{aligned}$$

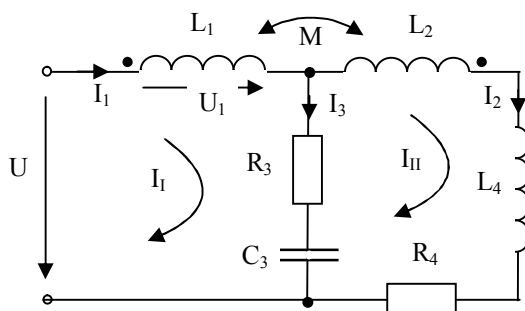


Рис. P5.3

де:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= j\omega L_1 = j20 \text{ Ом} ; \\ \underline{z}_3 &= R_3 - j \frac{1}{\omega c_3} = 10 - j20 \text{ Ом} ; \\ \underline{z}_M &= j\omega M = j10 \text{ Ом} ; \\ \underline{z}_2 &= j\omega L_2 = j10 \text{ Ом} ; \\ \underline{z}_4 &= R_4 + j\omega L_4 = 10 + j10 \text{ Ом} . \end{aligned}$$

2. Підставимо числові

значення:

$$\begin{aligned} 10 \underline{I}_I - (10 - j10) \underline{I}_{II} &= 200 , \\ - (10 - j10) \underline{I}_I + 20 \underline{I}_{II} &= 0 , \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \underline{I}_I - (1 - j) \underline{I}_{II} &= 20 , \\ - (1 - j) \underline{I}_I + 2 \underline{I}_{II} &= 0 . \end{aligned}$$

3. Розрахуємо систему рівнянь відносно \underline{I}_I та \underline{I}_{II}

$$\begin{aligned} 2\underline{I}_{II} &= (1-j)\underline{I}_I, & \underline{I}_{II} &= \frac{(1-j)}{2}\underline{I}_I, \\ \underline{I}_I - \frac{(1-j)(1-j)}{2}\underline{I}_I &= 20, & \underline{I}_I(2-1+2j+1) &= 40. \\ \underline{I}_I &= \frac{20}{1+j} = 10 - j10 \text{ A}, \\ \underline{I}_{II} &= \frac{(1-j)(10-j10)}{2} = 5(1-j)^2 = 5(1-2j-1) = -j10 \text{ A}. \end{aligned}$$

4. Визначимо струми в кожній гілці:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_I = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ A}, \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{II} = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ A}, \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_I - \underline{I}_{II} = 10 - j10 + j10 = 10 \text{ A}. \end{aligned}$$

5. Перевіримо баланс потужностей:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 200(10 + j10) = 2000 + j2000 = 2000\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ ВА},$$

$$P = 2000 \text{ Вт}, \quad Q = 2000 \text{ вар.}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^*, \quad \text{де} \\ \underline{U}_1 &= jX_1 \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2 = j20(10 - j10) - j10(-j10) = j200 + 200 - 100 = \\ &= 100 + j200 \text{ В}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= (100 + j200)(10 + j10) = -1000 + j3000 = 3200e^{j109^\circ 30'} \text{ ВА} \\ P_1 &= -1000 \text{ Вт}, \quad Q_1 = 3000 \text{ вар.} \end{aligned}$$

Активна потужність P_I передається від магнітного поля другої котушки.

$$\begin{aligned} \underline{S}_2 &= \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^*, \\ \underline{U}_2 &= jX_2 \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1 = j10(-j10) - j10(10 - j10) = -j100 \text{ В}, \\ \underline{S}_2 &= -j100(j10) = 1000 \text{ ВА}, \\ P_2 &= 1000 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_3 &= \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_3^* = \underline{z}_3 \underline{I}_3^2 = (10 - j20)100 = 1000 - j2000 \text{ ВА}, \\ P_3 &= 1000 \text{ Вт}; \quad Q_3 = -2000 \text{ вар.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_4 &= \underline{U}_4 \cdot \underline{I}_2^* = \underline{z}_4 \underline{I}_2^2 = (10 + j10)100 = 1000 + j1000 \text{ ВА}, \\ P_4 &= 1000 \text{ Вт}; \quad Q_4 = 1000 \text{ вар.} \end{aligned}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = -1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 2000 \text{ Вт}.$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 3000 + 0 - 2000 + 1000 = 2000 \text{ вар.}$$

Зміст

Теоретичні основи електротехніки. Частина I.

Розділ I. Лінійні електричні кола постійного струму.....	3
Вступ.....	3
Тема 1. Елементи та параметри електричних кіл.....	3
1.1. Електричне коло та його елементи.....	3
1.2. Позитивний напрямок електричного струму та напруги.....	4
1.3. Пасивні елементи електричного кола.....	5
1.3.1. Резистори.....	5
1.3.2. Індуктивна котушка.....	6
1.3.3. Конденсатори.....	7
1.4. Активні елементи електричного кола та їх параметри.....	8
1.4.1. Джерело електрорушійної сили	9
1.4.2. Джерела струму.....	10
1.4.3. Еквівалентні перетворення джерел.....	11
1.5. Лінійні електричні кола та геометрія електричного кола.....	11
Тема 2. Теорія та розрахунок електричних кіл постійного струму.....	14
2.1. Основні закони електричних кіл.....	14
2.1.1. Закон Ома для ділянки кола.....	14
2.1.2. Перший закон Кірхгофа.....	15
2.1.3. Другий закон Кірхгофа.....	15
2.1.4. Закон Джоуля-Ленца.....	17
2.2. Потенціальна діаграма.....	17
2.3. Еквівалентні перетворення електричних кіл.....	18
2.3.1. Послідовне з'єднання резисторів.....	18
2.3.2. Паралельне з'єднання резисторів.....	18
2.3.3. Змішане з'єднання резисторів.....	20
2.3.4. З'єднання резисторів "зіркою та "трикутником".....	21
2.4. Складне електричне коло.....	23
2.5. Розрахунок складних електричних кіл методом рівнянь Кірхгофа.....	25
2.6. Баланс потужностей.....	27
2.7. Розрахунок складних електричних кіл методом контурних струмів.....	27
2.8. Розрахунок складних електричних кіл методом вузлових потенціалів. Коло з двома вузлами.....	29
2.9. Метод еквівалентного генератора.....	31
2.10. Принцип та метод накладання.....	34
2.11. Метод пропорційного перерахування.....	36
2.12. Принцип компенсації та взаємності.....	38
2.13. Енергія і потужність кола постійного струму.....	39
2.14. Передача енергії від активного двополюсника приймачу. Умови передачі максимальної потужності.....	40
Приклади розрахунку електричних кіл постійного струму.....	42

Розділ II. Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму в усталених режимах.....	57
Тема 3. Теорія та розрахунок лінійний електричних кіл однофазного синусоїдного струму.....	57
3.1. Основні визначення.....	57
3.2. Одержання синусоїдної ЕРС.....	57
3.3. Синусоїдна напруга і струм. Часова діаграма. Зсув фаз.....	58
3.4. Векторні діаграми.....	59
3.5. Діючі та середні значення змінних струмів, ЕРС, напруг.....	60
3.6. Заміна реальних кіл змінного струму колами з зосередженими параметрами.....	62
3.7. Кола синусоїдного струму з резистором.....	63
3.8. Електричне коло синусоїдного струму з індуктивною котушкою.....	64
3.9. Електричне коло синусоїдного струму з конденсатором.....	66
3.10. Розрахунок електричного кола синусоїдного струму з послідовним з'єднанням R, L, C	68
3.11. Розрахунок кола синусоїдного струму з паралельним з'єднанням R, L, C	71
3.12. Енергетичні процеси в колах змінного струму.....	73
3.13. Еквівалентні параметри лінійного пасивного двополюсника.....	74
3.14. Основні положення символічного методу.....	76
3.15. Застосування символічного методу для розрахунку кіл синусоїдного струму.....	78
3.16. Комплексний електричний опір та комплексна електрична провідність.....	79
3.17. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі.....	80
3.18. Визначення комплексної повної потужності за комплексною напругою та комплексним струмом.....	81
3.19. Баланс потужностей.....	81
3.20. Розрахунок кіл синусоїдного струму символічним методом.....	82
3.21. Топографічна діаграма.....	84
3.22. Кругові діаграми.....	86
Приклади розрахунку електричних кіл синусоїдного струму.....	91
Тема 4. Резонансні явища в електричних колах.....	101
4.1. Резонанс напруг.....	101
4.2. Добротність та згасання контуру.....	103
4.3. Частотні характеристики кола з послідовним з'єднанням R, L, C	103
4.4. Резонанс струмів, добротність та згасання контуру.....	105
4.5. Частотні характеристики кола з паралельним з'єднанням R, L, C	106
4.6. Енергетичні процеси при резонансі.....	108
4.7. Підвищення коефіцієнта потужності, практичне значення.....	109
Приклади розрахунку електричних резонансних кіл.....	110
Тема 5. Електричні кола з взаємною індукцією.....	115
5.1. Взаємна індукція в колах змінного струму.....	115
5.2. Послідовне з'єднання котушок при їх узгодженому та	

зустрічному включенні.....	118
5.3. Паралельне з'єднання котушок при їх узгодженому та зустрічному включенні.....	119
5.4. Повітряний трансформатор.....	121
5.4.1. Основні рівняння повітряного трансформатора.....	121
5.4.2. Режими роботи трансформатора.....	122
5.4.3. Схема заміщення трансформатора.....	123
Приклади розрахунку електричних кіл з взаємною індукцією.....	125