Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Факультет кібербезпеки, комп'ютерної та програмної інженерії
Кафедра комп'ютеризованих систем управління

Лабораторна робота № 1.3
з дисципліни «Дослідження операцій»
на тему «Симплексний метод розв'язку задачі лінійного програмування.
Метод штучного базису»

Виконала:
студентка ФККПІ
групи СП-425
Ульчич І. Г.
Перевірила:
Яковенко Л. В.

Київ 2019

1. Завдання роботи

Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Хід роботи

Щоб розв'язати поставлену задачу симплексним методом, спочатку треба звести її до матричного вигляду. Нехай $\boldsymbol{c}$ — вектор коефіцієнтів при керованих змінних у цільовій функції, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{ub}}$ — матриця коефіцієнтів при керованих змінних у нерівностях обмежень зверху, $\boldsymbol{x}$ — вектор керованих змінних, $\boldsymbol{b}_{\mathbf{ub}}$ — вектор вільних членів при нерівностях обмежень зверху, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{eq}}$ — матриця коефіцієнтів при керованих змінних у рівняннях обмежень, $\boldsymbol{b}_{\mathbf{eq}}$ — вектор вільних членів при рівняннях обмежень, $\boldsymbol{l}$ — вектор обмежень керованих змінних знизу, $\boldsymbol{u}$ — вектор обмежень керованих змінних зверху. Тоді задачу лінійного програмування можна представити так:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \quad \text{враховуючи такі обмеження:} \quad \boldsymbol{A}_{\mathbf{ub}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}_{\mathbf{ub}},\ \boldsymbol{A}_{\mathbf{eq}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{\mathbf{eq}},\ \boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{u}.$$

Так як у загальному вигляді задача лінійного програмування має на увазі мінімізацію, а за умовою дана задача максимізації, то перетворимо дану задачу максимізації L в еквівалентну задачу мінімізації L'. Для цього досить помножити коефіцієнти цільової функції задачі L на -1. Тоді оптимальні розв'язки еквівалентної задачі мінімізації L' при цільовому значенні $-z$ будуть оптимальними розв'язками задачі максимізації L при цільовому значенні z. Отже, цільова функція для еквівалентної задачі мінімізації L' виглядатиме так:

$$L' = -L(x) = -(-4x_1 - 3x_2 + 2x_3) = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3.$$

Крім цього, одне з обмежень — нерівність виду $\boldsymbol{ax} \geqslant b$, приведемо її до вигляду $\boldsymbol{ax} \leqslant b$. Для цього помножимо обидві частини нерівності $x_2 + x_3 \geqslant 1$ на -1, змінимо знак і отримаємо нерівність $-x_2 - x_3 \leqslant -1$. Тоді маємо задачу:

$$L' = 4x_1 + 3x_2 + -2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 0x_1 + -1x_2 + -1x_3 \leqslant -1, \\ -1x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leqslant 5, \\ -2x_1 + 4x_2 + -1x_3 = 1, \\ 0 \leqslant x_i \leqslant \infty, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Запишемо задачу у матричному представленні:

$$\boldsymbol{c} = (4, 3, -2) \quad \boldsymbol{A}_{\mathbf{ub}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{\mathbf{ub}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{eq}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{\mathbf{eq}} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Отримане матричне представлення подає умову задачі у вигляді, зручному для програмного розв'язання симплекс-методом. Отримавши зручне представлення умови задачі, розробляємо програму, яка розв'яже поставлену задачу (лістинг А.1), і запускаємо її (рис. 1).

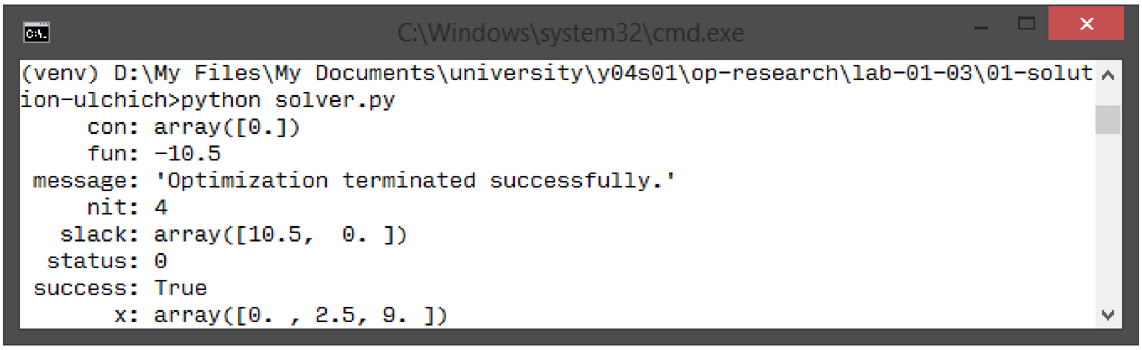

Рис. 1: Результат розв'язання задачі програмою

В результаті бачимо, як розроблена програма розв'язала поставлену задачу. Розв'язки наведені у рядку `x: array([0. , 2.5, 9.])`. Це означає, що оптимальними розв'язками є такий набір значень: $(x_1 = 0, x_2 = 2{,}5, x_3 = 9)$. При таких значеннях керованих змінних цільова функція еквівалентної задачі мінімізації набуває значення $L'(\boldsymbol{x}) = z = -10{,}5$. Отже, значення цільової функції для початкової задачі максимізації L при знайдених значеннях буде дорівнювати $L(\boldsymbol{x}) = -z = 10{,}5$.

3. Висновок

Виконуючи дану лабораторну роботу, ми навчились використовувати симплекс-метод для розв'язання задач лінійного програмування, а також розробляти програмне забезпечення для допомоги при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом.

А. Програма для розв'язку поставленої задачі

Лістинг А.1: Початковий код програми для розв'язання поставленої задачі лінійного програмування симплекс-методом

```
from scipy.optimize import linprog

# Objective function coefficients
c = [4, 3, -2]

# Upper bound ineqality constraints coefficients
A_ub = [
    [ 0, -1, -1],
    [-1,  2,  0],
]

# Upper bound inequality (less than) constraints vector
b_ub = [
    -1,
     5
]

# Equation constraints coefficients
A_eq = [
    [-2, 4, -1],
]
# Equation constraints vector
b_eq = [
    1,
]

# Variable bounds (x_{1, 2, 3} \geqslant 0)
x1_bounds = (0, None)
x2_bounds = (0, None)
x3_bounds = (0, None)

# Solve the problem
res = linprog(
    c=c,
    A_ub=A_ub,
    b_ub=b_ub,
    A_eq=A_eq,
    b_eq=b_eq,
    bounds=[x1_bounds, x2_bounds, x3_bounds],
    method="simplex",
)
```

```python
# Print the result
print(res)
```

Лістинг A.2: Файл з описом залежностей розробленої програми

```
numpy==1.17.2
scipy==1.3.1
```