Лабораторна робота №2
Моделювання випадкових подій

Мета роботи – ознайомитися з алгоритмами моделювання результатів випробувань випадкових подій; побудувати імітаційну модель функціонування системи протягом деякого часу.

Короткі теоретичні відомості

При побудові алгоритмів, які моделюють будь-який складний процес для розв’язання задачі методом статистичних випробувань, доводиться працювати із випадковими об’єктами різноманітної природи. Зокрема, в багатьох випадках виникає необхідність моделювання результатів незалежних або залежних випробувань в схемі випадкових подій.

Нехай в результаті випробувань подія A наступає з ймовірністю p, протилежна подія $\overline{A}$ – з ймовірністю $1 - p$. Для того щоб імітувати результат випробувань, вибираючи випадкове число із сукупності з рівномірним законом розподілу в інтервалі [0, 1], необхідно подію A замінити деякою іншою подією B, яка може відбутися з тією ж ймовірністю. Отже, виконаємо випробування відносно події B. Якщо при імітаційному випробуванні відбудеться подія B, то будемо вважати, що в імітаційній схемі відбулася подія A; здійснення події $\overline{B}$ поставимо у відповідність здійсненню події $\overline{A}$ імітаційної схеми.

Далі, нехай X – випадкова величина з рівномірним законом розподілу в інтервалі [0, 1]. Визначимо подію B як подію, що полягає в тому, що вибране значення ξ випадкової величини X виявиться меншим або рівним p:

$$B=\{\xi \le p\} \tag{2.1}$$

Ймовірність події B визначаємо за формулою: $P(B) = \int_0^p dx = p.$

Таким чином, отримаємо, що $P(B) = P(A)$, то подію B може імітувати подія A. Протилежна подія $\overline{B}$ визначається як

$$\overline{B} =\{\xi > p\}, \tag{2.2}$$

тому $P(\overline{B}) = \int_p^1 dx = 1 - p = P(\overline{A}).$

Складемо алгоритм моделювання результату випробування в вказаній схемі.

Вибираємо випадкове число ξ із сукупності з рівномірним законом розподілу в інтервалі [0, 1] та порівнюємо його із p.

Якщо виконується умова:

$$\xi < p \tag{2.3}$$

(тобто відбулася подія B, що визначається за (2.1)), то результатом випробування вважаємо A.

Якщо умова (2.3) не виконується, тобто відбулася подія $\overline{B}$, яка визначається за умовою (2.2), то вважаємо, що результатом випробування є подія $\overline{A}$.

В загальному випадку маємо A_1, A_2, …, A_s – повну групу несумісних подій, що відбуваються з ймовірностями p_1, p_2, …, p_s відповідно. В цьому випадку $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = 1$.

Визначимо імітаційну повну групу несумісних подій B_1, B_2, …, B_s наступним чином. Подія B_m (m =1, 2, …, s) полягає в тому, що вибрані значення ξ випадкової величини X задовольняють нерівностям

$$lm\text{-}1 < \xi \le lm, \tag{2.4}$$

де

$$l_r = \sum_{i=1}^{r} p_i. \tag{2.5}$$

В такому випадку $P(B_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = p_m = P(A_m).$

Цю процедуру іноді називають «вибором за жеребкуванням». Моделюючий алгоритм для імітації результату випробувань в даній схемі полягає в наступному.

Формуємо довільно випадкове число ξ вихідної рівномірної сукупності та порівнюємо його послідовно із всіма величинами l_r, що визначаються рівностями (2.5), а так як група подій B_1, B_2, …, B_s повна, то обов'язково відбудеться будь-яка подія B_m, яка полягає в виконанні нерівностей (2.4); тоді вважаємо, що результатом імітаційного випробування є подія A_m.

При розв'язані прикладних задач часто доводиться моделювати *сумісні випробування*. Розберемо принципи такого моделювання на простому прикладі.

Нехай *незалежні події* A_1 і A_2 мають ймовірності p_1 і p_2 відповідно. Для моделювання результату сумісних випробувань необхідно довільно вибрати два випадкових числа та здійснити два порівняння, послідовно перевіряючи умову, аналогічну (2.3), відносно подій A_1 і A_2.

В іншому випадку сумісні випробування мають повну групу можливих результатів з відповідними ймовірностями:

$$AB = p_1 p_2$$
$$\overline{A}B = (1 - p_1) p_2$$
$$A\overline{B} = p_1 (1 - p_2)$$
$$\overline{A}\overline{B} = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

Для моделювання результату сумісних випробувань необхідно визначити один із можливих станів. Для цього необхідно вибрати одне випадкове число ξ, але порівнянь може бути набагато більше.

Використання одного або іншого варіанту полягає в зручності побудови алгоритму, економії машинного часу та оперативної пам'яті. Звичайно перший варіант виявляється більш економічним, ніж другий.

При сумісних випробуваннях може статися, що події A_1 і A_2 - *залежні*. В такому випадку нехай задані p_1 і p_2 - ймовірності безумовного настання відповідно подій A_1 і A_2 та $P(A_2| A_1)$ - умовна ймовірність події A_2 за умови, що відбулася подія A_1. Так само, як і у разі моделювання незалежних сумісних випробувань, тут можна проводити моделювання по двох алгоритмах.

Перший алгоритм можна побудувати таким чином.

Вибираємо випадкове число ξ_1 із сукупності з рівномірним законом розподілу і перевіряємо умову:

$$\xi_1 \le p_1 \tag{2.6}$$

Виконання умови (2.6) означає здійснення події A_1, а, отже, при моделюванні випробування щодо події A_2 потрібно скористатися ймовірністю $P(A_2| A_1)$. Для цього вибираємо наступне випадкове число ξ_2 і перевіряємо умову

$$\xi_2 \le P(A_2 \mid A_1) \tag{2.7}$$

Якщо умова (2.7) виконана, то ми отримаємо кінцевий результат: відбулася подія A_1A_2. Якщо ж умова (2.7) не виконана, то кінцевий результат сумісних випробувань буде $A_1\overline{A_2}$.

Ми розглянули ланцюжок алгоритму за умови виконання нерівності (2.6); якщо ж воно виявилося невиконаним, то відбулася подія $\overline{A_1}$ і надалі нам потрібна ймовірність $P(A_2 | \overline{A_1})$, яку легко визначити, користуючись теоремою про повну ймовірність:

$$P(A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2| A_1) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2 | \overline{A_1}) \tag{2.8}$$

Визначаючи із співвідношення (2.8) ймовірність $P(A_2 | \overline{A_1})$ та замінюючи $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, отримаємо

$$P(A2 | \overline{A_1}) = \frac{p_2 - p_1 P(A_2 \mid A_1)}{1 - p_1} \tag{2.9}$$

Потім знову витягуємо випадкове число ξ_2, перевіряємо виконання нерівності

$$\xi_2 \le P(A_2 \mid \overline{A_1}) \tag{2.10}$$

і одержуємо кінцевий результат випробувань: $\overline{A_1}A_2$ або $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$, залежно від того, виконується нерівність (2.10) або ні.

Другий алгоритм моделює здійснення однієї події з повної групи A_1A_2, $A_1\overline{A_2}$, $\overline{A_1}A_2$ і $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ з відповідними ймовірностями:

$$A_1A_2 = p_1P(A_2 \mid A_1)$$
$$A_1\overline{A_2} = p_1[1 - P(A_2 \mid A_1)]$$
$$\overline{A_1}A_2 = (1 - p_1)P(A_2 \mid \overline{A_1})$$
$$\overline{A_1}\,\overline{A_2} = (1 - p_1)[1 - P(A_2 \mid \overline{A_1})]$$

де $P(A_2 \mid \overline{A_1})$ визначається співвідношенням (2.9).

Необхідно відзначити, що алгоритми в розглянутих прикладах опиняються справедливими лише у тому випадку, коли при моделюванні використовуються випадкові числа, вибрані з сукупності з рівномірним розподілом ймовірності в інтервалі [0, 1].

Проте, при реалізації алгоритмів на комп'ютері можуть бути використані лише випадкові числа ξ^* з квазірівномірним розподілом. Якщо випадкові числа, які використовуються при моделюванні, виявляються малорозрядними, то в алгоритми необхідно ввести деякі зміни для того, щоб уникнути грубих помилок в результатах моделювання.

Зупинимося детальніше на особливостях, пов'язаних із застосуванням квазірівномірних випадкових чисел.

Розглянемо спочатку моделювання випробування з двома результатами A і $\overline{A}$. В цьому випадку ми імітували результати A і $\overline{A}$ подіями B і $\overline{B}$, певними формулами (2.11) та (2.12):

У разі використання рівномірно розподілених випадкових чисел ξ

$$P(A) = P(B),\ P(\overline{A}) = P(\overline{B}). \tag{2.11}$$

Якщо ж замість події B визначити подію B^*:

$$B^* = \{\xi^* \le p\}, \tag{2.12}$$

де ξ^* — квазірівномірне випадкове число з інтервалу [0, 1], тоді рівності $P(B^*) = P(A)$, $P(\overline{B^*}) = P(\overline{A})$ будуть вже, взагалі кажучи, несправедливими. Покажемо це.

Нехай ξ^* — k–розрядне випадкове число із сукупності квазірівномірних випадкових чисел. Тоді його можна представити у вигляді $\xi^* = \frac{i}{2^k - 1}$, де i – одне з чисел 0, 1, 2, ..., 2k – 1.

Для будь-якого значення ймовірності p можна підібрати таке ціле невід'ємне число $t<2^k - 1$, що буде виконуватись співвідношення:

$$\frac{t}{2^k - 1} \le p < \frac{t+1}{2^k - 1} \tag{2.13}$$

Знайдемо ймовірність події B^*, що визначається за формулою (2.12). Цю ймовірність $P(B^*)$ можна визначити статистично, тобто відношенням кількості n чисел, менших або рівних p, до загальної кількості N всіх чисел в квазірівномірній сукупності k–розрядних чисел. Як відомо, $N=2^k$, а числа, менші p, очевидно, мають вигляд $\frac{j}{2^k - 1}$, де j = 0, 1, 2, ... t; кількість таких чисел $n=t+1$.

Таким чином,

$$P(B^*) = \frac{t+1}{2^k}. \tag{2.14}$$

Порівнюючи співвідношення (2.13) та (2.14), ми можемо зробити наступний висновок: для будь-яких значень *p* в межах (2.13) ймовірність події *B** постійна і визначена (2.14).

Визначимо максимально можливе значення помилки Δp = P(B*) – P(A). Із (2.13) та (2.14) бачимо, що

$$\Delta p_{\max} = \frac{t+1}{2^k - 1} - \frac{t}{2^k - 1} = \frac{1}{2^k - 1} \tag{2.15}$$

Із (2.15) бачимо, що із збільшенням *k* величина помилки Δp швидко спадає, тому нею можна знехтувати при достатньо великій розрядності випадкових чисел.

Аналогічну картину ми маємо і в складнішому випадку — у випадку, коли число результатів випробувань більше двох.

Окрім збільшення розрядності випадкових чисел, для зменшення впливу помилок, пов'язаних з використанням квазірівномірних випадкових чисел, можна вказати ще один шлях — ускладнення алгоритму моделювання випробувань. Наприклад, можна використовувати комбінації подій, що наступають при повторенні випробувань, або інші частинні прийоми, пов'язані з багатократним вибором випадкових чисел, рівномірно розподілених на інтервалі[0, 1].

Зразок розв'язання задачі

Задача 1. Прилад, що працює протягом часу *t*, складається з трьох вузлів, кожний з яких незалежно від інших може протягом часу *t* вийти з ладу. Ймовірність безвідмовної роботи першого вузла дорівнює p_1= 0,8, другого p_2 = 0,9, третього p_3 = 0,7. Скласти модель роботи приладу протягом часу *t*.

Розв'язання.

I спосіб. Вибираємо випадкове число $\xi_1 \in [0, 1]$ з сукупності із рівномірним законом розподілу та порівнюємо його з 0,8. Якщо $\xi_1 \le 0,8$, то вважаємо, що перший вузол приладу працює безвідмовно; якщо ж $\xi_1 > 0,8$, то вважаємо, що перший вузол приладу вийшов з ладу. Потім вибираємо випадкове число ξ_2, порівнюємо його з 0,9. При $\xi_2 \le 0,9$ вважаємо, що другий вузол приладу працює безвідмовно, при $\xi_2 > 0,9$ фіксуємо відмову другого вузла приладу. І нарешті, вибравши випадкове число ξ_3 і порівнявши його з 0,7, визначаємо при $\xi_3 \le 0,7$, що третій вузол приладу працює безвідмовно, а при $\xi_3 > 0,7$ фіксуємо відмову третього вузла приладу.

II спосіб. Розглянемо повну групу можливих станів приладів протягом часу *t*. Нехай A_i означає подію, що полягає в тому, що *i*-й вузол приладу працює безвідмовно протягом часу *t* (*i* = 1, 2, 3). Тоді повну групу можливих несумісних станів, враховуючи, що події A_i незалежні, можемо записати ймовірності, які відповідають можливим станам приладу:

$A_1A_2A_3$=0,504	$A_1A_2\overline{A_3}$ =0,216	$A_1\overline{A_2}A_3$ =0,056	$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ =0,024
$\overline{A_1}A_2A_3$ =0,126	$\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$ 0,054	$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ =0,014	$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ =0,006

Тепер обчислимо $l_r = \sum_{i=1}^{r} p_i$:

0,504; 0,72; 0,776; 0,8; 0,926; 0,98; 0,994; 1.

Потім вибираємо випадкове число ξ_i з рівномірним законом розподілу на інтервалі [0, 1] та порівнюємо ξ_i з одержаними l_r. Нехай, наприклад, ξ_i = 0,68345, тоді виконується нерівність: 0,504 < 0,68345 < 0,72.

Отже, вважаємо, що відбулася подія, тобто перші два вузли за час *t* працюють безвідмовно, а третій вузол вийшов з ладу.

Задача 2. Два блоки агрегату пов'язані між собою. Ймовірність безвідмовної роботи першого блоку протягом часу *t* дорівнює 0,9. Ймовірність безвідмовної роботи другого блоку залежить від стану першого блоку. Якщо перший блок не вийшов з ладу, то ймовірність безвідмовної роботи другого блоку 0,8, а якщо вийшов з ладу, то 0,2. Скласти модель спільної роботи блоків протягом часу t.

Розв'язання.

<u>І спосіб</u>. Спочатку перевіряємо, як працює перший блок. Для цього вибираємо випадкове число $\xi_1 \in [0, 1]$ з рівномірним законом розподілу і порівнюємо його з ймовірністю безвідмовної роботи першого блоку. Якщо $\xi_1 \le 0,9$, то вважаємо, що перший блок працює безвідмовно; потім вибираємо випадкове число ξ_2 і порівнюємо його з умовною ймовірністю безвідмовної роботи другого блоку за умови безвідмовної роботи першого, тобто з 0,8. Якщо $\xi_2 \le 0,8$, то вважаємо, що другий блок працює безвідмовно, а якщо $\xi_2 > 0,8$, то вважаємо, що другий блок вийшов з ладу. Якщо ж виявилось, що $\xi_1 > 0,9$, то вважаємо, що перший блок вийшов з ладу, і в цьому випадку вибране друге випадкове число ξ_2 порівнюємо з умовною ймовірністю безвідмовної роботи за умови, що перший блок вийшов з ладу, тобто з 0,2. Якщо $\xi_2 \le 0,6$, то вважаємо, що другий блок працює безвідмовно, а якщо $\xi_2 > 0,6$, то фіксуємо відмову другого блоку.

<u>ІІ спосіб</u>. Як і в попередньому прикладі, складаємо повну групу несумісних подій: A_1A_2; $A_1\overline{A_2}$; $\overline{A_1}A_2$; $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$, де A_i – ймовірність безвідмовної роботи i-го блоку протягом часу t_i (i = 1, 2). Ймовірності, які відповідають перерахованим подіям, наступні: 0,72; 0,18; 0,06; 0,04.

Подальша процедура абсолютно аналогічна описаній в прикладі 1.

Завдання для самостійного виконання

1. Задано задачу 1 загального виду: система $S1$ працює протягом деякого часу t і складається з m підсистем, кожна з яких незалежно одна від одної може вийти з ладу продовж деякого часу t. Ймовірність безвідмовної роботи n_1 підсистеми $P(n_1)=p_1$, другої підсистеми $P(n_2)=p_2,\ldots$, n_k-тої підсистеми $P(n_k)=p_k$ ($k=\overline{1,m}$). Побудувати імітаційну модель функціонування системи $S1$ протягом часу t, використовуючи ГПВЧ на інтервалі (0; 1). Всі дані вводяться користувачем.

2. Задано задачу 2 загального виду: система $S2$ складається з двох підсистем, які пов'язані між собою. Ймовірність безвідмовної роботи першої підсистеми n_1 протягом часу t є $P(n_1)= p_1$. Ймовірність безвідмовної роботи другої підсистеми n_2 залежить від стану першої підсистеми. Якщо підсистема n_1 не вийшла з ладу, то ймовірність безвідмовної роботи другої підсистеми n_2 є $P(n_2)= p_2$, а якщо вийшла з ладу, то $P(n_2)= p_2$. Побудувати імітаційну модель функціонування системи $S2$ протягом часу t, використовуючи ГПВЧ на інтервалі (0; 1).