Лабораторна робота 7

ТЕОРІЯ ІГОР.
РІШЕННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР
У ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ

Мета: ознайомлення з теорією ігор, змішані стратегії.

Основні теоретичні відомості

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях може бути знайдено або графічно, або методами лінійного програмування. Графічний метод можна застосовувати для вирішення ігор, в яких хоч один гравець має дві *чисті стратегії*. Цей метод графічно пояснює поняття *сідлової точки*. Методами лінійного програмування може бути вирішена будь-яка гра двох осіб з нульовою сумою.

Графічне рішення ігор.

Розглянемо гру 2 × n, в якій гравець А має дві стратегії.

	y_1	y_2	...	y_n
	B_1	B_2	...	B_n
x_1: A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$1 - x_1$: A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Гра передбачає, що гравець А змішує стратегії A_1 і A_2 з відповідними можливостями x_1 і $1\text{-}x_1$, $0 \le x_1 \le 1$. Гравець В змішує стратегії $B_1, B_2, ..., B_n$ з вірогідністю $y_1, y_2, ..., y_n$, де $y_j \ge 0$, $j = 1, 2, ..., n$, і $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1$. В цьому випадку очікуваний виграш гравця А, що відповідає j-й чистій стратегії гравця В, обчислюється у вигляді $(a_{1j} - a_{2j})\ x_1 - a_{2j}$, $j = 1, 2, ..., n$.

Отже, гравець А шукає величину x_1, яка максимізує мінімум очікуваних виграшів

Приклад: Розглянемо наступну гру 2 × 4, в якій платежі виплачуються гравцеві А.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	–1
A_2	4	3	2	6

Гра не має рішення в чистих стратегіях, і, отже, стратегії повинні бути змішаними. Очікувані виграші гравця А, відповідні чистим стратегіям гравця В, наведені в наступній таблиці.

Чистые стратегии игрока *B*	Ожидаемые выигрыши игрока *A*
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

На рис. 7.1 зображені чотири прямі лінії, відповідні чистим стратегіям гравця В. Щоб визначити найкращий результат з найгірших, побудована нижня пряма огинає чотири зазначені прямі (вона позначена на малюнку товстими лінійними сегментами), яка представляє мінімальний (найгірший) виграш для гравця А незалежно від того, що робить гравець В. Максимум (найкраще) нижньої прямої, що огинає, відповідає максиміному рішенню в точці $x_1^* = 0,5$. Ця точка визначається перетином прямих 3 та 4. Отже, оптимальним рішенням для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з вірогідністю 0,5 і 0,5 відповідно. Відповідна ціна гри ν визначається підстановкою $x_1 = 0,5$ в рівняння або прямої 3, або 4, що приводить до наступного.

$$v = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 3,} \\ -7\left(\dfrac{1}{2}\right) + 6 = \dfrac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 4.} \end{cases}$$

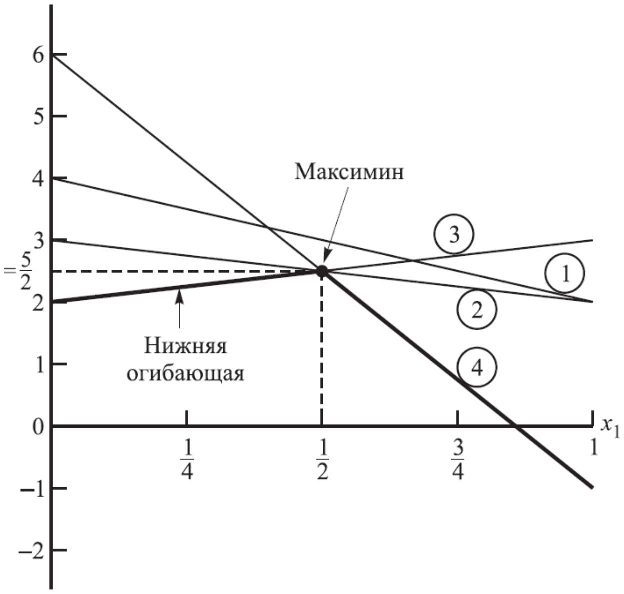

Рис. 7.1. Графічне рішення гри двох осіб з нульовою сумою

Оптимальна змішана стратегія гравця B визначається двома стратегіями, які формують нижню пряму, що огибає. Це означає, що гравець B може змішувати стратегії B_3 і B_4, в цьому випадку $y_1 = y_2 = 0$ і $y_4 = 1\text{-}y_3$. Відповідно, платежі що очікуються гравцем B, та відповідають чистим стратегіям гравця A, мають наступний вид.

Чистые стратегии игрока *A*	Ожидаемые платежи игрока *B*
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

Найкраще рішення з найгірших для гравця B є точкою мінімуму верхньої прямої, що огібає заданих двох прямих. Ця процедура еквівалентна рішенням рівняння:

$$4y_3 - 1 = - 4y_3 + 6.$$

Його рішенням є $y_3 = 7/8$, що визначає ціну гри $v = 4 \times (7/8) - 1 = 5/2$.

Таким чином, рішенням гри для гравця A є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними можливостями 0,5 і 0,5, а для гравця B змішування стратегій B_3 і B_4 з вірогідністю 7/8 і 1/8. (Насправді гра має альтернативне рішення для гравця B, так як Максиміна точка на рис.7.1 визначається більш ніж двома прямими. Будь-яка опукла лінійна комбінація цих альтернативних рішень також є рішенням задачі.)

Для гри, в якій гравець A має *m* стратегій, а гравець B тільки дві, рішення знаходиться аналогічно. Головна відмінність полягає в тому, що тут будуються графіки функцій, що представляють очікувані платежі другого гравця, відповідні чистим стратегіям гравця A. В результаті ведеться пошук мінімаксної точки верхньої обвідної побудованих прямих.

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

1. Вирішіть графічно гру з підкиданням монет (приклад з лабораторної роботи 6).

2. Робін часто їздить між двома містами. При цьому є можливість вибрати один з двох маршрутів: маршрут A являє собою швидкісне шосе в чотири смуги, маршрут B – довгу дорогу, що обдувається вітром.

Патрулювання доріг здійснюється обмеженим числом поліцейських.

Якщо все поліцейські розташовані на одному маршруті, Робін з її пристрасним бажанням їздити дуже швидко, без сумніву, отримає штраф у 100 дол. За перевищення швидкості.

Якщо поліцейські патрулюють на двох маршрутах в співвідношенні 50 на 50, то є 50% -ва ймовірність, що Робін отримає штраф у 100 дол. На маршруті A і 30% -ва ймовірність, що вона отримає такий же штраф на маршруті B. Крім того, маршрут B довше, тому бензину витрачається на 15 дол. більше, ніж на маршруті A. Визначте стратегію як для Робін, так і для поліції.

3. Вирішіть графічно наступні ігри, в яких платежі виплачують гравцеві A.

a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	–3	7
A_2	2	4	–6

b)

	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	6	5
A_3	5	7

4. Дана наступна гра двох осіб з нульовою сумою.

	B_1	B_2	B_3
A_1	5,0	50,0	50,0
A_2	1,0	1,0	0,1
A_3	10,0	1,0	10,0

Перевірте, що змішані стратегії з можливостями (1/6, 0, 5/6) для гравця A і з вірогідністю (49/54, 5/54, 0) для гравця B є оптимальними, та визначте ціну гри.

Контрольні питання:

1. Дати визначення поняттю змішана стратегія.
2. Графічний метод.
3. Метод лінійного програмування.
4. Дати визначення: чиста стратегія.
5. Поясніть теорію ігор.
6. Що таке стратегія?