4. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Постановка задачі математичного програмування

Кожна система має мету (ціль) розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимального прибутку або мінімізація витрат. Ступінь досягнення мети, як правило, має кількісну міру.

Побудуємо наступну математичну модель:

1. Опишемо величини, які будуть використовуватись в моделі:

- *параметри моделі* c_k $(k = 1,2,...,l)$ — числові характеристики системи, які є сталими величинами;
- *керовані змінні* x_i $(i = 1,2,...,n)$ — незалежні змінні характеристики моделі, які можуть змінюватись в певному інтервалі;
- *некеровані змінні* y_j $(j = 1,2,...,m)$ — незалежні змінні, значення яких носять об'єктивний характер (найчастіше їх значення залежать від зовнішнього середовища, а не від волі людини).
- величина z, яка вимірює ступінь досягнення мети системи.

2. Встановимо взаємозв'язки між величинами:

- *цільова функція*: $z = f(x_1,...,x_n; y_1,..., y_m; c_1,...,c_l)$ — функціональна залежність, яка встановлює взаємозв'язок між керованими та некерованими змінними і параметрами моделі;
- *система обмежень:*

$$\begin{cases} \varphi_1(x_i, y_j, c_k) \geq (=,>,<,\leq)0, \\ \ldots \\ \varphi_s(x_i, y_j, c_k) \geq (=,>,<,\leq)0; \end{cases}$$

виражає в математичній формі обмеження на вибір значень керованих змінних x_i, обумовлені зовнішніми щодо досліджуваної системи умовами (параметрами виробничо-економічної системи).

Задача математичного програмування полягає в знаходженні таких значень керованих змінних x_i, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Будь який набір значень змінних $(x_1,...,x_n)$, що задовольняє систему обмежень, називається *допустимим (або опорним) розв'язком (планом)*. Сукупність усіх розв'язків системи обмежень називається *областю існування розв'язків.*

Опорний розв'язок, при якому цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*.

Найпростішим випадком задач математичного програмування є *задачі лінійного програмування* (задачі, в яких цільова функція і система обмежень є лінійними).

5. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Постановка задачі лінійного програмування. Приклади

Розглянемо цільову функцію:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{5.1.1}$$

і систему обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Задача лінійного програмування формулюється наступним чином: знайти максимум або мінімум цільової функції (5.1.1) при виконанні умов (5.1.2). Тобто серед усіх розв'язків системи (5.1.2) знайти такі, в яких функція (5.1.1) набуває найбільшого або найменшого значення.

Розглянемо приклади задач, які приводять до задачі лінійного програмування.

Задача оптимального планування виробництва

Нехай для виробництва одного виду продукції існує n різних технологій і використовується m видів ресурсів. При цьому:

a_{ij} — кількість одиниць i-го ресурсу, що використовується по j-й технології за одиницю часу;

b_i — запас i-го ресурсу;

c_j — кількість продукції, що виробляється за одиницю часу.

Позначимо x_j — час, на протязі якого виробництво ведеться по j-й технології. Тоді, загальний випуск продукції описується функцією:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$

а використання i-го ресурсу становить:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Виникає *задача*: знайти такі значення $x_1, x_2, ..., x_n$, для яких при заданих запасах ресурсів випуск продукції буде максимальним. Тобто, маємо задачу лінійного програмування:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Задача планування оптимальної структури товарообігу

Нехай торгівельне підприємство реалізує n груп товарної продукції. Нормативні витрати ресурсів у розрахунку на одиницю продукції k-ї групи ($k = 1,2,...,n$) становлять:

- торгівельні площі a_{1k} м^2;
- фонд робочого часу a_{2k} год.;
- витрати обігу a_{3k} гр.од.;
- нормативний план на реалізацію a_{4k} гр.од.

Загальні ресурси:

- торгівельної площі b_1 м^2;
- фонду робочого часу b_2 год.;
- витрати обігу b_3 гр.од.

Від реалізації одиниці продукції k-ї товарної групи торговельне підприємство одержує прибуток c_k гр.од. ($k = 1,2,...,n$).

Задача: визначити структуру товарообігу, при якій досягається максимум прибутку, за умови, що реалізацію кожної групи товарів не менше запланованої.

Позначимо через x_k ($k = 1,2,...,n$) — кількість реалізованої продукції k-ї товарної групи.

Тоді прибуток від реалізації визначається функцією:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n,$$

а система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \le b_3, \\ x_1 \ge a_{41}, \\ ... \\ x_n \ge a_{4n}. \end{cases}$$

5.2. Графічний спосіб розв'язання задачі лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування для випадку, коли кількість керованих змінних дорівнює двом:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{5.2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

На координатній площині x_1Ox_2 кожна нерівність системи (5.2.2) визначає деяку півплощину. Отже, множина розв'язків системи — це множина точок, які належать перетину всіх півплощин (якщо він непорожній), тобто деякому многокутнику Ω, який називається *многокутником (областю) допустимих розв'язків.*

Якщо у виразі цільової функції (5.1.1) величину z сприймати як параметр, то отримаємо сім'ю прямих $c_1x_1 + c_2x_2 - z = 0$. При $z = 0$ матимемо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Вектор нормалі цієї прямої має координати $\vec{n} = (c_1; c_2)$. З іншого боку цей вектор є також вектором градієнта для цільової функції, оскільки:

$$\overrightarrow{grad\, z} = (z'_{x_1}; z'_{x_2}) = (c_1; c_2) = \vec{n}.$$

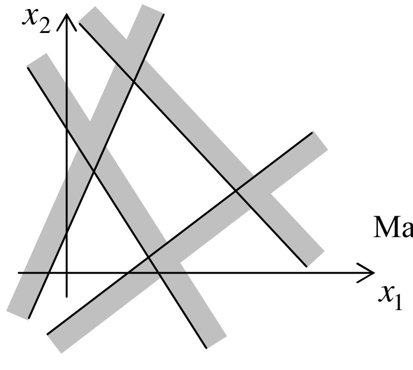
Тобто вектор $\vec{n}$ вказує напрям найбільшого зростання цільової функції (зауважимо, що напрям найшвидшого спадання задає вектор протилежний вектору $\vec{n}$).

Оскільки цільова функція, будучи лінійною, не може мати точок екстремуму, що лежать всередині області допустимих розв'язків, то вона набуває найбільшого і найменшого значень на межі області. В силу того, що система обмежень також є лінійною, можна зробити висновок, що найбільше і найменше значення цільової функції досягається у вершинах області допустимих розв'язків. Вершини многокутника допустимих розв'язків називаються *опорними розв'язками*.

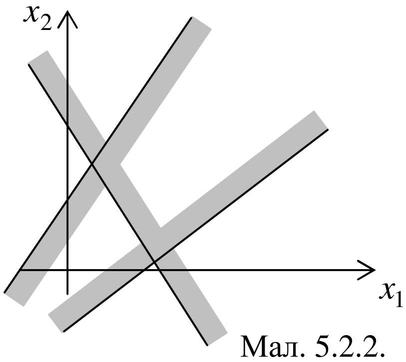
Враховуючи сказане вище, сформулюємо **алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом**:

1. Побудувати область допустимих розв'язків. При цьому можливі наступні випадки:

а) перетин півплощин є порожньою множиною (наприклад, див. мал. 5.2.1). Тоді система обмежень є несумісною і задача розв'язків не має.

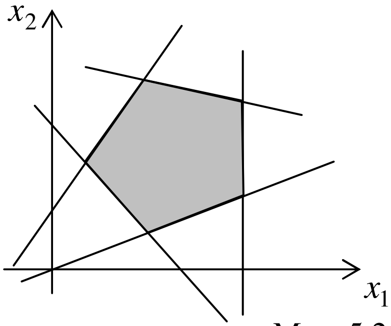


Мал. 5.2.1.



Мал. 5.2.2.

б) область допустимих розв’язків є незамкненою (наприклад, див. мал. 5.2.2). Тоді цільова функція є необмеженою і $\max z = \infty$ (або $\min z = -\infty$).



Мал. 5.2.3.

в) область допустимих розв’язків є замкненим багатокутником (наприклад, див. мал. 5.2.3). Тоді існує скінчений розв’язок задачі лінійного програмування.

2. Побудувати вектор $\vec{n} = (c_1; c_2)$ і пряму $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$, перпендикулярну до цього вектора. Знайти останню спільну точку прямої та багатокутника допустимих розв’язків, яку пройде пряма, рухаючись в напрямку вектора $\vec{n}$ (і не змінюючи свого напряму). В цій точці цільова функція набуватиме свого максимального значення. Для того, щоб знайти мінімальне значення, потрібно уявити, що пряма рухається в напрямку, протилежному до вектора $\vec{n}$.

Задача 5.2.1. Розв’язати задачу лінійного програмування графічним методом:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Побудуємо область допустимих розв’язків. Для цього побудуємо прямі:

$l_1: \ x_1 + 2x_2 = 6$,

x_1	0	6
x_2	3	0

Підставивши в першу нерівність координати точки (0;0), отримаємо правильну нерівність $0 \le 6$. Отже, перша нерівність визначає півплощину, в якій знаходиться точка O (на мал. ця півплощина позначена стрілкою).

$l_2:\ 2x_1 + x_2 = 8$,

x_1	0	4
x_2	8	0

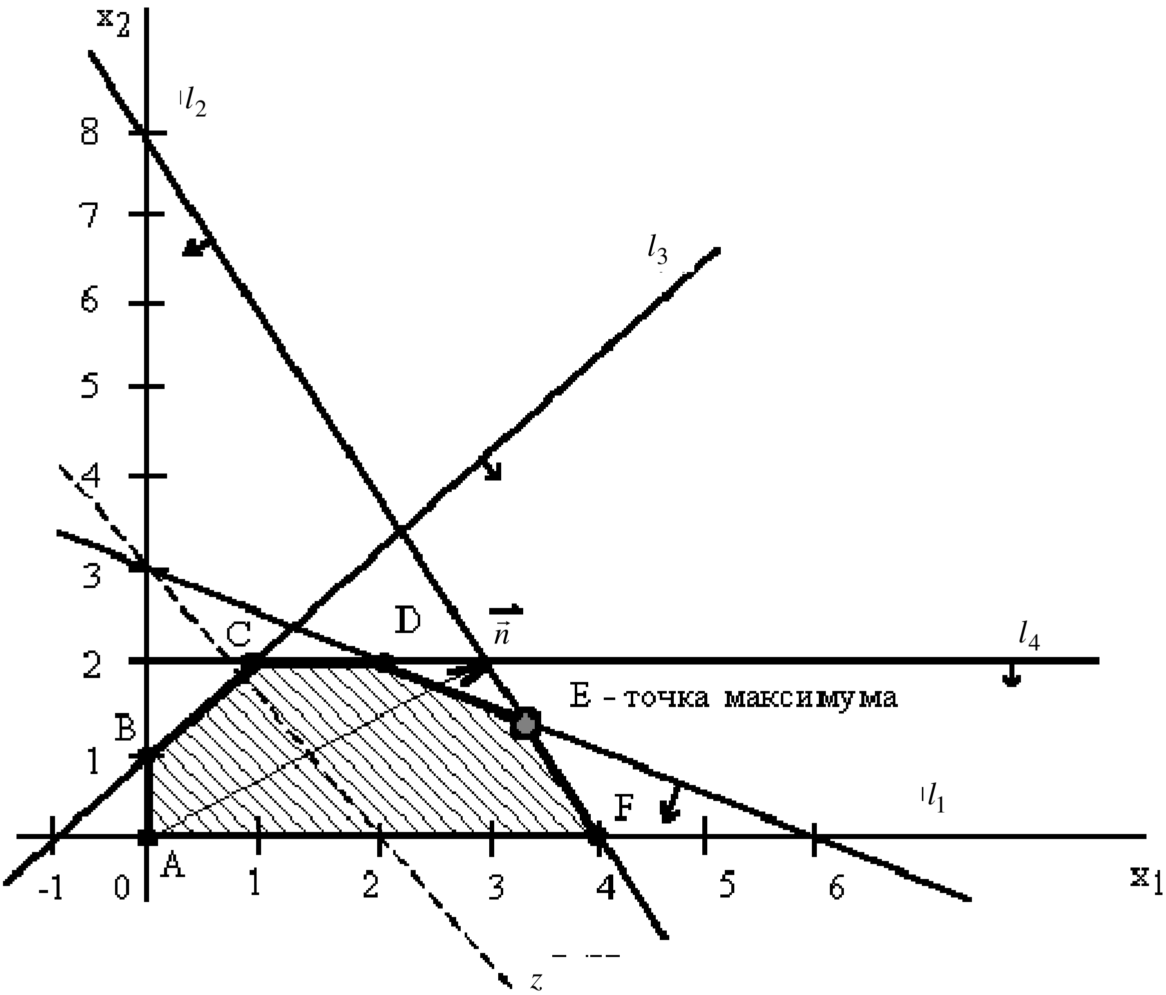
Аналогічно визначимо півплощину, яку визначає друга нерівність.

$l_3:\ -x_1 + x_2 = 1$,

x_1	0	-1
x_2	1	0

Аналогічно визначимо півплощину, яку визначає третя нерівність.

$l_4:\ x_2 = 2$ — пряма паралельна осі Ox. Нерівність $x_2 < 2$ визначає півплощину, яка лежить нижче прямої l_4.



Побудуємо вектор $\vec{n} = (3;2)$ і пряму, перпендикулярну до цього вектора. Точка E — це остання вершина багатокутника допустимих розв'язків ABCDEF, через яку проходить цільова пряма, рухаючись в напрямку вектора $\vec{n}$.

Визначимо координати точки E, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{10}{3}, \ \ x_2 = \frac{4}{3}.$$

Максимальне значення цільової функції:

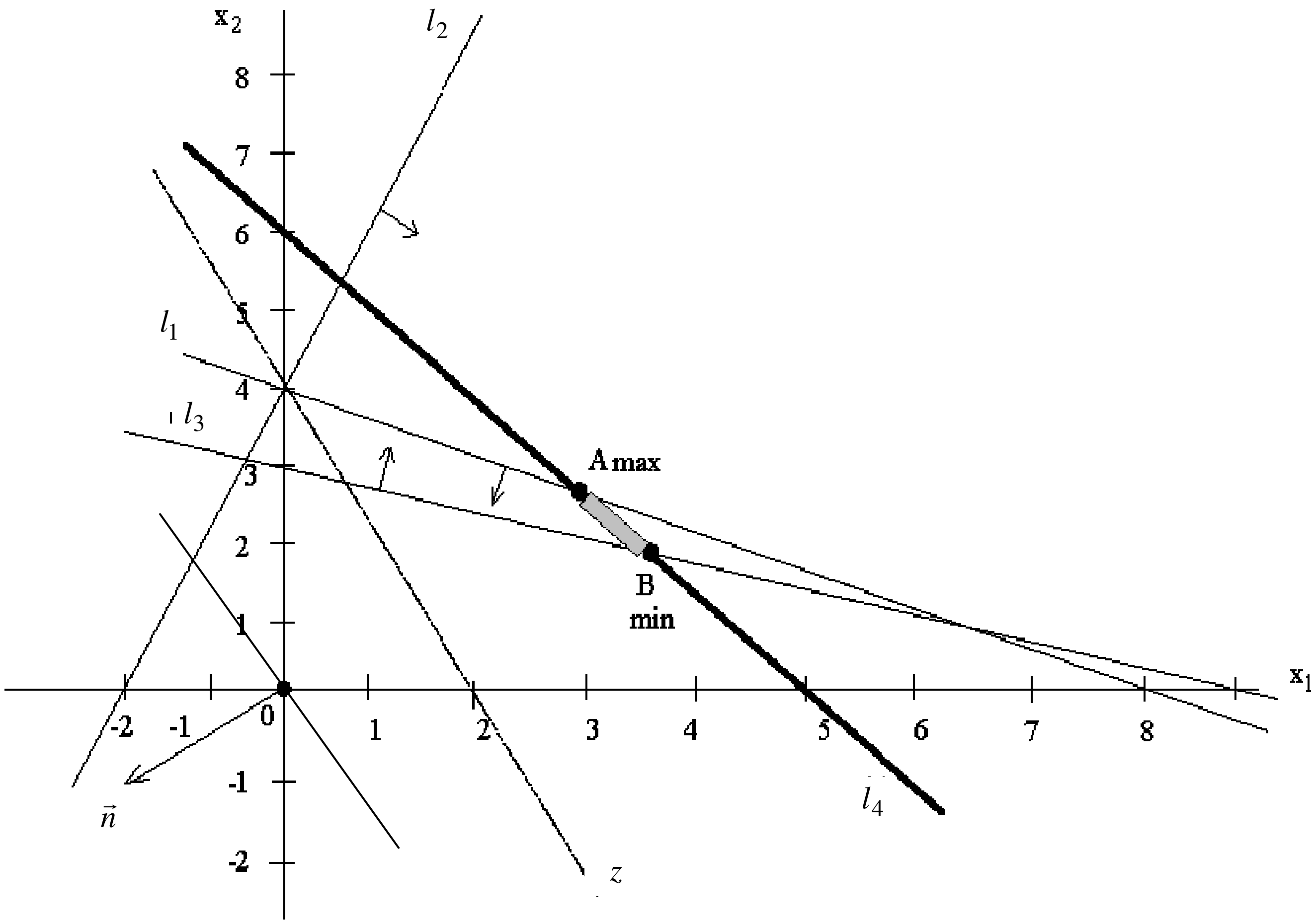
$$\max z = z\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Задача 5.2.2. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

$$z = -2x_1 - x_2 \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків.



Зауважимо, що рівняння в системі обмежень визначає множину точок прямої l_4. Областю допустимих розв'язків є відрізок AB.

Побудуємо вектор $\vec{n} = (-2;-1)$. Для знаходження мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму в напрямку, протилежному напрямку вектора $\vec{n}$. Точка B — це остання точка відрізка AB, через яку проходить цільова пряма при такому русі. Отже, B — це точка мінімуму цільової функції.

Визначимо координати точки B, склавши систему з рівнянь прямих l_3 і l_4.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{45}{13},\ x_2 = \frac{24}{13}.$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює:

$$\min z = z\left(\frac{45}{13};\frac{24}{13}\right) = -2\cdot\frac{45}{13} - 1\cdot\frac{24}{13} = -\frac{114}{13}.$$

Для визначення точки максимуму будемо рухати цільову пряму у напрямку вектора $\vec{n}$. Останньою точкою відрізка AB, через яку пройде пряма при такому русі, буде точка A. Отже, точка A є точкою максимуму. Знайдемо її координати, склавши систему з рівнянь прямих l_1 і l_4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{20}{7},\ x_2 = \frac{18}{7}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$\max z = z\left(\frac{20}{7};\frac{18}{7}\right) = -2\cdot\frac{20}{7} - 1\cdot\frac{18}{7} = -\frac{58}{7}.$$

5.3. Симплекс-метод розв’язання задачі лінійного програмування

1. *Формулювання задачі в стандартному вигляді.*

Стандартним називатимемо наступний вигляд задачі лінійного програмування:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + b_1 \geq 0, \\ ... \\ -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - ... - a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n. \end{cases}$$

2. *Побудова симплекс-таблиці.*

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
$z =$	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

3. *Знаходження опорного розв’язку.*

1. Якщо у симплекс-таблиці всі елементи останнього стовпчика (крім, можливо, значення цільової функції) невід’ємні, то числа $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ задовольняють систему обмежень, тобто утворюють опорний розв’язок.
2. Якщо в останньому стовпці є від’ємні елементи, то застосовується наступне **правило:**
   1) Вибираємо довільний рядок з від’ємним елементом в останньому стовпчику (нехай $b_k < 0$). Якщо в цьому рядку немає інших від’ємних елементів, то система обмежень несумісна і задача розв’язків не має.
   2) Якщо у вибраному рядку є від’ємні елементи, то вибираємо довільний з них (нехай $a_{sk} < 0$) і стовпчик, в якому він знаходиться вибираємо за розв’язувальний.
   3) В розв’язувальному стовпчику знаходимо всі додатні відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до відповідних елементів розв’язувального стовпчика. Серед знайдених відношень вибираємо найменше і той елемент розв’язувального стовпчика, якому воно відповідає, вибираємо за розв’язувальний.

4) З розв'язувальним елементом здійснюємо крок модифікованих жорданових виключень.

Описане правило застосовуємо до тих пір, поки не встановимо несумісність системи обмежень або не позбавимось від від'ємних елементів в останньому стовпчику.

4. *Оптимізація опорного розв'язку.*

Нехай після знаходження опорного розв'язку отримана наступна симплекс-таблиця:

	$-y_1$	$\dots$	$-y_k$	$-x_{k+1}$	$\dots$	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	$\dots$	b_{1k}	$b_{1(k+1)}$	$\dots$	b_{1n}	b_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_k =$	b_{k1}	$\dots$	b_{kk}	$b_{k(k+1)}$	$\dots$	b_{kn}	b_k
$y_{k+1} =$	$b_{(k+1)1}$	$\dots$	$b_{(k+1)k}$	$b_{(k+1)(k+1)}$	$\dots$	$b_{(k+1)n}$	b_{k+1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	b_{m1}	$\dots$	b_{mk}	$b_{m(k+1)}$	$\dots$	b_{mn}	b_m
$z =$	q_1	$\dots$	q_k	q_{k+1}	$\dots$	q_n	Q

1. Якщо в останньому рядочку (рядочку цільової функції) симплекс-таблиці (після знаходження опорного розв'язку) всі елементи (крім, можливо Q) невід'ємні, то задача лінійного програмування розв'язана:
$$\max z = Q$$
і досягається в точці:
$$x_1 = b_1, \dots, x_k = b_k, \; x_{k+1} = \dots = x_n = 0.$$
2. Якщо в останньому рядочку є від'ємні елементи, то вибираємо з них найбільший за модулем і стовпчик, в якому він знаходиться позначаємо як розв'язувальний.
3. Якщо всі елементи розв'язувального стовпчика від'ємні або рівні 0, то $\max z = \infty$.
4. Якщо серед елементів розв'язувального стовпчика є додатні, то знаходимо найменше додатнє відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика і елемент, якому воно відповідає, вибираємо за розв'язувальний.
5. З розв'язувальним елементом здійснюємо крок модифікованих жорданових виключень.

   Описане правило застосовуємо до тих пір, поки не встановимо необмеженість цільової функції або не позбавимось від від'ємних елементів в останньому рядочку.

Задача 5.3.1. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів A, B, C і D, для чого використовує три види ресурсів: 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів на підприємстві наведені в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	-	1	1	80
3	1	5	1	-	250

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A — 4 у.о., B — 3 у.о., C — 6 у.о., D — 7 у.о. Попередній аналіз збуту показав, що попит на продукцію виду B становить не менше 50 од. Визначити план виробництва продукції, який забезпечує підприємство максимальний дохід.

Розв'язання. Нехай:

x_1 — кількість продукції виду A; x_2 — кількість продукції виду B;

x_3 — кількість продукції виду C; x_4 — кількість продукції виду D.

Тоді обмеження, пов'язані з запасами ресурсів та попитом, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 280, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 80, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \le 250, \\ x_2 \ge 50 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,3. \end{cases}$$

Дохід підприємства від продажу продукції визначатиметься функцією:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max .$$

Запишемо отриману задачу лінійного програмування в стандартному вигляді:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max ,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 280 \ge 0, \\ -x_1 - x_3 - x_4 + 80 \ge 0, \\ -x_1 - 5x_2 - x_3 + 250 \ge 0, \\ x_2 - 50 \ge 0, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,3. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	2	1	1	1	280
$y_2 =$	1	0	1	1	80
$y_3 =$	1	5	1	0	250
$y_4 =$	0	**-1**	0	0	-50
$z =$	-4	-3	-6	-7	0

У стовпчику вільних елементів є від'ємний елемент: $b_4 = -50$. Рядок, в якому знаходиться цей елемент, містить від'ємний елемент $a_{42} = -1$. Отже, другий стовпчик буде розв'язувальним. Знайдемо додатні відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика: $\frac{280}{1} = 280$, $\frac{250}{5} = 50$, $\frac{-50}{-1} = 50$.

Отримали два найменших додатніх відношення, рівних 50. Візьмемо будь-яке з них: нехай $\frac{-50}{-1} = 50$ і виберемо елемент $a_{42} = -1$ за розв'язувальний. Виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень:

	$-x_1$	$-y_4$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	2	1	1	1	230
$y_2 =$	1	0	1	**1**	80
$y_3 =$	1	5	1	0	0
$x_2 =$	0	-1	0	0	50
$z =$	-4	-3	-6	-7	150

Останній стовпчик не містить від'ємних елементів. Отже, ми знайшли опорний розв'язок задачі:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 50,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

Останній рядочок таблиці містить від'ємні елементи. Це означає, що знайдений розв'язок не є оптимальним. Виберемо в останньому рядочку найбільший за модулем від'ємний елемент: $q_4 = -7$. В четвертому стовпчику є додатні елементи, виберемо його за розв'язувальний. Знайдемо додатні відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика: $\frac{230}{1} = 230$, $\frac{80}{1} = 80$.

Найменше відношення відповідає елементу $a_{24} = 1$. Виберемо його за розв'язувальний елемент і виконаємо крок модифікованих жорданових виключень:

	$-x_1$	$-y_4$	$-x_3$	$-y_2$	1
$y_1 =$	1	1	0	-1	150
$x_4 =$	1	0	1	1	80
$y_3 =$	1	5	1	0	0
$x_2 =$	0	-1	0	0	50
$z =$	3	4	1	7	710

В останньому рядку таблиці всі елементи додатні. Це означає, що

$$\max z = 710,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 50,\ x_3 = 0,\ x_4 = 80.$$

Отже, для забезпечення максимального прибутку 710 у.о. від продажу продукції необхідно виготовити і реалізувати 50 од. продукції виду В і 80 од. продукції виду D.

5.4. Задача лінійного програмування в нестандартних постановках

5.4.1. Випадок змішаної системи обмежень.

Якщо система обмежень містить рівняння, то симплекс-таблиця матиме вигляд:

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$	1
$0=$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$0=$	a_{k1}	a_{k2}	$\cdots$	a_{kn}	b_k
$y_{k+1}=$	$a_{(k+1)1}$	$a_{(k+1)2}$	$\cdots$	$a_{(k+1)n}$	b_{k+1}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
$z=$	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

Щоб знайти опорний розв'язок необхідно позбавитись від 0-рядочків таблиці (рядочків, які відповідають рівнянням). Для цього:

1. Якщо існує 0-рядок, в якому всі елементи, крім вільного, від'ємні, то система обмежень несумісна. В протилежному випадку вибираємо додатній коефіцієнт довільного рівняння і стовпчик, в якому він знаходиться, позначаємо як розв'язувальний. Знаходимо мінімальне додатне відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика і вибираємо розв'язувальний елемент.
2. З розв'язувальним елементом виконуємо крок модифікованих жорданових виключень.
3. В утвореній таблиці викреслюємо 0-стовпчик.

Задача 5.4.1. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + 2x_3 \ge -4, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо задачу в стандартній постановці:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 6 \ge 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 + 4 \ge 0, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	0	-1	6
$0 =$	1	**1**	2	5
$y_3 =$	2	0	-2	4
$z =$	-4	-3	-5	0

Виберемо за розв'язувальний другий стовпчик. В ньому існує єдине додатнє відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика. Тому за розв'язувальний елемент виберемо $a_{22} = 1$.

Виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень:

	$-x_1$	0	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	0	-1	6
$x_2 =$	1	1	2	5
$y_3 =$	**2**	0	-2	4
$z =$	-1	3	1	15

В отриманій таблиці в останньому стовпчику немає від'ємних елементів. Отже, опорним розв'язком задачі є:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0.$$

В останньому рядочку таблиці є від'ємний елемент. Тому знайдений розв'язок не є оптимальним. Виберемо перший стовпчик за розв'язувальний і знайдемо додатні відношення:

$$\frac{6}{1} = 6, \quad \frac{5}{1} = 5, \quad \frac{4}{2} = 2.$$

Мінімальне відношення відповідає елементу $a_{31} = 2$. Виберемо його за розв'язувальний і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$-\frac{1}{2}$	0	4
$x_2 =$	$-\frac{1}{2}$	3	3
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	-1	2
$z =$	$\frac{1}{2}$	0	17

Отже, $\max z = 17$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.