Лабораторна робота №3
Моделювання дискретних випадкових величин

Мета роботи – ознайомитися з алгоритмом побудови ряду розподілу дискретних випадкових величин та його графічним зображенням; побудувати імітаційну модель отримання системи дискретних випадкових величин (СДВВ).

Короткі теоретичні відомості

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо її часткові (можливі) значення можна занумерувати скінченною кількістю натуральних чисел від 1 до k або усіма натуральними числами.

Дискретна випадкова величина X може бути задана: 1) рядом розподілу, 2) функцією розподілу.

Рядом розподілу називається сукупність всіх можливих значень x_i та відповідні їм ймовірності p_i = P(X = x_i). Ряд розподілу може бути задано у вигляді таблиці (табл. 3.1) або формули.

Таблиця 3.1

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$.	P_1	P_2	…	P_n

Ймовірності P_i задовольняють умові $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, де число можливих значень n може бути скінченним або нескінченним.

Графічне зображення ряду розподілу називається *многокутником розподілу*. Для його побудови можливі значення випадкової величини x_i відкладаються по осі абсцис, а ймовірності p_i – по осі ординат; точки A_i з координатами (x_i; p_i) з'єднуються лініями (рис.3.1).

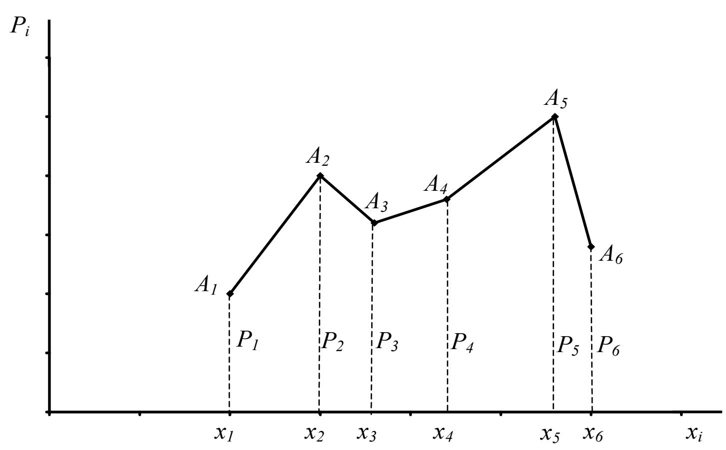

Рис. 3.1. Многокутник розподілу

Функцією розподілу дискретної випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності P(X < x) того, що випадкова величина буде менша від довільно вибраного значення x. Функція $F(x)$ обчислюється за формулою:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \tag{3.1}$$

де нерівність $x_i<x$ під знаком суми вказує, що сумування розповсюджується на всі ті значення x_i, які менші за x.

Геометрично функція розподілу виражає ймовірність попадання випадкової величини в півінтервал, що лежить на числовій осі лівіше точки x (рис.3.2).

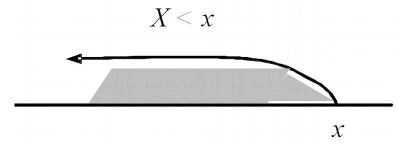

Рис. 3.2.

Побудуємо графік функції розподілу для дискретної випадкової величини, що задана рядом розподілу у вигляді таблиці (табл.3.1).

1. Нехай $x \le x_1$. Оскільки випадкова величина X не приймає можливих значень, які знаходяться лівіше точки x, то подія X в цьому випадку неможлива та її ймовірність дорівнює нулю.

$$F(x) = P(X < x) = 0$$

2. Нехай тепер $x_1 < x \le x_2$. При цьому випадкова величина X приймає єдине можливе значення x_1, що знаходиться лівіше x, з ймовірністю P_1. Тому:

$$F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = P_1$$

3. Нехай далі $x_2 < x \le x_3$. При цьому випадкова величина може прийняти або значення x_1, або x_2, що знаходиться лівіше x. Використовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, отримаємо:

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = P_1 + P_2$$

4. Для випадку $x_{n-1} < x \le x_n$ аналогічно отримаємо:

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_{n-1}) = P_1 + P_2 + ... + P_{n-1}$$

5. Нехай $x_n > x$. Тоді випадкова величина X приймає одне з всіх можливих значень $x_1, x_2, ...$ x_n. Ця подія достовірна, а, отже, її ймовірність дорівнює одиниці. Тому $F(x)$=1.

Зобразимо отримані результати графічно (рис.3.3).

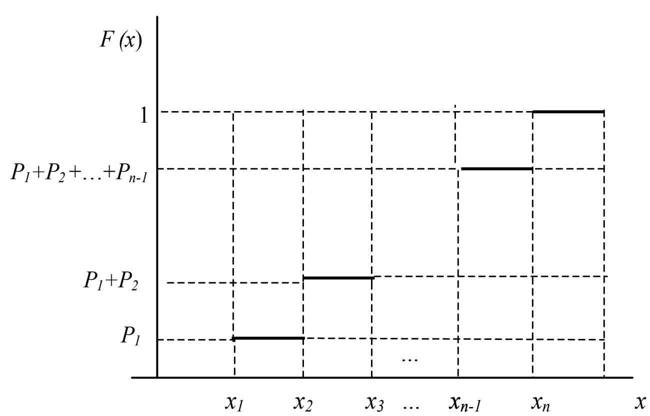

Рис. 3.3. Функція розподілу *F(x)* дискретної випадкової величини *X*

Отже, функція розподілу дискретної випадкової величини є розривна ступінчаста ліня, постійна між можливими значеннями випадкової величини. З побудови функції розподілу випливає, що розмір стрибка функції дорівнює ймовірності відповідного значення дискретної випадкової величини.

Зразок розв'язання задачі

Задача 1. Відбувається випробування надійності системи, яка складається з двох незалежно працюючих приладів. Ймовірність виходу з ладу першого приладу дорівнює *0,1*, а другого – *0,2*. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа приладів, що відмовили.

Розв'язування. Випадкова величина X приймає можливі значення: 0, 1, 2. Позначимо через g_1 та g_2 ймовірності відмови першого та другого приладів, а через q_1 та q_2 – відповідно ймовірності їх нормальної роботи. За умовою задачі: $g_1 = 0{,}1$ та $g_2 = 0{,}2$, а, отже, $q_1 = 0{,}9$ та $q_2 = 0{,}8$. За теоремами про множення та додавання ймовірності того, що випадкова величина X прийме значення 0; 1 та 2 дорівнюють:

$$p_1 = P(X=0) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$$
$$p_2 = P(X=1) = q_1 \cdot g_2 + g_1 \cdot q_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26$$
$$p_3 = P(X=2) = g_1 \cdot g_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$$

Ряд розподілу випадкової величини X запишемо у вигляді (табл. 3.2):

Таблиця 3.2.

X	0	1	2
P	0,72	0,26	0,02

Для контролю обчислень перевіримо умову: $\sum_{i=1}^{n} P_i = 0{,}72 + 0{,}26 + 0{,}02 = 1.$

Побудуємо многокутник розподілу для ряду розподілу (рис. 3.4):

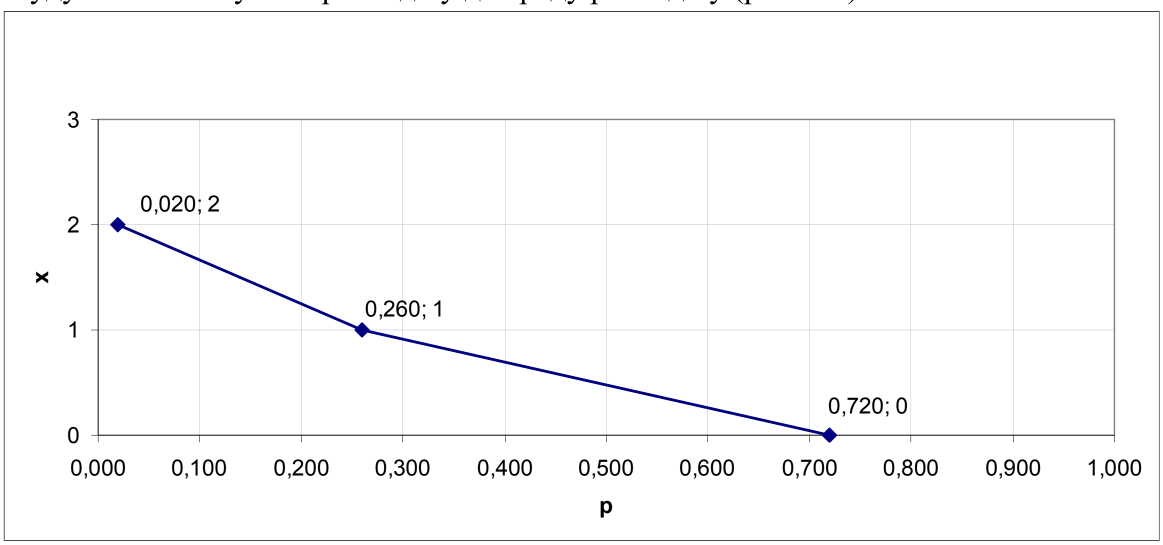

Рис. 3.4. Многокутник розподілу випадкової величини X

Побудуємо графік функції розподілу для дискретної випадкової величини, що задана рядом розподілу у вигляді таблиці (табл. 3.2).

1. Нехай $x \le 0$. Оскільки випадкова величина X не приймає можливих значень, які знаходяться лівіше точки x=0, то подія X в цьому випадку неможлива та її ймовірність дорівнює нулю та $F(x)$=0.
2. Якщо $0 < x \le 1$, тоді випадкова величина X приймає єдине можливе значення x_1=1, що знаходиться лівіше x, з ймовірністю P_1=0,72. Тому $F(x)$=0,72.
3. Якщо $1 < x \le 2$, тоді випадкова величина може прийняти або значення x_1, або x_2, що знаходиться лівіше x. За теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій, маємо: $F(x) = 0{,}72+0{,}26 = 0{,}98$.

4. Якщо $x > 2$, тоді випадкова величина X приймає одне з всіх можливих значень x_1, x_2, x_3. Ця подія достовірна, а, отже, її ймовірність дорівнює одиниці. Тому $F(x) = 0,72+0,26+0,02=1$.

Зобразимо отримані результати графічно (рис.3.5).

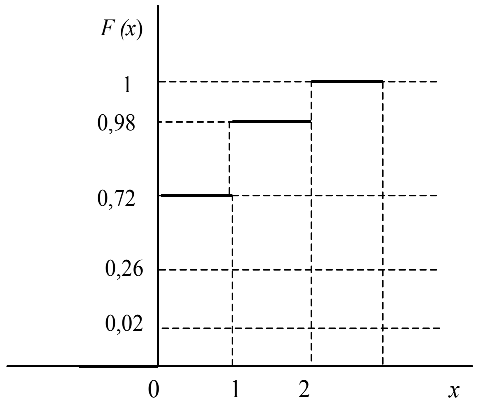

Рис. 3.3. Функція розподілу *F(x)* дискретної випадкової величини *X*

Завдання на роботу

1. Побудувати імітаційну модель отримання системи дискретних випадкових величин (СДВВ). Відповідно до варіанту завдання (згідно з номером списку студентів групи) таблиці 3.3 побудувати ряд розподілу дискретної випадкової величини *X*.

2. На основі СДВВ, в створеній програмі, побудувати многокутник розподілу та графік функції розподілу $F(x)$.

Таблиця 3.3

№ варіанта	Задача
1.	АТС невеликої фірми обслуговує n абонентів. Ймовірність того, що протягом 5 хвилин на АТС надійде виклик з телефонної точки дорівнює 0,3. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості викликів, що надійдуть до АТС протягом 5 хвилин. Скористатись розподілом Пуассона.
2.	На шляху руху автомобіля n світлофорів. Кожен із них з ймовірністю 0,5 або дозволяє, або не дозволяє автомобілю їхати далі. Побудувати ряд розподілу випадкового числа світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки.
3.	Відбуваються n незалежних пострілів в однакових умовах по цілі. Ймовірність влучення при першому пострілі дорівнює 0,23. Побудувати ряд розподілу для числа влучень в ціль, використавши закон біноміального розподілу.
4.	В грошовій лотереї випущено n білетів. Розігрується 1 виграш в 5 000 грн. та 10 виграшів по 100 грн. Побудувати ряд розподілу випадкового виграшу X для власника одного лотерейного білета.
5.	Розглядається робота n незалежно працюючих технічних пристроїв (ТП). Ймовірність нормальної роботи першого ТП дорівнює 0,8, другого – 0,6, третього – 0,5 і т.д.. Побудувати ряд розподілу для числа тих, що нормально працюють ТП.
6.	Два баскетболісти почергово закидають м’яч у корзину до тих пір, поки один з них не попаде. Побудувати ряд розподілу випадкового числа кидків, що виконується кожним із баскетболістів, якщо ймовірність попадання для першого дорівнює 0,4, а для другого 0,6. Скористатись геометричним розподілом.
7.	Вироби випробовують в перевантаженому режимі. Ймовірності для кожного виробу пройти випробування дорівнюють 1/5 та незалежні. Випробування закінчуються після першого ж виробу, який не витримав випробувань. Побудувати ряд розподілу випадкового числа X – числа випробувань. Визначити на якому виробі закінчуються випробування. Скористатись геометричним розподілом.
8.	В партії з n_1 деталей є n_2 стандартних деталей. Навмання із всієї партії вибирається 2 деталі. Побудувати ряд розподілу числа X – числа стандартних деталей серед відібраних. Скористатись гіпергеометричним розподілом.
9.	Прилад складається з n незалежно працюючих елементів. Ймовірність виходу з ладу кожного елемента в першому досліді дорівнює 0,1. Побудувати ряд розподілу числа X – числа елементів, які можуть вийти з ладу в першому досліді. Скористатись біноміальним розподілом.
10.	Випробування складається із n незалежних підкидань монети, при кожному із яких герб випадає із ймовірністю p=0,3. Для випадкового числа появ герба побудувати ряд розподілу.
11.	Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,3. Стрілок має n патронів і стріляє по мішені до першого попадання або до повної витрати патронів. Побудувати ряд розподілу ймовірностей випадкового числа X витрачених патронів, скориставшись формулою геометричного розподілу дискретної випадкової величини.
12.	Граючи в більярд, два гравця почергово забивають останній м’яч у лузу до тих пір, поки один з них не попаде. Побудувати ряд розподілу випадкового числа штовхань, що виконується кожним із гравців, якщо ймовірність попадання для першого дорівнює 0,3, а для другого 0,7. Скористатись геометричним розподілом.
13.	Пристрій складається з n елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого з елементів протягом часу t дорівнює 0,2.

	Побудувати ряд розподілу числа X – кількості елементів, що можуть вийти з ладу протягом часу t. Скористатись розподілом Пуассона.
14.	В нормальному режимі незалежно працюють n теплових агрегатів. Ймовірність нормальної роботи n_1 агрегату $p(n_1)$=0,8, $p(n_2)$= 0,9, $p(n_3)$= 0,7. Побудувати ряд розподілу для числа нормально працюючих агрегатів.
15.	При випробуванні виробів ймовірності для кожного виробу пройти випробування дорівнюють 0,4. Оскільки випробування здійснюються незалежно, то вони закінчуються одразу після першого виробу, який не витримав випробувань. Побудувати ряд розподілу випадкового числа X - числа випробувань. Визначити на якому виробі закінчуються випробування. Скористатись геометричним розподілом.
16.	По цілі відбуваються n пострілів, причому ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Розглядається випадкова величина X – число влучень в ціль. Побудувати ряд розподілу для числа X, використавши закон біноміального розподілу.
17.	Розігрується один виграш в 10 000 грн. та 10 виграшів по 1000 грн. Всього в грошовій лотереї випущено n білетів. Побудувати ряд розподілу випадкового виграшу X для власника одного лотерейного білета.
18.	Система складається з n незалежно працюючих елементів. Ймовірність виходу з ладу будь-якого з елементів протягом часу t дорівнює 0,4. Побудувати ряд розподілу числа X – кількості елементів, що можуть вийти з ладу протягом часу t. Скористатись розподілом Пуассона.
19.	За маршрутом виконання рейсу є n районів, в кожному з яких із ймовірністю 0,5 можлива поява грозового фронту. Побудувати ряд розподілу випадкового числа районів, пройдених літаком до зустрічі з грозовим фронтом.
20.	Деяка складна система складається із n незалежно працюючих підсистем. Ймовірність нормальної роботи першої підсистеми дорівнює 0,95, другої – 0,9, третьої – 0,8. Побудувати ряд розподілу для числа тих підсистем, що працюють нормально.
21.	Під час гри два учасники підкидають монету n разів. При кожному підкиданні «решка» випадає із ймовірністю p=0,3. Для випадкового числа появ «решки» побудувати ряд розподілу.
22.	Завод відправив на базу n деталей. Ймовірність пошкодження деталей при перевозі дорівнює 0,03. Побудувати ряд розподілу для числа X – кількості пошкоджених в дорозі деталей (перших десяти). Скористатись розподілом Пуассона.
23.	В грошовій лотереї випущено n білетів. Розігрується 1 виграш в 50 000 грн. та 100 виграшів по 100 грн. Побудувати ряд розподілу випадкового виграшу X для власника одного лотерейного білета.
24.	Із партії, що складається із n виробів, серед яких є n_1 бракованих, випадково вибираються n_2 виробів для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа бракованих деталей серед відібраних. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа бракованих деталей серед відібраних. Скористатись гіпергеометричним розподілом.
25.	Мисливець, маючи n патронів, стріляє по ведмедю до першого попадання або до повної витрати патронів. Ймовірність влучення в ведмедя дорівнює 0,3. Побудувати ряд розподілу ймовірностей випадкового числа X витрачених патронів, скориставшись формулою геометричного розподілу дискретної випадкової величини.
26.	Система складається з n незалежно працюючих вузлів. Ймовірність виходу з ладу кожного вузла в першому випробуванні дорівнює 0,2. Побудувати ряд розподілу

	числа X – числа вузлів, які можуть вийти з ладу в першому випробуванні. Скористатись біноміальним розподілом.
27.	В комп'ютерній мережі в звичайному режимі незалежно працюють n серверів. Ймовірність нормальної роботи n_1 сервера $p(n_1)$=0,7, $p(n_2)$= 0,8, $p(n_3)$= 0,9 і т.д. Побудувати ряд розподілу для числа нормально працюючих серверів.
28.	Виконуються послідовні випробування шести приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується тільки в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу випадкового числа приладів, що випробовуються, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з них дорівнює 0,9.