

## Лабораторна робота 6

### ТЕОРІЯ ІГОР. ОПТИМАЛЬНЕ РІШЕННЯ ГРИ ДВОХ ОСІБ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ

**Мета:** ознайомлення з теорією ігор, стратегія гри двох осіб з нульовою сумою.

#### Основні теоретичні відомості

У теорії ігор розглядаються ситуації, пов'язані з прийняттям рішень, в яких два розумних противника мають конфліктуючі цілі. До числа типових прикладів відноситься рекламування конкуруючих товарів і планування військових стратегій протиборчих армій. Ці ситуації прийняття рішень відрізняються від розглянутих раніше, де природа не розглядається в ролі недоброзичливця.

В ігровому конфлікті беруть участь два противника, іменовані *гравцями*, кожен з яких має певну множину (кінцеве або нескінченне) можливих виборів, які називаються *стратегіями*. З кожною парою стратегій пов'язаний *платіж*, який один з гравців виплачує іншому. Такі ігри відомі як *гри двох осіб з нульовою сумою*, так як виграш одного гравця дорівнює програшу іншого.

У такій грі достатньо задати результати у вигляді платежів для одного з гравців.

При позначенні гравців через  $A$  та  $B$  з числом стратегій  $m$  і  $n$  відповідно гру зазвичай представляють у вигляді матриці платежів гравцеві  $A$ :

	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

Таке уявлення матричної гри означає, що якщо гравець  $A$  використовує стратегію  $i$ , а гравець  $B$  - стратегію  $j$ , то платіж гравцеві  $A$  становить  $a_{ij}$ , отже, гравцеві  $B$  -  $-a_{ij}$ .

#### Оптимальне рішення гри двох осіб з нульовою сумою

Оскільки гри беруть свій початок в конфлікті інтересів, оптимальним рішенням гри є одна або кілька таких стратегій для кожного з гравців, при цьому будь-яке відхилення від даних стратегій не покращує плату того чи іншого гравця. Ці рішення можуть бути у вигляді єдиної *чистої* стратегії або декількох стратегій, які є *змішаними* відповідно до заданих можливостей. Розглянуті нижче приклади демонструють перераховані ситуації.

**Приклад:** Дві компанії  $A$  і  $B$  продають два види ліків проти грипу. Компанія  $A$  рекламує продукцію на радіо ( $A_1$ ), телебаченні ( $A_2$ ) і в газетах ( $A_3$ ). Компанія  $B$ , на додаток до використання радіо ( $B_1$ ), телебачення ( $B_2$ ) і газет ( $B_3$ ), розсилає також поштою брошури ( $B_4$ ). Залежно від уміння і інтенсивності проведення рекламної кампанії, кожна з компаній може залучити на свою сторону частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена нижче матриця характеризує відсоток клієнтів, залучених або втрачених компанією  $A$ .

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Мінімуми рядків
$A_1$	8	-2	9	-3	-3
$A_2$	6	5	6	8	5
$A_3$	-2	4	-9	5	-9
Максимуми стовпців	8	5	9	8	
МІНІМАКС					

Рішення гри засновано на забезпеченні *найкращого результату з найгірших* для кожного гравця. Якщо компанія  $A$  вибирає стратегію  $A_1$ , то незалежно від того, що робить компанія  $B$ , найгіршим результатом є втрата компанією  $A$  3% ринку на користь компанії  $B$ . Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно при виборі стратегії  $A_2$  найгіршим результатом для компанії  $A$  є збільшення ринку на 5% за рахунок компанії  $B$ . Нарешті, найгіршим результатом при виборі стратегії  $A_3$  є втрата компанією  $A$  9% ринку на користь компанії  $B$ . Ці результати містяться в стовпці "Мінімуми рядків". Щоб досягти найкращого результату з найгірших, компанія  $A$  вибирає стратегію  $A_2$ , так як вона відповідає найбільшому елементу стовпчика "Мінімуми рядків".

Розглянемо тепер стратегії компанії В. Так як елементи матриці є платежами компанії А, критерій *найкращого результату з найгірших* для компанії В відповідає вибору мінімаксного значення. В результаті приходимо до висновку, що вибором компанії В є стратегія В<sub>2</sub>.

Оптимальним рішенням у грі є вибір стратегій А<sub>2</sub> і В<sub>2</sub>, тобто обом компаніям слід проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь компанії А, так як її ринок збільшиться на 5%. У цьому випадку говорять, що *ціна гри* дорівнює 5% і що компанії А і В використовують стратегії, відповідні *седлової точки*.

Рішення, що відповідає седловій точці, гарантує, що жодної компанії немає сенсу намагатися вибрати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (В<sub>1</sub>, В<sub>3</sub> або В<sub>4</sub>), то компанія А може зберегти свій вибір стратегії А<sub>2</sub>, що призведе до більшої втрати ринку компанією В (6 або 8%).

З тих же причин компанії А немає резону використовувати іншу стратегію, бо якщо вона застосує, наприклад, стратегію А<sub>3</sub>, то компанія В може використовувати свою стратегію В<sub>3</sub> і збільшити свій ринок на 9%. Аналогічні висновки мають місце, якщо компанія А буде використовувати стратегію А<sub>1</sub>.

Оптимальне рішення гри, що відповідає седловій точці, не обов'язково має характеризуватися чистими стратегіями. Замість цього оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій, як це зроблено в наступному прикладі.

**Приклад:** Два гравця А і В грають в гру, засновану на під-киданні монети. Гравці одночасно і незалежно один від одного вибирають герб (Г) або решку (Р). Якщо результати двох підкидань монети збігаються (тобто ГГ або РР), то гравець А отримує один долар від гравця В. Інакше гравець А платить один долар гравцеві В.

Наступна матриця платежів гравцеві А показує величини мінімальних елементів рядків і максимальних елементів стовпців, відповідних стратегій обох гравців.

	В <sub>Г</sub>	В <sub>Р</sub>	Минимумы строк
А <sub>Г</sub>	1	-1	-1
А <sub>Р</sub>	-1	1	-1
Максимумы столбцов	1	1	

Максиміна і мінімаксна величини (ціни) для цієї гри дорівнюють -1 дол. та 1 дол. відповідно. Так як ці величини не рівні між собою, гра не має рішення в чистих стратегіях. Зокрема, якщо гравець А використовує стратегію АГ, гравець В вибере стратегію ВР, щоб отримати від гравця А один долар. Якщо це трапиться, гравець А може перейти до стратегії АР, щоб змінити результат гри і отримати один долар від гравця В. Постійне спокуса кожного гравця перейти до іншої стратегії вказує на те, що рішення у вигляді чистої стратегії неприйнятно. Замість цього обидва гравці повинні використовувати належну випадкову комбінацію своїх стратегій. У розглянутому прикладі оптимальне значення ціни гри знаходиться десь між максиміною та мінімаксною цінами для цієї гри:

Максиміна (нижня) ціна  $\leq$  ціна гри  $\leq$  мінімаксна (верхня) ціна.

Отже, в даному випадку ціна гри повинна лежати в інтервалі [-1, 1], що вимірюється в доларах.

### Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант задачі слід отримати у викладача. До отриманої задачі написати програму її рішення, в звіті навести код програми, вивести результат (оптимальна альтернатива).

**1.** Визначте рішення, яке визначається сідловою точкою, відповідно чисті стратегії та ціну гри для наступних ігор, в яких платежі задані для гравця А.

a)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	8	6	2	8
$A_2$	8	9	4	5
$A_3$	7	5	3	5

b)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	4	-4	-5	6
$A_2$	-3	-4	-9	-2
$A_3$	6	7	-8	-9
$A_4$	7	3	-9	5

2. У наступних іграх задані платежі гравцеві А. Вкажіть область значень для параметрів  $p$  і  $q$ , при яких пара (2, 2) буде сідловою точкою в кожній грі.

a)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	1	$q$	6
$A_2$	$p$	5	10
$A_3$	6	2	3

b)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	2	4	5
$A_2$	10	7	$q$
$A_3$	4	$p$	6

3. Вкажіть область, якій належить ціна гри в кожному з наступних випадків, припускаючи, що платежі задані для гравця А.

a)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	1	9	6	0
$A_2$	2	3	8	4
$A_3$	-5	-2	10	-3
$A_4$	7	4	-2	-5

b)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	-1	9	6	8
$A_2$	-2	10	4	6
$A_3$	5	3	0	7
$A_4$	7	-2	8	4

c)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	3	6	1
$A_2$	5	2	3
$A_3$	4	2	-5

d)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	7	1	3
$A_2$	4	8	0	-6
$A_3$	6	-9	-2	4

4. Дві фірми виробляють два конкуруючих товари. Кожен товар в даний час контролює 50% ринку. Поліпшивши якість товарів, обидві фірми збираються розгорнути рекламні кампанії. Якщо вони не будуть цього робити, то існуючий стан ринку не зміниться. Однак якщо будь-яка фірма буде більш активно рекламувати свої товари, то інша фірма втратить відповідний відсоток своїх споживачів. Дослідження ринку показує, що 50% потенційних споживачів отримують інформацію за допомогою телебачення, 30% - через газети і 20% - по радіо.

- а) Сформулюйте задачу у вигляді гри двох осіб з нульовою сумою і виберіть відповідні кошти реклами для кожної фірми.
- б) Вкажіть інтервал значень, якому належить ціна гри. Чи може кожна фірма діяти з єдиною чистою стратегією?

**Контрольні питання:**

1. Дати визначення поняттю прийняття рішень.
2. Критерій найкращого результату з найгірших.
3. Дати визначення седлової точки.
4. Поясніть теорію ігор.
5. Що таке стратегія?
6. Ціна гри.