

Лабораторна робота 5

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета: ознайомлення з методом прийняття рішень в умовах невизначеності. Студент має сформулювати отримане завдання прийняття рішення в умовах невизначеності та обрати оптимальну альтернативу.

Основні теоретичні відомості

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, вимагає визначення альтернативних дій, яким відповідають платежі, залежні від (випадкових) станів природи. Матрицю платежів задачі прийняття рішень з m можливими діями та n станами природи можна представити таким чином.

	s_1	s_2	...	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$...	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$...	$v(a_2, s_n)$
...
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$...	$v(a_m, s_n)$

Елемент a_i представляє i -е можливе рішення, а елемент s_j - j -е стан природи. Плата (або дохід), яка пов'язана з рішенням a_i і станом s_j , дорівнює $v(a_i, s_j)$.

Відмінність між прийняттям рішень в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності ймовірнісний розподіл, який відповідає станам s_j , $j = 1, 2, \dots, n$, або невідомий, або не може бути визначений. Цей недолік інформації зумовив розвиток наступних критеріїв для аналізу ситуації, пов'язаної з прийняттям рішень.

1. Критерій Лапласа.
2. Мінімаксний критерій.
3. Критерій Севіджа.
4. Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються за ступенем консерватизму, який проявляє індивідуум, що приймає рішення, перед обличчям невизначеності.

Критерій Лапласа спирається на принцип недостатньої підстави, який говорить, що, оскільки розподіл ймовірностей станів $P(s_j)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що вірогідності всіх станів природи рівні між собою, тобто $P\{s_1\} = P\{s_2\} = \dots = P\{s_n\} = 1/n$.

При цьому, якщо $v(a_i, s_j)$ представляє одержуваний прибуток, то найкращим рішенням є

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v(a_i, s_j) \right\}.$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє витрати особи, яка приймає рішення, то оператор "max" замінюється на "min".

Максимінний (мінімаксний) критерій заснований на консервативному обережному поведінці особи, що приймає рішення, і зводиться до вибору найкращої альтернативи з найгірших.

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє одержуваний прибуток, то відповідно до **Максиміного критерія** як оптимальне обирається рішення, що забезпечує

$$\max_{a_i} \left\{ \min_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}.$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє втрати, використовується **мінімаксний критерій**, який визначається наступним співвідношенням:

$$\min_{a_i} \left\{ \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}.$$

Критерій Севіджа прагне пом'якшити консерватизм мінімаксного (максимінного) критерію шляхом заміни матриці платежів (виграшів або програшів) $v(a_i, s_j)$ матрицею втрат $r(a_i, s_j)$, яка визначається наступним чином.

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max_{a_k} \{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), & \text{если } v - \text{доход,} \\ v(a_i, s_j) - \min_{a_k} \{v(a_k, s_j)\}, & \text{если } v - \text{потери.} \end{cases}$$

Щоб показати, як критерій Севіджа "пом'якшує" мінімаксний (максимінний) критерій, розглянемо наступну матрицю платежів $v(a_i, s_j)$:

	s_1	s_2	Максимум строк
a_1	11 000	90	11 000
a_2	10 000	10 000	10 000 ← мінімакс

Застосування мінімаксного критерію призводить до того, що рішення a_2 з фіксованими втратами в 10000 дол. найбільш прийнятний. Однак можна вибрати і a_1 , так як в цьому випадку існує можливість втратити лише 90 дол., якщо реалізується стан s_2 , при потенційному виграші 11000 дол.

Подивимося, який результат вийде, якщо в мінімаксний критерій замість матриці платежів $v(a_i, s_j)$ використати матрицю втрат $r(a_i, s_j)$.

	s_1	s_2	Максимум строк
a_1	1000	0	1000 ← мінімакс
a_2	0	9910	9910

Як бачимо, мінімаксний критерій, який застосовується до матриці втрат, приводить до вибору рішення a_1 як пріоритетного.

Критерій Гурвіца охоплює ряд різних підходів до прийняття рішень - від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного). Нехай $0 \leq \alpha \leq 1$ і величини $v(a_i, s_j)$ представляють доходи.

Тоді рішенням, за критерієм Гурвіца, буде вираз:

$$\max_{a_i} \left\{ \alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \min_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}.$$

Параметр α - показник оптимізму. Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає консервативним, так як його застосування еквівалентно застосуванню звичайного мінімаксного критерія. Якщо $\alpha = 1$, критерій Гурвіца стає занадто оптимістичним, бо розраховує на найкращі з найкращих умов. Ми можемо конкретизувати ступінь оптимізму (або песимізму) належним вибором величини α з інтервалу $[0, 1]$. При відсутності яскраво вираженої схильності до оптимізму або песимізму вибір $\alpha = 0,5$ представляється найбільш розумним.

Якщо величини $v(a_i, s_j)$ представляють втрати, то критерій приймає наступний вигляд:

$$\min_{a_i} \left\{ \alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}.$$

Приклад: Національна школа виживання підбирає місце для будівництва літнього табору в центрі Аляски з метою тренування людей на виживання в умовах дикої природи. Школа вважає, що число учасників збору може бути 200, 250, 300 або 350 осіб. Вартість літнього табору буде мінімальною, оскільки він будуватиметься для задоволення тільки певних невеликих потреб. Відхилення в сторону зменшення або збільшення щодо потреб тягнуть за собою додаткові витрати, зумовлені будівництвом зайвих потужностей або втратою можливості отримати прибуток

в разі, коли деякі потреби не задовольняються. Нехай змінні $a_1 - a_4$ представляють можливі розміри табору (на 200, 250, 300 або 350 осіб), а змінні $s_1 - s_4$ - відповідно число учасників збору.

Таблиця містить матрицю вартостей (в тисячах доларів), що відноситься до описаної ситуації.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Описана ситуація аналізується з точки зору чотирьох розглянутих вище критеріїв.

Критерій Лапласа. При заданих ймовірності $P\{s_j\} = 1/4, j = 1, 2, 3, 4$, очікувані значення витрат для різних можливих рішень обчислюються наступним чином.

$$M\{a_1\} = (1/4)(5 + 10 + 18 + 25) = 14\,500,$$

$$M\{a_2\} = (1/4)(8 + 7 + 12 + 23) = 12\,500 \leftarrow \text{Оптимум},$$

$$M\{a_3\} = (1/4)(21 + 18 + 12 + 21) = 18\,000,$$

$$M\{a_4\} = (1/4)(30 + 22 + 19 + 15) = 21\,500.$$

Мінімаксний критерій. Цей критерій використовує вихідну матрицю вартостей.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	21 \leftarrow мінімакс
a_4	30	22	19	15	30

Критерій Севіджа. Матриця втрат визначається за допомогою вирахування чисел 5, 7, 12 і 15 з елементів стовпців від першого до четвертого відповідно.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	8 \leftarrow мінімакс
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Критерій Гурвіца. Результати обчислень містяться в наступній таблиці.

Альтернатива	Мінімум строк	Максимум строк	$\alpha(\text{мінімум строки}) + (1 - \alpha)(\text{максимум строки})$
a_1	5	25	$25 - 20\alpha$
a_2	7	23	$23 - 16\alpha$
a_3	12	21	$21 - 9\alpha$
a_4	15	30	$30 - 15\alpha$

Використовуючи відповідне значення для α , можна визначити оптимальну альтернативу. Наприклад, при $\alpha = 0,5$ оптимальними є або альтернатива a_1 , або a_2 , тоді як при $\alpha = 0,25$ оптимальним є рішення a_3 .

Задачі до лабораторної роботи

Свій варіант завдання слід отримати у викладача.

1. Хенк - старанний студент, який зазвичай отримує хороші оцінки, зокрема тому, що має можливість повторити матеріал в ніч перед іспитом. Перед завтрашнім іспитом Хенк зіткнувся з невеликою проблемою. Його однокурсники організували на всю ніч вечірку, в якій він хоче брати участь. Хенк має три альтернативи:

a_1 - брати участь у вечірці всю ніч,

a_2 - половину ночі брати участь у вечірці, а половину - вчитися,

a_3 - вчитися всю ніч.

Професор, який буде приймати завтрашній іспит, непередбачуваний, і іспит може бути легким (s_1), середнім (s_2) або важким (s_3). Залежно від складності іспиту і часу, витраченого Хенком на повторення, можна чекати наступні екзаменаційні бали.

	S_1	S_2	S_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

а) Запропонуйте Хенку, який вибір він повинен зробити (грунтуючись на кожному з чотирьох критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності).

б) Припустимо, що Хенк більш зацікавлений в оцінці (в буквенному виразі), яку він отримає на іспиті. Оцінкам від А до D, що означає здачу іспиту, відповідає 90, 80, 70 і 60 балів.

При числі балів нижче 60 студент отримує оцінку F, яка свідчить про те, що іспит не складено. Чи змінить таке ставлення до оцінок вибір Хенка?

2. У наближенні посівного сезону фермер Мак-Кой має чотири альтернативи: a_1 - вирощувати кукурудзу;

a_2 - вирощувати пшеницю;

a_3 - вирощувати соєві боби;

a_4 - використовувати землю під пасовища.

Платежі, пов'язані з зазначеними можливостями, залежать від кількості опадів, які умовно можна розділити на чотири категорії:

s_1 - сильні опади;

s_2 - помірні опади;

s_3 - незначні опади;

s_4 - посушливий сезон.

Платіжна матриця (в тис. дол.) оцінюється в таким чином.

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Що повинен посіяти Мак-Кой?

3. Один з N верстатів повинен бути обраний для виготовлення Q одиниць певної продукції. Мінімальна і максимальна потреба в продукції дорівнює Q^* і Q^{**} відповідно. Виробничі витрати TC_1 на виготовлення Q одиниць продукції на верстаті і включають фіксовані витрати K_i і питомі витрати c_i на виробництво одиниці продукції і виражаються формулою $TC_1 = K_i + c_i Q$.

а) Вирішіть задачу за допомогою кожного з чотирьох критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

б) Вирішіть задачу при наступних даних, припускаючи, що $1000 < Q < 4000$.

Станок i	K_i (долл.)	C_i (долл.)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8