

**Факультет кібербезпеки, комп'ютерної  
та програмної інженерії**

**Кафедра комп'ютеризованих систем управління**

**Навчальна дисципліна**

## **«МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»**

**Спеціальність 123 «Комп'ютерна інженерія»**

**Спеціалізація 123.2 «Системне програмування»**

**Викладач: Литвиненко Олександр Євгенійович –  
заслужений професор кафедри КСУ, доктор техн. наук, професор**

# Розподіл навчальних годин

Курс 4

Лекцій

Лабораторних занять

Самостійна робота

Усього (годин/кредитів ECTS)

Домашнє завдання

Семестр 7

34

17

54

105/3,5

1 (7 семестр)

Диференційований залік

7 семестр

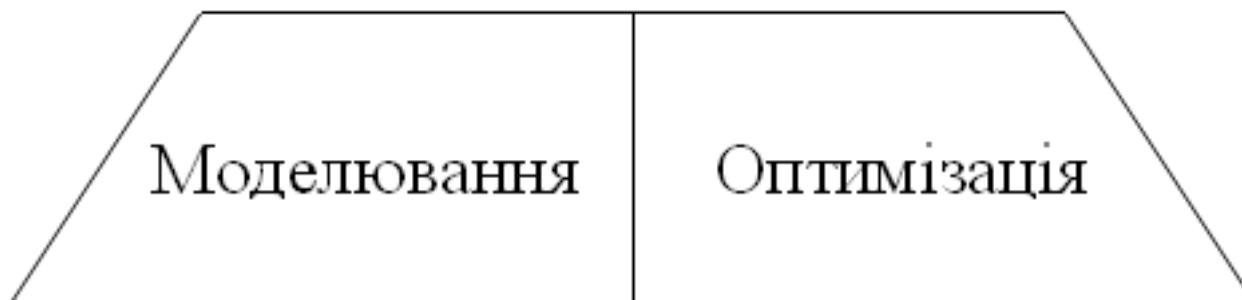
# Рейтингова система оцінювання знань (1)

7 семестр			
Модуль №1		Max Кількі- сть балів	
Вид навчальної роботи	Max кількі- сть балів		
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.1	5		
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.2	5		
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.3	5		
Виконання та захист лабораторної роботи № 1.4	5		
Виконання та захист домашнього завдання	18		
<i>Для допуску до виконання модульної контрольної роботи №1 студент має набрати не менше 23 балів</i>			
Виконання модульної контрольної роботи №1	15		
<b>Усього за модулем №1</b>		<b>53</b>	

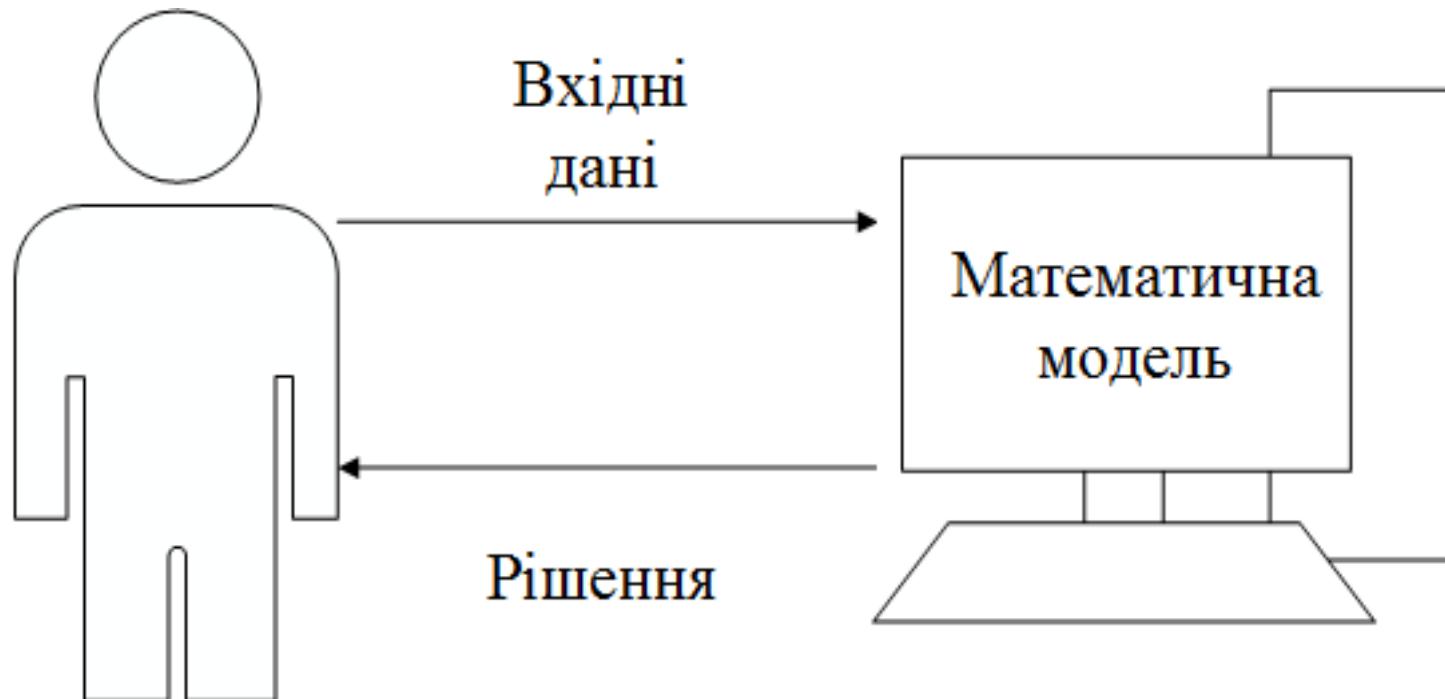
# Рейтингова система оцінювання знань (2)

7 семестр		
Модуль №2	Max кількі- сть балів	Max Кількі- сть балів
Вид навчальної роботи		
Виконання та захист лабораторної роботи № 2.1	5	
Виконання та захист лабораторної роботи № 2.2	5	
Виконання та захист лабораторної роботи № 2.3	5	
Виконання та захист лабораторної роботи № 2.4	5	
<i>Для допуску до виконання модульної контрольної роботи №2 студент має набрати <b>не менше 12 балів</b></i>		
Виконання модульної контрольної роботи №2	15	
<b>Усього за модулем №1</b>	<b>35</b>	
<b>Семестровий диференційований залік</b>		<b>12</b>
<b>Усього за 7 семестр</b>		<b>100</b>

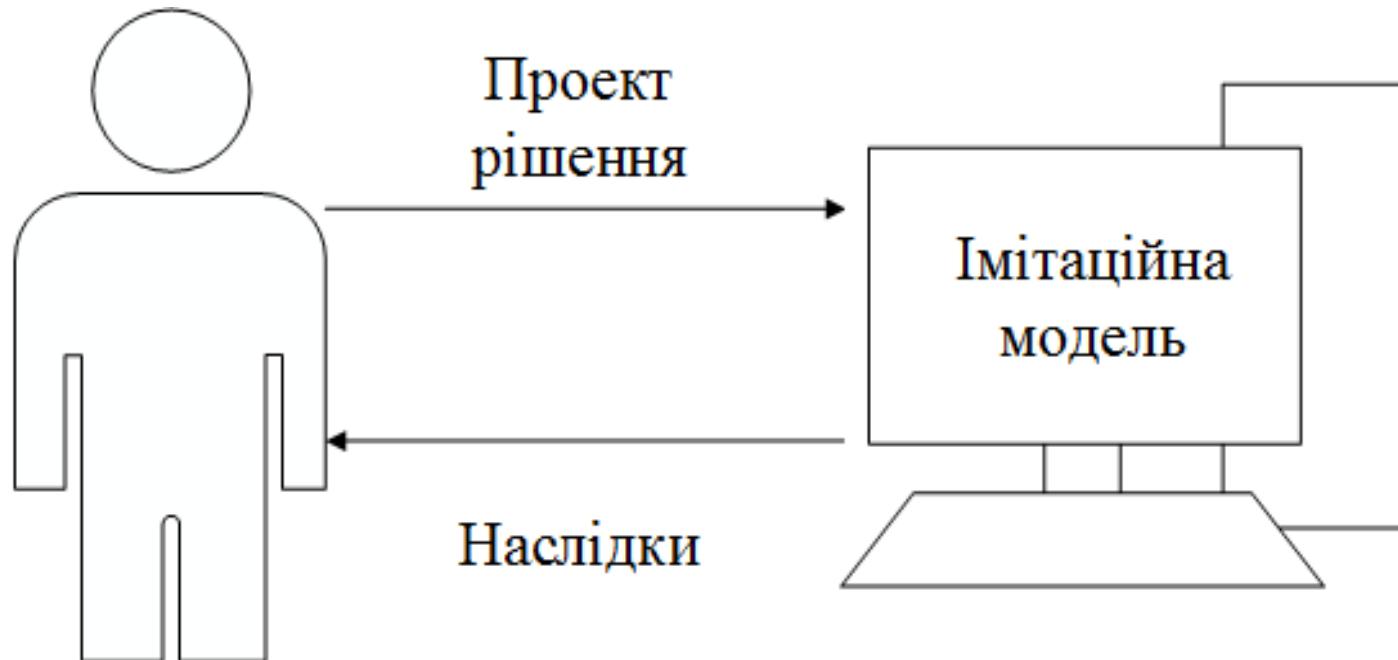
# ГЛОБАЛЬНА ПРОБЛЕМА



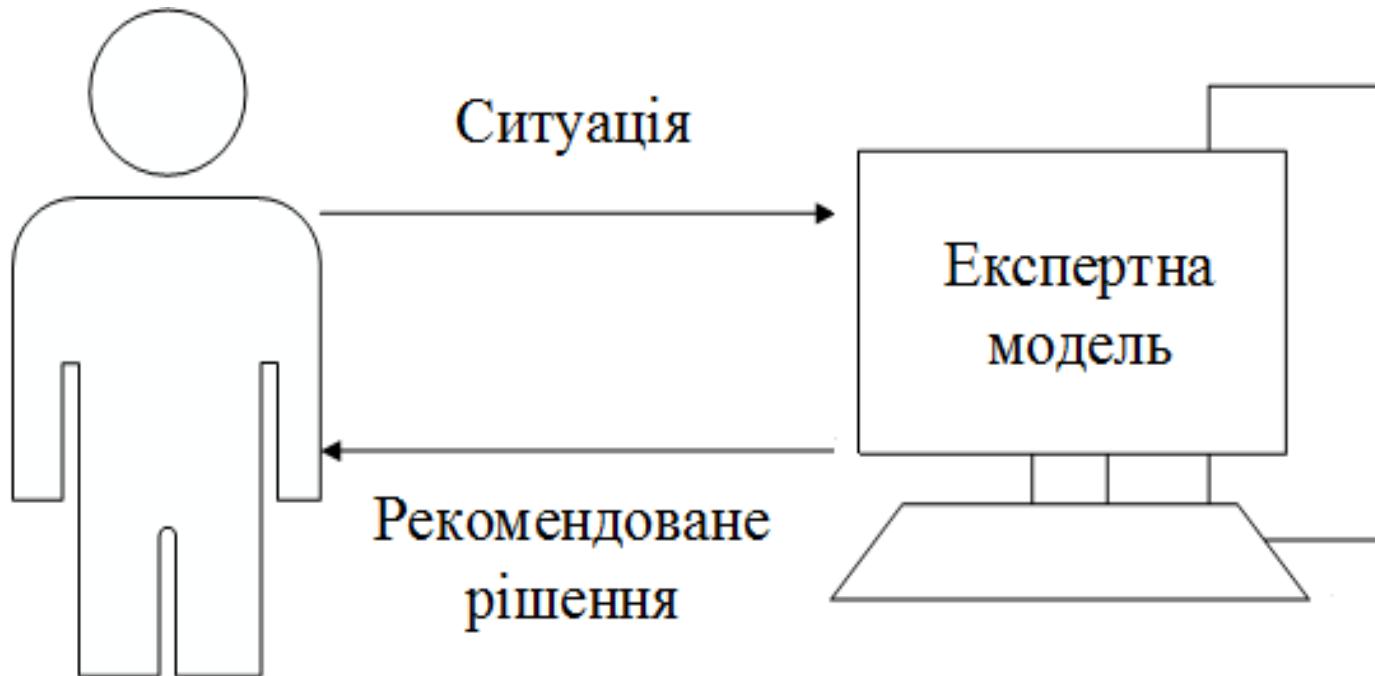
# ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ



# ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ



# ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРТНОЇ МОДЕЛІ



## Математичне програмування –

науковий напрямок, присвячений розробці та дослідженю чисельних методів розв'язання екстремальних (оптимізаційних) задач.

**«В мире не происходит ничего,  
в чем не был бы виден смысл  
какого-либо максимума или  
минимума»**

Леонард Эйлер (1707-1783).

Гражданин Швейцарии,

автор 800 научных работ.

Академик Петербургской АН (1731-1741).

Академик Берлинской АН (1741-1766).

# Леонард Ейлер

(1707 – 1783)



Швейцарський, німецький, російський математик і механік, що вніс фундаментальний вклад до розвитку цих наук.

Автор більш ніж 850 робіт по математичному аналізу, диференціальній геометрії, теорії чисел, наближенням обчисленням, математичній фізиці, оптиці, теорії музики і іншим областям.

Професор, академік Петербурзької, Берлінської, Турінської, Лісабонської і Базельської академій наук, іноземний член Паризької академії наук.

# ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ

1. Основні поняття теорії математичного програмування
2. Методи розв'язання задач лінійного програмування
3. Методи розв'язання задач цілочисельного та дискретного програмування
4. Методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації
5. Методи одновимірної оптимізації нелінійних функцій
6. Методи безумовної оптимізації нелінійних функцій багатьох змінних
7. Методи розв'язання задач нелінійного програмування загальної форми

**Метою викладання дисципліни** є формування теоретичної бази знань та практичних навичок застосування методів математичного програмування для розв'язання задач прийняття проектних та управлінських рішень в реальних економічних, організаційних і виробничих системах.

## *Студент повинен знати:*

- теоретичні основи математичного програмування;
- принципи побудови математичних моделей задач прийняття проектних та управлінських рішень;
- основні методи і алгоритми лінійного, нелінійного, цілочисельного, дискретного, динамічного програмування;

## *Студент повинен вміти:*

- будувати математичні моделі задач прийняття проектних та управлінських рішень;
- визначати, до якого класу задач математичного програмування належить формалізована функціональна задача;
- вибирати для її розв'язання відповідний метод і алгоритм оптимізації;
- розробляти схеми алгоритмів розв'язання задач оптимізації;
- застосовувати існуючі уніфіковані програмні засоби розв'язання оптимізаційних задач;
- аналізувати та інтерпретувати результати розв'язання функціональних задач.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій // Навчальний посібник для студентів ВНЗ. – Київ: Професіонал, 2004. – 349 с.
2. Ларіонов Ю.І., Марченко Л.С., Хажмурадов М.А. Дослідження операцій // Навчальний посібник. – Харків: Інжек, 2005. – 288 с.
3. Охріменко М.Г., Дзюбан І.Ю. Дослідження операцій // Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2006. – 183 с.
4. Ржавський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій // Підручник. – Київ: Академвидав, 2006. – 560 с.
5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ВІПОЛ. – 2000. – 688 с.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. – 1980. – 520 с.
7. Исследование операций: В 2-х томах./Под ред. Дж. Моудера, С.Элмаграба. – М.: Мир. – 1981. т.1- 712 с., т.2. – 677 с.
8. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. – М: Мир. – 1985. – 512 с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций: - в 2-х томах.М.: Мир. –1985. – Т.1 – 479 с. - Т.2- 496 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир. – 1975. – 536с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука. – 1980. – 208 с.

# **Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ**

**1.1 Області застосування методів оптимізації**

**1.2 Загальна постановка ЗМП**

Критеріальна (цільова) функція:

$$f(x) \rightarrow \text{opt} (\min, \max) \quad (1)$$

Система обмежень:

$$h_j(x) = 0, j = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$g_j(x) \geq 0, j = \overline{m + 1, p} \quad (3)$$

УМОВИ:

$$x \in E^n, \quad x = (x_i; i = \overline{1, n})$$

## Приклад побудови математичної моделі ЗПР (1)

Вхідні дані:

$m$  – кількість підприємств ( $i = \overline{1, m}$ );

$n$  – кількість видів виробів ( $j = \overline{1, n}$ );

$r$  – кількість типів ресурсів ( $k = \overline{1, r}$ );

$p_j$  – план виробництва виробів  $j$ -го виду;

$a_{jk}$  – норматив витрат ресурсів  $k$ -го типу на одиницю виробів  $j$ -го виду;

$b_{ik}$  – об'єм ресурсів  $k$ -го типу на  $i$ -му підприємстві;

$c_{ij}$  – витрати на випуск одиниці виробів  $j$ -го виду на  $i$ -му підприємстві.

## Приклад побудови математичної моделі ЗПР (2)

Необхідно: так розподілити планове завдання між підприємствами, щоб сумарні витрати на випуск виробів були мінімальні.

Шукані змінні:  $x_{ij}$  – план випуску виробів  $j$ -го виду на  $i$ -му підприємстві;  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ .

Модель:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = p_j; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} x_{ij} \leq b_{ik}; \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, r};$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

## 1.3 Класифікація ЗМП



## 1.4 Терміни та визначення

1.4.1 Допустимість

1.4.2 Область допустимих розв'язків (ОДР)

1.4.3 Оптимальність

1.4.4 Унімодальні та мультимодальні функції

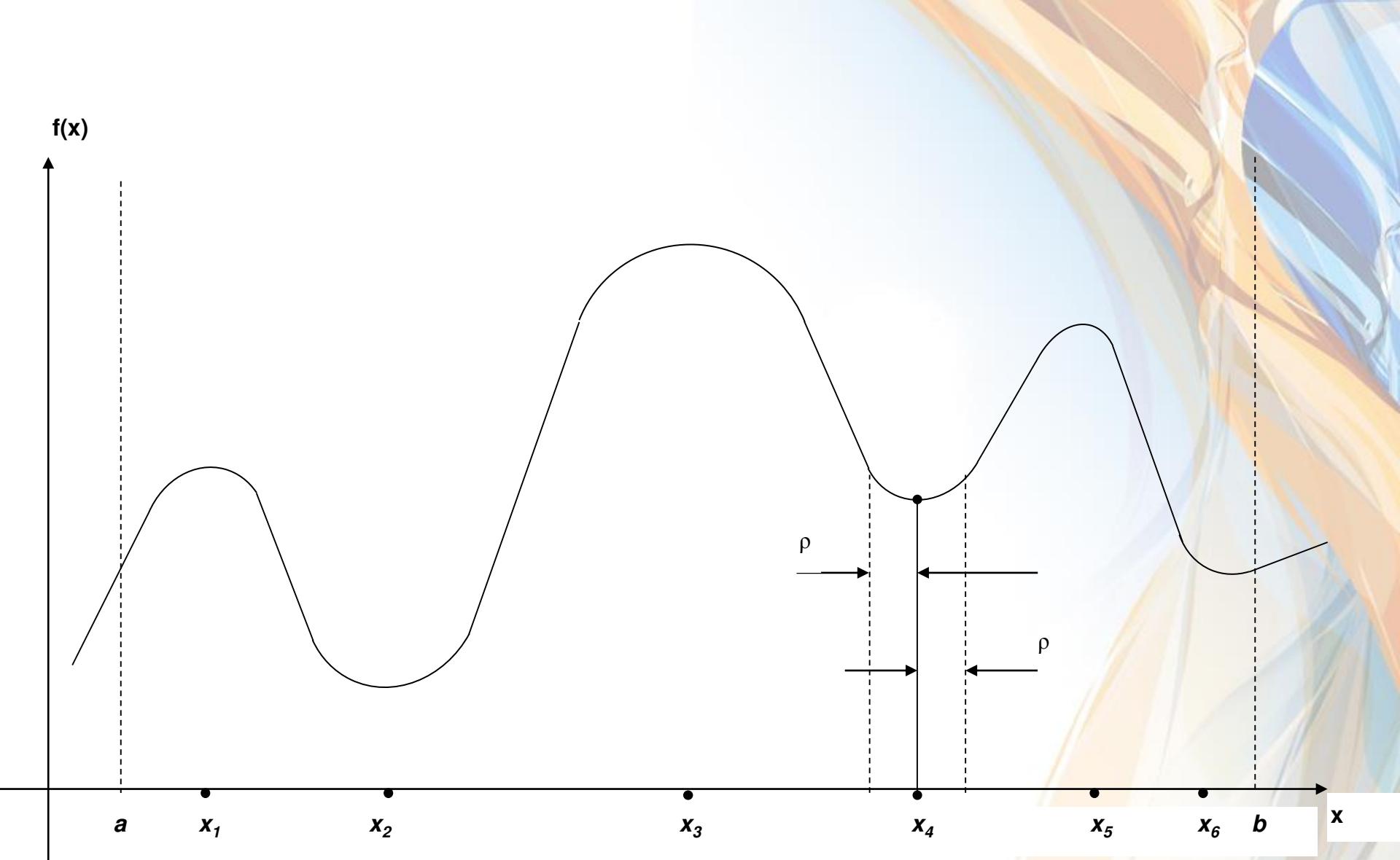


Рис. 1.2

**1.4.5 Глобальний мінімум**  $x^*$ :

$$f(x^*) = f_{\min} = \min\{f(x); x \in R\};$$

$$x^* = \arg \min_{x \in R} f(x).$$

**1.4.6 Локальний мінімум**  $x^*$ :

$$f'(x^*) = f'_{\min} = \min\{f(x); x \in R_0\};$$

$$x^* = \arg \min_{x \in R_0} f(x),$$

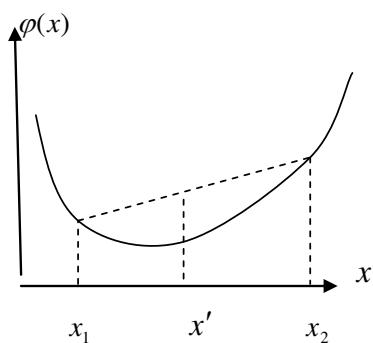
$$R_0 = \{x \in R : |x^* - x| \leq \rho\}.$$

**1.4.7 Стационарні точки**

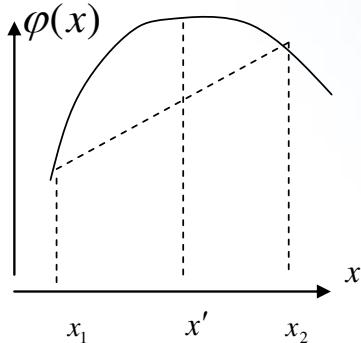
**1.4.8 Наблизений оптимальний розв'язок**  $x^*$ :

$$|f(x^*) - f_{\min}| \leq \varepsilon.$$

## 1.4.9 Опуклість та увігнутість



Опукла функція



Увігнута функція

Функція  $\varphi(x)$  опукла в області  $R$ , якщо:

$$\varphi[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leq \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2); \\ x_1 \in R; x_2 \in R; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Функція  $\varphi(x)$  увігнута в області  $R$ , якщо:

$$\varphi[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \geq \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2); \\ x_1 \in R; x_2 \in R; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Строго опуклі та строго увігнуті функції.

## Приклад

Визначити, опукла чи увігнута функція

$$\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 7$$

при  $x_1 = 0; x_2 = 3; \alpha = 0,3$ :

$$\varphi(0,7 \times 3) = \varphi(2,1) = 5,31$$

$$0,3\varphi(0) + 0,7\varphi(3) = 2,1 + 0,7 \times 10 = 9,1$$

$$\varphi(0,7 \times 3) \leq 0,3\varphi(0) + 0,7\varphi(3)$$

Висновок: функція  $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 7$  опукла.

Множина  $Q$ ,  $Q \subset E^n$ , опукла, якщо для будь-якої пари  
 $x^{(1)} \in Q$  та  $x^{(2)} \in Q$

$$\left[ \forall x' \in (x^{(1)}, x^{(2)}) \right] (x' \in Q);$$

$$x' = \alpha x^{(1)} + (1 - \alpha) x^{(2)}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

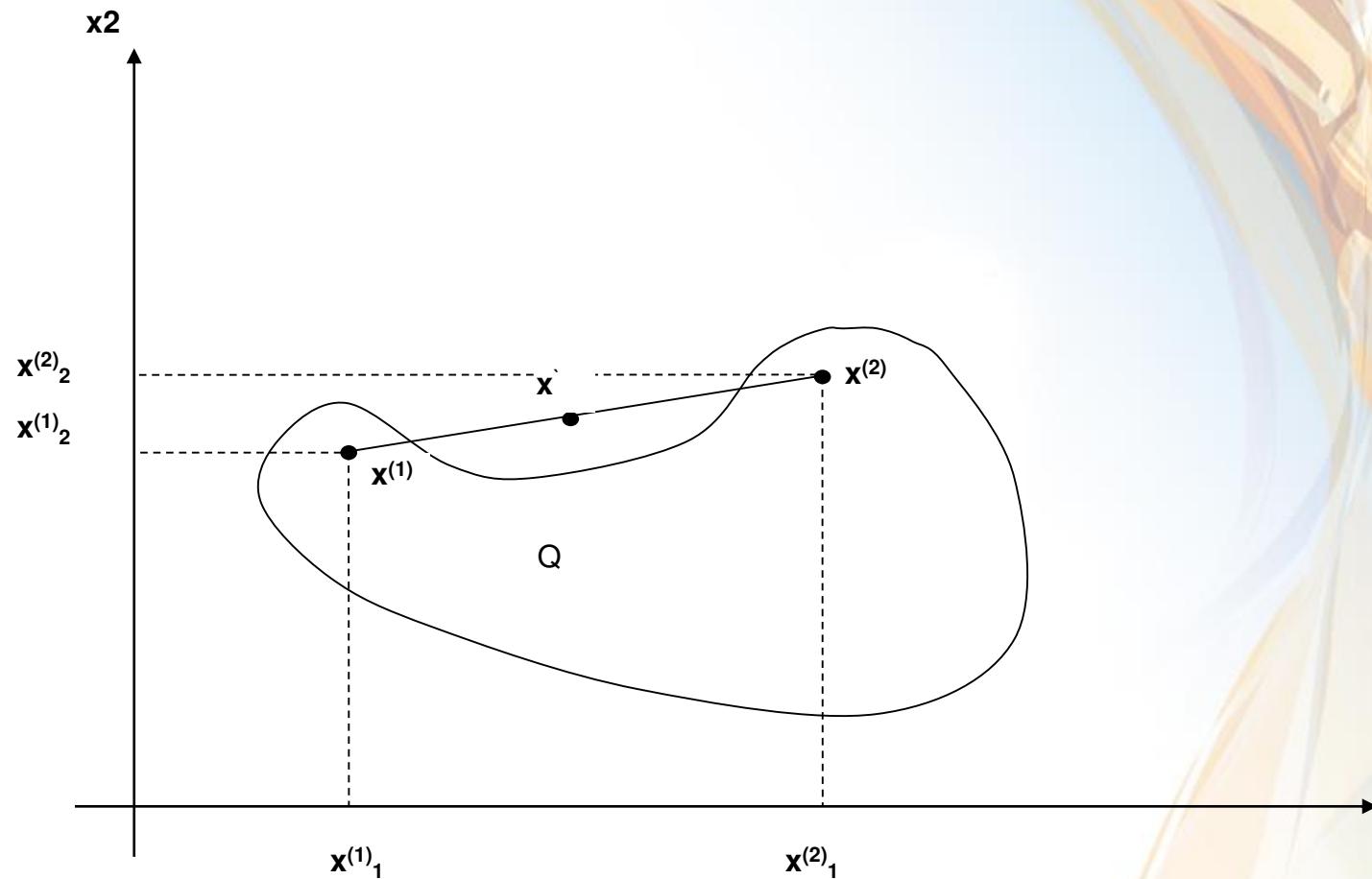


Рис. 1.4

Область допустимих рішень ЗМП з обмеженнями-нерівностями опукла, якщо:

$$(\forall j = \overline{1, m}) \left\{ [g_j(x) \leq 0] \& [g_j(x) - \text{опукла}] \vee [g_j(x) \geq 0] \& [g_j(x) - \text{увігнута}] \right\}$$

**1.4.10 Градієнт функції  $f(x)$  в точці  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$ :**

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

## Приклад

$$f(x) = -2x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 + 5x_1 - 6x_2; \quad x^{(k)} = (2, 0, -1).$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -4x_1 + 5; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -4x_2 - 6; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 6x_3 - 4x_2.$$

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

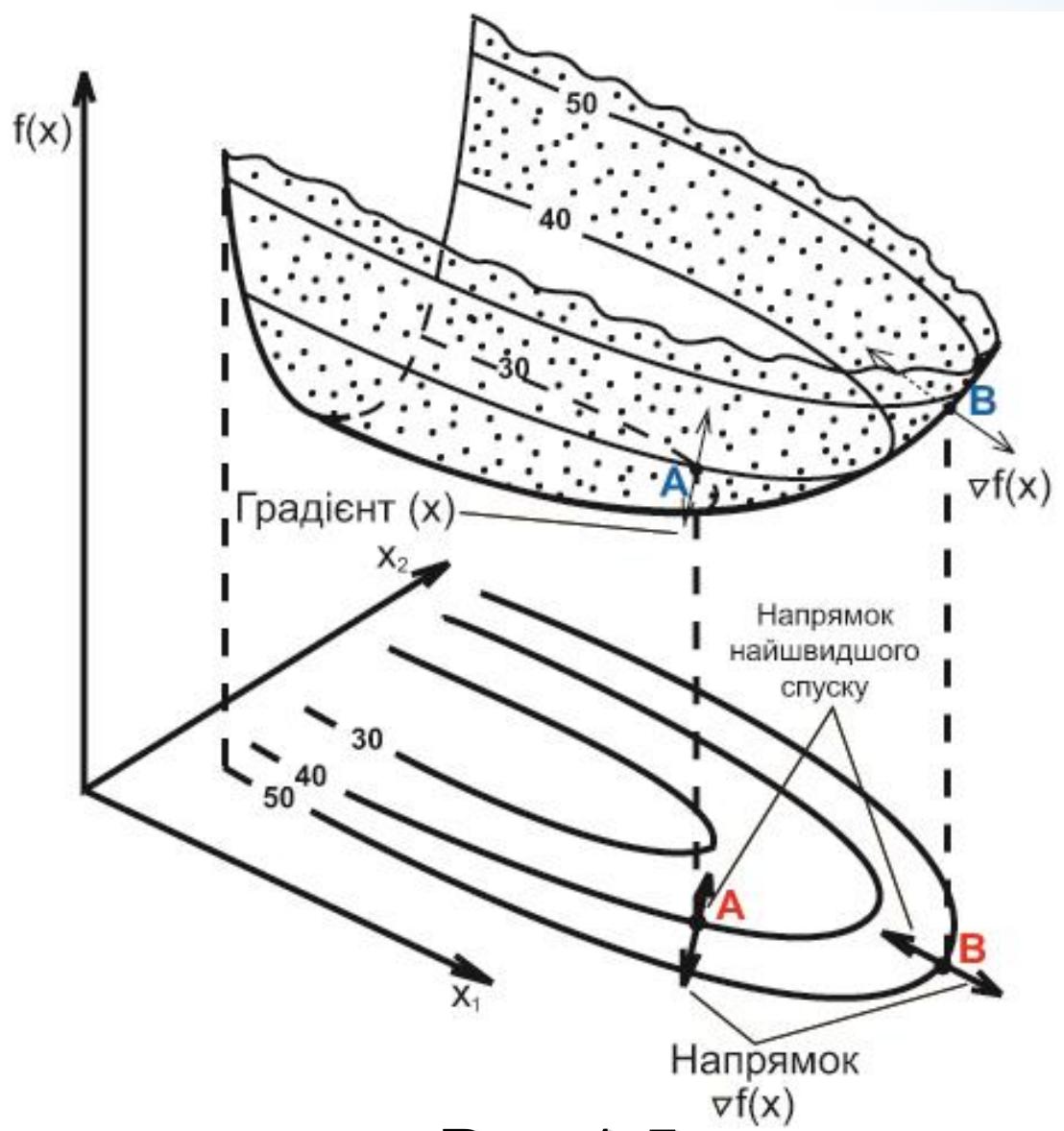


Рис.1.5

**1.4.11 Апроксимація функції  $f(x)$  в точці  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$ :**

- лінійна:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)});$$

- квадратична:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) + \frac{1}{2} (x - x^{(k)})^T \times H(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}).$$

# Брук Тейлор

(1685 – 1731)



Англійський математик, ім'ям якого називана відома формула, що виражає значення функції через значення усіх її похідних в одній точці (формула поліноміального розкладання функцій).

У 1935 р. Міжнародний астрономічний союз присвоїв ім'я Тейлора кратеру на видимій стороні Місяця.

Матриця Гессе для функції  $f(x)$  в точці  
 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$ :

$$H(x^{(k)}) = \nabla^2 f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

# Людвіг Отто Гессе

(1811 – 1874)



Німецький математик, член Баварської АН.  
Професор Кенігсбергського університету, університетів в Галлові і Гейдельберзі, Мюнхенського політехнікуму.  
Автор наукових праць з проектної геометрії, теорії алгебраїчних функцій, теорії інваріантів. Ввів поняття гессіана – Функціонального визначника, елементами якого є другі похідні функції позмінних, які двократно диференціюється.

## Приклад

$$f(x) = -2x_1^2x_2 + 3x_2^2x_3 - 4x_1x_2x_3 + 5x_1x_2^2 - 6x_1 + 7x_3; \quad x^{(k)} = (2, 0, -1).$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 5x_2^2 - 6;$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_1^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 + 10x_1x_2;$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 7.$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -4x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = -4x_1 - 4x_3 + 10x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} = -4x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = -4x_1 - 4x_3 + 10x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 6x_3 + 10x_1; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} = 6x_2 - 4x_1;$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_1} = -4x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_2} = 6x_2 - 4x_1; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} = 0.$$

## 1.5 Необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку ЗМП

$$f(x) \rightarrow \min ; x \in E^n .$$

$x^*$  – оптимальний розв'язок задачі, якщо:

- 1)  $f(x)$  диференціюєма в  $x^*$ ;
- 2)  $\nabla f(x^*) = 0$ ;
- 3)  $\nabla^2 f(x^*) > 0$ .

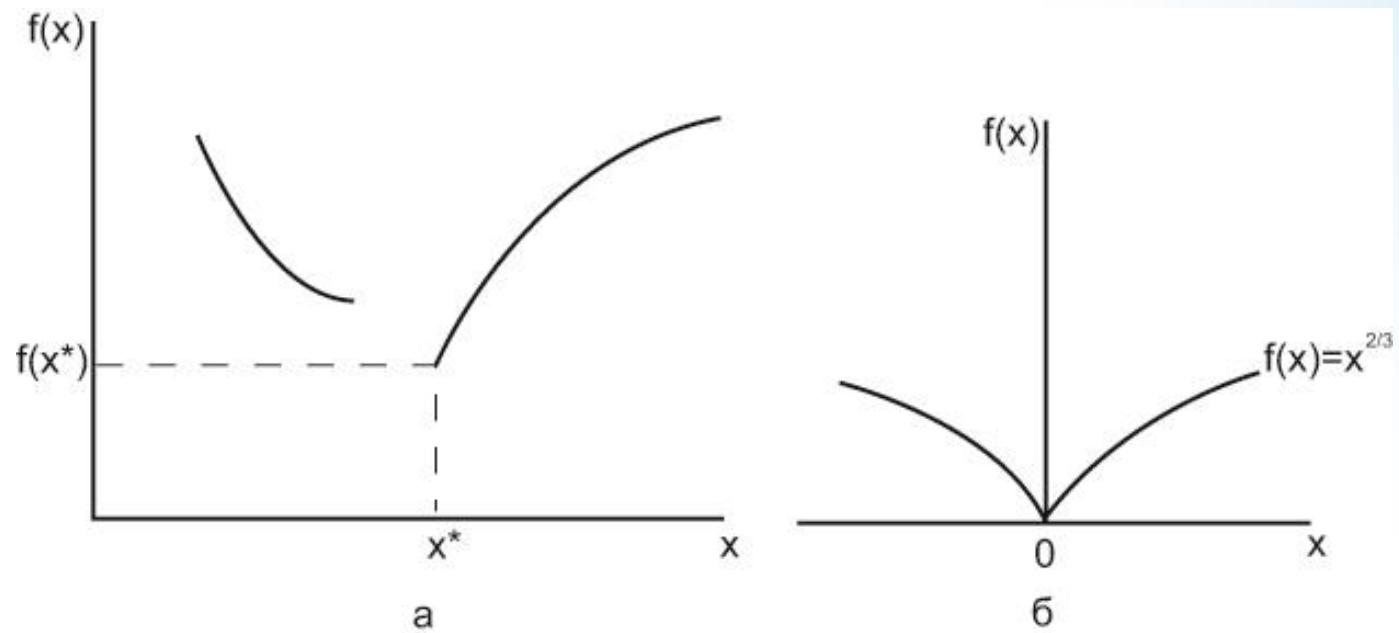


Рис.1.6

## Тема 2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

### 2.1 Канонічна форма ЗЛП

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i ; \quad i = \overline{1, m}; \\ x_j &\geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

# Джордж Бернард Данциг

(1914 – 2005)



Американський математик, відомий як розробник алгоритму, який застосовується при розв'язанні задач симплекс-методом.

Професор факультету промислової інженерії Каліфорнійського Університету в Берклі, професор математичних методів дослідження та інформатики Стенфордського університету. Заснував лабораторію оптимізації систем. Вважається основоположником лінійного програмування разом з радянським математиком Леонідом Канторовичем.

**Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его применения и обобщения.** (Linear Programming and Extensions), 1963 (1)

Глава 1. Понятие о линейном программировании.

Глава 2. Истоки и связи.

Глава 3. Формулировка модели линейного программирования.

Глава 4. Системы линейных уравнений и неравенств.

Глава 5. Симплекс-метод.

Глава 6. Обоснование симплекс-алгоритма и доказательство теоремы двойственности.

Глава 7. Геометрия линейного программирования.

Глава 8. Метод ведущих элементов. Векторные пространства, матрицы и обратные матрицы.

Глава 9. Симплекс-метод, использующий множители. (Модифицированный симплекс-метод).

Глава 10. Конечность симплекс-метода с возмущениями.

Глава 11. Варианты симплекс-алгоритма.

Глава 12. Понятие цены в линейном программировании.

Глава 13. Игры и линейное программирование.

Глава 14. Классическая транспортная задача.

## **Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. (Linear Programming and Extensions), 1963 (2)**

Глава 15. Оптимальное назначение и другие распределительные задачи.

Глава 16. Задача о перевозках с промежуточными пунктами.

Глава 17. Сети и задача с промежуточными пунктами.

Глава 18. Ограниченные сверху переменные.

Глава 19. Максимальные потоки в сетях.

Глава 20. Применение метода одновременного решения прямой и двойственной задач к транспортной задаче.

Глава 21. Задача о взвешенном распределении.

Глава 22. Задачи линейного программирования с переменными коэффициентами.

Глава 23. Принцип разложения для задач линейного программирования.

Глава 24. Выпуклое программирование.

Глава 25. Неопределенность.

Глава 26. Экстремальные задачи с дискретными переменными.

Глава 27. Модель диеты Штиглера: пример формулировки и решение.

**Глава 28. Распределение самолетов по линиям в условиях неопределенного спроса.**

# Леонід Віталійович Канторович

(1912 – 1986)



Радянський математик та  
економіст, один з творців  
лінійного програмування.

Лауреат Нобелівської премії  
по економіці 1975 року «за  
вклад в теорію  
оптимального розподілу  
ресурсів».

Доктор фізико-математичних  
наук, академік АН СРСР,  
професор.

## 2.2 Основні поняття та визначення

Допустимі розв'язки ЗЛП.

Оптимальні розв'язки ЗЛП.

*Варіанти:*

$m=n$

$m < n$

$m > n$

Сумісність системи обмежень.

Ранг матриці коефіцієнтів  $r_A$ .

Ранг розширеної матриці  $r_B$ .

Ранг системи обмежень  $r_C$ .

## Приклад

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 - 2x_3 = 3$$

$$r_A = r_B = r_C = 3.$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$r_A = 1; \quad r_B = 2; \quad r_A \neq r_B.$$

# Лінійно незалежні обмеження

## Приклад

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$r_A = r_B = r_C = 2$$

Базисні та вільні змінні:

$$x_1 = g'_1(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

.....

$$x_m = g'_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$n > m; r_A = r_B = r_C = m.$$

### Приклад

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 = 3 + x_3$$

$$x_2 = 5 + 3x_3 - x_4$$

$$n = 4; \quad r_A = r_B = r_C = 2.$$

## 2.3 Геометрична інтерпретація ЗЛП

### Приклад

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7 \rightarrow \min$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = -4$$

$$x_2 + x_6 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 7}.$$

$$r_A = r_B = r_C = m = 5; \quad n - m = 2.$$

Вільні змінні:  $x_1$  та  $x_2$ .

Базисні змінні:  $x_3, \dots, x_7$ .

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1$$

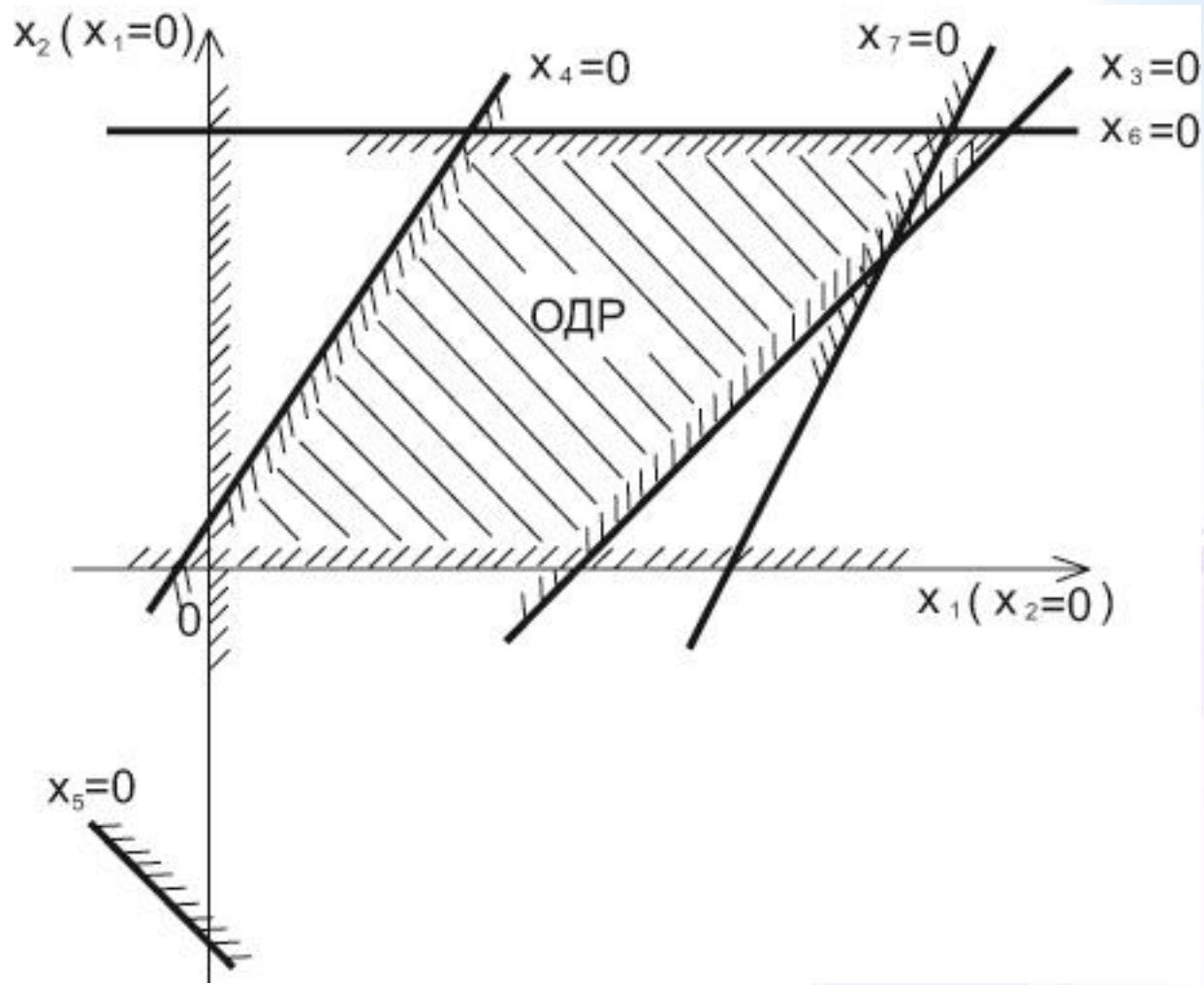
$$x_5 = x_1 + x_2 + 4$$

$$x_6 = -x_2 + 5$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6$$

# Область допустимих рішень:

Рис. 1.7



## ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧКИ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ

$$\begin{aligned}f(x) &= -5x_1 - 2x_2 - 12 \\f'(x) &= -5x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

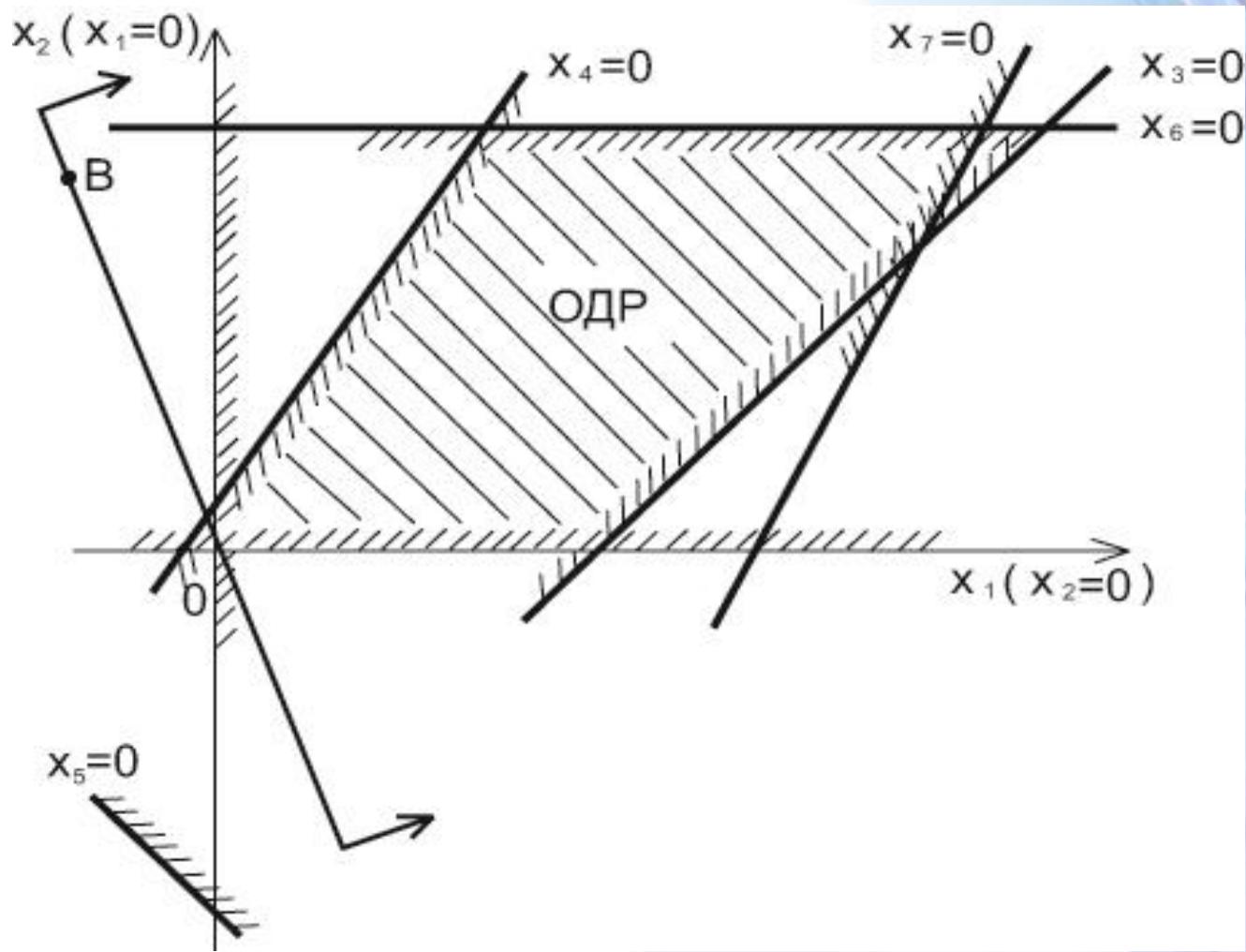
Рівняння основної прямої:

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2 = 0.$$

Переміщення основної прямої:

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2 = C \neq 0.$$

Рис. 1.8



## Оптимальне рішення:

$$x_1^* = 8,5; \quad x_2^* = 5; \quad x_3^* = 0,5; \quad x_4^* = 16,5;$$

$$x_5^* = 17,5; \quad x_6^* = x_7^* = 0;$$

$$f^* = -64,5.$$

## Висновки:

1. Область допустимих рішень ЗЛП – опуклий багатогранник.  
(Опорні точки. Опорні рішення.)
2. У кожній опорній точці  $k = n - m$  змінних дорівнює нулю.
3. Оптимальне рішення ЗЛП знаходитьсья на границі ОДР: у вершині або на грані багатогранника, найбільш віддаленої від початку координат у напрямку спадання значень функції  $f(x)$ .

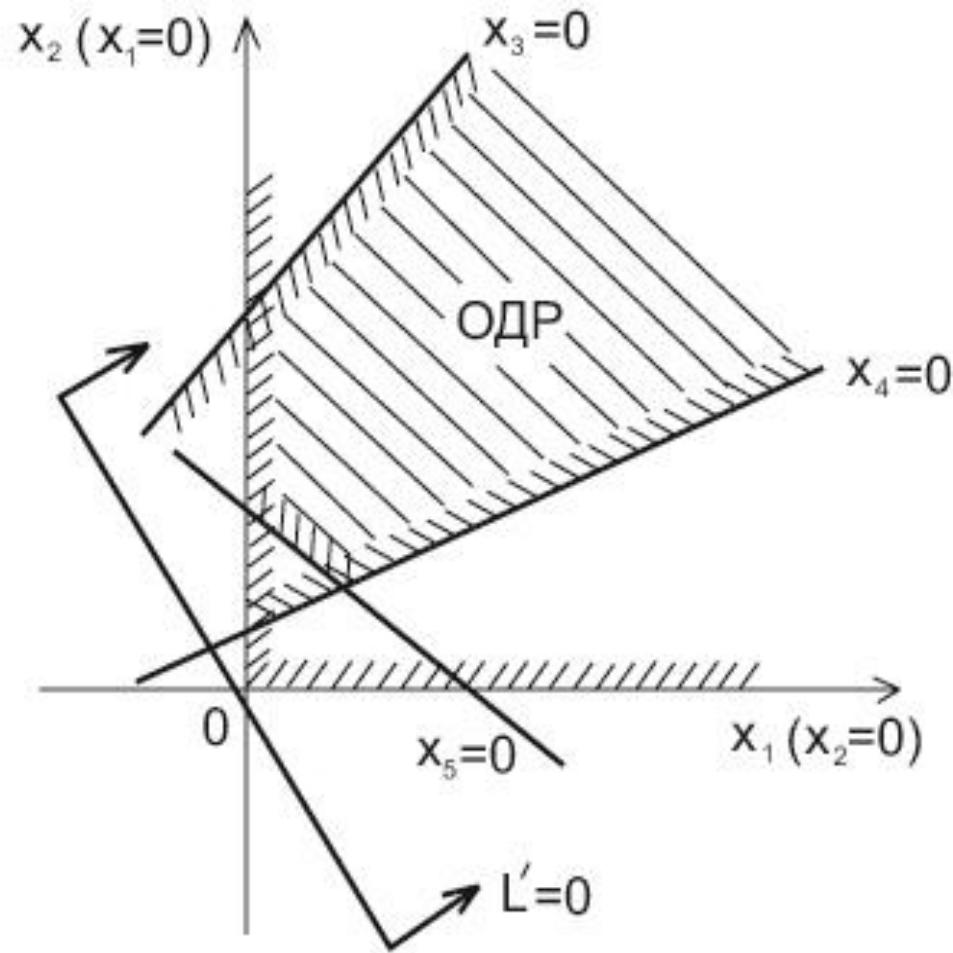
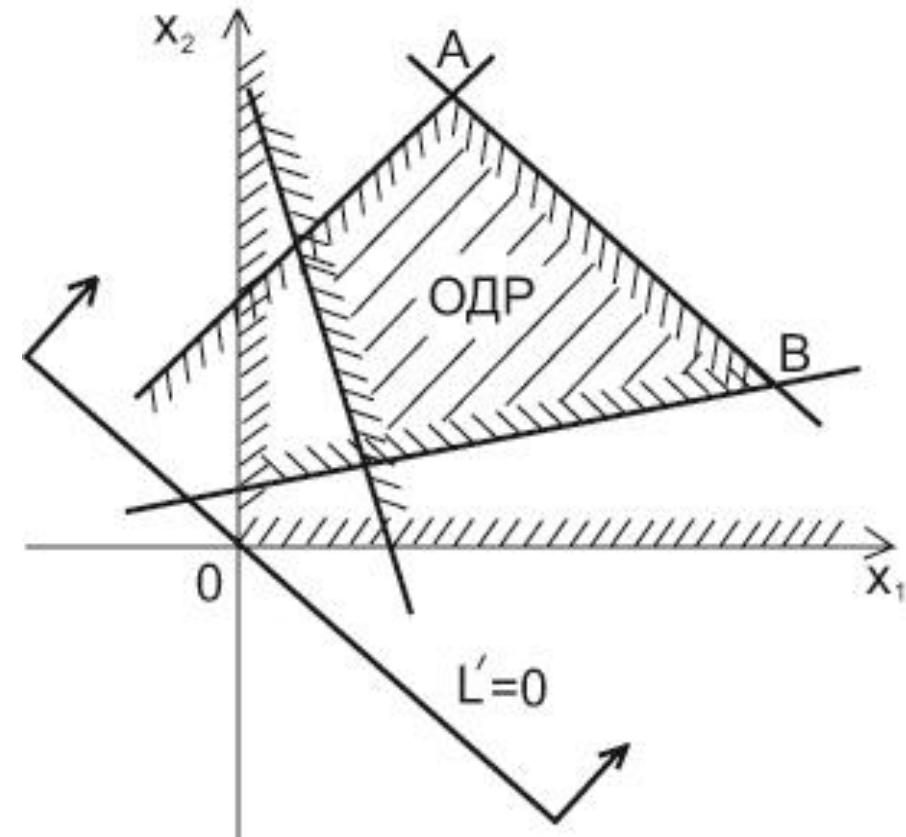


Рис. 1.9

## 2.4 Ідея симплекс-методу

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \alpha_{k+1,2} x_2 + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$x_{k+2} = \beta_{k+2} - (\alpha_{k+2,1} x_1 + \alpha_{k+2,2} x_2 + \dots + \alpha_{k+2,k} x_k)$$

.....

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k).$$

$$\overset{\text{P}}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) : \quad x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0; \quad x_{k+1} = \beta_{k+1};$$

$$x_{k+2} = \beta_{k+2}; \dots; \quad x_n = \beta_n.$$

$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0) \rightarrow \overset{\text{P}}{x}$  – опорне рішення.

$(\exists i : k+1 \leq i \leq n)(\beta_i < 0) \rightarrow \overset{\text{P}}{x}$  – недопустиме рішення.

Нехай  $\beta_{i'} < 0$ ;  $k+1 \leq i' \leq n$ .

Припустимо,  $(\exists j^* : 1 \leq j^* \leq k)(\alpha_{i', j^*} < 0)$ .

Тоді  $(x_{j^*} \uparrow) \Rightarrow (x_{i'} \uparrow)$ .

$$I_{j^*}^{(\pm)} = \{i : (k+1 \leq i \leq n) \& [(\alpha_{i, j^*} < 0) \& (\beta_i < 0) \vee (\alpha_{i, j^*} > 0) \& (\beta_i >$$

Границя збільшення  $x_{j^*}$ :

$$0 = \beta_i - \alpha_{i,j^*} x_{j^*}^{\max}(i),$$

звідки

$$x_{j^*}^{\max}(i) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,j^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(\pm)}.$$

Вибір  $x_{i^*}$ :

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(\pm)} \right\}.$$

Заміна базисних змінних:  $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$ .

$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0) \& (\forall j = \overline{1, k})(\gamma_j \leq 0) \rightarrow x -$   
оптимальне рішення.

$$f_{opt} = \gamma_0 .$$

Нехай  $(\exists j^* : 1 \leq j^* \leq k)(\gamma_{j^*} > 0)$ .

Тоді

$$(x_{j^*} \uparrow) \Rightarrow [f(x) \downarrow].$$

$$I_{j^*}^{(+)} = \left\{ i : (k+1 \leq i \leq n) \& (\alpha_{i,j^*} > 0) \right\}.$$

$$\left( \neg \exists i : k+1 \leq i \leq n \right) (\alpha_{i,j^*} > 0) \rightarrow [f(x) \rightarrow -\infty]$$

Границя збільшення  $x_{j^*}$ :

$$0 = \beta_i - \alpha_{i,j^*} x_{j^*}^{\max}(i),$$

звідки

$$x_{j^*}^{\max}(i) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,j^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(+)}.$$

Вибір  $x_{i^*}$ :

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(+)} \right\}.$$

Заміна базисних змінних:  $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$ .

## 2.5 Табличний алгоритм заміни базисних змінних

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,j} x_j + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

.....

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \dots + \alpha_{i,j} x_j + \dots + \alpha_{i,k} x_k)$$

.....

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Заміна базисних змінних:  $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$ ;

$$k+1 \leq i^* \leq n; \quad 1 \leq j^* \leq k.$$

Дозволяючий рядок

Дозволяючий стовпчик

Дозволяючий елемент

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	...	$x_j^*$	...	$x_k$
$f(x)$	$\gamma_0$	$\gamma_1$		$\gamma_i^*$		$\gamma_k$
$x_{k+1}$	$\beta_{k+1}$	$\alpha_{k+1,1}$	...	$\alpha_{k+1,j^*}$	...	$\alpha_{k+1,k}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_{i^*}$	$\beta_{i^*}$	$\alpha_{i^*,1}$	...	$\alpha_{i^*,j^*}$	...	$\alpha_{i^*,k}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_n$	$\beta_n$	$\alpha_{n,1}$	...	$\alpha_{n,j^*}$	...	$\alpha_{n,k}$

## Приклад

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) \rightarrow \min$$

$$x_4 = \beta_4 - (\alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3)$$

$$x_5 = \beta_5 - (\alpha_{51} x_1 + \alpha_{52} x_2 + \alpha_{53} x_3)$$

$$x_6 = \beta_6 - (\alpha_{61} x_1 + \alpha_{62} x_2 + \alpha_{63} x_3)$$

$$x_j \geq 0 ; j = \overline{1, 6}$$

$$x_2 \Leftrightarrow x_5$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{\beta_5}{\alpha_{52}} - \left( \frac{\alpha_{51}}{\alpha_{52}} x_1 + \frac{1}{\alpha_{52}} x_5 + \frac{\alpha_{53}}{\alpha_{52}} x_3 \right) \\x_4 &= \left( \beta_4 - \frac{\alpha_{42}\beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[ \left( \alpha_{41} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left( \frac{\alpha_{42}}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left( \alpha_{43} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right] \\x_6 &= \left( \beta_6 - \frac{\alpha_{62}\beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[ \left( \alpha_{61} - \frac{\alpha_{62}\alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left( \frac{\alpha_{62}}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left( \alpha_{63} - \frac{\alpha_{62}\alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right] \\f(x) &= \left( \gamma_0 - \frac{\gamma_2\beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[ \left( \gamma_1 - \frac{\gamma_2\alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left( \gamma_3 - \frac{\gamma_2\alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]\end{aligned}$$

## Правила перетворення:

$$1) \quad \alpha_{i^*, j^*}^H = \frac{1}{\alpha_{i^*, j^*}^C};$$

$$2) \quad \alpha_{i^*, j}^H = \frac{\alpha_{i^*, j}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C}; \quad j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j^*\}; \quad \beta_{i^*}^H = \frac{\beta_{i^*}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C};$$

$$3) \quad \alpha_{i, j^*}^H = -\frac{\alpha_{i, j^*}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C}; \quad i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{i^*\}; \quad \gamma_{j^*}^H = -\frac{\gamma_{j^*}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C};$$

$$4) \quad \alpha_{i, j}^H = \alpha_{i, j}^C - \frac{\alpha_{i^*, j}^C \times \alpha_{i, j^*}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C}; \quad i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{i^*\}; \quad j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j^*\};$$

$$\beta_i^H = \beta_i^C - \frac{\beta_{i^*}^C \times \alpha_{i, j^*}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C}; \quad i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{i^*\};$$

$$\gamma_0^H = \gamma_0^C - \frac{\gamma_{j^*}^C \times \beta_{i^*}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C}; \quad \gamma_j^H = \gamma_j^C - \frac{\gamma_{j^*}^C \times \alpha_{i^*, j}^C}{\alpha_{i^*, j^*}^C}; \quad j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j^*\}.$$

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	...	$x_{j^*}$	...	$x_k$
$f(x)$	$\gamma_0 - \frac{\beta_{i^*} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	$\gamma_1 - \frac{\alpha_{i^*, 1} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$		$-\frac{\gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$		$\gamma_k - \frac{\alpha_{i^*, k} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$
$x_{k+1}$	$\beta_{k+1} - \frac{\alpha_{k+1, j^*} \times \beta_{i^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	$\alpha_{k+1, 1} - \frac{\alpha_{i^*, 1} \times \alpha_{k+1, j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	...	$-\frac{\alpha_{k+1, j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	...	$\alpha_{k+1, k} - \frac{\alpha_{i^*, k} \times \alpha_{k+1, j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_{i^*}$	$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	$\frac{\alpha_{i^*, 1}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	...	$\frac{1}{\alpha_{i^*, j^*}}$	...	$\frac{\alpha_{i^*, k}}{\alpha_{i^*, j^*}}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_n$	$\beta_n - \frac{\alpha_{n, j^*} \times \beta_{i^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	$\alpha_{n, 1} - \frac{\alpha_{i^*, 1} \times \alpha_{n, j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	...	$-\frac{\alpha_{n, j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$	...	$\alpha_{n, k} - \frac{\alpha_{i^*, k} \times \alpha_{n, j^*}}{\alpha_{i^*, j^*}}$

## 2.6 Знайдження опорного рішення

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,j} x_j + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

.....

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \dots + \alpha_{i,j} x_j + \dots + \alpha_{i,k} x_k)$$

.....

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

**Рішення**  $\overset{\rho}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) :$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0; \quad x_{k+1} = \beta_{k+1}; \quad x_{k+2} = \beta_{k+2}; \dots; \quad x_n = \beta_n.$$

**Припустимо,**  $(\exists i : k+1 \leq i \leq n)(\beta_i < 0).$

## ПРАВИЛА ВИБОРУ ДОЗВОЛЯЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА

1) Вибирається рядок  $i'$ :  $\beta_{i'} < 0$ ;  $k + 1 \leq i' \leq n$ .

2) В рядку  $i'$  вибирається коефіцієнт  $\alpha_{i', j^*} < 0$ ;  $1 \leq j^* \leq k$

(дозволяючий стовпчик).

$$(\forall j = \overline{1, k})(\alpha_{ij} \geq 0) \rightarrow \text{рішень немає.}$$

3) В дозволяючому стовпчику  $j^*$  виділяються елементи, які мають однакові знаки зі своїми вільними членами:

$$I_{j^*}^{(\pm)} = \left\{ i : (k + 1 \leq i \leq n) \& \left[ (\alpha_{i, j^*} < 0) \& (\beta_i < 0) \vee (\alpha_{i, j^*} > 0) \& (\beta_i > 0) \right] \right\}.$$

4) Обчислюються відношення

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(\pm)}.$$

5) В якості дозволяючого елемента обирається коефіцієнт  $\alpha_{i^* j^*}$ :

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(\pm)} \right\}.$$

## Приклад

$$x_4 = 1 + x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$x_5 = -5 + 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 2 - x_1 - x_2$$

$$x_7 = 1 + x_2 - x_3$$

$$x_4 = 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$x_5 = -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3)$$

$$x_6 = 2 - (x_1 + x_2)$$

$$x_7 = 1 - (-x_2 + x_3)$$

## Приклад

		р/ст.				
		$\beta_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$\rightarrow$		$x_4$	1	-1	-2	1
		$x_5$	-5	-2	1	-1
р/стр.		$x_6$	2	1	1	0
		$x_7$	1	0	-1	1

$\beta_i / \alpha_{ij}$
5/2=2,5
2/1=2

Заміна базиса:  $x_1 \Leftrightarrow x_6$ .

		р/ст.				
		$\beta_i$	$x_6$	$x_2$	$x_3$	
$\rightarrow$		$x_4$	3	1	-3	1
р/стр.		$x_5$	-1	2	3	-1
		$x_1$	2	1	1	0
		$x_7$	1	0	-1	1

$\beta_i / \alpha_{ij}$
3/1=3
-1/-1=1

Заміна базиса:  $x_3 \Leftrightarrow x_5$ .

		$x_6$	$x_2$	$x_5$	
		$\beta_i$	$x_6$	$x_2$	$x_5$
$x_4$		2	3	2	1
$x_3$		1	-2	-3	-1
$x_1$		2	1	1	0
$x_7$		0	2	2	1

Опорне рішення:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ ;  $x_4 = 2$ ;  $x_5 = 0$ ;  $x_6 = 0$ ;  $x_7 = 0$ .

## 2.7 Пошук оптимального рішення

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,j} x_j + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$\dots$$
  
$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \dots + \alpha_{i,j} x_j + \dots + \alpha_{i,k} x_k)$$

$$\dots$$
  
$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k);$$
  
$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

**Рішення**  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n);$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0; \quad x_{k+1} = \beta_{k+1}; \quad x_{k+2} = \beta_{k+2}; \dots; \quad x_n = \beta_n;$$
$$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0).$$

$(\exists \forall j : 1 \leq j \leq k)(\gamma_j \leq 0) \Rightarrow \vec{x}$  – оптимальне рішення.

Припустимо,  $(\exists j : 1 \leq j \leq k)(\gamma_j > 0)$ .

## ПРАВИЛА ВИБОРУ ДОЗВОЛЯЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА

- 1) Вибирається дозволяючий стовпчик  $j^* : \gamma_{j^*} > 0$ .
- 2) В дозволяючому стовпчику  $j^*$  виділяються від'ємні елементи:

$$I_{j^*}^{(+)} = \{i : (k+1 \leq i \leq n) \& (\alpha_{ij^*} > 0)\}.$$

$[\forall i : (k+1 \leq i \leq n)](\alpha_{ij^*} \leq 0) \rightarrow f(x)$  необмежена знизу

- 3) Обчислюються відношення

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}} ; \quad i \in I_{j^*}^{(+)}$$

- 4) В якості дозволяючого елементу вибирається коефіцієнт  $\alpha_{i^* j^*}$ :

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}} ; i \in I_{j^*}^{(+)} \right\}.$$

## Приклад

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min \\
 x_4 &= 2 - x_1 - x_2 + 2x_3 \\
 x_5 &= 1 - x_1 + x_2 - x_3 \\
 x_6 &= 2 - x_2 - x_3 \\
 x_i &\geq 0; \quad i = \overline{1, 6}.
 \end{aligned}$$

**Стандартна форма:**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 - (-x_1 + 2x_2 + x_3) \rightarrow \min \\
 x_4 &= 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3) \\
 x_5 &= 1 - (x_1 - x_2 + x_3) \\
 x_6 &= 2 - (x_2 + x_3) \\
 x_i &\geq 0; \quad i = \overline{1, 6}.
 \end{aligned}$$

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	p/стр.
$f(x)$	0	-1	2	1	
$x_4$	2	1	1	-2	
$x_5$	1	1	-1	1	
$x_6$	5	0	1	1	

$\beta_i / \alpha_{ij}$
1/1=1
5/1=5

1) Заміна базиса:  $x_5 \Leftrightarrow x_3$ .

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	$x_2$	$x_5$	p/ст.	$\beta_i / \alpha_{ij}$
$f(x)$	-1	-2	3	-1		
$x_4$	4	3	-1	2		
$x_3$	1	1	-1	1		
p/стр.	$x_6$	4	-1	2	-1	4/2=2

2) Заміна базиса:  $x_6 \Leftrightarrow x_2$ .

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	$x_6$	$x_5$	p/ст.	$\beta_i / \alpha_{ij}$
$f(x)$	-7	-1/2	-3/2	1/2		
p/стр.	$x_4$	6	5/2	1/2	3/2	
	$x_3$	3	1/2	1/2	1/2	
	$x_2$	2	-1/2	1/2	-1/2	

3) Заміна базиса:  $x_4 \Leftrightarrow x_5$ .

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	$x_6$	$x_4$
$f(x)$	-9	-4/3	-5/3	-1/3
$x_5$	4	5/3	1/3	2/3
$x_3$	1	-1/3	1/3	-1/3
$x_2$	4	1/3	2/3	1/3

Оптимальний розв'язок:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 4; \quad x_6 = 0; \quad f_{opt} = -9.$$

# Тема 3. Цілочисельне програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min ;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i ; \quad i = \overline{1, m} ;$$

$$x_j \geq 0 ; \quad x_j - \text{ціле}; \quad j = \overline{1, n} .$$

### 3.1 Метод відсікання (відсікаючих площин) Р.Гоморі

Таблична форма:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in J^C} \alpha_{ij} x_j ; \quad i \in I^B .$$

Нехай  $x_{i'} = \beta_{i'} \neq \text{ule}$  ;  $i' \in I^B$  .

$[\alpha_{ij}]$ ,  $[\beta_i]$  – найбільші цілі:

$$[\alpha_{ij}] \leq \alpha_{ij} ; \quad [\beta_i] \leq \beta_i .$$

# Ральф Едвард Гоморі

(народився 7 травня 1929 року)

Американський прикладний математик.

Працював у компанії IBM дослідником і пізніше керівником. Його дослідження привели до створення нових галузей прикладної математики.

Вніс фундаментальний вклад у передову технологію в таких галузях, як клітина пам'яті єдиного транзистора, високоощільні пристрой зберігання даних, теорія реляційної бази даних.



## Формування відсікаючого обмеження

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} \alpha_{i'j} x_j = \beta_{i'} . \quad (3.1)$$

$$\sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \leq \sum_{j \in J^C} \alpha_{i'j} x_j ;$$

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \leq \beta_{i'}$$

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \leq [\beta_{i'}] . \quad (3.2)$$

Після віднімання (3.2) від (3.1):

$$\sum_{j \in J^C} \alpha_{i'j} x_j - \sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \geq \beta_{i'} - [\beta_{i'}];$$

$$\sum_{j \in J^C} (\alpha_{i'j} - [\alpha_{i'j}]) x_j \geq \beta_{i'} - [\beta_{i'}].$$

$$\mu_{ij} = \alpha_{ij} - [\alpha_{ij}]; \quad j \in J^C; \quad 0 \leq \mu_{ij} < 1;$$

$$\nu_i = \beta_i - [\beta_i]; \quad 0 < \nu_i < 1.$$

Відсікаюче обмеження:

$$\sum_{j \in J^C} \mu_{i'j} x_j \geq \nu_{i'}.$$

Перетворення в рівняння:

$$\sum_{j \in J^C} \mu_{ij} x_j - x_{n+1} = v_{i'} ; \quad x_{n+1} \geq 0 ;$$
$$x_{n+1} = -v_{i'} + \sum_{j \in J^C} \mu_{ij} x_j . \quad (3.3)$$

**Лемма.** Якщо відсікання (3.3) додається до симплексної таблиці задачі лінійного програмування, то ніякі цілочисельні допустимі точки не виключаються. Нова таблиця є допустимою, якщо  $\beta_{i'}$  – ціле число, та недопустимою в протилежному випадку.

## Приклад

$$f(x) = -7x_1 - 9x_2 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 35$$

$$x_j \geq 0; \quad x_j - \text{ціле}; \quad j = \overline{1, 4}.$$

Перетворена система обмежень:

$$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2$$

$$x_4 = 35 - 7x_1 - x_2$$

Вихідна симплексна таблиця №1 послабленої задачі:

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_1$	$x_2$
$f(x)$	0	7	9
$x_3$	6	-1	3
$x_4$	35	7	1

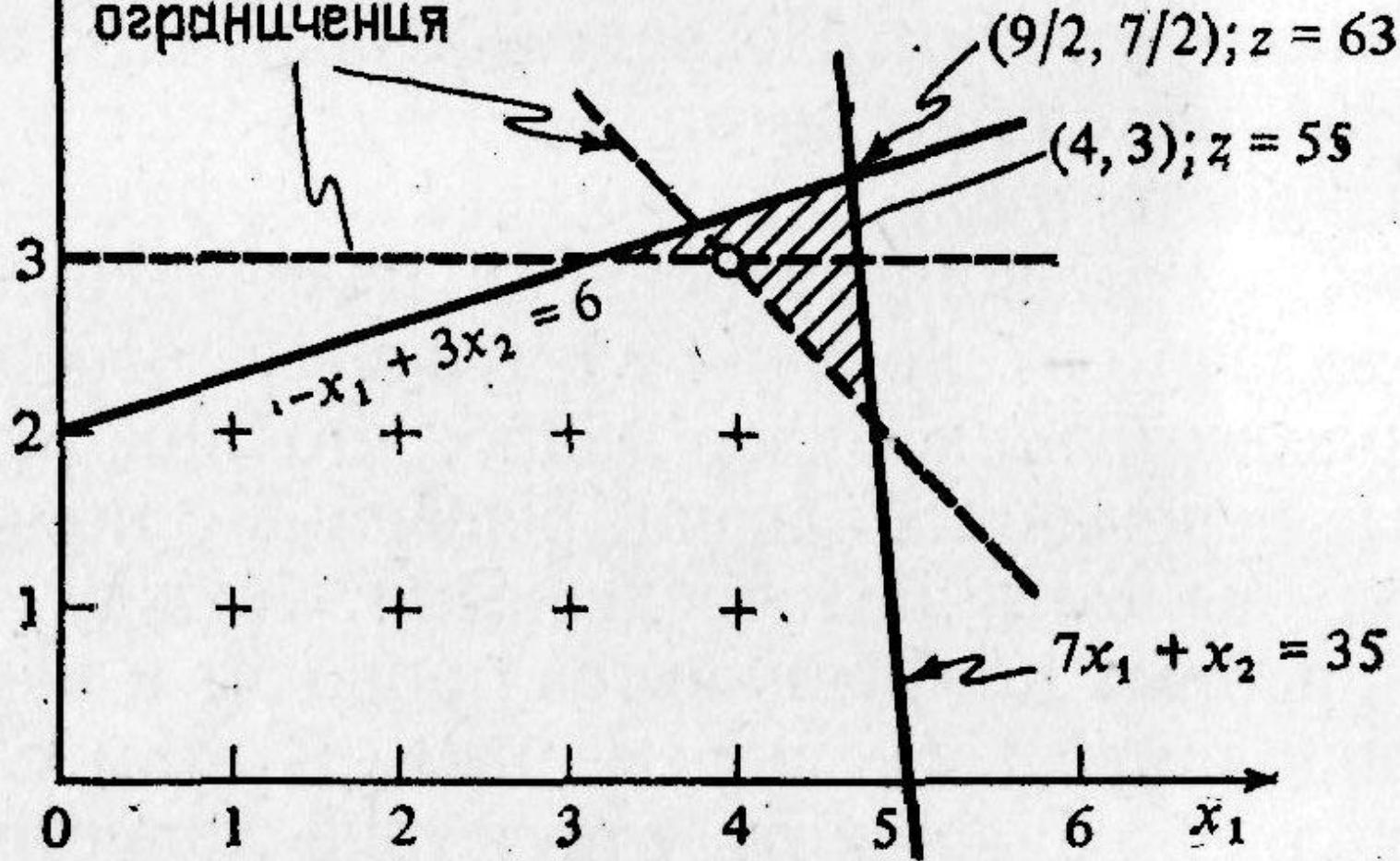
Кінцева симплексна таблиця №2 послабленої задачі:

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_4$	$x_3$
$f(x)$	-63	15/11	28/11
$x_2$	7/2	1/22	7/22
$x_1$	9/2	3/22	-1/22

Розв'язок послабленої задачі:

$$x_1 = 4.5; \quad x_2 = 3.5; \quad x_3 = x_4 = 0; \quad f_{\min} = -63.$$

$x_2$  Дополнительные  
ограничения



$$x_2 = \frac{7}{2} - \left( \frac{1}{22} x_4 + \frac{7}{22} x_3 \right)$$

$$\beta_2 = 3 \frac{1}{2}; \quad [\beta_2] = 3; \quad \nu_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{24} = \frac{1}{22}; \quad [\alpha_{24}] = 0; \quad \mu_{24} = \frac{1}{22}$$

$$\alpha_{23} = \frac{7}{22}; \quad [\alpha_{23}] = 0; \quad \mu_{23} = \frac{7}{22}$$

Рівняння відсікання для  $x_2$ :

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{22} x_3 + \frac{1}{22} x_4.$$

$$x_5 = -\frac{1}{2} - \left( -\frac{1}{22} x_4 - \frac{7}{22} x_3 \right)$$

Початкова симплексна таблиця №3, доповнена відсіканням для  $x_2$ :

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_4$	$x_3$
$f(x)$	-63	15/11	28/11
$x_2$	7/2	1/22	7/22
$x_1$	9/2	3/22	-1/22
$x_5$	-1/2	-1/22	-7/22

Кінцева симплексна таблиця №4, доповнена відсіканням для  $x_2$ :

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_4$	$x_5$
$f(x)$	-59	1	8
$x_2$	3	0	1
$x_1$	32/7	1/7	-1/7
$x_3$	11/7	1/7	-22/7

Розв'язок задачі, доповненої відсіканням для  $x_2$ :

$$x_1 = 32/7; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 11/7; \quad x_4 = 0; \quad f_{\min} = -59.$$

$$x_1 = \frac{32}{7} - \left( \frac{1}{7} x_4 - \frac{1}{7} x_5 \right)$$

$$\beta_1 = 4 \frac{4}{7}; \quad [\beta_1] = 4; \quad \nu_1 = \frac{4}{7}$$

$$\alpha_{14} = \frac{1}{7}; \quad [\alpha_{14}] = 0; \quad \mu_{14} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha_{15} = -\frac{1}{7}; \quad [\alpha_{15}] = -1; \quad \mu_{15} = -\frac{1}{7} - (-1) = \frac{6}{7}$$

Рівняння відсікання для  $x_1$ :

$$x_6 = -\frac{4}{7} + \frac{1}{7} x_4 + \frac{6}{7} x_5.$$

$$x_6 = -\frac{4}{7} - \left( -\frac{1}{7} x_4 - \frac{6}{7} x_5 \right)$$

Початкова симплексна таблиця №5, доповнена відсіканням для  $x_1$ :

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_4$	$x_5$
$f(x)$	-59	1	8
$x_2$	3	0	1
$x_1$	32/7	1/7	-1/7
$x_3$	11/7	1/7	-22/7
$x_6$	-4/7	-1/7	-6/7

Кінцева симплексна таблиця №6, доповнена відсіканням для  $x_1$ :

	$\gamma_0, \beta_i$	$x_6$	$x_5$
$f(x)$	-55	7	2
$x_2$	3	0	1
$x_1$	4	1	-1
$x_3$	1	1	-4
$x_4$	4	-7	6

Розв'язок вихідної (цілочисельної) задачі:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 4; \quad f_{\min} = -55.$$

## 3.2 Метод гілок та границь

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min ; \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i ; \quad i = \overline{1, m} ; \quad (3.5)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j ; \quad x_j - \text{ціле}; \quad j = \overline{1, n} . \quad (3.6)$$

Кількість планів (варіантів розв'язку задачі)  $\vec{x} = (x_j \mid j = \overline{1, n})$ :

$$|G| = \prod_{j=1}^n (d_j + 1) .$$

## Приклад

$$0 \leq x_1 \leq 3; \quad 0 \leq x_2 \leq 1; \quad 0 \leq x_3 \leq 2.$$

$$|G| = 4 \times 2 \times 3 = 24:$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \dots & & \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \dots & & \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(x_{i'} = \beta_{i'} \neq \text{ціле}) \Rightarrow$  розбивання  $G$ :

$$G_1 \subset G: \quad x_{i'} \leq [\beta_{i'}] ;$$

$$G_2 \subset G: \quad x_{i'} \geq [\beta_{i'}] + 1; \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Додаткові обмеження:

$$\text{для } G_1: \quad x_{n+1} = [\beta_{i'}] - x_{i'}; \quad x_{n+1} \geq 0;$$

$$\text{для } G_2: \quad x_{n+1} = -[\beta_{i'}] - 1 + x_{i'}; \quad x_{n+1} \geq 0.$$

На  $k$ -му кроці:

$$G_{\mu}^{(k)}; \quad \mu = \overline{1, \lambda}_k.$$

$$x_{\mu}^{(k)} = \arg \min_{x \in G_{\mu}^{(k)}} f(x);$$

$$\xi(G_{\mu}^{(k)}) = f(x_{\mu}^{(k)}); \quad \mu = \overline{1, \lambda}_k;$$

$$x^* = (x_j^* \mid j = \overline{1, n}); \quad (\forall j = \overline{1, n})(x_j - \text{ціле}).$$

## Алгоритм

1. Перевірка на оптимальність:

$$f(x^*) \leq \min\{ \xi(G_\mu^{(k)} \mid \mu = \overline{\lambda}_k) \}.$$

2. Перевірка умови завершення обчислень.

3. Вибір  $G_{\mu^*}^{(k)}$ :

$$\xi(G_{\mu^*}^{(k)}) = \min \{ \xi(G_\mu^{(k)}) \mid \mu = \overline{\lambda}_k \}.$$

4. Розбиття  $G_{\mu^*}^{(k)}$  на  $G_{\mu^*,1}^{(k)}$  та  $G_{\mu^*,2}^{(k)}$ :

$$G_{\mu^*,1}^{(k)}: \quad x_{n+1} = [\beta_{i^*}] - x_{i^*}; \quad x_{n+1} \geq 0;$$

$$G_{\mu^*,2}^{(k)}: \quad x_{n+1} = -[\beta_{i^*}] - 1 + x_{i^*}; \quad x_{n+1} \geq 0.$$

5. Розв'язок послаблених задач ЛП над  $G_{\mu^*,1}^{(k)}$  та  $G_{\mu^*,2}^{(k)}$

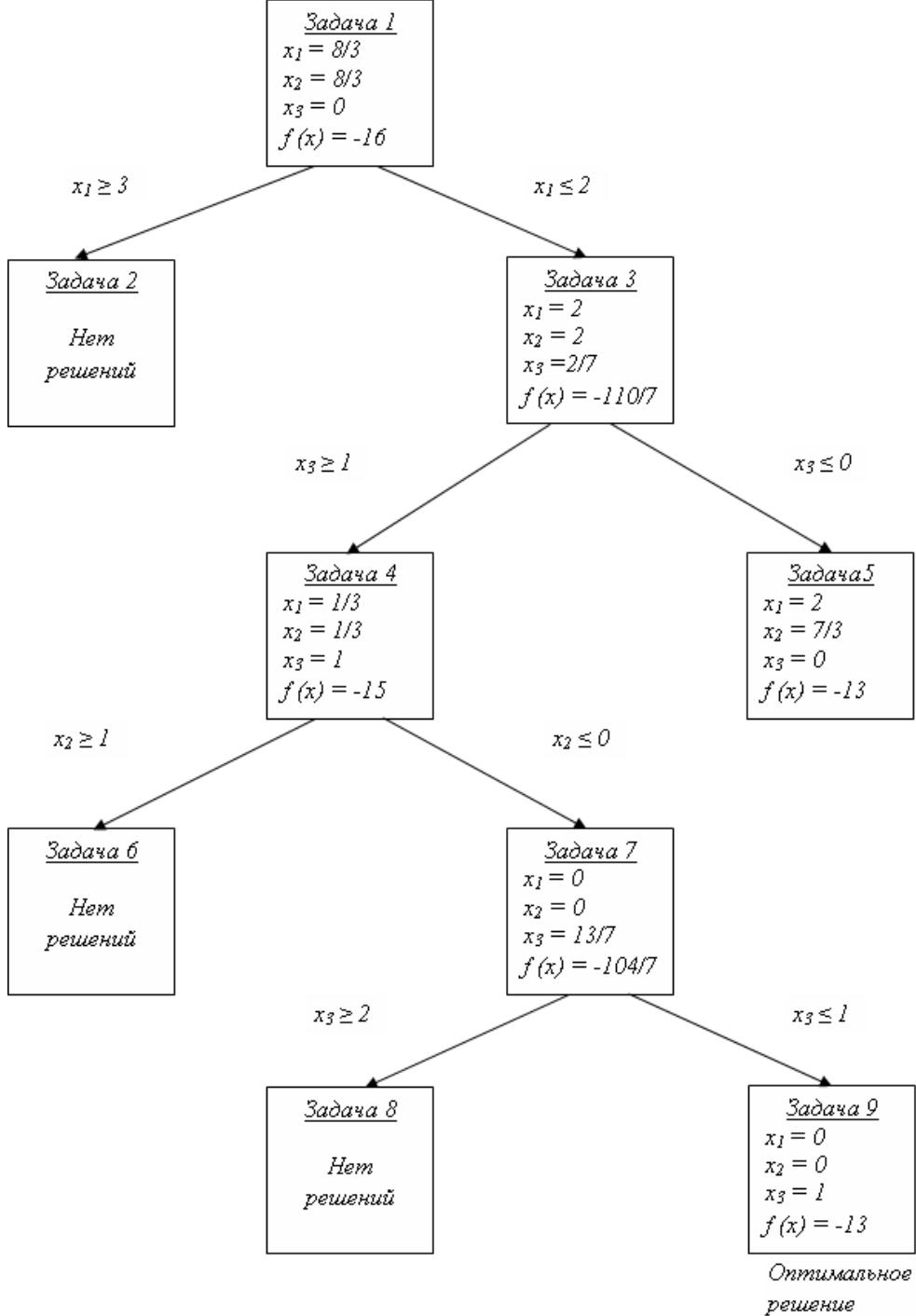
## Приклад

$$f(x) = -3x_1 - 3x_2 - 13x_3 \rightarrow \min$$

$$x_4 = 8 + 3x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

$$x_5 = 8 - 6x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$0 \leq x_j \leq 5; \quad x_j - \text{ціле}; \quad j = \overline{1, 3}; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0.$$



### 3.3 Комбінаторна оптимізація

$$f(x) = \sum_{i \in I_0} c_i x_i \rightarrow \max ; \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in I_j} a_{ji} x_i \leq b_j; \quad j = \overline{1, n} ; \quad (3.8)$$

$$x = (x_i \mid i = \overline{1, m}); \quad x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, m} .$$

$$G = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m;$$

$$X_i = \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, m}; \quad |G| = 2^m.$$

# СФЕРА ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

- Теорія розкладів
- Календарне планування (хмарні технології, інвестиційна діяльність)
- Проектування
- Управління (прийняття рішень, логічне виведення рішень в експертних системах, проектний менеджмент)
- Маршрутизація (графіки обігу повітряних суден, розклад занять)
- Задачі розподілу та упорядкування робіт (графіки технічного обслуговування літальних апаратів)

## ІДЕЯ МЕТОДУ СПРЯМОВАНОГО ПЕРЕБОРУ ВАРИАНТІВ

- Розбиття множини варіантів на підмножини шляхом послідовного присвоювання конкретних значень змінним
- Аналіз нових підмножин варіантів з метою:
  - виявлення множин варіантів, які не містять допустимих рішень;
  - виявлення обмежень, які не є активними по відношенню до підмножини варіантів, що аналізується;
  - виявлення безальтернативних змінних, які повинні приймати лише одне допустиме значення (1 або 0).

Підмножини варіантів:  $G_k$ ;  $k = \overline{1, \lambda}$ .

Частковий план підмножини  $G_k$ :

$$x^C(k) = (x_i \mid i \in I_k^0 \cup I_k^1),$$
$$(\forall i \in I_k^0)(x_i = 0) \text{ & } (\forall i \in I_k^1)(x_i = 1).$$

Доповнюючий план підмножини  $G_k$ :

$$x^D(k) = (x_i \mid i \in I_k),$$
$$(\forall i \in I_k)(x_i \in \{0, 1\}).$$

Активні обмеження:  $J_k \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

Модель, приведена у відповідність  $k$ -тій підмножині варіантів:

$$f_k(x) = \sum_{i \in I_{0k}} c_i x_i + c_k^1 \rightarrow \max ; \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in I_{jk}} a_{ji} x_i \leq b_{jk} ; \quad j \in J_k ; \quad (3.10)$$

$$x = (x_i \mid i \in I_k) ; \quad x_i \in \{0, 1\} ; \quad i \in I_k .$$

$$I_{0k}^0=I_0\,\,{\rm I}\,\,\,I_k^0\,;\,\,\,I_{0k}^1=I_0\,\,{\rm I}\,\,\,I_k^1\,;\,\,\,I_{0k}=I_0\,\,{\rm I}\,\,\,I_k\,;$$

$$I_{jk}^0=I_j\,\,{\rm I}\,\,\,I_k^0\,;\,\,\,I_{jk}^1=I_j\,\,{\rm I}\,\,\,I_k^1\,;\,\,\,I_{jk}=I_j\,\,{\rm I}\,\,\,I_k\,;\,\,\,j=\overline{1,n}\,;$$

$$c_k^1 = \sum_{i \in I_{0k}^1} c_i \quad ; \quad$$

$$b_{jk}=b_j-\sum_{i\in I_{jk}^1}a_{ij} \enspace , \enspace j\in J_k \, .$$

Підмножини та величини, необхідні для дослідження моделі (3.9)-(3.10):

$$I_{0k}^3 = \{i \in I_{0k} : c_i > 0\};$$

$$I_{jk}^2 = \{i \in I_{jk} : a_{ji} < 0\}; \quad I_{jk}^3 = \{i \in I_{jk} : a_{ji} > 0\};$$

$$I_{jk}^2(i') = \{i'\} Y \left\{ i \in I_{jk}^2 : a_{ji} \leq a_{ji'} \right\};$$

$$I_{jk}^3(i'') = \{i''\} Y \left\{ i \in I_{jk}^3 : a_{ji} \geq a_{ji''} \right\};$$

$$s_{jk}^{(p)} = \sum_{i \in I_{jk}^p} a_{ji}; \quad p \in \{2, 3\}; \quad j \in J_k;$$

$$\xi(G_k) = c_k^1 + \sum_{i \in I_{0k}^3} c_i; \quad k = \overline{1, \lambda}.$$

## Аналіз підмножин варіантів

**Твердження 1.** Підмножина  $G_k$  не містить допустимих планів, якщо для деякого обмеження  $j \in J_k$  виконується умова:

$$s_{jk}^{(2)} > b_{jk} .$$

### Приклади.

- a)  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq -1 ;$
- b)  $-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 \leq -9 .$

**Твердження 2.** Обмеження  $j \in J_k$  не є активним по відношенню до планів підмножини  $G_k$ , якщо для нього виконується умова:

$$s_{jk}^{(3)} \leq b_{jk} .$$

### **Приклади.**

- a)  $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 1 ;$
- b)  $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 4x_5 \leq 9 .$

**Твердження 3.** Якщо  $I_{jk}^2 \neq \emptyset$  ( $j \in J_k$ ) та для деякого  $i' \in I_{jk}^2$  виконується умова

$$s_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < s_{jk}^{(2)} - a_{ji'},$$

то з доповнюючих планів підмножини  $G_k$  допустимими можуть бути тільки ті, в яких  $\left[ \forall i \in I_{jk}^2(i') \right] [x_i = 1]$ .

### Приклад.

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 4x_5 - 7x_6 \leq -11.$$

$$i' = 4; \quad a_{ji'} = -5; \quad x_4 = x_6 = 1.$$

**Твердження 4.** Якщо  $I_{jk}^3 \neq \emptyset$  ( $j \in J_k$ ) та для деякого  $i'' \in I_{jk}^3$  виконується умова:

$$s_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < s_{jk}^{(2)} + a_{ji''},$$

то з доповнюючих планів підмножини  $G_k$  допустимими можуть бути лише ті, в яких  $\left[ \forall i \in I_{jk}^3(i'') \right] [x_i = 0]$ .

### Приклади.

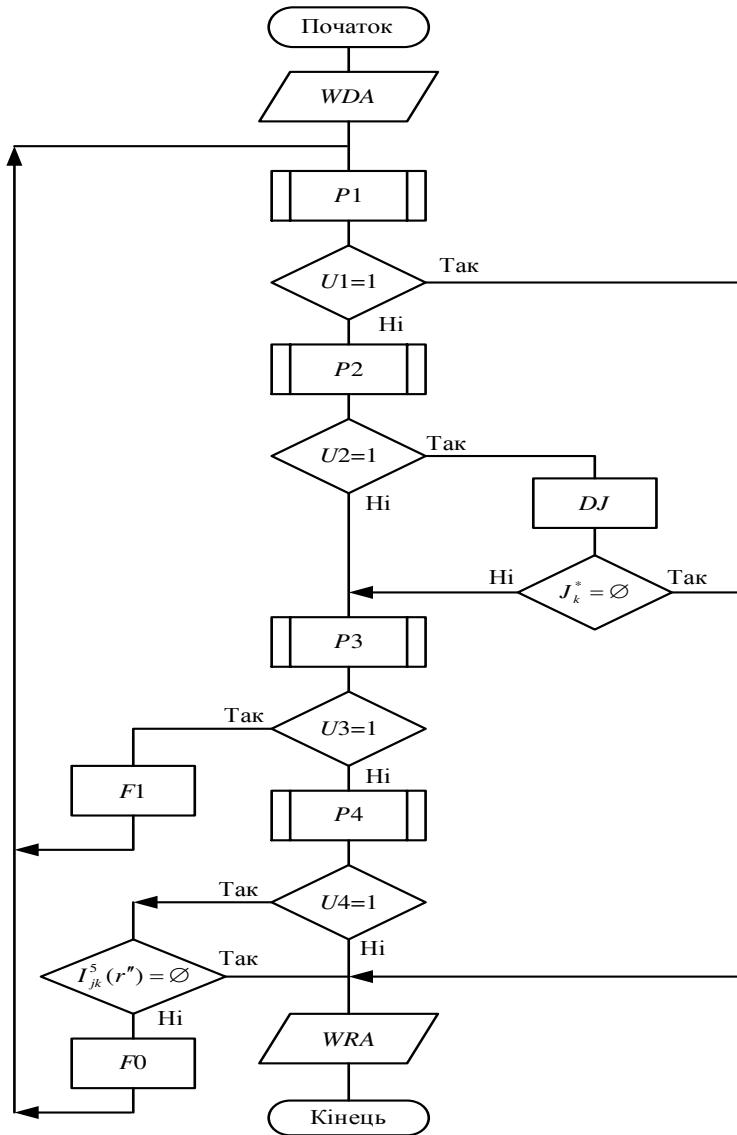
a)  $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 13x_5 \leq 9$ ;

$$i'' = 4; \quad a_{ji''} = 7; \quad x_4 = x_5 = 0;$$

b)  $-x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 9x_5 + 13x_6 \leq -9$ .

$$i'' = 4; \quad a_{ji''} = 7; \quad x_4 = x_6 = 0.$$

# Схема алгоритму аналізу підмножини варіантів



# ФУНКЦІЇ БЛОКІВ

$WDA$  – ввід вхідних даних;

$WRA$  – вивід результатів аналізу підмножини  $G_k$ ;

$P1, P2, P3, P4$  – перевірка виконання умов тверджень 1, 2, 3 та 4 відповідно;

$U1, U2, U3, U4$  – фіксація факту виконання ( $UN = 1$ ) або невиконання ( $UN = 0$ )  $N$ -го твердження;  $N = \overline{1, 4}$ ;

$F1, F0$  – привласнення безальтернативним змінним значення 1 та 0 відповідно, перетворення аналізованої системи обмежень;

$DJ$  – видалення номерів обмежень, що втратили властивість активності.

## Алгоритм

1. Вибір підмножини варіантів  $G_{k^*}$ ;  $1 \leq k^* \leq \lambda$ , яка підлягає розбиттю:

$$\xi(G_{k^*}) = \max \left\{ \xi(G_k); \quad k = \overline{1, \lambda} \right\}.$$

2. Вибір незалежної змінної  $x_{i^*}$ ;  $i^* \in I_{k^*}$ , значення якої підлягає фіксації:

$$c_{i^*} = \max \{ c_i; \quad i \in I_{o k^*} \}.$$

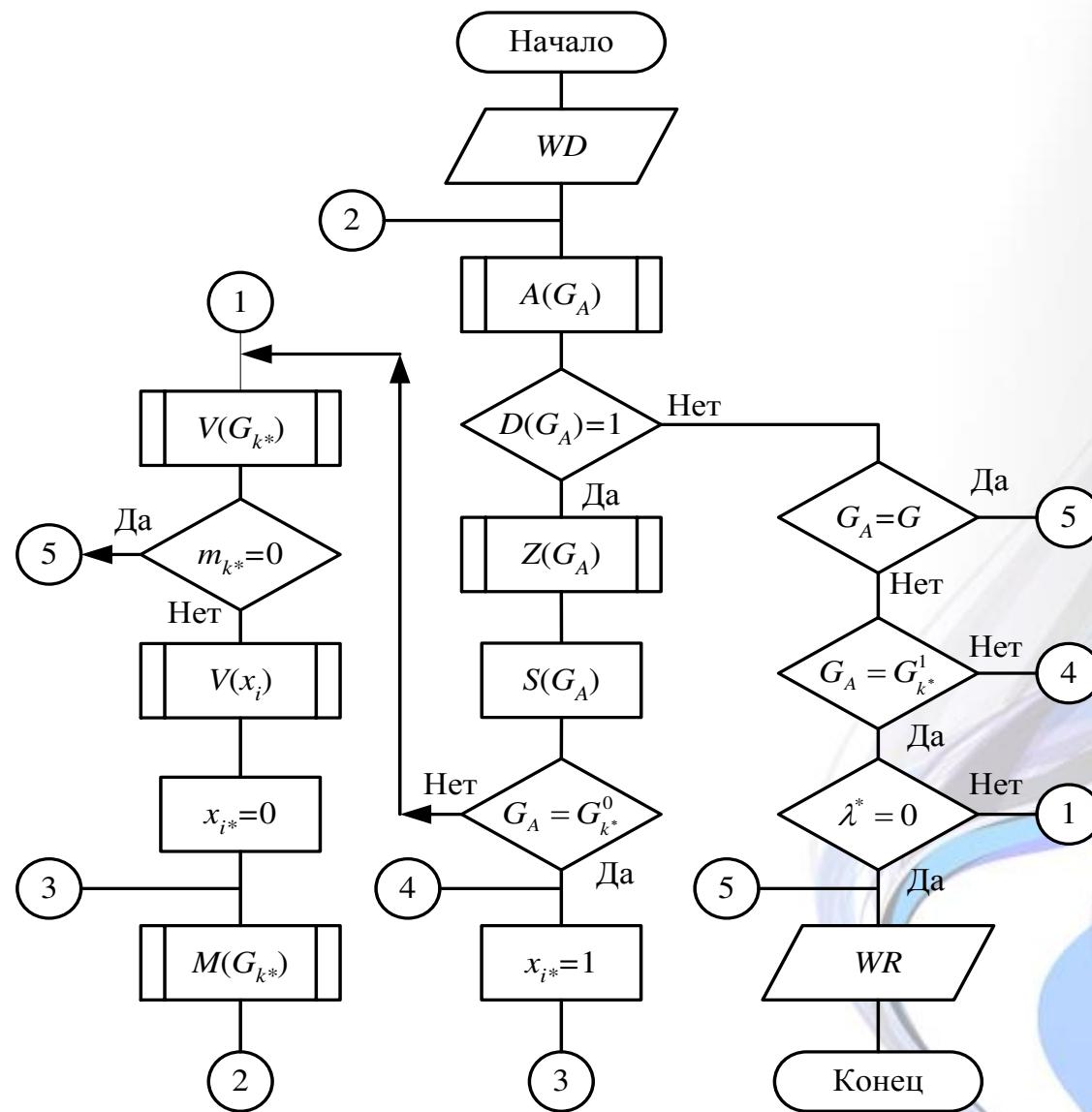
3. Розбиття підмножини варіантів  $G_{k^*}$ :

$$(G_{k^*} \mid x_{i^*} = 0) \Rightarrow G_{k^*}^0;$$
$$(G_{k^*} \mid x_{i^*} = 1) \Rightarrow G_{k^*}^1.$$

4. Аналіз підмножин  $G_{k^*}^0$  та  $G_{k^*}^1$ .

5. Перевірка допустимих планів на оптимальність:

$$\max \{f(x); x \in X^*\} \geq \max \left\{ \xi(G_k); \quad k = \overline{1, \lambda^*} \right\};$$
$$x^* = \arg \max \{f(x); x \in X^*\}.$$



# ФУНКЦІЇ БЛОКІВ (1)

$WD$  – ввід вхідних даних;

$WR$  – вивід результатів обчислень;

$MDP$  – фіксація часткових планів та оцінок цільової функції підмножин варіантів;

$A(G_A)$  – аналіз множини варіантів  $G_A$  ( $G$ ,  $G_{k^*}^0$  або  $G_{k^*}^1$ );

$D(G_A)$  – фіксація показника наявності ( $D(G_A) = 1$ ) або відсутності ( $D(G_A) = 0$ ) припустимих планів в підмножині  $G_A$ ;

$Z(G_A)$  – обчислення оцінки цільової функції на  $G_A$ ;

## ФУНКЦІЇ БЛОКІВ (2)

$S(G_A)$  – занесення оцінки цільової функції та часткового плану даної підмножини варіантів  $G_A$  у масив  $MDP$ ;

$M(G_{k^*})$  – перетворення математичної модель, що відповідає підмножині  $G_{k^*}$ , до виду, адекватному підмножині  $G_{k^*}^1$ ;

$V(G_{k^*})$  – вибір підмножини варіантів для подальшого розбиття;

$V(x_{i^*})$  – вибір незалежної змінної  $x_{i^*}$ ,  $i^* \in I_{k^*}$  для привласнення конкретних значень.

## Приклад.

$$f(x) = -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 5x_3 \leq 0$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \quad (2)$$

$$-7x_2 + 8x_5 - 4x_6 \leq -3 \quad (3)$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_7 \leq 2 \quad (4)$$

$$2x_2 - 9x_5 - 7x_7 \leq -5 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, 7}$$

## *Крок 1.*

Розбиття  $G$ :

$$G_1 \subset G : \quad x_2 = 0; \quad \xi(G_1) = 4;$$

$$G_2 \subset G : \quad x_2 = 1; \quad \xi(G_2) = 9.$$

Аналіз  $G_2$ :

$$f_2(x) = 5 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$-2x_1 - 5x_3 \leq -6 \quad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \quad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq 4 \quad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \leq 4 \quad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -7 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 9.$$

3 обмеження (1):  $x_1 = x_3 = 1$ .

Після підстановки  $x_1 = x_3 = 1$ :

$$f_2(x) = -4 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max \quad (2)$$

$$7x_4 + 5x_5 \leq 10 \quad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq 4 \quad (3)$$

$$x_7 \leq 0 \quad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -7 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 5, 6, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 0.$$

З обмеження (4):  $x_7 = 0$ .

Після підстановки  $x_7 = 0$ :

$$f_2(x) = -4 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \rightarrow \max \quad (2)$$
$$7x_4 + 5x_5 \leq 10$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq 4 \quad (3)$$

$$-9x_5 \leq -7 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 5, 6\}$$

$$\xi(G_2) = 0.$$

З обмеження (5):  $x_5 = 1$ .

Після підстановки  $x_5 = 1$ :

$$f_2(x) = -8 + 3x_4 + x_6 \rightarrow \max \quad (2)$$

$$7x_4 \leq 5$$

$$-4x_6 \leq -4$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 6\}$$

$$\xi(G_2) = -4.$$

З обмеження (2):  $x_4 = 0$ .

Після підстановки  $x_4 = 0$ :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -8 + x_6 \rightarrow \max \\ -4x_6 &\leq -4 \\ x_i &\in \{0, 1\}; \quad i \in \{6\} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\xi(G_2) = -7.$$

З обмеження (3):  $x_6 = 1$ .

Після підстановки  $x_6 = 1$ :

$$x = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0); \quad \xi(G_2) = f(x) = -7.$$

Аналіз  $G_1$ :

$$f_1(x) = -2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max \quad (1)$$
$$-2x_1 - 5x_3 \leq 0 \quad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \quad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq -3 \quad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \leq 2 \quad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -5 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 4.$$

Обмеження (1) – не активне.

З обмеження (3):  $x_6 = 1$ .

Після підстановки  $x_6 = 1$ :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 6x_7 \rightarrow \max \\ -3x_1 + 7x_4 + 5x_5 &\leq 7 \end{aligned} \tag{2}$$

$$8x_5 \leq 1 \tag{3}$$

$$4x_1 + x_7 \leq 2 \tag{4}$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -5 \tag{5}$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 4.$$

З обмеження (3):  $x_5 = 0$ .

Після підстановки  $x_5 = 0$ :

$$f_1(x) = 1 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 6x_7 \rightarrow \max \quad (2)$$
$$-3x_1 + 7x_4 \leq 7$$

$$4x_1 + x_7 \leq 2 \quad (4)$$

$$-7x_7 \leq -5 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 4.$$

З обмеження (5):  $x_7 = 1$ .

Після підстановки  $x_7 = 1$ :

$$f_1(x) = -5 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \quad (2)$$
$$-3x_1 + 7x_4 \leq 7$$

$$4x_1 \leq 1 \quad (4)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4\}$$

$$\xi(G_2) = -2.$$

З обмеження (4):  $x_1 = 0$ .

Після підстановки  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -5 - 7x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \\ 7x_4 &\leq 7 \\ x_i &\in \{0, 1\}; \quad i \in \{3, 4\} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\xi(G_2) = -2.$$

## **Крок 2.**

Розбиття  $G_1$ :

$$G_3 \subset G_1 : \quad x_4 = 0; \quad \xi(G_3) = -5;$$

$$G_4 \subset G_1 : \quad x_4 = 1; \quad \xi(G_4) = -2.$$

Аналіз  $G_4$ :

$$f_4(x) = -2 - 7x_3 \rightarrow \max$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{3\}$$

$$\xi(G_2) = -2.$$

### Крок 3.

Розбиття  $G_4$ :

$$G_5 \subset G_4 : \quad x_3 = 0 ; \quad \xi(G_5) = -2 ;$$

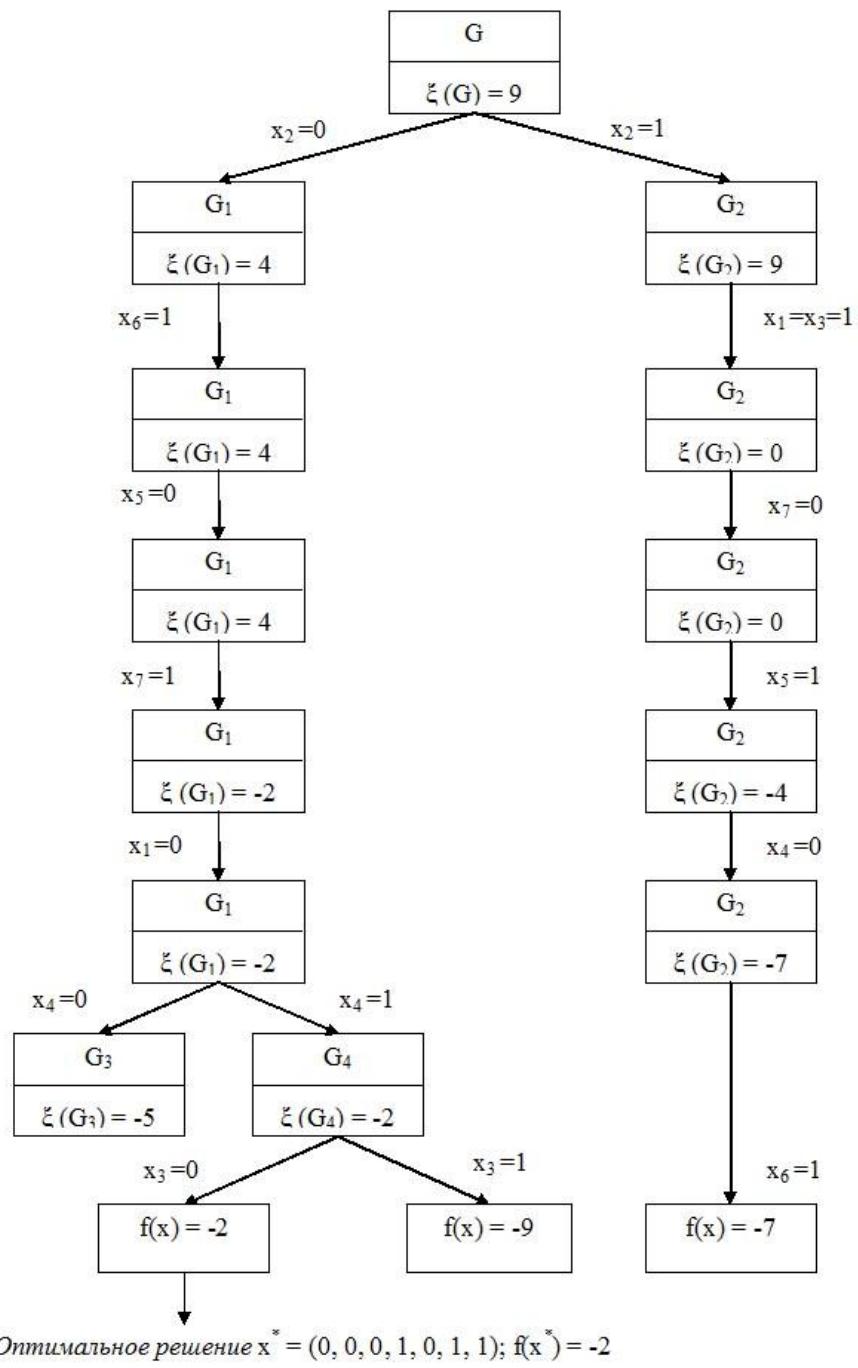
$$G_6 \subset G_4 : \quad x_3 = 1 ; \quad \xi(G_6) = -9 .$$

Аналіз  $G_5$ :

$$I_5 = \emptyset.$$

Оптимальний розв'язок:

$$x = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1); \quad \xi(G_5) = f_5(x) = -2.$$

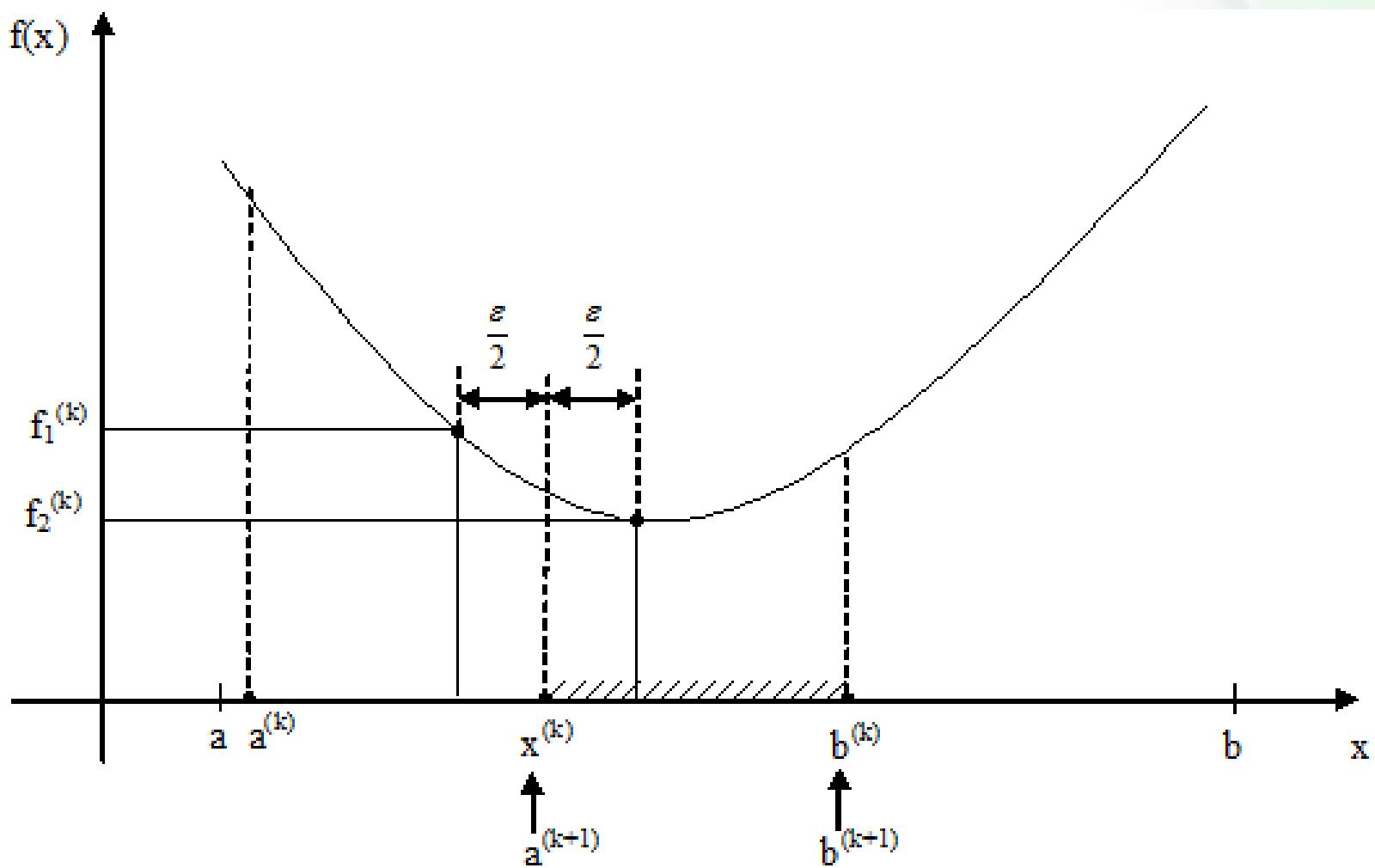


Optimalное решение  $x^* = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ ;  $f(x^*) = -2$

## Тема 4. Методи одномірної оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min ; \quad x \in E^1 ; \quad a \leq x \leq b .$$

## 4.1 Метод дихотомії



Вихідні дані:  $f(x)$ ;  $(a, b)$ ;  $\varepsilon \approx 0.01$ .

$$a^{(1)} = a; \quad b^{(1)} = b.$$

На  $k$ -му кроці:

$$\begin{aligned}x^{(k)} &= \frac{1}{2} [a^{(k)} + b^{(k)}]; \\f_1^{(k)} &= f\left[x^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2}\right]; \quad f_2^{(k)} = f\left[x^{(k)} + \frac{\varepsilon}{2}\right].\end{aligned}$$

Якщо  $f_1^{(k)} > f_2^{(k)}$ , ТО  $a^{(k+1)} = x^{(k)}$ ;  $b^{(k+1)} = b^{(k)}$ .

Якщо  $f_1^{(k)} < f_2^{(k)}$ , ТО  $a^{(k+1)} = a^{(k)}$ ;  $b^{(k+1)} = x^{(k)}$ .

Критерій закінчення пошуку:

$$[b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] < \varepsilon.$$

$$x^* = \frac{1}{2} [a^{(k+1)} + b^{(k+1)}]; \quad f_{\min} = f(x^*).$$

## 4.2 Метод золотого перетину

$$\varphi_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38; \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62.$$

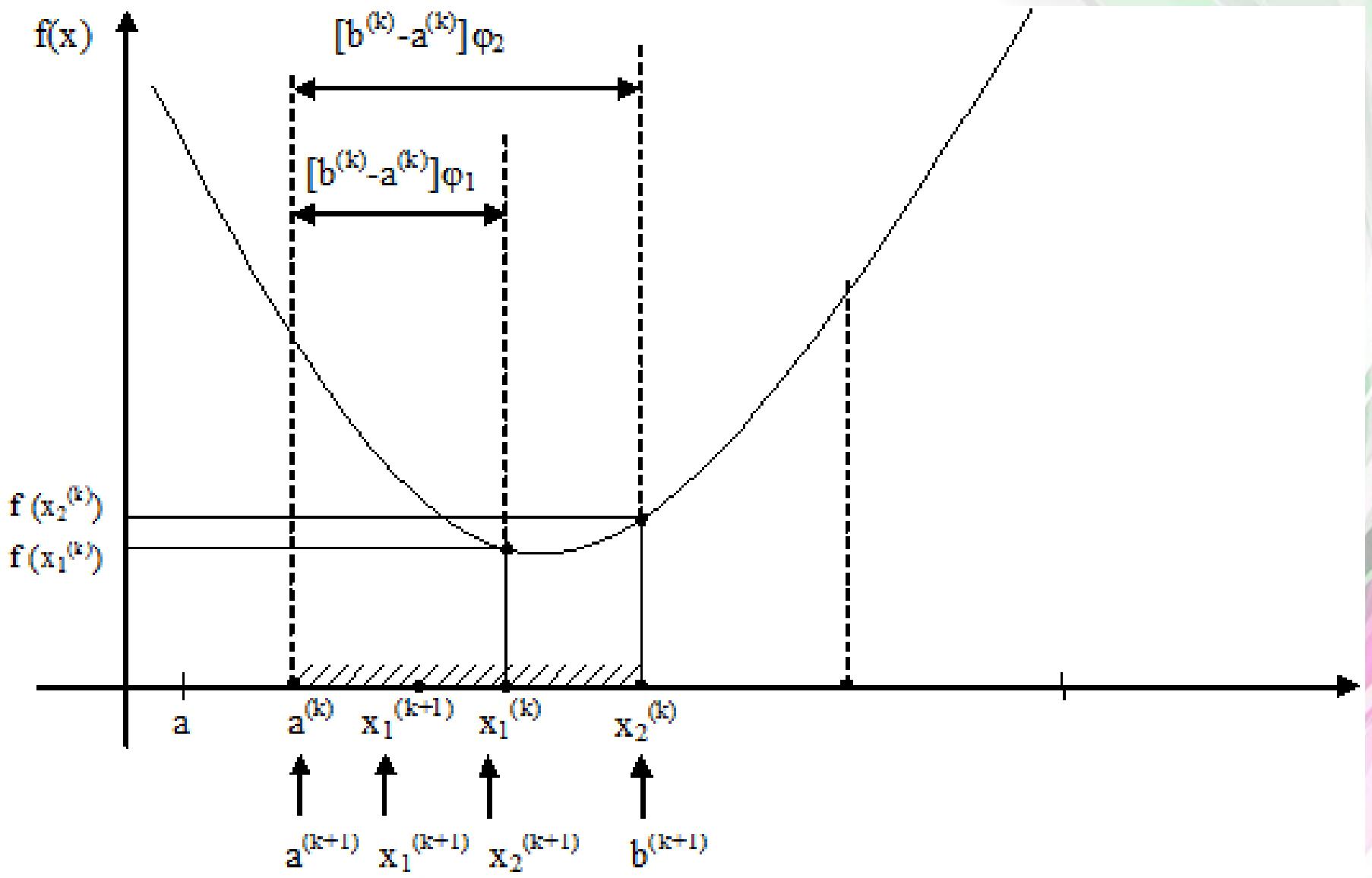
$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1; \quad \varphi_1 = (\varphi_2)^2.$$

# Леонардо Пізанський (Фібоначчі)

(приблизно 1170 – 1250)



Перший великий математик середньовічної Європи. Пропагандист десяткової системи числення і використання арабських цифр. Автор низки математичних трактатів. Праця Фібоначчі «Книга абака» сприяла поширенню в Європі позиційної системи числення, зручнішої для обчислень, ніж римська нотація. Дослідив можливості застосування індійських цифр, що раніше залишалися неясними, навів приклади рішення практичних завдань, зокрема, пов'язаних з торговельною справою.



Вихідні дані:  $f(x)$ ;  $(a, b)$ ;  $\varepsilon \approx 0.01$ .

$$a^{(1)} = a; \quad b^{(1)} = b.$$

На  $k$ -му кроці:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= a^{(k)} + [b^{(k)} - a^{(k)}] \times \varphi_1; \\ x_2^{(k)} &= a^{(k)} + [b^{(k)} - a^{(k)}] \times \varphi_2. \end{aligned}$$

Якщо  $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$ , то:

$$a^{(k+1)} = a^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_1^{(k+1)} = a^{(k+1)} + [b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] \times \varphi_1; \quad x_2^{(k+1)} = x_1^{(k)}.$$

Якщо  $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$ , то:

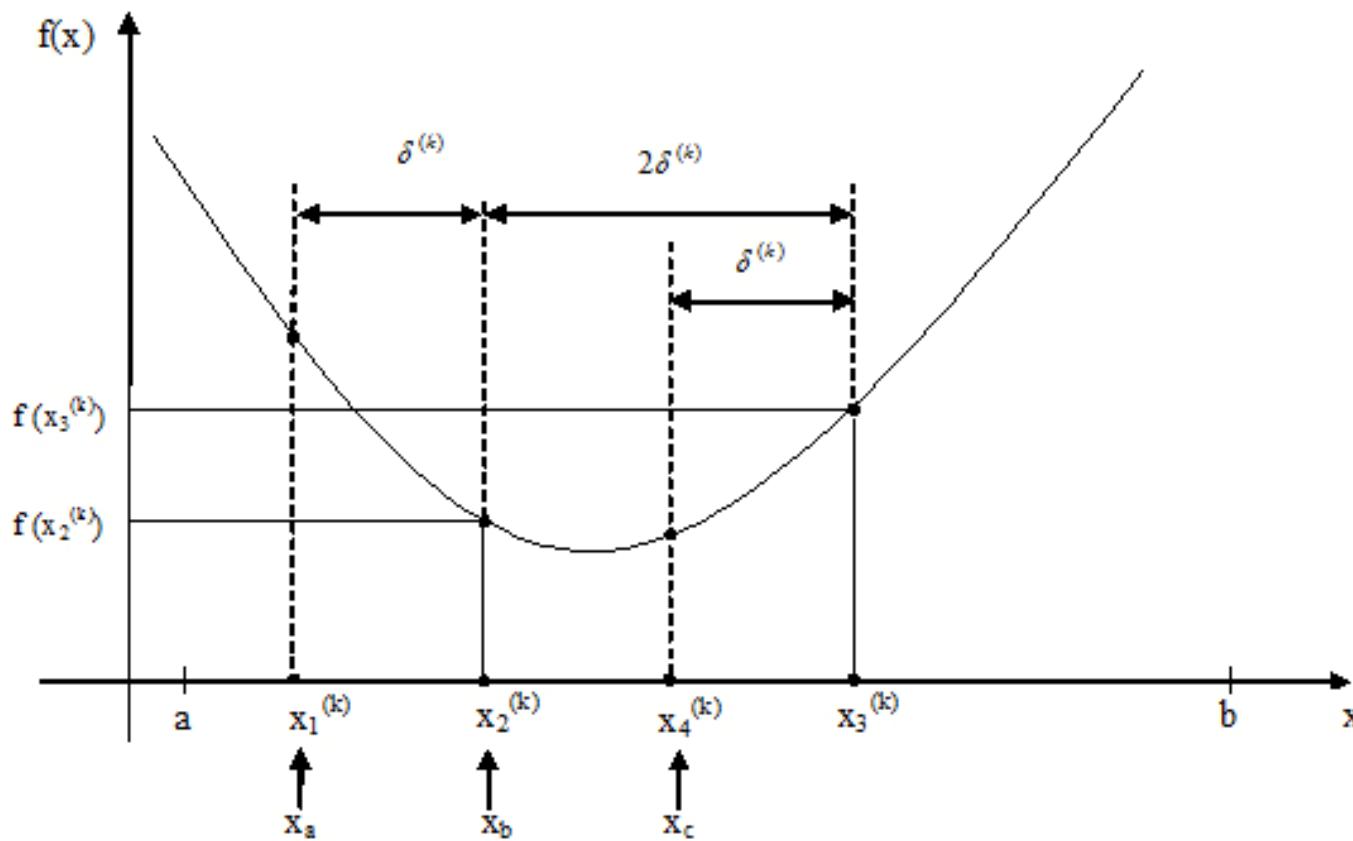
$$a^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = b^{(k)}; \quad x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = a^{(k+1)} + [b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] \times \varphi_2.$$

Критерій закінчення пошуку:

$$[b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] < \varepsilon.$$

$$x^* = \frac{1}{2} [a^{(k+1)} + b^{(k+1)}]; \quad f_{\min} = f(x^*).$$

## 4.3 Метод однократної інтерполяції (метод ДСК)



Вихідні дані:  $f(x)$ ;  $(a, b)$ ;  $x^{(0)} \in (a, b)$ ;  $\delta^{(0)}$ ;  $\gamma \approx 0.001$ .

$$x_1^{(k)} = \begin{cases} x^{(0)} & \text{npu } k = 1 \\ x_{\min}^{(k-1)} & \text{npu } k > 1 \end{cases};$$

$$f(x_{\min}^{(0)}) = f(x^{(0)}) ;$$

$$\delta^{(k)} = \begin{cases} \delta^{(0)} & \text{npu } k = 1 \\ \frac{1}{2}\delta^{(k-1)} & \text{npu } k > 1 \end{cases}.$$

На  $k$ -му кроці ( $k \geq 1$ ):

1.  $x_2^{(k)} = x_1^{(k)} + \delta^{(k)}$ ;

Якщо  $f(x_2^{(k)}) \leq f(x_1^{(k)})$ , то  $\Rightarrow$  пункт 2.

У противному випадку прийняти  $\delta^{(k)} := -\delta^{(k)}$  і повторити пункт 1.

Якщо при повторному виконанні пункту 1  $f(x_2^{(k)}) > f(x_1^{(k)})$ , то прийняти  $\delta^{(k+1)} = \frac{1}{2}\delta^{(k)}$  і повторити пункт 1.

2.  $x_3^{(k)} = x_2^{(k)} + 2\delta^{(k)}$ .

Якщо  $f(x_3^{(k)}) \leq f(x_2^{(k)})$ , то прийняти  $\delta^{(k)} := 2\delta^{(k)}$  і  $\Rightarrow$  пункт 1.

У противному випадку  $\Rightarrow$  пункт 3.

3.  $x_4^{(k)} = x_3^{(k)} - \delta^{(k)}$ .

Якщо  $f(x_4^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$ , то  $\Rightarrow$  пункт 4.

У противному випадку  $\Rightarrow$  пункт 5.

$$4. \quad x_a = x_1^{(k)}; \quad x_b = x_2^{(k)}; \quad x_c = x_4^{(k)} \text{ i } \Rightarrow \text{пүнкт 6.}$$

$$5. \quad x_a = x_2^{(k)}; \quad x_b = x_4^{(k)}; \quad x_c = x_3^{(k)}.$$

$$6. \quad x_{\min}^{(k)} = x_b - \frac{S_1^{(k)}}{S_2^{(k)}};$$

$$S_1^{(k)} = \delta^{(k)} [f(x_a) - f(x_c)];$$

$$S_2^{(k)} = 2[f(x_a) - 2f(x_b) + f(x_c)].$$

7. Якщо  $x_{\min}^{(k)} < a$ , то  $x_{opt} = a$  і  $\Rightarrow$  кінець обчислень.

Якщо  $x_{\min}^{(k)} > b$ , то  $x_{opt} = b$  і  $\Rightarrow$  кінець обчислень.

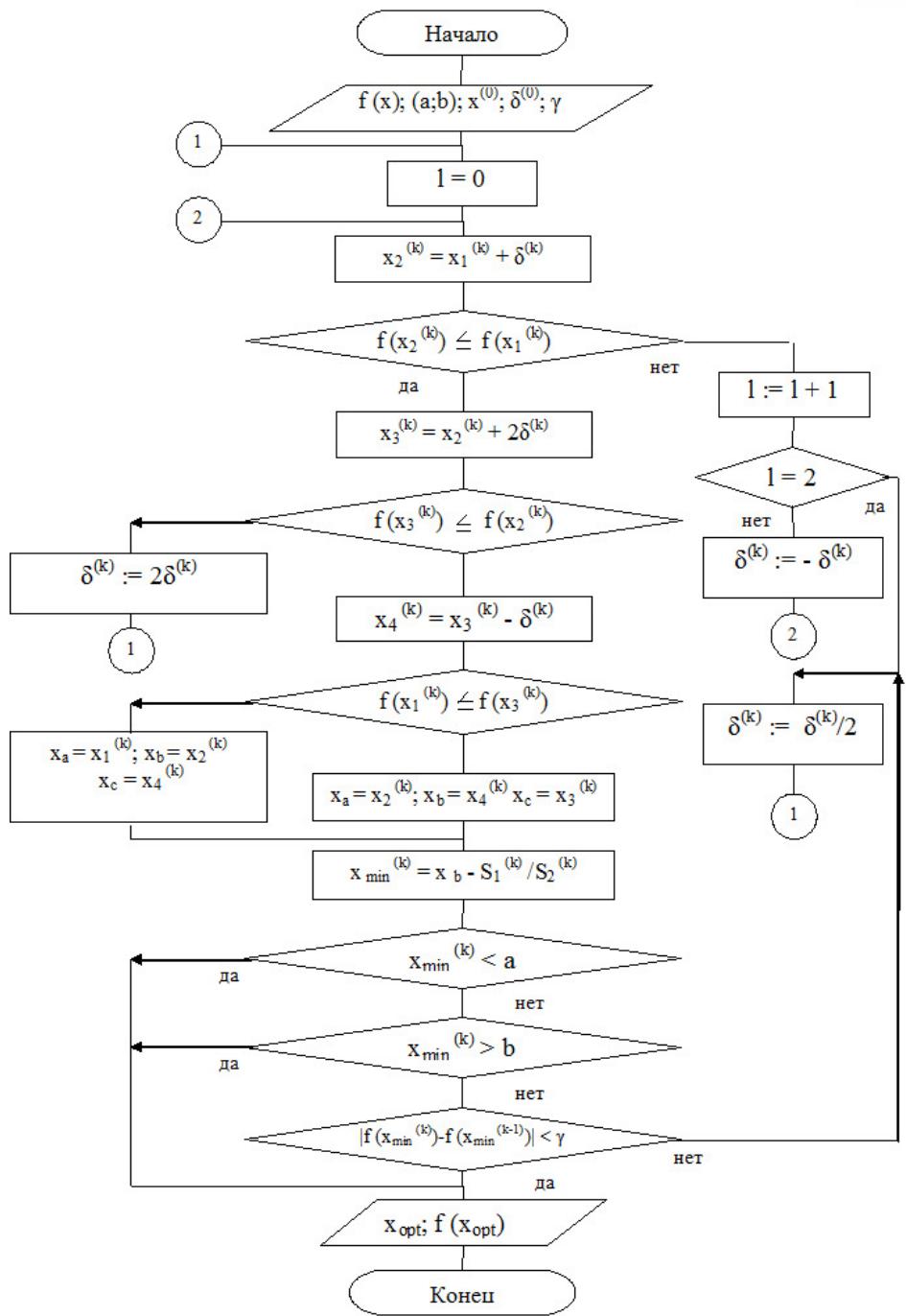
8. Якщо

$$\left| f(x_{\min}^{(k)}) - f(x_{\min}^{(k-1)}) \right| \leq \gamma ,$$

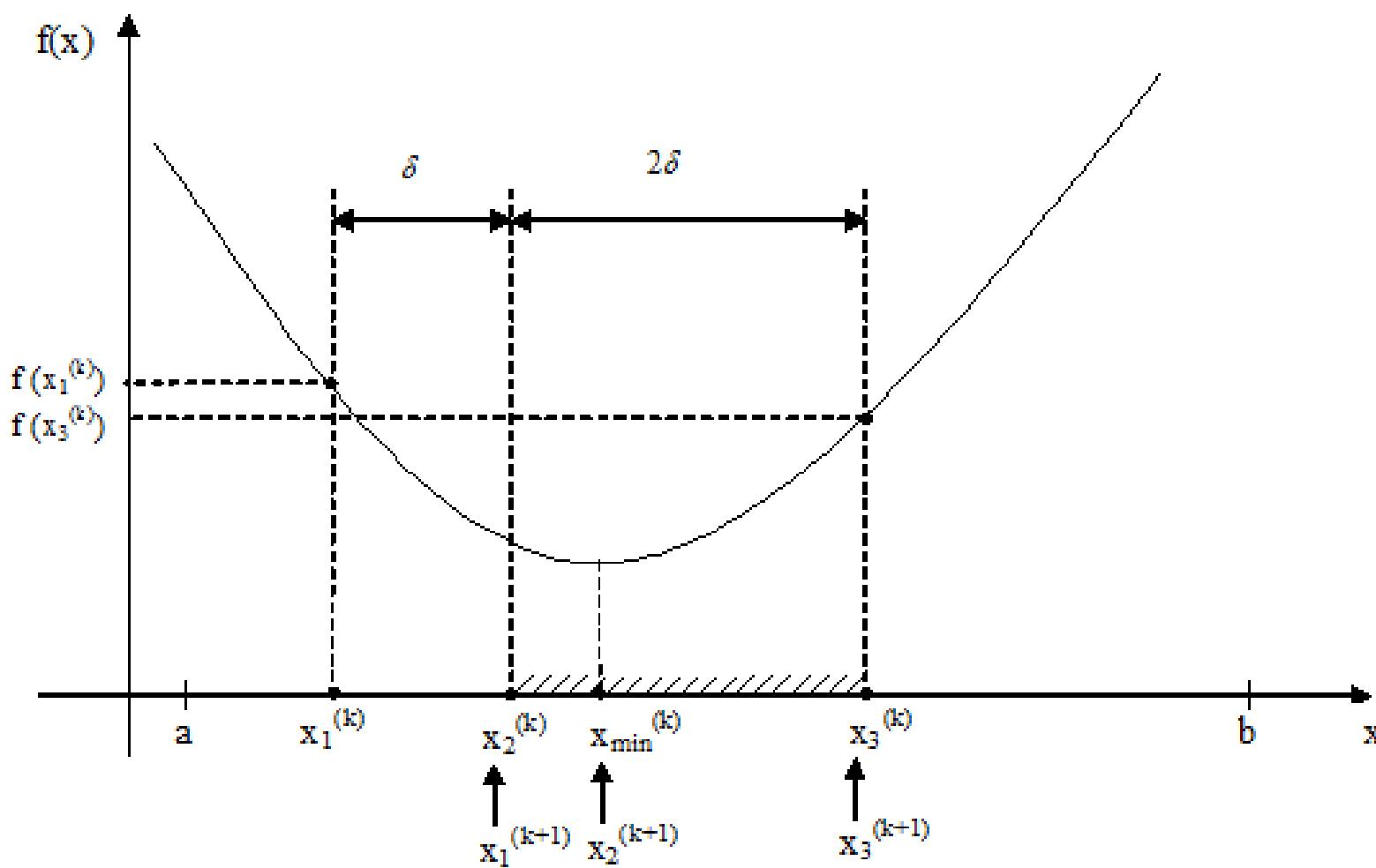
то:

$x_{opt} \approx x_{\min}^{(k)}$  ;  $f_{opt} \approx f(x_{opt})$  і  $\Rightarrow$  кінець обчислень.

У протилежному випадку  $\Rightarrow (k+1)$ -ий крок.



## 4.4 Метод багаторазової інтерполяції (метод Пауелла)



Вихідні дані:  $f(x)$ ;  $(a, b)$ ;  $x^{(0)} \in (a, b)$ ;  $\delta$ ;  $\gamma \approx 0.001$ .

Попередній етап:

$$x_1^{(1)} = x^{(0)};$$

$$x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + \delta;$$

$$x_3^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)} + 2\delta, & \text{якщо } f(x_2^{(1)}) < f(x_1^{(1)}) \\ x_1^{(1)} - \delta & \text{в противному випадку} \end{cases}.$$

Ha  $k$ -мы кроці ( $k \geq 1$ ):

$$1. \quad x_{\min}^{(k)} = \frac{S_1^{(k)}}{2 \times S_2^{(k)}};$$

$$\begin{aligned} S_1^{(k)} &= [(x_1^{(k)})^2 - (x_2^{(k)})^2]f(x_3^{(k)}) + \\ &\quad + [(x_2^{(k)})^2 - (x_3^{(k)})^2]f(x_1^{(k)}) + \\ &\quad + [(x_3^{(k)})^2 - (x_1^{(k)})^2]f(x_2^{(k)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^{(k)} &= [x_1^{(k)} - x_2^{(k)}]f(x_3^{(k)}) + \\ &\quad + [x_2^{(k)} - x_3^{(k)}]f(x_1^{(k)}) + \\ &\quad + [x_3^{(k)} - x_1^{(k)}]f(x_2^{(k)}). \end{aligned}$$

2. Якщо  $x_{\min}^{(k)} < a$ , то  $x_{opt} = a$  і  $\Rightarrow$  кінець обчислень.

Якщо  $x_{\min}^{(k)} > b$ , то  $x_{opt} = b$  і  $\Rightarrow$  кінець обчислень.

3. Якщо

$$\left| f(x_{\min}^{(k)}) - f(x_{\min}^{(k-1)}) \right| \leq \gamma ,$$

то:

$x_{opt} \approx x_{\min}^{(k)}$  ;  $f_{opt} \approx f(x_{opt})$  і  $\Rightarrow$  кінець обчислень.

4. Якшо  $f(x_1^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$  і  $x_{\min}^{(k)} < x_2^{(k)}$ , то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} ; \quad x_2^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)} ; \quad x_3^{(k+1)} = x_2^{(k)} .$$

Якшо  $f(x_1^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$ , але  $x_{\min}^{(k)} \geq x_2^{(k)}$ , то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} ; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} ; \quad x_3^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)} .$$

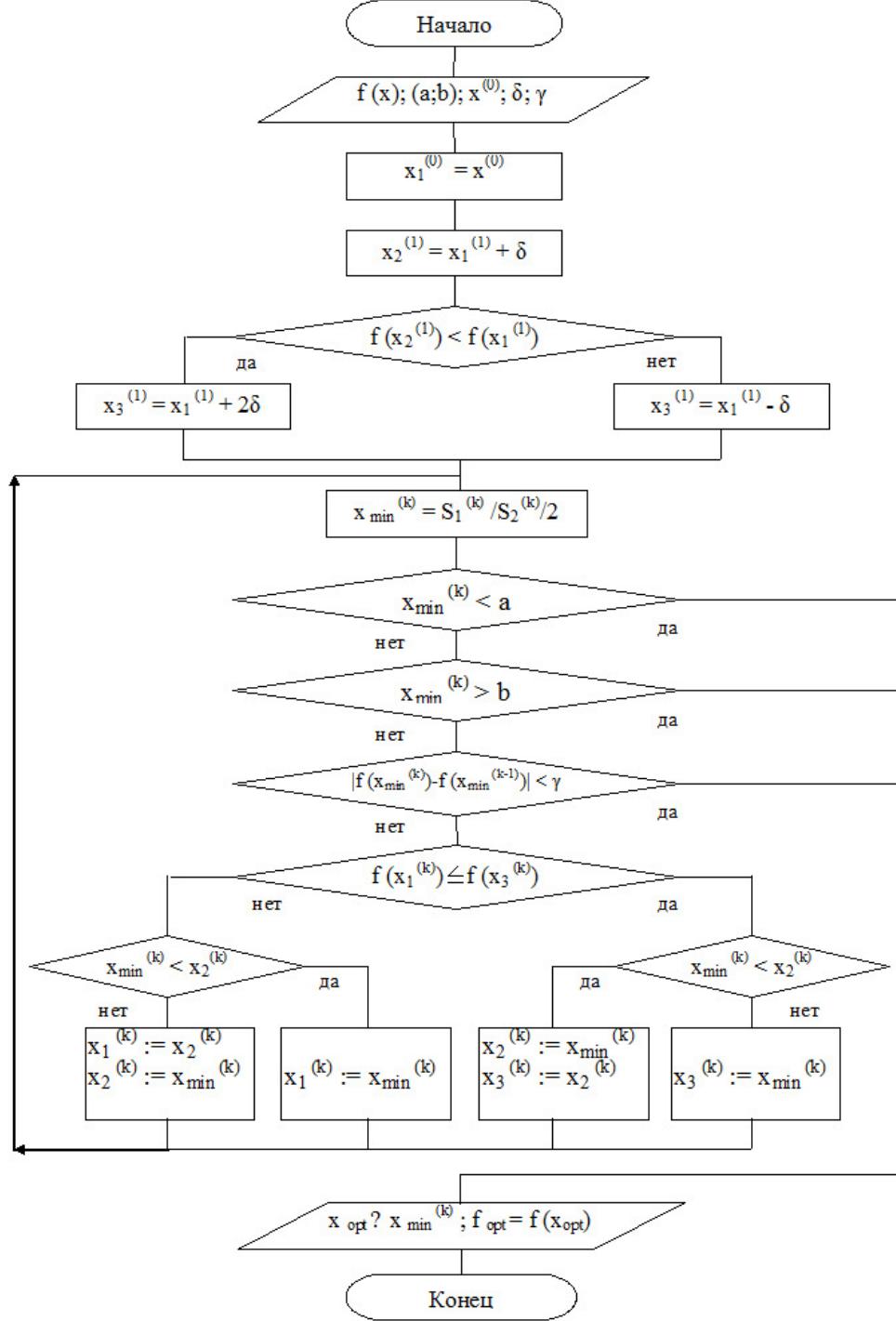
Якшо  $f(x_1^{(k)}) > f(x_3^{(k)})$  і  $x_{\min}^{(k)} < x_2^{(k)}$ , то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)} ; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} ; \quad x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} .$$

Якшо  $f(x_1^{(k)}) > f(x_3^{(k)})$ , але  $x_{\min}^{(k)} \geq x_2^{(k)}$ , то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)} ; \quad x_2^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)} ; \quad x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} .$$

$\Rightarrow (k+1)$ -й крок.



# **Тема 5. МЕТОДИ БАГАТОМІРНОЇ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**

$$f(x) \rightarrow \min ; \quad x \in E^n$$

## 5.1 Градієнтний метод (найшвидшого спуску)

$$x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)}$$

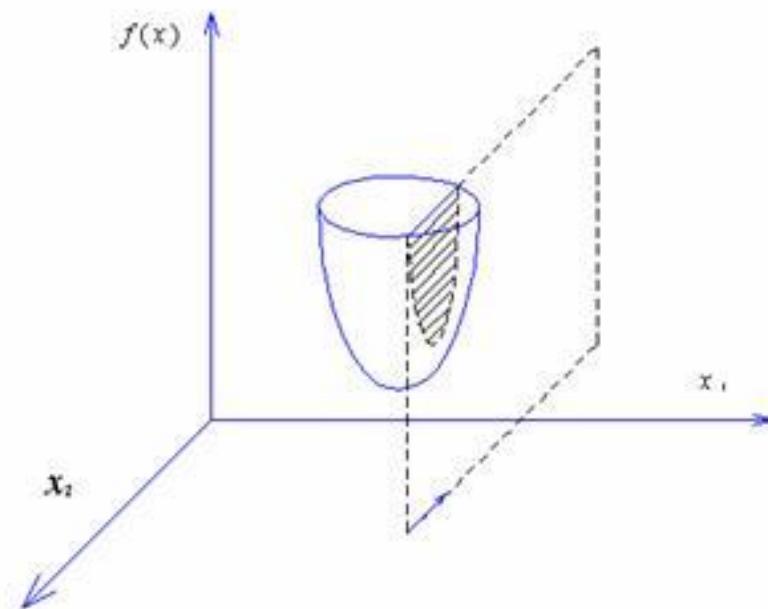
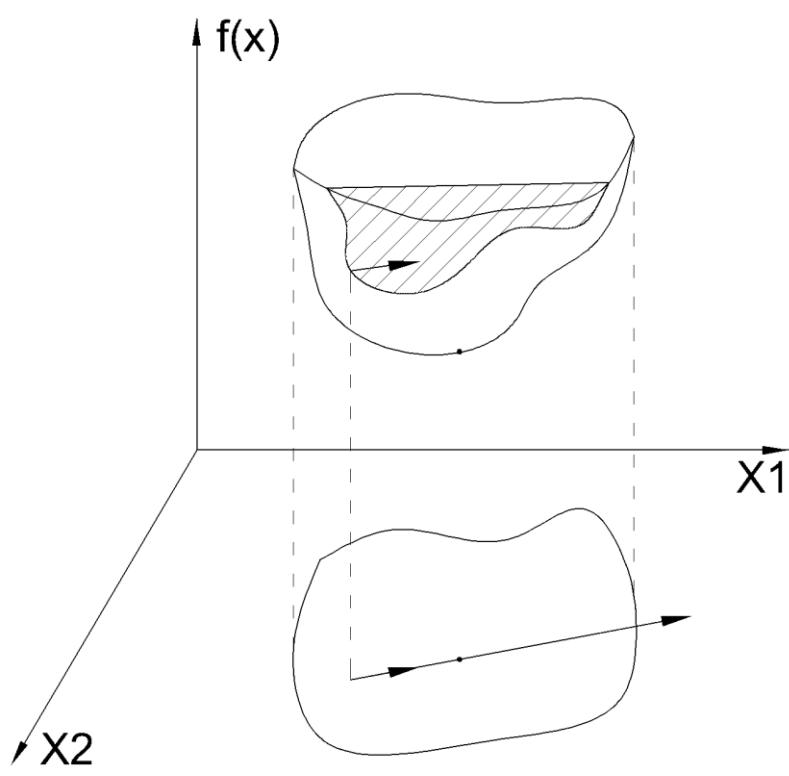
На  $k$ -му кроці:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} ;$$

$$\Delta x^{(k)} = \lambda^{(k)} \times e^{(k)} ;$$

$$e^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|\nabla f(x^{(k)})\|} ;$$

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i} \right]^2} .$$



Вибір довжини кроку:

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} + \lambda \times e^{(k)}) \rightarrow \min .$$

Завершення процесу:

$$|\nabla f(x^{(k+1)})| \leq \gamma .$$

## Приклад

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$
$$x^{(k)} = (1, 2)$$

$$f(1, 2) = 2 + 3 \times 4 - 4 - 5 \times 2 = 2 + 12 - 4 - 10 = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \times e^{(k)}$$

$$e^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|\nabla f(x^{(k)})\|}$$

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i} \right]^2}$$

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 6x_2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 4 \\ 12 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| = \sqrt{0^2 + 7^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$e_1^{(k)}=-\frac{0}{7}=0 \qquad e_2^{(k)}=-\frac{7}{7}=-1$$

$$x_1^{(k)}=1+\lambda\times 0=1 \qquad x_2^{(k)}=2+\lambda\times (-1)=2-\lambda$$

$$\varphi(\lambda)=2+3(2-\lambda)^2-4-5(2-\lambda)=3\lambda^2-7\lambda\rightarrow\min$$

$$\lambda=\frac{7}{6}$$

$$x_1^{(k+1)}=1+\lambda\times 0=1 \qquad x_2^{(k+1)}=2+\lambda\times (-1)=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$$

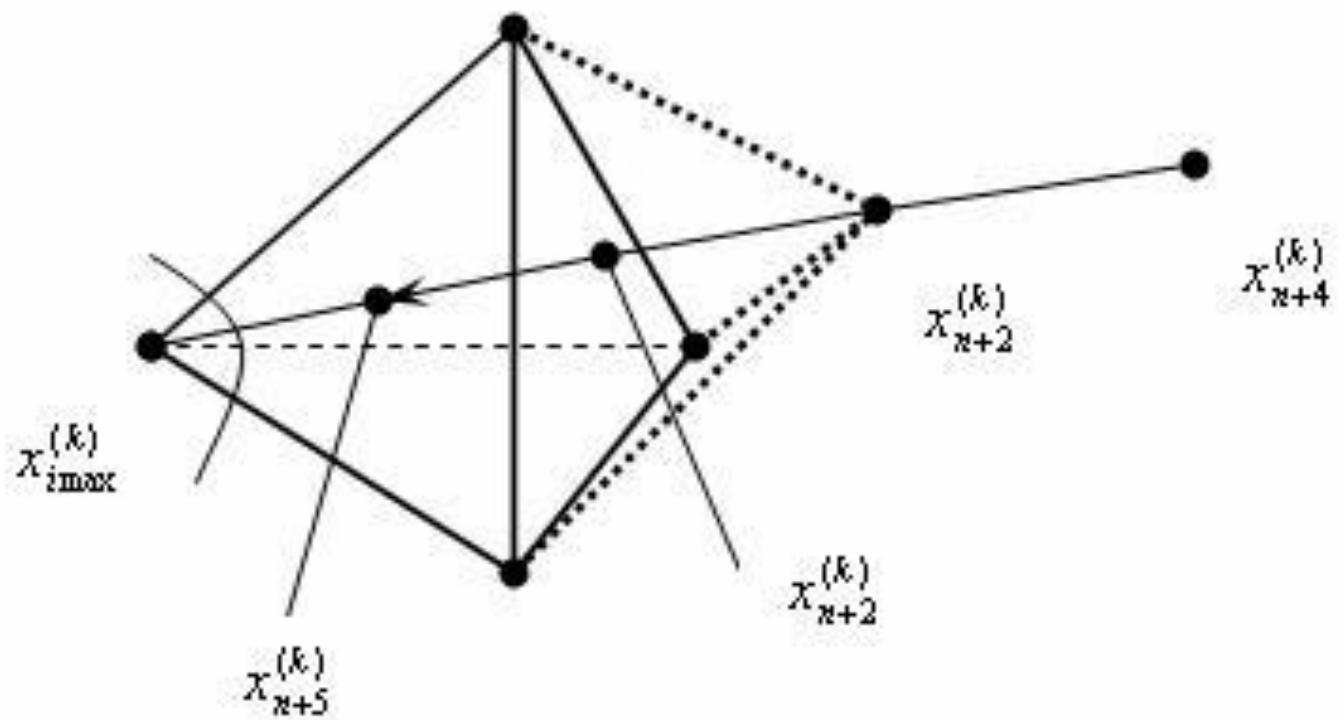
$$f(1,\frac{5}{6})=2+3\times\left(\frac{25}{36}\right)-4-5\times\left(\frac{5}{6}\right)=-\frac{147}{36}=-4\frac{1}{12}$$

## 5.2 Метод пошуку по багатограннику, що деформується

Симплекс в  $E^n$ .

Вершини симплексу:

$$\{x_i \mid i = 1, \overline{n+1}\} ; \\ x_i = (x_{ij} ; j = \overline{1, n}) .$$



Визначення координат вершин симплексу:

$$x_1 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ d_2 & d_1 & d_2 & \dots & d_2 \\ d_2 & d_2 & d_1 & \dots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_2 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 \end{bmatrix} \quad (n+1) \times n$$

$$d_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} + n - 1);$$

$$d_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} - 1).$$

$$x_{ij} = x_{1j} + \begin{cases} d_1, & \text{якщо } j = i-1 \\ d_2 & \text{в противному випадку} \end{cases}; \quad i = \overline{2, n+1}; \quad j = \overline{1, n}.$$

## Позначення

Вершини багатогранника:

$$x_i^{(k)} = (x_{ij}^{(k)} \mid j = \overline{1, n}) ; \quad i = \overline{1, n+1} ; \quad k = 1, 2, \dots$$

Значення цільової функції в вершинах:

$$f(x_i^{(k)}) ; \quad i = \overline{1, n+1} .$$

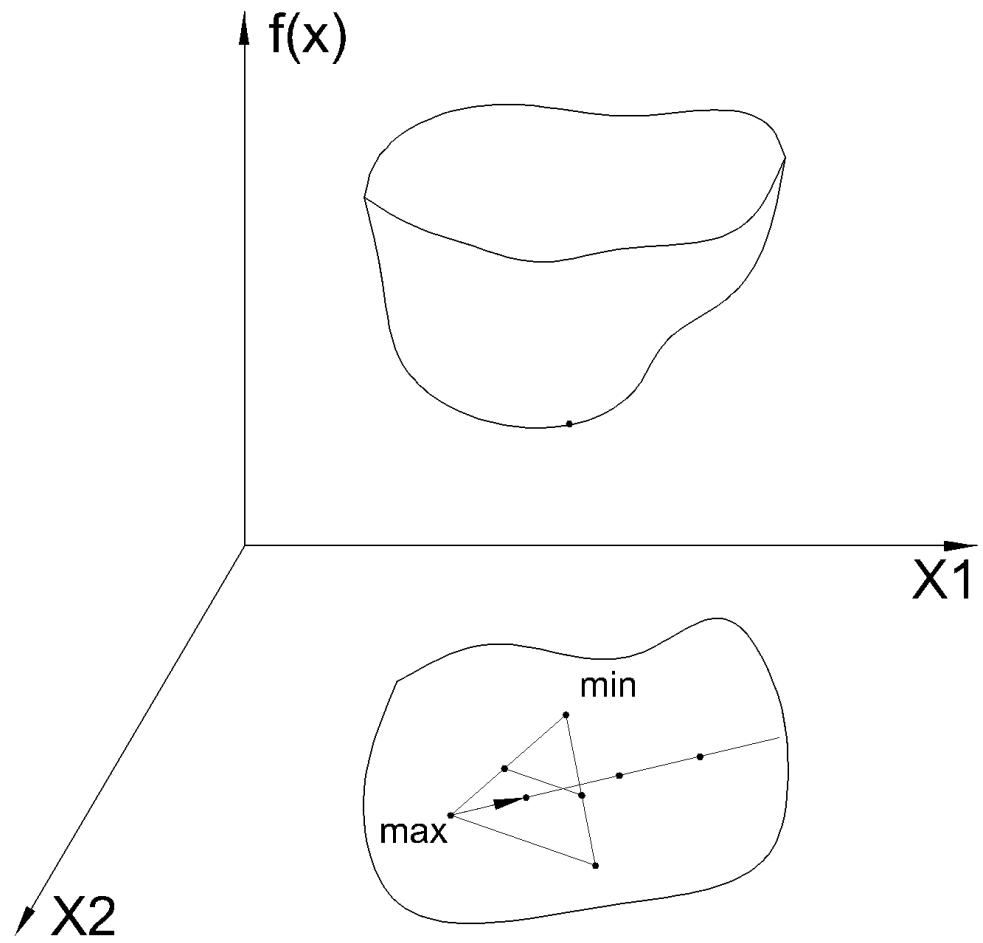
$$x_{i_{\min}}^{(k)} = \arg \min \{ f(x_i^{(k)}) ; i = \overline{1, n+1} \} ;$$

$$x_{i_{\max}}^{(k)} = \arg \max \{ f(x_i^{(k)}) ; i = \overline{1, n+1} \} .$$

$x_{n+2}^{(k)}$  – центр тяжіння вершин багатогранника, за виключенням  $x_{i_{\max}}^{(k)}$ .

Координаты центра тяжіння:

$$x_{n+2,j}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)} \right) - x_{i_{\max},j}^{(k)} \right] ; \quad j = \overline{1, n} .$$



# Алгоритм

Операції на  $k$ -му кроці:

1. Визначення  $x_{i_{\min}}^{(k)}$  та  $x_{i_{\max}}^{(k)}$ .
2. Обчислення координат центра тяжіння  $x_{n+2}^{(k)}$ .
3. Якщо

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [f(x_i^{(k)}) - f(x_{n+2}^{(k)})]^2 \right\}^{1/2} \leq \varepsilon, \text{ то } \Rightarrow \text{кінець обчислень.}$$

3. Відображення:

$$x_{n+3}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \alpha (x_{n+2}^{(k)} - x_{i_{\max}}^{(k)}) ; \quad \alpha \approx 1.$$

Якщо  $f(x_{n+3}^{(k)}) \leq f(x_{i_{\min}}^{(k)})$ , то  $\Rightarrow$  пункт 4.

В протилежному випадку  $\Rightarrow$  пункт 7.

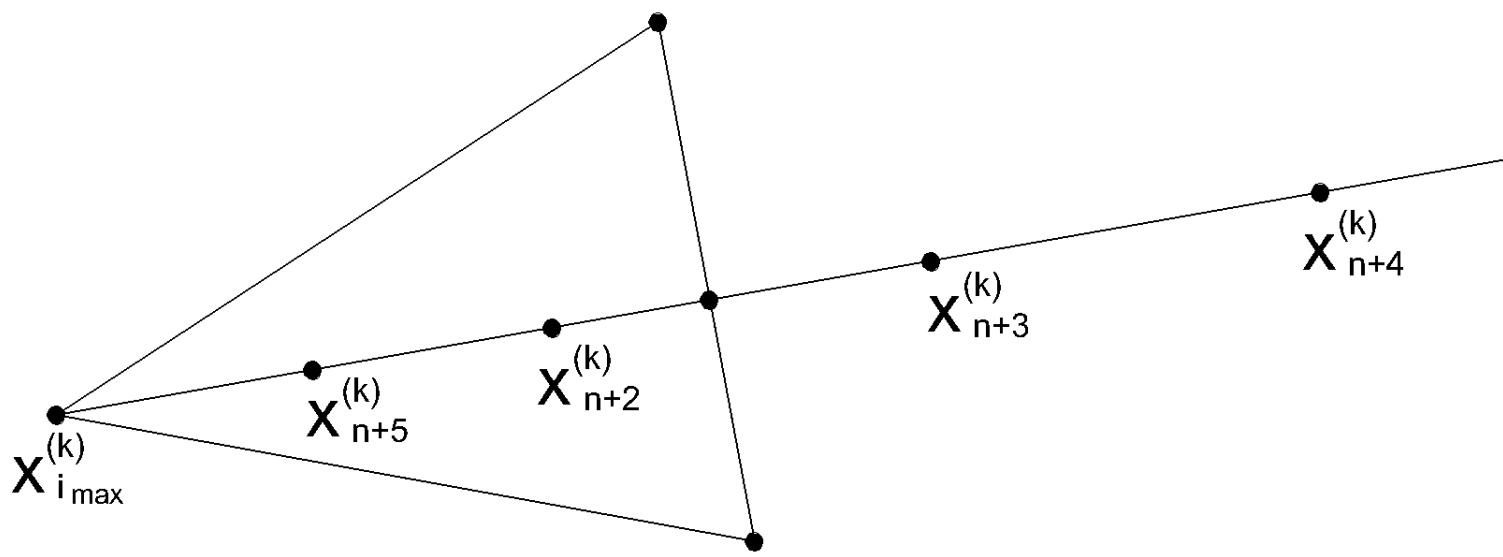
4. Розтягнення:

$$x_{n+4}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \gamma (x_{n+3}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}) ; \quad 2 \leq \gamma \leq 3.$$

Якщо  $f(x_{n+4}^{(k)}) \leq f(x_{i_{\min}}^{(k)})$ , то  $\Rightarrow$  пункт 5.

В протилежному випадку  $\Rightarrow$  пункт 6.

5. Заміна вершини  $x_{i_{\max}}^{(k)}$  на  $x_{n+4}^{(k)}$  та  $k := k + 1$
6. Заміна вершини  $x_{i_{\max}}^{(k)}$  на  $x_{n+3}^{(k)}$  та  $k := k + 1$



7. Якщо

$$f(x_{n+3}^{(k)}) \leq f(x_{i_{\max}}^{(k)}),$$

то  $\Rightarrow$  пункт 8.

В протилежному випадку  $\Rightarrow$  пункт 10.

8. Стиснення:

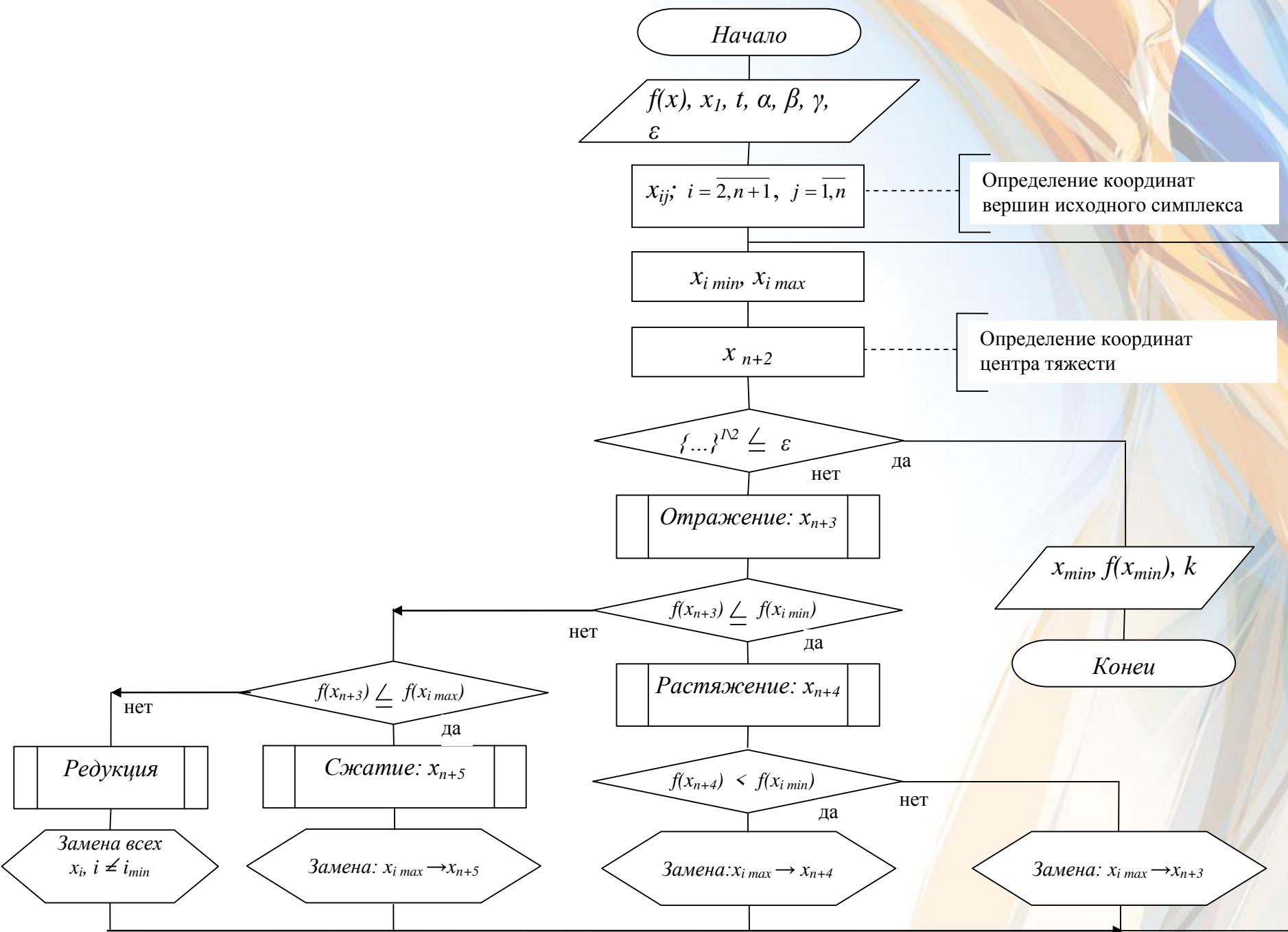
$$x_{n+5}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \beta(x_{i_{\max}}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}); \quad 0,4 \leq \beta \leq 0,6.$$

9. Заміна вершини  $x_{i_{\max}}^{(k)}$  на  $x_{n+5}^{(k)}$  та  $k := k + 1$ .

10. Редукція:

$$x_i^{(k)} = x_{i_{\min}}^{(k)} + \frac{1}{2}(x_i^{(k)} - x_{i_{\min}}^{(k)}); \quad i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_{\min}\}.$$

Далі  $k := k + 1$ .



# Тема 6. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

$$\begin{aligned}f(x) &\rightarrow \min \\h_i(x) &= 0; \quad i = \overline{1, m}; \\g_i(x) &\geq 0; \quad i = \overline{m+1, p}; \\x &\in E^n; \quad x = (x_j; j = \overline{1, n}).\end{aligned}$$

## 6.1 Метод лінійної апроксимації

$$\tilde{f}(x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) \rightarrow \min$$

$$\tilde{h}_i(x^{(k)}) = h_i(x^{(k)}) + \nabla^T h_i(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) = 0; \quad i = \overline{1, m};$$

$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) = g_i(x^{(k)}) + \nabla^T g_i(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) \geq 0; \quad i = \overline{m+1, p};$$

$$x^{(k)} \in E^n; \quad x \in E^n.$$

$$x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)} \dots \rightarrow x_{opt}$$

Умови збіжності:

- 1)  $R \neq \emptyset$ ;
- 2) всі функції  $f(x)$ ;  $h_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{m+1, p}$  неперервні та диференціюємі;
- 3) функція  $f(x)$  опукла;
- 4) сума  $\sum_{i=1}^m h_i^2(x)$  опукла;
- 5) всі функції  $g_i(x)$ ;  $i = \overline{m+1, p}$  увігнуті;
- 6) множина  $R$  замкнена та опукла;
- 7) всі функції  $h_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{m+1, p}$  обмежені:

$$|h_i(x)| \leq \delta; \quad g_i(x) \leq \delta, \text{ де } \delta > 0.$$

Перетворення обмежень-нерівностей в рівняння:

$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) - u_i^{(k)} = 0; \quad u_i^{(k)} \geq 0; \quad i = \overline{m+1, p}.$$

Наближення точки  $x^{(k)}$  до ОДР:

$$\varphi(v^{(k)}) = \sum_{i=1}^p v_i^{(k)} \rightarrow \min$$

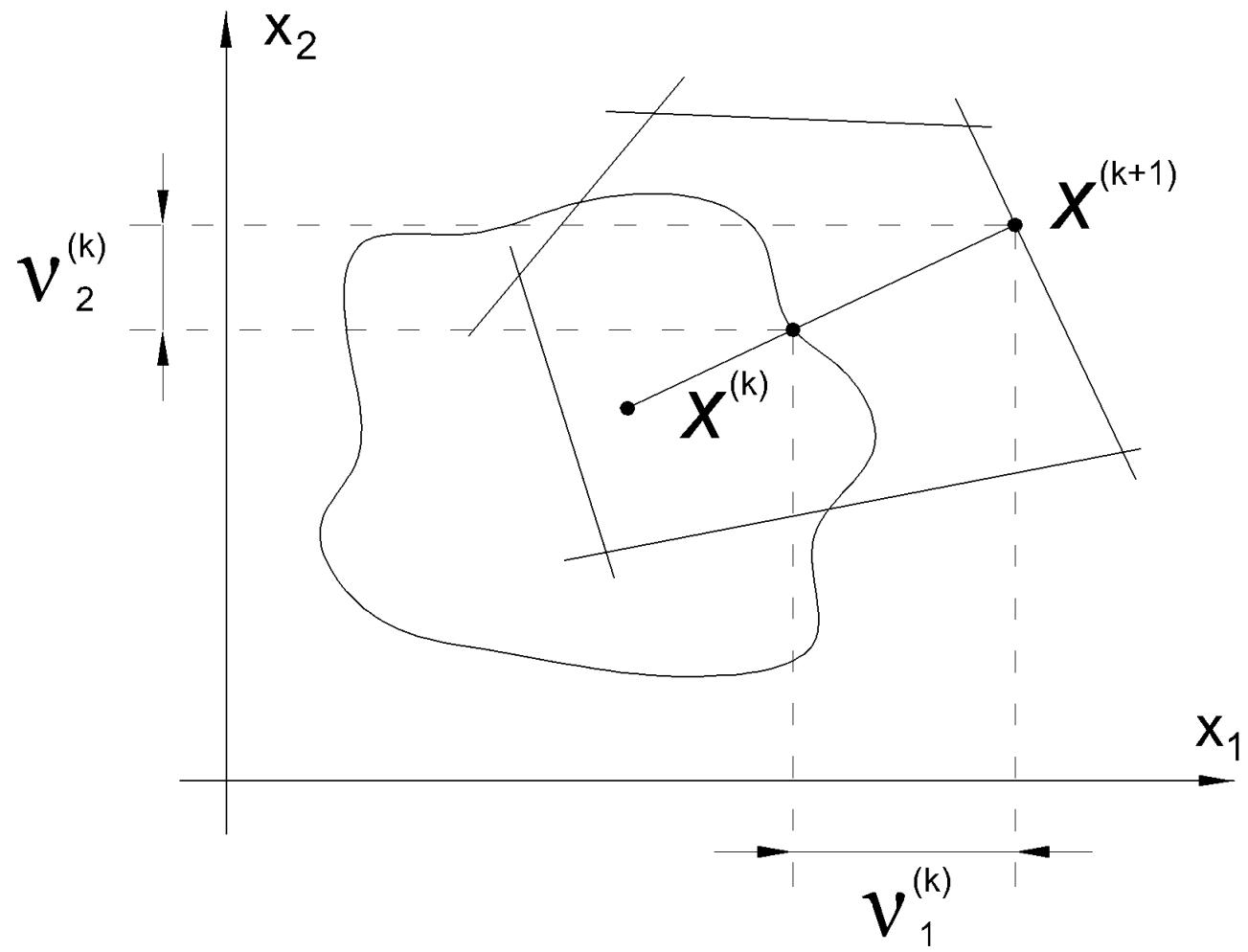
$$\tilde{h}_i(x^{(k)}) + v_i^{(k)} = 0; \quad i = \overline{1, m};$$

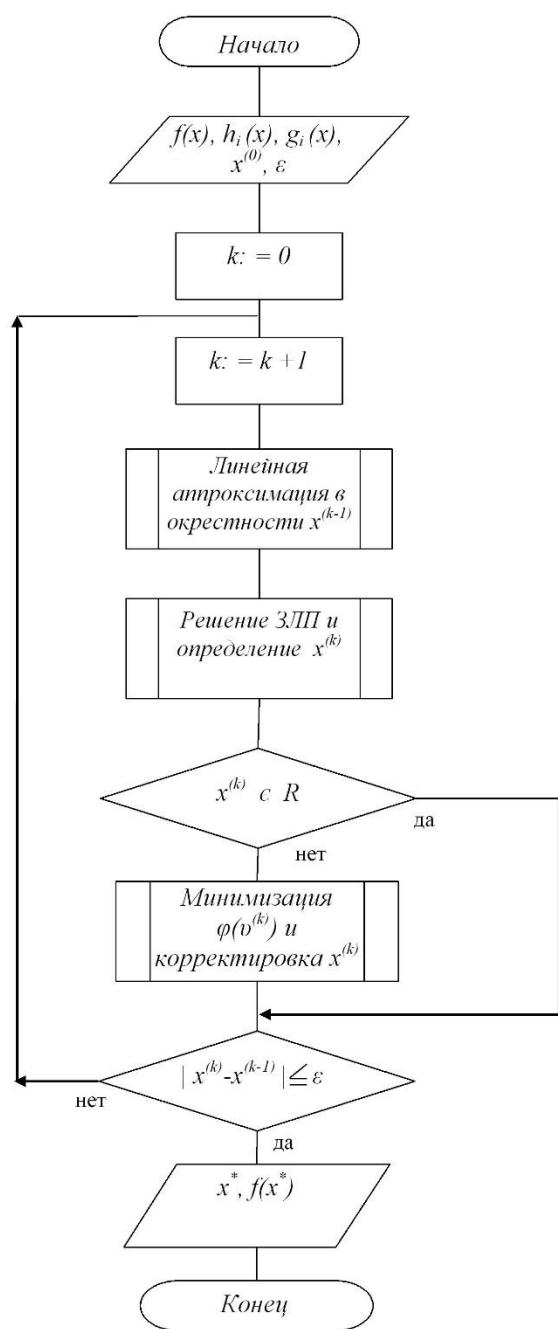
$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) - u_i^{(k)} + v_i^{(k)} = 0; \quad i = \overline{m+1, p};$$

$$v_i^{(k)} \geq 0; \quad i = \overline{1, p}.$$

Ознака завершення обчислень:

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon.$$

 $V_1^{(k)}$  $V_2^{(k)}$  $x_1$  $x_2$  $X^{(k+1)}$  $X^{(k)}$



## 6.2 Метод штрафних функцій

Вихідна модель:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h_i(x) &= 0; \quad i = \overline{1, m}; \\ g_i(x) &\geq 0; \quad i = \overline{m+1, p}; \\ x &\in E^n; \quad x = (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Перетворена модель:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^m w_i H[h_i(x)] + \sum_{i=m+1}^p w_i G[g_i(x)] \rightarrow \min \\ w_i &\geq 0; \quad i = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Вимоги до функціоналів  $H$ :

якщо  $h_i(x) \rightarrow 0$ , то  $H[h_i(x)] \rightarrow 0$ .

Вимоги до функціоналів  $G$ :

якщо  $g_i(x) \geq 0$ , то  $G[g_i(x)] \approx 0$ ;

якщо  $g_i(x) < 0$ , то  $G[g_i(x)] > 0$ ;

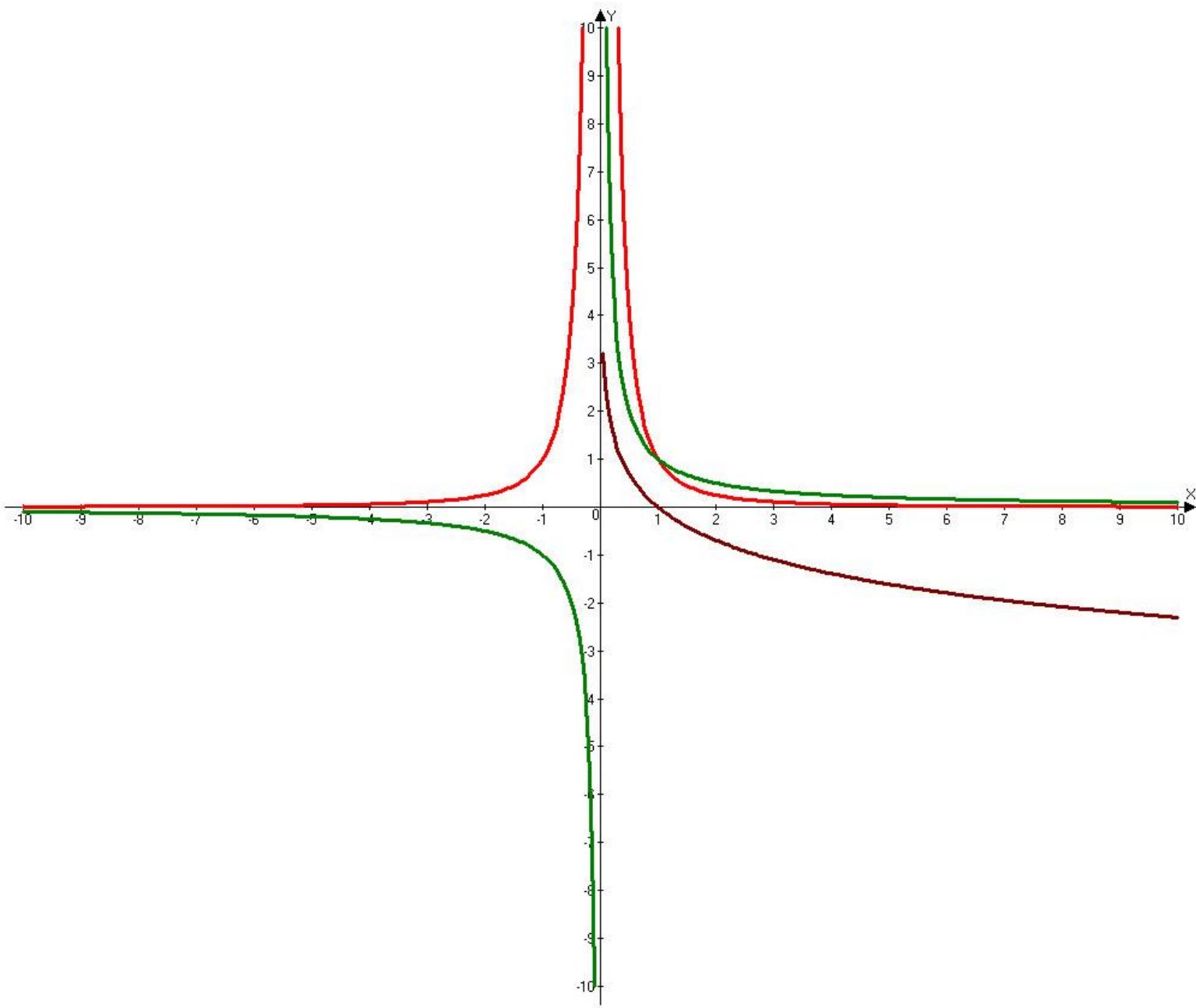
якщо  $g_i(x) \rightarrow 0^{(+)}$ , то  $G[g_i(x)] \rightarrow \infty$ ;

якщо  $g_i(x) \rightarrow 0^{(-)}$ , то  $G[g_i(x)] \rightarrow 0$ .

## Приклади

$$H[h_i(x)] = h_i^2(x);$$

$$G[g_i(x)] = \frac{1}{g_i(x)}; \quad G[g_i(x)] = \frac{1}{g_i^2(x)}; \quad G[g_i(x)] = \ln \frac{1}{g_i(x)}.$$



## 6.3 Метод ковзного допуску

Вихідна модель:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h_l(x) = 0; \quad l &= \overline{1, m}; \\ g_l(x) \geq 0; \quad l &= \overline{m+1, p}; \\ x \in E^n; \quad x &= (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Перетворена модель:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ \Phi^{(k)} - T(x) &\geq 0; \\ x \in E^n; \quad x &= (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

$$\Phi^{(0)} = 2(m+1)t;$$

$$\Phi^{(k)} = \min\{ \Phi^{(k-1)}; \Theta^{(k)} \}; \quad k=1, 2, 3, \dots;$$

$$\Theta^{(k)} = \frac{m+1}{r+1} \left\{ \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n [x_{ij}^{(k)} - x_{r+2,j}^{(k)}]^2 \right\}^{1/2}; \quad r=n-m;$$

$x_i^{(k)}$  и  $x_{r+2}^{(k)}$  – вершина та центр тяжіння багатогранника в  $E^n$  з  $(r+1)$  вершинами;

$$T(x) = + \left[ \sum_{l=1}^m h_l^2(x) + \sum_{l=m+1}^p u_l g_l^2(x) \right]^{1/2};$$

$$u_l = \begin{cases} 0 & \text{при } g_l(x) \geq 0 \\ 1 & \text{при } g_l(x) < 0 \end{cases}.$$

$$\Phi^{(0)} \geq \Phi^{(1)} \geq \dots \geq \Phi^{(k)} \geq 0;$$

Якщо  $x \in R$ , то  $T(x) = 0$ .

Якщо  $x \notin R$ , то  $T(x) > 0$ .

Вектор  $x_i^{(k)}$  називається:

- допустимим, якщо  $T(x^{(k)}) = 0$ ;
- квазидопустимим, якщо  $0 < T(x^{(k)}) \leq \Phi^{(k)}$ ;
- недопустимим, якщо  $T(x^{(k)}) > \Phi^{(k)}$ .

## СТРАТЕГІЯ МЕТОДУ

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)} \dots \rightarrow x_{opt}$$

Із стартової точки  $x^{(k)}$  розв'язується основна задача:

$$f(x) \rightarrow \min$$

та визначається точка  $x^{(k+1)}$ .

Якщо  $T(x^{(k+1)}) \leq \Phi^{(k)}$ , то здійснюється переміщення з  $x^{(k)}$  в  $x^{(k+1)}$ .

Якщо  $T(x^{(k+1)}) > \Phi^{(k)}$ , то замість  $x^{(k+1)}$  відшукується інша точка  $\bar{x}^{(k+1)}$ : допустима або квазидопустима.

Для цього зі стартової точки  $x^{(k+1)}$  розв'язується допоміжна задача:

$$T(x) \rightarrow \min .$$

Умова завершення допоміжної процедури:

$$T(\bar{x}^{(k+1)}) \leq \Phi^{(k)} .$$

Після цього:  $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}^{(k+1)}$ .

## Нульовий крок пошуку:

1°. В  $E^n$  будується симплекс ( $f$ -симплекс) з  $(r+1)$  вершинами, призначений для мінімізації  $f(x)$ .

Початкова вершина  $x_1^{(0)} = (x_j^{(0)} \mid j = \overline{1, n})$  задається.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = \min \left\{ \left[ \frac{0,2}{n} \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \right]; (b_j - a_j), \quad j = \overline{1, n} \right\},$$

де  $a_j \leq x_j \leq b_j; \quad j = \overline{1, n}$ .

2°. Визначається вершина

$$x_{i_{\min}}^{(0)} = \arg \min \{ f(x_i^{(0)}) ; j = \overline{1, n} \}.$$

3°. Якщо

$$\Phi^{(0)} - T(x_{i_{\min}}^{(0)}) \geq 0, \text{ то } \Rightarrow \text{пункт } 4^\circ.$$

В протилежному випадку  $\Rightarrow$  пункт 6°.

4°. Виконується один цикл безумовної мінімізації  $f(x)$  методом пошуку по деформуєму багатограннику.

5°. Виконується заміна:

- або точки  $x_{i_{\max}}^{(0)}$  на одну з точок:  $x_{r+3}^{(0)}, x_{r+4}^{(0)}$  чи  $x_{r+4}^{(0)}$ ;
- або всіх точок, крім  $x_{i_{\min}}^{(0)}$  (після операції редукції).

На цьому нульовий крок завершується.

6°. Якщо

$$\Phi^{(0)} - T(x_{i_{\min}}^{(0)}) < 0,$$

то в  $E^n$  будується другий симплекс ( $T$ -симплекс) з  $(n+1)$  вершинами, призначений для мінімізації  $T(x)$  в околі  $x_{i_{\min}}^{(0)}$ .

Початкова вершина  $\hat{x}_1^{(0)} = x_{i_{\min}}^{(0)}$ .

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендуємої відстані між ними:

$$t = 0,05 \Phi^{(0)}.$$

7°. Реалізується процедура безумовної мінімізації  $T(x)$  в околі  $x_{i_{\min}}^{(0)}$  методом пошуку по деформуєному багатограннику.

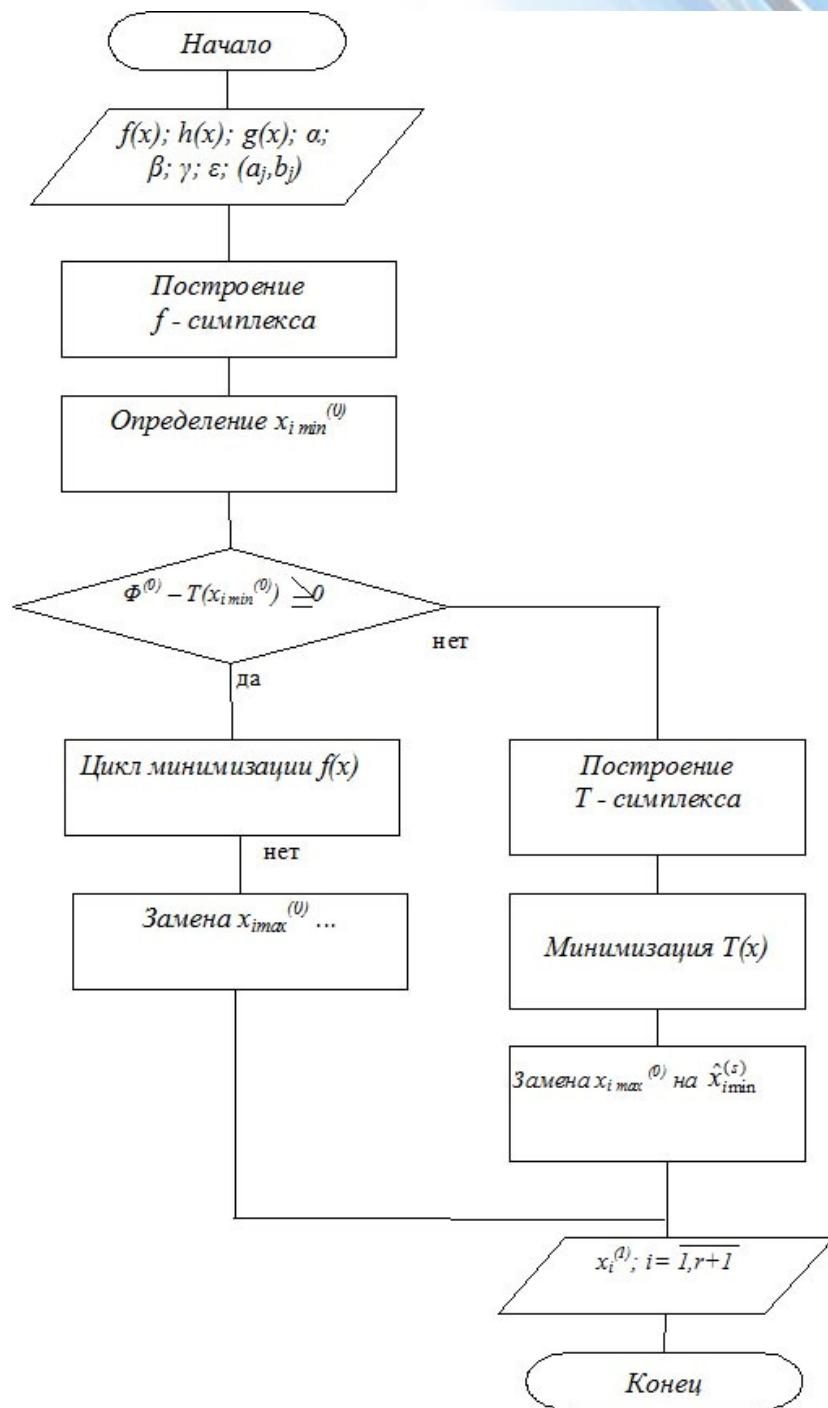
Процедура завершується знаходженням точки  $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$ , яка задовольняє умові допустимості/квазидопустимості:

$$\Phi^{(0)} - T(\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}) \geq 0,$$

де  $s$  – кількість реалізованих кроків алгоритму.

8°. Проводиться заміна: точка  $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$  вводиться у склад вершин  $f$ -багатогранника замість вершини  $x_{i_{\max}}^{(0)}$ .

На цьому нульовий крок завершується.



## *k*-й крок пошуку

1. Проводиться один цикл безумовної мінімізації  $f(x)$  з використанням  $f$ -багатогранника, побудованого на нульовому кроці.

2. Визначається вершина

$$x_{i_{\min}}^{(k)} = \arg \min \{ f(x_i^{(k)}) ; j = \overline{1, n} \} .$$

3. Якщо

$$\Phi^{(k)} - T(x_{i_{\min}}^{(k)}) \geq 0, \text{ то } \Rightarrow \text{пункт 4.}$$

В протичному випадку  $\Rightarrow$  пункт 6.

4. Перевіряється умова закінчення пошуку:

$$\Phi^{(k)} \leq \varepsilon .$$

Якщо вона виконується, то обчислювальний процес завершується.

В протичному випадку  $\Rightarrow$  пункт 5.

5. Проводиться заміна:

- або точки  $x_{i_{\max}}^{(k)}$  на одну з точок:  $x_{r+3}^{(k)}$ ,  $x_{r+4}^{(k)}$  чи  $x_{r+4}^{(k)}$ ;
- або всіх точок, крім  $x_{i_{\min}}^{(k)}$  (після операції редукції).

Далі  $k := k + 1$ .

## 6. Якщо

$$\Phi^{(k)} - T(x_{i_{\min}}^{(k)}) < 0,$$

то в  $E^n$  будується новий симплекс ( $T$ -симплекс) з  $(n+1)$  вершинами, призначений для мінімізації  $T(x)$  в околі  $x_{i_{\min}}^{(k)}$ .

Початкова вершина  $\hat{x}_1^{(0)} = x_{i_{\min}}^{(k)}$ .

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = 0,05 \Phi^{(k)}.$$

7. Реалізується процедура безумовної мінімізації  $T(x)$  в околі  $x_{i_{\min}}^{(k)}$ .

Процедура завершується знаходженням точки  $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$ , яка задовольняє умові допустимості/квазидопустимості:

$$\Phi^{(k)} - T(\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}) \geq 0.$$

8. Проводиться заміна: точка  $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$  вводиться в склад вершин  $f$ -багатогранника замість вершини  $x_{i_{\max}}^{(k)}$ .

Далі  $k := k + 1$ .

Рекомендовані параметри:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0,5; \quad \gamma = 2; \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

