稳态传热平面问题

学号：****　　　　姓名：Voldikss

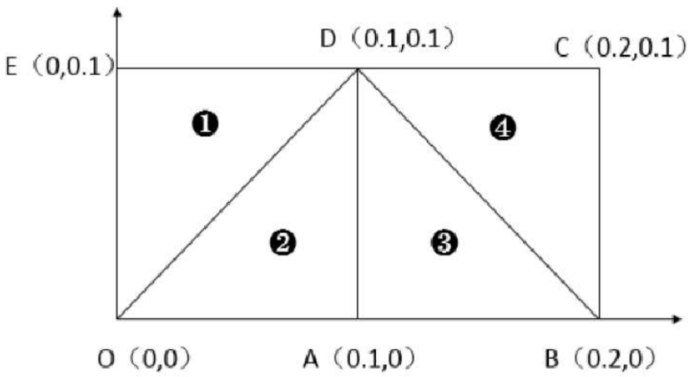
一、问题描述

如图一个平板长宽高为 $0.2\,m \times 0.1\,m \times 0.02\,m$，划分为如图所示的网格。材料参数：密度 $\rho = 7800\,\mathrm{kg}/m^3$，比热 $C_p = 500\,J/(\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C})$，导热系数 $K = 50\,W/(m\cdot{}^\circ\mathrm{C})$。

初始条件为：薄板整体温度100 °C。

边界条件为：环境温度 20 °C，边 BC 温度恒定为 100 °C，边 OAB 换热系数 $h = 200\,W/(m^2\cdot{}^\circ\mathrm{C})$。

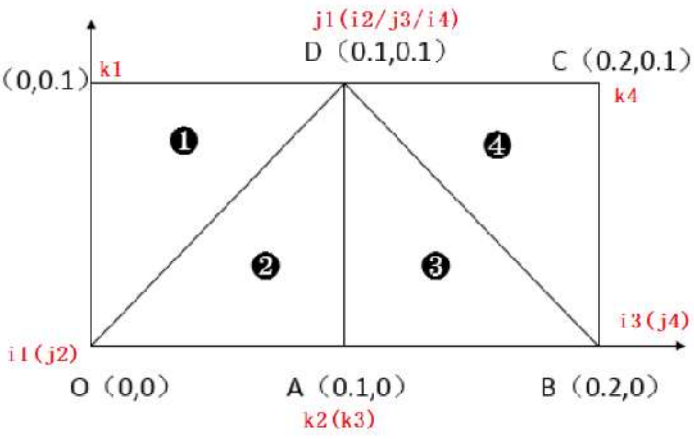
请详细推导有限元的整个求解过程，求出该平板内（各个单元）的温度分布。



二、模型推导

1. 模型建立

求解区域已经离散为如图标号为1~4的四个单元，将每个单元的节点进行标号。如图所示



2. 求解形函数

温度场插值函数形式为 $T(x,y)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$， 其中 α_1、 α_2、 α_3 为待定系数， 三者的值可以根据节点 i、j、k 的坐标值求出。
温度插值函数可以写成 $T(x,y)=[N]\{T\}^e=N_i T_i+N_j T_j+N_k T_k$ ， 其中

$N_i=\frac{1}{2A}(a_i+b_i x+c_i y)$, $N_j=\frac{1}{2A}(a_j+b_j x+c_j y)$, $N_k=\frac{1}{2A}(a_k+b_k x+c_k y)$，其中

$a_i=x_j y_k-x_k y_j$, $b_i=y_j-y_k$, $c_i=x_k-x_j$

$a_j=x_k y_i-x_i y_k$, $b_j=y_k-y_i$, $c_j=x_i-x_k$

$a_k=x_i y_j-x_j y_i$, $b_k=y_i-y_j$, $c_k=x_j-x_i$

代入各节点坐标计算， 可以得到各三角形单元的形函数。

各个点的坐标为：
单元1： $i(0,\ 0)$, $j(0.1,\ 0.1)$, $k(0,\ 0.1)$
单元2： $i(0.1,\ 0.1)$, $j(0,\ 0)$, $k(0.1,\ 0)$
单元3： $i(0.2,\ 0)$, $j(0.1,\ 0.1)$, $k(0.1,\ 0)$
单元4： $i(0.1,\ 0.1)$, $j(0.2,\ 0)$, $k(0.2,\ 0.1)$

使用Wolfram Mathematica 12.0 软件进行计算， 代码和运行结果如下所示：

In[ ]:=

```
(*计算各单元的形函数*)
Clear["Global`*"]

(*各个点的坐标*)
coordinates = {
{{0,0},{0.1,0.1},{0,0.1}},
{{0.1,0.1},{0,0},{0.1,0}},
{{0.2,0},{0.1,0.1},{0.1,0}},
{{0.1,0.1},{0.2,0},{0.2,0.1}}};

(*计算一个节点的形函数*)
getN[co_]:=Module[{map={"i","j","k"},n,result={}},
    m[n_]:=If[n≤3,Return@n,Return@Mod[n,3]];
    Do[ an = co[[m@(n+1),1]]*co[[m@(n+2),2]]-co[[m@(n+2),1]]*co[[m@(n+1),2]];
        bn = co[[m@(n+1),2]]-co[[m@(n+2),2]];
        cn = co[[m@(n+2),1]]-co[[m@(n+1),1]];
        Nn = 1/(2A)*(an+bn*x+cn*y);
        AppendTo[result,Nn],{n,1,3}];
    Return@result]

Do[Echo["单元"<>ToString@n<>"："];Print@getN[coordinates[[n]]],{n,1,4}];
```

» 单元1：

$\text{Null}^2\ \text{Return}\left[\left\{\frac{0.01-0.1y}{2A}, \frac{0.+0.1x}{2A}, \frac{0.-0.1x+0.1y}{2A}\right\}\right]$

» 单元2：

$\text{Null}^2\ \text{Return}\left[\left\{\frac{0.+0.1y}{2A}, \frac{0.01-0.1x}{2A}, \frac{0.+0.1x-0.1y}{2A}\right\}\right]$

» 单元3：

$\text{Null}^2\ \text{Return}\left[\left\{\frac{-0.01+0.1x}{2A}, \frac{0.+0.1y}{2A}, \frac{0.02-0.1x-0.1y}{2A}\right\}\right]$

» 单元4：

$\text{Null}^2\ \text{Return}\left[\left\{\frac{0.02-0.1x}{2A}, \frac{0.01-0.1y}{2A}, \frac{-0.02+0.1x+0.1y}{2A}\right\}\right]$

于是得到各单元的形函数分别为：

单元1：$N_i=\frac{1}{2A}(0.01-0.1y),\ N_j=\frac{1}{2A}(0.1x),\ N_k=\frac{1}{2A}(-0.1x+0.1y)$

单元2：$N_i=\frac{1}{2A}(0.1y),\ N_j=\frac{1}{2A}(0.01-0.1x),\ N_k=\frac{1}{2A}(0.1x-0.1y)$

单元3：$N_i=\frac{1}{2A}(-0.01+0.1x),\ N_j=\frac{1}{2A}(0.1y),\ N_k=\frac{1}{2A}(0.02-0.1x-0.1y)$

单元4：$N_i=\frac{1}{2A}(0.02-0.1x),\ N_j=\frac{1}{2A}(0.01-0.1y),\ N_k=\frac{1}{2A}(-0.02+0.1x+0.1y)$

其中，A值为每个三角形单元的面积，$A=\frac{0.2\times0.1}{4}=0.005,\ \frac{1}{2A}=100$，代入即可。

3. 建立单元刚度矩阵

将温度插值函数代入对应的泛函，

并求导得极值条件，内部单元对应的温度刚度矩阵如下：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial J^e}{\partial T_i}\\ \frac{\partial J^e}{\partial T_j}\\ \frac{\partial J^e}{\partial T_k}\end{pmatrix}=\frac{k}{4A}\begin{pmatrix}b_i^2+c_i^2 & b_i b_j+c_i c_j & b_i b_k+c_i c_k\\ b_i b_j+c_i c_j & b_j^2+c_j^2 & b_j b_k+c_j c_k\\ b_i b_k+c_i c_k & b_j b_k+c_j c_k & b_k^2+c_k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_i\\ T_j\\ T_k\end{pmatrix}=[H]^e[T]^e$$

另一方面，边界单元需要考虑边界条件：

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\alpha s_i}{3} & \frac{\alpha s_i}{6}\\ 0 & \frac{\alpha s_i}{6} & \frac{\alpha s_i}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_i\\ T_j\\ T_k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha s_i}{2}T_a\\ \frac{\alpha s_i}{2}T_a\end{pmatrix}=\left[H^1\right]^e[T]^e-[p]^e$$

两部分相加可得：

$([H]^e+\left[H^1\right]^e)[T]^e-\{p\}^e=0$，即 $\left[\bar{H}\right]^e[T]^e=[p]^e$

使用 Mathematica 软件计算的过程如下：

In[ ]:=

```
(*计算各单元的单元刚度矩阵*)

(*计算一个单元 H0*)
getH0[co_]:=Module[{bi,bj,bk,ci,cj,ck,H0,k=50,A=0.005},
    bi=co[[2,2]]-co[[3,2]];
    bj=co[[3,2]]-co[[1,2]];
    bk=co[[1,2]]-co[[2,2]];

    ci=co[[3,1]]-co[[2,1]];
    cj=co[[1,1]]-co[[3,1]];
    ck=co[[2,1]]-co[[1,1]];

    H0=Round/@(k/(4A) ({{bi^2+ci^2, bi*bj+ci*cj, bi*bk+ci*ck},
                        {bi*bj+ci*cj, bj^2+cj^2, bj*bk+cj*ck},
                        {bi*bk+ci*ck, bj*bk+cj*ck, bk^2+ck^2}}));

    Return@H0]

(*计算一个单元的 H1*)
getH1[co_]:=Module[{α=200,si,H1},
    si=Sqrt[(co[[2,1]]-co[[3,1]])^2+(co[[2,2]]-co[[3,2]])^2];
    H1=Round/@{{0, 0, 0},
               {0, α*si/3, α*si/6},
               {0, α*si/6, α*si/3}};

    Return@H1]

H0s={};
H1s={};
Do[AppendTo[H0s,getH0[coordinates[[n]]]],{n,1,4}];
Do[AppendTo[H1s,getH1[coordinates[[n]]]],{n,1,4}];
Echo@"所有单元的 H0：";
Print@(MatrixForm/@H0s);
Echo@"所有单元的 H1：";
Print@(MatrixForm/@H1s);

Echo@"所有单元的单刚：";
H=H0s+H1s;
H=H0s;
(*2单元和3单元均为边界单元，因此要考虑边界条件*)
H[[2]]=H0s[[2]]+H1s[[2]];
H[[3]]=H0s[[3]]+H1s[[3]];
Print[MatrixForm/@H];
```

» 所有单元的 H0:

$$\left\{\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix}\right\}$$

» 所有单元的 H1:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&7&3\\0&3&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&7&3\\0&3&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&7&3\\0&3&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&7&3\\0&3&7\end{pmatrix}\right\}$$

» 所有单元的单刚:

$$\left\{\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&32&-22\\-25&-22&57\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&32&-22\\-25&-22&57\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix}\right\}$$

计算得到各单元的刚度矩阵为:

单元1（内部单元）: $[H]=\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix}$

单元2（边界单元）: $[H]=\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&32&-22\\-25&-22&57\end{pmatrix}$

单元3（边界单元）: $[H]=\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&32&-22\\-25&-22&57\end{pmatrix}$

单元4（固定温度边界单元）: $[H]=\begin{pmatrix}25&0&-25\\0&25&-25\\-25&-25&50\end{pmatrix}$

4. 建立整体刚度矩阵

使用扩大子阵的方法，将单元刚度矩阵组装为整体刚度矩阵。

In[ ]:=
```
Grid[{{" ","O","A","B","C","D","E"},{"O"},{"A"},{"B"},{"C"},{"D"},{"E"}},Frame→All,FrameStyl
```

Out[ ]=

	O	A	B	C	D	E
O						
A						
B						
C						
D						
E						

其中各个单元的对应情况为:

单元1：$i\to O,\ j\to D,\ k\to E,\ \Rightarrow \begin{pmatrix} OO & OD & OE \\ DO & DD & DE \\ EO & ED & EE \end{pmatrix}$

单元2：$i\to D,\ j\to O,\ k\to A,\ \Rightarrow \begin{pmatrix} DD & DO & DA \\ OD & OO & OA \\ AD & AO & AA \end{pmatrix}$

单元3：$i\to B,\ j\to D,\ k\to A,\ \Rightarrow \begin{pmatrix} BB & BD & BA \\ DB & DD & DA \\ AB & AD & AA \end{pmatrix}$

单元4：$i\to D,\ j\to B,\ k\to C,\ \Rightarrow \begin{pmatrix} DD & DB & DC \\ BD & BB & BC \\ CD & CB & CC \end{pmatrix}$

利用 Mathematica，根据上图对应求出各个元素的值，计算总体刚度矩阵 HH：

In[ ]:=

```
(*计算总刚*)
OO=H[[1,1,1]]+H[[2,2,2]];
OA=H[[2,2,3]];
OB=0;
OC=0;
OD=H[[1,1,2]]+H[[2,2,1]];
OE=H[[1,1,3]];
AA=H[[2,3,3]]+H[[3,3,3]];
AB=H[[3,3,1]];
AC=0;
AD=H[[2,3,1]]+H[[3,3,2]];
AE=0;
BB=H[[3,1,1]]+H[[4,2,2]];
BC=H[[4,2,3]];
BD=H[[4,2,1]]+H[[3,1,2]];
BE=0;
CC=H[[4,3,3]];
CD=H[[4,3,1]];
CE=0;
DD=H[[2,1,1]]+H[[1,2,2]]+H[[3,2,2]]+H[[4,1,1]];
DE=H[[1,2,3]];
EE=H[[1,3,3]];
```

$$HH=\begin{pmatrix} OO & OA & OB & OC & OD & OE \\ OA & AA & AB & AC & AD & AE \\ OB & AB & BB & BC & BD & BE \\ OC & AC & BC & CC & CD & CE \\ OD & AD & BD & CD & DD & DE \\ OE & AE & BE & CE & DE & EE \end{pmatrix};$$

```
Echo@"总刚 HH：";
Print@MatrixForm@HH;

p=Transpose[{{200,200,200,0,0,0}}];
Echo@"p：";
Print@MatrixForm@p;
```

» 总刚 HH:

$$\begin{pmatrix} 57 & -22 & 0 & 0 & 0 & -25 \\ -22 & 114 & -25 & 0 & -47 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -47 & 0 & -25 & 107 & -25 \\ -25 & 0 & 0 & 0 & -25 & 50 \end{pmatrix}$$

» p:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

采用对角元素置1法，将 HH 和 p 整理为

In[ ]:=
```
p=p−1000*HH[[All,3]]−1000*HH[[All,4]];
p[[3,1]]=1000;
p[[4,1]]=1000;
Echo@"p: ";
Print@MatrixForm@p;

HH[[All,3]]={0,0,1,0,0,0};
HH[[All,4]]={0,0,0,1,0,0};
HH[[3,2]]=0;
HH[[4,5]]=0;
Echo@"总刚HH: ";
Print@MatrixForm@HH;
```

» p:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 25\,200 \\ 1000 \\ 1000 \\ 25\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

» 总刚HH:

$$\begin{pmatrix} 57 & -22 & 0 & 0 & 0 & -25 \\ -22 & 114 & 0 & 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 & 0 & 107 & -25 \\ -25 & 0 & 0 & 0 & -25 & 50 \end{pmatrix}$$

求解矩阵 $[H][T]=[p]$，即 $[T]=[H]^{-1}[T]$:

In[]:=
```
Dot[Inverse@HH,p]//N//MatrixForm
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 446.982 \\ 554.446 \\ 1000. \\ 1000. \\ 599.431 \\ 523.207 \end{pmatrix}$$

将结果化为整数：

In[]:=
```
Round/@%//MatrixForm
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 447 \\ 554 \\ 1000 \\ 1000 \\ 599 \\ 523 \end{pmatrix}$$

以上结果即为 O→E 每个节点的最终温度值。

5. 单元内任一点的温度计算

根据公式 $T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k$，代入各个节点的温度值，即可计算出单元内每一点的温度值。

单元1：
$T_i = 446\,°C$, $T_j = 599\,°C$, $T_k = 523\,°C$, $N_i = 100*(0.01 - 0.1\,y)$, $N_j = 100*(0.1\,x)$, $N_k = 100*(-0.1\,x + 0.1\,y)$
计算得 $T^1 = 223 + 380\,x + 385\,y$

单元2： $T_i = 599\,°C$, $T_j = 446\,°C$, $T_k = 554\,°C$, $N_i = 100\,(0.1\,y)$, $N_j = 100\,(0.01 - 0.1\,x)$, $N_k = 100\,(0.1\,x - 0.1\,y)$
计算得 $T^2 = 446 + 1080\,x + 450\,y$

单元3：
$T_i = 1000\,°C$, $T_j = 599\,°C$, $T_k = 554\,°C$, $N_i = 100\,(-0.01 + 0.1\,x)$, $N_j = 100\,(0.1\,y)$, $N_k = 100\,(0.02 - 0.1\,x - 0.1\,y)$
计算得 $T^3 = 108 + 4460\,x + 450\,y$

单元4： $T_i = 599\,°C$, $T_j = 1000\,°C$, $T_k = 1000\,°C$, $N_i = 100\,(0.02 - 0.1\,x)$,
$N_j = 100\,(0.01 - 0.1\,y)$, $N_k = 100\,(-0.02 + 0.1\,x + 0.1\,y)$
计算得 $T^4 = 198 + 4010\,x$

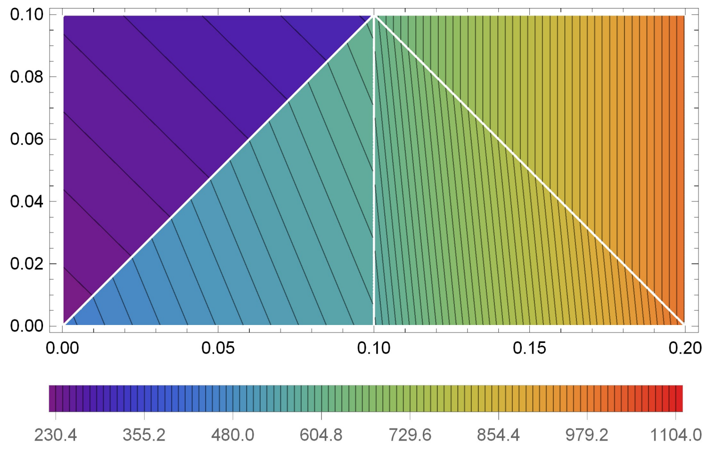
上述结果中最具有特征的表达式为 T^4，该单元内各店的温度仅与点的横坐标有关，温度随着横坐标的减小而线性减小。而结合题目条件“边BC温度恒定为1000°C”可知，所计算的结果符合该单元的温度变化情况。

使用 Mathematica 软件可以画出四个单元内的温度分布图：

等高线图

In[ ]:=
```
T1=223+380 x+385y;
T2=446+1080x+450y;
T3=108+4460x+450y;
T4=198+4010x;
ContourPlot[
    T1*Boole[x≥0&&y≤0.1&&(x-y≤0)]+
    T2*Boole[x≤0.10&&y≥0&&(x-y≥0)]+
    T3*Boole[x≥0.1&&y≥0&&(x+y<0.2)]+
    T4*Boole[x≤0.2&&y≤0.1&&x+y≥0.2],{x,0,0.2},
    {y,0,0.1},
    PlotLegends→Automatic,AspectRatio→1/2,PlotPoints→100,Contours→100,ColorFunction→"Rainbow
```

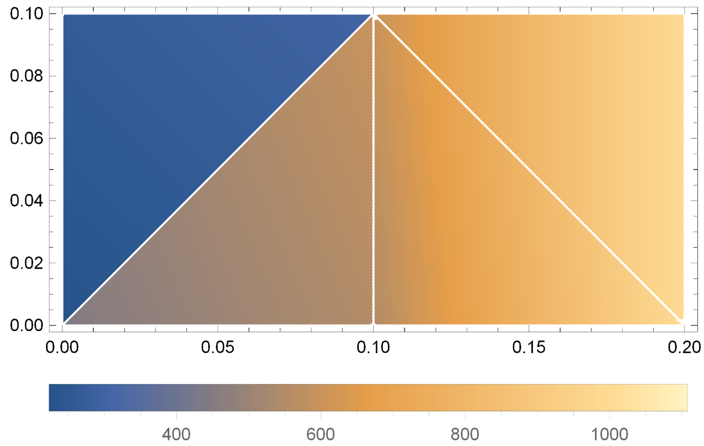
Out[ ]=



密度图

In[ ]:=
```
DensityPlot[
    T1*Boole[x≥0&&y≤0.1&&(x-y≤0)]+
    T2*Boole[x≤0.10&&y≥0&&(x-y≥0)]+
    T3*Boole[x≥0.1&&y≥0&&(x+y<0.2)]+
    T4*Boole[x≤0.2&&y≤0.1&&x+y≥0.2],{x,0,0.2},
    {y,0,0.1},
    PlotLegends→Automatic,PlotPoints→100,AspectRatio→1/2,ImageSize→Medium]
```

Out[ ]=

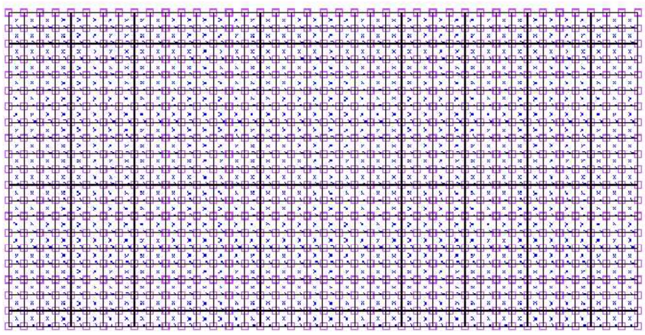


三、软件模拟

利用 Marc 软件对该模型的计算结果进行验证。

1. 网格划分

按照 40×20 对网格进行划分如下：

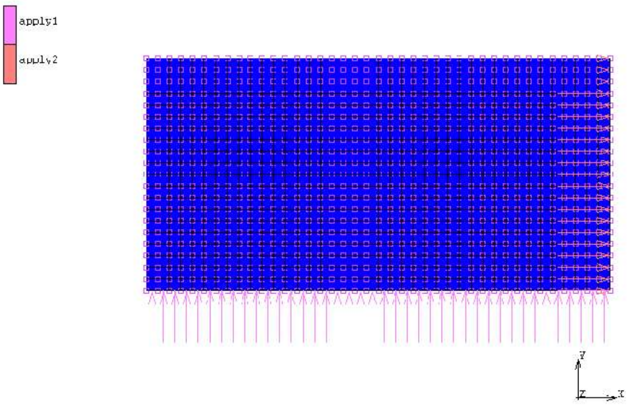


2. 模型参数

将密度（7800 kg/m^3）、比热（500 J/(kg·°C)）、导热系数（50W/(m·°C)）、初始温度（100°C）和环境温度（20°C）等值赋予所有节点。

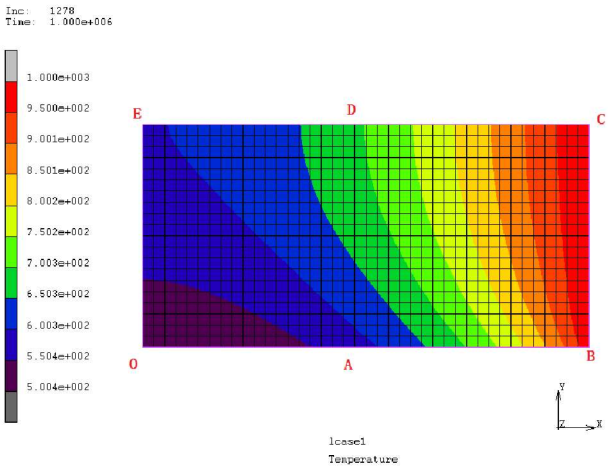
3. 边界条件

添加两个边界条件： 边 BC 温度恒定为 1000 °C，边 O(A)B 换热系数 $h = 200\, W/(m^2 \cdot °C)$，如图所示



4. 运行结果

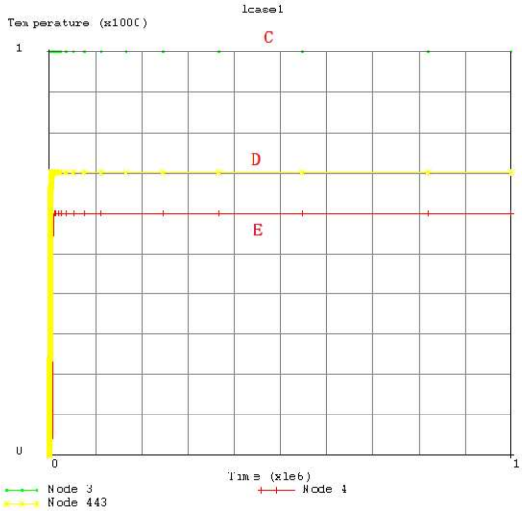
4.1 温度云图

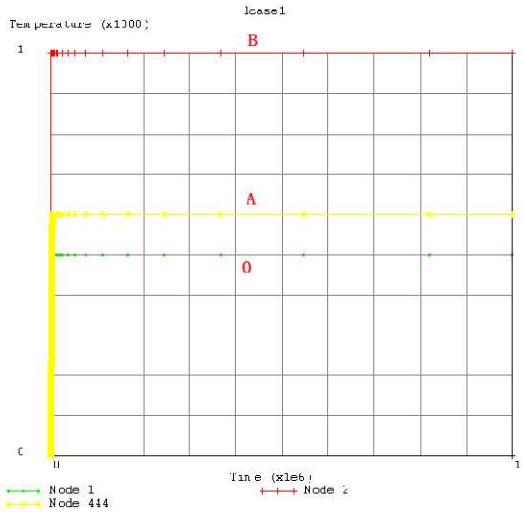


可以看到，该温度云图和上面用 Mathematica 绘制的等高线图相似，证明计算的结果是正确的。

4.2 History Plot

上图中 O→E 六个节点的温度随时间变化的情况表示为图像曲线，如图所示：





4.3 结果验证

从 History Plot 可以看出，六个节点最终的温度分别为 O(400°C)、A(500°C)、B(1000°C)、C(1000°C)、D(600°C)、E(500°C)。
将计算得到的结果与模拟值进行对比如下：

In[ ]:=
```
Grid[{{"","O","A","B","C","D","E"},{"模拟值",400,500,1000,1000,600,500},{"计算值",447,554,1
```

Out[ ]=

	O	A	B	C	D	E
模拟值	400	500	1000	1000	600	500
计算值	447	554	1000	1000	599	523

可以看出，其结果较为符合，证明计算结果是正确的。

4.4 是否网格划分更细，该问题可以得到解决？

网格并不是越细越好，太细的网格只会增大计算量，但对结果的精确度的贡献不大，所以一般在选网格数量的时候，要对具体模型选择具体的网格划分数量。