Approximation des EDP

Mohammad Reza Pakzad

2023-2024

Table des matières

EDP : abbreviation pour “équations aux dérivées partielles”. De là, deux grandes théories émergent : analyse des EDP (aspect théorique) et méthode pour la résolution numérique. Entre les deux, il y a la théorie de l'approximation des EDP. 17-01-2024

Il n'y a pas de théorie unique qui s'applique à toutes les EDP.

Dans ce cours, on abordera surtout les équations de type $\Delta u = f$.

Quelques notations

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec

$$u(x_1, \ldots, x_n) = (u^1(x_1, \ldots, x_n), u^m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Pour tout i, $u_{x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \partial_{x_i} u(x) = \partial_i u(x)$ (on utilise la dernière notation quand il n'y a pas d'ambiguité).

Notez que

$$u_{x_i} = (u^1_{x_i}, \ldots, u^m_{x_i}).$$

Aussi $u_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_i}$, de même pour les dérivées de tout ordre.

Exemple. Pour $m = 1, n = 1, u(t, x) = (e^{-t}x, x^2 + t)$.

On a

$$u_t = (-e^{-t}x, 1), u_x = (e^{-t}, 2x).$$

Le gradient et la jacobienne

Si $m = 1, u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \nabla u = Du \operatorname{grad} u = [\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n} u] : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Si $m > 1$, on a affaire à une matrice jacobienne de taille $m \times n$. Le gradient est un cas particulier de la jacobienne.

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

La divergence

Si $\overrightarrow{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, avec $\overrightarrow{F}(x) = (F^1(x), \ldots, F^n(x))$, on a

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \partial_{x_1} F^1 + \cdots + \partial_{x_n} F^n = \sum_{i=1}^{n} F^i_{x_i} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On peut aussi dire que $\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$.

Remarque 0.1. Si $\overrightarrow{F} = (0, T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{F}$ dépend aussi du temps), ⚠

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \operatorname{div}_t \overrightarrow{F}(t, x) = F^1_{x_1} + \cdots + F^n_{x_n}(t, x).$$

Le laplacien

On définit

$$\Delta u := \partial_{x_1 x_1} + \dots \partial_{x_n x_n} = \mathrm{div}(\nabla u) = \nabla \cdot (\nabla u)$$

et si $u = (u^1, \dots u^m)$, alors

$$\Delta u := (\Delta u^1, \dots, \Delta^m).$$

Encore $\Delta u : div(Du)$ où $A := \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$, où $A = [\overrightarrow{v}^1, \dots, \overrightarrow{v}^n]$, avec $\overrightarrow{v}^j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, on définit

$$div A : \partial_{x_1} \overrightarrow{v}^1 + \dots + \partial_{x_n} \overrightarrow{v}^n.$$

Ici on a identifié $\Delta u = (\Delta u^1, \dots, \Delta^m)$ comme un vecteur ligne avec le vecteur colonne qui est

$$div(Du) = \begin{bmatrix} div \nabla u^1 \\ \vdots \\ div \nabla u^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u^1 \\ \vdots \\ \Delta u^1 \end{bmatrix}.$$

1 Quelques exemples des EDP

On cherche une ou plusieurs applications $u :? \longrightarrow ?$ satisfaisant

1.1 L'équation de la chaleur en 1D (une dimension spatiale)

$$u :]0, T[\times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, t \in]0, T[, x \in [a, b], a, b, t \in \mathbb{R}, T > 0.$$

$f :]0, T[\times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée (la source), les données sont $u_0(x), g_a(t), g_b(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation est la suivante :

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = f \text{ (EDP)} \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ (condition initiale, CI)}, \forall x \in [a, b] \\ \begin{cases} u(t, a) = g_a(t) \\ u(t, b) = g_b(t), \forall t \in]0, T[. \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

Ce sont les valeurs limites aux bords (ou conditions aux bords) de type Dirichlet.

C'est un **problème d'évolution**.

Cette équation s'appelle aussi l'équation de la diffusion.

Ici, l'équation de la chaleur a besoin de sa CI et de ses valeurs aux bords (VB) pour être bien posée (existence, unicité et stabilité d'une solution).

$A = \alpha^2$ est la conductivité (une constante).

Si la barre n'est pas homogène dans ses propriétés thermiques, on peut avoir une conductivité non constante.

$$A : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+ := \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}.$$

L'équation devient $u_t - (A(x)u_x)_x = f$.

1.2 L'équation de la chaleur en 2D, 3D ou nD

L'équation de la chaleur (en deux, trois ou n dimensions). Soit $\Omega \iota \mathbb{R}^n$ domaine spatial, $\partial\Omega$ le bord de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \Omega, A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym,pos}}$.

$$\begin{cases} u_t - div(ADu) = f \quad u, f : [0, T[\times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ CI} \\ u(t, x) = g(t, x) \quad (t, x) \in [0, T[\times \partial\Omega \text{ VB}. \end{cases} \tag{2}$$

Si $A(x) = \alpha^2 I$, l'équation devient $u_t - \alpha^2 \Delta u = f$.
$u_t - div(A\nabla u)$ est l'équation parabolique de diffusion.

1.3 L'équation des ondes en 1D

L'équation des ondes (1D), aussi appelée l'équation d'Alembert.
$u(t,x), t \in [0,T[, x \in [a,b]$. $f(t,x)$ est donnée, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $u_0(x), \nu_0(x), g_a(t), g_b(t)$.

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu^2} u_{tt} - u_{xx} = f \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = \nu_0(x) \text{ CI} \\ u(t,a) = g_a(t), u(t,b) = g_b(t) \text{ VB.} \end{cases} \tag{3}$$

Si les deux bouts de la corde sont fixés, on peut imposer $g_a(t) = g_b(t) = 0$.
L'équation des ondes est une équation **hyperbolique**.

1.4 L'équation des ondes en 2D, 3D ou nD

$\Omega \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} u_{tt} - \Delta u = f \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x), \nu_0(x) \text{ CI} \\ u(t,x) = g(t,x), (t,x) \in [0,T[\times \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

1.5 L'équation de Poisson

$\Omega \in \mathbb{R}^n, u(x), f(x), g(x), x \in \partial\Omega$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \text{ VB de type Dirichlet.} \end{cases} \tag{5}$$

C'est un problème aux limites de type elliptique.

Remarque 1.1. Si $n = 1$,

$$\begin{cases} -u_{xx} = f \\ u(a) = g_a, u(b) = g_b \end{cases}$$

n'est pas une EDP, mais une EDO.

1.6 Généralisation de l'équation de Poisson

C'est une équation scalaire elliptique d'ordre 2.
Soit $A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique positive, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -div(A(x)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ \text{VB } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

Remarque 1.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la conductivité, avec $A(x) = a(x)\, \mathrm{id}_{n\times n}$, alors l'équation de la chaleur devient :

$$u_t - div(a(x)\nabla u) = f\text{CIVB.}$$

Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est la température en équlibre ($u(t,x)$ ne change pas dans le temps), alors $u_t(t,x) = 0$ implique que $u(x) := u(t,x)$ est une solution de 6.

En général on s'attend à ce que si u_∞ satisfait 6 et $u(t,x)$ est la solution de l'équation de la chaleur, alors

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_\infty(x).$$

1.7 L'équation de Navier-Stokes (2D/3D)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, t \in [0,T[, x \in \Omega$, $u(t,x) \in \mathbb{R}^n, u : [0,T[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, p(t,x) \in \mathbb{R}^n$.
$f : [0,T[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donné, ainsi que $u_0(x), g(t,x)$ donnés.
$u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, g : [0,T[\times\partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \Delta p = f \\ div u = 0 \text{ (incompréssibilité ou continuité)} \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ CI} \\ u(t,x) = g(t,x) \text{ VB de type Dirichlet (d'autre type sont possibles)} \end{cases} \tag{N.S.}$$

u est la vitesse d'un fluide en un point $x \in \Omega$.
ν est la [...] du fluide.
p et la pression.
Il faut résoudre N.S. pour u et p.

C'est une équation de mécanique des fluides.
Notez le terme $u\cdot\nabla u = [u\cdot\nabla u^1, \ldots, u\cdot\nabla u^n]$, avec $\nabla u = \nabla_x u = [\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u]$.
L'équation de l'équilibre de la quantité du mouvement fluide homogène de densité $f =$ constante.
S'il y a une non-linéarité forte, alors il y a problème technique pour l'analyse.

1.8 L'équation de transport

1.9 L'équation de Monge-Ampère (équation complément non-linéaire)

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2, Hu = \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i x^j}\right]_{n\times n}$, f donné.

$$\det(Hu) = f + VB.$$

1.10 L'équation de la plaque élastique linéaire

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ données, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}, h : \partial\Omega\mathbb{R}$.

$$\Delta^2 u = f u(x) = g(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = h(x), x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

avec $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \partial_{ii}(\Delta u)$.
C'est l'équation de la plaque elastique linéaire ($n = 2$) avec le bord fixé.
u modélise le déplacement vertical de la plaque et f est la forme verticale.

2 Méthode de différence finie (une méthode d'approximation des EDP)

2.1 Approximation des fonctions et leurs dérivées partielles

2.1.1 Théorème de Taylor

Théorème 2.1. Soient $[a,b] \subseteq \mathbb{R}, u \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b]), c \in [a,b]$.

Pour tout $x \in [a,b]$, il existe z entre c et x tel que

$$u(x) = T_n(x) + E_{n+1}(x),$$

où T_n est le polynôme de degré $\leq n$, E_{n+1} est l'erreur (le reste) et

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}}{k!}(x-c)^k, E_{n+1} = \frac{u^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Remarque 2.1. $T^{(z)}(c) = u^{(j)}(c), \forall 0 \leq j \leq n$.

Si on remplace x par $(x+h)$ et c par x, on obtient

$$u(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(x)}{k!}h^k + \frac{u^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

2.1.2 La différence finie (D.F.)

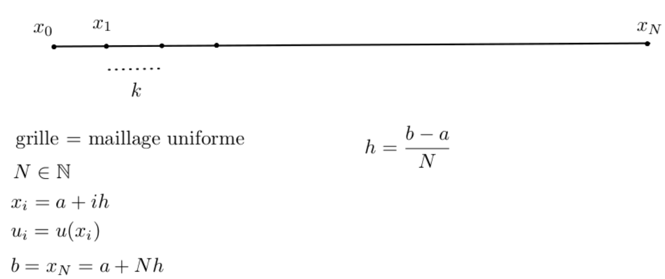

FIGURE 1 – Méthode de la différence finie