Analyse fonctionnelle et distributions

2023-2024

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

1.1 Rappels de topologie

J. Dieudonné 1 et 2.
Reed-Simon 1, 2 et 4.
Brézis, "Analyse fonctionnelle"

Soit X ensemble. Soit $(X, \mathscr{T})$ espace topologique où $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$.
$\mathscr{T}$ parcourt l'ensemble des voisinages de x où x est un point quelconque de X.

1.1.1 Axiomes

1. Soient $x \in X$ et V' voisinage de x. Si $V \supset V'$ alors V est un voisinage de X.
2. $\bigcap_{\text{finie}} V_i$ est un voisinage de x, $\bigcap_{\text{finie}} V_i \in \mathscr{T}$, mais $\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon \neq \emptyset$ n'est pas un voisinage de 0.
3. $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de x.

Définition 1.1.1 (Ouvert)**.** Ω ouvert si et seulement si Ω est voisinage de chacun de ses points.

Exemple. $(-1, 1)$ ouvert tandis que $[-1, 1)$ non ouvert car -1 n'a pas de voisinage.

$V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est une base de voisinage pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. On peut définir axiomatiquement $\mathscr{T}$ à partir de ses ouverts.

Définition 1.1.2 (Fermé)**.** On dit que F est un fermé si et seulement si F^C est un ouvert.

1.1.2 Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques

Définition 1.1.3 (Espace métrique, distance)**.**
X est un ensemble, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ distance sur X si et seulement si :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
   Remarque. Si on a seulement $x = y \implies d(x, y) = 0$, alors d est un écart.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire). De ce fait, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Exemple. 1. Dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \|x - y\|$.

2. X ensemble. On définit d de la façon suivante :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 \text{ si } x = y \\ d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

   Il s'agit de la distance triviale.
   Si x, y, z distincts alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.1.3 Comparaison des topologies

Soient X un ensemble et $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ des topologies sur X.

Définition 1.1.4 (Plus fine)**.** On dit que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$ et on note $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$ si et seulement si $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.

On dit aussi que $\mathscr{T}'$ est plus forte que $\mathscr{T}$.

Remarque. Si $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$, il y a plus d'ouverts dans $\mathscr{T}'$ que dans $\mathscr{T}$ (idem pour les fermés).

Démonstration. Soit Ω ouvert dans X. On a $\Omega \in \mathscr{T} \implies \Omega \in \mathscr{T}'$.

Soit F un fermé dans X. On a $F \in \mathscr{T}$, mais $\Omega = F^C \in \mathscr{T} \implies F^C \in \mathscr{T}'$, donc $F \in \mathscr{T}'$. □

Formulations équivalentes

1. On suppose que $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$. Si $\forall x \in X$, U est un voisinage de x pour $\mathscr{T}$, alors U voisinage de x pour $\mathscr{T}'$, car si U est un ouvert de $\mathscr{T}$, alors U est un ouvert de $\mathscr{T}'$.
2. Pour l'application identité définie comme suit

$$id : (X, \mathscr{T}') \longrightarrow (X, \mathscr{T}),$$

   on a $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$ si et seulement si id est continue.

Par exemple, prenons $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$. On prend $\mathscr{T}$ topologie de la convergence simple, i. e. f_n converge vers f simplement si $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \to f(x)$.

Ouverts de Ω

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{f \in X \mid \sup_{i=1,\ldots,k} |f(a_i)| < \varepsilon\},$$

avec $a = a_0, \ldots, a_k \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$.

$\Omega_{a,\varepsilon}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle) dans X.

Pour $f_0 \in X$, $\Omega_{a,\varepsilon} + f_0$ est une base de voisinage de f_0, car X est un espace vectoriel (on agit par translation).

On considère maintenant la topologie de la convergence uniforme $\mathscr{T}'$.

$\Omega_\varepsilon = \{f \in X, \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| < \varepsilon\}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle).

Proposition 1.1.1. $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$, ie $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.

Démonstration. Soit $\Omega_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$.
Si $f \in \Omega_\varepsilon$, alors

$$\forall x \in [0,1], |f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall i \in \{1,\dots,k\}, |f(a_i)| < \varepsilon \text{ (car c'est vrai pour tout } x).$$

Donc Ω_ε est un voisinage de 0 dans $\mathscr{T}$. On a ainsi démontré que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$. □

On considère l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}^0$ avec la norme

$$\|f\|_0 = \sup|f(x)|$$

et l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\mathcal{C}^1$ avec la norme

$$\|f\|_1 = \sup|f(x)| + \sup|f'(x)|.$$

La topologie sur $\mathcal{C}^1$ est plus fine que celle sur $\mathcal{C}^0$.

Démonstration. On a pour tout f,

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1.$$

Ainsi si

$$\|f\|_1 < \varepsilon,$$

alors

$$\|f\|_0 < \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{f, \|f\|_1 < \varepsilon\} \subset \{f, \|f\|_0 < \varepsilon\}$.
Donc $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$.
On sait également que si U est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}$, alors U est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}'$. □

Topologie métrisable (exemples)

1. Topologie grossière $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie la moins fine.
   Remarque. $\mathscr{T}' = \mathscr{P}(X)$ est la topologie la plus fine.

   Vérifions si la topologie grossière est métrisable dans différents cas.
   — Si $X = \{a\}$, on a $d(a,a) = 0$. Le seul voisinage de a est $X = \{a\}$. Donc $\mathscr{T}$ est métrisable.
   — Supposons que $X = \{a,b\}$. Mais $\mathscr{T}$ n'est plus métrisable, avec $d(a,b) = 1$ (distance triviale). Raisonnons par l'absurde. Si $\mathscr{T}$ était métrisable, $\mathscr{T}$ devrait contenir un ouvert Ω tel que $a \in \Omega$ et $b \notin \Omega$. Or $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$, donc c'est impossible.

   Pour $\mathscr{T}'$, on choisit la distance d telle que $d(x,y) = 0$ ou 1. Est-ce que $\mathscr{T}'$ est métrisable ?
2. Prenons $\mathscr{T}$ telle que $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.
   On suppose que X contient au moins deux éléments. Dans ce cas, $\mathscr{T}$ est une topologie sur X non métrisable, car si $d(a,b) = 1$, avec $b \neq a$, alors dans $\mathscr{T}$ il n'existe pas de boule ouverte qui contient $\{b\}$ sans contenir $\{a\}$.
3. Considérons $X = \{a,b\}$ muni de la topologie $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathscr{P}(X)$.
   On a $d(a,b) = 1$, car $a \neq b$.
   De ce fait :
   $\{a\}$ voisinage de a qui ne contient pas b ($\{a\} = \{x \text{ tel que } d(x,a) < 1\}$) ;
   $\{b\}$ voisinage de b qui ne contient pas a.

1.1.4 Espaces vectoriels topologiques

Dans le cas où $(X, \mathscr{T})$ est un espace vectoriel topologique, il suffit de connaître les voisinages de 0 et on agit par translation pour déterminer les voisinages de n'importe quel $x \in X$.

Définition 1.1.5 (Continuité)**.** Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques et $f : X \to Y$ une application. On considère :

$$(U_a)_{a \in A} \text{ voisinage de 0 dans } X$$
$$(V_b)_{b \in B} \text{ voisinage de 0 dans } Y$$

f est continue si pour tout $V = V_b + f(x_0)$ dans Y, il existe $U = \bigcap_{\text{finie}}(U_a + x_0)$ voisinage de x dans X tel que $x \in U \implies f(x) \in V$.

Définition 1.1.6 (Norme)**.** $\|\cdot\|$ est une norme sur X si

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation) ;
2. $\|\lambda x\| = |l|\|x\|$ (absolue homogénéité) ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Cas particulier : X normé De cette norme, on construit la distance d telle que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Voisinages de 0.
$(U_a) = B(0, a)$
$A = \mathbb{R}^+$.
— $f : X \to Y$ continue en x_0, $\forall V = V_b + f(x_0)$, $\exists U = B(0, \delta) + x_0, f(U) \subset V$.
— X, Y EVN.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(0, \delta) + x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

1.2 Semi-normes et espaces localement convexes

1.2.1 Semi-normes sur X espace vectoriel

Définition 1.2.1 (Semi-norme)**.** L'application $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ est une semi-norme si :

1. $\rho(0) = 0$;
2. $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$;
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

X est un espace vectoriel $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque. ⚠ On n'a pas forcément $\rho(x) = 0 \implies x = 0$.

Exemple. 1. Si ρ est une norme, c'est aussi une semi-norme.

2. $X = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)). On prend $a = (a_0, \dots, a_k) \subset [0,1]$. On définit

$$\rho_a(f) = \sup_{0 \leq i \leq k} |f(a_i)|.$$

3. Topologie faible. X est un espace vectoriel et X' est son dual (espace contenant les formes linéaires sur X).
   Soit l une forme linéaire dans X'. Alors

$$p(x) = |\langle l, x \rangle|.$$

Définition 1.2.2 (Famille de semi-normes séparée)**.** Soit $(\rho_a)_{a \in A}$ une famille de semi-normes. On dit que $(\rho_a)_{a \in A}$ sépare les points (ou est séparée) si et seulement si

$$\forall a \in A, \rho_a(x) = 0 \implies x = 0.$$

Définition 1.2.3 (Espace localement convexe (ELC))**.** L'espace vectoriel topologique X est un **espace localement convexe** si et seulement si X est **muni d'une famille de semi-normes qui séparent les points**.

Proposition 1.2.1. Si X est un espace localement convexe, alors X est un espace vectoriel topologique pour la topologie définie par ρ_a.

Démonstration. On note $\mathscr{T}$ la topologie définie par la famille de semi-normes $(\rho_a)_{a \in A}$.

Remarque (Personnelle)*.* On cherche à montrer que les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ forment une topologie. On va vérifier les axiomes de topologie.

Dans ce cas, les ouverts $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ sont $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{a,\varepsilon}, a \in A, \varepsilon > 0$ définis ci-dessous :

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

$\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ une base de voisinages de 0.
Les voisinages de x sont donnés par translation :

$$x + \mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x + y, y \in \mathcal{O}_{a,\varepsilon}\}.$$

On montre facilement que $\bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$ et $\bigcup_{\text{quelconque}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$. □

Proposition 1.2.2. $\mathscr{T}$ est la topologie la moins fine sur X qui rend continues

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (\lambda, x) \to \lambda x.$$

Il y a donc une compatibilité avec la structure des espaces vectoriels.

Démonstration. 1. $\mathscr{T}$ rend continues les deux opérations de X. On a en effet

$$\rho_a(x+y) \leq \rho_a(x) + \rho_a(y).$$

Il suffit de prendre $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient $\rho_a(x+y) < \varepsilon$.
On a $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ et on démontre ce résultat par analogie.

2. La moins fine (en exercice).

□

Théorème 1.2.1. *La topologie de X espace localement convexe est Hausdorff, i. e. elle sépare les points.*

Définition 1.2.4 (Hausdorff)**.** $(X, \mathscr{T})$ est de Hausdorff si et seulement si pour tout $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, il existe $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ voisinages de x et de y tels que

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset.$$

Exemple. On prend $X = \{a, b\}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. On a $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Donc $(X, \mathscr{T})$ est séparée.

Démonstration du théorème 1.2.1. Par contraposée, on prend $y \neq 0$ et $x = 0$.
Si X est un espace localement convexe, alors il existe $a \in A$ tel que $\rho_a(y) = \varepsilon > 0$.
On pose

$$V_x = \left\{z, \rho_a(z) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \text{ et } V_y = \left\{z, \rho(z-y) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{1.1}$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient $V_x \cap V_y = \emptyset$, car

$$\rho_a(x-y) > |\rho_a(x) - \rho_a(y)| > \left|\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon\right| = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

□

1.3 Pourquoi “localement convexe” ?

Définition 1.3.1. Soit X un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

1. On dit que $C \subset X$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1], z = tx + (1-t)y \in C.$$

2. On dit que $B \subset X$ est balancé (sur $\mathbb{R}$) ou cerclé (sur $\mathbb{C}$) si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \implies \forall x \in B, \lambda x \in B.$$

3. On dit que $E \subset X$ est équilibré si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \implies \forall x \in E, \lambda x \in E.$$

4. On dit que A est absorbant si

$$\bigcup_{t>0} tA = X.$$

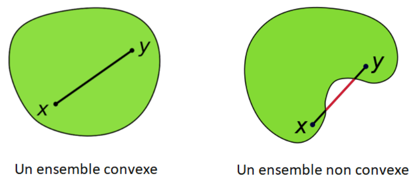

FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

Exemple. 1. Si X est un espace vectoriel normé, $A = B(0,1)$ et $x \in X$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$. Alors $x \in \|x\| B(0,1)$.
2. Si $0 \in C$ convexe, alors C est équilibré si et seulement si C est balancé.

Démonstration. On suppose que C est balancé. Pour $x \in C \implies -x \in C$, donc $[-x, x] \in C$ par convexité. □

Théorème 1.3.1. *Soit X un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est un espace localement convexe (réel ou complexe) ;*
2. *Il existe une base de voisinages de $0 \in X$ qui sont convexes, balancés (cerclés), absorbants.*

19-09-2023

Démonstration. 1. Si X est un espace localement convexe, alors une base de voisinages de 0 est donnée par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

Les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ sont convexes, balancés et absorbants (TD).
2. On utilise la jauge de Minkowski 1.3.2.
On pose

$$\rho_C(x) = \mu_C(x).$$

et on vérifie que ρ_C est une semi-norme. Grâce au lemme 1.3, on obtient les résultats suivants :
   (a) $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$, car C est convexe ;
   (b) $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$ si $\lambda > 0$ et $\rho_C(\lambda x) = |\lambda| \rho_C(x)$, car C est cerclé.
   X muni de ρ_C est un espace localement convexe.

□

Définition 1.3.2 (Jauge de Minkowski)**.** Soit X espace vectoriel réel ou complexe. On suppose que C tel que $0 \in C$ est absorbant. Alors la jauge de Minkowski est définie comme suit :

$$\mu_C(x) = \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha C\}.$$

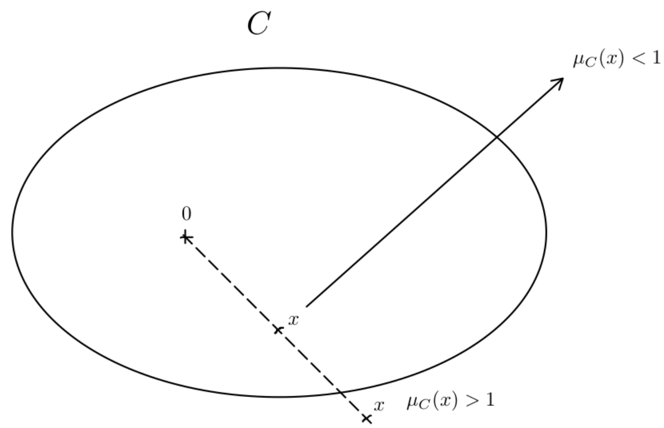

FIGURE 1.2 – La jauge de Minkowski

Remarque. Si C est absorbant, alors $\forall x \in X$, $\mu_C(x) < \infty$.

Lemme. *Soit $C \subset X$ absorbant tel que $0 \in C$.*

1. *Si $\lambda \geq 0$, $\mu_C(\lambda x) = \lambda \mu_C(x)$;*
2. *Si C est convexe, alors $\mu_C(x+y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$;*
3. *Si C est cerclé, alors $\mu_C(\lambda x) = |\lambda| \mu_C(x)$;*
4. *$\{x \in X, \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X, \mu_C(x) \leq 1\}$.*

1.3.1 Théorème de Hahn-Banach

Il y a la forme analytique et la forme géométrique de ce théorème.

Théorème 1.3.2 (De Hahn-Banach, forme analytique)**.** *Pour simplifier, on prend X espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :*

- $\star$ $\forall x \in X, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$;
- $\star$ $\forall x, y \in X$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Soient Y un sous espace vectoriel de X et l une forme linéaire sur Y qui vérifie

$$\forall x \in Y, l(x) \leq p(x), \forall x \in Y.$$

Alors (prolongement) il existe L forme linéaire sur X telle que $L_{|Y} = l$ ***et***

$$\forall x \in X, L(x) \leq p(x).$$

On l'applique aux espaces vectoriels normés, espaces localement convexes,...

Théorème 1.3.3 (Norme sur un espace dual)**.** *Soit X espace vectoriel normé, X' formes linéaires continues sur X, X' est un espace vectoriel normé. La norme sur X' est définie de la façon suivante :*

$$\|L\|_{X'} \overset{déf}{=} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle L, x \rangle| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle L, x \rangle|}{\|x\|}.$$

Exercice 2. Montrer que $\|\cdot\|_{X'}$ est une norme.

Si X est un espace vectoriel normé complet (de Banach), alors X' l'est aussi.

Corollaire (Prolongement isométrique de l sur Y)**.** *Soit X espace vectoriel normé, $Y \subset X$ sous espace vectoriel de X et $l \in Y'$ avec*

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|y\|\le 1 \\ y\in Y}} |\langle l, y\rangle|.$$

Alors il existe un prolongement L de l de même norme

$$\sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\le 1}} |\langle l, x\rangle| = \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} |\langle l, y\rangle|.$$

Démonstration. Par le théorème de Hahn-Banach, on pose p telle que $p(x) = \|l\|_{Y'}\|x\|$ (l'application définie ainsi vérifie les propriétés de p nécessaires à l'application du théorème).

Par Hahn-Banach, il existe L une forme linéaire sur X telle que

$$L(x) = \langle L, x\rangle \le p(x) = \|l\|_{Y'}\|x\|.$$

Mais

$$\langle L, -x\rangle \le \|l\|_{Y'}\| - x\|,$$

donc

$$|\langle L, x\rangle| \le \|l\|_{Y'}\|x\|.$$

Ainsi, en divisant par $\|x\|$, on obtient le résultat suivant :

$$\forall x \in X, \left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \le \|l\|_{Y'}.$$

Or si on prend $x \in Y$,

$$\left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \le \|l\|_{Y'} = \sup_{y\in Y\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right|.$$

Comme $Y \subset X$ (ce qui entraîne que $\sup_{y\in Y\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \le \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right|$), on a donc égalité, d'où l'isométrie. □

Corollaire. *$\forall x_0 \in X$ espace vectoriel réel, il existe $L_0 \in X', \|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X$.*

Démonstration. $Y = \mathbb{R}x_0$. Soit $l(tx_0) \overset{\text{déf}}{=} t\|x_0\|^2$ forme linéaire continue sur Y.

Alors, en posant $t = 1$, on obtient

$$\|l\|_{Y'} = \|x_0\|$$

et, par le théorème de Hahn-Banach,

$$\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

□

Exercice 3. Traduire Hahn-Banach dans le cas où X est un espace localement convexe.

Théorème 1.3.4 (De Hahn-Banach, forme géométrique)**.** *Soit X espace vectoriel normé (ou espace localement convexe). Soient $A, B \subset X$ convexes et disjoints.*

1. *On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine (d'équation $\langle L, x\rangle =$ constante) $\mathscr{H}$ qui sépare au sens large A et B.*
2. *Si A est fermé, B est compact, alors il existe $\mathscr{H}$ hyperplan qui sépare A et B au sens strict.*

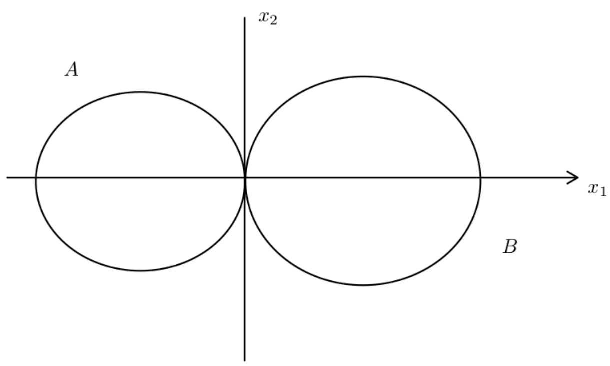

Figure 1.3 – $A = \{x_1 < 0\}, B = \{x_2 \geq 0\}, \mathscr{H} = \{x_1 = 0\}$.

1.4 Espaces localement convexes métrisables, espaces de Fréchet

1.4.1 Topologies définies par une distance

On rappelle la définition 1.1.3.

Définition 1.4.1 (Distances équivalentes)**.** On dit que d_1 est équivalente à d_2 si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y).$$

$d_1 \sim d_2 \implies (X, d_1) \simeq (X, d_2)$, mais la réciproque est fausse.

Exemple. On prend un espace métrique (X, d) avec les distances

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta'(x, y) = \inf(1, d(x, y)).$$

Ces distances sont équivalentes entre elles.

Démonstration.

1. Montrons que $(X, d) \sim (X, \delta')$. On remarque d'abord que

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq d(x, y),$$

ce qui veut dire que $(X, d) \prec (X, \delta)$ (car si $\mathcal{O}$ est un ouvert pour δ, alors il le sera forcément pour d).
Prenons

$$f(t) = \frac{t}{1+t}. \tag{1.2}$$

La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0,1]$. En effet, montrons qu'il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}$.
On a

$$\frac{t}{1+t} = s \implies t = ts + s \implies t = \frac{s}{1-s}.$$

Donc $d(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{1-\delta(x,y)}$. Donc si $d(x,y) < \varepsilon$, alors $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Donc $(X,\delta) \prec (X,d)$.

2. Montrons que $\delta \sim \delta'$.
On a

$$\delta = \frac{d}{1+d} \leq \begin{cases} 1 \\ \delta. \end{cases}$$

En effet, cela vient du fait que $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \underset{d(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc

$$\delta(x,y) \leq \delta'(x,y).$$

Mais $\delta' \leq 2\delta$. En effet, on distingue deux cas :

(a) Si $\delta \leq 1$ et $\delta' = d$, alors $d \leq 2d$,

(b) Si $\delta \geq 1$ et $\delta' = 1$, alors $1 \leq 2d$.

3. Montrons que δ est une distance.

(a) Montrons l'inégalité triangulaire. Si $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, montrons que $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$.
Est-ce que $f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)) + f(d(z,y))$, avec f définie dans 1.2 ?

i. f est croissante, donc $f(d(x,y)) \leq f[d(x,z) + d(z,y)]$. Il suffit de voir que $f(t) \leq f(u) + f(v)$.

ii. Montrons la sous-additivité de f. Posons

$$v \mapsto \varphi(v) = f(u+v) - f(u) - f(v).$$

On a $\varphi(0) = 0$, car $f(0) = 0$ et $\varphi(v) = f'(u+v) - f'(v) < 0$, car f est une fonction croissante.

□

Sous quelles conditions un espace localement convexe est métrisable ?

On remarque par exemple que $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus généralement, les topologies faibles ne sont pas métrisables, sauf si on travaille en dimension finie. Par ailleurs, X muni de la topologie grossière n'est pas métrisable (non séparée).

Proposition 1.4.1. Soit X un espace localement convexe (donc séparé). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. X est métrisable.
2. Il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans X, et ce pour tout $x \in X$.
3. La topologie de X est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.

Démonstration. 1. (1) $\Longrightarrow$ (2). La topologie sur X est équivalente à (X,d). Soit (X,d) un espace métrique. Il suffit de poser

$$\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} = \left\{x \mid d(x,0) < \frac{1}{n}\right\} \text{ ($\mathbb{R}$ est archimédien).}$$

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n$ tel que $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon}$. Donc $x + \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}$ est une base dénombrable de voisinages de x.

2. (2) $\Longrightarrow$ (3). On sait que $\mathscr{T}$ topologie de X est donnée par une famille de semi-normes. Les voisinages de 0 dans X sont donnés par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon,a_i}, \text{ avec } i \in \{1,\dots,n\}.$$

On rappelle que $\mathcal{O}_{\varepsilon,a_i} = \{x \mid \rho_{a_i} < \varepsilon\}$.
On peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On sait qu'il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans X. Soit U_n une base de voisinages dénombrable de 0. On pose

$$\rho_n(x) = \mu_{U_n}(x).$$

On prend les U_n convexes, balancés, absorbants comme dans le théorème 1.3.1 (c'est possible, car X est un espace localement convexe).

3. (3) $\Longrightarrow$ (1).

(a) Soit (ρ_n) une famille dénombrable de semi-normes sur X. On pose

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}.$$

Montrons que $(X, \mathrm{ELC}) \prec (X,d)$. Soit $U \in \mathscr{T}$ (la topologie ELC). On se ramène aux voisinages de 0. On a

$$U = \bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{\varepsilon,a}, a \in A.$$

Comme il existe une base dénombrable de voisinages, on peut choisir

$$U_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{N} = \{x \mid \rho_j(x-0) < \varepsilon\}, \text{ avec } A = \mathbb{N}.$$

Ce voisinage est inclus dans $\{x \mid \sum \rho_j(x-0) \le N\varepsilon\}$.
Montrons que U est un voisinage de x pour la topologie métrique (X,d).
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $d(x,0) = \left(\sum_1^N + \sum_{N+1}^\infty\right) \frac{\rho_n}{1+\rho_n}$. Or N est tel que

$$\sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \implies \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n}{1+\rho_n} < \varepsilon.$$

De plus,

$$d(x,y) \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n}{1+d_n} < \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} d_n(x,y). \tag{1.3}$$

Or $\rho_n(x-y) < \varepsilon$, car $x \in y + U_\varepsilon$.
Donc 1.3 devient

$$d(x,y) \le \varepsilon + N\varepsilon \text{ avec } N \text{ fixé.}$$

Donc $\mathscr{T} \prec (X,d)$.

(b) Montrons que $(X, d) \prec \mathscr{T}$. On doit majorer $\rho_m(x-y)$.
Or

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)} \geq 2^{-m} \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)}.$$

Et

$$2^m d(x,y) \geq \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)} \geq f(t).$$

Donc on a $\rho_m(x,y) \leq g(2^m d(x,y))$, où g est la réciproque de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

□

Proposition 1.4.2. Soit X un espace localement convexe qui vérifie l'une des propriétés énoncées dans la proposition 1.4.1 (i. e. métrisable). On note la topologie de X ELC par $\mathscr{T}$. Alors X est complet pour $\mathscr{T}$ si et seulement si (X, d) est complet.

Démonstration. Cette proposition se démontre exactement comme 1.4.1. □

Définition 1.4.2. Soit X un espace localement convexe. On dit que X est un **espace de Fréchet** si X est **métrisable et complet**.

Exemple.

1. *Les espaces localement convexes qui ne sont pas des Fréchet.*
   (a) *Non métrisables.* $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple, les topologies faibles, ...
2. *Les espaces localement convexes qui sont des Fréchet.* Les espaces de Banach, par exemple $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $\mathcal{C}_0^\infty(K)$, ...

1.4.2 Espace de Schwarz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \iff \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} \left| x^\alpha D_\varphi^\beta \right| < \infty$.
Montrons que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est complet. On va regarder $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \ldots$

1. $\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon$, donc $\varphi_p \longrightarrow \varphi$, donc

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| < \varepsilon.$$

En particulier pour tout $K \subset \mathbb{R}$, φ_n est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(K)$. Or $\mathcal{C}^0(K)$ est complet, donc $\varphi_n \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} \varphi$. Comme K est arbitraire, elle converge localement sur tout $\mathbb{R}$. On a

$$\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon,$$

donc

$$\rho_{0,0}(\varphi - \varphi_p) < \varepsilon.$$

Donc φ_p converge pour $\rho_{0,0}$.

2. On a besoin de rappeler le lemme suivant :

Lemme. *Si* $\varphi' \longrightarrow \psi$ *uniformément et* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *simplement, alors* $\psi = \varphi'$.

1.4.3 Topologie forte et topologie faible sur les espaces de Banach

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (réel ou complexe) et $(E', \|\cdot\|')$ son dual topologique. On rappelle que

$$E' = \{l \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}), \exists C > 0, \forall x \in E, |\langle l, x\rangle| \leq C \|x\|^2\},$$

avec la norme sur le dual définie dans 1.3.3.
$(E', \|\cdot\|')$ est un espace de Banach, un cas particulier de $\mathscr{L}(E, F)$, avecn pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$,

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F .$$

On affaiblit $(E, \|\cdot\|)$. Alors $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine qui rend continue toutes les formes linéaires sur E. $X \sim \sigma(E, E')$ est muni des semi-normes $|\langle l, x\rangle| = \rho_l(x)$. Un voisinage de 0 est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_{\underline{l},\varepsilon} = \{x \in E : \sup_{1 \leq i \leq n} \langle l_i, x\rangle < \varepsilon\}, \underline{l} = (l_1, \ldots, l_n).$$

Comparaison des topologies $(E, \|\cdot\|)$ **et** $\sigma(E, E')$

Lemme. *Soit E un espace de Banach. Alors la norme définie*

$$x = \sup_{l \in E', \|l\| \leq 1} |\langle l, x\rangle| = \langle l_0, x\rangle.$$

est telle que le sup *est atteint. On a* sup = max.

Démonstration. On a $x \neq 0$ par la définition de $\|\cdot\|'$. Alors

$$\left|\left\langle l, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \|l\|' \leq 1.$$

Alors

$$|\langle l, x\rangle| \leq \|x\| \text{ pour tout } l \in E' \text{ tel que } \|l\|' \leq 1.$$

Soit x_0 et F tel que $F = \mathbb{R}x_0$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, l_0(\lambda x_0) = \lambda$ et $\|l_0\| = \|x_0\|$. Par Hahn-Banach, on peut prolonger l_0 en L_0 sur tout l'espace de Banach. □

Proposition 1.4.3.

$$(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E').$$

Donc $X \sim \sigma(E, E')$ est un espace localement convexe.

Démonstration. On a

$$\rho_l(x) = |\langle l, x\rangle| \leq \|l\|' \|x\| .$$

□

Autre démonstration. Montrons que $\mathcal{O}_{\underline{l},\varepsilon}$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$, i. e. $\|x\| < \delta$. On prend n formes linéaires $l_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ et on considère

$$\|x\| = \sup_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x\rangle| \,.$$

Or $|\langle l_i, x\rangle| < \varepsilon$ ... □

Démonstration. Montrons que $\sigma(E, E')$ est séparé. Soient x_1, x_2 distincts. Montrons qu'il existe $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\sigma(E, E')$ tels que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

Par Hahn-Banach, pour $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$ compacts et convexes. Pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a

$$\langle l, x\rangle < \alpha < \langle l, y\rangle.$$

Donc

$$\langle l, x_1\rangle < \alpha < \langle l, x_2\rangle.$$

On a $x_1 \in \mathcal{O}^1_{\alpha,l} = \{x : \langle l, x\rangle < \alpha\}$ et $\mathcal{O}^2_{\alpha,l} = \{y : \langle l, y\rangle > \alpha\}$, ces ouverts séparent x_1 et x_2. □

Théorème 1.4.1. $(E, \|\cdot\|)$ *est strictement plus fine que* $\sigma(E, E')$ *sauf en dimension finie.*

Démonstration. On considère $S = \{\|x\| = 1\}$. Alors $S = \overline{S}$, son adhérence.

Soit x_0 de norme plus petite que 1. Montrons que pour tout V voisinage de 0 dans $\mathscr{T}$, $V \cap S \neq \emptyset$. On a

$$V = \{x : |\langle l_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}.$$

Comme $\dim(E) = \infty$, il existe $y_0 \neq 0$ tel que $\langle l_i, y_0\rangle = 0, \forall i$. On a

$$g(t) = \|x_0 + ty_0\| \,.$$

On a $g(0) = \|x_0\| < 1$ et $g(\infty) = +\infty$. g est continue, donc il existe $t_0 \in (0, \infty)$ tel que $\|x_0 + t_0y_0\| = 1$. Donc $x_0 + t_0y_0 \in S$ et $x_0 + t_0y_0 \in V$, car

$$|\langle l_i, (x_0 + t_0y_0) - x_0\rangle| = |\langle l_i, t_0y_0\rangle| = |t_0\langle l_i, y_0\rangle| = 0 < \varepsilon.$$

□

Remarque. $\forall t \in \mathbb{R}, \langle l_i, x_0 + ty_0\rangle = 0$. Alors V contient toute une droite.

Remarque. Pour E Banach séparable, B_E boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est métrisable pour $\sigma(E, E')$.

Si E est réfléxif, alors $B_E = \{\|x\| \leq 1\}$ est un espace métrique compact pour $\mathcal{O}(E, E')$.

1.4.4 Théorème de Banach-Steinhaus, suites faiblement et fortement convergentes

Théorème 1.4.2. *Soient* E, F *espaces de Banach et* $(T_a)_{a\in A} \in \mathscr{L}(E, F)$ *tel que*

$$\forall x \in E, \sup_{a\in A} \|T_a x\|_F < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{a\in A} \|T_a\| < +\infty \text{ (bornée en norme)},$$

ie $\exists C > 0, \forall x \in E, \forall \alpha \in A, \|T_\alpha(x) \leq C \|x\|\|$.

Corollaire. *Soit* $T_n \in \mathscr{L}(E,F)$ *avec* $\|T_n\| < +\infty$ *avec* $\forall x \in E, T_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in F$. *On note* $y = Tx$. *Alors* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $T = \liminf T_n$.

Démonstration. Montrons que T_n est linéaire. En effet,

$$T_n(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T_n(x) + \lambda' T_n(x').$$

Par passage à la limite, on obtient $T(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T(x) + \lambda' T(x')$.

Montrons l'autre partie du corollaire. Par Banach-Steinhaus, si on considère $A = \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $T_n x$ est convergente, donc bornée, i. e. $\|T_n x\| < \infty$, donc $\sup_n T_n < C$ comme $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\|$.

Par passage à la limite, on obtient $\|Tx\| \leq C \|x\|$, avec $C = \liminf \|T_n\|$. □

Définition 1.4.3. Soit E espace de Banach. $B \subset E$ est bornée si et seulement si

$$\exists C \geq 0, \forall x \in B, \|x\| \leq C.$$

Corollaire. $B \subset E$ *est bornée si et seulement si* $\forall l \in E', l(B) \subset \mathbb{R}$ *est borné.*

Définition 1.4.4 (Suite fortement convergente)**.** $x_n \in E, x_n \longrightarrow x \iff \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$

Définition 1.4.5 (Suite fortement convergente)**.** $x_n \in E, x_n \longrightarrow x \iff \forall l \in E', \langle l, x_n\rangle \longrightarrow \langle l, x\rangle.$

Corollaire.

1. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$, *alors* $x_n \longrightarrow x$ *dans* $\sigma(E, E')$.
2. *Si* $x_n \longrightarrow x$, *alors* x_n *est bornée dans* E *et* $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|$.
3. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *et* $l_n \longrightarrow l$, *alors* $\langle l_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle l, x\rangle$.

Suites faiblement et fortement convergentes

Démonstration. 1. Soit $l \in E'$. Alors

$$|\langle l, x_n - x\rangle| \leq \|l\|' \|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $T_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on définit

$$T_n l = \langle l, x_n\rangle \longrightarrow \langle l, x\rangle = Tl,$$

car x_n tend faiblement vers x. Alors d'après le corollaire, $\sup \|T_n\| < \infty$, avec $T \in (E')' = E''$ et $\|T\|'' \leq \liminf \|x_n\|$, donc $|Tl| = |\langle l, x\rangle|$ par passage à la limite.

3.
$$\langle l_n, x_n \rangle - \langle l, x \rangle = \langle l, x_n - x \rangle + \langle l, x_n - x \rangle.$$

Or $\langle l, x_n - x \rangle \longrightarrow 0$, car $x_n \longrightarrow x$ et $\langle l, x_n - x \rangle \longrightarrow 0$, car $|\langle l_n - l, x_n \rangle| \leq \|l_n - l\| \, \|x_n\| \longrightarrow 0$.

$\square$