Analyse fonctionnelle 2

2023-2024

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES EVN

1.1 Les séries dans les EVN

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. 30-01-2024

Définition 1.1.1. On appelle **série de terme général** x_n dans E la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \text{ où } x_k \text{ est une suite d'éléments de } E.$$

La série est convergente (cv) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E.

Remarque 1.1.1. En général on note $\sum x_n$, la somme de la série est $S = \sum_{k=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k\geq 0} x_n$.

Définition 1.1.2. La série $\sum x_n$ est dite **normalement convergente** si la série $\sum \|x_n\|_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Théorème 1.1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de ***Banach***, alors toute série normalement convergente est convergente. De plus, on a

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} x_n\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_n\|.$$

Démonstration. La série $\sum \|x_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}$, donc de Cauchy : soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_n\|, n \in \mathbb{N}$ la somme partielle, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \text{ on a } |s_p - s_q| = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\| \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions

$$\|s_p - s_q\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} \right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\| \leq \varepsilon,$$

ce qui entraîne que S_n est de Cauchy dans E. Mais E est complet, donc il existe S tel que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Mais par définition $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k = s$, donc elle est convergente.

D'autre part, $\forall n$, on a que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|.$$

On a que $\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \right\|$ (par continuité), et $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$.

Par passage à la limite, on obtient le résultat demandé. □

1.2 Les espaces de Hilbert

Définition 1.2.1.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace. Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une **forme hermitienne** sur E si :
   (a) $\forall y \in E$, $x \in E \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;
   (b) $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.
2. Un **produit scalaire** sur E est une forme hermitienne définie positive :
$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0 \text{ et } \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E.$$
3. Un espace préhilbertien est un $\mathbb{C}$-espace muni d'un produit scalaire : (E, φ).

Remarque 1.2.1. $\varphi(x, y) = (x \mid y)$.

Comme conséquence : $\forall x \in E$, $\varphi^{1/2}(x, x) = (x|x)^{1/2}$ est une norme sur E (le vérifier en exercice).

Proposition 1.2.1 (Cauchy-Schwarz)**.** On rappelle que l'on a

$$\forall x, y \in E, |(x|y)| \leq \|x\|_E \|y\|_E$$

et on a égalité dans le cas où x, y sont colinéaires.

Un espace préhilbertien est un EVN, et donc un espace métrique avec la distance

$$\forall x, y \in E, d_E(x, y) = \|x - y\|_E = (x - y|x - y)_E^{1/2}.$$

Définition 1.2.2. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes sont continues :

1. $\forall y \in E, x \in E \longmapsto (x|y)$;
2. $\forall x \in E, y \in E \longmapsto (x|y)$.

Définition 1.2.3. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $(x \mid y) = 0$ (on note aussi $x \perp y$).
Plus généralement, soit $A \subset E$, $x \in E$ est orthogonal à A si

$$\forall y \in A, (x|y) = 0$$

ou encore si $A, B \subset E$, A est orthogonal à B si

$$\forall x \in A, \forall y \in B, (x \mid y) = 0.$$

En particulier, on notera par $A^\perp = \{x \in E, x \perp A\}$.

Exercice 2. Montrer que $\forall A \subset E, A^\perp$ est un sous-espace vectoriel. Montrer aussi que $A^\perp$ est un sous-espace fermé de E.

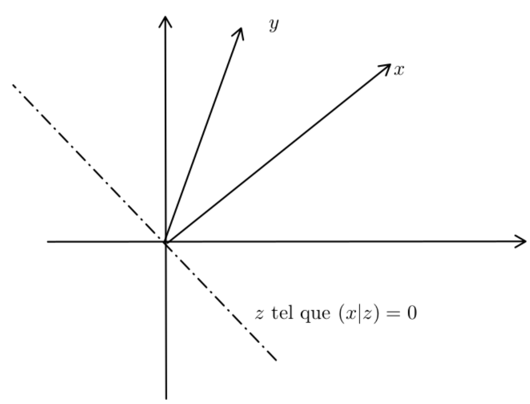

FIGURE 1.1 – Le produit scalaire et les orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple. Soit $E = \mathbb{C}^N$, alors $x, y \in E$, les composantes sont $i \in 1, \ldots, N$ telles que $x(i) \in \mathbb{C}, y(i) \in \mathbb{C}$.
On a le produit scalaire sur $\mathbb{C}^N$:

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{N} x(i)\overline{y(i)},$$

on déduit la norme associée. Il satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(x \mid y)| = \left|\sum_{i=1}^{N} x(i)\overline{y(i)}\right| \leq \|x\| \, \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x(i)|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y(i)|^2}.$$

1.3 Théorème de la projection orthogonale

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On rappelle que $C \subset \mathcal{H}$ est convexe si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Théorème 1.3.1. Dans ces conditions, soit $\mathbb{C}$ un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$. Alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique point $y_0 \in C$ tel que

$$\operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_{\mathcal{H}} = \|x - y_0\|.$$

et pour tout $y \in \mathbb{C}$, $\Re(x - y_0 \mid y - y_0) \leq 0$.
y_0 s'appelle la **projection orthogonale** de x sur $\mathbb{C}$.

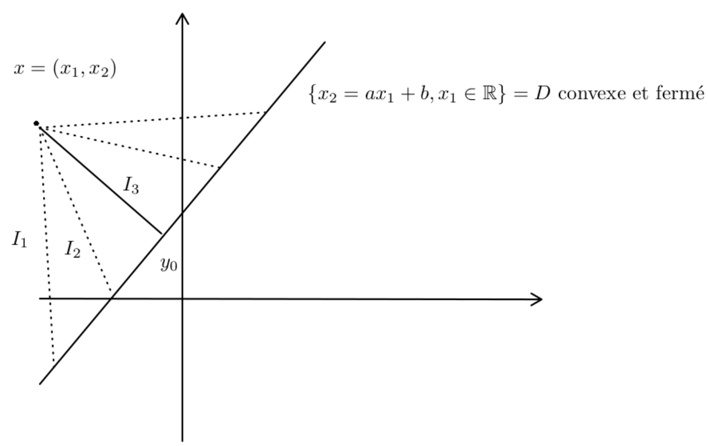

FIGURE 1.2 – Illustrtion du théorème de la projection orthogonale. I_3 est la plus petite distance.

Exercice 3. Soit F un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$.

Définition 1.3.1. Soit F un sous-espace fermé. On appelle **projection orthogonale** sur F l'application définie de la manière suivante : $\forall x \in \mathcal{H}, x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in F^{\perp}, x_1, x_2$ uniques :

$$P_F x = x_1 (P_{F^{\perp}} = x_2).$$

Proposition 1.3.1. $P_F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est linéaire et continue.

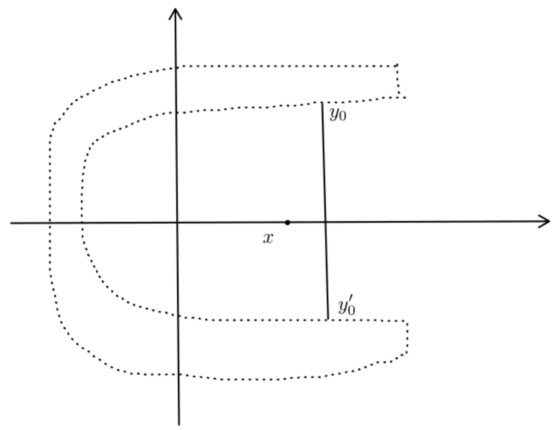

FIGURE 1.3 – Deux projections orthogonales. L'unicité est contredite.

Démonstration. On calcule :

$$\|P_F x\|^2 = (P_F x \mid P_F x) = (x_1 \mid x_1) = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 .$$

(théorème de Pythagore).
On a donc $\forall x \in \mathcal{H}, \|P_F x\| \leq \|x\|$. □

Remarque 1.3.1. Si $x \in F$, alors la projection orthogonale est $y_0 = x$.

Remarque 1.3.2. Ici $P_F x = x$, ce qui implique que $\|P_F x\| = \|x\| \leq \|P_F\| \|x\|$, donc $\|P_F\| \geq 1$ et donc $\|P_F\| = 1$.

Définition 1.3.2. Une partie $A \subset \mathcal{H}$ est **totale** si le plus petit sous-espace fermé contenant A est $\overline{\text{vect}\{A\}} = \mathcal{H}$.

Exercice 4. De manière générale, si $A \subset \mathcal{H}$, montrer que le plus petit sous-espace fermé contenant A est $(A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$. En déduire que A est totale si et seulement si $A^\perp = \{0_\mathcal{H}\}$.

Définition 1.3.3. $\mathcal{H}$ est **séparable** s'il admet une famille totale dénombrable.

Exercice 5. Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est séparable.

Dans ce cours, on considérera en général des espaces de Hilbert séparables.