Analyse fonctionnelle et distributions

Michel Rouleux

2023-2024

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

1.1 Rappels de topologie

J. Dieudonné 1 et 2.
Reed-Simon 1, 2 et 4.
Brézis, "Analyse fonctionnelle"

Soit X ensemble. Soit $(X, \mathscr{T})$ espace topologique où $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$.
$\mathscr{T}$ parcourt l'ensemble des voisinages de x où x est un point quelconque de X.

1.1.1 Axiomes

1. Soient $x \in X$ et V' voisinage de x. Si $V \supset V'$ alors V est un voisinage de X.
2. $\bigcap_{\text{finie}} V_i$ est un voisinage de x, $\bigcap_{\text{finie}} V_i \in \mathscr{T}$, mais $\bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon \neq \emptyset$ n'est pas un voisinage de 0.
3. $\bigcap_{i\in I} V_i$ est un voisinage de x.

Définition 1.1.1 (Ouvert)**.** Ω ouvert si et seulement si Ω est voisinage de chacun de ses points.

Exemple. $(-1, 1)$ ouvert tandis que $[-1, 1)$ non ouvert car -1 n'a pas de voisinage.

$V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est une base de voisinage pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. On peut définir axiomatiquement $\mathscr{T}$ à partir de ses ouverts.

Définition 1.1.2 (Fermé)**.** On dit que F est un fermé si et seulement si F^C est un ouvert.

1.1.2 Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques

Définition 1.1.3 (Espace métrique, distance)**.**
X est un ensemble, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ distance sur X si et seulement si :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;

Remarque. Si on a seulement $x = y \implies d(x, y) = 0$, alors d est un écart.

2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire). De ce fait, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Exemple. 1. Dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \|x - y\|$.

2. X ensemble. On définit d de la façon suivante :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 \text{ si } x = y \\ d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

Il s'agit de la distance triviale.
Si x, y, z distincts alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.1.3 Comparaison des topologies

Soient X un ensemble et $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ des topologies sur X.

Définition 1.1.4 (Plus fine)**.** On dit que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$ et on note $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$ si et seulement si $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.
On dit aussi que $\mathscr{T}'$ est plus forte que $\mathscr{T}$.

Remarque. Si $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$, il y a plus d'ouverts dans $\mathscr{T}'$ que dans $\mathscr{T}$ (idem pour les fermés).

Démonstration. Soit Ω ouvert dans X. On a $\Omega \in \mathscr{T} \implies \Omega \in \mathscr{T}'$.
Soit F un fermé dans X. On a $F \in \mathscr{T}$, mais $\Omega = F^C \in \mathscr{T} \implies F^C \in \mathscr{T}'$, donc $F \in \mathscr{T}'$. ♣

Formulations équivalentes

1. On suppose que $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$. Si $\forall x \in X$, U est un voisinage de x pour $\mathscr{T}$, alors U voisinage de x pour $\mathscr{T}'$, car si U est un ouvert de $\mathscr{T}$, alors U est un ouvert de $\mathscr{T}'$.
2. Pour l'application identité définie comme suit

$$id : (X, \mathscr{T}') \longrightarrow (X, \mathscr{T}),$$

on a $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$ si et seulement si id est continue.

Par exemple, prenons $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$. On prend $\mathscr{T}$ topologie de la convergence simple, i. e. f_n converge vers f simplement si $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \to f(x)$.

Ouverts de Ω

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{f \in X \mid \sup_{i=1,\dots,k} |f(a_i)| < \varepsilon\},$$

avec $a = a_0, \dots, a_k \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$.

$\Omega_{a,\varepsilon}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle) dans X.

Pour $f_0 \in X$, $\Omega_{a,\varepsilon} + f_0$ est une base de voisinage de f_0, car X est un espace vectoriel (on agit par translation).

On considère maintenant la topologie de la convergence uniforme $\mathscr{T}'$.

$\Omega_\varepsilon = \{f \in X, \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| < \varepsilon\}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle).

Proposition 1.1.1. $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$, ie $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.

Démonstration. Soit $\Omega_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$.

Si $f \in \Omega_\varepsilon$, alors

$$\forall x \in [0,1], |f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, |f(a_i)| < \varepsilon \text{ (car c'est vrai pour tout } x).$$

Donc Ω_ε est un voisinage de 0 dans $\mathscr{T}$. On a ainsi démontré que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$. ♣

On considère l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}^0$ avec la norme

$$\|f\|_0 = \sup|f(x)|$$

et l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\mathcal{C}^1$ avec la norme

$$\|f\|_1 = \sup|f(x)| + \sup|f'(x)|.$$

La topologie sur $\mathcal{C}^1$ est plus fine que celle sur $\mathcal{C}^0$.

Démonstration. On a pour tout f,

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1.$$

Ainsi si

$$\|f\|_1 < \varepsilon,$$

alors

$$\|f\|_0 < \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{f, \|f\|_1 < \varepsilon\} \subset \{f, \|f\|_0 < \varepsilon\}$.

Donc $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$.

On sait également que si U est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}$, alors U est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}'$. ♣

Topologie métrisable (exemples)

1. Topologie grossière $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie la moins fine.

Remarque. $\mathscr{T}' = \mathscr{P}(X)$ est la topologie la plus fine.

Vérifions si la topologie grossière est métrisable dans différents cas.

— Si $X = \{a\}$, on a $d(a,a) = 0$. Le seul voisinage de a est $X = \{a\}$. Donc $\mathscr{T}$ est métrisable.

— Supposons que $X = \{a, b\}$. Mais $\mathscr{T}$ n'est plus métrisable, avec $d(a, b) = 1$ (distance triviale). Raisonnons par l'absurde. Si $\mathscr{T}$ était métrisable, $\mathscr{T}$ devrait contenir un ouvert Ω tel que $a \in \Omega$ et $b \notin \Omega$. Or $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$, donc c'est impossible.

Pour $\mathscr{T}'$, on choisit la distance d telle que $d(x, y) = 0$ ou 1. Est-ce que $\mathscr{T}'$ est métrisable ?

2. Prenons $\mathscr{T}$ telle que $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.

   On suppose que X contient au moins deux éléments. Dans ce cas, $\mathscr{T}$ est une topologie sur X non métrisable, car si $d(a, b) = 1$, avec $b \neq a$, alors dans $\mathscr{T}$ il n'existe pas de boule ouverte qui contient $\{b\}$ sans contenir $\{a\}$.

3. Considérons $X = \{a, b\}$ muni de la topologie $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathscr{P}(X)$.

   On a $d(a, b) = 1$, car $a \neq b$.

   De ce fait :

   $\{a\}$ voisinage de a qui ne contient pas b ($\{a\} = \{x$ tel que $d(x, a) < 1\}$) ;

   $\{b\}$ voisinage de b qui ne contient pas a.

1.1.4 Espaces vectoriels topologiques

Dans le cas où $(X, \mathscr{T})$ est un espace vectoriel topologique, il suffit de connaître les voisinages de 0 et on agit par translation pour déterminer les voisinages de n'importe quel $x \in X$.

Définition 1.1.5 (Continuité)**.** Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques et $f : X \to Y$ une application. On considère :

$$\begin{gathered}(U_a)_{a\in A} \text{ voisinage de 0 dans } X\\(V_b)_{b\in B} \text{ voisinage de 0 dans } Y\end{gathered}$$

f est continue si pour tout $V = V_b + f(x_0)$ dans Y, il existe $U = \bigcap_{\text{finie}}(U_a + x_0)$ voisinage de x dans X tel que $x \in U \implies f(x) \in V$.

Définition 1.1.6 (Norme)**.** $\|\cdot\|$ est une norme sur X si

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation) ;
2. $\|\lambda x\| = |l|\|x\|$ (absolue homogénéité) ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Cas particulier : X normé De cette norme, on construit la distance d telle que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Voisinages de 0.
$(U_a) = B(0, a)$
$A = \mathbb{R}^+$.

— $f : X \to Y$ continue en x_0, $\forall V = V_b + f(x_0)$, $\exists U = B(0, \delta) + x_0, f(U) \subset V$.

— X, Y EVN.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(0, \delta) + x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

15-09-2023

1.2 Semi-normes et espaces localement convexes

1.2.1 Semi-normes sur X espace vectoriel

Définition 1.2.1 (Semi-norme)**.** L'application $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ est une semi-norme si :

1. $\rho(0) = 0$;
2. $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$;
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

X est un espace vectoriel $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque. ⚠ On n'a pas forcément $\rho(x) = 0 \implies x = 0$.

Exemple. 1. Si ρ est une norme, c'est aussi une semi-norme.

2. $X = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)). On prend $a = (a_0, \ldots, a_k) \subset [0, 1]$. On définit

$$\rho_a(f) = \sup_{0 \leq i \leq k} |f(a_i)|.$$

3. Topologie faible. X est un espace vectoriel et X' est son dual (espace contenant les formes linéaires sur X).
   Soit l une forme linéaire dans X'. Alors

$$p(x) = |\langle l, x\rangle|.$$

Définition 1.2.2 (Famille de semi-normes séparée)**.** Soit $(\rho_a)_{a \in A}$ une famille de semi-normes. On dit que $(\rho_a)_{a \in A}$ sépare les points (ou est séparée) si et seulement si

$$\forall a \in A, \rho_a(x) = 0 \implies x = 0.$$

Définition 1.2.3 (Espace localement convexe (ELC))**.** L'espace vectoriel topologique X est un **espace localement convexe** si et seulement si X est **muni d'une famille de semi-normes qui séparent les points**.

Proposition 1.2.1. Si X est un espace localement convexe, alors X est un espace vectoriel topologique pour la topologie définie par ρ_a.

Démonstration. On note $\mathscr{T}$ la topologie définie par la famille de semi-normes $(\rho_a)_{a \in A}$.

Remarque (Personnelle)**.** On cherche à montrer que les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ forment une topologie. On va vérifier les axiomes de topologie.

Dans ce cas, les ouverts $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ sont $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{a,\varepsilon}, a \in A, \varepsilon > 0$ définis ci-dessous :

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

$\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ une base de voisinages de 0.
Les voisinages de x sont donnés par translation :

$$x + \mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x + y, y \in \mathcal{O}_{a,\varepsilon}\}.$$

On montre facilement que $\bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$ et $\bigcup_{\text{quelconque}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$. ♣

Proposition 1.2.2. $\mathscr{T}$ est la topologie la moins fine sur X qui rend continues

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (\lambda, x) \to \lambda x.$$

Il y a donc une compatibilité avec la structure des espaces vectoriels.

Démonstration.
1. $\mathscr{T}$ rend continues les deux opérations de X. On a en effet

$$\rho_a(x + y) \leq \rho_a(x) + \rho_a(y).$$

   Il suffit de prendre $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient $\rho_a(x + y) < \varepsilon$.
   On a $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ et on démontre ce résultat par analogie.
2. La moins fine (en exercice).

♣

Théorème 1.2.1. La topologie de X espace localement convexe est Hausdorff, i. e. elle sépare les points.

Définition 1.2.4 (Hausdorff)**.** $(X, \mathscr{T})$ est de Hausdorff si et seulement si pour tout $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, il existe $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ voisinages de x et de y tels que

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset.$$

Exemple. On prend $X = \{a, b\}, \mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. On a $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Donc $(X, \mathscr{T})$ est séparée.

Démonstration du théorème 1.2.1. Par contraposée, on prend $y \neq 0$ et $x = 0$.
Si X est un espace localement convexe, alors il existe $a \in A$ tel que $\rho_a(y) = \varepsilon > 0$.
On pose

$$V_x = \left\{z, \rho_a(z) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \text{ et } V_y = \left\{z, \rho(z - y) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{1.1}$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient $V_x \cap V_y = \emptyset$, car

$$\rho_a(x-y) > |\rho_a(x) - \rho_a(y)| > \left|\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon\right| = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

♣

1.3 Pourquoi "localement convexe" ?

Définition 1.3.1. Soit X un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

1. On dit que $C \subset X$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1], z = tx + (1-t)y \in C.$$

2. On dit que $B \subset X$ est balancé (sur $\mathbb{R}$) ou cerclé (sur $\mathbb{C}$) si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \implies \forall x \in B, \lambda x \in B.$$

3. On dit que $E \subset X$ est équilibré si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \implies \forall x \in E, \lambda x \in E.$$

4. On dit que A est absorbant si

$$\bigcup_{t>0} tA = X.$$

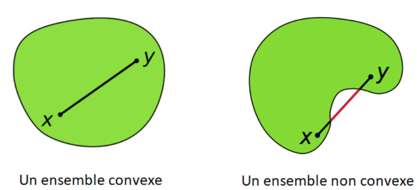

FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

Exemple. 1. Si X est un espace vectoriel normé, $A = B(0,1)$ et $x \in X$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$. Alors $x \in \|x\| B(0,1)$.

2. Si $0 \in C$ convexe, alors C est équilibré si et seulement si C est balancé.

Démonstration. On suppose que C est balancé. Pour $x \in C \implies -x \in C$, donc $[-x, x] \in C$ par convexité. ♣

Théorème 1.3.1. Soit X un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un espace localement convexe (réel ou complexe) ;
2. Il existe une base de voisinages de $0 \in X$ qui sont convexes, balancés (cerclés), absorbants.

19-09-2023

Démonstration. 1. Si X est un espace localement convexe, alors une base de voisinages de 0 est donnée par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

Les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ sont convexes, balancés et absorbants (TD).

2. On utilise la jauge de Minkowski 1.3.2.
On pose

$$\rho_C(x) = \mu_C(x).$$

et on vérifie que ρ_C est une semi-norme. Grâce au lemme 1.3, on obtient les résultats suivants :

(a) $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$, car C est convexe ;

(b) $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$ si $\lambda > 0$ et $\rho_C(\lambda x) = |\lambda| \rho_C(x)$, car C est cerclé.
X muni de ρ_C est un espace localement convexe.

♣

Définition 1.3.2 (Jauge de Minkowski)**.** Soit X espace vectoriel réel ou complexe. On suppose que C tel que $0 \in C$ est absorbant. Alors la jauge de Minkowski est définie comme suit :

$$\mu_C(x) = \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha C\}.$$

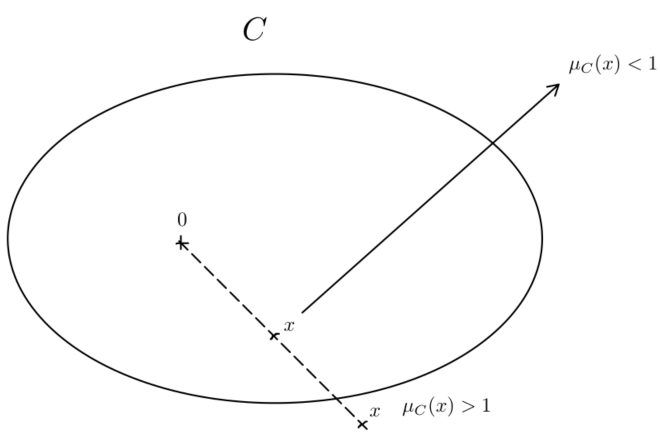

FIGURE 1.2 – La jauge de Minkowski

Remarque. Si C est absorbant, alors $\forall x \in X$, $\mu_C(x) < \infty$.

Lemme. Soit $C \subset X$ absorbant tel que $0 \in C$.

1. Si $\lambda \geq 0$, $\mu_C(\lambda x) = \lambda \mu_C(x)$;
2. Si C est convexe, alors $\mu_C(x+y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$;
3. Si C est cerclé, alors $\mu_C(\lambda x) = |\lambda| \mu_C(x)$;
4. $\{x \in X, \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X, \mu_C(x) \leq 1\}$.

1.3.1 Théorème de Hahn-Banach

Il y a la forme analytique et la forme géométrique de ce théorème.

Théorème 1.3.2 (De Hahn-Banach, forme analytique)**.** Pour simplifier, on prend X espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

- ⋆ $\forall x \in X, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$;
- ⋆ $\forall x, y \in X$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Soient Y un sous espace vectoriel de X et l une forme linéaire sur Y qui vérifie

$$\forall x \in Y, l(x) \leq p(x), \forall x \in Y.$$

Alors (prolongement) il existe L forme linéaire sur X telle que $L_{|Y} = l$ **et**

$$\forall x \in X, L(x) \leq p(x).$$

On l'applique aux espaces vectoriels normés, espaces localement convexes,...

Théorème 1.3.3 (Norme sur un espace dual)**.** Soit X espace vectoriel normé, X' formes linéaires continues sur X, X' est un espace vectoriel normé. La norme sur X' est définie de la façon suivante :

$$\|L\|_{X'} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |\langle L, x\rangle| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|\langle L, x\rangle|}{\|x\|}.$$

Exercice 2. Montrer que $\|\cdot\|_{X'}$ est une norme.

Si X est un espace vectoriel normé complet (de Banach), alors X' l'est aussi.

Corollaire (Prolongement isométrique de l sur Y)**.** Soit X espace vectoriel normé, $Y \subset X$ sous espace vectoriel de X et $l \in Y'$ avec

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|y\|\leq 1 \\ y \in Y}} |\langle l, y\rangle|.$$

Alors il existe un prolongement L de l de même norme

$$\sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} |\langle l, x\rangle| = \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\leq 1}} |\langle l, y\rangle|.$$

Démonstration. Par le théorème de Hahn-Banach, on pose p telle que $p(x) = \|l\|_{Y'}\|x\|$ (l'application définie ainsi vérifie les propriétés de p nécessaires à l'application du théorème).

Par Hahn-Banach, il existe L une forme linéaire sur X telle que

$$L(x) = \langle L, x\rangle \leq p(x) = \|l\|_{Y'}\|x\|.$$

Mais

$$\langle L, -x\rangle \leq \|l\|_{Y'}\| - x\|,$$

donc

$$|\langle L, x\rangle| \leq \|l\|_{Y'}\|x\|.$$

Ainsi, en divisant par $\|x\|$, on obtient le résultat suivant :

$$\forall x \in X, \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'}.$$

Or si on prend $x \in Y$,

$$\left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'} = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right|.$$

Comme $Y \subset X$ (ce qui entraîne que $\sup_{y \in Y\setminus\{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right| \leq \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right|$), on a donc égalité, d'où l'isométrie. ♣

Corollaire. $\forall x_0 \in X$ espace vectoriel réel, il existe $L_0 \in X', \|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X$.

Démonstration. $Y = \mathbb{R}x_0$. Soit $l(tx_0) \overset{\text{déf}}{=} t\|x_0\|^2$ forme linéaire continue sur Y.

Alors, en posant $t = 1$, on obtient

$$\|l\|_{Y'} = \|x_0\|$$

et, par le théorème de Hahn-Banach,

$$\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

♣

Exercice 3. Traduire Hahn-Banach dans le cas où X est un espace localement convexe.

Théorème 1.3.4 (De Hahn-Banach, forme géométrique)**.** Soit X espace vectoriel normé (ou espace localement convexe). Soient $A, B \subset X$ convexes et disjoints.

1. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine (d'équation $\langle L, x\rangle =$ constante) $\mathscr{H}$ qui sépare au sens large A et B.
2. Si A est fermé, B est compact, alors il existe $\mathscr{H}$ hyperplan qui sépare A et B au sens strict.

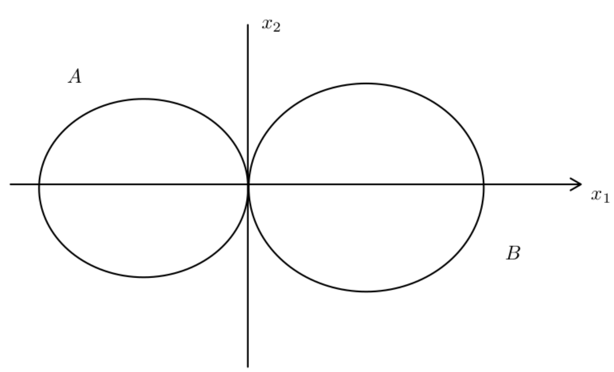

FIGURE 1.3 – $A = \{x_1 < 0\}, B = \{x_2 \geq 0\}, \mathscr{H} = \{x_1 = 0\}$.

1.4 Espaces de Fréchet, topologies faible et faible *

1.4.1 Topologies définies par une distance

26-09-2023

On rappelle la définition 1.1.3.

Définition 1.4.1 (Distances équivalentes)**.** On dit que d_1 est équivalente à d_2 si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y).$$

$d_1 \sim d_2 \implies (X, d_1) \simeq (X, d_2)$, mais la réciproque est fausse.

Exemple. On prend un espace métrique (X, d) avec les distances

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta'(x, y) = \inf(1, d(x, y)).$$

Ces distances sont équivalentes entre elles.

Démonstration.

1. Montrons que $(X, d) \sim (X, \delta')$. On remarque d'abord que

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq d(x, y),$$

ce qui veut dire que $(X, d) \prec (X, \delta)$ (car si $\mathcal{O}$ est un ouvert pour δ, alors il le sera forcément pour d).
Prenons

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}. \tag{1.2}$$

La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$. En effet, montrons qu'il existe $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}$.
On a

$$\frac{t}{1 + t} = s \implies t = ts + s \implies t = \frac{s}{1 - s}.$$

Donc $d(x, y) = \frac{\delta(x,y)}{1-\delta(x,y)}$. Donc si $d(x, y) < \varepsilon$, alors $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Donc $(X, \delta) \prec (X, d)$.

2. Montrons que $\delta \sim \delta'$.
On a

$$\delta = \frac{d}{1 + d} \leq \begin{cases} 1 \\ \delta. \end{cases}$$

En effet, cela vient du fait que $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \underset{d(x,y) \to \infty}{\longrightarrow} 1$. Donc

$$\delta(x, y) \leq \delta'(x, y).$$

Mais $\delta' \leq 2\delta$. En effet, on distingue deux cas :

(a) Si $\delta \leq 1$ et $\delta' = d$, alors $d \leq 2d$,

(b) Si $\delta \geq 1$ et $\delta' = 1,$ alors $1 \leq 2d$.

3. Montrons que δ est une distance.

   (a) Montrons l'inégalité triangulaire. Si $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, montrons que $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$.
   Est-ce que $f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)) + f(d(z,y))$, avec f définie dans 1.2 ?

      i. f est croissante, donc $f(d(x,y)) \leq f[d(x,z) + d(z,y)]$. Il suffit de voir que $f(t) \leq f(u) + f(v)$.

      ii. Montrons la sous-additivité de f. Posons

$$v \mapsto \varphi(v) = f(u+v) - f(u) - f(v).$$

      On a $\varphi(0) = 0$, car $f(0) = 0$ et $\varphi(v) = f'(u+v) - f'(v) < 0$, car f est une fonction croissante.

♣

Sous quelles conditions un espace localement convexe est métrisable ?

On remarque par exemple que $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus généralement, les topologies faibles ne sont pas métrisables, sauf si on travaille en dimension finie. Par ailleurs, X muni de la topologie grossière n'est pas métrisable (non séparée).

Proposition 1.4.1. Soit X un espace localement convexe (donc séparé). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. X est métrisable.
2. Il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans X, et ce pour tout $x \in X$.
3. La topologie de X est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.

Démonstration. 1. (1) $\Longrightarrow$ (2). La topologie sur X est équivalente à (X,d). Soit (X,d) un espace métrique. Il suffit de poser

$$\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} = \left\{x \mid d(x,0) < \frac{1}{n}\right\} \text{ ($\mathbb{R}$ est archimédien).}$$

   Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n$ tel que $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} \subset \mathcal{O}_\varepsilon$. Donc $x + \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}$ est une base dénombrable de voisinages de x.

2. (2) $\Longrightarrow$ (3). On sait que $\mathscr{T}$ topologie de X est donnée par une famille de semi-normes. Les voisinages de 0 dans X sont donnés par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon,a_i}, \text{ avec } i \in \{1,\ldots,n\}.$$

   On rappelle que $\mathcal{O}_{\varepsilon,a_i} = \{x \mid \rho_{a_i} < \varepsilon\}$.
   On peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On sait qu'il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans X. Soit U_n une base de voisinages dénombrable de 0. On pose

$$\rho_n(x) = \mu_{U_n}(x).$$

   On prend les U_n convexes, balancés, absorbants comme dans le théorème 1.3.1 (c'est possible, car X est un espace localement convexe).

3. (3) $\Longrightarrow$ (1).

(a) Soit (ρ_n) une famille dénombrable de semi-normes sur X. On pose

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}.$$

Montrons que $(X, \mathrm{ELC}) \prec (X, d)$. Soit $U \in \mathscr{T}$ (la topologie ELC). On se ramène aux voisinages de 0. On a

$$U = \bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{\varepsilon,a}, a \in A.$$

Comme il existe une base dénombrable de voisinages, on peut choisir

$$U_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{N} = \{x \mid \rho_j(x-0) < \varepsilon\}, \text{ avec } A = \mathbb{N}.$$

Ce voisinage est inclus dans $\{x \mid \sum \rho_j(x-0) \leq N\varepsilon\}$.
Montrons que U est un voisinage de x pour la topologie métrique (X, d).
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $d(x,0) = \left(\sum_1^N + \sum_{N+1}^\infty\right) \frac{\rho_n}{1+\rho_n}$. Or N est tel que

$$\sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \implies \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n}{1+\rho_n} < \varepsilon.$$

De plus,

$$d(x,y) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n}{1+d_n} < \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} d_n(x,y). \tag{1.3}$$

Or $\rho_n(x-y) < \varepsilon$, car $x \in y + U_\varepsilon$.
Donc 1.3 devient

$$d(x,y) \leq \varepsilon + N\varepsilon \text{ avec } N \text{ fixé.}$$

Donc $\mathscr{T} \prec (X, d)$.

(b) Montrons que $(X, d) \prec \mathscr{T}$. On doit majorer $\rho_m(x-y)$.
Or

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)} \geq 2^{-m} \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)}.$$

Et

$$2^m d(x,y) \geq \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)} \geq f(t).$$

Donc on a $\rho_m(x,y) \leq g(2^m d(x,y))$, où g est la réciproque de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

♣

Proposition 1.4.2. Soit X un espace localement convexe qui vérifie l'une des propriétés énoncées dans la proposition 1.4.1 (i. e. métrisable). On note la topologie de X ELC par $\mathscr{T}$. Alors X est complet pour $\mathscr{T}$ si et seulement si (X, d) est complet.

Démonstration. Cette proposition se démontre exactement comme 1.4.1. ♣

Définition 1.4.2. Soit X un espace localement convexe. On dit que X est un **espace de Fréchet** si X est **métrisable et complet**.

Exemple.

1. *Les espaces localement convexes qui ne sont pas des Fréchet.*
   (a) *Non métrisables.* $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple, les topologies faibles, ...
2. *Les espaces localement convexes qui sont des Fréchet.* Les espaces de Banach, par exemple $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $\mathcal{C}_0^\infty(K)$, ...

1.4.2 Espace de Schwarz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \iff \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} \left|x^\alpha D_\varphi^\beta\right| < \infty$.
Montrons que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est complet. On va regarder $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \ldots$

1. $\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon$, donc $\varphi_p \longrightarrow \varphi$, donc
$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| < \varepsilon.$$
En particulier pour tout $K \subset \mathbb{R}$, φ_n est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(K)$. Or $\mathcal{C}^0(K)$ est complet, donc $\varphi_n \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} \varphi$. Comme K est arbitraire, elle converge localement sur tout $\mathbb{R}$. On a
$$\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon,$$
donc
$$\rho_{0,0}(\varphi - \varphi_p) < \varepsilon.$$
Donc φ_p converge pour $\rho_{0,0}$.
2. On a besoin de rappeler le lemme suivant :

Lemme. Si $\varphi' \longrightarrow \psi$ uniformément et $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ simplement, alors $\psi = \varphi'$.

1.4.3 Topologie forte et topologie faible sur les espaces de Banach

10-10-2023 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (réel ou complexe) et $(E', \|\cdot\|')$ son dual topologique. On rappelle que
$$E' = \{l \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R}), \exists C > 0, \forall x \in E, |\langle l, x\rangle| \leq C \|x\|^2\},$$
avec la norme sur le dual définie dans 1.3.3.
$(E', \|\cdot\|')$ est un espace de Banach, un cas particulier de $\mathscr{L}(E,F)$, avec pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$,
$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F\,.$$
On affaiblit $(E, \|\cdot\|)$. Alors $\sigma(E,E')$ est la topologie la moins fine qui rend continue toutes les formes linéaires sur E. $X \sim \sigma(E,E')$ est muni des semi-normes $|\langle l, x\rangle| = \rho_l(x)$. Un voisinage de 0 est défini de la manière suivante :
$$\mathcal{O}_{\underline{l},\varepsilon} = \{x \in E : \sup_{1\leq i\leq n} \langle l_i, x\rangle < \varepsilon\}, \underline{l} = (l_1, \ldots, l_n).$$

1.4.4 Comparaison des topologies $(E, \|\cdot\|)$ et $\sigma(E, E')$

Lemme. Soit E un espace de Banach. Alors la norme définie

$$x = \sup_{\substack{l \in E' \\ \|l\|' \leq 1}} |\langle l, x\rangle| = \langle l_0, x\rangle.$$

est telle que le sup est atteint. On a sup = max.

Démonstration. On a $x \neq 0$ par la définition de $\|\cdot\|'$. Alors

$$\left|\left\langle l, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \|l\|' \leq 1.$$

Alors

$$|\langle l, x\rangle| \leq \|x\| \text{ pour tout } l \in E' \text{ tel que } \|l\|' \leq 1.$$

Soit x_0 et F tel que $F = \mathbb{R}x_0$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, l_0(\lambda x_0) = \lambda$ et $\|l_0\| = \|x_0\|$. Par Hahn-Banach, on peut prolonger l_0 en L_0 sur tout l'espace de Banach. ♣

Proposition 1.4.3.

$$(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E').$$

Donc $X \sim \sigma(E, E')$ est un espace localement convexe.

Démonstration. On a

$$\rho_l(x) = |\langle l, x\rangle| \leq \|l\|' \|x\| .$$

♣

Autre démonstration. Montrons que $\mathcal{O}_{\underline{l},\varepsilon}$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$, i. e. $\|x\| < \delta$. On prend n formes linéaires $l_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ et on considère

$$\|x\| = \sup_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x\rangle| .$$

Or $|\langle l_i, x\rangle| < \varepsilon$ ... (à suivre). ♣

Démonstration. Montrons que $\sigma(E, E')$ est séparé. Soient x_1, x_2 distincts. Montrons qu'il existe $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\sigma(E, E')$ tels que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

Par le théorème de Hahn-Banach 1.3.4, pour $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$ compacts et convexes, pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a

$$\langle l, x\rangle < \alpha < \langle l, y\rangle.$$

Donc

$$\langle l, x_1\rangle < \alpha < \langle l, x_2\rangle.$$

On a $x_1 \in \mathcal{O}^1_{\alpha,l} = \{x : \langle l, x\rangle < \alpha\}$ et $\mathcal{O}^2_{\alpha,l} = \{y : \langle l, y\rangle > \alpha\}$, ces ouverts séparent x_1 et x_2. ♣

Théorème 1.4.1. $(E, \|\cdot\|)$ est strictement plus fine que $\sigma(E, E')$ sauf en dimension finie.

Démonstration. On considère $S = \{\|x\| = 1\}$. Alors $S = \overline{S}$, son adhérence.

Soit x_0 de norme plus petite que 1. Montrons que pour tout V voisinage de 0 dans $\mathscr{T}$, $V \cap S \neq \emptyset$. On a

$$V = \{x : |\langle l_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}.$$

Comme $\dim(E) = \infty$, il existe $y_0 \neq 0$ tel que $\langle l_i, y_0\rangle = 0, \forall i$. On a

$$g(t) = \|x_0 + ty_0\|.$$

On a $g(0) = \|x_0\| < 1$ et $g(\infty) = +\infty$. La fonction g est continue, donc il existe $t_0 \in (0, \infty)$ tel que $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$. Donc $x_0 + t_0 y_0 \in S$ et $x_0 + t_0 y_0 \in V$, car

$$|\langle l_i, (x_0 + t_0 y_0) - x_0\rangle| = |\langle l_i, t_0 y_0\rangle| = |t_0 \langle l_i, y_0\rangle| = 0 < \varepsilon.$$

♣

Remarque. $\forall t \in \mathbb{R}, \langle l_i, x_0 + ty_0\rangle = 0$. Alors V contient toute une droite.

Remarque. Pour E Banach séparable, B_E boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est métrisable pour $\sigma(E, E')$.

Si E est réfléxif (c'est-à-dire que l'injection naturelle dans son bidual est surjective), alors $B_E = \{\|x\| \leq 1\}$ est un espace métrique compact pour $\mathcal{O}(E, E')$.

Exemple (Wikipédia)**.** On considère la convergence forte et la convergence faible dans l'espace L^2 (qui est un espace de Hilbert d'après 2.2.5). La convergence forte de ψ_n vers un élément $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ signifie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_n - \psi|^2 \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La notion de convergence forte dans L^2 correspond à celle de la norme dans L^2. En revanche, pour que la suite ψ_n converge faiblement, il suffit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_n} f d\mu \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi} f d\mu$$

pour toute fonction $f \in L^2$. Par exemple, dans $L^2((0, 2\pi))$, la suite de fonctions

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$$

forme une base orthonormée. La limite forte de ψ_n n'existe pas. Mais par le lemme de Riemann-Lebesgue, la limite faible existe et vaut 0.

1.4.5 Théorème de Banach-Steinhaus, suites faiblement et fortement convergentes

Théorème 1.4.2. Soient E, F espaces de Banach et $(T_a)_{a\in A} \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que

$$\forall x \in E, \sup_{a\in A} \|T_a x\|_F < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{a\in A} \|T_a\| < +\infty \text{ (bornée en norme)},$$

i. e. $\exists C > 0, \forall x \in E, \forall \alpha \in A, \|T_\alpha(x)\| \leq C\,\|x\|$.

Corollaire. Soit $T_n \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $\|T_n\| < +\infty$ avec $\forall x \in E, T_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in F$. On note $y = Tx$. Alors $T \in \mathscr{L}(E,F)$ et $T = \liminf T_n$.

Démonstration. Montrons que T_n est linéaire. En effet,

$$T_n(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T_n(x) + \lambda' T_n(x').$$

Par passage à la limite, on obtient $T(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T(x) + \lambda' T(x')$.

Montrons l'autre partie du corollaire. Par Banach-Steinhaus, si on considère $A = \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $T_n x$ est convergente, donc bornée, i. e. $\|T_n x\| < \infty$, donc $\sup_n T_n < C$ comme $\|T_n x\| \leq \|T_n\|\,\|x\|$.

Par passage à la limite, on obtient $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$, avec $C = \liminf \|T_n\|$. ♣

Définition 1.4.3. Soit E espace de Banach. $B \subset E$ est bornée si et seulement si

$$\exists C \geq 0, \forall x \in B, \|x\| \leq C.$$

Corollaire. $B \subset E$ est bornée si et seulement si $\forall l \in E', l(B) \subset \mathbb{R}$ est borné.

1.4.6 Suites faiblement et fortement convergentes

Définition 1.4.4 (Suite fortement convergente)**.** Soit x_n une suite de E. On dit que x_n est fortement convergente lorsque $x_n \longrightarrow x \iff \|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

Définition 1.4.5 (Suite faiblement convergente)**.** Soit x_n une suite de E. On dit que x_n est faiblement convergente lorsque $x_n \longrightarrow x \iff \forall l \in E', \langle l, x_n\rangle \longrightarrow \langle l, x\rangle$.

On note alors $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ (avec *weak* qui signifie faible en anglais) ou $x_n \rightharpoonup x$.

Corollaire.

1. Si $x_n \longrightarrow x$ dans $(E, \|\cdot\|)$, alors $x_n \longrightarrow x$ dans $\sigma(E, E')$.
2. Si $x_n \longrightarrow x$, alors x_n est bornée dans E et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|$.
3. Si $x_n \longrightarrow x$ et $l_n \longrightarrow l$, alors $\langle l_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle l, x\rangle$.

Démonstration.

1. Soit $l \in E'$. Alors
$$|\langle l, x_n - x\rangle| \leq \|l\|' \|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. $T_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on définit
$$T_n l = \langle l, x_n\rangle \longrightarrow \langle l, x\rangle = Tl,$$
car x_n tend faiblement vers x. Alors d'après le corollaire, $\sup \|T_n\| < \infty$, avec $T \in (E')' = E''$ et $\|T\|'' \leq \liminf \|x_n\|$, donc $|Tl| = |\langle l, x\rangle|$ par passage à la limite.
3. $$\langle l_n, x_n\rangle - \langle l, x\rangle = \langle l, x_n - x\rangle + \langle l, x_n - x\rangle.$$
Or $\langle l, x_n - x\rangle \longrightarrow 0$, car $x_n \longrightarrow x$ et $\langle l, x_n - x\rangle \longrightarrow 0$, car $|\langle l_n - l, x_n\rangle| \leq \|l_n - l\| \|x_n\| \longrightarrow 0$.

♣

1.4.7 Topologie faible $*$

13-10-2023 On considère E espace de Banach avec $(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E')$. On construit la topologie $*\sigma(E', E)$ une topologie sur E'.

La topologie forte sur $E' = F$ est donnée par la norme
$$\|l\|' = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle l, x\rangle|.$$

Sur E, on a aussi $\sigma(F, F') = \sigma(E', E'')$. Si $E = E''$ (i. e. E est réfléxif), alors la topologie $\sigma(E', E'')$ se confond avec la topologie faible $\sigma(E, E')$. Par contre, si E s'injecte dans E'', on a besoin de définir une autre topologie $*\sigma(E', E)$ moins fine que $\sigma(E', E'')$.

Proposition 1.4.4. Il existe une isométrie $J : E \hookrightarrow E''$.

Démonstration. On définit une application $J : E \longrightarrow E''$ telle que
$$\langle Jx, x'\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle x', x\rangle.$$

Montrons que $\|Jx\|' = \|x\|$.

On a besoin d'introduire le résultat suivant :

Lemme.
$$\|x\| = \sup_{\|l\|'\leq 1} |\langle l, x\rangle| = \max_{\|l\|'\leq 1} |\langle l, x\rangle|.$$

Donc $\|Jx\| = \|x\|$ en prenant
$$\sup_{\substack{x'\in E'\\ \|x'\|\leq 1}} |\langle x', x\rangle| = \|x\|.$$

♣

Remarque. J n'est pas unitaire (non surjectif si E n'est pas réfléxif).

Exemple. On considère $E = L^1$. Soit $f \in L^1$, alors $Jf \in L^\infty$ et on a :

$$\langle Jf, g\rangle = \langle g, f\rangle = \int g(x)f(x)dx \ (f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}).$$

Mais $g(0)$ ne peut pas s'écrire comme une intégrale $\int g(x)f(x)dx, \forall f \in L^1$ si $g \in C_0^0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty$.

Proposition 1.4.5. $*\sigma(E', E)$ est séparée.

Démonstration. Soient $l_1, l_2 \in E'$ tels que $l_1 \neq l_2$, alors il existe $x \in E$ tel que $l_1(x) \neq l_2(x)$, donc

$$\langle l_1, x\rangle \neq \langle l_2, x\rangle,$$

ce qui implique que $\langle l_1, x\rangle < \alpha < \langle l_2, x\rangle$.
On a $\mathcal{O}_1 = \{l \in E' : \langle l, x\rangle < \alpha\}$ ouvert de E' et $\mathcal{O}_2 = \{l \in E', \langle l, x\rangle > \alpha\}$. ♣

Remarque. Pour x fixé, l'application $l \longmapsto |\langle l, x\rangle|$ semi-norme de E'.

Proposition 1.4.6 (Autres propriétés)**.** $*\sigma(E', E)$ n'est pas métrisable.

Remarque. E est séparable et réfléxif si et seulement si E' est séparable et réfléxif.

Théorème 1.4.3. Si E est un Banach séparable, alors la boule unité fermée

$$B_E = \{\|l\| \leq 1\}$$

est métrisable pour $*\sigma$.

Proposition 1.4.7. Soit $\xi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $(\xi \in E'')$. Si ξ est continue pour $*\sigma(E, E')$, il existe $x \in E, \xi = Jx$ et

$$\langle \xi, l\rangle = \langle l, x\rangle.$$

Théorème 1.4.4 (De représentation de Riecz)**.** Si $\xi \in \mathscr{H}' = \mathscr{H}$, alors

$$\forall l \in \mathscr{H}, \langle \xi, l \rangle = \langle l, x \rangle.$$

CHAPITRE 2

THÉORIE DE DISTRIBUTIONS

La théorie de distributions utilise une grande variété des fonctions test. 17-10-2023

Ainsi une mesure de Radon μ sur un espace localement compact Ω (par exemple un ouvert de $\mathbb{R}^d$) est une distribution d'ordre 0 agissant $\mathcal{C}_0^0$ (noté encore $\mathcal{K}(\Omega)$) notamment par

$$\langle \mu, f \rangle = \int_\Omega f(x) d\mu(x).$$

L'exemple le plus couramment utilisé d'une distribution d'ordre 0 est la mesure de Dirac δ_{x_0}.

Sur $\Omega = \mathbb{R}^d$, il suffit de prendre l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui est un espace de Fréchet. Par contre si Ω est un ouvert borné, il y a des problèmes sur les bords de Ω.

Les distributions d'ordre 1 agissent quant à elles par $\langle \delta'_{x_0}, f \rangle = -f'(x_0)$ dans $\mathcal{C}_0^1$ qui ne sont ni des espaces de Banach, ni des espaces de Fréchet. On choisit généralement $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$.

Les espaces fonctionnels sont rangés en deux catégories :

— Les espaces de Lebesgue ;

— Les espaces de fonctions différentiables.

⚠

2.1 Espaces de Lebesgue

2.1.1 Mesure de Lebesgue

Il est important de rappeler la notion d'espace mesuré.

Définition 2.1.1 (Rappel : tribu)**.** Soit X un ensemble. On dit qu'une collection d'ensembles $\mathcal{T}$ est une tribu si

1. $X \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors $A^C \in \mathcal{T}$;
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{T}$, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un espace mesurable.

Remarque. $\mathcal{T}$ est aussi stable par intersection dénombrable, l'intersection étant complémentaire à la réunion...

Définition 2.1.2 (Mesure)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On dit qu'une application $\mu : X \longrightarrow [0, \infty)$ est une mesure si :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Pour toute suite (A_n) de $\mathcal{T}$ disjointe, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exemple. Pour $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne engendrée par les pavés $\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)$, avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. On peut aussi l'engendrer par les "quadrants" $\prod_{i=1}^{d}[a_i, \infty)$.

La mesure de Lebesgue se calcule comme suit. Si $d = 1$, alors $\mu([a, b)) = b - a$. Pour les pavés, on aura :

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i).$$

Elle se caractérise par le fait d'être stable par translation.

Pour avoir une théorie cohérente, il faut compléter $B(R^d) \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}$ (la tribu borélienne) en ajoutant des ensembles négligeables. Ainsi $\overline{\mathcal{T}}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{T}$ et les ensembles négligeables.

Définition 2.1.3. $A \in \mathbb{R}^d$, i. e. A est mesurable si et seulement si $A \in \overline{\mathcal{T}}$.

Remarque. A toute fin utile, on considérera que tous les ensemble sont mesurables.

Comment mesurer les fonctions $\mu(F)$?
On peut utiliser :
— L'intégrale de Riemann ;
— L'intégrale de Lebesgue.

2.1.2 Intégrale des fonctions positives

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace normé mesuré.

Définition 2.1.4 (Fonction mesurable)**.** On dit que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Proposition 2.1.1 (Axiomes)**.** Il existe une application définie sur l'ensemble mesurable des fonctions mesurables positives de $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $f \longmapsto \int f(x)dx$ qui réalise les propriétés suivantes :

1. *Linéarité :* pour tous $\alpha, \beta \geq 0$, on a
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$
2. *Croissance :* si $\forall x, f(x) \leq g(x)$, alors
$$\int f(x)dx \leq \int g(x)dx.$$
3. *Normalisation :* pour tout pavé $A = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i)$, on a
$$\int \mathbb{1}_A(x)dx = \mu(A).$$
4. *Théorème de Beppo-Levi (ou de convergence monotone) :* si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables, alors
$$\underbrace{\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx}_{\int f(x)dx} = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx \leq +\infty. \tag{2.1}$$

Au lieu d'intégrer f sur tout $\mathbb{R}$, on peut l'intégrer seulement sur la partie où elle est mesurable en posant :
$$\int_A f(x)dx = \int f(x)\mathbb{1}_A(x)dx.$$

Théorème 2.1.1. On peut calculer l'intégrale $\int_A f(x)dx$ de toute fonction mesurable positive par :
$$\int_A f(x)dx = \sup \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\mu(A \cap \{f_i \geq t_i\})$$

où le sup est pris sur toutes les subdivisions finies sur l'axe des y, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n, n \in \mathbb{N}$ et dont le pas tend vers 0.

Proposition 2.1.2. Si f est à valeurs positives, alors
$$\int f(x)dx = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.}$$

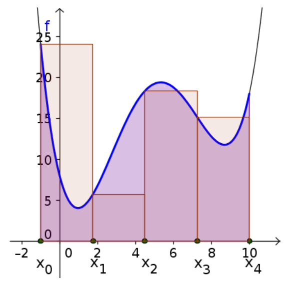

FIGURE 2.1 – Subdivisions et sommes de Riemann

Démonstration. Posons $A = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$. Alors $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A(x)$ si $\mu(A) = 0$. On obtient par 2.1 :

$$\int f(x)dx \lim_{n\to\infty} \int_A dx = 0.$$

Réciproquement, si $\int f(x)dx = 0$, alors on remarque que $\mathbb{1}_A(x) \leq \lim_{n\to\infty} nf_n(x)$ et on a encore par 2.1 :

$$\mu(A) = \int_A \mathbb{1}_A(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} n \int f(x)dx = 0.$$

♣

25-10-2023

Théorème 2.1.2 (⚠ De convergence dominée ou de Lebesgue)**.** Soit $(f_n) \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ une suite de fonctions (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert). Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est définie presque partout sauf sur $E = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$ de mesure nulle. S'il existe $h \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ telle que $|f_n| \leq h$ et si $f_n \longrightarrow f$ presque partout sur Ω, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx,$$

ce qui équivaut à dire que $\|f_n - f\|_{\mathscr{L}^1} \longrightarrow 0$.

Remarque. Si f_n est continue sur $K \subset \Omega$ et $f_n \longrightarrow f$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

2.2 Espaces L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$ comme espaces de Banach

On définit l'espace $\mathscr{L}^1 \longrightarrow L^1$. On dit que $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ presque partout (i. e. $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$). C'est une relation d'équivalence. On définit l'espace quotient $L^1 = \mathscr{L}^1/\sim$. On montre que L^1 est complet.

On note $\dot{f} \in L^1$, $\dot{f}$ est un représentant de la classe de f. Ainsi on peut définir la transformée de Fourier d'une fonction de L^1 par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx,$$

mais la même écriture n'a pas de sens dans L^2.

2.2.1 Les espaces $L^p, 1 \leq p < \infty$

Théorème 2.2.1. L'espace L^1 est complet, muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx.$$

Cela veut dire que c'est un espace de Banach.

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy dans L^1. On peut lui associer une série

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(f_{i+1} - f_i).$$

Montrons que f_n converge. Il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge. On peut toujours écrire :

$$f_n - f = \underbrace{f_n - f_{n_k}}_{<\varepsilon} + \underbrace{f_n - f_{n_k}}_{<\varepsilon}.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, p \geq N, q \geq 0, \|f_{p+q} - f_p\|_{L^1} < \varepsilon.$$

A extraction près d'une sous-suite, on peut supposer que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1} < \varepsilon.$$

On pose $g_m(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m-1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$. Pour tout x, la suite $(g_m(x))_m$ est croissante (car on rajoute un terme positif) et elle est définie presque partout. Par Beppo-Levi, on a

$$\int g(x)dx = \int \lim_{m\to\infty} g_m = \lim_{m\to\infty} \int g_m(x)dx.$$

Or on a

$$\int g_m(x)dx = \sum_{n=1}^{m-1} \int |f_{n+1}(x) - f_n(x)|\, dx.$$

C'est une série absolument convergente, car $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. On a alors

$$\int g(x)dx < +\infty$$

et en particulier $g(x) < +\infty$ presque partout.

Donc $f_m(x) = f_1(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{m-1} f_{n+1}(x) - f_n(x)$ définit une série numérique absolument convergente, donc $f_m(x) \underset{\text{p.p.}}{\longrightarrow} f(x)$. Il reste à montrer que $f \in L^1$. On a :

$$|f_m(x)| \leq |f_1(x)| + g_m(x) \leq |f_1(x)| + g(x) = h(x) \in L^1.$$

Par Lebesgue, on a $\lim \int f_m = \int f$, avec $f \in L^1$. On a donc $\|f_m - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$. ♣

Théorème 2.2.2. L^p est aussi un Banach et ce pour tout $p \in [1, \infty)$.

Démonstration. On utilise l'inégalité de Minkowski :

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{2.2}$$

La démonstration est la même que pour L^1. ♣

Corollaire. Si $f_n \longrightarrow f$ dans L^p, alors il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge presque partout vers f.

Démonstration. Comme avant, on peut supposer que $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. On pose

$$f_m(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

C'est une série normalement convergente dans L^p. Par le raisonnement précédent, on détermine que $f_m(x) \underset{\text{p.p.}}{\longrightarrow} f$. ♣

Théorème 2.2.3. Soit $\mathcal{K}(\Omega)$, l'espace de fonctions continues à support compact dans Ω. Alors $\mathcal{K}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty)$.

Démonstration. Brézis, théorème 4.12. ♣

2.2.2 Espace L^∞

Théorème 2.2.4. $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Définition 2.2.1. On définit la norme dans l'espace L^∞ de la façon suivante :

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess} |f|.$$

Pour tout $C > \operatorname{supess}(f)$, on a $\mu(\{x : f(x) > C\}) = 0$. Si f est continue, on a $\operatorname{supess} f = \sup f$.

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. On prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout k, il existe $N(k)$ tel que $\forall n, m \geq N(k)$, on a $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$.

Montrons que f_n converge vers $f \in L^\infty$. Donc il existe E_k négligeable tel que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$ pour tout $x \notin E_k$. On a que $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ est de mesure nulle. Pour tout $x \in E$, la suite numérique $f_n(x)$ est de Cauchy, donc elle converge vers $f(x)$ (partout). On a donc

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},$$

donc $\|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{k}$ avec $f \in L^\infty$. ♣

2.2.3 Espace L^2

Théorème 2.2.5. $\mathcal{H} = L^2$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$(u \mid v) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

L'espace L^2 est engendré par une base orthonormée (*base hilbertienne*), i.e. il existe une suite $(e_j)_j$ telle que, pour tout $f \in L^2$, on a

$$f = \sum_j f_j e_j, f_j \in \mathbb{C}.$$

Proposition 2.2.1 (Egalité de Parseval)**.** On a pour tout $f \in L^2$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_j |f_j|^2.$$

2.3 Espaces L^p comme ELC

2.3.1 $L^1(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$

C'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_{L^1}$. C'est aussi un espace localement convexe muni de la famille de semi-normes $(\rho_{a,r})_{a\in\Omega,r>0}$ définies par

$$\rho_{a,r}(f) = \int_{B(a,r)} |f(x)|\, dx.$$

Proposition 2.3.1. $(E, (\rho_{a,r}))$ est séparé.

Démonstration. Si $f \neq g$ presque partout, alors

$$\rho_{a,r}(f-g) = \int_{B(a,r)} |f(x) - g(x)|\, dx \neq 0.$$

Donc il existe E de mesure strictement positive tel que $\forall x \in E, g(x) \neq f(x)$. Or E est partout dense dans Ω pour la mesure de Lebesgue. On a alors

$$\int_{B(a,r)} |f-g| = \int_{E\cap B(a,r)} |f-g| > 0.$$

♣

2.3.2 $E = L^\infty$

On le munit de la famille de semi-normes

$$\rho_{a,r}(f) = \mathrm{supess}_{B(a,r)}(|f|).$$

Proposition 2.3.2. $E = L^\infty(\Omega)$ est séparé, mais non séparable.

2.3.3 Espaces duaux de L^p

Théorème 2.3.1 (De Riesz)**.** On a $(L^2)' = L^2$ (l'espace dual de L^2 est lui-même), i. e. toute forme linéaire $l \in (L^2)'$ s'écrit comme $\langle l, u\rangle = (v \mid u)$ où $v \in L^2$.

Théorème 2.3.2 (Riesz-Fischer)**.** Le dual de L^1 est L^∞.

Démonstration. Brézis, p. 63. ♣

Remarque. Par contre on n'a pas $(L^\infty)' \neq L^1$.

27-10-2023

Corollaire. Soit $f \in L^p$. Si pout tout $\varphi \in K(\Omega)$, $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

Théorème 2.3.3. L'espace L^1 est séparable. Plus généralement, L^p est séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. On prend un représentant $\dot{f}$ de $f \in L^1$. Si f est positive, on a

$$\int_A f(x)dx = \sup_{t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n} (t_{i+1} - t_i)\mu(A \cap \{x : f(x) \leq t_i\}),$$

où μ est la mesure de Lebesgue. On a alors

$$f = \lim \sum_i c_i \mathbb{1}_{\{f \leq t_i\}} = \lim \sum_t (t_{i+1} - t_i)\mathbb{1}_{B_i}(t).$$

On peut prendre $t_i \in \mathbb{Q}$. Alors la famille

$$\sum_i (t_{i+1} - t_i)\mathbb{1}_{B_i}(t)$$

est partout dense dans L^1, avec B_i des boréliens de Ω. Ceci achève la démonstration. ♣

Théorème 2.3.4. L'espace $L^1(\Omega)$ n'est pas réfléxif.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On pose $E = L^1$ et on suppose qu'il est réfléxif. On a alors, par le théorème 2.3.2, $E' = L^\infty$.

Soit B_E la boule unité de E (pour la topologie de Banach, mais aussi valable pour $\sigma(E, E')$). Comme L^1 est séparable, la boule unité B_E pour la topologie faible est compacte. Donc de toute suite de B_e on peut extraire une suite convergente (pour la topologie faible). On prend

$$f_n(x) = \frac{1}{\left|B(a, \frac{1}{n})\right|}\mathbb{1}_{B(a,\frac{1}{n})}.$$

On a $\int f_n = 1$ pour $f_n \in B_E$. On entrait f_{n_k} convergeant vers $f \in B_E$. Alors pour tout $\phi \in L^\infty = E'$, on a $\int f_{n_k}\phi \longrightarrow \int f\phi$. On choisit $\phi \in K(\Omega \setminus \{a\})$. Donc

$$\int f_{n_k}(x)\phi(x)dx = 0.$$

Par le corollaire 2.3.3, $f = 0$ p. p. dans $\Omega \setminus \{a\}$. Donc $f = 0$ p. p. dans Ω, car $\mu(\{a\}) = 0$. Cela aboutit a une contradiction, car pour $\phi = \mathbb{1}_\Omega \in L^\infty$, on a

$$0 = \int f\phi = \int \frac{1}{\left|B(a, \frac{1}{n})\right|}\mathbb{1}_{B(a,\frac{1}{n})} = 1.$$

♣

Remarque. E est réfléxif et séparable si et seulement si E' est réfléxif et séparable. Comme $E = L^1$ n'est pas réfléxif, $E' = L^\infty$ n'est pas réfléxif. En fait il n'est ni réfléxif ni séparable.

Proposition 2.3.3. L^∞ n'est pas séparable.

Lemme. Soit E un espace de Banach. S'il existe $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, I non dénombrable, $\mathcal{O}_i$ ouverts deux-à-deux disjoints, alors E n'est pas séparable.

Démonstration. Une fois de plus on raisonne par l'absurde. Soit (u_n) une suite partout dense dans E telle que $\forall i \in I, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset$ (on utilise l'axiome du choix $u_n \in \mathcal{O}_i$). Comme les $\mathcal{O}_i$ sont disjoints, $i \longmapsto n(i)$ est injective, donc I est dénombrable, ce qui aboutit à une contradiction. ♣

Théorème 2.3.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors

1. $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable ;
2. $L^\infty(\Omega)$ n'est pas réfléxif ;
3. La boule unité de $L^\infty(\Omega)$ est métrisable est compacte pour $*(L^\infty, L^1)$.

2.4 Exemple fondamental : convergence d'une suite de L^1 vers la mesure de Dirac

Théorème 2.4.1. Il existe $f_n \in L^1$ telle que $\forall \phi \in K(\Omega)$,

$$\int f_n(x)\phi(x)dx \longrightarrow \phi(x_0).$$

CHAPITRE 3

FONCTIONS TRONCATURE ET PARTITION DE L'UNITÉ : CAS CONTINU

En théorie de distributions, on déduit souvent une "propriété globale" à partir d'une "propriété locale". Ceci se fait par une sorte de "copié-collé" par des partitions de l'unité. 07-11-2023

3.1 Les fonctions troncature

Proposition 3.1.1. Soit (X, d) un espace métrique. Soient F et G deux fermés disjoints de X. Alors il existe une fonction continue $\chi \in \mathcal{C}^0(X), 0 \leq \chi \leq 1$ et $\chi \equiv 0$ près de F et $\chi \equiv 1$ près de G.

Démonstration. En deux étapes.

1. On construit $\chi_1 \equiv 0$ sur F et $\chi_1 \equiv 1$ sur G. On définit $\chi : X \longrightarrow [0,1]$, avec $\chi_1(x) = \dfrac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)}$. La continuité de χ résulte du fait que $x \longmapsto d(x,F)$ est continue. On a de plus $\chi_1 \big|_F = 0$ et $\chi_1 \big|_G = 1$.
   Considérons $F_1 = \chi^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \supset F$ et $G_1 = \chi_1^{-1}\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) \supset G$. On a $F_1 \cap G_1 = \emptyset$. On applique la construction précédente à F_1 et G_1 qui sont des voisinages **fermés** de F et de G.

♣

Lemme. Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ un compact. Soit $(U_j)_{1 \leq j \leq N}$ un recouvrement ouvert de K. Alors il existe $K_j \subset U_j \subset X$ compact, $1 \leq j \leq N$ tel que $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} K_j$.

Démonstration. On remarque que $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$ où B_x est une boule ouverte de centre x. Cela entraîne que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_{x_k}$.

On considère $A_j = \{l \in \{1, \ldots, p\}, \widetilde{B_{x_l}} \subset U_j\}$ où $\widetilde{B_{x_l}}$ est une boule fermée de même centre et de même rayon que B_{x_l}.

Remarque. $\overline{B_{x_l}} \subset \widetilde{B_{x_l}}$, mais l'inclusion est stricte en général.

Si $(X, d) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, on a $\overline{B_{x_l}} = \widetilde{B_{x_l}}$. On pose $K_j = K \cap \left(\bigcup_{l \in A_j} \widetilde{B_{x_l}}\right)$, alors K_j est compact (tout fermé dans un espace séparé est compact). ♣

Théorème 3.1.1. Soit $K \subset \bigcup U_j$ compact. Alors il existe $\varphi_j \in \mathcal{K}(X)$ tels que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ et $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 1$ **près** de K, avec $0 \leq \varphi_j \leq 1$. On dit que les φ_j forment une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de K par un nombre fini d'ouverts U_j.

Démonstration. Soient K_j des compacts comme dans le lemme 3.1. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, N\}$, on peut trouver une fonction continue $\psi_j : X \longrightarrow [0, 1]$ égale à 1 près de K_j et égale à 0 sur U_j^C. On pose

$$V = \left\{ x \in X, \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x) > 0 \right\}$$

ouvert de X, donc V^C est fermé. On applique la proposition 3.1.1 à K et V^C. Il existe donc ψ_0 continue avec $\psi_0 \equiv 0$ près de K et $\psi_0 \equiv 1$ près de U^C, car $K \subset U$.

On pose

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x)}.$$

La fonction ψ_j est dans $\mathcal{K}(X)$ et $\sum_{j=1}^{N} \varphi_j = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} \psi_j}{\psi_0 + \sum_{j=1}^{N} \psi_j} \equiv 1$ près de K, car $\psi_0 \equiv 0$ près de K. ♣

Application : recollement d'une famille de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ Ce sont l'ensemble de fonctions intégrables seulement sur un compact. On a $L^p(X) \subset L^1_{\text{loc}}(X)$. On a

$$\int_K |f| = \int \mathbb{1}_K(x) \, |f(x)| \, dx = \|\mathbb{1}_K\|_q \, \|f\|_p = |K|^{\frac{1}{q}} \, \|f\|_p \, .$$

Proposition 3.1.2. Soient $U_j \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts, $\Omega_{j \in I} U_j, f_j \in L^1_{\text{loc}}(U_j)$ avec $f_i = f_j$ sur $U_i = U_j$. Alors il existe $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $f = f_j$ sur U_j.

Démonstration. On va montrer qu'il existe $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $\forall g \in L^\infty_{\text{comp}}(\Omega)$,

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) g(x) dx.$$

♣

CHAPITRE 4

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

4.1 Rappels de calcul différentiel

10-11-2023

Définition 4.1.1. Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ ouvert. On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f admet des dérivées partielles continues.

Si $x_0 \in \Omega$, $f'(x_0)$ est la différentielle de f en x_0 telle que

$$\langle f'(x_0), y \rangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_j.$$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout j. La matrice hessienne de f en x_0 est

$$\mathrm{Hess}(f) = \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq d}.$$

Par le théorème de Schwarz, elle est symétrique.

Par récurrence, on définit les fontions $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est une algèbre.

Proposition 4.1.1 (Composition)**.** Soient $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et soit $\Phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_2), f \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ et on a

$$(f \circ \Phi)'(x_0) = \underbrace{f'(\Phi(x_0))}_{\in \mathcal{M}_{1 \times d_2}} \cdot \underbrace{\Phi'(x_0)}_{\in \mathcal{M}_{d_2 \times d_1}}.$$

Exercice 4. Calculer $((f \circ \Phi)')'(x)$.

Formule de Taylor avec reste intégral Pour $d = 1$, on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)dy = f(0) + \left(\int_0^1 f'(tx)dt\right) x.$$

Remarque. Si $f \in C_0^1(\mathbb{R})$, la fonction $g = \int_0^1 f'(tx)dx$ n'est plus dans $C_0^1(\mathbb{R})$.

Proposition 4.1.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d, a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + m \sum_{|\alpha|=m} \frac{(x-\alpha)^2}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1}\partial^\alpha f(a+t(x-a))dt.$$

On a $\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ et $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$ et $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$.

Remarque (Formule d'Hadamard)**.** Pour $m = 1$ et $\alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$, on a

$$f(x) = \sum_{j=0}^{d} (x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t(x-a))dt.$$

4.2 Classification des $\mathcal{C}^m(\Omega)$, régularité, support

Soit $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ compact. On définit

$$C_K^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega),\ \text{supp}(f) \subset K\}.$$

On rappelle que $\text{supp}(f) = \text{adh}\{x \mid f(x) = 0\}$ (l'ensemble des valeurs où la fonction ne s'annulle pas).

Les espaces localement convexes sont munis d'une famille de semi-normes qui leur confère une structure des espaces de Fréchet.

Exemple.

⋆ Pour $\mathcal{C}^m(\Omega)$, on a

$$\rho_{n,\alpha:|\alpha|\leq m} = \sup_{K_n} |\partial^\alpha f(x)|$$

où K_n est une suite exhaustive de compacts avec $K_n \subset K_{n+1}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$.

⋆ Pour $C_h^m(\Omega), f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ bornées, on a

$$\|f\| = \sum_{|\alpha|<m} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

C'est une norme sur un espace de Banach.

⋆ On considère $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_K C_K^\infty(\Omega)$ espace localement convexe.

Remarque.

$$\sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\sup_{|x|>\nu, |\alpha| \le m_\nu} \frac{|\partial^\alpha \varphi(x)|}{\varepsilon_\nu} \right).$$

ε_ν est une suite de réels et elle tend vers 0.

...

On prend $\mathscr{D}(\Omega) \neq \{0\}$.

Lemme. Soit $B(a,r) \subset \Omega, a \in \Omega, r > 0$. Soit $\Phi_a : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin B(a,r) \\ \exp\left(-\frac{1}{r^2 - |x-a|^2}\right) \text{ si } x \in B(a,r). \end{cases}$$

Alors $\Phi_a \in C^\infty_{\overline{B(a,r)}}(\Omega)$. Elle est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ telle que

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est connu que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
On construit

$$\Phi(x) = \psi(r^2 - |x-a|^2).$$

Alors $\Phi_a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\operatorname{supp} \Phi_a \subset B(a,r)$ par construction. ♣

Lemme. Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ croissante telle que

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le 0 \\ 1 \text{ si } t \ge 1. \end{cases}$$

Démonstration. On pose $g(t) = \psi(t)\psi(1-t) \in C^\infty_{[0,1]}(\mathbb{R})$ et on pose

$$\Psi(t) = \frac{\int_{-\infty}^t g(t)dt}{\int_0^1 g(s)ds}.$$

♣

4.3 Partitions de l'unité différentiables

Lemme. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $K \subset \Omega$ compact. Alors il existe une fonction $f : \Omega \longrightarrow [0,1], f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $f \equiv 1$ au voisinage de K.

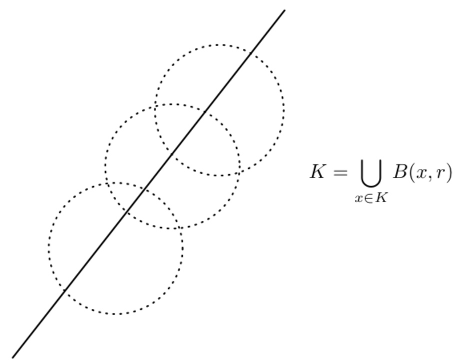

Figure 4.1 – Recouvrement de K

Démonstration. On applique le lemme 4.2. On pose

$$\Phi_x(y) = \exp\left(\frac{1}{r^2 - |y-x|^2}\right) \times 2\exp\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

On a $\Phi_x(x) = 2$.

$x \in V_x = \{y : \Phi_x(y) > 1\}$ un ouvert. Les V_x recouvrent K. On peut extraire un sous-recouvrement fini $V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$. On pose

$$h = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{x_j}, h \in C_0^\infty(\Omega), h \geq 1 \text{ près de } K.$$

Alors $f = \psi \circ h$ répond à la question. ♣

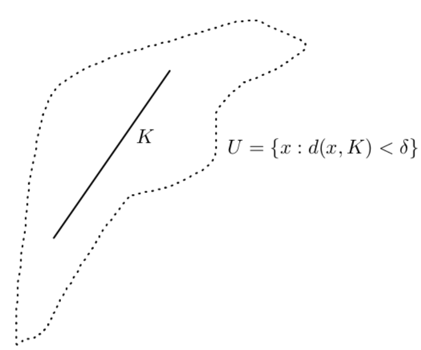

Figure 4.2 – On prend K et U définis ainsi.

Démonstration par régularisation des convolutions. Soit $g = \mathbb{1}_U$ et $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Posons $\Phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $\operatorname{supp} \Phi_1 \subset B(0,1)$.

Posons $\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\Phi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. On a $\operatorname{supp}(\Phi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$.

On a

$$f(x) = f_\varepsilon(x) = \int \mathbb{1}_U(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy = \mathbb{1}_U \star \Phi_\varepsilon.$$

On remarque que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. La convolution $f \star g$ hérite de la meilleure régularité. On a $\operatorname{supp}(f \star g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

Donc $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subset U + B(0,\varepsilon) \subset K + B(0,\delta) + B(0,\varepsilon) \subset K + B\left(0, \frac{3d}{2}\right)$.

Montrons que $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset K + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. Alors

$$f_\varepsilon(x) = \int \mathbb{1}_U(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy = 0 \text{ pour } d(x,U) > \varepsilon.$$

Montrons que $f_\varepsilon(x) = 1$ pour $d(x,U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Cela implique que

$$\int \mathbb{1}_U(y)\Phi_\varepsilon(x,y)dy = \int \Phi_\varepsilon(x-y)dy = \int \Phi_\varepsilon(z)dz = 1.$$

Montrons que $f_\varepsilon(x) \leq 1$. C'est vrai car $\mathbb{1}_U(y) \in [0,1]$ et on a

$$\int \mathbb{1}_U(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy \leq \int \Phi_\varepsilon(x-y)dy = 1.$$

♣

Ce lemme aboutit au théorème suivant.

Théorème 4.3.1. Soit $K \in \mathbb{R}^d$ un compact recouvert par une union fini d'ouverts $(U_j)_{1\leq j\leq n}$. Alors il existe $\varphi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), j = 1, \ldots, n, \operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 1$ près de K.