Géométrie différentielle

Mohammad Reza Pakzad

2023-2024

Table des matières

1 Fonctions continues

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.
$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^n) & \longmapsto & f(x^1, \dots, x^n) \end{array}$ application.
f est continue en x_0 dans U si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

avec $\|y\| = \sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2}$.
On dit que f est une application continue quand f est continue en $x \in U$ pour tout $x \in U$.

Proposition 1.1. f est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(J)$ est ouvert, avec $f^{-1}(J) := \{x \in U \mid f(x) \in J\}$.

Démonstration. 1. *Si f est continue, alors $\forall J \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f^{-1}(J)$ est ouvert.*
Il faut montrer que $\forall x_0 \in f^{-1}(J)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

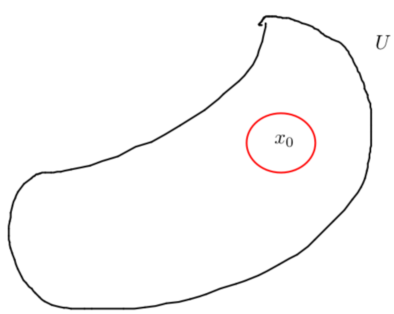

FIGURE 1 – Illustration

$J =]a, b[$.
$x_0 \in f^{-1}(J) \implies f(x_0) \in J \implies a < f(x_0) < b \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que

$$a < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon < b.$$

On peut choisir $\varepsilon = \min\{\frac{b - f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0) - a}{2}\}$.
Donc il y a $\delta > 0$ tel que

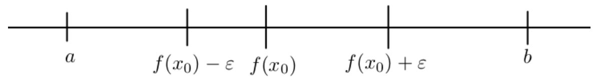

FIGURE 2 – On choisit ε de cette sorte

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|<\delta &\implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\\ &\implies -\varepsilon < f(x)-f(x_0)<\varepsilon\\ &\implies f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \implies a<f(x)<b\\ &\implies f(x)\in J \implies x\in f^{-1}(J).\end{aligned}$$

Choisissons $r := \delta$
$x \in B(x_0, r) \implies \|x-x_0\| < r = \delta$.
On a démontré que avec ce choix de δ on a $x \in f^{-1}(J) \implies B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

2. *Si $f^{-1}(J)$ ouvert pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, alors f est continue.*
Fixons $x_0 \in U : \varepsilon > 0$ est donné.
On met $J = (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon) \neq \emptyset$.
Par l'hypothèse, $f^{-1}(J)$ est ouvert, donc $\exists r > 0, B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.
On met $\delta := r$.

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|<\delta &\implies x\in B(x_0,\delta)=B(x_0,r)\\ &\implies x\in f^{-1}(J) \implies f(x)\in J\\ &\implies f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \implies -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon\\ &\implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

On peut aussi généraliser ces définitions et la proposition aux cas où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application de U dans $\mathbb{R}^m$, avec

$$f(x^1,\dots,x^n) = (f_1(x^1,\dots,x^n),\dots,f_m(x^1,\dots,x^m)).$$

Exemple $f(x^1,x^2) = ((x^1)^2 + 3\cos(x^2)e^{x^1-x^2})$, $n = 2, m = 2, U = \mathbb{R}^2$.

Définition 1.1. f est continue en $x_0 \in U$ si

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in U, \|x-x_0\|<\delta \implies \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon,$$

avec $\|f(x)-f(x_0)\| = \sqrt{(f_1(x)-f_1(x_0))^2+\cdots+(f_m(x)-f_m(x_0))^2}$.

Définition 1.2. $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue quand f est continue en $x, \forall x \in U$.

Proposition 1.2. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes.

1. $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue ;
2. $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j est continue ;
3. $\forall V \subseteq \mathbb{R}^m$ ensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert.

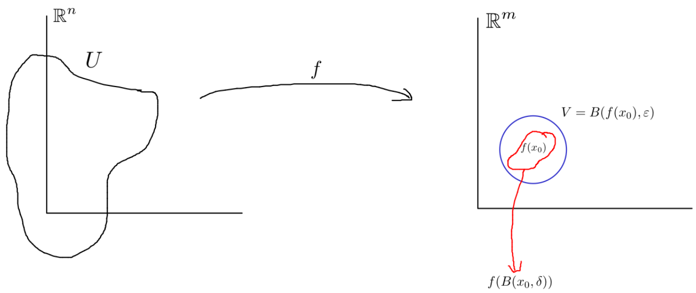

Figure 3 – Illustration pour 1.2

2 Dérivée, dérivée partielle, différentielle

$f : U \to \mathbb{R}$.
$x \in U$ fixé.
La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x = (x^1, \ldots, x^n)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^n) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^i + h, \ldots, x^n)}{h}$$

si la limite existe.

Si $e_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ème}}, 0, \ldots, 0)$ (tel que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base standard de l'espace linéaire $\mathbb{R}^n$), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i)}{h}.$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x^i}$. En général, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x^{i_2} \partial x^{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \right) \right).$$

$i_1 \in \{1, \ldots, n\}, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$.
Pour $k = 1$, il y a n dérivées partielles.
Pour $k = 2, i_1 \longrightarrow n$ choix de $\{1, \ldots, n\}$.
$i_2 \longrightarrow n$ choix.
Donc il y a n^2 choix.
En général, il y a n^k dérivées partielles différentes de l'ordre k.

Définition 2.1. $r \in \mathbb{N}$.
On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ ou tout simplement f est $\mathcal{C}^r$ quand

1. Si $r = 0$, f est continue.
2. Si $r \geq 1$, f est continue et les dérivées partielles d'ordre k existent partout dans U et elles sont toutes les applications continues dans U et ceci pour tout $1 \leq k \leq r$.
3. Pour $f : U \to \mathbb{R}^m$, une application, on dit que f est $\mathcal{C}^r$ si $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j est une application $\mathcal{C}^r$, avec $f = (f_1, \ldots, f_m)$.
   On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ quand $\forall r \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^r$.

2.1 Différentiabilité des fonctions multi-variables

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

On dit que f est différentiable à $x \in U$ quand il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ si } \|h\| < \delta \text{ et } x + h \in U, \text{ alors } \|f(x+h) - (f(x) + L(h))\| < \varepsilon \|h\|.$$

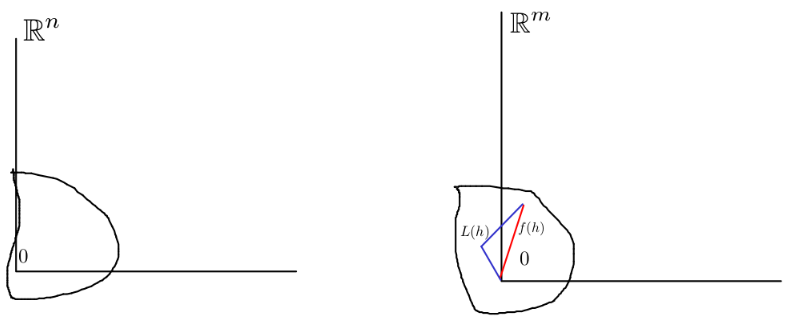

FIGURE 4 – Exemple illustratif avec $x = 0, f(0) = 0$

Cas particulier : $f(0) = 0$, f différentiable en 0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta \implies \|f(h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$.

Proposition 2.1. $n = 1, m = 1, f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable selon la définition donnée sur un point $x \in I$ si et seulement si $f'(x)$ existe.

Démonstration.

1. *Sens direct : f différentiable en $x \in I \implies f'(x)$ existe.*
   $\exists L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in I \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

   $L(h) = ah$ pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque mais fixé.
   a est la pente ou le coefficient directeur.
   Prenons a la pente du graphe de L (comme L linéaire, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}, L(h) = ah$).
   On obtient

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, x + h \in I \implies |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|.$$

   On divise par $|h| \neq 0$ pour obtenir

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{ah}{h}\right| \leq \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |h| < \delta, h + x \in I, \text{ alors } \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-a\right| \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a.$$

Donc $f'(x)$ existe et $f'(x) = a$.

2. *Sens réciproque : $f'(x)$ existe $\implies f$ différentiable.*
Si $f'(x)$ existe, on met $a := f'(x)$.
On définit $L(h) = ah$. On sait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = a.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta \implies & \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-a\right| \leq \varepsilon \\
\implies & |f(x+h)-f(x)-ah| \leq \varepsilon|h| \\
\implies \forall h, |h| < \delta, \text{ on a } & |f(x+h)-f(x)-ah| \leq \varepsilon|h|.
\end{aligned}$$

f est différentiable selon notre définition avec $L(h) = ah$.

$\square$

On suppose maintenant que $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Pour $x \in U$, f différentiable en x si $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta, x+h \in U \implies \|f(x+h)-f(x)-L(h)\| \leq \varepsilon\|h\|.$$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ est linéaire }\}$.
On écrit dans ce cas là que $Df(x) = L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
En particulier, si f est différentiable pour tout $x \in U$, on obtient une application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Rappel Chaque transformation linéaire est uniquement représentée par une matrice au cas où les bases des espaces de départ et d'arrivée sont fixées.

Si on choisit les bases standard $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ pour $\mathbb{R}^n$ et $\beta = \{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$[T]_\beta^\alpha := A = [A_{ij}]_{m\times n}$$

et on a

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} e_i = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}.$$

C'est la j-ième colonne de la matrice A.

En particulier, pour chaque $x \in U$ où f est différentiable, en fixant les bases standard de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, on peut supposer que $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

On peut identifier $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $\mathbb{R}^{m\times n} = \{[A_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \mid A_{ij} \in \mathbb{R}\}$.

Avec cette identification, on peut utiliser la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme ça on peut parler de continuité et de différentiabilité de l'application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ou bien on peut encore identifier $\mathbb{R}^{m\times n}$ avec $\mathbb{R}^{mn}$. Alors $Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{mn}$.

Donc on peut parler de continuité de Df, de derivée de Df.

Pour $x \in U, D(Df)(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

On va noter $D(Df)$ par $D^2 f$. Alors $D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n})$.

$D^2 f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n}) \simeq \mathbb{R}^{mn^2}$.

Théorème 2.1. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ une application donnée et $r \in \mathbb{N}$.*

f est de classe $\mathcal{C}^r$ si et seulement si $D^k f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots))$ (de dimension mn^k) existe comme une application pour tout $1 \leq k \leq r$, et elle est en plus continue.

2.2 Deux points fins

En général, les dérivées partielles de f peuvent exister sans que Df soit définie.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut avoir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x^1}(0)$ existe, $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ existe, mais $Df(0)$ n'existe pas.

Par contre, si $Df(x_0)$ existe, alors toutes les dérivées partielles de f existent en x_0.

Démonstration. Supposons que $Df(x_0)$ existe. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x) - f(x_0) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

Fixons une direction $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et on met $h = t\vec{v}$, avec $\|\vec{v}\| \neq 0$. Donc $\|h\| = |t| \cdot \|\vec{v}\|$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, t < \frac{\delta}{\|\vec{v}\|}, x_0 + t\vec{v} \in U \implies \|f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - tL(\vec{v})\| < \varepsilon |t| \|\vec{v}\|.$$

On pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \|\vec{v}\|$ et $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\|\vec{v}\|}$.

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0 \text{ tel que } |t| < \tilde{\delta} &\implies \|f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - tL(\vec{v})\| \leq \tilde{\varepsilon}|t| \\ \forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0, 0 < |t| < \tilde{\delta} &\implies \left\| \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)\right) - L(\vec{v}) \right\| \leq \tilde{\varepsilon} \\ &\implies \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)\right) = L(\vec{v}) = Df(x_0)(\vec{v}). \end{aligned}$$

On définit

$$D_{\vec{v}} f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)).$$

Donc si $Df(x_0)$ existe, la dérivée directionnelle de f en x_0 dans une direction $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ existe et on a

$$D\vec{v} f(x_0) = Df(x_0)(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m.$$

En particulier, si $\vec{v} = e_j, 1 \leq j \leq n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} f(x_0) = D_{e_j} f(x_0) = Df(x_0)(e_j).$$

$\square$

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\vec{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ alors que $Df(x_0)$ n'existe pas.

Théorème 2.2. *Si $f : U \to \mathbb{R}^m, x_0 \in U$.*
Si $Df(x_0)$ existe, alors f est continue en x_0.

Démonstration. En exercice. □

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\vec{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en $x_0 \in U$ sans que pour autant f soit continue en x_0.

Exemple 2.1. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^6} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \ f(0,0) := 0.$$

Alors pour toute $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $D_{\vec{v}} f(0,0)$ est définit, mais f n'est même pas continue à $(0,0)$.

Si la matrice de $Df(x_0)$ est donnée par $[A_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, A_{e_j} = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^j}(x_0) \end{bmatrix}.$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

C'est la matrice jacobienne de f.

2.3 La dérivée de composition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.
$f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$.
Supposons que pour $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$.
Si f est continue, $g \circ f$ est définie dans un voisinage de x_0, par exemple dans une boule ouverte $B(x_0, r) = \widetilde{U} \subset U \cap f^{-1}(V)$.
$g \circ f : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^p$.
Supposons que les trois dérivées $Df(x_0), Dg(f(x_0)), D(g \circ f)(x_0)$ existent.
$Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
$Dg(f(x_0)) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.
$D(g \circ f) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 2.3. *Supposons que f est dérivable en $x_0 \in U$ avec la dérivée $Df(x_0)$ et g est dérivable en $f(x_0) \in V$ avec la dérivée $Dg(f(x_0))$, alors $g \circ f$ est bien dérivable en $x_0 \in U$ et*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

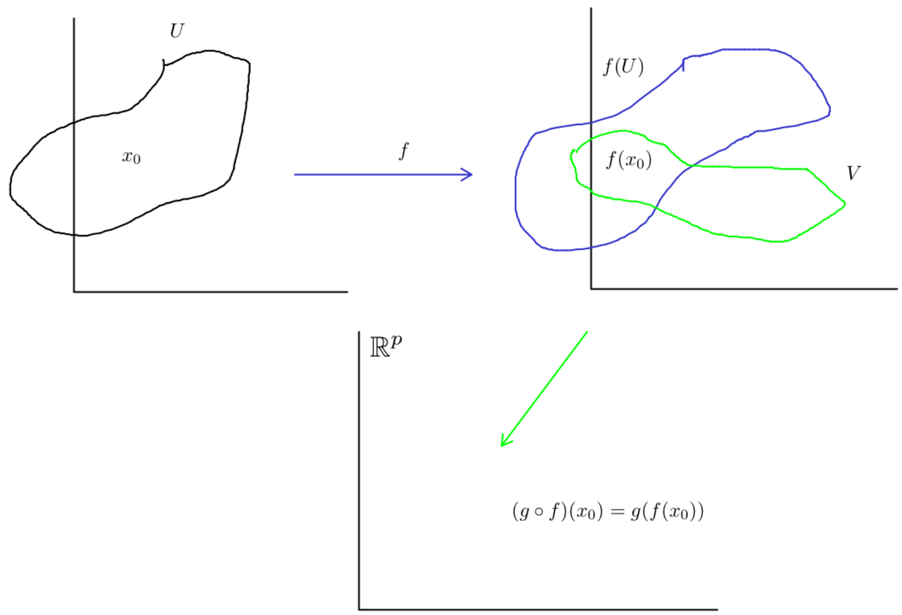

FIGURE 5 – La différentiation composée

Si on utilise les matrices jacobiennes de chaque dérivée ($1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$),

$$\left[\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x^j}\right]_{p\times n}(x_0) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y^k}\right]_{p\times m}(f(x_0)) \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x^j}\right]_{m\times n}(x_0).$$

$$\left[\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right](x_0) = \left[\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\right](f(x_0)) \times \left[\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right](x_0).$$

On a :

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial y^k}(f(x_0))\frac{\partial y^k}{\partial x^j}(x_0).$$

3 Inversion locale, fonctions implicites, théorème du rang

Théorème 3.1. *Supposons que $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = f(U)$ est ouvert et $g : V \to \mathbb{R}^n$ est l'inverse de f. Si en plus f et g sont différentiables respectivement à $x_0 \in U$ et $f(x_0) \in V$, alors $m = n$ et $Dg(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1}$, c'est à dire en particulier $Df(x_0)$ est une transformation linéaire inversible.*

Démonstration.

Lemme 3.1. *(exercise) Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une fonction linéaire, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $T(x) = L(x) + \vec{b}$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Ainsi T est différentiable dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, DT(x) = L.$$

Dans ce cas, $DT : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application constante (les dérivées partielles de T aussi).

Comme g est l'inverse de f, on a $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g \circ f = \mathrm{id}_U$, où id_U est l'application d'identité sur U

$$\forall x \in U \quad \mathrm{id}_U(x) := x.$$

Si f est dérivable en $x \in U$ et g dérivable en $f(x) \in V$, $\mathrm{id}_U = g \circ f$ dérivable en x_0 et

$$D\,\mathrm{id}_U(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

$$\mathrm{id}_U(x) = x \implies D\,\mathrm{id}_U(x_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Donc

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Aussi, comme g est linéaire de f on a $f \circ g = \mathrm{id}_V$, donc

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} = Df(x_0) \circ Dg(f(x_0)).$$

Donc $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est invertible avec l'inverse $Dg(f(x_0))$. On se rappèle ce fait de l'algb̀ere linéaire que dans ce cas $m = n$.

□

Théorème 3.2 (d'invariance topologique de dimension, L. E. J. Brouwer)**.** *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $h : U \to V$ est un homéomorphisme (i.e.h continue, inversible et d'inverse **continue** $h^{-1} : V \to U$), alors $m = n$.*

3.1 Théorème de l'application inverse

Théorème 3.3 (De l'application inverse ou bien *de l'inverse locale*)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in U, f : U \to \mathbb{R}^n$, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible.*

Alors il existe des ensembles ouverts $W \subset U$, $x_0 \in W$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que $f_{|W} : W \to V$ est inversible. L'inverse $(f_{|W})^{-1} : V \to W$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

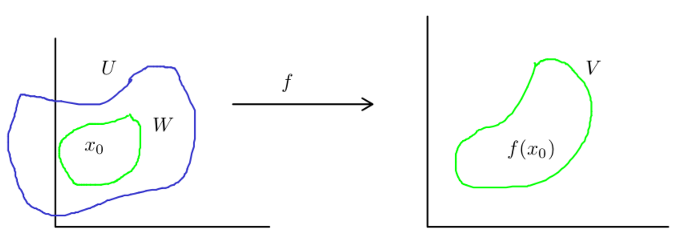

Figure 6 – Fonctions inversibles

Remarque 3.1. Si en plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, alors $(f_{|W})^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^r$.

Notons que $\forall y \in V, x \in W, f(x) = y$,

$$(D(f_{|W})^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}.$$

En particulier, il existe W tel que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in W$.

3.2 Théorème du rang

20-09-2023

Théorème 3.4 (Du rang)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ (avec $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$). Supposons que $\forall x \in U$,*

$$\operatorname{rang}(Df(x)) \equiv k,$$

où $1 \leq k \leq m$ est fixé.

$(Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$ donc $0 \leq \operatorname{rang}(Df(x)) \leq m)$.

Soit $x_0 \in U$. Alors il y a des ouverts $W \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ tels que $x_0 \in W, f(x_0) \in V$ et 2 applications de classe $\mathcal{C}^r$ inversibles

$$\varphi : W \to W' \text{ avec } W' \subseteq \mathbb{R}^n \text{ telle que } \varphi(x_0) = 0$$
$$\psi : V \to V' \text{ avec } V' \subseteq \mathbb{R}^m \text{ telle que } \psi(f(x_0)) = 0$$

telles que $\forall z \in W', z = (z^1, \ldots, z^n)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z^1, z^2, \ldots, z^n) = (z^1, z^2, \ldots, z^k, 0, \ldots, 0).$$

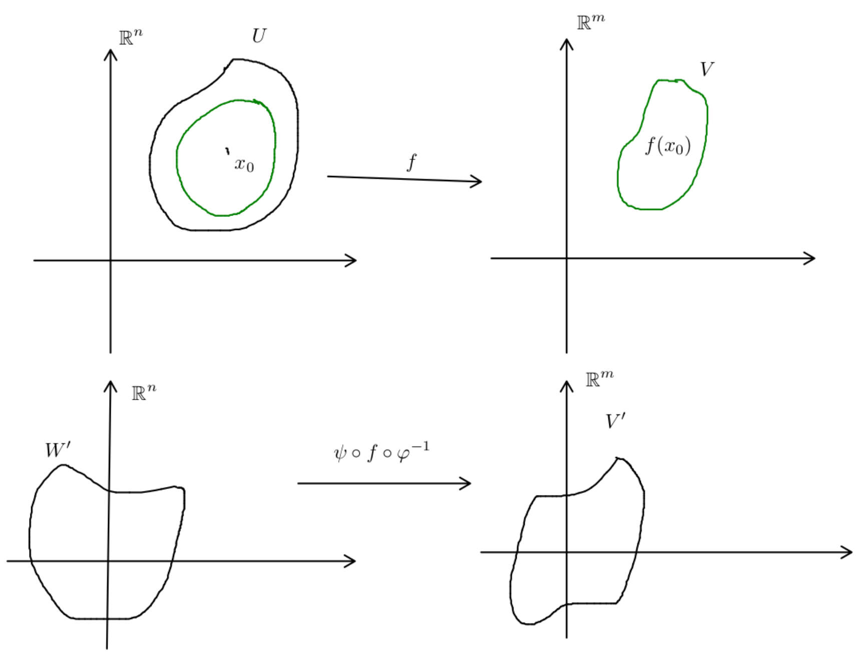

FIGURE 7 – Illustration du théorème de rang

En particulier, $f(W)$ est un objet de dimension k, de régularité $\mathcal{C}^r$ (Si $m = 3, k = 2, f(W)$ est une surface de classe $\mathcal{C}^r$) et pour tout $y \in f(W), f^{-1}(y)$ est un objet de dimension $n-k$ de régularité $\mathcal{C}^r$.

On note que les deux applications φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^r$ et inversibles. On peut démontrer que dans ce cas-là, les inverses φ^{-1} et ψ^{-1} sont aussi de classe $\mathcal{C}^r$.

$$D\varphi^{-1}(y) = (D\varphi(\varphi^{-1}(y)))^{-1}, y \in W'.$$

φ^{-1} étant continue, $D\varphi$ étant continue, l'inverse d'une matrice étant continue tant que $\det \neq 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ inversible $\implies$ $D\varphi^{-1}(y)$ dépend continuellement en y $\implies$ φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.1 (Difféomorphisme)**.** Soient $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts.

Si $\varphi : U \to U'$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$, avec l'inverse $\varphi^{-1} : U' \to U$ de classe $\mathcal{C}^r$, on dit que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$.

Remarque 3.2 (Le théorème de rang dans le cas spécial où f est linéaire)**.** Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\operatorname{rang}(L) = k, 0 \leq k \leq m$, alors il existe deux bases α_n et β_m pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ telles que

$$[L]_{\alpha_n}^{\beta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

(En exercice).

Corollaire 3.1. *$U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$, f est $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

Supposons que pour $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ est injective. $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Alors il existe un voisinage W de x_0 tel que f est injective sur W.

Démonstration. Pour $x \in U$,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

Si $Df(x_0)$ est injective, $\operatorname{rang}(Df(x_0)) = n$ $(m \geq n)$. On obtient une sous-matrice de $Df(x)$ de taille $n \times n$ inversible. $\square$

Lemme 3.2 (D'algèbre linéaire)**.** *$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors $\operatorname{rang} A = n$ si et seulement si il existe une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de A telle que $\det B \neq 0$.*

(En exercice).

Alors sous les hypothèse du corollaire 3.1, $\operatorname{rang} Df(x) \equiv n$ dans un voisinage W de x_0, appliquant le théorème du rang

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z^1, \dots, z^n) = (z^1, \dots, z^n, 0, \dots, 0)$$

qui est injectif.

Corollaire 3.2. *Les mêmes hypothèses que dans le corollaire 3.1.*

Si $Df(x_0)$ est surjective, alors il existe un voisinage ouvert $V \subseteq f(U)$ de $f(x_0)$ (c'est à dire $f(x_0)$ est un point intérieur de $f(U)$) tel que f est surjective sur V.

Argument à travers l'observation de l'algèbre linéaire qui dit que si $\operatorname{rang}(A) = m, m \leq n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il y a une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tel que $\det(B) \neq 0$.

Théorème de rang : $k = m \leq n$.

Les détails en exercice.

3.3 Théorème de fonctions implicites

Théorème 3.5 (De fonctions implicites)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

$(x_0, y_0) \in U \to V$ donné.

$$DF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m\times(m+n)}$$

et

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F}{\partial x^n}(x_0, y_0) & | & \frac{\partial F}{\partial y^1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F}{\partial y^m}(x_0, y_0) \end{bmatrix}_{m\times(m+n)}.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in U \times V$, $DyF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$,

$$DyF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y^1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F}{\partial y^m}(x_0, y_0) \end{bmatrix}_{m\times(m)}.$$

Supposons que $DyF(x_0, y_0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage W de x_0 dans U et une application $\mathcal{C}^r$ $f : W \to V$ telle que $f(x_0) = y_0$ et

$$\forall x \in W, F(x, f(x)) = F(x_0, y_0).$$

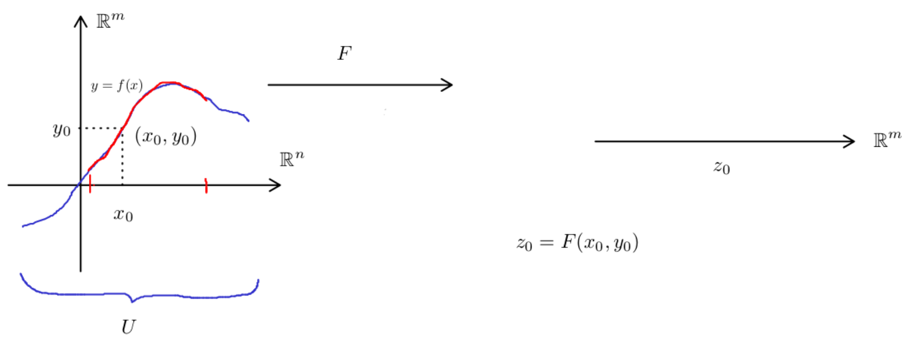

FIGURE 8 – Illustration du théorème de fonctions implicites

Donc le graphe de $x \longrightarrow f(x)$ dans $W \times V$ pour l'application $f : W \to V$ est à l'intérieur de $F^{-1}(z^0)$.

On peut dire que la fonction implicite

$$F(x, y) = z^0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z^0 \in \mathbb{R}^n$$

peut être exprimée explicitement par l'application $y = f(x)$ dans un voisinage W.

Remarque 3.3 (Sur le théorème des fonctions implicites)**.** En effet, si $W' = f(W) \subset V$, on a

$$(x, y) \in W \times W', F(x, y) = z^0 \iff y = f(x),$$

et donc $F^{-1}(z^0)$ est caractérisé par le graphe de f sur W.

Exemple $m = 1 = n$.

Si $F(x, y) = y^2 - x$.

Exemple 1 $x_0 = 0, y_0 = 1, z^0 = 1$.

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty.$$

$$DyF = [2y]_{1\times 1}.$$

$$DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \neq 0.$$

Donc près de $(0,1) = (x_0, y_0), y = f(x)$ a une solution $\mathcal{C}^\infty$.
Mais si $x_0 = 0, y_0 = 0, z^0 = 0$, $DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$ n'est pas inversible. F est $\mathcal{C}^\infty$.
Implicitement, près de $(0,0)$, on a $y^2 - x = 0$.
On essaie de trouver $y = f(x)$.
$y^2 = x \implies y = \pm\sqrt{x}$.
Mais $\sqrt{\cdot}$ n'est pas définie pour $x < 0$ près de $x_0 = 0$!
Donc il n'y a pas un moyen d'écrire explicitement $F(x,y) = 0$ près de $(0,0)$ comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4 Algèbre multilinéaire

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, c'est-à-dire il existe $\beta = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ base telle que

$$\forall \vec{v} \in E, \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v_i}.$$

En particulier, β engendre E ($E = \operatorname{span}(\beta) = \langle \beta \rangle$) si β est libre.

4.1 L'espace dual E^*

$$E^* = \{T : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire}\} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}).$$

Théorème 4.1. *On a* $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Démonstration. Supposons $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base ordonnée de E. On définit alors n éléments $(e^1, e^2, \dots, e^n)$, $e^j \in E^*$ de la manière suivante :

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque 4.1 (Personnelle)**.** e^j est l'évaluation du vecteur $\vec{v} \in E$ en e_j.

Donc $e^j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^j(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i^j = \alpha_j$.
Donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}, e^j \in E^*$, $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$. On montre que β^* est une base pour E^*.

1. β^* est libre. Supposons que pour $c_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^n c_j e^j = 0 \in E^*.$$

Donc pour tout i,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j\right)(e_i) = 0 \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_i^j = c_i.$$

Donc $\forall i, c_i = 0$.

2. β^* engendre E^*. Soit $T \in E^*$. Est-ce qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tel que

$$T = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \ ?$$

Essayons de trouver les α_j en appliquant l'identité desirée en e_i.

$$\forall i, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_i^j = \alpha_i.$$

Donc pour $T \in E^*$ donnée, le candidat pour α_i est

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i = T(e_i) \in \mathbb{R},$$

et on obtient que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, T(e_i) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j\right)}_{\tilde{T}}(e_i).$$

Comme T et $\tilde{T}$ ont les mêmes valeurs sur la base β, donc $T = \tilde{T}$.

$$T = \sum_{j=1}^{n} T(e_j) e^j.$$

$\square$

Définition 4.1. On dit que β^* est la base duale de β.

4.1.1 Le bi-dual

On considère le dual du dual (le bi-dual) $E^{**} = (E^*)^*$.

Théorème 4.2. *Si* $\dim(E) < \infty$, *il y a un isomorphisme canonique entre E et E^{**}.*

On peut définir $E \to E^{**}$. On pose $e : E \to E^{**}$.

$$(\iota(\vec{v}))(T) = T(\vec{v}),$$

$\forall T \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 4.1.

1. Montrer que $\forall v \in E, \iota(\vec{v}) : E^* \to \mathbb{R}$ est une transformation linéaire (et donc $\iota(\vec{v}) \in E^{**}$).
2. Montrer que $\iota : E \to E^{**}$ est une transformation linéaire.
3. Montrer que ι est bijective (donc un isomorphisme).

Démonstration.

1. $$\iota(\vec{v})(\alpha T + S) = (\alpha T + S)(\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) + S(\vec{v}) = \alpha\iota(\vec{v})(T) + \iota(\vec{v})(S).$$

2. $\iota : E \to E^{**}$ est linéaire.

$$\begin{aligned}\iota(\alpha\vec{v} + \vec{w})(T) = T(\alpha\vec{v} + \vec{w}) &\overset{T \text{ linéaire}}{=} \alpha T(\vec{v}) + T(\vec{w}) \\ &= \alpha\iota(\vec{v})(T) + \iota(\vec{w})(T) = (\alpha\iota(\vec{v}) + \iota(\vec{w}))(T).\end{aligned}$$

   Comme c'est vrai $\forall T \in E^*$, on a l'identification $\iota(\alpha\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\iota(\vec{v}) + \iota(\vec{w})$ (comme un élément de E^{**}). Donc ι est une transformation linéaire.

3. On sait que $dimE = dimE^* = dimE^{**}$ (ce qui veut dire que ι est surjective). Pour démontrer que ι est un isomorphisme, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$ (que ι est injective).

   Si $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(\iota)$, alors $\iota(\vec{v}) = 0 \implies \forall T \in E^*, T(\vec{v}) = \iota(\vec{v})(T) = 0(T) = 0$, donc $\vec{v}$ est tel que $\forall T \in E^*, T(\vec{v}) = 0$.
   Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, on peut compléter $\vec{v}$ avec une base $\{\vec{v}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ de E et définir $T(\alpha_1\vec{v} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n}) = \alpha_1$. Dans ce cas-là, $T(\vec{v}) = 1 \neq 0$. Ceci est en contradiction avec ce qu'on a démontré. Donc $\vec{v} = 0$, ce qui démontre $\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$.

   Si $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. On a vu que la base duale $\beta^* = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ est une base de E^*.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j.$$

$$(\beta^*)^* = \beta^{**} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n).$$

$$\forall i, \epsilon_i \in E^{**}, \epsilon_i(e^i) = \delta_i^j, \forall i, j. \tag{1}$$

   On va aussi calculer

$$\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j. \tag{2}$$

   $\forall e^j$ de base β^*, on a

$$\epsilon_i(e^j) = \iota(e_i)(e^j), \quad \epsilon_i, \iota(e_i) \in E^{**} = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{R}).$$

   ϵ_i et $\iota(e_i)$ coincident sur une base de E^*, donc

$$\forall i, \epsilon_i = \iota(e_i).$$

   Pour simplifier, parfois on identifie E et E^{**} par l'application ι, c'est-à-dire on met $\vec{v} = \iota(\vec{v})$.

□

Les éléments de E^* sont appelés **les vecteurs covariants**. Les éléments de E^{**} sont appelés **les vecteurs contravariants**.

4.2 Les applications multilinéaires (*tenseurs*)

Définition 4.2 (Applciations k-linéaires)**.** Supposons que $E_1, E_2, \ldots, E_k$, E' sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

$$\alpha : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \longrightarrow E', \quad (\vec{v_i} \in E_i,\ 1 \leq i \leq k, \quad \alpha(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}) \in E'),$$

est une application k-linéaire quand α est linéaire par rapport à chaque coordonnée dans l'un des espaces E_i quand les autres coordonnées (composantes) sont fixées.

C.à.d. α est k-linéaire si $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $a \in \mathbb{R}, \forall \vec{v_i} \in E_i, \vec{w} \in E_i$, on a

$$\alpha(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, a\vec{v_i} + \vec{w}, \ldots, \vec{v_k}) = a\alpha(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_i}, \ldots, \vec{v_k}) + \alpha(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \overbrace{\vec{w}}^{i\text{-ème}}, \ldots, \vec{v_k}).$$

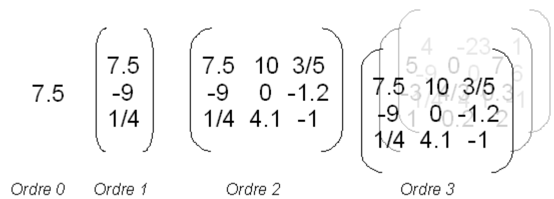

FIGURE 9 – Les scalaires et les vecteurs constituent des exemples simples de tenseurs. Dans une base donnée, un vecteur (tenseur d'ordre 1) peut être représenté par la donnée d'un n-uplet de coordonnées. Les matrices $n \times n$ — qui peuvent représenter suivant les cas des endomorphismes, des bivecteurs ou encore des formes bilinéaires — forment une extension des n-uplets similaire à l'extension que représente les n-uplets par rapport aux scalaires. Les objets descriptibles par des matrices constituent donc les premiers types de tenseurs non triviaux, appelés tenseurs d'ordre 2. En prolongeant la réflexion on peut imaginer, toujours de manière informelle, des matrices cubiques $n \times n \times n$, correspondant aux tenseurs d'ordre 3, et ainsi de suite (Wikipédia).

Exemples

1. $f(x, y) = xy$, $f : \overset{E_1}{\mathbb{R}} \times \overset{E_2}{\mathbb{R}} \to \overset{E'}{\mathbb{R}}$.
2. $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}$,
$$\alpha(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} \qquad \text{2-linéaire.}$$
3. $E_1 = E_2 = E_3 \equiv \mathbb{R}^3$, $E' = \mathbb{R}$.
$$\alpha(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \vec{v_1} \cdot (\vec{v_2} \wedge \vec{v_3}) = det \left(\begin{bmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{bmatrix} \right)_{3\times 3}.$$
Cette application est 3-linéaire.
4. $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}^n$.
$$\alpha(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}) = det \left(\begin{bmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{bmatrix} \right).$$
C'est une application n-linéaire.
5. Le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est une application n-linéaire par rapport à ses colonnes ou bien par rapport à ses lignes.

4.2.1 Quelques notations

E espace vectoriel de dimension finie.
On note $\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.
Remarquons que $\Omega^1(E) = \{\alpha : E \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est linéaire}\} = E^*$.

Proposition 4.1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k.

Démonstration. Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(E), a \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k, on doit montrer deux choses :

1. $\Omega^k(E)$ est stable par les opérations $+$ et $\cdot$ (produit par un scalaire).
2. Il existe une base de cet espace contenant n^k éléments.

Il faut démontrer que $a\alpha + \beta$ est aussi une application k-linéaire sur $E^k = \overbrace{E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$.

$$\begin{aligned}(a\alpha + \beta)(b\vec{v_1} + \vec{w}, \dots) &= a[\alpha(b\vec{v_1} + \vec{w}, \dots)] + \beta(b\vec{v_1} + \vec{w}) \\ &= a[b\alpha(\vec{v_1}, \dots) + \alpha(\vec{w}, \dots)] + b\beta(v_1, \dots) + \beta(\vec{w}, \dots) \\ &= b[a\alpha + \beta](\vec{v_1}, \dots) + [a\alpha + \beta](\vec{w}, \dots)\end{aligned}$$

De même pour chaque $1 \leq i \leq k$.
Pour trouver la dimension de $\Omega^k(E)$, il faudra trouver une base de $\Omega^k(E)$. Pour cela, il faudra d'abord introduire “le produit tensoriel”. □

Définition 4.3 (Produit tensoriel)**.** Supposons que $\alpha : E_1 \times \cdots \times E_k \to \mathbb{R}$ k-linéaire, $\beta : E'_1 \times \cdots \times E'_l \to \mathbb{R}$ l-linéaire.
On définit

$$\alpha \otimes \beta : E_1 \times \cdots \times E_k \times E'_1 \times \cdots \times E'_l \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\alpha \otimes \beta(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}, \vec{v'_1}, \dots, \vec{v'_l}) := \alpha(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k})\beta(\vec{v'_1}, \dots, \vec{v'_l})$$

qui est une application $(k+l)$-linéaire (avec $\vec{v_i} \in E_i, i \in \{1, \dots, k\}, \vec{v'_j} \in E'_j, j \in \{1, \dots, l\}$).

Les applications k-linéaires sont appelées les tenseurs covariants d'ordre k.

Exercice 4.2. On montre que $\otimes$ est une opération associative.
$\forall \alpha, \beta, \gamma$ tenseurs covariants,

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma).$$

Exemple
$E_1 = \mathbb{R}^n, E'_1 = \mathbb{R}^n, k = l = 1$,
$\alpha \in E_1^*, \alpha(\vec{v}) = 2\vec{v} \cdot e_1, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,
$\beta \in E_1'^*, \beta(\vec{v'}) = \vec{v'} \cdot e_1, \forall \vec{v'} \in \mathbb{R}^n$.

$$\alpha \otimes \beta(\vec{v}, \vec{w}) = 2(\vec{v} \cdot e_1)(\vec{w} \cdot e_1)$$

et

$$\beta \otimes \alpha(\vec{v}, \vec{w}) = 2(\vec{w} \cdot e_1)(\vec{v} \cdot e_1).$$

Mais si $\tilde{\beta}(\vec{v'}) = \vec{v'} \cdot e_2$,

$$\alpha \otimes \tilde{\beta}(\vec{v}, \vec{w}) = 2(\vec{v} \cdot e_1)(\vec{w} \cdot e_2),$$
$$\text{mais } \tilde{\beta} \otimes \alpha(\vec{v}, \vec{w}) = 2(\vec{w} \cdot e_1)(\vec{v} \cdot e_2).$$

Le produit tensoriel n'est donc pas commutatif.

$E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$
$\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.

Proposition 4.2. $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k, où $n = dim(E)$.

Démonstration. On rappelle que $\dim(E) = n$, que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et que $(e^1, \ldots, e^n)$ est une base de $E^* = \Omega^1(E)$.

Par exemple si on prend

$$\underbrace{e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1}_{k \text{ fois}} : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R},$$

on aura alors

$$e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}), \vec{v_i} \in E,$$
$$= e^1(\vec{v_1})e^1(\vec{v_2}) \ldots e^1(\vec{v_n}).$$

Posons $\mathscr{A} = \{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid \text{pour } 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_j \leq n\}$.

Il y a n choix pour chaque e^{i_j} (parmi les n vecteurs de la base de E), et il y a k fois qu'on doit faire ce choix pour $1 \leq j \leq k$, alors, au total, on a n^k choix pour les éléments de $\mathscr{A}$, ce qui démontre la proposition 4.2. Il nous reste maintenant à montrer que :

(a) $\mathscr{A}$ engendre $\Omega^k(E)$;

(b) $\mathscr{A}$ est libre.

Soit $\alpha \in \Omega^k(E)$.
On va démontrer que

$$\alpha \stackrel{?}{=} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

Prenons $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}) \in E^k$. On a

$$\vec{v_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i.$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} c_{ik} e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_{i1} \alpha\left(e_i, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{2i}, \dots\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k},$$

on calcule pour $\beta \in \Omega^k(E)$,

$$\beta(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_k} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Mais

$$
\begin{aligned}
\beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) &= \sum_{1 \leq i'_1, \dots, i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, e_{i'_2}, \dots, e_{i'_k}) e^{i'_1} \otimes e^{i'_2} \otimes \dots \otimes e^{i'_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i'_1 \leq \dots \leq i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_k}) e^{i'_1}(e_{i_1}) e^{i'_2}(e_{i_2}) \dots e^{i'_k}(e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i'_1, \dots, i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_k}) \delta^{i'_1}_{i_1} \dots \delta^{i'_k}_{i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\beta(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}) &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_k} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \beta(e_{i_1}, \dots, e_{ik}) \\
&= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_k} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{ik}) \\
&= \alpha(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}).
\end{aligned}
$$

Donc (a) est démontré, comme $\alpha = \beta$ et $\beta \in span(\mathscr{A}) = \langle \mathscr{A} \rangle$, où $\mathscr{A} = \{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\}$.

Montrons que $\mathscr{A}$ est libre. Soit

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} c_{i_1 i_2 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = 0 \in \Omega^k(E).$$

Le même calcul qu'auparavant démontre que

$$0 = 0(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = c_{i_1 \dots i_k}, \forall i_1, \dots, i_k,$$

donc

$$\forall i_1, \dots, i_k, c_{i_1 \dots i_k} = 0,$$

donc $\mathscr{A}$ est libre. □

Remarque 4.2. Si $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $Df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{gathered} Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ \vdots \\ D^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))). \end{gathered}$$

Lemme 4.1. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \{\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \textit{ est 2-linéaire}\} = (\Omega^2(\mathbb{R}^n))^m$.

Démonstration. Pour un élément $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, g(\vec{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

On définit

$$\alpha_g(\vec{v}, \vec{w}) := g(\vec{v})(\vec{w}) \in \mathbb{R}^m.$$

On voit que α_g est une application 2-linéaire.

Supposons que $\alpha_g = \alpha_{g'}$, donc $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \alpha_g(\vec{v}, \vec{w}) = \alpha_{g'}(\vec{v}, \vec{w})$, donc $g(\vec{v})(\vec{w}) = g'(\vec{v})(\vec{w})$. Donc $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, g(\vec{v}) = g'(\vec{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donc $g = g'$. On en déduit que $g \longrightarrow \alpha_g$ est injective. $g \to \alpha_g$ est linéaire, et un argument de dimension peut finir la démonstration. On peut aussi trouver l'inverse de cette transformation linéaire :

Supposons que $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est 2-inéaire. On définit

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \quad g_\alpha(\vec{v})(\vec{w}) := \alpha(\vec{v}, \vec{w}).$$

Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $g_\alpha(\vec{v})$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$ comme α est linéaire en $\vec{w}$, donc $g(\vec{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Comme α est est linéaire en $\vec{v}$, on obtient que g_α est linéaire, et donc $g_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

Notez que l'application $g \to \alpha_g$ et son inverse $\alpha \to g_\alpha$ sont linéaires. □

Par recurrence on peut démontrer que

Lemme 4.2. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))) \simeq (\Omega^k(\mathbb{R}^n))^m$.

Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in U$, $D^k f(x) \in (\Omega^k(\mathbb{R}^n))^m$. Cet espace est de dimension mn^k.

Exemple 4.1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Tx = 2x^1 + 5x^2$. On définit $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\alpha((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1 y^2 - x^2 y^1, \alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$. 27-09-2023

Ecrire le produit tensoriel entre α et T (exercice).

4.2.2 Les applications induites par une transformation linéaire

Si E, F sont deux espaces vectoriels et $T : E \longrightarrow F$ linéaire ($T \in \mathscr{L}(E, F)$). On peut définir une application linéaire

$$T^* : F^* \longrightarrow E^*.$$

Pour $f \in F^*$, on doit déterminer $T^*(f)$ comme un élément de E^*. Alors $T^*(f)$ doit être une application linéaire $T^*(f) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, i.e. $T^*(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall v \in E, (T^*(f))(v) \overset{\text{déf}}{=} f(T(v)) \text{ cf Figure 10.}$$

$$\begin{tikzcd}
v \in E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T^* f = f \circ T"'] & F \arrow[d, "f \in F^*"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 10 – Illustration de T^*

On a $f \in F^*, f \in \mathscr{L}(F, \mathbb{R})$.

$F^* = \Omega^1(F), E^* = \Omega^1(E)$. On peut aussi utiliser la notation $\Omega^1(T)$ pour T^*. On peut ainsi définir pour tout $k \geq 1$, à partir de T,

$$\Omega^k(T) : \underbrace{\Omega^k(F)}_{\alpha} \longrightarrow \underbrace{\Omega^k(E)}_{\beta}.$$

Pour $\alpha \in \Omega^k(E)$, on a besoin que $\underbrace{\Omega^k(T)(\alpha)}_{k\text{-linéaire}} \in \Omega^k(E)$.

$\forall v_1, \ldots, v_k$, on a besoin de définir

$$\underbrace{(\Omega^k(T))(\alpha)}_{\beta \in \Omega^k(E)}(v_1, \ldots, v_k) = \underbrace{\alpha(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k))}_{\in F^k}.$$

Exercice 4.3.

1. Montrer que β est k-linéaire, i.e. $\forall k, \Omega^k(T)(\alpha) \in \Omega^k(E)$.
2. Montrer que $\Omega^k(S \circ T) = \Omega^k(T) \circ \Omega^k(S)$.
3. Montrer que $\Omega^k(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{\Omega^k(E)}$.
4. Montrer que si $T : E \to F$ est inversible, alors

$$\Omega^k(T^{-1}) = (\Omega^k(T))^{-1}.$$

Quelques propriétés Si on a $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$, on a

$$\Omega^k(G) \xrightarrow{\Omega^k(S)} \Omega^k(F) \xrightarrow{\Omega^k(T)} \Omega^k(E).$$

On a $S \circ T : E \longrightarrow G$. Alors

$$\Omega^k(T) \circ \Omega^k(S) \in \Omega^k(G) \longrightarrow \Omega^k(E)$$

et

$$\Omega^k(S \circ T) : \Omega^k(G) \longrightarrow \Omega^k(E).$$

On considère $\mathrm{id}_E : E \to E$. Alors

$$\Omega^k(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{\Omega^k(E)}.$$

On rappelle que l'on peut associer à un vecteur $v \in E$ un vecteur contravariant $\iota(v) \in E^{**}$. On définit alors, $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 1$,

$$\Omega_l(E) \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{l \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } l\text{-linéaire}\} = \Omega^l(E^*),$$

avec la base $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_l} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq l\}$.

On a $\dim(\Omega_l(E)) = n^l$ et $\forall \alpha \in \Omega_l(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq n} \alpha(e^{i_1}, \ldots, e^{i_l}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_l}.$$

Pour $T : E \longrightarrow F$, $\Omega_l(T) : \Omega_l(E) \to \Omega_l(F)$ (objets contravariants pour la dualité), avec $\alpha \in \Omega_l(E), \beta = \Omega_l(T)(\alpha) \in \Omega_l(F)$.

On va essayer de définir

$$\beta(\underbrace{f_1, \ldots, f_l}_{f_j \in F^*}) = \Omega_l(T)(\alpha)(f_1, \ldots, f_l) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(\underbrace{T^*(f_1), \ldots, T^*(f_l)}_{T^*(f_j) \in E^*}).$$

On a alors le schéma suivant :

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$$
$$\Omega_l(E) \underset{\Omega_l(T)}{\longrightarrow} \Omega_l(F) \underset{\Omega_l(S)}{\longrightarrow} \Omega_l(G).$$

4.2.3 Les (l, k)-tenseurs

Définition 4.4. Pour tous k, l, on a

$$\Omega_l^k(E) \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{l \text{ fois}} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$$

qui a pour base

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n, 1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n\}.$$

On a $\dim(\Omega_l^k) = n^{k+l}$. Pour $\alpha \in \Omega_l^k(E)$, on peut démontrer

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n}} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_l}) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

Parenthèse sur les notations En physique, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_l}} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l}.$$

et on dit : si α est un (l, k) tenseur, alors α est la collection de valeurs $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$, mais avec les règles de changement de coorodonnées qui sont obtenues de manières suivantes :

Si $T : E \to E$ est donnée, alors $\Omega_l^k(T)(\alpha)$ est donnée maintenant par les coefficients

$$b_{\tilde{i_1}, \ldots, \tilde{i_k}}^{\tilde{j_1}, \ldots, \tilde{j_l}} = \text{expressions en termes de } a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} \text{ et les coefficients de la matrice de } T.$$

4.3 Produit scalaire

Les produits scalaires sur un espace vectoriel sont des tenseurs 2-covariants.

Définition 4.5 (Produit scalaire)**.** Une application $\alpha : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire quand

1. $\alpha \in \Omega^2(E)$;
2. α est symétrique, i. e.
$$\forall v, w \in E,\ \alpha(v,w) = \alpha(w,v).$$
3. α est définie positive, i.e. $\forall v \in E, \alpha(v,v) \geq 0$ et $\alpha(v,v) = 0 \iff v = 0$. En particulier, si $v \neq 0$, alors $\alpha(v,v) > 0$.

α dans une base est donnée par les coefficients $a_{i,j}, 1 \leq i,j \leq n$. Par exemple, on considère

$$v = \sum x^i e_i, w = \sum y^i e_i, \alpha = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{3}$$

Dans ce cas, on a

$$\alpha(v,w) = \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j\right)\left(\sum_k x^k e_k, \sum_l y^l e_l\right) \tag{4}$$
$$= \sum_{i,j,k,l} a_{ij} e^i(e_k) e^j(e_l) x^k y^l = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} \delta^i_k \delta^j_l x^k y^l = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j. \tag{5}$$

Donc un produit scalaire est un (0, 2)-tenseur.

4.4 Les tenseurs extérieurs

Pour aller vers les formes différentielles, on a besoin d'une sous-catégorie de $\Omega^k_l(E)$ qui sont appelés les tenseurs extérieurs. Voici quelques définitions.

Définition 4.6.

1. On dit que σ est une permutation d'ordre k quand
$$\sigma : \{1, \ldots, k\} \longmapsto \{1, \ldots, k\}$$
est une bijection. On note $\sigma_i := \sigma(i)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est l'ensemble des permutations d'ordre k. L'ensemble S_k muni de la loi $\circ$ est un groupe. On dit qu'une permutation est une transposition quand il existe $i \neq j$ tels que
$$\sigma_i = j, \sigma_j = i, \sigma_s = s, \forall s \notin \{i,j\}.$$
$\forall \sigma \in S_k, \exists \sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(l)}$ tel que
$$\sigma = \sigma_{(1)} \ldots \sigma_{(l)}, \tag{6}$$
et chaque $\sigma_{(s)}$ est une transposition. Cette décomposition n'est pas unique, mais dans toutes les décompositions comme dans 6, la parité de l ne change pas.
On définit
$$\begin{matrix}\mathrm{sgn}(\sigma) \\ \epsilon(\sigma)\end{matrix} := \begin{cases} 1 \text{ si } l \text{ est paire,} \\ 0 \text{ si } l \text{ est impaire.}\end{cases}$$

Définition 4.7. $\alpha \in \Omega^k(E)$ est dite un **tenseur extérieur** (aussi appelé tenseur antisymétrique) si

$$\forall v_1, \ldots, v_k \in E, \forall \sigma \in S_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k).$$

Proposition 4.3. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est extérieur ;
2. $\forall \sigma \in S_k$ telle que σ est une transposition,
$$\forall v_1, \ldots, v_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \ldots, v_k);$$
3. $\forall v_1, \ldots, v_k \in E$, s'il existe $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $v_i = v_j, i \neq j$, alors $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Démonstration.

1. (1) $\implies$ (2). On a sgn(transposition) $= -1$.
2. (2) $\implies$ (3). Donné i, j tels que $v_i = v_j, i \neq j$. On considère la transposition qui échange i et j et on a
$$\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \ldots, v_k),$$
mais $(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = (v_1, \ldots, v_k)$ comme $v_i = v_j$ et donc
$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_k) \implies \alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$
3. (2) $\implies$ (1). Si $\sigma = \sigma_{(1)} \ldots \sigma_{(l)}$, avec pour tout j, $\sigma_{(j)}$ est une transposition, alors
$$\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = (-1)^l \alpha(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k).$$
4. (3) $\implies$ (2). σ est une transposition telle que $\sigma_i = j, \sigma_j = i$. Les $v_1, \ldots, v_k$ sont donnés. On écrit :
$$\alpha(v_1, \ldots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } i}, \ldots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } j}, \ldots, v_k) = 0.$$
Mais
$$\begin{aligned} &\alpha(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k) && (7)\\ &= \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k) && (8)\\ &= \underbrace{\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k)}_{=0} + \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) && (9)\\ &+ \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \underbrace{\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_k)}_{=0}. && (10)\end{aligned}$$
On a d'une part $9 + 10 = 0$ et d'autre part :
$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = -\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_i}, \ldots, v_{\sigma_j}, \ldots, v_{\sigma_k}),$$
ce qui donne le résultat souhaité.

□

Exemple 4.2.

1. $\alpha(v,w) = \alpha((v^1,v^2),(w^1,w^2)) = v^1w^2 - v^2w^1$. On vérifie facilement qu'il est antisymétrique.
2. Plus généralement, pour chaque $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^k$,

$$\alpha(v_1,\dots,v_k) = \det[v_1\ v_2\ \dots\ v_k]$$

est un tenseur extérieur.

Corollaire 4.1. *Si la famille $\{v_1,\dots,v_k\}$ n'est pas libre (i.e.linéairement dépendante), $\alpha(v_1,\dots,v_k) = 0$.*

Démonstration. Si la famille n'est pas libre, il existe i tel que $v_i = \sum_{j\neq i} c_j v_j$ et la démonstration est la même que pour la proposition 4.3. □

On suppose que $\dim(E) = n$ et $k > n$. Si $\alpha \in \Omega^k(E)$ est un tenseur extérieur, alors, comme $\{v_1,\cdots,v_k\}$ ne peut pas être libre dans E, on obtient :

$$\forall v_1,\dots,v_k \in E, \alpha(v_1,\dots,v_k) = 0.$$

On définit maintenant l'ensemble des tenseurs extérieurs, à savoir

$$\Lambda^k(E) \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Omega^k(E), \alpha \text{ est tenseur extérieur}\}.$$

Proposition 4.4. $\Lambda^k(E)$ est un sous-espace vectoriel, i. e.

$$\forall \alpha,\beta \in \Lambda^k(E) \text{ et } c \in \mathbb{R}, (c\alpha+\beta) \in \Lambda^k(E).$$

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?
On cherche une base pour $\Lambda^k(E)$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ base de E, $(e'_1,\dots,e'_n)$ base duale, alors

$$\{e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

est une base de $\Omega^k(E)$.
On va définir pour chaque choix d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ un élément extérieur $\epsilon^{i_1i_2\dots i_k}$ comme un élément proposé de base de $\Lambda^k(E)$ par la formule

$$\epsilon^{i_1\dots i_k}(v_1,\dots,v_k) = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}(v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_k}).$$

Exemple 4.3.

$$\epsilon^{12}(v_1,v_2) = e^1\otimes e^2(v_1,v_2) - e^1\otimes e^2(v_2,v_1) = e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^2(v_1).$$

Proposition 4.5. $\epsilon^{i_1\dots i_k} \in \Lambda^k(E)$, autrement dit $\epsilon^{i_1\dots i_k}$ est un **tenseur extérieur**.

Démonstration. Soit $\tau \in S_k$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}\epsilon^{i_1\dots i_k}(v_{\tau_1},\dots,v_{\tau_k}) &= \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1},\dots,v_{\sigma\tau_k})\\ &= \operatorname{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1},\dots,v_{\sigma\tau_2}).\end{aligned}$$

Donc pour $\sigma' = \sigma\tau$

$$\epsilon^{i_1\dots i_k}(v_{\tau_1},\dots,v_{\tau_k}) = \operatorname{sgn}(\tau)\sum_{\sigma'\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma')e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}(v_{\sigma'_1},\dots,v_{\sigma'_k}) = \operatorname{sgn}(\tau)\epsilon^{i_1\dots i_k}(v_1,\dots,v_k).$$

□

Il existe une autre manière pour proposer des éléments de base $\forall 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ et $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$. On va définir

$$\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) \overset{\text{déf}}{=} \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\dots\delta^{i_k}_{j_k}.$$

Si $j_s = j_l$ pour $s \neq l$, alors $\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k} = 0$ par définition.

Si $j_1,\dots,j_k$ sont k indices différents, mais pas dans l'ordre croissant, on les réordonne par une permutation $\sigma \in S_k$ avec $1 \le \sigma_{j_1} < \dots < \sigma_{j_k} \le n$. On définit

$$\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{sgn}(\sigma)\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k}(e_{\sigma_{j_1}},\dots,e_{\sigma_{j_k}}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\delta^{i_1}_{\sigma_{j_1}}\dots\delta^{i_k}_{\sigma_{j_k}}.$$

$\overline{\epsilon}$ est prolongé par k-linéarité sur tout élément $(v_1,\dots,v_k) \in E^k$.

Exercice 4.4. Est-ce que on a $\overline{\epsilon} = \epsilon$ pour tout choix de $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$?

Théorème 4.3. *$\{\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k}$, pour tout $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$ forme une base pour $\Lambda^k(E)$, l'espace vectoriel des tenseurs extérieurs.*

Démonstration.

1. Ils sont libres. En effet,

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} c_{i_1\dots i_k}\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k} = 0\\ \implies &\forall 0 \le j_1 < \dots < j_k \le n, \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} c_{i_1\dots i_k}\overline{\epsilon}^{i_1\dots i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = 0\\ \implies &0 = \sum_{1\le i_1<\dots i_k\le n} c_{i_1\dots i_k}\delta^{i_1}_{j_1}\dots\delta^{i_k}_{j_k} = c_{j_1\dots j_k}.\end{aligned}$$

2. Ils génèrent $\Lambda^k(E)$: exercice.

□

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$ *?*

C'est $\dim(\Lambda^0(E)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On avait déjà observé que $\Lambda^k(E) = \{0\}$ si $k > n$. Par convention, $\dim(\Lambda^0(E)) = 1$ et $\Lambda^k(E) = \mathbb{R}$, $\Lambda^k(E) = \{0\}$ si $k < 0$. On a

$$\Lambda^1(E) = E^*, \quad \dim(\Lambda^1(E)) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

et

$$\Lambda^n(E) = \mathbb{R}, \quad \dim(\Lambda^n(E)) = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1.$$

En générale

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \dim(\Lambda^{n-k}(E)) = \dim(\Lambda^k(E)).$$

Proposition 4.6. Si $\alpha \in \Lambda^k(F)$, $T \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $(\Omega^k(T))(\alpha) \in \Lambda^k(E)$, avec $\Omega^k(T) : \Omega^k(F) \longrightarrow \Omega^k(E)$.

Démonstration. Si $\beta = (\Omega^k(T))(\alpha)$, $v_1, \ldots, v_k \in E$,

$$\beta(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(T(v_1), \ldots, T(v_k)).$$

Si $i \neq j, v_i = v_j$, alors $T(v_i) = T(v_j)$ et $\alpha(T(v_1), \ldots, T(v_k)) = 0$, donc $\beta(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Donc $\beta \in \Lambda^k(E)$. □

On écrit

$$\Lambda^k(T) \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k(T)_{|\Lambda^k(E)}.$$

Exemple 4.4.

1. Si $k = 1$, toute application $\alpha \in \Omega^1(E) = E^*$ est extérieur par définition, donc

$$\Lambda^1(E) = \Omega^1(E).$$

2. Si $k = n$, on a $\dim(\Lambda^k(E)) = 1$ et

$$\bar{\epsilon}^{1\ldots n}(e_1, \ldots, e_n) = 1 \text{ et } \bar{\epsilon}^{12\ldots n}(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Si $k = 2 = n$, on a

$$\bar{\epsilon}(e_1, e_2) = 1, \bar{\epsilon}(e_2, e_1) = -1, \bar{\epsilon}(e_1, e_1) = 0, \bar{\epsilon}(e_2, e_2) = 0.$$

et $\bar{\epsilon}(v, w) = -\bar{\epsilon}(w, v)$. Si $v = (x^1, x^2), w = (y^1, y^2)$. Donc

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}(v, w) &= \bar{\epsilon}(x^1 e_1 + x^2 e_2, y^1 e_1 + y^2 e_2) \\ &= \ldots \text{ on développe grâce à la linéarité de l'application } = x^1 y^2 - x^2 y^1.\end{aligned}$$

C'est le déterminant formé par les vecteurs v, w, à savoir l'aire du parallélogramme formé par v, w.

Donc

$$\bar{\epsilon}^{12\ldots n}(v_1, \ldots, v_n) = \det[v_1 \ \ldots \ v_n].$$

C'est le volume n-dimensionnel signé de parallélipipède crée par $(v_1, \ldots, v_n)$ (ordonné). On dit que $\bar{\epsilon}^{1\ldots n}$ est l'élément de volume sur $\Lambda^k(E)$ et on va le noter par $\omega = \bar{\epsilon}^{1\ldots n}$.

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \text{ volume signé de parallélipipède créé par } v_1, \ldots, v_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Remarque 4.3 (Sur les notations)**.** Parfois on représente les éléments de E comme les vecteurs de colonne

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = |\vec{v}\rangle, \text{ avec } \vec{v} = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$$

et les éléments de E^* comme les vecteurs de ligne par rapport à la base duale.

$$\vec{a} = y^1 e^1 + \cdots + y^n e^n, \langle \vec{a}| = [y^1 \ \ldots \ y^n].$$

Pour $\vec{a} \in E^*$, pour $\vec{v} \in E$,

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{v}) &= \sum_{i=1}^{n} y^i x^i = \langle \vec{a} \mid \vec{v} \rangle \\ &= [y^1 \ \ldots \ y^n] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.4.1 Le déterminant

Dans le cas général, $\omega = \bar{\epsilon}^{1\ldots n} \in \Lambda^k(E)$ est le seul élément de base pour cet espace de dimension 1. Si $T : E \to E$ transpormation linéaire $\Lambda^k(T) : \Lambda^k(E) \longrightarrow \Lambda^k(E)$, mais $\dim(\Lambda^n(E)) = 1$, donc il existe $c \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \Lambda^n(E), \Lambda^n(T)(\alpha) = c\alpha$. Ce constant c est important :

Définition 4.8. $\det(T) := c$.

Exercice 4.5. Si $E = \mathbb{R}^n, T(v) = A|\vec{v}\rangle$ pour la base standard, alors $\det(T) = \det(A)$.

On considère $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$,

$$(\Lambda^n(T))(\alpha)(w_1, \ldots, w_n) = \alpha(T(w_1), \ldots, T(w_n)) = \det(T)\alpha(w_1, \ldots, w_n).$$

On choisit $\alpha = \omega = \bar{\epsilon}^{12\cdots n}, w_i = e_i$.

$$\omega(T(e_1), \ldots, T(e_n)) = \det(T)\omega(e_1, \ldots, e_n) = \det(T). \tag{11}$$

Mais on avait déjà remarqué que

$$\omega(T(e_1), \ldots, T(e_n)) = \det[T(e_1), \ldots, T(e_n)]. \tag{12}$$

$11, 12$ impliquent que $\det(T) = \det(A)$.
$\det(T)$ est défini directement indépendemment d'une base de E.

Lemme 4.3. *(exercice)* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *sont linéairement dépendants, si et seullement si* $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 0$. ($\omega(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$*, si et seulement si* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *famille libre.)*

On a

$$\Lambda^n(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{\Lambda^n(E)},$$

donc $\mathrm{id}_{\Lambda^n(E)}(\alpha) = \alpha = 1\alpha \implies \det(\mathrm{id}_{\Lambda^n(E)}) = 1$.
De plus, pour $T : E \to E, S : E \to E$,

$$\Lambda^n(S \circ T) = \Lambda^n(T) \circ \Lambda^n(S) \implies \det(S \circ T) = \det(S)\det(T).$$

Si T est inversible, alors

$$\begin{aligned} \Lambda^n(E)(T \circ T^{-1}) &= \Lambda^n(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \Lambda^n(T^{-1}) \circ \Lambda^n(T) &= \mathrm{id}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \det(T)\det(T^{-1}) &= 1. \end{aligned}$$

Si T est inversible, on a $\det(T) \neq 0$ et

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}.$$

Aussi $\det(T) \neq 0 \implies T$ est inversible. Etant donné $(e_1, \ldots, e_n)$, on doit démontrer que $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ forment une famille libre.

$$\omega(T(e_1), \ldots, T(e_n)) = \Lambda^n(T)(\omega)(e_1, \ldots, e_n) = (\det(T))\omega(e_1, \ldots, e_n) = \det(T) \cdot 1 \neq 0.$$

Comme ω est extérieur, par le lemme, $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ ne peut pas être linéairement dépendant.
Aussi, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont libres, on définit $Te_i = v_i, T : E \to E$ devient inversible, donc $\det(T) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(T) &= \det(T)\omega(e_1, \ldots, e_n) = (\Lambda^n(T))(\omega)(e_1, \ldots, e_n) \\ &= \omega(T(e_1), \ldots, T(e_n)) = \omega(v_1, \ldots, v_n) \implies \omega(v_1, \ldots, v_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Calcul du déterminant :
$T : E \to E, (e_1, \ldots, e_n)$ base de E,

$$Te_i = A|e_i\rangle = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}e_j.$$

$$\det(T) = \omega(T(e_1), \ldots, T(e_n)) = \omega(\sum_{j=1}^{n} A_{j1}e_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} A_{jn}e_j)$$

$$= \sum_{j1} \ldots \sum_{jn} A_{j_11}A_{j_22} \ldots A_{j_nn}\omega(e_{j1}, \ldots, e_{jn}) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma_11}A_{\sigma_22} \ldots A_{\sigma_nn} \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\implies \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)A_{\sigma_11}A_{\sigma_22} \ldots A_{\sigma_nn}.$$

4.5 Les éléments de volumes et orientation

On a défini

$$\omega = \epsilon^{12\ldots n} \in \Lambda^n(E).$$

Cet élément dépend du choix de la base.

Définition 4.9. On dit que ω est un élément de volume sur E, avec $\dim(E) = n$ si $\omega \in \Lambda^n(E)$ et $\omega \neq 0$.

Remarque 4.4. Si $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^n(E)$ sont deux éléments de volume, alors il existe $c \neq 0, c \in \mathbb{R}$ tel que $\omega_1 = c\omega_2$.

Définition 4.10. On dit qu'une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E (base arbitraire *ordonnée*) a l'orientation positive (négative) ou est orientée positivement (négativement) par rapport à ω, qui est élément de volume donné sur E, quand $\omega(e_1, \ldots, e_n) > 0$, (resp. $\omega(e_1, \ldots, e_n) < 0$).

Si $\omega = \epsilon^{12\ldots n}$ construit à partir de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une base orientée positivement par rapport à ω, alors, par rapport à l'application linéaire $T : E \longrightarrow E, T(e_i) = e'_i$, on a $\det(T) > 0$.

Démonstration. En exercice. □

La réciproque est aussi vraie.

Définition 4.11. $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ sont deux bases données. On dit qu'elles sont de même orientation lorsqu'il existe $\omega \in \Lambda^n(E)$ élément de volume tel que $\omega(e_1, \ldots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \ldots, e'_n)$ sont de même signe.

Lemme 4.4. *Si un tel ω dans la définition existe, alors $\forall \omega \in \Lambda^n(E)$, $\omega(e_1, \ldots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \ldots, e'_n)$ ont le même signe.*

Démonstration. En exercice. □

Remarque 4.5. Etre de la même orientation est une relation d'équivalence sur la collection de bases sur E. Il y a deux classes d'équivalence.

Si on fait la théorie sur $\mathbb{C}$ (qui n'est pas un corps ordonné), on ne peut pas définir une orientation. Si $\omega(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}$, il n'y a pas de signe (c.f. variété de type Kähler).

4.6 Produit extérieur

On définit

$$\Lambda^*(E) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^k(E) = \bigoplus_{0\leq k\leq n} \Lambda^k(E).$$

En général, $\alpha \otimes \beta$ n'est pas un tenseur extérieur. On cherche un produit $\wedge$ qui nous donne

$$\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E).$$

Si on essaie de mettre

$$\alpha \times \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k+l}}).$$

Ce produit est tel que $\alpha \times \beta$ est antisymétrique, mais défini de cette façon, il n'est pas associatif.

Définition 4.12. $\Lambda^k(E) \times \Lambda^l(E) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+l}(E)$, avec $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est défini comme l'élément de $\Omega^{k+l}(E)$ par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{k+l}).$$

Lemme 4.5. $\alpha \in \Lambda^k, \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E)$.

Démonstration. Prenons $\tau \in S_{k+l}$. On a

$$\begin{aligned}
&\alpha \wedge \beta(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}, v_{\tau_{k+1}}, \ldots, v_{\tau_{k+l}}) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{(\sigma\tau)_1}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_k})\beta(v_{(\sigma\tau)_{k+1}}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_{k+l}}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{(\sigma\tau)_1}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_k})\beta(v_{(\sigma\tau)_{k+1}}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_{k+l}}) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau)\Big(\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\alpha(v_{(\sigma\tau)_1}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_k})\beta(v_{(\sigma\tau)_{k+1}}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_{k+l}})\Big) \\
&\overset{\sigma'\equiv\sigma\tau}{=} \operatorname{sgn}(\tau)\Big(\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma'\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma')\alpha(v_{\sigma'_1}, \ldots, v_{\sigma'_k})\beta(v_{\sigma'_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma'_{k+l}})\Big) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau)\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots v_{k+l}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.7. (exercice) Si $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E), \gamma \in \Lambda^s(E)$, alors

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Donc on peut parler sans confusion de $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \Lambda^{k+l+s}(E)$.

Donc on peut généraliser le produit sur m tenseurs extérieurs $\alpha_i \in \Lambda^{k_i}, 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m(v_1, \ldots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \ldots, v_{k_1+k_2}, \ldots, v_{\sum_{i=1}^{m-1} k_i}, \ldots, v_{\sum_{i=1}^{m} k_i}) \\
&= \frac{1}{k_1! \ldots k_m!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+\cdots+k_m}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_{k_1}}) \alpha_2(\ldots) \ldots \alpha_m(\ldots).
\end{aligned}$$

Exemple 4.5.

$$\begin{aligned}
\epsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma_1}) \ldots e^{i_k}(v_{\sigma_k}) \\
&= \frac{1}{1! \ldots 1!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma_1}) \ldots e^{i_k}(v_{\sigma_k}).
\end{aligned}$$

Si on met $m = k, k_1 = \cdots = k_m = 1, \alpha_j = e^{i_j} \in \Lambda^1(E), 1 \leq j \leq k$, on voit que

$$\epsilon^{i_1 \ldots i_k} = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Exercice 4.6. Montrer que $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}$, avec $0 < i_1 < \ldots < i_k \leq n, 0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ qui montre que

$$\epsilon^{i_1 \ldots i_k} = \overline{\epsilon}^{i_1 \ldots i_k}.$$

Donc pour $n = m$, on obtient $\epsilon^{12 \ldots n} = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$. Donc l'élément de volume ω associé à une base ordonnée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est simplement $\omega = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$.

Exemple 4.6. Si $\alpha_i \in \Lambda^1(E), v_i \in E$,

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma_1}) \ldots \alpha_m(v_{\sigma_m}) = \det[\alpha_i(v_j)].$$

Exemple 4.7. $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

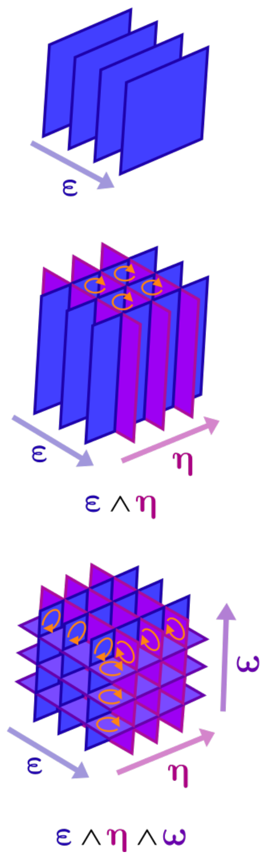

Figure 11 – Interprétation géométrique du produit extérieur de n 1-formes ε, η, ω pour $n = 1, 2, 3$. Les flèches circulaires correspondent à l'orientation (Wikipédia).

$$\alpha_1(x^1, x^2, x^3) = x^1 + x^2, \alpha(x^1, x^2, x^3) = x^3,$$
$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0).$$

$m = 2, n = 3.$

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1(v_{\sigma_1})\alpha_2(v_{\sigma_2})$$
$$= \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_2(v_1)\alpha_1(v_2) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

Proposition 4.8. $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, alors
$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha.$$

En particulier, si k est impair,
$$\forall \alpha \in \Lambda^k(E), \alpha \wedge \alpha = 0,$$
parce que dans ce cas, on a $\alpha \wedge \alpha = (-1)\alpha \wedge \alpha$.

Démonstration.

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k+l}})$$

$$\beta \wedge \alpha(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\beta(v_{\sigma_1}, \cdots, v_{\sigma_l})\alpha(v_{\sigma_{l+1}}, \ldots, v_{\sigma_{l+k}}).$$

On doit introduire τ par

$$\forall i \in \{1, \cdots, l\}\ \tau_i := i + k, \quad \forall i \in \{l+1, \cdots, l+k\}\ \tau_i := i - l.$$

et on observe que telle que $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^{kl}$ (exercice). Maintenant

$$\begin{aligned}\beta \wedge \alpha(v_1, \ldots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\beta(v_{\sigma_1}, \cdots, v_{\sigma_l})\alpha(v_{\sigma_{l+1}}, \ldots, v_{\sigma_{l+k}}) \\ &\overset{\sigma=\sigma'\tau}{=} \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma' \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma')\beta(v_{\sigma'_{l+1}}, \ldots, v_{\sigma'_{l+k}})\alpha(v_{\sigma'_1}, \cdots, v_{\sigma'_k}) \\ &= (-1)^{kl}\alpha \wedge \beta.\end{aligned}$$

□

Proposition 4.9. Soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout k, $\Lambda^k(T) : \Lambda^k(F) \longrightarrow \Lambda^k(E)$, pour $\alpha \in \Lambda^k(F), \beta \in \Lambda^l(F)$,

$$\underbrace{\Lambda^{k+l}(T)(\alpha \wedge \beta)}_{\in \Lambda^{k+l}(E)} = \underbrace{\Lambda^k(T)(\alpha)}_{\in \Lambda^k(E)} \wedge \underbrace{\Lambda^l(T)(\beta)}_{\in \Lambda^l(E)}.$$

La relation entre le produit extérieur $\wedge$ et le produit extérieur des vecteurs de $\mathbb{R}^3$: soient $v_1 = (x^1, x^2, x^3)$ et $v_2 = (y^1, y^2, y^3)$.

$$v_1 \times v_2 := (x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1).$$

Penser à v_1, v_2 comme des éléments de $(\mathbb{R}^3)^*$, donc comme des éléments de $\Lambda^1((\mathbb{R}^3)^*)$.

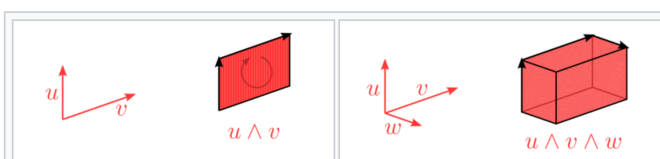

FIGURE 12 – Illustration du produit extérieur de vecteurs pour 2 et 3 vecteurs.

Quels sont les coefficients de $v_1 \wedge v_2$ dans la base $\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$?

$$\begin{aligned}v_1 \wedge v_2 &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} v_1 \wedge v_2(e^{i_1}, e^{i_2})\epsilon_{i_1 i_2} = v_1 \wedge v_2(e^1, e^2)\epsilon_{12} + v_1 \wedge v_2(e^2, e^3)\epsilon_{23} + v_1 \wedge v_2(e^1, e^3)\epsilon_{13} \\ &= [v_1(e^1)v_2(e^2) - v_1(e^2)v_2(e^1)]\epsilon_{12} + [v_1(e^2)v_2(e^3) - v_2(e^2)v_1(e^3)]\epsilon_{23} + [v_1(e^1)v_2(e^2) - v_2(e^1)v_1(e^3)]\epsilon_{13} \\ &= (e^1(v_1)e^2(v_2) - e^2(v_1)e^1(v_2))\epsilon_{12} + (e^2(v_1)e^3(v_2) - e^2(v_2)e^3(v_1))\epsilon_{23} + (e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^3(v_1))\epsilon_{13} \\ &= (x^1y^2 - x^2y^1)\epsilon_{12} + (x^2y^3 - x^3y^2)\epsilon_{23} + (x^1y^3 - x^3y^1)\epsilon_{13}.\end{aligned}$$

Donc si on choisit la base $\{\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}\}$, on obtient $\epsilon_{31} = -\epsilon_{13} = e_1 \wedge e_3$. On obtient les coordonnées dans la base ordonnée $(\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12})$ de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ de $v_1 \wedge v_2 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ est donnée par $v_1 \times v_2$.

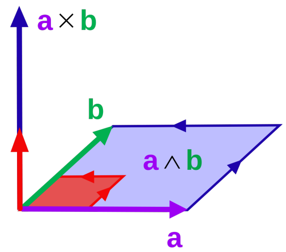

FIGURE 13 – The cross product (blue vector) in relation to the exterior product (light blue parallelogram). The length of the cross product is to the length of the parallel unit vector (red) as the size of the exterior product is to the size of the reference parallelogram (light red) (Wikipédia).

4.7 Contraction d'un tenseur par vecteur

Définition 4.13 (Contraction d'un tenseur par vecteur)**.** Soit $X \in E$. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(E), 1 \leq k \leq n$. $i_X(\alpha) \in \Omega^{k-1}(E)$ pour

$$i_X(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(X, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

On a $\Omega^0 \simeq \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \Omega^1(E) = E^*$, on a $i_X(\alpha) = \alpha(X) \in \mathbb{R}$. En particulier, i_X est défini sur $\Lambda^k(E)$ pour tout k.

Lemme 4.6. *$X \in E, \alpha \in \Lambda^k(E)$, alors $i_X(\alpha) \in \Lambda^{k-1}(E)$.*

Démonstration. Pour $v_i = v_j, i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, donc

$$i_X(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(X, v_1, \ldots, v_{k-1}) = 0$$

□

Proposition 4.10.
1. $X \longrightarrow i_X$ est linéaire dans le sens que
   (a) $i_{X+Y} = i_X + i_Y$,
   (b) $i_{cX} = c i_X$.
2. Si on considère i_X restreint à $\Lambda^*(E)$, on a $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$ et $i_X \circ i_X = 0$.
3. Pour $i_{X_{|\lambda^*(E)}}$, on a, pour $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$,

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta).$$

Remarque 4.6. Supposons que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, avec $\dim(F) = n-1, \dim(E) = n$, $X \notin F$ et ω est un élément de volume en E, alors $\omega \in \Lambda^n(E)$. Alors $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$ va être un élément de volume pour F. En effet $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(E)$. Donc quand on dit que $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$, on est en train de considérer $\Lambda^{n-1}(I_F)(i_X(\omega)) = i_X(\omega)_{|F^{n-1}}$ en réalité :

$$I_F : F \longrightarrow E \text{ est une injection } \implies \Lambda^{n-1}(E) \overset{\Lambda^{n-1}(I_F)}{\longrightarrow} \Lambda^{n-1}(F),$$

$$\Lambda^{n-1}(I_F)(\alpha)(v_1, \dots, v_{n-1}) = \alpha(v_1, \dots, v_{n-1}), v_i \in F.$$

Donc $\Lambda^{n-1}(I_F)(\alpha)$ est simplement la restriction de $\alpha : E^{n-1} \to \mathbb{R}$ sur le sous-espace F^{n-1}.

5 Analyse tensorielle sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$

5.1 Motivation

18-10-2023

On veut faire de l'analyse (calcul différentiel) sur les surfaces, courbes, variétés (les objets courbes de dimensions supérieures).

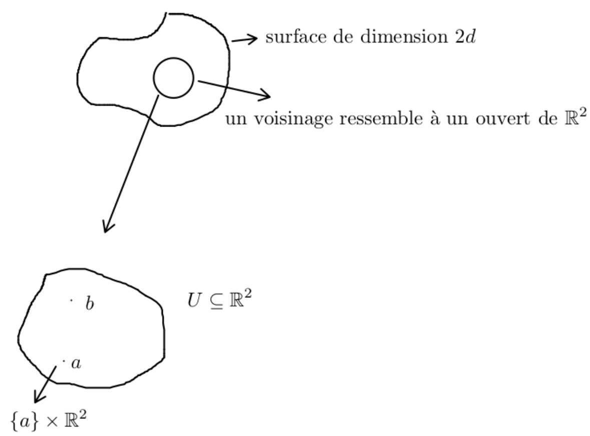

Figure 14 – Dans ce cas, $\mathbb{R}^2$ est tangent partout.

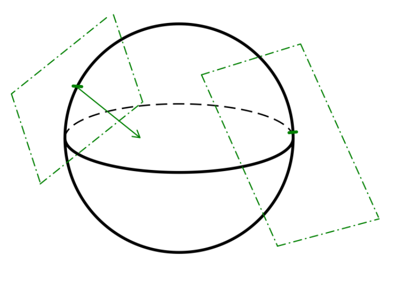

Figure 15 – Dans ce cas, chaque vecteur tangent est à l'intérieur du plan tangent et chaque plan tangent est différent.

5.2 L'espace tangent

Définition 5.1. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert. Pour tout $a \in U$, l'espace tangent

$$T_aU \overset{\text{déf}}{=} \{a\} \times \mathbb{R}^n,$$

et est muni d'un espace vectoriel de manière suivante :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \underbrace{(a,u)}_{\in T_aU} + (a,v) = (a, u+v),$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, r(a,u) = (a, ru).$$

T_aU devient un espace vectoriel linéairement isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Géométriquement on peut penser à T_aU comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ basé en un point a.

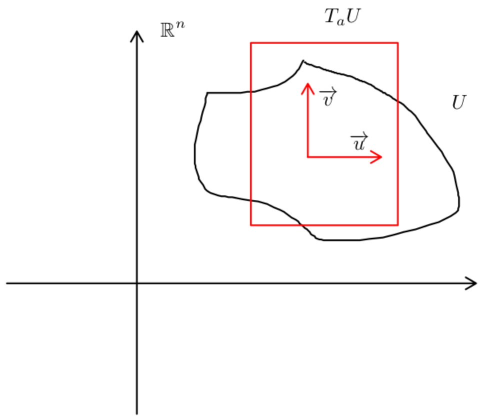

FIGURE 16 – Exemple d'un plan tangent à U.

5.3 Dérivation d'une fonction

Définition 5.2. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in U, Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. C'est une application linéaire. On va définir

$$d_af = df(a) : T_aU \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

avec

$$\underbrace{df((a, \vec{v}))}_{a\in U, \vec{v}\in\mathbb{R}^n} = Df(a)(\vec{v}).$$

Si $a \neq b$, d_af ne peut pas agir sur T_aU (formellement, ce n'est pas défini.

On dit que d_af est la dérivée (ou la différentielle) de f au point a.

Remarque 5.1. Si $m = 1$, $d_af \in \mathscr{L}(T_aU, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $d_af \in (T_aU)^*$.

Remarque 5.2 (Notation)**.** $T_a^*U \overset{\text{déf}}{=} (T_aU)^* \simeq \{a\} \times (\mathbb{R}^n)^*$.

5.4 Fibrés tensoriels

Définition 5.3. Le fibré tangent sur U est

$$TU \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{a\in U} \underset{(a,\vec{v}),\vec{v}\in\mathbb{R}^n}{T_aU} \simeq U \times \mathbb{R}^n$$

et le fibré cotangent est

$$T^*U \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{a\in U} \underset{(a,f),f\in(\mathbb{R}^*)^n}{T_a^*U} \simeq U \times (\mathbb{R}^*)^n.$$

Avec ce formalisme, la différentielle de $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par $df : U \longrightarrow T^*U$ et $\forall a \in U, df(a) = d_af \in T_a^*U \subseteq T^*U$.

Remarque 5.3. ⚠ Une condition nécessaire pour qu'une application $\alpha : U \longrightarrow T^*U$ soit une différentielle soit dans la forme $\alpha = df$ est que pour tout $a \in U, \alpha(a) \in T_a^*U$.

Si on définit $\pi : T_a^*U \longrightarrow U$ par $\pi(a,f) = a$, cette condition nécessaire est équivalente que de dire que $\pi \circ \alpha = \mathrm{id}_U$.

Exemple 5.1 (De différentielle)**.** Projection sur le composant j :

On a $x^j : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$x^j(a_1,\ldots,a_n) = a_j.$$

$$d_ax^j(a,\vec{v}) = Dx^j(a)(\vec{v}) = \left[\frac{\partial x^j}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial x^j}{\partial x^n}\right]\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{bmatrix} = [0,\ldots,0,\underset{\text{en } j}{1},0,\ldots,0]\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{bmatrix} = v_j.$$

On a $dx^j : U \longrightarrow T^*U$. Pour tout $a \in U$, $dx^j(a) \in T_a^*U$.

Donc $dx^j(a) = (a,f)$ où $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{v}) = v_j$. Pour $e_i \in \mathbb{R}^n, f(e_i) = \delta_i^j$, donc $f = e^j$, l'élément de la base duale. On a alors

$$dx^j(a) = (a, e^j).$$

Donc $(dx^1(a),\ldots,dx^n(a))$ est une base naturelle pour T_a^*U. La base duale de cette base dans $T_aU \simeq (T_a^*U)^*$ est décrite par la notation suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a),\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}(a)\right) = ((a,e_1),\ldots,(a,e_n)).$$

On a $\dfrac{\partial}{\partial x^j}(a) = (a,e_j), (dx^j(a))\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}(a)\right) = \delta_i^j$.

On suppose que $E = T_aU$. On peut construire $\Omega^k(T_aU), \Omega_l(T_aU) = \Omega_l(T_a^*U), \Omega_l^k(T_aU)$ qui sont des (l,k)-tenseurs sur T_aU.

On peut aussi définir $\Lambda^k(T_aU)$ (tenseurs extérieurs covariants), $\Lambda_l(T_aU) = \Lambda^l(T_a^*U)$ (tenseurs extérieurs contravariants), $\Lambda_l^k(T_aU)$.

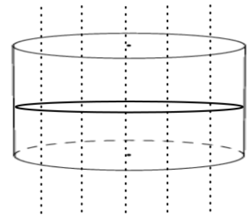

Figure 17 – Cylindre $S^1 \times [-1, 1]$. On peut le considérer comme une fibration sur S^1. Le cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$ va être difféomorphe avec le fibré tangent TS^1 de S^1

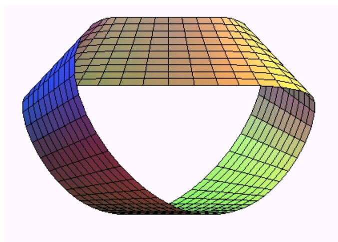

Figure 18 – Le Ruban de Mobius est une fibration sur S^1 mais n'est pas équivalent à $S^1 \times [-1, 1]$ (il n'est pas un sous ensemble du fibré tangent TS^1). Similairement, il y a par exemple des surfaces de dimension 2 Σ dont le fibré tangent $T\Sigma$ n'est pas équivalent à $\Sigma \times \mathbb{R}^2$.

Définition 5.4. On définit
$$(T^k_l)_a U = \Omega^k_l(T_a U)$$
et
$$(\Lambda^k_l)_a U \overset{\text{déf}}{=} (\Lambda^k_l)(T_a U).$$

Si $k = l = 0$, on ne va pas les écrire.

Définition 5.5. On peut alors définir les fibrés tensoriels et tensoriels extérieurs par :
$$T^k_l U \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{a \in U} (T^k_l)_a U \text{ et } \Lambda^k_l U \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{a \in U} (\Lambda^k_l)_a U.$$

Très souvent on va avoir affaire aux fibrés où soit k soit l vaut 0. Par exemple,
$$\Lambda^k U = \bigcup_{a \in U} \Lambda^k_a U = \bigcup_{a \in U} \Lambda^k(T_a U),$$
$$T^k U = \bigcup_{a \in U} T^k_a U = \bigcup_{a \in U} \Omega^k(T_a U).$$

Si $\alpha \in T^k_l U$, alors il existe $a \in U$ tel que $\alpha \in (T^k_l)_a U = \Omega^k_l(T_a U)$. Donc α est une application $(k+l)$-linéaire sur $\underbrace{T_a U \times \cdots \times T_a U}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(T_a U)^* \times \cdots \times (T_a U)^*}_{l \text{ fois}}$.

Mais une telle application peut être identifiée par une application $(k+l)$-linéaire $\tilde{\alpha}$ sur
$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \times \cdots \times (\mathbb{R}^n)^*}_{l \text{ fois}}$$

avec les isomorphismes $T_aU \simeq \mathbb{R}^n$, $T_a^*U \simeq (\mathbb{R}^n)^*$.

Donc $\Omega_l^k(T_aU) \simeq \{a\} \times \Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ avec l'identification $\alpha = (a, \tilde{\alpha})$ et on a une projection bien définie sur la première composante

$$\tau_l^k : \Omega_l^k(T_aU) \longrightarrow U, \tau_l^k(a, \tilde{\alpha}) = a.$$

Donc si $\alpha \in T_l^kU$, on a $\tau_l^k(\alpha)$ est le point $a \in U$ pour lequel $\alpha \in (T_l^k)_aU$.

5.5 Champs tensoriels

Définition 5.6. Un champ de tenseurs (*champ tensoriel*) sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une application

$$\alpha : U \longrightarrow T_l^kU$$

telle que

$$\tau_l^k \circ \alpha = \mathrm{id}_U, \quad \text{c.à.d. } \forall a \in U \ \tau_l^k(\alpha(a)) = a.$$

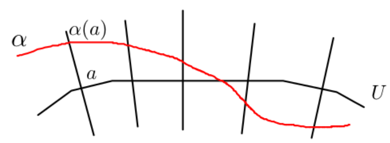

Figure 19 – Exemple d'un champ tensoriel

α est aussi appelée parfois une section du fibré tensoriel T_l^kU.

Si α est un champ tensoriel, pour tout $a \in U$, $\alpha(a) \in \Omega_l^k(T_aU)$.

L'ensemble $(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l})$ est une base de $\Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \leq n$. Maintenant la base de $\Omega_l^k(T_aU)$ devient

$$dx^{i_1}(a) \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}(a) \otimes \frac{\partial}{\partial dx^{j_1}}(a) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}(a).$$

Donc pour tout $a \in U$, il existe des coefficients $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \cdots j_l}(a) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha(a) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n}} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \cdots j_l}(a) dx^{i_1}(a) \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}(a) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(a) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}(a).$$

Donc

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \leq n} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \cdots j_l} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

où $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \cdots j_l} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application.

Définition 5.7. On dit que le champ vectoriel α est de classe $\mathcal{C}^r$ si $\forall i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$, le coefficient

$$a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \cdots j_l} \in \mathcal{C}^r(U).$$

Donc on peut parler de régularité de $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n^{k+l}}$ directement, mais dans ce cas là, la définition revient à la même.

5.6 Exemple très important : la métrique riemanienne

Définition 5.8. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. Une métrique riemanienne sur U est un champ tensoriel 2-covariant (de type (0,2)) symétrique, positif-défini sur U.

Si g est une métrique riemanienne sur U, $g : U \longrightarrow T^2U$.
Pour tout $x \in U, g(a) \in \Omega^2(T_aU)$, (c.à.d. $\tau^2 \circ g = \mathrm{id}_U$).

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in T_aU, \quad g(a)(\vec{u}, \vec{v}) = g(a)(\vec{v}, \vec{u}) \text{ (symétrie).}$$

$$\forall \vec{u} \in T_aU, \quad g(a)(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0; \quad g(a)(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \qquad \text{(pos. déf.).}$$

Donc cela revient à dire que $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU (mais qui dépend de a).

La métrique riemanienne est donc un champ tensoriel de type (0,2) tel que $\forall a \in U$, $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU.

Donc

$$g = \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq n} g_{i_1 i_2} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Quelle est la condition sur les coefficients g_{ij} pour que g devienne une métrique riemanienne ?

Pour tout $x \in U$, on peut former la matrice

$$G_a = [g_{ij}(a)]_{n \times n}.$$

Proposition 5.1. $g(a)$ est une métrique riemanienne sur T_aU si et seulement si $g(a)$ est un produit scalaire.

Lemme 5.1. *$g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU si et seulement si G_a est une matrice symétrique définie positive.*

Démonstration.

$$g(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(a) dx^i(a) \otimes dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a)\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(a) dx^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a)\right) dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a)\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(a) \delta^i_{i'} \delta^j_{j'} = g_{i'j'}(a).$$

Donc $\forall i, j$,

$$g_{i'j'}(a) = g(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a)\right) = g(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a), \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a)\right) = g_{j'i'}(a),$$

ce qui implique que ${}^tG_a = G_a$, donc G_a est symétrique. □

Supposons que $g(a)$ est défini positif.

$$\forall v \in T_aU \quad g(a)(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{i,j} dx^i(a) \otimes dx^j(a)(\vec{v}, \vec{v}),$$

avec

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial}{\partial x^j}(a).$$

Donc

$$g(a)(\vec{v},\vec{v}) = \sum_{i,j} g_{i,j}(a) dx^i(a) \otimes dx^j(a) \left(\sum_{i'} v^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \sum_{j'} v^{j'} \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right)$$
$$\sum_{i,j}\sum_{i',j'} g_{ij}(a) v^{i'} v^{j'} dx^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a) \right) dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right) = \sum_{i,j}\sum_{i',j'} g_{ij}(a) v^{i'} v^{j'} \delta^i_{i'} \delta^j_{j'}$$

$$= \sum_{i',j} g_{i'j'}(a) v^{i'} v^{j'} = [v^1 \ \ldots \ v^n][G_a] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \tilde{\vec{v}} \cdot G_a \tilde{\vec{v}}.$$

Donc $\tilde{\vec{v}} \cdot G_a \tilde{\vec{v}} \geq 0$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\vec{v}} \cdot G_a \tilde{\vec{v}} = 0 \iff \tilde{\vec{v}} = 0$, ce qui implique que G_a est défini positif.

Le sens réciproque est démontré par les mêmes calculs.

Commentaires

1. Si $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique et défini positif, alors $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle_G := \vec{u} \cdot G\vec{v} = {}^t\vec{u}\, G\vec{v} = \langle \vec{u} \mid G \mid \vec{v} \rangle$$

   est un produit scalaire.

2. Si $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle_*$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe une matrice G dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique, définie positive telle que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_* = \langle \vec{u} \mid G \mid \vec{v} \rangle,$$

   avec $G = [g_{ij}]_{i,j}$ et $g_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle_*$.

Donc pour la métrique riemanienne,

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

avec

$$g_{ij}(a) = g(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a), \frac{\partial}{\partial x^j}(a) \right).$$

Pour tout i, $\frac{\partial}{\partial x^i}(a) = (a, e_i) \in T_aU$ et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(a) \right)$$

est une base de $T_aU = \{a\} \times \mathbb{R}^n, a \in U$.

$g : U \longrightarrow T^2U, \tau^2 \circ g(a) = a, \forall a \in U$ si et seulement si $\forall a \in U, g(a) \in T^2_aU$.

La métrique g est de classe $\mathcal{C}^r$ si et seulement si $\forall i, j, g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ (par définition).

Exemple 5.2 (La métrique euclidienne)**.**

$$g_{eu} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i$$

c.à.d.

$$\forall a \in U, G_a = I_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Définition 5.9. Supposons que $(x, \vec{v}) \in T_x U$ pour $x \in U$. Alors la norme de $(x, \vec{u}) \in T_x U$ par rapport à la métrique riemannienne g est défini par

$$\|(x, \vec{u})\|_g := g(x)((x, \vec{u}), (x, \vec{u}))^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 5.4 (Exercice)**.** Si $\vec{u} \in T_a U$, $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x^i}(a)$, on a

$$\|\vec{u}\|_g^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(a) u^i u^j.$$

Définition 5.10. Supposons que $(x, \vec{v}), (x, \vec{v}) \in T_x U$ pour $x \in U$. Alors l'angle entre ces deux vecteurs est défini par

$$\sphericalangle(x, \vec{u}), (x, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{g(x)((x, \vec{u}), (x, \vec{v}))}{\|(x, \vec{u})\|_g \|(x, \vec{v})\|_g}\right).$$

Remarque 5.5 (Rappel)**.** Pour tout produit scalaire $\langle \mid \rangle_*$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valide, c'est-à-dire :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, |\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle| \leq \langle \vec{u} \mid \vec{u}\rangle_*^{\frac{1}{2}} \langle \vec{v} \mid \vec{v}\rangle_*^{\frac{1}{2}}.$$

Donc pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in T_x U, |g(a)(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|_g \|\vec{v}\|_g$.

Définition 5.11. (U, g) où g est une métrique riemanienne et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un exemple d'une variété riemanienne.

5.6.1 Longeur des courbes

Exemple 5.3. Supposons $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ de régularité $\mathscr{C}^1$, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
On a, pour $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $(\gamma)'(t) = (x^1)'(t), \ldots, (x^n)'(t)$,

$$L(\gamma) \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b (\gamma'(t) \cdot I_{n\times n}\gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid \gamma'(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

On va définir, pour $\gamma :]a, b[\longrightarrow U$,

$$T\gamma : \underbrace{T]a, b[}_{(t,\vec{v}),\vec{v}\in\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{TU}_{(c,\vec{w}),c\in U,\vec{w}\in\mathbb{R}^n}.$$

$g(\gamma(t))$ est un produit scalaire sur $T_{\gamma(t)}U$ et

$$T\gamma(t, \vec{v}) = (\gamma(t), \vec{v}\gamma'(t)).$$

Choisissons $\{1\}$ comme base de $\mathbb{R}$. Alors

1. $$T\gamma_{|T_t]a,b[} : T_t]a, b[\longrightarrow T_{\gamma(t)}U.$$
2. $T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), \gamma'(t))$, avec $(t, 1)$ élément de base pour $T_t]a, b[= \{t\} \times \mathbb{R}$ (l'espace tangent).

Définition 5.12. On définit pour toute courbe continue $\gamma : [a, b] \to U$, différentiable sur $]a, b[$,

$$L_g(\gamma) \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b g(\gamma(t))(T\gamma(t, 1), T\gamma(t, 1))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Cette définition peut être facilement étendue au cas des courbes différentiables par morceaux.

Remarque 5.6. Comme l'intégrande est toujours positive (ou nulle), la valeur de $L_g(\gamma)$ est toujours définie comme un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ et $G_c = [g_{ij}(c)], \forall c \in U$, on obtient

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Remarque 5.7. Avec la notation qu'on a eue sur la norme $\|\cdot\|_g$, on a, pour tout $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable,

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \| \underbrace{T\gamma(t, 1)}_{(\gamma(t),\gamma'(t))} \|_g dt.$$

Exercice 5.1. Si $x, y \in U, x \neq y$, et $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ est continu et de regularité $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$, tel que $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ alors $L_g(\gamma) > 0$.

Indication : Si $\gamma'(t) = 0$, alors $\gamma(t) \equiv$ constant $\implies x = y$ impossible. Il existe $t_0 \in]a,b[$ tel que $\gamma'(t_0) \neq 0 \implies \langle \gamma'(t_0) \mid G_{\gamma(t_0)} \mid \gamma'(t_0) \rangle > 0$. Utiliser la continuité des acteurs pour conclure.

5.6.2 Rappel : distance, espace métrique

Définition 5.13. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et g une métrique riemannienne sur U. On définit la distance riemannienne par rapport à la métrique g enter $x, y \in U$ par

$$d_g(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{L_g(\gamma), \gamma : [a,b] \longrightarrow U \text{ continue, et différentiable sur }]a,b[, \gamma(a) = x, \gamma(b) = b\}.$$

Théorème 5.1. *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ connexe par arcs et g est une métrique riemanienne continue sur U, alors*

$$d_g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une distance sur U et (U, d_g) devient un espace métrique.

Remarque 5.8 (Point technique)**.** Si U est connexe par arcs, $\forall x, y \in U, \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], U)$, avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, alors (analyse réelle, on utilise le fait que U est ouvert) il existe $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], U)$ avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Donc il existe un élément de $\{\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b], U) \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$, avec $a = 0, b = 1$. Comme $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $|\gamma'(t)|$ est continue sur $[a,b]$ implique que il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [a,b], \|\gamma'(t)\| \leq M$ et $G_{\gamma(t)} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est aussi continue.

Cela implique que $t \longmapsto \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle$ est continue sur $[a,b]$, ce qui implique que il existe $\widetilde{M}$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \widetilde{M},$$

ce qui implique que

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle \leq \widetilde{M}(b-a) < +\infty,$$

donc $d_g(x,y)$ ne peut être $+\infty$, $d_g(x,y) \in \mathbb{R}_+$. Donc $d_g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ est justifié.

Remarque 5.9.

1. Si U n'est pas connexe, il faut faire attention que le chemin droit de x à y peut sortir de U et n'est pas éligible pour évaluer $L_g(\gamma)$.
2. Même si U est connexe, il n'y a pas de raison que le chemin sur le segment droit joignant x à y soit le chemin le plus court :

$$\gamma(t) = x + t(y-x), \gamma : [0,1] \longrightarrow U.$$

Il peut arriver que
$$d_g(x,y) < L_g(\gamma) = \int_0^1 \langle y-x \mid G_{\gamma(t)} \mid y-x\rangle dt.$$

3. Pas toutes les métriques d des espaces métriques (X,d) où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont les distances d_g pour une métrique riemanienne. Par exemple, **(exercice)** la distance discrète
$$d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y \text{ et sinon } d(x,y) = 0$$
ne peut pas être dérivée d'une métrique riemanienne.
4. On peut remplacer les chemins γ par les chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux ou bien par les chemins polygonaux.

Définition 5.14. On dit que la courbe continue $\gamma : [a,b] \to U$ de régularité $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ est *régulière* quand $\forall t \in]a,b[$, $\gamma'(t) \neq 0$. On dit que γ est *simple* quand elle est injective sur $]a,b[$.

Exercice 5.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et g une métrique riemannienne sur U. Soit $x, y \in U$ et $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe régulière avec $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

(a) Soit $t : [c,d] \to [a,b]$ une application continue de régularité $\mathscr{C}^1$ sur $]c,d[$ telle que
$$t(c) = a,\ t(d) = b \quad \forall s \in]c,d[\quad t'(s) \neq 0$$
On considère $\eta : [c,d] \to U$ défini par $\eta := \gamma \circ t$. Démontrer que $L_g(\eta) = L_g(\gamma)$.

(b) Soit $L := L_g(\gamma)$. On définit pour $t \in [a,b]$
$$s(t) := L_g(\gamma_{|[a,t]})$$
Démontrer que $s : [a,b] \to [0,L]$ est inversible avec l'application inverse $t : [0,L] \to [a,b]$ continue de régularité $\mathscr{C}^1$ sur $]0,L[$ telle que
$$t(0) = a,\ t(L) = b \quad \forall s \in]0,L[\quad t'(s) \neq 0.$$
On met $\eta := \gamma \circ t$. En déduire que $L_g(\eta) = L_g(\gamma)$ et que
$$\forall s \in [0,L] \quad \|T\eta(s,1)\|_g = 1.$$
(η est le paramétrage par la longueur d'arc de γ.)

5.6.3 Métriques conformales

Définition 5.15. Si pour une métrique riemanienne g donnée sur U, il existe une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\forall a \in U, g(a) = h(a)\sum_i^n dx^i(a) \otimes dx^i(a) \quad \text{c.à.d.} \quad G_a = h(a)I_{n\times n} = \begin{bmatrix} h(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h(a) \end{bmatrix}.$$
On dit que g est une métrique conformale.

Théorème 5.2. *Si g est une métrique conformale sur U et $\vec{u}, \vec{v} \in T_aU$ pour $a \in U$, alors*

$$\sphericalangle_g \vec{u}, \vec{v} = \sphericalangle \vec{u}, \vec{v}.$$

C.à.d. les angles entre les vecteurs sont les mêmes pour g et la métrique standard euclidienne.

5.6.4 Le plan hyperbolique

Exemple 5.4 (Demi-plan de Poincaré (exemple de variété riemanienne) de dimension 2 et de géométrie non-euclidienne)**.**

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

On définit une métrique riemanienne sur U par

$$g = \sum_{i=1}^{2} g_{ii} dx^i \otimes dx^i,$$

$$\text{c.à.d. pour } x = x^1, y = x^2 \quad g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2}\delta_{ij} \quad G_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Donc la métrique de Poincaré sur le demi-plan, qui peut-être écrite sous la forme

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

est une métrique riemannienne conformale avec $h(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$.

Si $\vec{w} \in T_{(x,y)}U$ pour $(x, y) \in U$ quelconque, avec $\vec{w} = (w_1, w_2)$, on a :

$$\|\vec{w}\|_g = (g(x, y)(\vec{w}, \vec{w}))^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{y^2}\left\|\vec{w}^2\right\|\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|\vec{w}\|}{y}.$$

La géométrie induite par g sur le demi-plan est la géométrie hyperbolique, connue aussi sous le nom de la géométrie de Lobachevsky.

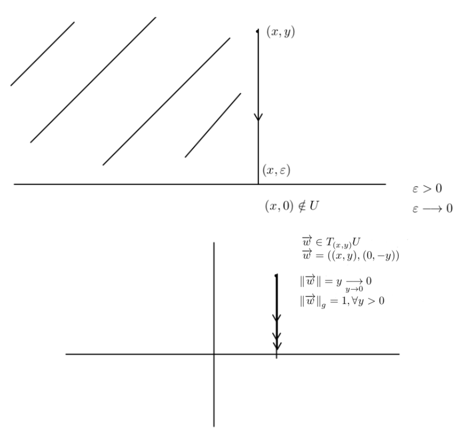

Figure 20 –

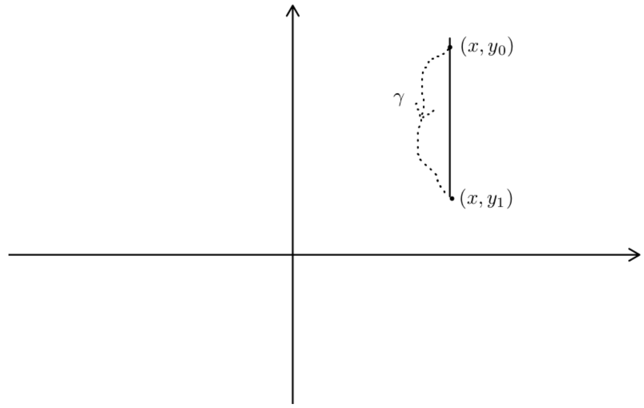

FIGURE 21 –

5.6.5 Géodésies du demi-plan de Poincaré

On a, pour le cas des figures 20 et 21, le calcul suivant, pour $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \| \overbrace{(\gamma(t), \gamma'(t))}^{\in T_{\gamma(t)}U} \|_g dt = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{y} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt.$$

On a $\eta(t) = (x, y_0) + t((x, y_1) - (x, y_0)) = (x, y_0 + t(y_1 - y_0))$ et $\eta'(t) = (0, y_1 - y_0)$, ce qui donne $\|\eta'(t)\| = |y_1 - y_0|$. Donc

$$L_g(\eta) = \int_0^1 \frac{\|\eta'(t)\|}{y_0 + t(y_1 - y_0)} dt = \int_0^1 \frac{|y_1 - y_0|}{y_0 + t(y_1 - y_0)} dt.$$

Notez que si l'on choisit $\tilde{\gamma}(t) = (x, y(t))$ en partant de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on a :

$$L_g(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \frac{\|\tilde{\gamma}(t)\|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt = L_g(\gamma).$$

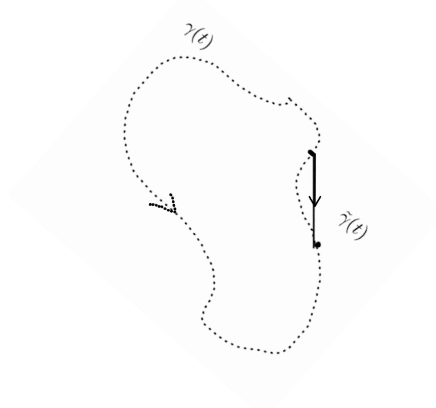

FIGURE 22 – Le chemin tout droit vertical est toujours le plus court (ici, γ est la courbe en pointillés, et $\widetilde{\gamma}$ est la courbe noire).

En conclusion, on a $L_g(\tilde{\gamma}) \leq L_g(\gamma)$, ce qui signifie que le chemin le plus court par rapport à tous les chemins qui joignent (x, y_0) à (x, y_1) doit être tout droit vertical comme illustré dans la figure 22.

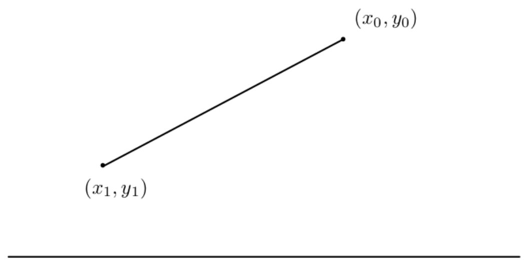

FIGURE 23 – La ligne droite n'est pas en général le chemin le plus court.

⚠ On n'a pas encore dit que η donne le paramétrage du chemin le plus court entre (x, y_0) et (x, y_1). Voir Exercices 5.2 et 5.3.

Si $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow U$, $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, pour $\vec{w} = (0, -y) \in T_{(x,y)}U$, on a $\|\vec{w}\|_g = 1$. On cherche donc $\gamma(t)$ tel que

$$T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), (0, -\gamma_2(t)) \in T_{\gamma(t)}U \quad \text{c.à.d.} \quad \gamma'(t) = (0, -\gamma_2(t)),$$

avec $\gamma(t) = (x(t), y(t)), \gamma_1(t) = x(t), \gamma_2(t) = y(t)$,

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = -y(t), \end{cases}$$

alors $y(t) = y_0 e^{-t}$. Donc $\gamma(t) = (x_0, y_0 e^{-t})$ est le chemin partant de (x_0, y_0) d'une manière verticale vers l'horizon $y = 0$ avec la vitesse hyperbolique constante.

On voit bien que $\gamma(t) = (x_0, 0)$ donne $t = +\infty$.

Exercice 5.3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > y_1 > 0$,

$$\eta : [0, 1] :\to U, \;\; \eta(t) := (x_0, y_0 + t(y_1 - y_0))$$

et

$$\gamma : [0, \log(y_0/y_1)] \to U, \;\; \gamma(t) = (x_0, y_0 e^{-t})$$

(a) Démontrer que η est une courbe régulière, et que γ est son paramétrage par la longeur d'arc. En déduire que

$$L_g(\eta) = L_g(\gamma) = \log(y_0/y_1).$$

*(b) Démontrer que $d_g((x_0, y_0), (x_0, y_1)) = \log(y_0/y_1)$.

Il faudra encore développer les techniques nécessaires pour pouvoir démontrer que les lignes droites par rapport à la métrique hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré sont effectivement des demi-cercles centrés sur la ligne $y = 0$. Ces lignes droites sont appelées les géodésies de (U, g) dans la géométrie différentielle.

Voici une première définition de la géodésie 24 (de manière rudimentaire plus géométrique que mécanique) :

Définition 5.16. On dit que $\gamma([a, b])$ est un segment géodésique dans (U, g) si pour $x = \gamma(a), y = \gamma(b), x, y \in U$,

$$d_g(x, y) = L_g(\gamma).$$

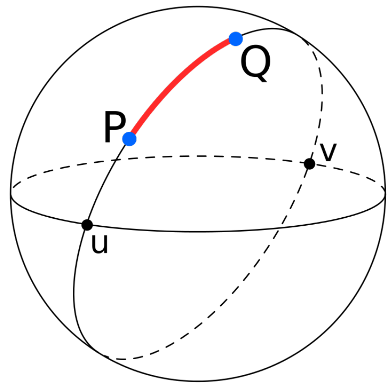

FIGURE 24 – Géodésie

Définition 5.17. On dit que $\mathscr{C}$ est une géodésie de (U, g) si pour tout point $z \in \mathscr{C}$, il existe un segment géodésique $\gamma([a, b])$ t.q. $\exists t \in]a, b[$ t.q. $\gamma(t) = z$ et $\gamma([a, b]) \subset \mathscr{C}$. Ce concept est illustré dans la figure 24.

Remarque 5.10. On va voir qu'une courbe de réguarité $\mathcal{C}^1$, $\mathscr{C} \subseteq U$ est une géodésie de (U, g) quand

$$\mathscr{C} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i$$

où chaque $\mathscr{C}_i$ est un segment géodésique tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, \mathscr{C}_n \cap \mathscr{C}_{n+1}$ est un singleton.

Remarque 5.11. On apprendra qu'il y a en parallèle une autre définition *mécanique* plus fine de la notion de géodésie. La façon de paramétriser la courbe devient importante dans la formulation dite mécanique. Néanmoins, si la métrique g est assez régulier (p.ex. $g \in \mathscr{C}^2$), les images de courbes correspondantes à ces deux notions se coïncident.

5.6.6 Le disque de Poincaré

Le disque de Poincaré est un autre modèle de la géométrie hyperbolique qui est donnée par une métrique riemannienne sur U étant le disque d'unité dans $\mathbb{R}^2$ (cf figure 25). On va voir que le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré sont *isométriques*[1].

5.6.7 Le gradient

Remarque 5.12 (Rappel)**.** Soit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit $f \in E^*$, avec $\dim(E) = n$. Alors il existe un vecteur $\overrightarrow{v_f}$ unique tel que

$$\forall \overrightarrow{w} \in E, f(\overrightarrow{w}) = \beta(\overrightarrow{v_f}, \overrightarrow{w}).$$

1. Notion à définir.

Figure 25 – Escher hyperbolic disc

Exemple 5.5. Soit $\beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$ donné par la matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique définie positive sur une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E = \mathbb{R}^n$, et $f \in E^*$. On cherche $\overrightarrow{v_f}$ t.q.

$$\forall \vec{w} \in E \quad f(\vec{w}) = \beta(\overrightarrow{v_f}, \vec{w}) \ (= \langle \overrightarrow{v_f} \mid B \mid \vec{w}\rangle).$$

On a

$$f(\vec{w}) = f\left(\sum_i w^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n w^i f(e_i),$$

avec $\overrightarrow{v_f} = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ ($(x^1, \dots, x^n)$ inconnues), on obtient

$$\beta(\vec{v_f}, \vec{w}) = \langle \vec{v_f} \mid B \mid \vec{w}\rangle = \sum_{i,j=1}^n x^i b_{ij} w^j,$$

$B = [b_{ij}]_{n\times n}$. On veut que

$$\forall (w^j)_{j=1}^n \quad \sum_{j=1}^n w^j f(e_j) = \sum_{i,j=1}^n x^i b_{ij} w^j$$

qui est vrai si et seulement si

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^n x^i b_{ij} = f(e_j) \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{bmatrix} [b_{ij}] = {}^t[b_{ij}] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

f étant donné, comme $\det(B) \neq 0$, il existe un unique $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait 13, et donc

$$\vec{v_f} = \sum_i x^i e_i$$

est la réponse unique.

Définition 5.18 (Rappel : gradient euclidien)**.** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable ,$U \subseteq \mathbb{R}^n$. Le gradient de f est donné par

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ application linéaire de $(\mathbb{R}^n)^*$.

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad Df(a)(\vec{v}) = \langle \nabla f(a), \vec{v} \rangle$$

avec la métrique euclidienne.

Soit (U, g) une métrique riemanienne, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application partout différentiable $df : U \longrightarrow T^*U$,

$$\forall a \in U, d_a f \in T_a^*U = (T_aU)^*,$$

où $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU. On prend $E = T_aU, d_af \in E^*, \beta = g(a)$.
Donc il y a un vecteur unique $\nabla_g f(a) \in T_aU$ tel que

$$\forall \vec{w} \in T_aU, d_af(\vec{w}) = g(a)(\nabla_g f(a), \vec{w}).$$

Si $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $\nabla_g f(a) \in T_aU$, on a déjà vu que pour la métrique euclidienne $g = g_{eu}$,

$$\nabla_{g_{eu}} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \frac{\partial}{\partial x^i(a)}.$$

On peut aussi écrire

$$\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n (?)^i \frac{\partial}{\partial x^i}(a).$$

Si $\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i}(a)$, on écrit

$$\nabla_g f(a) = \mid \nabla_g f(a) \rangle = \begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{bmatrix} =?$$

Pour tout i, on a

$$d_a f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a)\right) = g(a)(\nabla_g f(a), \frac{\partial}{\partial x^i}(a)).$$

On se rappelle que

$$d_af(e_i) = Df(a)(e^i) = \partial_i f(a).$$

Cela implique que pour $G_a = [g_{ij}]$

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \partial_i f(a) &= g(a)\left(\nabla_g f(a), \frac{\partial}{\partial x^i}(a)\right) \\ &= \langle \nabla_g f(a) \mid G_a \mid e_i \rangle \\ &\overset{\text{par symétrie de } g}{=} \langle e_i \mid G_a \mid \nabla_g f(a) \rangle . \end{aligned}$$

Ceci est valide si et seulement si

$$G_a \mid \nabla_g f(a) \rangle = \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{bmatrix} = \mid \nabla_g f(a) \rangle = G_a^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix}.$$

Donc $\mid \nabla_g f(a)\rangle = G_a^{-1} \mid \nabla f(a)\rangle$.

G_a^{-1} est souvent représentée par une matrice $g^{ij}(a)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \qquad \left(\forall a \in U \quad \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(a) g_{kj}(a) = \delta_j^i\right)$$

et

$$\begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{bmatrix} = [g^{ij}(a)] \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix},$$

donc $\forall i$, $c^i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g^{ij}(a) \partial_j f(a)$.

5.7 Hausse et baisse des indices (raising and lowering indices)

Exemple 5.6. On se rappelle que si $\alpha = \sum a_i e^i \in E^*$, on a $a_i = \alpha(e_i)$. Notez aussi que

$$d_a f \in (T_a U)^* = \Omega^1(T_a U),$$

est un tenseur covariant d'ordre 1. On a

$$\underbrace{d_a f}_{\in T_a^* U} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \underbrace{dx^i(a)}_{(a, e^i)}.$$

Les coefficients $\partial_i f(a)$ sont indexés en bas. La base indexée en haut est $dx^i(a)$. On remarque que $\nabla_g f(a) \in T_a U = \Omega_1(T_a U)$, c'est donc un tenseur contravariant d'ordre 1. Pour

$$\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^{n} c^i \frac{\partial}{\partial x^i}(a),$$

on a pour tout i,

$$c^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}(a) \partial_j f(a).$$

On écrit

$$\underset{\text{dans } \Omega_1(T_a U)}{\nabla_g f(a)} = g_\sharp(\underset{\text{dans } \Omega^1(T_a U)}{d_a f}),$$

où $\sharp_g$ est l'opération de hausse des indices.

5.7.1 Le cas général

Plus généralement, si $\alpha : U \longrightarrow T_l^k U$ est un champ tensoriel, i.e.

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k}} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} \, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \tag{14}$$

et g est une métrique riemannienne sur U. Pour $k \geq 1$, utilisant g on peut créer un champ tensoriel dans T_{l+1}^{k-1} que l'on notera $g_\sharp \alpha : U \longrightarrow T_{l+1}^{k-1} U$ et il vaudra :

$$g_\sharp \alpha = \sum_{\substack{1 \le i_1 \dots i_{k-1} \le n \\ 1 \le j_0, j_1 \dots j_l \le n}} b^{j_0 j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_{k-1}} \, dx^{i_1} \otimes \dots dx^{i_{k-1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_0}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}},$$

défini par

$$b^{j_0 j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_{k-1}} := \sum_{i=1}^{n} g^{j_0 i} a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_{k-1} i} \tag{15}$$

Remarque 5.13. Donc, la manière standard de hausse d'indices $(l,k) \to (l+1, k-1)$ est d'éliminer un indice à droite en bas et d'en ajouter un en haut à gauche.

De même on peut baisser les indices de manière suivante : pour $l \ge 1$, utilisant g on peut créer un champ tensoriel dans T^{k+1}_{l-1} que l'on notera $\flat_g \alpha : U \longrightarrow T^{k+1}_{l-1} U$ et il vaudra :

$$\flat_g \alpha = \sum_{\substack{1 \le i_0, i_1 \dots i_k \le n \\ 1 \le j_1 \dots j_{l-1} \le n}} b^{j_1 \dots j_{l-1}}_{i_0 i_1 \dots i_k} \, dx^{i_0} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_{l-1}}},$$

défini par

$$b^{j_1 \dots j_{l-1}}_{i_0 i_1 \dots i_k} := \sum_{i=1}^{n} g_{i_0 j} a^{j_1 \dots j_{l-1} j}_{i_1 \dots i_k}$$

Remarque 5.14. Donc, la manière standard de baisse d'indices $(l,k) \to (l-1, k+1)$ est d'éliminer un indice à droite en haut et d'en ajouter un en bas à gauche.

Exercice 5.4. Démontrer que pour tout champs tensoriel α de type (l,k), $k \ge 1$ on a

$$\flat_g(\sharp_g \alpha) = \alpha.$$

De même si $l \ge 1$, on a

$$\sharp_g(\flat_g \alpha) = \alpha.$$

Exemple 5.7. $df(a) \in T^*_a U$ ne dépend pas de g et $\nabla_g f(a) \in T_a U$. On a

$$G_a \mid \nabla_g f(a)\rangle = \mid \nabla f(a)\rangle \ ; \quad \underbrace{\partial_i f(a)}_{\text{les coefs de } df(a)} = \sum_{s=1}^{n} g_{is} c^s,$$

où $\nabla_g f(a) = \begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{bmatrix}$. Alors en résumé $\nabla_g f = \sharp_g(df)$, et $df = \flat_g(\nabla_g f)$.

Exemple 5.8 (Tenseur de courbure de Riemann)**.** Parfois il est écrit comme R^i_{jkl} de type (1,3) ou comme R_{ijkl} de type (0,4).

En fait $R^i_{jkl} = \sum_{s=1}^{n} g^{is} R_{sjkl}$; ce qui implique (exercice) $R_{ijkl} = \sum_{s=1}^{n} g_{is} R^s_{jkl}$.

5.7.2 La convention de sommation d'Einstein

Pour simplifier les notations, si dans une expression un indice se répète en bas et en haut, une sommation sur cet indice est sous-entendue (même si le signe de sommation $\sum$ n'apparaît pas).

Exemple 5.9. Par exemple (14) peut être écrit comme

$$\alpha = a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

et (15) devient alors

$$b^{j_0 j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_{k-1}} := g^{j_0 i} a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_{k-1} i}.$$

De même on peut écrire

$$\nabla_g f = c^s \frac{\partial}{\partial x^s} \quad \text{et} \quad df = (\partial_i f) dx^i,$$

et on a

$$c^s = g^{sj} \partial_j f, \quad \partial_i f = g_{ij} c^j.$$

Aussi

$$R^i_{jkl} = g^{is} R_{sjkl} \quad R_{ijkl} = g_{is} R^s_{jkl},$$

etc.

5.8 Champ de vecteurs

19-10-2023

Définition 5.19. Un champ de vecteurs (*champ vectoriel*) est une application $X : U \longrightarrow TU$ telle que

$$\forall a \in U, \tau_1 \circ X(a) = a \ (\tau_1 \circ X = \mathrm{id}_U),$$

c'est-à-dire X est un champ tensoriel 1-contravariant sur U. En équivalence, X est une section de fibré tangent TU.

X est un champ tensoriel de type (1,0) et

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On a $\forall a \in U$,

$$X(a) = \sum_{i=1}^{n} X^i(a) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(a)}_{(a, e_i)}.$$

Pour tout i, $X : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et on a $X \in C^r$ si et seulement si pour tout i, $X^i \in C^r$.

5.8.1 Courbes intégrales

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, par exemple $I =]a, b[$. Soit $\gamma : I \longrightarrow U$ une application continue, différentiable $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$. On a pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = ((\gamma^1)'(t), \ldots, (\gamma^n)'(t)).$$

On introduit $T\gamma : TI \longrightarrow TU$ par $T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), \gamma'(t)) \in T_{\gamma(t)}U$.

Définition 5.20. Soit X est un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^n$, $X : U \longrightarrow TU$. On dit qu'une application continue et différentiable $\gamma : I \longrightarrow U$ est une courbe intégrale par le champ de vecteurs $X : U \longrightarrow TU$ si

$$\forall t \in I \quad T\gamma(t, 1) = X(\gamma(t)).$$

Remarque 5.15. Soit $X : U \longrightarrow TU$ un champ de vecteurs, alors $X(a) \in T_aU = \{a\} \times \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $a \in U$, on a $X(a) = (a, \vec{F}(a))$ où $\vec{F}(a) \in \mathbb{R}^n$, donc $X(\gamma(t)) = (\gamma(t), \vec{F}(\gamma(t)))$ pour une application $\vec{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Alors, comme $T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ on obtient

$$\forall t \in I \quad T\gamma(t, 1) = X(\gamma(t)) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall t \in I \quad \gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t)).$$

On voit bien qu'il s'agit d'une équation à dérivées ordinaires (EDO) autonomes (i.e. $\vec{F}$ ne dépend que de $a \in U$ et pas de t directement).

Remarque 5.16. $T\gamma(t, 1) = \sum_{i=1}^{n} (\gamma^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(0))$. Pour $X : U \longrightarrow TU$ champ vectoriel, on a

$$X(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n} (X^i)(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial X^i}(\gamma(t)).$$

avec $(\vec{F} = (X^1, \ldots, X^n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$. Donc, encore,

$$\forall t \in I \quad T\gamma(t, 1) = X(\gamma(t)) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall i \; \forall t \in I, (\gamma^i)'(t) = X^i(\gamma(t)),$$

Donc, on peut aussi appeler cela un système des EDO.

$$\begin{cases} (\gamma^1)' = X^1(\gamma) \\ \qquad \vdots \\ (\gamma^n)' = X^n(\gamma) \end{cases} \text{dans } I \iff \gamma' = \vec{F} \circ \gamma.$$

Remarque 5.17. En raison des observations précédentes, une courbe intégrale γ pour le champ de vecteurs X est aussi appelée une solution (pour les EDO).

5.8.2 Le théorème fondamental

Théorème 5.3 (Fondamental de l'existence et de l'unicité des solutions pour les EDO)**.** *Soient $X : U \longrightarrow TU$ un champ de vecteurs de régularité $\mathcal{C}^1$, $a_0 \in U, t_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Alors il existe un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}, t_0 \in I$ et $\gamma : I \longrightarrow U$ tel que $\gamma(t_0) = a_0$ et γ est une courbe intégrale pour X.*
2. *Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $t_0 \in J$ et $\lambda : J \longrightarrow U$ est une courbe intégrale pour X telle que $\lambda(t_0) = a_0$, alors $\gamma = \lambda$ sur $I \cap J$.*

Remarque 5.18. Si $X(a_0) = 0 \in T_{a_0}U$, alors on peut observer que $I = \mathbb{R}$ et l'application constante $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow U$, $\forall t, \gamma(t) = a_0$ est une solution (donc la solution unique maximale).

Si $\gamma(t) \equiv a_0$, alors $\gamma'(t) = 0 = \vec{F}(\gamma(t)), \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.19. Supposons que $\gamma : I \longrightarrow U$ est une solution pour $\gamma(t_0) = a$ et $\lambda : J \longrightarrow U$ est une solution pour $\lambda(t_1) = a_0$. Pour $t_0 \in I, t_1 \in J$ et $t_0 \neq t_1$, on définit

$$\widetilde{\lambda}(t) = \lambda(t + t_1 - t_0) \text{ et}$$
$$\widetilde{J} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_1 - t_0 \in J\}.$$

On voit bien que $t_0 \in \widetilde{J}$. De plus,

$$\widetilde{\lambda}'(t) = \lambda'(\underbrace{t + t_1 - t_0}_{\tilde{t} \in J}) = \overrightarrow{F}(\lambda(t + t_1 - t_0)) = \overrightarrow{F}(\tilde{\lambda}(t)), \forall t \in \widetilde{J}.$$

On a $\tilde{\lambda}(t_0) = \lambda(t_0 + t_1 - t_0) = \lambda(t_1) = a_0$. Par unicité, on a alors $\tilde{\lambda} = \gamma$ sur $I \cap \tilde{J}$. En particulier, $a_0 \in \tilde{\lambda}(I \cap \tilde{J}) = \gamma(I \cap \tilde{J})$. Donc il y a un sous-intervalle de J défini comme ceci :

$$\overline{J} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_0 - t_1 \in I \cap \tilde{J}\}$$

pour lequel $\lambda(\overline{J}) = \gamma(I \cap \tilde{J})$.

⚠ $t_1 \in J$.

Donc, si $X \in \mathcal{C}^1$, ce n'est pas possible d'observer une intersection transversale ou tangentes de deux courbes intégrales (figures suivantes 26).

Pas possible. Pour n'importe quel point $a_0 \in U$.

Figure 26 – Cas où les intersections sont possibles ou non.

5.8.3 Solutions maximales

Pour toute courbe intégrale, on peut faire un changement de variable $\tilde{t} = t + t_0, \overline{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$ pour lequel on obtient $\tilde{\gamma}(0) = a_0$ (en principe on peut, sans perdre en généralité, supposer que $t_0 = 0$ pour les systèmes autonomes d'EDO).

Étant donné un champ de vecteur $X : U \to TU$, on considère pour tout $x \in U$ l'ensemble de toutes les courbes intégrales passant par x :

$$\mathscr{C}_x := \{(I, \gamma); \quad I \subset \mathbb{R} \text{ intervalle ouvert, } 0 \in I, \ \gamma : I \to U \text{ une courbe intégrale de } X \text{ avec } \gamma(0) = x\}.$$

En vue de l'unicité des solutions on peut définir pour $X \in \mathcal{C}^1$:

$$I_x := \bigcup_{(I,\gamma) \in \mathscr{C}_x} I$$

$$\gamma_x : I_x \to \mathbb{R} \quad \gamma_x(t) := \gamma(t) \quad \text{si } (I, \gamma) \in \mathscr{C}_x \text{ et } t \in I.$$

Notons qu'il n'y a pas d'ambiguité dans la définition de γ_x, et la valeur de $\gamma_x(t)$ est unique pour tout choix de $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_x$ pour lequel $t \in I$: en effet si $(I, \gamma), (J, \lambda) \in \mathscr{C}_x$, avec $t \in I, J$, on a $0 \in I, J$, $\gamma(0) = \lambda(0) = x$, et les deux applications γ, λ étant les courbes intégrales on a par l'unicité

$$t \in I \cap J \implies \gamma(t) = \lambda(t).$$

Remarque 5.20. On observe que

$$\forall (I, \gamma) \in \mathscr{C}_x \quad \gamma = \gamma_{x|_I}.$$

Si on en a besoin, on va représenter l'intervalle maximale I_x par ses bornes inférieures et supérieures

$$I =]\alpha_x, \omega_x[, \quad \alpha_x, \omega_x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \alpha_x < \omega_x.$$

Remarque 5.21 (Sur la taille de I_x)**.** On définit

$$M(x) = \sup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \left| \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(x) \right|$$

et

$$b(x) = \sup\{r > 0, B(x, r) \subset U\}.$$

Alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de U et de X (avec une dépendance explicite aux travers les deux paramètres expliqués ci-dessous) tel que

$$|\alpha_x|, |\omega_x| \geq C\left(\frac{b(x)}{\|X(w)\|}, M(x)\right).$$

Ici, $C(a, b)$ est croissant en a et décroissant en b. Alors $|I_x|$ est plus large quand $\dfrac{b(x)}{\|X(x)\|}$ est plus large ou bien quand $M(x)$ est plus petit.

Exemple 5.10. On définit $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $X(x = (x^1, x^2)) = (x, x^\perp) \in T_x\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

et $\gamma_x(t) = e^{At}x, I_x = (-\infty, \infty)$. On a

$$\gamma_x(t) = (\cos(t)x^1 - \sin(t)x^2), \sin(t)x^1 + \cos(t)x^2 = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

On calcule $\gamma_x'(t) = (-\sin(t)x^1 - \cos(t)x^2, \cos(t)x^1 - \sin(t)x^2) = (\gamma_x(t))^\perp$. C'est une rotation d'angle t de point x autour du point 0.

Remarque 5.22. Si $x = 0$, alors $\gamma_0 = 0$.

Exemple 5.11. $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T\mathbb{R}^2$, $X(x) = (x, -x) \in T_x\mathbb{R}^2$.
On a

$$-x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

$\gamma_x(t) = e^{-t}x, I_x = (-\infty, \infty)$ et $\gamma_x'(t) = -e^{-t}x = -\gamma_x(t)$ et $\gamma_x(0) = x$.
On a

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}x = 0 \in \mathbb{R}^2$$
$$\lim_{t\to-\infty} \|e^{-t}x\| = +\infty.$$

5.8.4 Le flot d'un champ de vecteur

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $X : U \to TU$ un champ de vecteur de régularité $\mathcal{C}^1$. On considère la famille des solutions maximales (I_x, γ_x), pour $x \in U$, et on met

$$\widetilde{U} := \bigcup_{x\in U} I_x \times \{x\}.$$

Lemme 5.2. *$\widetilde{U}$ est un ensemble ouvert.*

Démonstration, (détails en exercice). On sait que $b(x), \|X(x)\|$ et $M(x)$ sont continues en x, alors on a :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ si } \|y - x\| < \delta, \text{ alors } |I_y| \geq |I_x| - \varepsilon.$$

Comme $|I_x| > 0$, on peut prendre $\varepsilon = \dfrac{|I_x|}{2}$, on obtient $\delta > 0$ tel que

$$\|y - x\| < \delta \implies |I_y| \geq |I_x| - \frac{|I_x|}{2} = \frac{|I_x|}{2}, \tag{16}$$

ce qui implique que

$$\forall(t, x) \in \widetilde{U}, (t, x) \in \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta, s \in I_y\} \subseteq \widetilde{U}.$$

Indication : l'argument sur la taille de l'intervalle d'existence devrait être transporté et basé sur $t_0 = t$. Il faudra appliquer 16 autour de $t_0 = t$ et non à 0.

$\square$

Définition 5.21. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, $X : U \to TU$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$, et γ_x la solution maximale sur I_x telle que $\gamma_x(0) = x$. Le **flot** $\Phi : \widetilde{U} \longrightarrow U$ associé à X est défini par

$$\forall (t,x) \in \widetilde{U}, \Phi(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_x(t).$$

Parfois il est pertinent d'utiliser la notation $\Phi_t(x) := \Phi(t,x)$.

Théorème 5.4. *Si X est de classe $\mathcal{C}^r$, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^r$.*

25-10-2023

Remarque 5.23. Comme $(\gamma_x^i)'(t) = X^i(\gamma_x(t))$, il est facile de démontrer que γ_x dépend régulièrement en t, et on gagne même une dérivée en t :

$$X \in \mathcal{C}^r \implies \forall x \in U \ \gamma_x \in \mathcal{C}^{r+1};$$

mais dans le théorème on réclame aussi la dépendance régulière de γ_x en x.

Remarque 5.24. Pour t fixé, $\Phi_t(x)$ est défini pour

$$U_t := \{x \in U \mid t \in I_x\}$$

qui est un sous-ensemble ouvert de U (exercice). Donc $\Phi_t : U_t \longrightarrow U$ est bien définie comme une application, et on a

$$X \in \mathcal{C}^r \implies \phi_t \in \mathcal{C}^r.$$

On a $\Phi_0(x) = x$ et $\Phi_0 = \mathrm{id}_U$.

Proposition 5.2 (sur la composition du flot)**.** Si deux des trois valeurs $\Phi_t(x)$, $\Phi_s(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{s+t}(x)$ sont définies, alors la troisième aussi est définie et on a

$$\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x)).$$

Démonstration dans le cas où l'on sait que les trois valeurs sont définies. On va définir pour t fixé $\eta(s) := \Phi_s(\Phi_t(x))$, et $\Gamma(s) := \Phi_{s+t}(x)$. On a

$$\eta(0) = \Phi_0(\Phi_t(x)) = \Phi_t(x) = y, \Gamma(0) = \Phi_{0+t}(x) = \Phi_t(x) = y.$$

De plus, son remarque que $\eta(s) = \gamma_{\Phi_t(x)}(s)$, alors

$$\eta'(s) = \gamma'_{\Phi_t(x)}(s) = \sum_{i=1}^{n} X^i(\gamma_{\Phi_t(x)}(s)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_{\Phi_{t(x)}(s)}) = \sum_{i=1}^{n} X^i(\eta(s)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta(s)).$$

Aussi $\Gamma(s) = \gamma_x(s+t)$ et

$$\Gamma'(s) = \frac{d}{ds}\gamma_x(s+t) = \gamma'_x(s+t) \underbrace{\frac{d}{ds}(s+t)}_{\equiv 1} = \gamma'_x(s+t) = \sum_{i=1}^{n} X^i(\gamma_x(s+t)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_x(s+t))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X^i(\Gamma(s)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma(s)).$$

Donc η et γ tous les deux sont une solution (courbe intégrale) du champ de vecteurs X avec $\eta(0) = \Gamma(0) = y$, donc ils devraient être égaux par unicité sur leur domaine commun de définition. Alors, pour tout s pour lequel les deux sont définis, on a $\eta(s) = \Gamma(s)$, ce qui implique que $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$ quand les deux expressions sont définies. $\square$

Remarque 5.25. Comme indiqué dans la proposition, une observation plus fine démontre que si deux des trois acteurs $\Phi_t(x), \Phi_s(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{t+s}(x)$ sont définis, alors le troisième aussi est défini et on a $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$.

En particulier, si $\Phi_t(x)$ est défini (i.e. $t \in I_x$), alors on a $\Phi_{-t}(\Phi_t(x))$ est aussi défini et on a :

$$x = \Phi_{-t}(\Phi_t(x)).$$

Noter qu'on a pris $s = -t$ et $\Phi_0(x) = x$ est toujours défini.

Donc $\Phi_t(U_t) = U_{-t}$ et $\Phi_t : U_t \longrightarrow U_{-t}$ est un difféomorphisme de régularité $\mathcal{C}^r$ si $X \in \mathcal{C}^r$.

Proposition 5.3. Soit X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur U, $K \subset U$ compact. On fixe $T \in I_x$ et on suppose que pour tout $t \in I_x$ tel que $t \geq T$, on a $\Phi_t(x) \in K$, alors $\omega_x = +\infty$ (donc $I_x = (\alpha_x, +\infty)$).

(De même si $\forall t \leq T, \Phi_t(x) \in K$, alors $I_x = (-\infty, \omega_x)$).

Démonstration. Pour tout $x \in U, \Phi_t(x) = \gamma_x(t)$ est défini pour un temps t qui dépend de $C\left(\frac{b(x)}{\|X(x)\|}, M(x)\right)$. Les arguments $b, \|X\|, M$ sont continues en x et positifs. Donc il existe $c > 0$ dépendant de K tel que

$$\forall x \in K \; C\left(\frac{b(x)}{\|X(x)\|}, M(x)\right) \geq c > 0.$$

(Le minimum et maximums des fonctions continues sur K sont atteints pour les applications continues sur K compact). Alors pour tout $x \in K$, $|\omega_x| \geq c$.

$|\omega_x| \geq c$ implique que pour $x \in K, \Phi_t(x)$ est défini pour $t \in [0, c[\subset I_x$. On raisonne par contradiction. Supposons que $\forall t \geq T, \Phi_t(x) \in K$ et $\omega_x < +\infty$, il existe alors (t_k) une suite bornée telle que $T \leq t_k \longrightarrow \omega_x \in \mathbb{R}, I_x =]\alpha_x, \omega_x[$. On va prendre j assez grand tel que $0 < \omega_x - t_{k_j} < \frac{c}{2}$.

Comme $\Phi_{t_{k_j}}(x) \in K$, $\Phi_{\frac{c}{2}}(\Phi_{t_{k_j}}(x))$ est défini. Aussi $\Phi_{t_{k_j}}(x)$ est défini. Alors par la proposition sur composition du flot, $t = t_{k_j}, s = \dfrac{c}{2}$

$$\gamma_x(t_{k_j} + \frac{c}{2}) = \Phi_{t_{k_j} + \frac{c}{2}}(x) = \Phi_{t+s}(x)$$

est défini. Mais notons que $t_{k_j} + \frac{c}{2} > \omega_x$ par le choix fait auparavant pour j. Ceci est une contradiction comme $\gamma_x(t)$ ne peut pas être défini pour $t > \omega_x$. $\square$

5.9 L'application tangente

On suppose $f : U \longrightarrow V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$. On suppose que f est différentiable en $a \in U$. On a $Df(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On a $df(a) : T_aU \longrightarrow \mathbb{R}^m$ avec $df(a)(a, \vec{v}) = Df(a)(\vec{v})$ avec $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $(a, \vec{v}) \in T_aU$.

Définition 5.22. L'application tangente $Tf : TU \longrightarrow TV$ est définie par :

$$\forall (a, \vec{v}) \in TU, \quad Tf(a, \vec{v}) \overset{\text{déf}}{=} (f(a), Df(a)(\vec{v})) \in T_{f(a)}V \subset TV.$$

Remarque 5.26. $Tf_{|T_aU} : T_aU \longrightarrow T_{f(a)}V$ est linéaire.

Définition 5.23. On définit $T_af := Tf_{|T_aU}$, avec

$$T_af(a, \vec{v}) = (f(a), Df(a)(\vec{v})).$$

Exemple 5.12. Soit $i : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une inclusion (injection canonique) avec $i(x) = x$. On prend

$$Ti : TU \longrightarrow T\mathbb{R}^n,$$

et on a $Ti(x, \vec{v}) = (x, \vec{v})$, car $Di(x)(\vec{v}) = \vec{v}$. Donc Ti est l'inclusion de TU dans $T\mathbb{R}^n$.

Lorsque $m = 1$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $d_af : T_aU \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire, donc $d_af \in (T_aU)^*$, donc $df : U \longrightarrow T^*U$. C'est un champ covariant.

Maintenant notons que $Tf : TU \longrightarrow T\mathbb{R}$ et $T_af : \underbrace{T_aU}_{\{a\}\times\mathbb{R}} \longrightarrow \{f(a)\} \times \mathbb{R}$ linéaire. On ne peut plus dire que c'est une application de l'espace dual, mais elle admet quand même des propriétés intéressantes.

5.9.1 L'application tangente d'une composition

Proposition 5.4. Si $f : U \longrightarrow V$ est différentiable en $x \in U$ et $g : V \longrightarrow W$ est différentiable en $f(x)$ et $W \subseteq \mathbb{R}^p$. Alors $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

Vérification. $Tf : TU \longrightarrow TV, \forall (x, \vec{v}) \in T_xU \subseteq TU$, avec

$$Tf(x, \vec{v}) = (f(x), Df(x)(\vec{v})).$$

On a de plus $Tg : TV \longrightarrow TW, \forall (y, \vec{w}) \in T_yV \subseteq TV$, avec

$$Tg(y, \vec{w}) = (g(y), Dg(y)(\vec{w})).$$

Alors pour $y := f(x)$, et $\vec{w} := Df(x(\vec{v}))$

$$
\begin{aligned}
Tg \circ Tf(x, \vec{v}) &= Tg(f(x), Df(x)(\vec{v})) = (g(f(x)), Dg(f(x))\Big(Df(x)(\vec{v})\Big))\\
&= ((g\circ f)(x), \underbrace{\Big(Dg(f(x)) \circ Df(x)\Big)}_{D(g\circ f)(x)}(\vec{v})) = ((g\circ f)(x), D(g\circ f)(x)(\vec{v}))\\
&= T(g\circ f)(x, \vec{v}).
\end{aligned}
$$

□

Exemple 5.13 (Un cas particulier)**.** $U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et on a $f\circ h : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $d(f\circ h) : U \longrightarrow T^*U$. On a aussi $Th : TU \longrightarrow TV$, $df : TV \longrightarrow \mathbb{R}$ et par une autre interprétation $d(f\circ h) : TU \longrightarrow \mathbb{R}$. On constate que

$$d(f\circ h) = df \circ Th$$

Démonstration. Il suffit d'observer que pour tout $f : V \to \mathbb{R}$, et par la définition de df

$$Tf(y, \vec{w}) = (f(y), \quad \underbrace{df(y, \vec{w})}_{d_y f(\vec{v}) = df(y)(\vec{w})} \quad). \tag{17}$$

De même

$$T(f\circ h)(x, \vec{v}) = (f\circ h(x), d(f\circ h)(x, \vec{v})).$$

D'autre part $T(f\circ h) = Tf \circ Th$. On met $(y, \vec{w}) := Th(x, \vec{v})$ dans (17). Donc en identifiant les deuxièmes composantes dans l'identité $T(f\circ h) = Tf\circ Th$ on obtient

$$df(Th(x, \vec{v})) = d(f\circ h)(x, \vec{v}).$$

□

5.9.2 Le pull-back et le push-forward des tenseurs

Rappel Si $T : E \longrightarrow F$ linéaire, on rappelle que l'on peut définir $\Omega^k(T), \Omega_l(T), \dots$

Alors pour les applications tangentes, $T_x f : T_x U \to T_{f(x)} V$ on a pour tout k, l :

$$
\begin{gathered}
\Omega^k(T_x f) : \Omega^k(T_{f(x)} V) \longrightarrow \Omega^k(T_x U),\\
\Omega_l(T_x f) : \Omega_l(T_x U) \longrightarrow \Omega_l(T_{f(x)} V),\\
\dots
\end{gathered}
$$

Rappel On a dit que

$$T^k U := \bigcup_{x\in U} (\Omega^k(T_x U)).$$

Définition 5.24. Supposons que $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to V$ est **injectif**. On définit la fonction $\Omega^k f : T^k V \longrightarrow T^k U$, définie seulement pour tout élément $\alpha \in T^k V$ tel que $\tau^k(\alpha) \in f(U)$ (τ^k est la projection sur la k-ième coordonnée) :

$$\Omega^k f(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k(T_x f)(\alpha) \in \Omega^k(T_x U) \subset T^k U$$

lorsque $\alpha \in \Omega^k(T_y V)$, $y \in f(U)$, et $x \in U$ est le point unique pour lequel $y = f(x)$.

On peut aussi dire que $\Omega^k f$ est définie comme une application sur $T^k W$, avec $W := f(U)$.

Pour $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k} \in T_xU$, on a

$$\Omega^k f(\alpha)(\overbrace{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}}^{\in (T_xU)^k, k \text{ fois}}) = \alpha(T_xf(\vec{v_1}), \ldots, T_xf(\vec{v_k}))).$$

Définition 5.25. On dit que $\Omega^k f(\alpha) \in \Omega^k(T_xf) \subseteq T^kU$, pour $\alpha \in \Omega^k(T_{f(x)}V) \subseteq T^kV$ est le "pull-back" (le retiré) de α sous l'action de l'application tangente $T_xf : T_xU \longrightarrow T_{f(x)}V$.

Par contre, pour tout $\alpha \in \Omega_l(T_xU)$ et $f : U \longrightarrow V$ différentiable en $x \in U$, on a défini

$$T_xf : T_xU \longrightarrow T_{f(x)}V,$$

et on a alors

$$\Omega_l f \overset{\text{déf}}{=} \Omega_l(T_xf) : T_lU \longrightarrow T_lV,$$

avec $\Omega_l f(\alpha) \in \Omega_l(T_{f(x)}V) \subseteq T_lV$. α étant un élément de $\Omega_l(T_xU)$, il est une application l-linéaire sur $(T_xU)^*$ (contravariant). On cherche une application l-linéaire sur $(T_{f(x)}V)^*$.

Prenons donc un l-covecteur $h_1, \ldots, h_l \in T(T_{f(x)}V)^* = \mathscr{L}(T_{f(x)}V, \mathbb{R})$. Par la définition

$$\Omega_l f(\alpha)(h_1, \ldots, h_l) = \alpha(h_1 \circ T_xf, h_2 \circ T_xf, \ldots, h_l \circ T_xf).$$

Notez que si $h_i \in (T_{f(x)}V)^*$, $h_i : T_{f(x)}V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T_xf : T_xU \longrightarrow T_{f(x)}V$, alors on obtient que $h_i \circ T_xf : T_xU \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire, donc $h_i \circ T_xf \in (T_xU)^*$.

On peut aussi interpréter $\Omega_l f(\alpha)$ de la manière suivante : si $T_xf : T_xU \longrightarrow T_{f(x)}V$ est donné, on a $(T_xf)^* : T^*_{f(x)}V \longrightarrow T^*_xU$ et

$$\Omega_l f(\alpha)(\underbrace{h_1, \ldots, h_l}_{\in (T^*_{f(x)}V \times \cdots \times T^*_{f(x)}V)}) = \alpha((T_xf)^*(h_1), \ldots, (T_xf)^*(h_l)).$$

Définition 5.26. Si $\alpha \in \Omega_l(T_xU) \subseteq T_lU$, on dit que $\Omega_l f(a)$ est le "push-forward"(le poussé) de α sous l'action de T_xf.

Chaque vecteur $\vec{v} \in T_xU$ est un objet contravariant et il agit sur $(T_xU)^*$ par bidualité, i.e. $T_xU \simeq (T_xU)^{**}$. Ici, $l = 1, \vec{v} \in T_xU$. Question : qu'est-ce $\Omega_1 f(\vec{v})$?

Proposition 5.5. Le push-forward d'un vecteur $\vec{v} \in TU$ est simplement $Tf(\vec{v})$.

Démonstration. Prenons $h \in (T_{f(x)}V)^*$,

$$\Omega_1 f(\vec{v})(h) = \vec{v}(\Omega_1(T_xf)(h)) = \vec{v}((T_xf)^*(h)) = \vec{v}(h \circ T_xf) = (h \circ T_xf)(\vec{v}).$$

Donc on a vu que pour tout $h \in (T_{f(x)}V)^*$, $\underbrace{\Omega_1 f(\vec{v})}_{\in T_{f(x)V}}(\underbrace{h}_{\in (T_{f(x)}V)^*}) = h(T_xf(\vec{v}))$.

On a donc $\forall h \in (T_{f(x)}V)^*, h(\Omega_1 f(\vec{v})) = h(T_xf(\vec{v}))$. Cela implique que

$$\Omega_1 f(\vec{v}) = T_xf(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in T_xU.$$

□

Exercice 5.5. Si $\alpha \in \Lambda^k(T_{f(x)}V)$ (α est extérieur), alors

$$\Lambda^k f(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k f(\alpha) \in \Lambda^k(T_x U).$$

Si $\alpha \in \Lambda_l(T_x U)$,

$$\Lambda_l f(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \Omega_l f(\alpha) \in \Lambda_l(T_{f(x)}V).$$

Remarque 5.27. Toutes définitions sont valides même pour $m \neq n$.

5.9.3 Le pull-back et le push-forward d'un champ tensoriel

Remarque 5.28. **Avertissement :** Il faut distinguer entre les deux notions de tenseurs $\alpha \in T^k_l U$ et le champ de tenseurs (i.e. le champ tensoriel) $\alpha : U \to T^k_l U$ (qui vient avec la propriété $\tau^k_l \circ \alpha = \mathrm{id}_U$). ⚠

Définition 5.27. Supposons que $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ sont ouverts. Soit $k \leq 1$, $f : U \longrightarrow V$ différentiable et $\alpha : V \longrightarrow T^k V$ **un champ tensoriel** de type $(0, k)$ (une section de fibré tensoriel k-covariant), i.e. $\forall y \in V, \alpha(y) \in T^k_y V = \Omega^k(T_y V)$.

Le pull-back de α sur U, désigné par $f^*\alpha$ est un champ tensoriel de type $(0, k)$ sur U, donc $f^*\alpha : U \longrightarrow T^k U$.

On met pour tout $x \in U$

$$\underbrace{f^*\alpha(x)}_{\in \Omega^k(T_x U)} \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k(T_x f)(\underbrace{\alpha(f(x))}_{\in \Omega^k(T_{f(x)}V)}).$$

Remarque 5.29. Donc pour chaque $x \in U$, $f^*\alpha(x)$ est le pull-back de $\alpha(f(x))$ sur $T_x U$. On n'a pas besoin d'injectivité pour f ici, comme on définit un champ tensoriel $f^*\alpha$, et pour chaque x, la valeur $f(x)$ correspondante est bien définie.

Définition 5.28. Supposons que $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, sont ouverts. Soit $f : U \longrightarrow V$ différentiable, et **injectif**, et $\beta : U \longrightarrow T_l U$ **un champ tensoriel** de type $(l, 0)$ (une section de fibré tensoriel l-contravariant) sur U, i.e. $\forall x \in U, \beta(x) \in \Omega_l(T_x U)$. On définit alore le "push-forward" de β désigné par $f_\sharp\beta$. $f_\sharp\beta$ est un champ tensoriel de type $(l, 0)$ sur $f(U) \subseteq V$ tel que

$$\forall y = f(x) \in f(U), f_\sharp\beta(y) \overset{\text{déf}}{=} \Omega_l(T_x f)(\beta(x)) \in \Omega_l(T_y V).$$

Remarque 5.30. Donc pour chaque $y \in W = f(U)$, $f_\sharp\beta(y)$ est le push-forward de $\beta(x)$ sur $T_y W$. On a par contre besoin d'injectivité pour f ici, comme on définit un champ tensoriel $f_\sharp\beta : W \to T_l W$, et pour chaque $y \in W$, il faut avoir une valeur unique de x (de référence) pour lequel $y = f(x)$, sinon il y a aurait une ambiguité sur le préimage x à choisir dans la définition.

Exercice 5.6. Si $f : U \longrightarrow V, g : V \longrightarrow W$, pour tout α champ tensoriel de type $(0, k)$ sur W, on a

$$(g \circ f)^* = f^*(g^*\alpha).$$

Si f et g sont injectives, pour tout β champ tensoriel de type $(l, 0)$ sur U,

$$(g \circ f)_\sharp \beta = g_\sharp(f_\sharp \beta),$$

5.9.4 Le push-forward d'un champ de vecteur sous un difféomorphisme

On suppose maintenant que $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^n$ et $h : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$.

Si X est un champ de vecteurs sur U, comme h est injective, alors $h_\sharp X$ est un champ de vecteurs sur $h(U)$ et en plus on aura $V = h(U)$. Donc $h_\sharp X$ est un champ de vecteur sur V. On aura

$$h_\sharp X(h(x)) = T_x h(X(x)) = Th \circ X(x).$$

Alors

$$h_\sharp X = Th \circ X \circ h^{-1}.$$

Si $h \in \mathcal{C}^r$, $X \in \mathcal{C}^s$, on aura $h_\sharp X \in \mathcal{C}^{\min(r-1,s)}$. Aussi notez que

$$h_\sharp X(y) = Th(X(h^{-1}(y))) = (y, Dh(h^{-1}(y))\Big(X(h^{-1}(y)\Big)).$$

Avec les hypothèses $h : U \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, si $X \in \mathcal{C}^1$ est un champ de vecteurs sur U avec le flot Φ, alors $h_\sharp X$ est un champ de vecteurs sur V de régularité $\mathcal{C}^1$.

Proposition 5.6. Soit $h : U \to V$ un diffépomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ et $X : U \to TU$ un champ de vecteur de régularité $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas-là, si Φ, Ψ sont respectivement les flots de X et de $Y = h_\sharp X$. Alors $\Phi_t : \underbrace{U_t}_{\subseteq U} \longrightarrow \Phi_t(U_t)$ et $\Psi : \underbrace{V_t}_{\subseteq V} \longrightarrow \Psi_t(V_t)$, tous les deux sont des difféomorphismes de régularité $\mathcal{C}^1$. On a

$$h^{-1}(V_t) = U_t \ (h(U_t) = V_t)$$
$$h(\Phi_t(U_t)) = \Psi_t(V_t)$$

(Donc il y a une consistance au niveau des domaines de définition). Finalement

$$\Psi_t = h \circ \Phi_t \circ h^{-1},$$

c.à.d. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U_t \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[d, "h"] & \Phi_t(U_t) \arrow[d, "h"] \\ V_t \arrow[r, "\Psi_t"] & \Psi_t(V_t) \end{tikzcd}$$

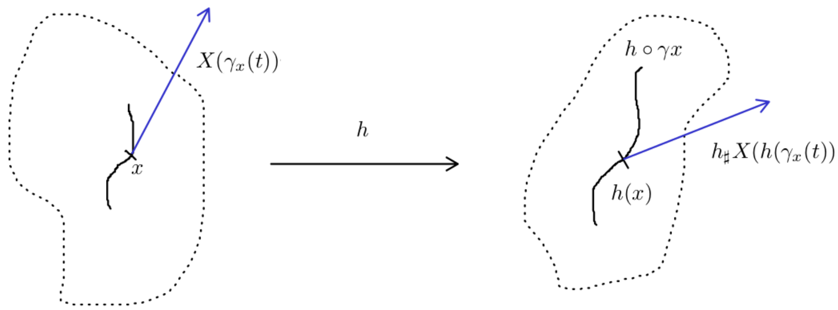

Figure 27 – Flots.

Démonstration. Soit $x \in U_t$ fixé. $\Phi_t(x) = \gamma_x(t)$ la courbe intégrale de X. On définit pour $t \in I_x$

$$\eta_{h(x)}(t) := h \circ \gamma_x(t) = h(\Phi_t(x)) \quad (\eta_{h(x)} = h \circ \gamma_x).$$

On calcule $\eta_{h(x)} = h(\gamma_x(0)) = h(x)$. Aussi

$$T\eta_{h(x)} = Th \circ T\gamma_x.$$

Alors,

$$T\eta_{h(x)} \overbrace{\left(\frac{d}{dt}(t)\right)}^{(t,1)\in T_t I_x} = Th \circ T\gamma_x \left(\frac{d}{dt}(t)\right) = Th(X(\gamma_x(t))) = h_\sharp X(h(\gamma_x(t))) = h_\sharp X(\eta_{h(x)}(t)),$$

où on a utilisé le fait que γ_x est une courbe intégrale de X, i.e. $T\gamma_x\left(\frac{d}{dt}(t)\right) = X(\gamma_x(t))$. On en déduit

$$\begin{cases} \eta_{h(x)}(0) = h(x) \\ T\eta_{h(x)}\left(\frac{d}{dt}(t)\right) = (h_\sharp X)(\eta_{h(x)}(t)), \end{cases}$$

donc $\eta_{h(x)}$ est une courbe intégrale pour $h_\sharp X$. Alors on déduit que le flot $\Psi(\cdot, x)$ est définit pour au moins $t \in I_x$ et

$$\Psi(t, h(x)) = \eta_{h(x)}(t).$$

Donc

$$\Psi_t(h(x)) = h(\gamma_x(t)) = h(\Phi_t(x)).$$

Notez que $t \in I_x$ si et seulement si $x \in U_t$. On a alors pour tout $x \in U_t$

$$\Psi_t \circ h(x) = h \circ \Phi_t(x). \tag{18}$$

Avec la consistence des domaines comme décrite dans la proposition, qui reste à être démontrée (en exercice), on finit par conclure en composant avec h^{-1} de deux cotés.

$$\Psi_t = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}.$$

□

Remarque 5.31. Si $X \in \mathcal{C}^\infty$, alors on a $\Phi_t : U_t \longrightarrow \Phi_t(U_t)$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. On peut, dans un cas spécial, utiliser $h = \Phi_t, V = \Phi_t(U_t)$. Le flot $(\Phi)_\sharp X$ sur V est donnée par

$$h \circ \Phi_t \circ h^{-1} = \Phi_t \circ \Phi_t \circ (\Phi_t)^{-1} = \Phi_t. \tag{19}$$

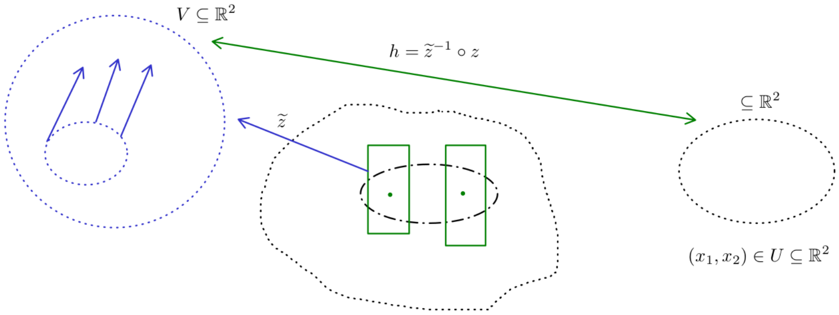

FIGURE 28 –

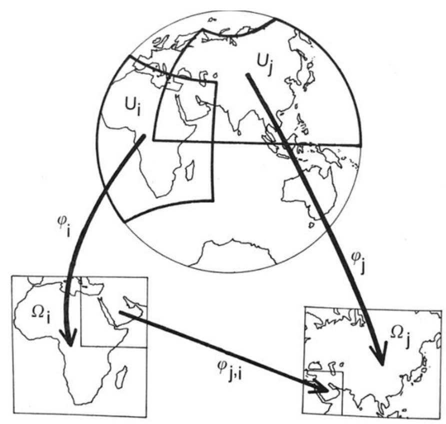

FIGURE 29 – Une sphère n'est pas équivalente à $\mathbb{R}^2$, mais une "tranche" de la sphère l'est. On appelle cela une "carte".

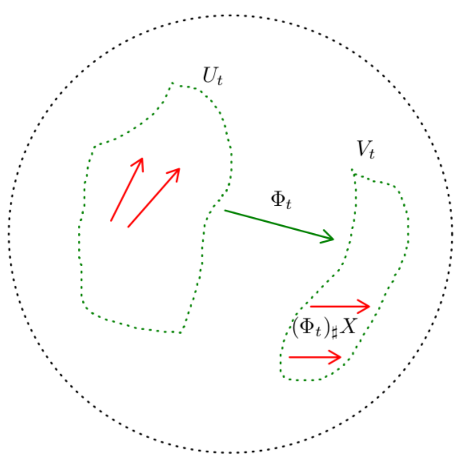

FIGURE 30 – Le flot Φ_t "lisse" les vecteurs.

Exercice 5.7. 19 implique que $(\Phi_t)_\sharp X(\Phi_t(x)) = X(\Phi_t(x))$.

La forme la plus concise de cette formule de push-forward est :

$$(\Phi_t)_\sharp(X_{|U_t}) = X_{|\Phi_t(U_t)}.$$

Exercice 5.8. Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $h : U \to V$ un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. Supposons que $X : U \to TU,\ Y : V \to TV$, sont deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$ avec les flots respectives Φ et Ψ, et qu'ils satisfont la propriété suivante :

$$\forall x \in U\ \exists \delta_x > 0 \text{ t.q. } \forall t \in]-\delta_x, \delta_x[\quad \Psi_t(x) = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}(x).$$

Démontrer que $Y = h_\sharp X$.

5.9.5 Le théorème de boîte de flot

Remarque 5.32. Supposons que $h : V \to W$ est un difféomorphisme et que le variable $y = h(x)$ est utilisé sur W, avec $W \subset \mathbb{R}^n := \{(y^1, \cdots, y^n);\ y^j \in \mathbb{R}\}$. On a le champ de vecteur sur W

$$\frac{\partial}{\partial y^1}(y) = (y, e_1) : W \to TW.$$

S'il n'y a pas de confusion, et W est considéré comme un sous-ensemble de

$$\mathbb{R}^n := \{(x^1, \cdots, x^n);\ x^j \in \mathbb{R}\},$$

(on a seulement changé le nom du variable), on peut désigner ce champ de vecteur avec $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ aussi.

Théorème 5.5 ("Ironing theorem", "Flow-box theorem")**.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n, X$ champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U et $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subseteq U, a \in V$ et un difféomorphisme $h : V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n := \{(y^1, \cdots, y^n);\ y^j \in \mathbb{R}\}$ tel que*

$$h_\sharp X_{|V} = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

En particulier, si Φ est le flot de X et $\Phi(t, x)$ est défini pour $x \in V$, on a

$$\Phi_t(x) = h^{-1} \circ \Psi_t \circ h(x),$$

où Ψ_t est le flot de $\dfrac{\partial}{\partial y^1}$ sur W.

Remarque 5.33. Comme $\dfrac{\partial}{\partial y^1}(y) = (y, e_1),$ alors on a $\Psi_t(y) = y + te_1$. Donc

$$\Phi_t(x) = h^{-1}(\Psi_t(h(x))) = h^{-1}(y + te_1).$$

Démonstration. Avec les rotations, les dilatations et les transformations, on peut supposer que $a = 0, X(a) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}(a)$.

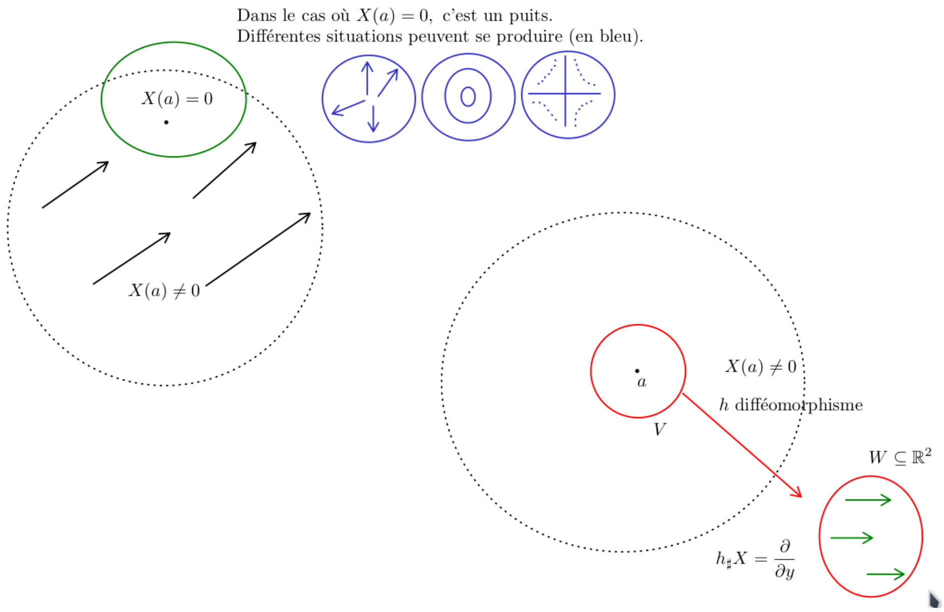

FIGURE 31 – Les courbes intégrales vont être droites et plus ou moins parallèles.

Exercice 5.9. Si $X(a) \neq 0$ est donné, on peut trouver une application $h_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ affine $h_0(x) = Ax + \vec{b}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det(A) \neq 0$ telle que $h_0(a) = 0$ et $((T_{h_0})_{|U})(X(a)) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}(0)$.

Indication : L'existence de h_0 qui vient du fait que $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A$ inversible telle que $A\vec{v} = e_1$. Il faut fixer A et ensuite définir $h_0(x) = Ax - Aa$:

Discussion : Donc on peut supposer que $0 \in U, X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}(0)$ (pourquoi ?).

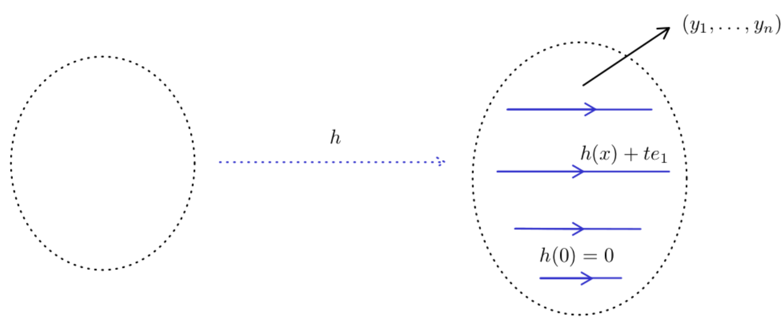

FIGURE 32 – $\gamma_x(t) = \Phi_t(x) = h^{-1}(h(x) + te_1)$.

Si on cherche h, on doit avoir pour $y = h(x)$

$$h^{-1}(y^1 + t, y^2, \ldots, y^n) = \gamma_{h^{-1}(y)}(t) = \Phi(t, h^{-1}(y)) = \gamma_x(t) = \Phi(t, x).$$

Si $x = (0, x^2, \ldots, x^n)$, on va imposer que $h(0, x^2, \ldots, x^n) = (0, x^2, \ldots, x^n)$. Alors il faut chercher h^{-1} tel que

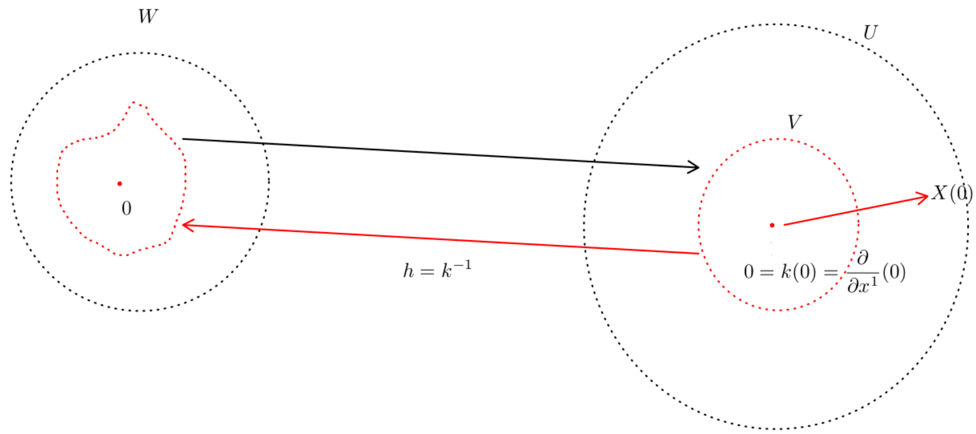

FIGURE 33 –

$$h^{-1}(y^1, y^2, \ldots, y^n) = h^{-1}(0 + \overbrace{y^1}^{t}, y^2, \ldots, y^n) = \Phi(y^1, h^{-1}(0, y^2, \ldots, y^n)) = \Phi(\overbrace{y^1}^{t}, (0, y^2, \ldots, y^n)).$$

On va alors définir (le candidat k pour h^{-1})

$$k(y^1, \ldots, y^n) := \Phi_{y^1}(0, y^2, \ldots, y^n).$$

On a bien sûr $k(0) = \Phi_0(0) = 0$. k est défini pour $y = (y^1, \ldots, y^n)$ dans un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ (exercice). On appelle ce voisinage $\widetilde{W}$ avec $0 \in \widetilde{W}, k : \widetilde{W} \longrightarrow U$. Si $X \in \mathcal{C}^\infty$, alors $\Phi \in \mathcal{C}^\infty$ et donc $k \in \mathcal{C}^\infty$.

On veut utiliser le théorème de l'application inverse. Il faut vérifier que $Dk(0)$ est inversible. On a

$$Dk(0) = \left[\frac{\partial k}{\partial y^1} \ \cdots \ \frac{\partial k}{\partial y^n}\right]_{|y=0}.$$

Pour calculer $\dfrac{\partial k}{\partial y^1}(0)$ il faut fixer $y^2 = \cdots = y^n = 0$, donc

$$k(y^1, 0, \ldots, 0) = \Phi_{y^1}(0, 0, \cdots, 0) = \gamma_0(y^1),$$

et on obtient par le fait que γ_0 est la courbe intégrale de X, avec $X(0) = (0, e_1)$:

$$\frac{\partial k}{\partial y^1}(0)_{|y^1=0} = \gamma_0'(0) = e_1.$$

Pour calculer $\dfrac{\partial k}{\partial y^j}(0)$, $(j = 2, \ldots, n)$ on a fixé $y^1 = 0$, donc

$$k(0, y^2, \ldots, y^n) = \Phi_0(0, y^2, \ldots, y^n) = (0, y^2, \ldots, y^n),$$

qui implique

$$\frac{\partial k}{\partial y^j}(0) = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{j}, \ldots, 0) = e_j.$$

Donc, en somme,

$$Dk(0) = \left[\frac{\partial k}{\partial y^1} \ \cdots \ \frac{\partial k}{\partial y^n}\right]_{|y=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

et $Dk(0) = \mathrm{Id}_{n\times n}$ est inversible. Par le théorème de l'application inverse, il existe $V \subset U$ ouvert avec $0 \in V$, $W \subseteq \widetilde{W}, 0 \in W$ tels que $k : W \to V$ est inversible, avec l'inverse nommé $h : V \to W$. On obtient alors que pour tout $y \in W$, on a $(0, y^2, \cdots, y^n) \in V_{y^1}$ et

$$\Phi_{y^1}(0, y^2, \dots, y^n) = h^{-1}(y^1, \dots, y^n).$$

Comme $k(0, y^2, \dots, y^n) = (0, y^2, \dots, y^n)$, on a $h(0, y^2, \dots, y^n) = (0, y^2, \dots, y^n)$, et donc pour $x \in V$, $y = h(x)$, et $y + te_1 \in W$,

$$h^{-1}(y^1 + t, y^2, \dots, y^n) = \Phi_{t+y^1}(0, y^2, \dots, y^n) = \Phi_t(\Phi_{y^1}(0, y^2, \dots, y^n)) = \Phi_t(h^{-1}\underbrace{(y^1, \dots, y^n)}_{y})$$

Rappeler que $\Psi_t(y) = (y^1 + t, y^2, \dots, y^n)$ est le flot du champ de vecteur $\dfrac{\partial}{\partial y^1}$ sur W, alors on obtient

$$h^{-1} \circ \Psi_t(y) = \Phi_t \circ h^{-1}(y) \implies \Psi_t(h(x)) = h(\Phi_t(x)) \implies h(x) + te_1 = h(\gamma_x(t))$$

pour tout $y = h(x) \in W$ et $t \in \mathbb{R}$, pour lesquels $y + te_1 \in W$. En particulier, ces identités sont valides pour $|t|$ assez petit. Pour conclure, il suffit de dériver en t à $t = 0$ ($\gamma_x(0) = x$) pour obtenir

$$e_1 = Dh(x)\gamma_x'(0)$$

qui, tenant compte du fait que $Th(x, \vec{v}) = (h(x), Dh(x)\vec{v})$ et $T\gamma_x(\frac{d}{dt}(0)) = (x, \gamma_x'(0)) = X(\gamma_x(0))$, implique

$$\frac{\partial}{\partial y^1}(y) = (y, e_1) = Th\Big(T\gamma_x(\frac{d}{dt}(0))\Big) = Th(X(x)) = h_\sharp X(h(x)) = h_\sharp X(y).$$

□

26-10-2023

5.9.6 Le pull-back d'une métrique riemanienne

Soit g la métrique riemanienne sur U, $g : U \longrightarrow T^2U$ symétrique définie positive telle que $\forall x \in U$, $g(x)$ est un tenseur (0,2) (2-covariant) symétrique défini positif sur T_xU. $g(x) \in \Omega^2(T_xU)$.

Pour un champ tensoriel covariant, c'est le retiré sous une application qui a du sens. On considère $V \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$u : V \longrightarrow U$$

difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. Donc le retiré u^*g est défini sur V comme un champ tensoriel sur V :

$$u^*g : V \to T^2V, \quad \forall x \in V \quad u^*g(x) \in T_x^2V = \Omega^2(T_xV)$$

Proposition 5.7. Soit $h := u^*g$, alors h est une métrique riemanienne sur V.

Démonstration. On sait déjà que $h(x) \in \Omega^2(T_xV), \forall x \in V$. Il faut démontrer que $h(x)$ est un produit scalaire sur T_xU. Rappeler les définition d'applications tangente $Tu : TV \to TU$ et d u^*g. On a

1. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_xV$,

$$\begin{aligned} h(x)(\vec{v}, \vec{w}) &= u^*g(x)(\vec{v}, \vec{w}) = g(u(x))(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{w})) \\ &= g(u(x))(Tu(\vec{w}), Tu(\vec{v})) = u^*g(x)(\vec{w}, \vec{v}) = h(x)(\vec{w}, \vec{v}). \end{aligned}$$

2. Pour tout $\vec{v} \in T_x V$, on a

$$h(x)(\vec{v}, \vec{w}) = u^* g(x)(\vec{v}, \vec{v}) = g(u(x))(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{v})) \geq 0.$$

De plus, on a

$$h(x)(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff g(u(x))(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{v})) = 0 \iff Tu(\vec{v}) \iff \vec{v} = 0.$$

Remarque 5.34. Si $u : U \longrightarrow V$ difféomorphisme, on a pour tout $x \in V$, $T_x u : T_x V \longrightarrow T_x U$ est une application linéaire inversible. En effet,

$$Tu \circ Tu^{-1} = T(u \circ u^{-1}) = T(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{TU}$$
$$Tu^{-1} \circ Tu = T(u^{-1} \circ u) = T(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{TV}\,.$$

□

Exercice 5.10. Montrer que si $u : V \longrightarrow U$ difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ et g métrique sur U, alors

1. $h = u^* g$ implique que $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_x U$:

$$\|\vec{v}\|_h = \|Tu(\vec{v})\|_g \tag{20}$$
$$\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})_h = \sphericalangle(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{w}))_g. \tag{21}$$

2. $\forall \vec{v} \in T_x U, \|\vec{v}\|_h = \|Tu(\vec{v})\|_g \implies h = u^* g.$

Exercice 5.11. Soit

$$\mathscr{M} \overset{\text{déf}}{=} \{(U, g) \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ouvert, } g \text{ métrique riemanienne sur } U\}\,.$$

Pour tout $(U, g), (V, h) \in U$, on définit la relation suivante :

$$(U, g) \sim (V, h) \iff \exists u : V \longrightarrow U \text{ difféomorphisme } \mathcal{C}^\infty \text{ tel que } h = u^* g.$$

Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}$.

5.9.7 Longueur des courbes sous le pull-back de la métrique riemannienne

Théorème 5.6. *Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, avec g, h deux métrique riemanienne continues sur respectivement U et V. On suppose que $u : V \longrightarrow U$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. Consièrons les trois conditions suivantes :*

1. *$h = u^* g$.*
2. *Pour toute courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow V$, $L_h(\gamma) = L_g(u \circ \gamma)$.*
3. *Pour tous $x, y \in V$, $d_h(x, y) = d_g(u(x), u(y))$.*

Alors, 1 et 2 sont équivalentes. En plus, elles impliquent 3 et au cas où g and h sont de classe $\mathcal{C}^2$, elles sont équivalentes avec 3

Démonstration. Il est claire que 2 implique 3. Pour le moment, on va suspendre la démonstration de la suffisance de 3 dans le cas où $g, h \in \mathcal{C}^2$. On se rappelle que

$$L_h(\gamma) := \int_a^b h(\gamma(t))(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right))dt$$
$$\Big(= \int_a^b \sum_{i,j} H_{ij}(\gamma(t))(\gamma^j)'(t)(\gamma^i)'(t)dt = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid H(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\rangle dt.\Big)$$

On va démontrer d'abord que 1 implique 2. Soit $\gamma : [a, b] \to V$ une courbe différentiable. Rappeler que $T\gamma : TI \longrightarrow TV, Tu : TV \longrightarrow TU$, et que l'application tangante d'une composition est la composition des applications tangentes. Par 1 on a $h = u^*g$, et alors

$$\begin{aligned}
L_h(\gamma) &= \int_a^b h(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) dt \\
&= \int_a^b u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) \\
&= \int_a^b g(u(\gamma(t)))(Tu\Big(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\Big), Tu\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right))dt \\
&= \int_a^b g(u \circ \gamma(t)) \left(Tu \circ T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), Tu \circ T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) \\
&= \int_a^b g(u \circ \gamma(t)) \left(T(u \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T(u \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) = L_g(u \circ \gamma),
\end{aligned}$$

ce qui démontre 2.

Pour démontrere la réciproque, $2 \implies 1$, on suppose 2. Par le calcul qu'on vient de faire,

$$\forall \gamma \in \mathcal{C}^1, \gamma : [a, b] \longrightarrow V \quad L_g(u \circ \gamma) = L_h(\gamma)$$

implique que

$$\begin{aligned}
\forall \gamma \in \mathcal{C}^1, \gamma : [a, b] \longrightarrow V \quad & \int_a^b u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) dt \\
&= \int_a^b h(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) dt.
\end{aligned}$$

Soit $x \in V, \vec{v} \in T_xV$, avec $\vec{v} = (x, \underbrace{\mid \vec{v}\rangle}_{\in \mathbb{R}^n})$. On pose

$$\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = x + t \mid \vec{v}\rangle,$$

et on note qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq V$. On pose $a = -\varepsilon, b = s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Alors

$$\int_a^s u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) dt = \int_a^s h(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) dt.$$

Les intégrandes sont continues, donc par le théorème fondamental du calcul infinitésimal, et en dérivant les deux intégrales en s, on obtient que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, es deux intégrandes sont égales :

$$u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) = h(\gamma(t)) \left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right).$$

On évalue en $t = 0$. On a $\gamma(0) = x + 0 \cdot \mid \vec{v}\rangle = x$, $\gamma'(t) = \mid \vec{v}\rangle$, et on obtient alors :

$$T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)_{|t=0} = (\gamma(0), \gamma'(0)) = (x, |\,\vec{v}\rangle)$$

ce qui implique que

$$u^*g(x)((x, |\,\vec{v}\rangle), (x, |\,\vec{v}\rangle)) = h(x)((x, |\,\vec{v}\rangle), (x, |\,\vec{v}\rangle)).$$

Alors on a établi que

$$\forall \vec{v} \in T_xV \quad u^*g(x)(\vec{v}, \vec{v}) = h(x)(\vec{v}, \vec{v}).$$

On a alors pour tout $\vec{v}, w \in T_xV$

$$u^*g(x)(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = h(x)(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}).$$

Utilisant la bi-linéarité et la symétrie on obtient

$$\begin{aligned} &u^*g(x)(\vec{v}, \vec{v}) + 2u^*g(x)(\vec{v}, \vec{w}) + u^*g(x)(\vec{w}, \vec{w}) \\ &= h(x)(\vec{v}, \vec{v}) + 2h(x)(\vec{v}, \vec{w}) + h(x)(\vec{w}, \vec{w}) \end{aligned}$$

et on donc conclut avec

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_xV \quad u^*g(x)(\vec{v}, \vec{w}) = h(x)(\vec{v}, \vec{w}),$$

i.e. $u^*g = h$. □

Définition 5.29. Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, avec g, h deux métrique riemanienne continues sur respectivement U et V, et $u : V \longrightarrow U$ difféomorphisme $\mathscr{C}^1$. Quand $h = u^*g$, on dit que u est une *isométrie* (ou bien une *équivalence isométrique*) entre les deux variétés riemanniennes (U, g) et (V, h). Si un tel u existe, on dit que (U, g) et (V, h) sont isométriques.

5.9.8 Calcul pour les matrices G et H quand $h = u^*g$.

On a

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dx^i \otimes dx^j, g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dy^i \otimes dy^j, (y^1, \ldots, y^n) \in U.$$

Si $h = u^*g$, quelle est la relation entre les matrices G et H ?

Soit $x \in V, \vec{v}, \vec{w} \in T_xV$, avec $\vec{v} = (x, |\,\vec{v}\rangle), \vec{w} = (x, |\,\vec{w}\rangle)$, avec

$$\vec{v} = \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x)$$

et

$$|\,\vec{v}\rangle = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}.$$

On a

$$h = u^*g \iff \forall x \in V, \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_xV, \quad h(x)(\vec{v}, \vec{w}) = g(u(x))(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{w}))$$

qui implique

$$h = u^* g \iff \forall x \in V, \forall \mid \vec{v}, \rangle \mid \vec{w}\rangle \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \vec{v} \mid H_x \mid \vec{w}\rangle = \langle Du(x)\vec{v} \mid G_{u(x)} \mid Du(x)\vec{w}\rangle.$$

On prend maintenant $\mid \vec{v}\rangle = e_i \in \mathbb{R}^n, \mid \vec{w}\rangle = e_j \in \mathbb{R}^n$. Alors on a :

$$h_{ij}(x) = \underbrace{\langle e_i \mid H_x \mid e_j\rangle}_{e_i \cdot He_j} = \langle Du(x)e_i \mid G_{u(x)} \mid Du(x)e_j\rangle. \tag{22}$$

Or $Du(x)e_i$, c'est la i-ième colonne de $Du(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x^n}(x) \end{bmatrix}$, ce qui donne

$$22 \implies h_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) \mid G_{u(x)} \mid \frac{\partial u}{\partial x^j}(x) \right\rangle.$$

On en déduit alors

$$H_x = {}^t\!Du(x) G_{u(x)} Du(x).$$

La réciproque peut être établie suivant le mm̂em calcul. On vient de démontrer que

Proposition 5.8. Supposons que $u : V \to U$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$, et h, g sont duex métrique riemannienne sur respectivement V, U. Si

$$h = \sum_{i,j} h_{ij} dx^i \otimes dx^j \text{ sur } V, \quad g = \sum_{i,j} g_{ij} dy^i \otimes dy^j \text{ sur } U$$

alors on a

$$h = u^* g \iff \forall x \in V, H_x = {}^t Du(x) G_{u(x)} Du(x).$$

Exemple 5.14. On prend $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}.$$

On a $Du(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. u est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. On pose $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (avec g la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).

Alors on a

$$H = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\forall \mid \vec{v}\rangle, \mid \vec{w}\rangle \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle_H = v^1 w^1 + v^1 w^2 + w^2 v^1 + 2v^2 w^2$$

et

$$\|\vec{v}\|_H^2 = (v^1)^2 + 2v^1 v^2 + 2(v^2)^2 = (v^1 + v^2)^2 + (v^2)^2.$$

On obtient $h = dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 2dy \otimes dy$.

Corollaire 5.1. *Soit g_{eu} la métrique euclidienne standard sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$:*

$$G_{eu} = I_{n\times n}, \quad g_{eu} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i$$

et soit $u : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$.

Alors si $h = u^*g, h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dx^i \otimes dx^j, H = [h_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on a

$$H = ({}^t Du)Du.$$

Remarque 5.35. $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, si $H = {}^t AA$, on a

$$\langle \vec{v} \mid H \mid \vec{w}\rangle = \langle \vec{v} \mid {}^t AA \mid \vec{w}\rangle = \langle A\vec{v} \mid A\,\vec{w}\rangle = \vec{v} \cdot ({}^t AA\vec{w}) = A\vec{v} \cdot A\vec{w}.$$

De plus, on a

$$\langle \vec{v} \mid H \mid \vec{v}\rangle = \langle A\vec{v} \mid A\vec{v}\rangle = \|A\vec{v}\|^2,$$

qui est le carré de la norme euclidienne de $A\vec{v}$.

Exemple 5.15. Soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $u(x, y) = (x + y^2, y)$. Notez que $u : V \to V$ est un difféomprphisme. On met $h := u^* g_{eu}$. On calcule

$$Du(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et on obtient alors

$$H = {}^t DuDu = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 2y & 1 + 4y^2 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$h = dx \otimes dx + 2y\, dx \otimes dy + 2y\, dy \otimes dx + (1 + 4y^2)\, dy \otimes dy.$$

On étudie les pré-images sous u des géodésies de g_{eu}, qui sont les lignes droites dans $U = u(V) = V$. Si $u(x, y) = (x', y')$, alors on a $x + y^2 = x', y = y'$, donc $x = x' - y^2 = x' - (y')^2$. On obtient donc

$$u^{-1}(x', y') = (x' - (y')^2, y').$$

Le pré-image sous u de la ligne droite $x' \equiv$ constante et y arbitraire (paramètré par $y = t$), est la courbe dans V de la forme $(c - t^2, t), t > 0$, qui est la partie supérieure $(y > 0)$ du parabole $x = c - y^2$.

Sinon, $y' = ax' + b, t = x', y' = at + b$, donc la courbe géodésique correspondant pour (V, h) est

$$(t - (at + b)^2, \overbrace{at + b}^{y}).$$

- ⋆ Si $a \neq 0$, on a $y = at + b$, $t = \dfrac{y - b}{a}, x = \dfrac{y - b}{a} - y^2 = -y^2 + \dfrac{y}{a} - \dfrac{b}{a}$; donc la courbe pré-image est la partie supérieure $(y > 0)$ d'un parabole.
- ⋆ Si $a = 0$, $y' = b > 0, x' = t$ (paramètre), la courbe dans (V, h) est $(t - b^2, b)$, qui est aussi une ligne horisontale.

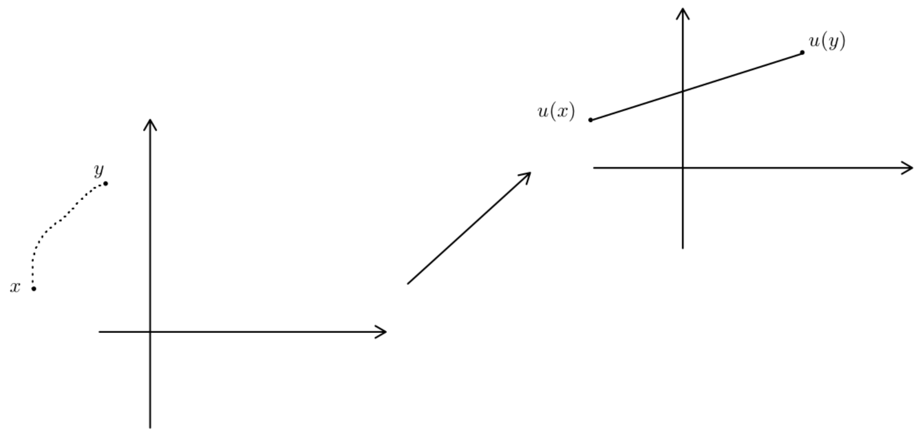

Figure 34 –

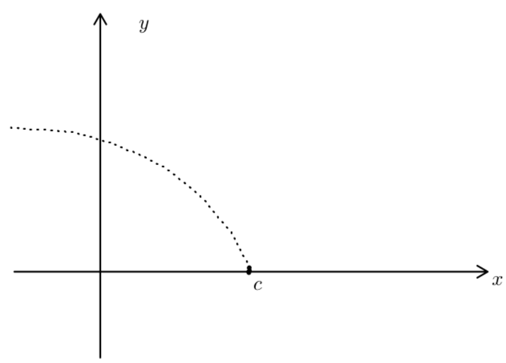

Figure 35 –