Probabilités et applications

2023-2024

TABLE DES MATIÈRES

1 Généralités sur les probabilités **5**
- 1.1 Tribus 5
- 1.2 Probabilité 6
  - 1.2.1 Continuité 7
- 1.3 Mesure de Dirac 8
- 1.4 Mesure de Lebesgue 8
  - 1.4.1 Mesure de Lebesgue-Stieltjes 9
- 1.5 Fonctions mesurables 9
- 1.6 Loi de la variable aléatoire 11
- 1.7 Intégrale 13
  - 1.7.1 Conséquences en probabilités 15
- 1.8 Fonctions de répartition 16
- 1.9 Système complet d'événements 20

2 Vecteurs aléatoires **21**
- 2.1 Fonction de répartition 21

3 Indépendance **25**
- 3.1 Evénements indépendants 25
- 3.2 Mutuellement indépendants 25
- 3.3 Classes d'événements indépendantes 25
- 3.4 Indépendance de variables aléatoires 27
- 3.5 Changement de variables 30

4 Convergence des variables aléatoires **33**
- 4.1 Convergence en probabilité 33
- 4.2 Convergence en moyenne L^p 33
- 4.3 Convergence presque sûre 34
- 4.4 Loi des grands nombres 38
  - 4.4.1 Loi faible des grands nombres 38
  - 4.4.2 Loi forte des grands nombres 40
  - 4.4.3 Lien entre convergences 40
- 4.5 Convergence en loi 40
  - 4.5.1 Fonction caractéristique 40

Dénombrement **45**
- 4.6 Dispositions sans répétition 45
- 4.7 Dispositions avec répétition 45
- 4.8 Tirage des urnes sans remise 46
- 4.9 Tirage des urnes avec remise 46

Travaux dirigés **47**

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBABILITÉS

1.1 Tribus

Définition 1.1.1 (σ-algèbre $\mathscr{A}$)**.** Ω ensemble. Les éléments de Ω constinuent une σ-algèbre $\mathscr{A}$:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$;
2. Si $A \in \mathscr{A}$, alors $A^C \in \mathscr{A}$;
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite dénombrable dans $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$.

Exemple.

1. 2^Ω, ensemble de tous les ensembles de Ω, triviale ;
2. Grossière $\{\emptyset, \Omega\}$.

Définition 1.1.2 (σ-algèbre engendrée)**.** Dans Ω, on a une famille d'ensembles $\mathscr{S}$. On appelle $\sigma(\mathscr{S})$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{S}$ qui est la plus petite σ-algèbre qui contient $\mathscr{S}$.

$$\sigma(\mathscr{S}) = \bigcap_{\substack{\mathscr{A}\,\sigma\text{ -algèbre} \\ \mathscr{A}_\alpha \in \mathscr{S}}} \mathscr{A}_\alpha$$

Exemple. $\Omega = \{a, b, c\}, \mathscr{S} = \{a, b\}$
Construire $\sigma(\mathscr{S})$.

Exemple. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathscr{S} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Construire $\sigma(\mathscr{S})$.

Exemple. On a dans Ω deux ensembles A, B. Construire $\sigma(\{A, B\})$.
$\sigma(\{A, B\}) = \{\Omega, \emptyset, A, B, A^C, B^C, A \cup B, A \cup B^C, \ldots\}$ (15 éléments).

Imaginons que $\Omega = \mathbb{R}$.
σ-algèbre de Borel (β). Il s'agit de la σ-algèbre engendrée par les intervalles ouverts.
$\mathscr{S} = \{(a, b), (-\infty, a), (b, +\infty)\}$.
On a $[a, b) \in \beta$, car $\bigcap_{k=1}^{\infty}(a - \frac{1}{k}, b) = [a, b)$.

Remarque (intersections dans une σ-algèbre). Si $A, B \in \mathscr{A}$, est-ce que $A \cap B \in \mathscr{A}$?
$A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$.
$A - B = A \cap B^C$. $A - B \in \mathscr{A}$.
Les intersections dénombrables sont aussi dans $\mathscr{A}$.

Proposition 1.1.1. β est aussi engendrée par :

1. $\mathscr{S}_1 = \{[a, b)\}$;
2. $\mathscr{S}_2 = \{(a, b]\}$;
3. $\mathscr{S}_3 = \{[a, +\infty)\}$;
4. $\mathscr{S}_4 = \{(-\infty, a)\}$;
5. $\mathscr{S}_5 = \{(a, +\infty)\}$.

Démonstration. On montre $\mathscr{S}_1$.

$$[a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{k}, b\right) \implies \sigma([a, b)) \subset \beta. \tag{1.1}$$

Montrons maintenant que $\beta \in \sigma([a, b))$.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{k}, b\right) = (a, b).$$

Donc $\beta \in \sigma([a, b))$.
Montrons $\mathscr{S}_3$. □

1.2 Probabilité

Définition 1.2.1 (Probabilité)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable.
On introduit une fonction d'ensemble $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0, 1]$ qu'on appelle **probabilité** et qui vérifie :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Si (A_n) est une suite dénombrable dans $\mathscr{A}$ d'éléments deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

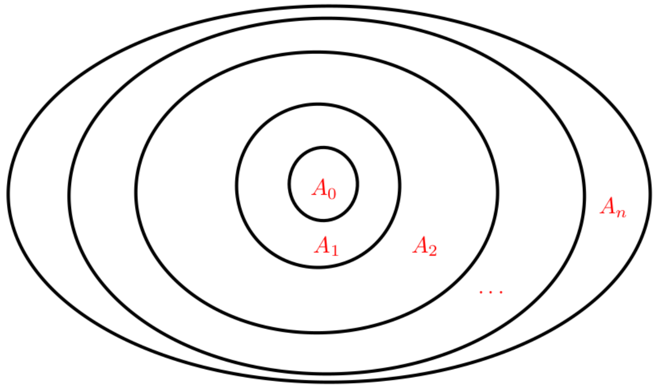

FIGURE 1.1 – On construit ainsi les couronnes

Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ est telle que A_n ne sont pas deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Cette propriété s'appelle σ-sous additivité.

1.2.1 Continuité

Soit $\{A_n\}$ une suite croissante, i. e. $A_n \subset A_{n+1}$.
Est-ce que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)?$$

Soit $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite décroissante, ie $A_{n+1} \subset A_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)\right)$$

Donc par le deuxième axiome, on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n)$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n)$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} (\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)) \text{ (somme téléscopique)}$$

Or on a

$$\sum_{n=1}^{k} (\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)) = \mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P}(A_1).$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{k\to\infty}[\mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P}(A_1)]$$

et on obtient le résultat désiré. $\square$

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace mesuré ou de probabilité.
Dans le langage des probabilités, on appelle Ω l'univers et les éléments de $\mathscr{A}$ sont des événements.

1.3 Mesure de Dirac

Soit $\omega_0 \in \Omega$ quelconque.
$\delta_{w_0}(A), A \in \mathscr{A}$.
$\delta_{w_0}(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } w_0 \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
Montrer qu'il s'agit d'une probabilité.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, w_k, \ldots\}$.
On associe à w_i un poids p_i tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{1.2}$$

Si $A \subset \Omega$, on définit

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i,\omega_i \in A} p_i.$$

Si $card(\Omega) < \infty$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$.
On associe à $\omega_j = \frac{1}{N}$.
Donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i,\omega_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{card(\omega_i \text{ dans } A)}{card(\text{total de } \omega_i)} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}.$$

1.4 Mesure de Lebesgue

Elle est définie sur $\beta(\mathbb{R})$ et elle est la seule mesure qui se comporte comme ceci :
$\lambda((a,b]) = b - a$.
On a aussi

$$\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a. \tag{1.3}$$

$(a,b] = (a,b) \cup \{(b)\}$.
Il faut montrer que $\lambda(\{b\}) = 0$.
On a

$$\{b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{k}, b].$$

Donc

$$\lambda(\{b\}) = \lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty}(b - \frac{1}{k}, b]) \text{ intersection décroissante}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \lambda((b - \frac{1}{k}, b])$$
$$= \lim_{k\to\infty}(b - b + \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

1.4.1 Mesure de Lebesgue-Stieltjes

Soit F une fonction croissante bornée et continue à droite (i. e. $F(x_0) = \lim_{x\to x_0} F(x)$) et supposons que

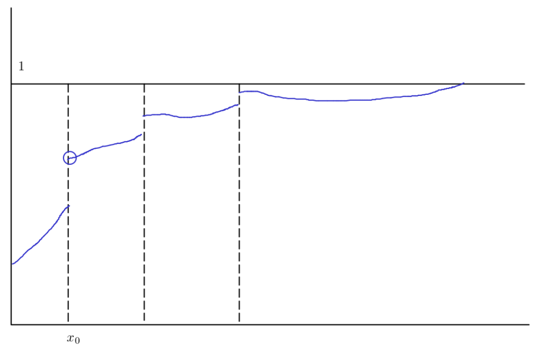

Figure 1.2 – Mesure de Lebesgue-Stieltjes

On définit une fonction d'ensemble $\nu((a, b]) = F(b) - F(a)$. ν devient une mesure de probabilité sur $\sigma((a, b]) = \beta$.

On a $\nu(\{x_d\}) \neq 0$.

Démonstration. $\{x_d\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}(x_d - \frac{1}{k}, x_d]$.

Or

$$\nu(\{x_d\}) = \lim_{k\to\infty} \nu((x_d - \frac{1}{k}, x_d]) = \lim_{k\to\infty} F(x_d) - F(x_d - \frac{1}{k})$$
$$= F(x_d) - \lim_{k\to\infty} F(x_d - \frac{1}{k}) = F(x_d)_+ - F(x_d)_-$$
$$= \text{ différence entre la limite gauche et la limite droite } > 0.$$

□

1.5 Fonctions mesurables

$(\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \beta),\ f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Définition 1.5.1 (Mesurable)**.** On dit que f est mesurable si pour tout borélien $B \in \beta$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$.

Définition 1.5.2 (Equivalente)**.** $f^{-1}(\beta)$ est une sous σ-algèbre de $\mathscr{A}$.

Exercice 1. Montrer que $f^{-1}(\beta)$ est une σ-algèbre.

Démonstration.
1. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$.
2. Si $A \in f^{-1}(\beta)$, est-ce que A^C est aussi dans $f^{-1}(\beta)$?
   Si $A \in f^{-1}(\beta)$, alors $\exists B \in \beta$ tel que $A = f^{-1}(B)$.
   $A^C = (f^{-1}(B))^C = f^{-1}(B^C)$.
3. Si $\{A_n\} \in f^{-1}(\beta)$, est-ce que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\beta)$?

□

Proposition 1.5.1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Soit $\mathscr{C}$ une famille dans $\mathbb{R}$ telle que $\sigma(\mathscr{C}) = \beta$.
Si $f^{-1}(C), C \in \mathscr{C}$ est dans $\mathscr{A}$, alors f est mesurable.

Exemple. $f : \Omega$ (topologie) $\longrightarrow \mathbb{R}$ (topologie ouverts) continue.
f est mesurable.
Si $\mathcal{O}$ ouvert dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans Ω.

$f : (\Omega, \mathscr{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) =$ constante.
On a deux cas :

1. $f^{-1}((a,b)) = \emptyset$ si la constante n'est pas dans (a,b) ;
2. $f^{-1}((a,b)) = \Omega$ si la constante est bien dans (a,b).

Exemple. Soient $f, g : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \beta)$ deux fonctions mesurables. Montrons que $f+g$ est mesurable.

Démonstration. On considère la famille $\{(a, \infty)\}$.
Si on veut montrer que $f+g$ est mesurable, il suffit de montrer que $(f+g)^{-1}((a,\infty)) \in \mathscr{A}$.
Donc il faut montrer que $\{\omega, f(\omega) + g(\omega) > a\} \in \mathscr{A}$, ie $\{\omega, f(\omega) > a - g(\omega)\}$.
Montrons d'abord que $a - g$ est mesurable.
$\omega \in (a-g)^{-1}((b,\infty))$.

$$a - g(\omega) > b \implies -g(\omega) > b - a$$
$$\text{Or } \{\omega, g(\omega) < a - b\} \in \mathscr{A},$$
$$\text{c'est à dire } g^{-1}((-\infty, a-b)) \in \mathscr{A}.$$

Notons $h = a - g$.
Si f, h sont mesurables, est-ce que $\{\omega, f(\omega) > h(w)\}$?
On a $\{\omega, f(\omega) > h(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > r\} \cap \{h < r\}$.
Or $\{\omega, f(\omega) > r\} = f^{-1}(r, \infty) \in \mathscr{A}$ et $\{\omega, h(\omega) < r\} = h^{-1}((-\infty, r)) \in \mathscr{A}$.
On a donc montré que $f+g$ est mesurable. □

Proposition 1.5.2. On a aussi :

1. Si λ est un scalaire, λf est mesurable ;
2. $f \cdot g$ est mesurable ;
3. Si $g \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est mesurable ;
4. Si on a une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables, on a $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ sont mesurables.

Soient $\Omega \in \mathbb{R}$ borné et $f : (\Omega, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$.

Soit $\mathcal{P}$ une partition de Ω, ie un ensemble $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i = \Omega \text{ et } P_i \cap P_j \neq 0 \text{ si } i \neq j.$$

Considérons par exemple la partition $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Comme $\mathcal{P}$ est une famille dans Ω, construisons $\sigma(\mathcal{P})$, ie la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{P}$. Dans notre cas, $\sigma(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Cette σ-algèbre est composée par la réunion d'éléments de $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$.

$$\sigma(\mathcal{P}) = \{\emptyset, \Omega, P_1, P_2, P_3, P_4, P_1^C = P_2 \cup P_3 \cup P_4, \ldots\}.$$

Si on a $B = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$, alors $B^C = \bigcap_{i=1}^{m} P_i^C = \bigcap_{i=1}^{m} (\bigcup_{i=1}^{m} P_i)$.

Proposition 1.5.3. On sait exactement comment sont faites les fonctions mesurables dans ce cas. Il s'agit de fonctions constantes par morceaux.

Démonstration. Soit $\{p\} \in \mathbb{R}$, donc $f^{-1}(\{p\}) \in \sigma(\mathcal{P})$.

Supposons par exemple que $f^{-1}(\{p\}) = P_2 \cap P_3$. Si $x \in f^{-1}(\{p\})$, alors $f(x) = p$, mais $x \in P_2 \cup P_3$, donc sur $P_2 \cup P_3$ on aura en fait une valeur constante.

□

Définition 1.5.3 (Variable aléatoire)**.** Soit $X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$.

Si X est une fonction mesurable, on dit que X est une **variable aléatoire**.

Remarque (Notations). On notera

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\omega, X(\omega) \in B).$$

1.6 Loi de la variable aléatoire

Définition 1.6.1 (Loi de variable aléatoire)**.** Il s'agit d'une mesure de probabilité définie sur $\mathbb{R}$. On va la noter avec le symbole P_X.

Si $B \in \beta$,

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)),$$

avec

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}.$$

Définition 1.6.2 (Rappel : mesure (cf cours d'intégration de L3))**.**

Soit (E, τ) un ensemble mesurable. Alors une application $\mu : \tau \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est une mesure sur E si :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. Pour toute suite (A_n) de τ disjointe, ie $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ (σ-additivité.)}$$

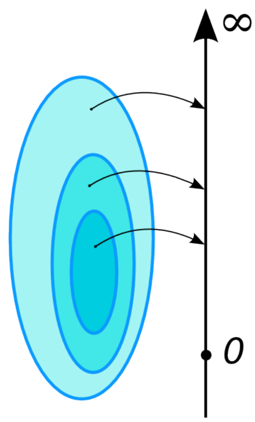

FIGURE 1.3 – De façon informelle, une mesure a la propriété d'être monotone : si l'ensemble E est un sous-ensemble de F, la mesure de E est inférieure ou égale à celle de F. De plus, on impose à la mesure de l'ensemble vide la valeur 0 (Wikipédia).

Exercice 2. Montrer que P_X est une mesure.

Démonstration. 1. $P_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$;

2. Si $\{B_n\}$ est une suite deux à deux disjointe,

$$P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n),$$

car

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right) \text{ (propriété de l'image réciproque)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(B_n)) \text{ ($\mathbb{P}$ est une probabilité)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n). \end{aligned}$$

□

1.7 Intégrale

Définition 1.7.1 (Fonctions étagées/simples)**.** Soit X espace mesuré, $x \in X$. Une fonction h est appelée fonction étagée si h s'écrit de la manière suivante

$$h(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x),$$

avec A_k ensemble mesurables (un élément de la σ-algèbre) tel que $A_k \cap A_j$ si $k \neq j$ et $c_k \geq 0$.

Théorème 1.7.1. *Soit $f : (X, \mathscr{A}, \mu)$ (espace mesuré) $\longrightarrow (\mathbb{R}^+, \beta)$ mesurable.*
Alors il existe une suite croissante $(\forall x, h_n(x) \leq h_{n+1}(x))$ de fonctions étagées $\{h_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

Définition 1.7.2 (Intégrale de Lebesgue)**.**

1. *Première étape.* On considère une fonction simples

$$h(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x),$$

alors

$$\int_X h d\mu = \int_X h(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k \mu(A_k).$$

2. *Deuxième étape.* Si f est mesurable non négative,

(a)

$$\int_X f d\mu = \sup \left(\int_X h d\mu, h \text{ simple}, h \leq f \right).$$

(b) Si $f = \lim_{k\to\infty} h_k, h_k$ simples non négatives,

$$\int_X f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int h_k d\mu.$$

3. Si f mesurable de signe quelconque, on écrit $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, où $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$.
(à suivre...)

Définition 1.7.3 (De classe $\mathscr{L}^1$)**.** On dira que f est de classe $\mathscr{L}^1$ si

$$\int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Dans ce cas, $|f| = f_+ + f_-$.

Exemple. On considère la mesure de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\int_X f(x) d\delta_a(x) = f(a). \tag{1.4}$$

Démonstration. Soit $f = \sum_{k=1}^{M} c_k \mathbb{1}_{A_k}$ une fonction simple.

$$\int \sum_{k=1}^{M} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x) d\delta_a(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k \delta_a(A_k) = c_{\overline{k}}$$

avec $\overline{k}$ le seul k tel que $a \in A_k$ car les A_k sont deux à deux disjoints.

Or $c_{\overline{k}} = f(a)$.

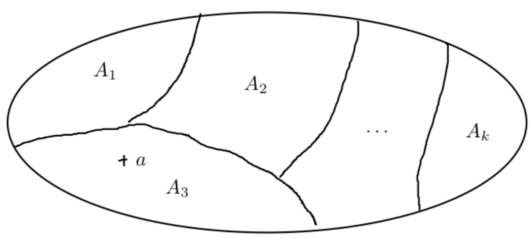

FIGURE 1.4 – a ne peut être que dans un seul des A_k.

On suppose maintenant que $f(x) = \lim_{k \to \infty} h_k(x)$.
Alors

$$\int_X f(x) d\delta_a(x) = \int_X \lim_{k\to\infty} h_k(x) d\delta_a(x) \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X h_k d\delta_a(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(a) = f(a).$$

□

Théorème 1.7.2 (Beppo-Levi)**.** *Si* $\{h_k\}$ *est une suite monotone non négative, alors*

$$\lim \int f_k = \int \lim f_k.$$

Remarque. Si $\mu = \sum_{k=1}^{M} p_k \delta_{a_k}$, avec $\sum_{k=1}^{M} p_k = 1$, alors

$$\int_X f d\left(\sum_{k=1}^{M} p_k \delta_{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{M} p_k f(a_k).$$

Démonstration. Même démonstration que pour 1.4. □

1.7.1 Conséquences en probabilités

Soit $X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$.

X est une variable aléatoire. Associée à X, il y a une mesure de Borel sur la droite qu'on appelle la loi notée P_X (cf 1.6.1).

Définition 1.7.4 (Espérance de X)**.** L'espérance de X se calcule comme suit :

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \tag{1.5}$$

Théorème 1.7.3 (De transfert)**.** *On a*

$$\int_\Omega f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} f(x) dP_X(x), \text{ avec } x \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction simple telle que $f(x) = \sum_{k=1}^M c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$.

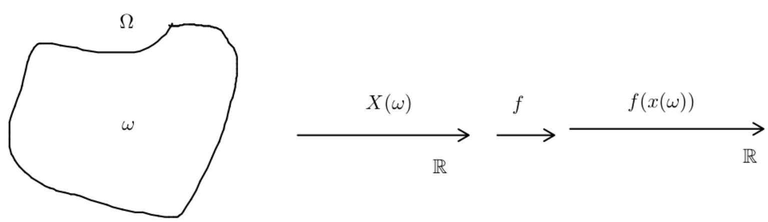

FIGURE 1.5 – Illustration théorème de transfert

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^M c_k \mathbb{1}_{A_k}(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^M c_k \int_\Omega \mathbb{1}_{A_k}(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega). \tag{1.7}$$

Or

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{A_k}(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(A_k)}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(X^{-1}(A_k)) = P_X(A_k)$$

Donc 1.7 devient :

$$\sum_{k=1}^M c_k P_X(A_k) = \int_\mathbb{R} f(x) dP_X(x).$$

On considère que f est quelconque avec $f = \lim_{k\to\infty} h_k$, avec $\{h_k\}$ suite de fonctions simples.

$$\begin{aligned} \int f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) &= \int \lim_{k\to\infty} h_k(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \lim_{k\to\infty} \int h_k(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\mathbb{R} h_k(x) dP_X(x) = \int_\mathbb{R} \lim_{k\to\infty} h_k(x) dP_X(x) = \int_\mathbb{R} f dP_X \end{aligned}$$

□

1.8 Fonctions de répartition

Définition 1.8.1 (Fonction de répartition)**.** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On définit

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t), t \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$
$$= \mathbb{P}(\omega, X(\omega) \leq t) = \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, t])) = P_X((-\infty, t]). \tag{1.9}$$

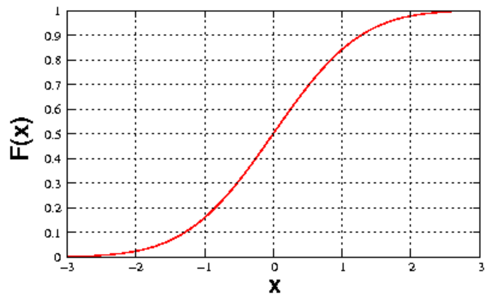

FIGURE 1.6 – Fonction de répartition

Proposition 1.8.1 (Propriétés de F)**.**

1. F est non négative et bornée entre 0 et 1.
2. F est croissante et continue à droite.
3. $$\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} F(t) = 1 \\ \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0. \end{cases}$$
4. F est discontinue dans au plus un nombre dénombrable de points.

Démonstration. 1. *Continuité à droite.* Si a est un point de discontinuité,

$$F(a) = \lim_{t\to a^+} F(t).$$

$$F(a) = P_X((-\infty, a]) = P_X\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(-\infty, \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{k\to\infty} P_X\left(\left(-\infty, a + \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{k\to\infty} F\left(a + \frac{1}{k}\right) = \lim_{t\to a^+} F(t),$$

car on écrit

$$(-\infty, a] = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(-\infty, a + \frac{1}{k}\right).$$

$\square$

Soit $\pi(a)$ le saut dans un point de discontinuité de la fonction de répartition. On définit

$$A_n = \{t \in \mathbb{R}, \pi(t) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Comme F est bornée entre 0 et 1, il peut y avoir au plus n éléments dans A_n.
Les points de discontinuité sont données par des points

$$t \in \bigcup_{n\geq 1} A_n \text{ (ensemble dénombrable).}$$

Comme F est continue et croissante à droite, elle définit une mesure de Lebesgue-Stieltjes

$$\nu((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Montrons que $\nu = P_X$.

$$P_X((a,b]) = P_X((-\infty,b]) - P_X((-\infty,a]) = F(b) - F(a).$$

□

ν ne peut avoir que deux formes particulières. 18-09-2023

1. ν est une somme de masses de Dirac. Si A est un borélien de $\mathbb{R}$, alors

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{X_k}(A),$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Alors

$$p_k = \mathbb{P}(X = \{x_k\}) = \mathbb{P}(\omega, X(\omega) = x_k).$$

Définition 1.8.2 (Variable aléatoire discrète)**.** On appelle **discrète** toute variable aléatoire X dont la loi a la forme :

$$P_X = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{X_k}(A).$$

En particulier, nous écrirons toute variable aléatoire

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega) \text{ et on aura } P_X(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}(A), \text{ avec } p_k = \mathbb{P}(A_k).$$

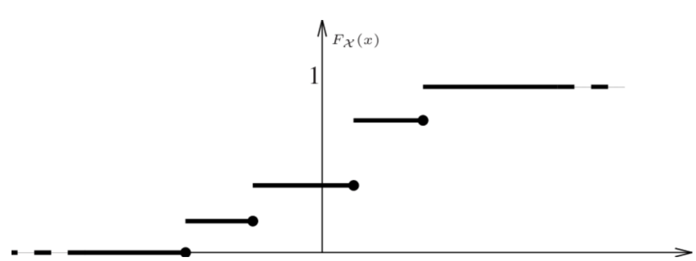

FIGURE 1.7 – Exemple de fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Remarque (Notations). Mesure de Lebesgue : $\begin{cases} \text{Leb} \\ dx \end{cases}$

2. Soit ν une mesure de probabilité de Borel sur $\mathbb{R}$. On dira que ν est **absolument continue** s'il existe une fonction non-négative $f \in L^1(\text{Leb})$ ($\int_{\mathbb{R}} f dx < \infty$) telle que, pour tout borelien B,
$$\nu(B) = \int_B f(x)dx.$$
On la dénote aussi $\nu \ll$ Leb.
En particulier si g est bornée ($L^\infty(\text{Leb})$), alors
$$\int_{\mathbb{R}} g d\nu = \int_{\mathbb{R}} g f dx.$$
f est la densité de f par rapport à Lebesgue (dérivée de Radon-Nykodym).

Dans notre cas, $\nu((a,b]) = F(b) - F(a)$.
Si F est la fonction de répartition de X, on a

$$P_X((a,b]) = F(b) - F(a) \overset{\text{Si la loi est AC}}{=} \int_{(a,b]} f(x)dx$$
$$= \int_{[a,b]} f(x)dx = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{Intégrale de Riemann}}$$

Définition 1.8.3 (Variable aléatoire à densité)**.** On dira qu'une variable aléatoire X est **à densité** si sa loi est absolument continue et on appelle f_X la densité de probabilité de X.

Si $\nu = c_1\delta_{X_1} + c_2\text{Leb}$, on écrit $\nu(A) = c_1\delta_{X_1}(A) + c_2\text{Leb}(A)$.
Il n'y a pas de saut dans la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue, car si $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$, on a
$$\text{saut}(x_0) = F(x_0) - F(x_0^-) = 0.$$
C'est lié au fait que pour λ mesure de Lebesgue, on a $\lambda(\{b\}) = 0$ (cf 1.3).

Théorème 1.8.1. *Toute fonction de répartition F s'écrira (pour nous) de la forme*
$$F(t) = c_1F_d(t) + c_2F_{ac}(t),$$
où F_d est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète et F_{ac} est la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue et $c_1 + c_2 = 1$.

Dans ce cas, $P_X = c_1(\text{masses de Dirac}) + c_2(\text{mesure absolument continue})$.

Soit X une variable à densité f_X. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère la même variable aléatoire $g \circ X$. Quelle est sa loi ?

Exemple. Soit une variable aléatoire X avec la loi exponentielle. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$
Trouver la loi de $X^2 = g \circ X$, avec $g : x \to x^2$.

Soit h une fonction bornée positive quelconque (fonction test).

$$\int_\Omega h(g(X))d\mathbb{P} = \int_\Omega (h\circ g)(X)d\mathbb{P} \stackrel{\text{transfert}}{=} \int_\mathbb{R} (h\circ g)(x)dP_X(x) \tag{1.10}$$
$$= \int_\mathbb{R} (h\circ g)(x)f_X(x)dx = \int_A h(g(x))f_X(x)dx. \tag{1.11}$$

On fait un changement de variable en posant $y = g(x), dy = g'(x)dx$.
Dans ce cas, 1.11 devient

$$\int h(y)f_X(g^{-1}(y))dy.$$

Or

$$\int h(y)c(y)dy = \int_{g(A)} h(y)f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}dy,$$

avec c la densité associée à $y = g(x)$ et $(g^{-1})' = \dfrac{1}{g'(g^{-1})}$.
Comme h est quelconque,

$$c(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\mathbb{1}_{g(A)}(y).$$

Dans notre exemple, X a la densité $f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ et $g(x) = x^2$, $A = [0,\infty)$.
On a

$$y = x^2$$
$$x = \sqrt{y}.$$

On obtient

$$\overbrace{c(y)}^{\text{densité}X^2} = e^{-\sqrt{y}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{1}_{g([0,\infty))}(y)$$
$$= \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y),$$

car $g([0,\infty)) = [0,\infty)$.

Exemple. X suit la loi uniforme entre $[-1,1]$.
$f_X = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$, car $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 dt = 1$. Calculer X^2.

$$\int h(g(X))d\mathbb{P} = \int (h\circ g)(X)d\mathbb{P} = \int_{-1}^1 (h\circ g)(x)f_X(x)dx$$
$$= \int_{-1}^0 (h\circ g)(x)f_X(x)dx + \int_0^1 (h\circ g)(x)f_X(x)dx$$
$$= \int_0^1 h(y)f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy + \int_0^1 h(y)f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$
$$= \int_0^1 h(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})]dy.$$

On a

$$\int h(g(X))d\mathbb{P} = \int h(y)c_Y(y)dy,$$

avec

$$c_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})]\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B \in \mathscr{A}, \mathbb{P}(B) > 0$.
On peut définir $\mathbb{P}(A \mid B)$, la probabilité conditionnelle de A sachant B, définie comme suit :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exercice 3. Si l'on fixe B, montrer que $\mathbb{P}(\cdot \mid B) \to [0, 1]$ est une probabilité.

On dira que deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

1.9 Système complet d'événements

Définition 1.9.1. Soit

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\forall i \geq 1, \mathbb{P}(A_i) > 0$.
On appelle $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ un **système complet d'événements** (SCE).

Théorème 1.9.1 (Formule des probabilités totales)**.** *Si $B \in \mathscr{A}$ quelconque, alors*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

22-09-2023

CHAPITRE 2

VECTEURS ALÉATOIRES

On considère maintenant des variables aléatoires $X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Borel engendrée par les ouverts).

On étudiera surtout les cas où $n = 2$. On dénote un vecteur aléatoire $X \equiv (X_1, X_2)$ (parfois (X, Y)). Parfois on écrit, pour $i = 1, \dots, n$,

$$X_i = \pi_i \circ X, \text{ où } \pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

π_i est une **projection**.

Définition 2.0.1 (Loi d'un vecteur aléatoire)**.** Soit B un borélien de $\mathbb{R}^n$. Alors la loi de X (loi conjointe) est définie ainsi :

$$P_X(B) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega, X(w) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Est-il possible de calculer la loi de X_1 ?

Si on connaît la loi du couple de variables aléatoires, il est possible de calculer les lois des deux variables. Par contre, on ne peut pas avoir la loi du couple en connaissant la loi des deux variables aléatoires.

Définition 2.0.2 (Loi marginale)**.** Si D est un borélien de $\mathbb{R}$, la loi de X est

$$\underbrace{P_{X_1}(D)}_{\text{loi marginale}} = \mathbb{P}(X_1 \in D) = \mathbb{P}(\pi_1 \circ X \in D) = \mathbb{P}(X \in \pi_1^{-1}(D)) = P_X(\underbrace{\pi_1^{-1}(D)}_{\text{borélien}}).$$

Remarque. $\pi_i^{-1}(D)$ est borélien, car π_i est continue.

2.1 Fonction de répartition

Dans le cas où $n = 2$, $X = (X_1, X_2)$,

$$F_X(t_1, t_2) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2) = P_X((-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2]).$$

Définition 2.1.1. On dira que le vecteur aléatoire X est **absolument continu** s'il existe une fonction f mesurable et **non-négative** définie comme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$, on a

$$P_X(B) = P_{(X_1,X_2)}(B) = \iint_B \underbrace{f(x_1,x_2)}_{\text{densité du couple}} \quad dx_1dx_2$$

et si $B = (-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2]$, alors

$$F_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\mathbb{1}_{(-\infty,t_1]}(x_1)\mathbb{1}_{(-\infty,t_2]}(x_2)dx_1dx_2.$$

Proposition 2.1.1.

$$F_{X_1}(t_1) = \lim_{t_2\to\infty} F_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) \text{ et } F_{X_2} = \lim_{t_1\to\infty} F_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2).$$

Démonstration.

$$F_{X_1}(t_1) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \underbrace{X_2 \in \mathbb{R}}_{\text{toujours vrai}}),$$

car

$$\{X_1 \le t_1\} = \{\omega, X_1(\omega) \le t_1\} = \{\omega, X_1(\omega) \le t_1\} \cap \Omega = \{\omega, X_1(\omega) \le t_1\} \cap \underbrace{X_2^{-1}(\mathbb{R})}_{X_2\in\mathbb{R}}).$$

Donc

$$F_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \in \mathbb{R}) = P_{X_1,X_2}((-\infty,t_1] \times \mathbb{R}) = \lim_{k\to\infty} P_{X_1,X_2}((-\infty,t_1] \times (-\infty,k]),$$

car

$$\left((-\infty,t_1] \times \bigcup_{k=1}^{\infty}(-\infty,k)\right) = (-\infty,t_1] \times \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\lim_{k\to\infty} P_{X_1,X_2}((-\infty,t_1] \times (-\infty,k]) = \lim_{k\to\infty} F_{(X_1,X_2)}(t_1,k), k \in \mathbb{R}.$$

□

Théorème 2.1.1 (De transfert pour un vecteur aléatoire)**.** *Soit g une fonction mesurable. Alors on a*

$$\int_\Omega g(X)d\mathbb{P} = \int_\Omega g((X_1,X_2))d\mathbb{P} = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)dP_X(x_1,x_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)f_X(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Proposition 2.1.2. Soit $X = (X_1, X_2)$ absolument continu, donc il existe une densité $f_X(x_1, x_2)$. Alors on a

$$\begin{cases} f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx_2, \\ f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx_1. \end{cases}$$

Démonstration. Si X_1 a une densité, cela signifie

$$F_{X_1}(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} f_{X_1}(x_1)dx_1.$$

Ce résultat est-il vrai ?

Par le théorème précédent,

$$\begin{aligned} F_{X_1}(t_1) &= \lim_{t_2\to\infty} F_{(X_1,X_2)}(t_1, t_2) = \lim_{t_2\to\infty} \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} f_{(X_1,X_2)}(u_1, u_2)du_1u_2 \\ &= \lim_{t_2\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X_1,X_2)}(u_1, u_2)\mathbb{1}_{(-\infty,t_1]}(u_1)\mathbb{1}_{(-\infty,t_2]}(u_2)du_1du_2 \\ &= \lim_{t_2\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]}(u_1)\left[\int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(u_1, u_2)\mathbb{1}_{(-\infty,t_2]}(u_2)du_2\right]du_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]}(u_1)\int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(u_1, u_2)du_2du_1 = \int_{-\infty}^{t_1}\left(\int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(u_1, u_2)du_2\right)du_1. \end{aligned}$$

$\square$

CHAPITRE 3
INDÉPENDANCE

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

3.1 Evénements indépendants

Définition 3.1.1. Deux événements $A, B \in \mathscr{A}$ sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

ou

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \text{ si } \mathbb{P}(B) > 0.$$

3.2 Mutuellement indépendants

Définition 3.2.1. Soit $\{A_n\}$ une suite dénombrable d'événements. On dira que cette suite est **mutuellement indépendante** si pour toute sous-suite d'événements $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

3.3 Classes d'événements indépendantes

Définition 3.3.1. Deux classes d'événements $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont dites indépendantes si $\forall A_1 \in \mathscr{C}_1$ et $A_2 \in \mathscr{C}_2$, A_1 et A_2 sont indépendants.

Cela se généralise à n classes $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$.

Définition 3.3.2. Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux classes d'événements indépendants et en plus qui sont **stables par intersection finie** (π-système). Alors les σ-algèbres engendrées par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont indépendantes.

Définition 3.3.3. Soit $\mathscr{C}$ une classe. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$. On dira que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie si

$$C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n \in \mathscr{C}.$$

Exemple. 1. Dans $\mathbb{R}$, on considère la classe $\mathscr{C}_1 = \{(a, b], a, b \in \mathbb{R}\}$. C'est un π-système, car pour tout $(a, b], (c, d]$, on aura

$$(a, b] \cap (c, d] = (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}].$$

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{C} = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\}$. Alors $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma$-algèbre de Borel dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.3.4. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X^{-1}(\beta) \subset \Omega$. On appelle $\sigma(X)$ la plus petite σ-algèbre qui rend X mesurable.

Proposition 3.3.1.

$$\sigma(X) = X^{-1}(\beta),$$

où β est la σ-algèbre de Borel dans $\mathbb{R}$.

Remarque (Personnelle). Soient E_1, E_2 ensembles et $f : E_1 \to E_2$. On rappelle que si τ_2 est une tribu sur E_2, alors

$$f^{-1}(\tau_2) = \{f^{-1}(A), A \in \tau_2\}$$

est une tribu sur E_1, appelée **la tribu réciproque**.
Dans le cas de probabilités, on aura

$$X^{-1}(\beta) = \{X^{-1}(B), B \text{ borélien}\}.$$

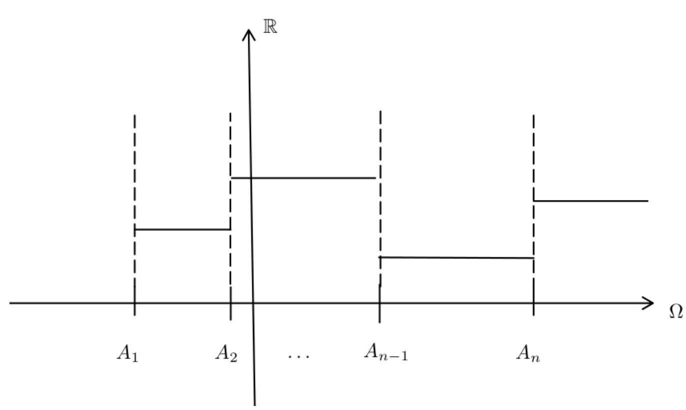

Figure 3.1 – Dans ce cas, $\sigma(X) = \sigma$-algèbre engendrée par la partition $\mathscr{A}$.

Remarque (Personnelle). On rappelle que pour la figure 3.1, si $A_1, \dots, A_n$ est une partition de l'ensemble X, on définit

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, J \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

On démontre que τ est une tribu.

3.4 Indépendance de variables aléatoires

Définition 3.4.1. Deux variables aléatoires X_1, X_2 sont indépendantes si $\sigma(X_1) = X_1^{-1}(\beta)$ et $\sigma(X_2) = X_2^{-1}(\beta)$ sont deux **familles indépendantes** (cf définition 3.3.2).

Un élément de $X^{-1}(\beta)$ s'écrit comme $X^{-1}(B_1), B_1 \in \beta$.
On écrira alors

$$\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2)) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1))\mathbb{P}(X_2^{-1}(B_2)).$$

On aura par conséquent, pour $(-\infty, b]$ qui engendrent β ($\{(-\infty, b]\}$ est un π-système),

$$\mathbb{P}(X_1^{-1}((-\infty, b_1]) \cap X_2^{-1}(-\infty, b_2]) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(-\infty, b_1])\mathbb{P}(X_2^{-1}(-\infty, b_2]),$$

donc

$$\mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, b_1], X_2 \in (-\infty, b_2]) = \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, b_1])\mathbb{P}(X_2 \in (-\infty, b_2]).$$

On obtient ainsi

$$\mathbb{P}(X_1 \leq b_1, X_2 \leq b_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq b_1)\mathbb{P}(X_2 \leq b_2). \tag{3.1}$$

Le résultat 3.1 est exactement la définition de l'indépendance des deux variables aléatoires. 25-09-2023
On peut écrire 3.1 en terme de lois de probabilités :

$$\mathbb{P}(\overbrace{X_1 \leq b_1, X_2 \leq b_2}^{\subset \Omega}) = P_X((-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2]) \overset{\text{si indép}}{=} P_{X_1}((-\infty, b_1])P_{X_2}((-\infty, b_2]). \tag{3.2}$$

Proposition 3.4.1. Deux variables aléatoires X_1, X_2 définies sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont indépendantes si et seulement si

$$P_{(X_1, X_2)} = P_{X_1} P_{X_2}.$$

Démonstration.

1. *Partie nécessaire.* On l'a démontré dans 3.2.
2. *Partie suffisante.* On suppose que

$$\overbrace{P_{(X_1, X_2)}(B_1 \times B_2)}^{\text{loi du couple}} = P_{X_1}(B_1)P_{X_2}(X_2).$$

On prend $B_1 = (-\infty, b_1]$ et $B_2 = (-\infty, b_2]$.
Ainsi

$$P_{(X_1, X_2)}((-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2]) = \mathbb{P}(X_1 \leq b_1, X_2 \leq b_2).$$

□

Exemple. Considérons un vecteur aléatoire (X_1, X_2) de loi

$$\begin{cases} P_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_{a_1} + \frac{1}{2}\delta_{a_2} = f_1(y)dy \\ P_{X_2} = f_2(x)dx. \end{cases}$$

On veut trouver la loi de (X_1, X_2).

On calcule :

$$\int e^{X_1+X_2} d\mathbb{P} = \iint e^{x_1+x_2} dP_{(X_1,X_2)} P(x_1,x_2) = \iint e^{x_1+x_2} d\left(\frac{1}{2}\delta_{a_1} + \frac{1}{2}\delta_{a_2}\right) f_2 dx_2 = \dots$$

Corollaire. *Si X_1, X_2 sont indépendantes, la même chose est vraie pour $f(X_1)$ et $g(X_2)$ avec f et g réelles et mesurables.*

Proposition 3.4.2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si pour toutes f, g non-négatives, on a

$$\mathbb{E}[f(X_1)g(X_2)] = \mathbb{E}[f(X_1)]\mathbb{E}[g(X_2)]$$

et la même chose pour f et g réelles et bornées.

Démonstration.

1. *Partie nécessaire.*

$$\int_\Omega f(X_1)g(X_2)d\mathbb{P} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1)g(x_2)d_{X_1X_2}P(x_1,x_2). \tag{3.3}$$

Or si les variables sont indépendantes, la loi $P_{X_1X_2}$ se factorise dans les marginales. Donc 3.3 devient :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1)g(x_2)dP_{X_1}(x_1)dP_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1)dP_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} g(x_2)dP_{X_2}(x_2) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2].$$

2. *Partie suffisante.* On considère $f = \mathbb{1}_{(-\infty,b_1]}$ et $g = \mathbb{1}_{(-\infty,b_2]}$.
On a

$$\int \mathbb{1}_{(-\infty,b_1]} \circ X_1 \mathbb{1}_{(-\infty,b_2]} \circ X_2 d\mathbb{P} = \mathbb{E}[f(X_1)g(X_2)] = \mathbb{E}[f(X_1)]\mathbb{E}[g(X_2)] = \mathbb{P}(X_1 \le b_1)\mathbb{P}(X_2 \le b_2).$$

□

Proposition 3.4.3 (Indépendance et fonctions de répartition)**.** Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si

$$F_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = F_{X_1}(t_1)F_{X_2}(t_2).$$

Démonstration. 1. *Partie nécessaire.* Si les variables aléatoires X_1, X_2 sont indépendantes, alors

$$F_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1)\mathbb{P}(X_2 \leq t_1) = F_{X_1}(t_1)F_{X_2}(t_2).$$

2. *Partie suffisante.* Point de départ : on écrit la condition

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2) = F_{X_1X_2}(t_1,t_2) = F_{X_1}(t_1)F_{X_2}(t_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1)\mathbb{P}(X_2 \leq t_2),$$

avec t_1, t_2 quelconques et on obtient que X_1 et X_2 sont indépendantes comme c'est dit dans la définition 3.1.

□

Proposition 3.4.4 (Indépendance et densités)**.**

1. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires avec les densités f_{X_1} et f_{X_2} et supposons que X_1 et X_2 sont indépendantes. Alors le couple (X_1, X_2) et sa densité vérifient :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2).$$

2. Supposons que (X_1, X_2) admet la densité $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ qui est le produit entre deux fonctions intégrables non-négatives $\tilde{f}_1(x_1), \tilde{f}_2(x_2)$. Alors $\tilde{f}_1(x_1)$ et $\tilde{f}_2(x_2)$ sont à des facteurs multiplicatifs près, les densités de X_1 et X_2 sont **indépendantes**.

Démonstration.

1. Loi de $X_1 \implies f_{X_1}(x_1)dx_1 : P_{X_1}$ et loi de $X_2 \implies f_{X_2}(x_2)dx_2 : P_{X_2}$.

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = P_{X_1X_2} = P_{X_1}P_{X_2} = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2.$$

2. On sait que

$$f_{X_1}(x_1) = \int f_{X_1X_2}(x_1,x_2)dx_2 = \tilde{f}_{X_1}(x_1)\int \tilde{f}_{X_2}(x_2)dx_2$$
$$f_{X_2}(x_2) = \int f_{X_1X_2}(x_1,x_2)dx_1 = \tilde{f}_{X_2}(x_2)\int \tilde{f}_{X_1}(x_1)dx_1.$$

Ensuite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X_1X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1 = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_{X_1}(x_1)\tilde{f}_{X_2}(x_2)dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x_1)dx_1 \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{X_2}(x_2)dx_2.$$

On a

$$f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \tilde{f}_{X_1}(x_1)\tilde{f}_{X_2}(x_2)\underbrace{\int \tilde{f}_{X_2}(x_2)dx_2 \int \tilde{f}_{X_1}(x_1)dx_1}_{=1}.$$

En conclusion, on a

$$f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \tilde{f}_{X_1}(x_1)\tilde{f}_{X_2}(x_2).$$

Pour que f_{X_1} et f_{X_2} deviennent des densités, on pose :

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\tilde{f}_{X_1}(x_1)}{\int f_{X_1}(x_1)dx_1} \text{ et } f_{X_2}(x_2) = \frac{\tilde{f}_{X_2}(x_2)}{\int f_{X_2}(x_2)dx_2}.$$

□

3.5 Changement de variables

On considère (X_1, X_2) un vecteur aléatoire à densité $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$. On construit deux autres variables aléatoires U_1, U_2 telles que

$$\begin{cases} U_1 = g_1(X_1, X_2) \\ U_2 = g_2(X_1, X_2). \end{cases}$$

On veut trouver la loi de U_1, U_2, à savoir la densité du couple.
Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive quelconque que l'on appelle "fonction test".

$$\int_\Omega h(U_1, U_2) d\mathbb{P} = \int_\Omega h(g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2)) d\mathbb{P} \tag{3.4}$$

$$\overset{\text{transfert}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} h(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) dP_{X_1X_2} \tag{3.5}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{3.6}$$

On pose

$$\begin{cases} u_1 = g_1(x_1, x_2) \\ u_2 = g_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

On sait que (X_1, X_2) ne sont pas forcément définies sur $\mathbb{R}^2$, mais sur un certain domaine $A \subset \mathbb{R}^2$. On pose $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

On doit avoir $G^{-1} : \begin{cases} x_1 = d_1(u_1, u_2) \\ x_2 = d_2(u_1, u_2) \end{cases}$, donc il faut que G soit inversible. De plus, on devrait calculer la matrice jacobienne

$$J_{U_1U_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial u_1} & \frac{\partial d_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial d_2}{\partial u_2} & \frac{\partial d_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

3.6 devient :

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \cap G(A)} h(u_1, u_2) f_{X_1X_2}(d_1(u_1, u_2), d_2(u_1, u_2)) |\det(J_{U_1U_2}(u_1, u_2))| du_1 du_2.$$

Comme h est quelconque, on peut choisir $h(x) = \mathbb{1}_{\{g>f\}}(x)$ et puis $h(x) = \mathbb{1}_{\{g<f\}}$.
On obtient la formule de changement de variable :

Théorème 3.5.1 (Formule de changement de variables)**.**

$$f_{U_1U_2}(u_1, u_2) = f_{X_1X_2}(d_1(u_1, u_2), d_2(u_1, u_2)) |\det J_{U_1U_2}(u_1, u_2)| \mathbb{1}_{G(A)}(u_1, u_2).$$

Si on a deux variables aléatoires X_1 et X_2, quelle est la loi de $(X_1 + X_2)$?
On introduit

$$\begin{cases} U_1 = X_1 + X_2, U_2 = X_2 \end{cases} \implies \begin{cases} X_1 = U_1 - U_2 \\ X_2 = U_2 \end{cases}.$$

De plus,

$$J_{U_1U_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$f_{U_1U_2}(u_1, u_2) = f_{X_1X_2}(u_1 - u_2, u_2)$$

et on obtient

$$f_{U_1}(u_1) = \int f_{U_1,U_2}(u_1, u_2)du_2 = \int f_{X_1X_2}(u_1 - u_2, u_2)du_2 = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u_1 - u_2)f_{X_2}(u_2)du_2.$$

Il s'agit du **produit de convolution**.

CHAPITRE 4

CONVERGENCE DES VARIABLES ALÉATOIRES

On a une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ toutes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. 02-10-2023
Comment calculer $\lim_{n\to\infty} X_n$?

1. Convergence "en probabilité" ;
2. Convergence "en moyenne" ;
3. Convergence "presque sûre" ;
4. Convergence "en loi" $\longrightarrow$ Théorème central limite.

4.1 Convergence en probabilité

Définition 4.1.1. Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires définies toutes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dira que X_n converge en probabilité vers la variable aléatoire X et on écrira

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ i.e. } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > 0) = 0.$$

4.2 Convergence en moyenne L^p

Définition 4.2.1. On dira que X_n converge en moyenne L^p vers X si

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0 \text{ ou}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int |X_n(\omega) - X(\omega)|^p d\mathbb{P} \right).$$

Proposition 4.2.1. La convergence en moyenne L^p entraîne la convergence en probabilité.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Calculons

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \overset{4.2.2}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^p} \underbrace{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

□

Proposition 4.2.2 (Inégalité de Tchebychev)**.** Pour $\alpha > 0$ et $p \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(|X|^p > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[|X|^p].$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|^p] &= \int_\Omega |X|^p d\mathbb{P} = \int_{\{|X|^p > \alpha\}} |X|^p d\mathbb{P} + \int_{\{|X|^p < \alpha\}} |X|^p d\mathbb{P} \\ &\geq \mathbb{P}(|X|^p > \alpha) + \underbrace{\int_{\{|X|^p \leq \alpha\}} |X|^p d\mathbb{P}}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(|X|^p > \alpha).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.3 (Propriétés de la convergence en probabilité)**.**

1. Supposons que le vecteur aléatoire $(X_n, Y_n)_{n=1}^\infty$ est tel que

$$\begin{cases}\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{cases}$$

   Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors la suite $h(X_n, Y_n)$ converge en probabilités vers $h(X, Y)$, i. e.

$$\mathbb{P}(|h(X_n, Y_n) - h(X, Y)| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Si maintenant on a une suite $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et h est continue sur $\mathbb{R}$, alors $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X)$.
3. Si $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$, $X_nY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$, $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{X}{Y}$ si $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$.

4.3 Convergence presque sûre

Définition 4.3.1. On dira que la suite $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire X et on écrira $X \xrightarrow{\text{P.S.}} X$ s'il existe un ensemble négligeable $N \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ est la σ-algèbre sur Ω), $\mathbb{P}(N) = 0$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \text{ on a } X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega).$$

Il s'agit de la convergence entre nombres.

Remarque (Notation). Nous allons étudier $X \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$. Sinon $Y_n = X_n - X$.

Nous allons introduire deux objets.

Définition 4.3.2. Soit $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite d'événements dans $\mathscr{A}$ et on définit

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Si $\omega \in \lim_{n\to\infty} \sup A_n$, alors $\forall k \geq n, \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty}$.

Lemme (De Borel-Cantelli). *Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite d'événements telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0,$$

c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont dans une infinité des $\{A_n\}$ à probabilité 0 si et seulement si presque tout point est dans un nombre fini d'éléments.

Démonstration.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty \implies \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty.$$

□

03-10-2023

Lemme (De Borel-Cantelli, deuxième). *Si $\{A_n\}$ sont* ***indépendantes*** *et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1.$$

Exemple. $\Omega = [0,1], \beta$ BOREL sur $[0,1], \mathbb{P}$ mesure de Lebesgue sur $[0,1]$,

$$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right].$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \emptyset$, mais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.

Démonstration. En TD. On tâchera de montrer que les événements A_n sont **ne** sont **pas** indépendants. □

Exemple. Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{1}{n^2}$. Donc par Borel-Cantelli on sait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

et $\mathbb{P}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{X_n = 0\}\right) = 0$. Interpréter le résultat.

Solution. La probabilité que l'événément en question se produise une infinité de fois est 0 (Borel-Cantelli). Dans notre cas, presque sûrement (avec probabilité 1) $X_n \neq 0$ pour tout n sauf un nombre fini de n. □

Revenons à la convergence presque sûre. Etudions $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. On introduit

$$E_n = \{|X_n| > \varepsilon\}.$$

Notons

$$E(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \sup E_n(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k| > \varepsilon\},$$

$$D = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k| > \varepsilon\}.$$

D est l'ensemble des points qui ne convergent pas.

Proposition 4.3.1. $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(D) = 0$ et si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Remarque. Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, la suite

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k| > \varepsilon\}$$

est croissante.

Proposition 4.3.2. Si la suite $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ vérifie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$.

Démonstration. On utilise le lemme de Borel-Cantelli (cf 4.3). Alors on a

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup\{X_n > \varepsilon\}\right) = 0,$$

i. e.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

□

Exemple. Soit $([0,1], \beta\ (\text{Borel}), \lambda\ (\text{Leb}))$. On note $X_n(x) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}, x \in [0,1]$.

Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = +\infty$.

Solution. Sur feuille. □

Proposition 4.3.3. Si $\{X_n\}$ converge presque sûrement, elle converge en probabilité. Par contre, si $\{X_n\}$ converge en probabilité, il existe une sous-suite qui converge presque sûrement.

Démonstration.

1. Soit $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} X$. L'ensemble de divergences est

$$D = \bigcup_{\frac{1}{l}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|X_k| > \frac{1}{l}\right\}.$$

   On voit que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|X_k| > \frac{1}{l}\right\} \subset D$. Alors

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}(D) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|X_k| > \frac{1}{l}\right\}\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|X_k| > \frac{1}{l}\right\}\right) \\ \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|X_{k(n)}| > \frac{1}{l}\right\}\right) &\iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|X_{k(n)}| > \frac{1}{l}\right\}\right) = 0, \end{aligned}$$

   c'est-à-dire X_n converge en probabilité.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ suite de nombres positifs tels que $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$. Comme on a convergence en probabilité, $\forall k \geq 1$, il existe $n_k \geq 1$ tel que

$$\mathbb{P}(|X_{n_k}| > \varepsilon) < \eta_k.$$

   Donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq l}\{|X_{n_k} > \varepsilon|\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq l}\{|X_k| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{|X_{n_k} > \varepsilon|\}\right) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \eta_k \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lemme.

$$\bigcup_{k\geq n}\{|X_k|>\varepsilon\}=\{\sup_{k\geq n}|X_k|>\varepsilon\}.$$

04-10-2023

4.4 Loi des grands nombres

Il existe deux "versions" de la loi des grands nombres :
- ⋆ faible ;
- ⋆ forte.

Si $\{X_n\}$ est une suite de variables aléatoires, on considère $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ (somme de Cèsaro).

Cadre On a une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. On considère $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

4.4.1 Loi faible des grands nombres

Définition 4.4.1. Supposons que les variables aléatoires X_n soient *centrées*, i. e. X_n devient $X_n-\mathbb{E}[X_n]$ (donc les X_n auront l'espérance nulle). On dira que la suite $\{X_n\}$ satisfait **la loi faible des grands nombres** si la suite S_n converge vers 0 **en probabilité**, c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon>0,\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Proposition 4.4.1. Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires de $L^2(\mathbb{P})$ qui sont deux-à-deux non-corrélées et centrées. Pour tout n, on pose :

$$\mathbb{V}(X_n)=\sigma_n^2<\infty$$

et on suppose que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\overset{L^2(\mathbb{P})}{\longrightarrow}0$$

et donc elle converge aussi en probabilités.

Définition 4.4.2. Soient X_1,X_2 deux variables aléatoires. On introduit

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathbb{E}[X_1X_2]-\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2].$$

Remarque. Si X_1,X_2 sont indépendantes, on a que $\mathbb{E}[X_1X_2]=\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$.

Définition 4.4.3. On dira que deux variables aléatoires X_1, X_2 sont non-corrélées si $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

Deux variables indépendantes sont non-corrélées, mais le contraire est en général faux.

Remarque (Rappel). Si X est une variable aléatoire, on définit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Proposition 4.4.2. 1. $\mathbb{V}(\alpha X) = \alpha^2 \mathbb{V}(X)$.

Remarque.

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \mathrm{Cov}(X_j, X_k).$$

Démonstration de la proposition 4.4.1. On rappelle la définition de la convergence L^2.

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right\|_{L^2}^2 = \left(\int \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right\|_{L^2}^2 = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k),$$

car les variables aléatoires sont non-corrélées.
De plus, on a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On vient de montrer que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{L^2} 0.$$

□

Proposition 4.4.3. Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires $L^2(\mathbb{P})$ deux-à-deux non-corrélées. Posons $\mu_n = \mathbb{E}[X_n]$ et supposons que

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu$;
2. $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{L^2} \mu.$$

Démonstration. On utilise les théorèmes précédents. On écrit :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overbrace{(X_k-\mu_k)}^{\text{centrée}}$$

et on applique la proposition 4.4.1. □

Proposition 4.4.4. Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires de L^2 centrées **qui ont la même loi** et sont deux-à-deux non-corrélées. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{L^2} 0.$$

Démonstration. On applique 4.4.1. □

Proposition 4.4.5. ⚠ Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires de classe $L^2(\mathbb{P})$ i. i. d. (indépendantes de même loi, *independent identically distributed*). Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{L^2} \mu,\ \text{où } \mu=\mathbb{E}[X_1].$$

Remarque. La dernière version reste vraie pour des variables aléatoires i. i. d. aussi si les variables sont de classe $L^1(\mathbb{P})$.

Remarque. On peut remplacer L^2 par L^1.

4.4.2 Loi forte des grands nombres

Théorème 4.4.1. *Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires de classe L^1 centrées et i.i.d. Alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P.S.} 0.$$

Remarque. Si les variables ne sont pas centrées, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{\text{P.S.}} \mathbb{E}[X_1].$$

Démonstration. Cf polycopié. □

4.4.3 Lien entre convergences

4.5 Convergence en loi

4.5.1 Fonction caractéristique

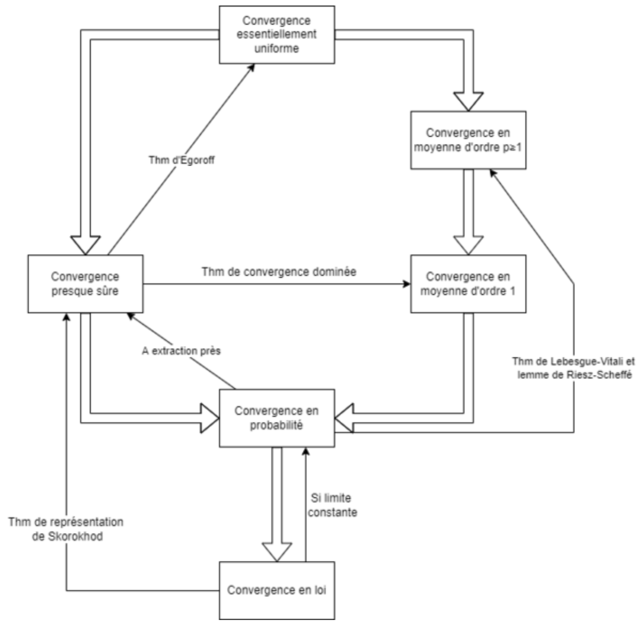

FIGURE 4.1 – Schéma résumant les liens entre convergences de variables (plus compliqué que celui donné en cours). La double flèche est une implication et la flèche simple est une implication dans certains cas.

Définition 4.5.1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle X de la manière suivante :

$$\varphi_t(X) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_\Omega e^{itX} d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} e^{itx} dP_X(x).$$

Remarque (Cas particulier)*.* Si X est à densité $f_X(x)$, alors :

$$\varphi_X(t) = \int_\mathbb{R} e^{itx} f_X(x) dx.$$

Il s'agit de la transformée de Fourier.

Proposition 4.5.1 (Propriétés de la fonction caractéristique)**.**

1. φ_X est définie et continue $\forall t \in \mathbb{R}$, en particulier elle est **uniformément continue**.
2. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
3. Si $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ sont indépendantes et on écrit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors

$$\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) - \varphi_{X_n}(t).$$

Si en plus les $\{X_i\}$ ont la même loi, alors

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)^n.$$

Démonstration.

1. Il faut que $\varphi_X \in L^1(\mathbb{P})$, i. e. $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}, P_X)$. Alors
$$\int_\Omega \left|e^{itX}\right| d\mathbb{P} = \int d\mathbb{P} = 1.$$
2. Montrons que φ_X est uniformément continue.
On a
$$\begin{aligned}\varphi_X(t) - \varphi_X(t_0) = \left|\int \left(e^{itX} - e^{it_0X}\right)\right| &= \int \left|iXe^{i\xi X}\right| |t-t_0|\, d\xi \\ &\leq |t-t_0| \int |X|\, d\mathbb{P},\end{aligned}$$
ce qui veut dire que la fonction est lipschitzienne, donc uniformément continue.
3. On a
$$\varphi_{S_n} = \int_\Omega e^{it}(X_1 + \cdots + X_n) d\mathbb{P} = \int_\Omega e^{itX_1} \dots e^{itX_n} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[e^{itX_1} \dots e^{itX_n}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{itX_i}] = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t).$$

□

Exemple (Calculs des fonctions caractéristiques).

1. X est une variable aléatoire binomiale $B(n,p)$. On rappelle que
$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$
Alors
$$\varphi_X(t) = \int e^{itX} d\mathbb{P} = \int e^{itx} dP_X(x) = \sum_{k=0}^n e^{itk} C_n^k p^k (\underbrace{1-p}_{=q})^{n-k} = (q + pe^{it})^n.$$
2. X est de Bernoulli $B(p)$, avec $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Alors
$$\varphi_X(t) = e^{it}p + q.$$
3. Variable de Gauss avec X qui a la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\cos(tx) + i\sin(tx)) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} i\cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$
car
$$i \int \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \text{ (fonction impaire)}.$$
On dérive $\varphi_X(t)$. Si
$$\varphi_X(t) = \int_\mathbb{R} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

alors

$$\varphi'_X(t) = \int_{\mathbb{R}} -x\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \underbrace{\left[\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} t\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -t\varphi_X(t),$$

ce qui montre que $\varphi'_X(t) = -t\varphi_X(t)$, i. e.

$$\frac{d\varphi_X(t)}{dt} = -t\varphi_X(t).$$

C'est une équation différentielle du premier ordre. On utilise la méthode des quadratures pour la résoudre. On a :

$$\frac{d\varphi_X(t)}{\varphi_X(t)} = -tdt,$$

ce qui donne, quand on intègre,

$$\int_{\varphi_X(0)}^{\varphi_X(t)} \frac{d\varphi_X(t)}{\varphi_X(t)} = -\int_0^t tdt,$$

ce qui donne $\ln(\varphi_X(t)) = -\frac{t^2}{2}$, i. e. $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Proposition 4.5.2. Supposons que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ (moment d'ordre n fini). Alors $\varphi_X^{(r)}(t)$ existe pour $r \leq n$ où $\varphi_X^{(r)}$ dénote la dérivée d'ordre r de φ_X par rapport à t et :

$$\varphi_X^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} dP_X(x)$$

et

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{\varphi_X^{(r)}(0)}{i^r} \text{ pour } r \leq n.$$

De plus, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),$$

avec $|\varepsilon_n(t)| \leq 3\mathbb{E}[|X|^n] \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. Si $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty \implies \mathbb{E}[|X|^r] < \infty$, avec $r \leq n$.

Démonstration. Soit $n \geq 1$, on fait la preuve pour $r = 1$. On élimine l'indice X dans $\varphi_X(t)$. On doit contrôler

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[e^{i(t+h)x} - e^{itx}]}{h} dP_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to 0} \left[\frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h} \right] dP_X(x). \tag{4.1}$$

On développe la quantité $e^{ix(t+h)}$ dans le point 0 :

$$\frac{e^{ix(t+h)} - e^{itx}}{h} = \frac{e^{ixt} + e^{ixt} ixh + O(h^2) - e^{itX}}{h} \approx e^{ixt} ix + O(h).$$

L'égalité 4.1 devient :

$$4.1 = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx} dP_X(x) < \infty.$$

$\square$

DÉNOMBREMENT

On a 3 objets $\{a, b, c\}$. 15-09-2023

4.6 Dispositions sans répétition

Eléments	Combinaisons sans ordre	Combinaisons avec ordre
1 à 1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$
2 à 2	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	$\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, a\}, \{b, c\}, \{c, b\}$
3 à 3	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}, \{b, c, a\}$

4.7 Dispositions avec répétition

Eléments	Dispositions sans ordre	Dispositions avec ordre
1 à 1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$
2 à 2	$\{a, a\}, \{b, a\}, \{b, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, c\}$	$\{a, a\}, \{a, b\}, \{b, a\}, \{b, b\}, \{a, c\}, \{c, a\}, \{b, c\}, \{c, b\}\{c, c\}$
3 à 3	$\{a, a, a\}, \{a, a, c\}, \ldots$ (10 éléments)	$\{a, a, a\}, \{a, a, c\}, \{a, c, a\}, \{c, a, a\}, \ldots$ ($3^3 = 27$ éléments)

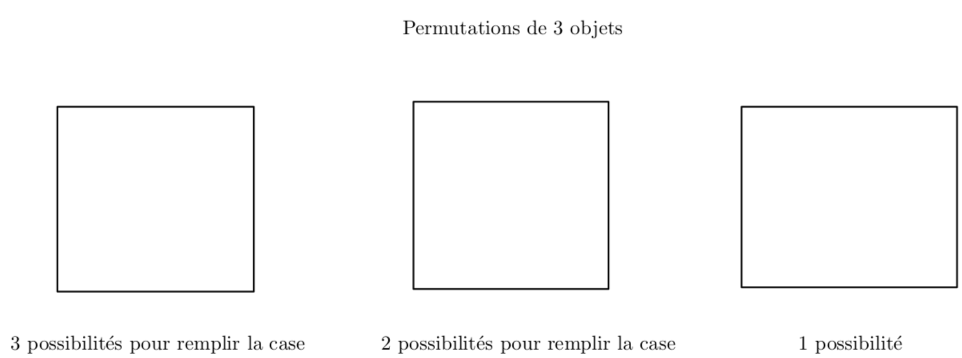

Figure 4.2 – Permutations dans le cas de 3 objets (dispositions sans répétition et avec ordre)

Arrangements de n objets pris k à k (dispositions avec ordre et sans répétition) Si on a 4 objets pris 2 à 2 : $\{a, b, c, d\}$.

Si a et b sont fixés, alors $\{a, b\}$ engendrera $\{a, b, c, d\}$ et $\{a, b, d, c\}$.

On a

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinaisons de n objets pris k à k (dispositions sans ordre et sans répétition)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \tag{4.2}$$

En fait,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!},$$

avec $k!$ le nombre de permutations des k éléments.
Si on a n objets à combiner k à k avec répétition, mais sans ordre, il y a

$$C_k^{n+1-k} = \frac{(n+1-k)!}{k!(n-1)!} \text{ combinaisons possibles.} \tag{4.3}$$

4.8 Tirage des urnes sans remise

N boules de type N_a, N_b tels que $N_a + N_b = N$.
On tire $n < N$ boules.
Soit E l'événement suivant : $\{k$ boules parmi n sont de type $a\}$.
Calculer la probabilité de E.

$$\mathbb{P}(E) = \frac{C_{N_a}^k C_{N_b}^{n-k}}{C_N^n} \text{ (formule hypergéométrique).}$$

Démonstration. $\Omega =$ combinaisons de N objets pris n à n sans les répéter.
On a $\sharp(\Omega) = C_N^n$.
Cas favorables : $C_{N_a}^k C_{N_b}^{n-k}$. □

Cette formule est utilisée pour calculer la probabilité de gagner au loto. On a une grille de 49 numéros et on tire 6 numéros.
$N_a =$ les 6 numéros cochés par le joueur, $N_b = 49 - 6 = 43$ et $n = N_a$.

$$\mathbb{P}(\text{avoir 3 numéros gagnants}) = \frac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0.018$$
$$\mathbb{P}(\text{avoir 6 numéros gagnants}) = \frac{C_6^6 C_{43}^0}{C_{49}^6} \approx 7,15 \times 10^{-8}.$$

4.9 Tirage des urnes avec remise

N boules, N_a de type a, N_b de type b. On en tire n (avec n quelconque) et

$$E = \{k \text{ boules parmi les } n \text{ tirées sont de type } a\}.$$

On a $\sharp(\Omega) = N^n$.
Cas favorables : $N_a^k N_b^{n-k} \binom{n}{k}$.
Donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{N_a^k N_b^{n-k}\binom{n}{k}}{N^n} = \frac{N_a^k N_b^{n-k}\binom{n}{k}}{N^k N^{n-k}} = \left(\frac{N_a^k}{N}\right)^k \left(\frac{N_b}{N}\right)^{n-k} \binom{n}{k} = p_a^k p_b^{n-k} \binom{n}{k},$$

où p_a et p_b sont les pourcentages de a et de b.
Il s'agit de la **loi binomiale**.

TRAVAUX DIRIGÉS

Dans ce document, vous ne trouverez que les énoncés des exercices, les corrections étant manuscrites. La numérotation dans les feuilles manuscrites correspond à celle dans ce document.

Exercice 4. Dans une bibliothèque, il y a n livres sur une étagère repartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont d'un même auteur A, les autres d'auteurs différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de A se retrouvent côte à côte dans les cas suivants :

1. $n = 20, k = 3, p = 3$;
2. $n = 20, k = 5, p = 2$ (**au moins** 2 livres).

Démonstration.

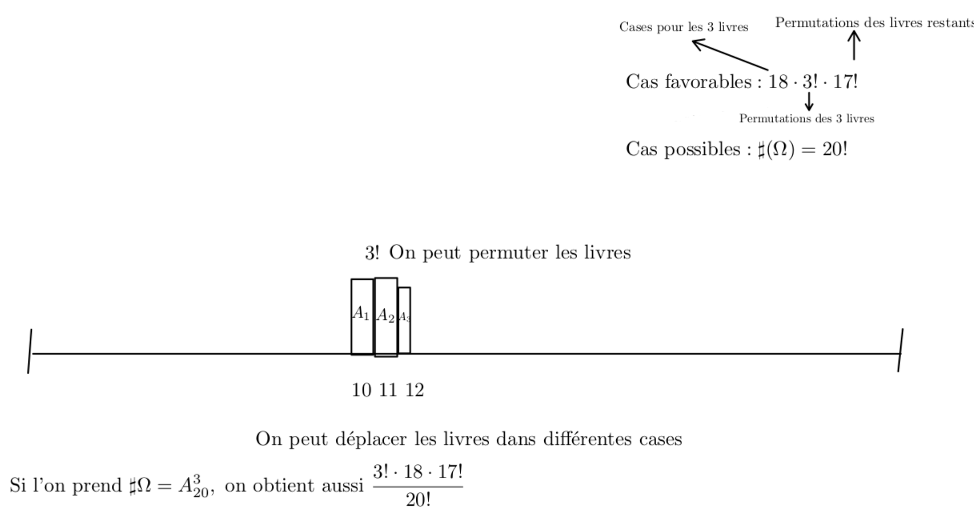

Figure 4.3 – Solution pour (1)

1.

□

Exercice 5. On lance 10 fois une pièce de monnaie. Calculer la probabilité qu'au cinquième lancer on obtient pile en sachant que le nombre total des piles obtenus est 3.

Exercice 6. On a deux variables aléatoires X_1 et X_2 de même densité $f(x) = \frac{1}{X^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ et elles sont indépendantes. On pose

$$U = X_1 X_2$$
$$V = \frac{X_1}{X_2}.$$

1. Calculer la loi du couple (U, V).
2. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. On place six boules de manière aléatoire et indépendante dans 3 boîtes. Calculer la probabilité que la première boîte contienne deux boules.

Exercice 8. Un robinet a été installé le jour J et il fuit, les fuites se produisent chaque heure de manière indépendante et avec la probabilité p.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire F égale au nombre de fuites qui se sont produites tout au long de la journée (en 24 heures), ie $\mathbb{P}(F = k), k \in \{0, \ldots, 24\}$.
2. On dénote $T(1)$ la variable aléatoire égale à l'heure de la première fuite. Calculer la loi de $T(1)$, ie $\mathbb{P}(T(1) = k), k = 1, \ldots, 24$.
3. On dénote $T(2)$ la variable aléatoire égale à l'heure de la deuxième fuite. Montrer que $T(1)$ et $T(2) - T(1)$ sont indépendantes et ont la même loi.

Exercice 9. Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on considère le vecteur aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et de loi P_X à densité

$$f_{XY}(x, y) = \alpha(1 - x^2)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) y e^{-3y}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer α.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 2, Y \geq 1)$.
4. Calculer la matrice de dispersion D de (X, Y) :

$$D = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ \mathrm{Cov}(Y, X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Déterminer la loi conjointe des nouvelles variables $U = X + Y$ et $V = \dfrac{X}{X + Y}$ et montrer que V a une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 11. Soient X et Y deux variables aléatoires dont Y est de densité $f_Y(y)$ et posons $Z = X + Y$.

1. Prenons X et Y indépendantes. Montrer que Z est à densité indépendante de la nature de X. *On peut essayer avec X qui suit une loi binomiale.*
2. Soit maintenant X une variable gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$ et $Y = XB$ où $\mathbb{P}(B = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Montrer que X et Y sont dépendantes et que $Z = X + Y$ n'est pas à densité.

Exercice 12. Deux variables aléatoires indépendantes avec densités :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1,$$

$$f_Y(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}.$$

Soit $Z = X \cdot Y$. Montrer que Z a la loi $\mathscr{N}(0, \sigma^2)$, avec

$$F_{\mathscr{N}}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$