

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Mohammad Reza PAKZAD

2023-2024

Table des matières

1 Fonctions continues	1
2 Dérivée, dérivée partielle, différentielle	3
2.1 Différentiabilité des fonctions multi-variables	4
2.2 Deux points fins	6
2.3 La dérivée de composition	7
3 Inversion locale, fonctions implicites, théorème du rang	9
3.1 Théorème de l'application inverse	9
3.2 Théorème du rang	9
3.3 Théorème de fonctions implicites	11
4 Algèbre multilinéaire	13
4.1 L'espace dual E^*	13
4.2 Les applications multilinéaires	15
4.2.1 Quelques notations	16
4.3 Produit scalaire	21
4.4 Les éléments de volumes et orientation	28
5 Analyse tensorielle sur les ouverts de \mathbb{R}^n	32
5.1 Motivation	32
5.2 Dérivation d'une fonction	33
5.2.1 Exemple très important : la métrique riemannienne	37
5.3 Champ de vecteurs	47
5.4 L'application tangente	51
5.4.1 Le cas de la métrique riemannienne (pull-back et push-forward)	57

1 Fonctions continues

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ application.
 $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$
 f est continue en x_0 dans U si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

avec $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$.

On dit que f est une application continue quand f est continue en $x \in U$ pour tout $x \in U$.

Proposition 1.1. f est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(J)$ est ouvert, avec $f^{-1}(J) := \{x \in U \mid f(x) \in J\}$.

Démonstration. 1. Si f est continue, alors $\forall J \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f^{-1}(J)$ est ouvert.
Il faut montrer que $\forall x_0 \in f^{-1}(J)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

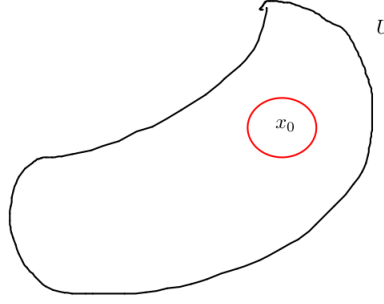


FIGURE 1 – Illustration

$J = (a, b)$.

$x_0 \in f^{-1}(J) \implies f(x_0) \in J \implies a < f(x_0) < b \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que

$$a < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon < b.$$

On peut choisir $\varepsilon = \min\{\frac{b-f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0)-a}{2}\}$.

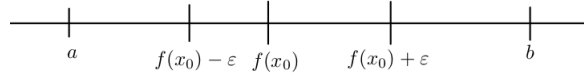


FIGURE 2 – On choisit ε de cette sorte

Donc il y a $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| < \delta &\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ &\implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon &\implies a < f(x) < b \\ &\implies f(x) \in J \implies x \in f^{-1}(J). \end{aligned}$$

Choisissons $r := \delta$

$x \in B(x_0, r) \implies \|x - x_0\| < r = \delta$.

On a démontré que avec ce choix de δ on a $x \in f^{-1}(J) \implies B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

2. Si $f^{-1}(J)$ ouvert pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, alors f est continue.

Fixons $x_0 \in U$: $\varepsilon > 0$ est donné.

On met $J = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Par l'hypothèse, $f^{-1}(J)$ est ouvert, donc $\exists r > 0, B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

On met $\delta := r$.

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| < \delta &\implies x \in B(x_0, \delta) = B(x_0, r) \\ &\implies x \in f^{-1}(J) \implies f(x) \in J \\ \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ &\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

On peut aussi généraliser ces définitions et la proposition aux cas où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application de U dans \mathbb{R}^m , avec

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Exemple $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 3 \cos(x_2) e^{x_1 - x_2})$, $n = 2, m = 2, U = \mathbb{R}^2$.

Définition 1.1. f est continue en $x_0 \in U$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

$$\text{avec } \|f(x) - f(x_0)\| = \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \dots + (f_m(x) - f_m(x_0))^2}.$$

Définition 1.2. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue quand f est continue en $x, \forall x \in U$.

Proposition 1.2. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes.

1. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue ;
2. $\forall j \in \{1, \dots, m\}, f_j$ est continue ;
3. $\forall V \subseteq \mathbb{R}^m$ ensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert.

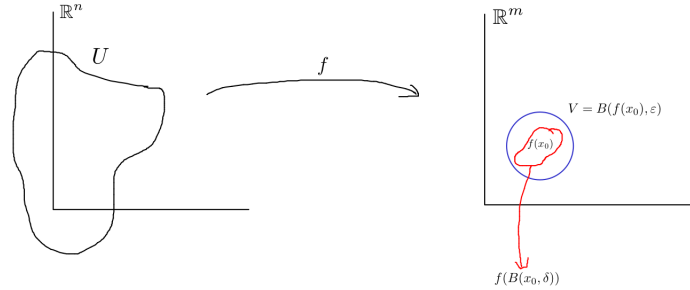


FIGURE 3 – Illustration pour 1.2

2 Dérivée, dérivée partielle, différentielle

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

$x \in U$ fixé.

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

si la limite existe.

Si $e_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $e_i = (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ème}}, 0, \dots, 0)$ (tel que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base standard de l'espace linéaire \mathbb{R}^n), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i)}{h}.$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En général, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_k \partial x_{k-1} \dots \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \right).$$

$i_1 \in \{1, \dots, n\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

Pour $k = 1$, il y a n dérivées partielles.

Pour $k = 2$, $i_1 \rightarrow n$ choix de $\{1, \dots, n\}$.

$i_2 \rightarrow n$ choix.

Donc il y a n^2 choix.

En général, il y a n^k dérivées partielles différentes de l'ordre k .

Définition 2.1. $r \in \mathbb{N}$.

On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe \mathcal{C}^r ou tout simplement f est \mathcal{C}^r quand

1. Si $r = 0$, f est continue.
2. Si $r \geq 1$, f est continue et les dérivées partielles d'ordre k existent partout dans U et elles sont toutes les applications continues dans U et ceci pour tout $1 \leq k \leq r$.
3. Pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, une application, on dit que f est \mathcal{C}^r si $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, f_j est une application \mathcal{C}^r , avec $f = (f_1, \dots, f_m)$.

On dit que f est \mathcal{C}^∞ quand $\forall r \in \mathbb{N}$, f est \mathcal{C}^r .

2.1 Différentiabilité des fonctions multi-variables

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $f = (f_1, \dots, f_m)$.

On dit que f est différentiable à $x \in U$ quand il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ si } \|h\| < \delta \text{ et } x + h \in U, \text{ alors } \|f(x + h) - (f(x) + L(h))\| < \varepsilon \|h\|.$$

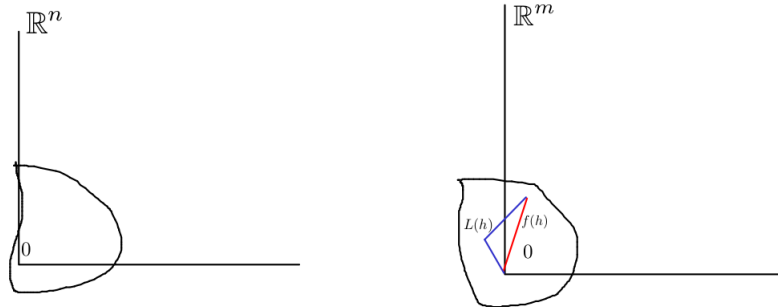


FIGURE 4 – Exemple illustratif avec $x = 0, f(0) = 0$

f différentiable en 0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta \implies \|f(h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$.

Proposition 2.1. $n = 1, m = 1, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable selon la définition donnée sur un point $x \in I$ si et seulement si $f'(x)$ existe.

Démonstration.

1. *Sens direct : f différentiable en $x \in I \implies f'(x)$ existe.*

$\exists L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in I \implies \|f(x + h) - f(x) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

$L(h) = ah$ pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque mais fixé.

a est la pente ou le coefficient directeur.

Prenons a la pente du graphe de L (comme L linéaire, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}, L(h) = ah$).

On obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, x + h \in I \implies |f(x + h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|.$$

On divise par $|h| \neq 0$ pour obtenir

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{ah}{h} \right| \leq \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |h| < \delta, h + x \in I, \text{ alors } \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a.$$

Donc $f'(x)$ existe et $f'(x) = a$.

2. *Sens réciproque : $f'(x)$ existe $\implies f$ différentiable.*

Si $f'(x)$ existe, on met $a := f'(x)$.

On définit $L(h) = ah$. On sait que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = a.$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta &\implies \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon \\ &\implies |f(x + h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h| \\ &\implies \forall h, |h| < \delta, \text{ on a } |f(x + h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|. \end{aligned}$$

f est différentiable selon notre définition avec $L(h) = ah$.

□

On suppose maintenant que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Pour $x \in U$, f différentiable en x si $\exists L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x + h) - f(x) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid T \text{ est linéaire}\}$.

On écrit dans ce cas là que $Df(x) = L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

En particulier, si f est différentiable pour tout $x \in U$, on obtient une application

$$Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Rappel Chaque transformation linéaire est uniquement représentée par une matrice au cas où les bases des espaces de départ et d'arrivée sont fixées.

Si on choisit les bases standard $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ pour \mathbb{R}^n et $\beta = \{e_1, \dots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$[T]_{\beta}^{\alpha} := A = [A_{ij}]_{m \times n}$$

et on a

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} e_i = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}.$$

C'est la j -ième colonne de la matrice A .

En particulier, pour chaque $x \in U$ où f est différentiable, en fixant les bases standard de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , on peut supposer que $Df(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

On peut identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $\mathbb{R}^{m \times n} = \{[A_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \mid A_{ij} \in \mathbb{R}\}$.

Avec cette identification, on peut utiliser la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme ça on peut parler de continuité et de différentiabilité de l'application

$$Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Ou bien on peut encore identifier $\mathbb{R}^{m \times n}$ avec \mathbb{R}^{mn} . Alors $Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$.

Donc on peut parler de continuité de Df , de dérivée de Df .

Pour $x \in U$, $D(Df)(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

On va noter $D(Df)$ par D^2f . Alors $D^2f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m \times n})$.

$D^2f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m \times n}) \simeq \mathbb{R}^{mn^2}$.

Théorème 2.1. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application donnée et $r \in \mathbb{N}$.

f est de classe C^r si et seulement si $D^k f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \dots))$ (de dimension mn^k) existe comme une application pour tout $1 \leq k \leq r$, et elle est en plus continue.

2.2 Deux points fins

En général, les dérivées partielles de f peuvent exister sans que Df soit définie.

Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , on peut avoir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$ existe, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existe, mais $Df(0)$ n'existe pas.

Par contre, si $Df(x_0)$ existe, alors toutes les dérivées partielles de f existent en x_0 .

Démonstration. Supposons que $Df(x_0)$ existe. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x) - f(x_0) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

Fixons une direction $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et on met $h = t\vec{v}$, avec $\|\vec{v}\| \neq 0$. Donc $\|h\| = |t| \cdot \|\vec{v}\|$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, t < \frac{\delta}{\|\vec{v}\|}, x_0 + t\vec{v} \in U \implies |f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - tL(\vec{v})| < \varepsilon |t| \|\vec{v}\|.$$

On pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \|\vec{v}\|$ et $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\|\vec{v}\|}$.

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0 \text{ tel que } |t| < \tilde{\delta} \implies \|f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - tL(\vec{v})\| \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0, |t| < \tilde{\delta} \implies \left\| \frac{1}{t} (f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)) - L(\vec{v}) \right\| \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)) = L(\vec{v}) = Df(x_0)(\vec{v}).$$

On définit

$$D_{\vec{v}}f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)).$$

Donc si $Df(x_0)$ existe, la dérivée directionnelle de f en x_0 dans une direction $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ existe et on a

$$D_{\vec{v}}f(x_0) = Df(x_0)(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m.$$

En particulier, si $\vec{v} = e_j, 1 \leq j \leq n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}f(x_0) = D_{e_j}f(x_0) = Df(x_0)(e_j).$$

□

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\vec{v}}f(x_0)$ existent pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ alors que $Df(x_0)$ n'existe pas.

Théorème 2.2. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in U$.

Si $Df(x_0)$ existe, alors f est continue en x_0 .

Démonstration. En exercice. □

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\vec{v}}f(x_0)$ existent pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en $x_0 \in U$ sans que pour autant f soit continue en x_0 .

Si la matrice de $Df(x_0)$ est donnée par $[A_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, A_{e_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{bmatrix}.$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

C'est la matrice jacobienne de f .

2.3 La dérivée de composition

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, g : V \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Supposons que pour $x_0 \in U, f(x_0) \in V$.

Si f est continue, $g \circ f$ est définie dans un voisinage de x_0 , par exemple dans une boule ouverte $B(x_0, r) = \tilde{U} \subset U \cap f^{-1}(V)$.

$$g \circ f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Supposons que les trois dérivées $Df(x_0), Dg(f(x_0)), D(g \circ f)(x_0)$ existent.

$$Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

$$D(g(f(x_0))) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p).$$

$$D(g \circ f) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p).$$

Théorème 2.3. Supposons que f est dérivable en $x_0 \in U$ avec la dérivée $Df(x_0)$ et g est dérivable en $f(x_0) \in V$ avec la dérivée $Dg(f(x_0))$, alors $g \circ f$ est bien dérivable en $x_0 \in U$ et

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

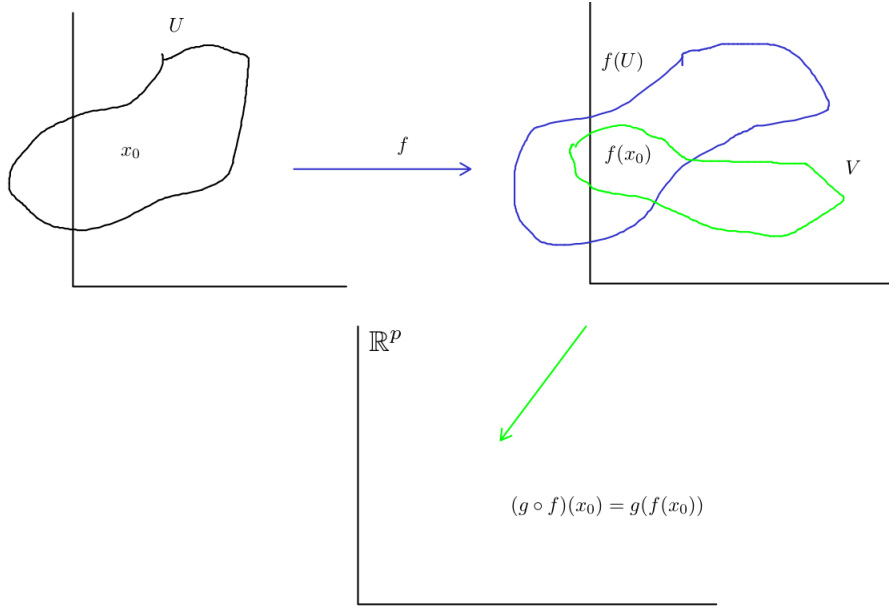


FIGURE 5 – La différentiation composée

Si on utilise les matrices jacobiniennes de chaque dérivée ($1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$),

$$\left[\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} \right]_{p \times n} (x_0) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right]_{p \times m} (f(x_0)) \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right]_{m \times n} (x_0).$$

$$\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right] (x_0) = \left[\frac{\partial z_i}{\partial y_k} \right] (f(x_0)) \times \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right] (x_0).$$

On a :

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} (x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial y_k} (f(x_0)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j} (x_0).$$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n, V = f(U)$ est ouvert et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'inverse de f .

Donc $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g \circ f = \mathbb{1}_U$.

Si en plus f et g sont différentiables, alors $m = n$ et $\forall x \in U, Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$, c'est à dire en particulier $Df(x)$ est une transformation linéaire inversible.

Démonstration. Si f est dérivable en $x \in U$ et g dérivable en $f(x) \in V$, $\mathbb{1} = g \circ f$ dérivable en x_0 et

$$D\mathbb{1}_U(x_0) = D(g(f(x_0))) \circ Df(x_0).$$

$$\mathbb{1}_U(x) = x \implies D\mathbb{1}_U(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Ainsi comme g est linéaire de f on a $f \circ g = \mathbb{1}_V$, donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} = Df(x_0) \circ Dg(f(x_0)).$$

□

Lemme. Si $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction linéaire, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $T(x) = L(x) + \vec{b}$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
Ainsi T est différentiable dans \mathbb{R}^n et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, DT(x) = L.$$

Dans ce cas, $DT : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application constante (les dérivées partielles de T aussi).

3 Inversion locale, fonctions implicites, théorème du rang

Théorème 3.1 (de Bronner). Si $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $h : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme (i. e. h continue, inversible et d'inverse **continue** $h^{-1} : V \rightarrow U$), alors $m = n$.

3.1 Théorème de l'application inverse

Théorème 3.2 (De l'application inverse). $U \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in U, f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, f est de classe \mathcal{C}^1 . Supposons que $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible.

Alors il existe des ensembles ouverts $W \subset U$, $x_0 \in W$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que $f|_W : W \rightarrow V$ est inversible. L'inverse $(f|_W)^{-1} : V \rightarrow W$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 .

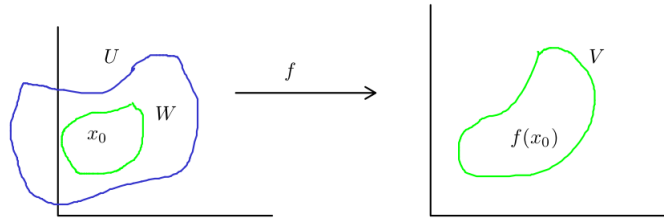


FIGURE 6 – Fonctions inversibles

Remarque. Si en plus f est de classe \mathcal{C}^r , alors $(f|_W)^{-1}$ est aussi de classe \mathcal{C}^r .

Notons que $\forall y \in V, x \in W, f(x) = y$,

$$(D(f|_W)^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}.$$

En particulier, il existe W tel que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in W$.

3.2 Théorème du rang

Théorème 3.3 (Du rang). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (avec $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$). Supposons que $\forall x \in U$,

$$\text{rang}(Df(x)) \equiv k,$$

où $1 \leq k \leq m$ est fixé.

($Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donc $0 \leq \text{rang}(Df(x)) \leq m$).

Soit $x_0 \in U$. Alors il y a des ouverts $W \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ tels que $x_0 \in W, f(x_0) \in V$ et 2 applications de classe \mathcal{C}^r inversibles

$$\varphi : W \rightarrow W' \text{ avec } W' \subseteq \mathbb{R}^n \text{ telle que } \varphi(x_0) = 0$$

$$\psi : V \rightarrow V' \text{ avec } V' \subseteq \mathbb{R}^m \text{ telle que } \psi(f(x_0)) = 0$$

telles que $\forall z \in W', z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, \dots, 0).$$

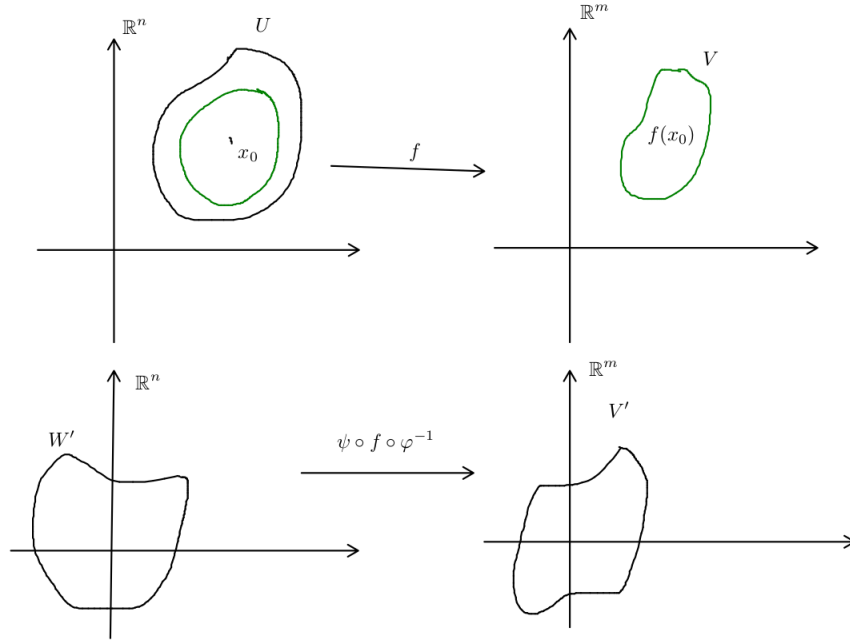


FIGURE 7 – Illustration du théorème de rang

En particulier, $f(W)$ est un objet de dimension k , de régularité \mathcal{C}^r (Si $m = 3, k = 2$, $f(W)$ est une surface de classe \mathcal{C}^r) et pour tout $y \in f(W)$, $f^{-1}(y)$ est un objet de dimension $n - k$ de régularité \mathcal{C}^r .

On note que les deux applications φ et ψ sont de classe \mathcal{C}^r et inversibles. On peut démontrer que dans ce cas-là, les inverses φ^{-1} et ψ^{-1} sont aussi de classe \mathcal{C}^r .

$$D\varphi^{-1}(y) = (D\varphi(\varphi^{-1}(y)))^{-1}, y \in W'.$$

φ^{-1} étant continue, $D\varphi$ étant continue, l'inverse d'une matrice étant continue tant que $\det \neq 0$, φ est de classe \mathcal{C}^1 inversible $\implies \varphi^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 3.1 (Difféomorphisme). Soient $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts.

Si $\varphi : U \rightarrow U'$ est une application de classe \mathcal{C}^r , avec l'inverse $\varphi^{-1} : U' \rightarrow U$ de classe \mathcal{C}^r , on dit que φ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^r .

Remarque (Le théorème de rang dans le cas spécial où f est linéaire). Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\text{rang}(L) = k, 0 \leq k \leq m$, alors il existe deux bases α_n et β_m pour \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m telles que

$$[L]_{\alpha_n}^{\beta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

(En exercice).

Corollaire. $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, f$ est $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.

Supposons que pour $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ est injective. $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Alors il existe un voisinage W de x_0 tel que f est injective sur W .

Démonstration. Pour $x \in U$,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Si $Df(x_0)$ est injective, $\text{rang}(Df(x_0)) = n$ ($m \geq n$). On obtient une sous-matrice de $Df(x)$ de taille $n \times n$ inversible. \square

Lemme (D'algèbre linéaire). $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors $\text{rang } A = n$ si et seulement si il existe une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de A telle que $\det B \neq 0$.

(En exercice).

Alors sous les hypothèses du corollaire 3.2, $\text{rang } Df(x) \equiv n$ dans un voisinage W de x_0 , appliquant le théorème du rang

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$$

qui est injectif.

Corollaire. Les mêmes hypothèses que dans le corollaire 3.2.

Si $Df(x_0)$ est surjective, alors il existe un voisinage ouvert $V \subseteq f(U)$ de $f(x_0)$ (c'est à dire $f(x_0)$ est un point intérieur de $f(U)$) tel que f est surjective sur V .

Argument à travers l'observation de l'algèbre linéaire qui dit que si $\text{rang}(A) = m, m \leq n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il y a une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tel que $\det(B) \neq 0$.

Théorème de rang : $k = m \leq n$.

Les détails en exercice.

3.3 Théorème de fonctions implicites

Théorème 3.4 (De fonctions implicites). $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m, F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.

$(x_0, y_0) \in U \rightarrow V$ donné.

$$DF(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$$

et

$$DF(x_0) = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} \quad \bigg| \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial y_m} \right]_{m \times (m+n)}.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in U \times V$, $DyF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Supposons que $DyF(x_0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage W de x_0 dans U et une application C^r $f : W \rightarrow V$ telle que $f(x_0) = y_0$ et

$$\forall x \in W, F(x, f(x)) = F(x_0, y_0).$$

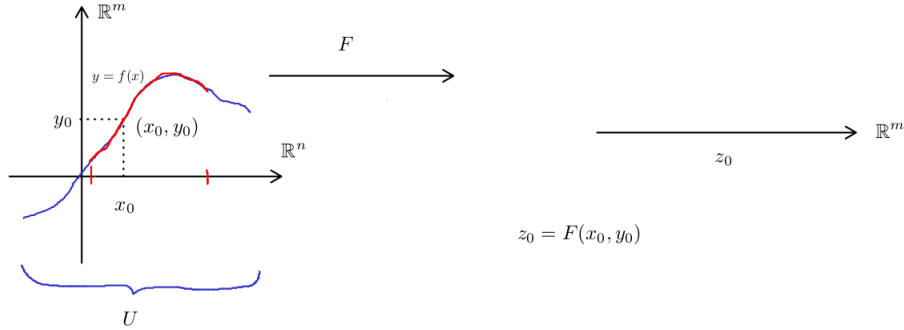


FIGURE 8 – Illustration du théorème de fonctions implicites

Donc le graphe de $x \rightarrow f(x)$ dans $W \times V$ pour l'application $f : W \rightarrow V$ est à l'intérieur de $F^{-1}(x_0)$.

On peut dire que la fonction implicite

$$F(x, y) = z_0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z_0 \in \mathbb{R}^n$$

peut être exprimée explicitement $y = f(x)$ dans un voisinage W .

Exemple $m = 1 = n$.

Si $F(x, y) = y^2 - x$.

Exemple 1 $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 1$.

$$DF = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right] = [-1 \quad 2y] \in C^\infty.$$

$$DyF = [2y]_{|x|}.$$

$$DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \neq 0.$$

Donc près de $(0, 1) = (x_0, y_0)$, $y = f(x)$ a une solution C^∞ .

Mais si $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, $DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$ n'est pas inversible. F est C^∞ .

Implicitement, près de $(0, 0)$, on a $y^2 - x = 0$.

On essaie de trouver $y = f(x)$.

$$y^2 = x \implies y = \pm \sqrt{x}.$$

Mais $\sqrt{\cdot}$ n'est pas définie pour $x < 0$ près de $x_0 = 0$!

Donc il n'y a pas un moyen d'écrire explicitement $F(x, y) = 0$ près de $(0, 0)$ comme une fonction C^∞ .

Remarque (Sur le théorème des fonctions implicites). En effet, si $W' = f(W) \subset V$, on a

$$(x, y) \in W \times W', F(x, y) = z_0 \iff y = f(x).$$

4 Algèbre multilinéaire

Soit E espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie n , c'est-à-dire il existe $\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base telle que

$$\forall \vec{v} \in E, \exists !(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i.$$

En particulier, β engendre E ($E = \text{span}(\beta) = \langle \beta \rangle$) si β est libre.

4.1 L'espace dual E^*

$$E^* = \{T : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire}\} = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Théorème 4.1. On a $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Démonstration. Supposons $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base ordonnée de E . On définit alors n éléments (e^1, e^2, \dots, e^n) , $e^j \in E^*$ de la manière suivante :

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque (Personnelle). e^j est l'évaluation du vecteur $\vec{v} \in E$ en e_j .

$$\text{Donc } e^j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^j(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i^j = \alpha_j.$$

Donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $e^j \in E^*$, $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$. On montre que β^* est une base pour E^* .

1. β^* est libre. Supposons que pour $c_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^n c_j e^j = 0 \in E^*.$$

Donc pour tout i ,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n c_j e^j \right) (e_i) &= 0 \in \mathbb{R} \text{ et} \\ \left(\sum_{j=1}^n c_j e^j \right) (e_i) &= \sum_{j=1}^n c_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^n c_j \delta_i^j = c_i. \end{aligned}$$

Donc $\forall i, c_i = 0$.

2. β^* engendre E^* . Soit $T \in E^*$. Est-ce qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tel que

$$T = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j ?$$

Essayons de trouver les α_j en appliquant l'identité désirée en e_i .

$$\forall i, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e^j \right) (e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_i^j = \alpha_i.$$

Donc pour $T \in E^*$ donnée, le candidat pour α_i est

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i \in T(e_i) \in \mathbb{R},$$

et on obtient que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e^j \right) (e_i).$$

Comme T et \tilde{T} ont les mêmes valeurs sur la base β , donc $T = \tilde{T}$.

$$T = \sum_{j=1}^n T(e_j) e^j.$$

□

Définition 4.1. On dit que β^* est la base duale de β .

On considère le dual du dual $E^{**} = (E^*)^*$.

Théorème 4.2. Si $\dim(E) < \infty$, il y a un isomorphisme canonique entre E et E^{**} .

On peut définir $E \rightarrow E^{**}$. On pose $e : E \rightarrow E^{**}$.

$$(\iota(\vec{v}))(T) = T(\vec{v}),$$

$$\forall T \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Exercice 1.

1. Montrer que $\forall v \in E, \iota(\vec{v}) : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une transformation linéaire.
2. Montrer que $\iota : E \rightarrow E^{**}$ est une transformation linéaire.
3. Montrer que ι est bijective (donc un isomorphisme).

Démonstration.

1.

$$\iota(\vec{v})(\alpha T + S) = (\alpha T + S)(\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) + S(\vec{v}) = \alpha \iota(\vec{v})(T) + \iota(\vec{v})(S).$$

2. $\iota : E \rightarrow E^{**}$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \iota(\alpha \vec{v} + \vec{w})(T) &= T(\alpha \vec{v} + \vec{w}) \stackrel{T \text{ linéaire}}{=} \alpha T(\vec{v}) + T(\vec{w}) \\ &= \alpha \iota(\vec{v})(T) + \iota(\vec{w})(T) = \alpha \iota(\vec{v}) + \iota(\vec{w}). \end{aligned}$$

Comme c'est vrai $\forall T \in E^*$, on a l'identification $\iota(\alpha \vec{v} + \vec{w}) = \alpha \iota(\vec{v}) + \iota(\vec{w})$ (comme un élément de E^{**}). Donc ι est une transformation linéaire.

3. On sait que $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$ (ce qui veut dire que ι est surjective). Pour démontrer que ι est un isomorphisme, il suffit de démontrer que $\text{Ker}(\iota) = \{0\}$ (que ι est injective).

Si $\vec{v} \in \text{Ker}(\iota)$, alors $\iota(\vec{v}) = 0 \implies \forall T \in E^*, T(\vec{v}) = \iota(\vec{v})(T) = 0(T) = 0$, donc \vec{v} est tel que $\forall T \in E^*, T(\vec{v}) = 0$.

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, on peut compléter \vec{v} avec une base $\{\vec{v}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de E et définir $T(\alpha_1 \vec{v} + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) = \alpha_1$. Dans ce cas-là, $T(\vec{v}) = 1 \neq 0$.

Si $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E . On a vu que la base duale $\beta^* = (e^1, e^2, \dots, e^n)$ est une base de E^* .

$$e^j(e_i) = \delta_i^j.$$

$$(\beta^*)^* = \beta^{**} = (\varepsilon_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

$$\forall i, \eta_i \in E^{**}, \eta_i(e^i) = \delta_i^j, \forall i, j. \quad (1)$$

On va aussi calculer

$$\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j. \quad (2)$$

$\forall e^j$ de base β^* , on a

$$\eta_i(e^j) = \iota(e_i)(e^j), \eta_i, \iota(e_i) \in E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R}).$$

η_i et $\iota(e_i)$ coïncident sur une base de E^* , donc

$$\forall i, \eta_i = \iota(e_i).$$

Pour simplifier, parfois on identifie E et E^{**} par l'application ι , c'est-à-dire on met $\vec{v} = \iota(\vec{v})$. □

Les éléments de E^* sont appelés **les vecteurs covariants**. Les éléments de E^{**} sont appelés **les vecteurs contravariants**.

4.2 Les applications multilinéaires

Supposons que E_1, E_2, \dots, E_k sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R} et E' espace vectoriel de \mathbb{R} .

$$\alpha : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k \longrightarrow E'$$

est une application k -linéaire quand α est linéaire par rapport à chaque coordonnée dans l'un des espaces E_j quand les autres coordonnées (composantes) sont fixées.

$$\vec{v}_i \in E_i, 1 \leq i \leq k, \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k).$$

Si $\forall i \in \{1, \dots, k\}, a \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}_j \in E_j, \vec{w} \in E_i$, on a

$$\alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, a\vec{v}_i + \vec{w}, \dots, \vec{v}_k) = a\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_k) + \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \overbrace{\vec{w}}^{i\text{-ème}}, \dots, \vec{v}_k).$$

Exemple

1. $f(x, y) = xy, f : \overset{E_1}{\mathbb{R}} \times \overset{E_2}{\mathbb{R}} \rightarrow \overset{E'}{\mathbb{R}}$.
2. $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n, E' = \mathbb{R}$,

$$\alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \text{ 2-linéaire.}$$

3. $E_1 = E_2 = E_3 = \mathbb{R}^3, E' = \mathbb{R}$.

$$\alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = \det \left(\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 3}.$$

Cette application est 3-linéaire.

4. $E_1 = E_2 = \dots = E_n = \mathbb{R}^n$.

$$\alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{pmatrix}.$$

C'est une application n -linéaire.

5. Le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est une application n -linéaire.

4.2.1 Quelques notations

E espace vectoriel de dimension finie.

On note $\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.

Remarquons que $\Omega^1(E) = \{\alpha : E \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est linéaire}\} = E^*$.

Proposition 4.1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k .

Démonstration. Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(E), a \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k , on doit montrer deux choses :

1. $\Omega^k(E)$ est stable par les opérations $+$ et \cdot (produit par un scalaire).
2. Il existe une base de cet espace contenant n^k éléments.

Il faut démontrer que $a\alpha + \beta$ est aussi une application k -linéaire sur $E^k = \overbrace{E \times \dots \times E}^{k \text{ fois}}$.

$$\begin{aligned} (a\alpha + \beta)(b\vec{v}_1 + \vec{w}, \dots) &= a[\alpha(b\vec{v}_1 + \vec{w}, \dots)] + \beta(b\vec{v}_1 + \vec{w}) \\ &= a[b\alpha(\vec{v}_1, \dots) + \alpha(\vec{w}, \dots)] + b\beta(\vec{v}_1, \dots) + \beta(\vec{w}, \dots) \\ &= b[a\alpha + \beta](\vec{v}_1, \dots) + [a\alpha + \beta](\vec{w}, \dots) \end{aligned}$$

De même pour chaque $1 \leq i \leq k$.

Pour trouver la dimension de $\Omega^k(E)$, il faudra trouver une base de $\Omega^k(E)$. Pour cela, il faudra d'abord introduire "le produit tensoriel". \square

Définition 4.2 (Produit tensoriel). Supposons que $\alpha : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$ k -linéaire, $\beta : E'_1 \times \dots \times E'_l \rightarrow \mathbb{R}$ l -linéaire.

On définit

$$\alpha \otimes \beta : E_1 \times \dots \times E_k \times E'_1 \times \dots \times E'_l \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\alpha \otimes \beta(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_l) := \alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \beta(\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_l)$$

qui est une application $(k+l)$ -linéaire (avec $\vec{v}_i \in E_i, i \in \{1, \dots, k\}, \vec{v}'_j \in E'_j, j \in \{1, \dots, l\}$).

Les applications k -linéaires sont appelées les tenseurs covariants d'ordre k .

Exercice 2. On montre que \otimes est une opération associative.

$\forall \alpha, \beta, \gamma$ tenseurs covariants,

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma).$$

Exemple $E_1 = \mathbb{R}^n, E'_1 = \mathbb{R}^n, k = l = 1, \alpha \in E_1^*, \alpha(\vec{v}) = 2\vec{v} \cdot e_1, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \beta \in E_1'^*, \beta(\vec{v}) = \vec{v} \cdot e_1, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$

$$\alpha \otimes \beta(\vec{v}, \vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot e_1)(\vec{v} \cdot e_1)$$

et

$$\beta \otimes \alpha(\vec{v}, \vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot e_1)(\vec{v} \cdot e_1).$$

Mais si $\tilde{\beta}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot e_2,$

$$\alpha \otimes \tilde{\beta}(\vec{v}, \vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot e_1)(\vec{v} \cdot e_2),$$

$$\text{mais } \tilde{\beta} \otimes \alpha(\vec{v}, \vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot e_1)(\vec{v} \cdot e_2).$$

Le produit tensoriel n'est donc pas commutatif.

$$E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$$

$$\Omega^k(E) := \{ \alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire} \}.$$

Proposition 4.2. $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k , où $n = \dim(E)$.

Démonstration. On rappelle que $\dim(E) = n$, que (e_1, \dots, e_n) est une base de E et que (e^1, \dots, e^n) est une base de $E^* = \Omega^1(E)$.

Par exemple si on prend

$$\underbrace{e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1}_{k \text{ fois}} : E \times \cdots \times E \rightarrow \mathbb{R},$$

on aura alors

$$e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n), \vec{v}_i \in E,$$

$$= e^1(\vec{v}_1) e^1(\vec{v}_2) \dots e^1(\vec{v}_n).$$

Posons $\mathcal{A} = \{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid \text{pour } 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_k \leq n\}.$

Il y a n choix pour chaque e^{i_j} (parmi les n vecteurs de la base de E), alors, au total, on a n^k choix pour les éléments de \mathcal{A} (puisque'il y a k choix pour chaque i_k), ce qui démontre la proposition 4.2. Il nous reste maintenant à montrer que :

1. \mathcal{A} engendre $\Omega^k(E)$;
2. \mathcal{A} est libre.

Soit $\alpha \in \Omega^k(E)$.

On va démontrer que

$$\alpha \stackrel{?}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

Prenons $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \in E^k$. On a

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i.$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n c_{ik} e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n c_{i1} \alpha\left(e_i, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{i_2}, \dots\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).
\end{aligned}$$

Maintenant, pour

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n},$$

on calcule pour $\beta \in \Omega^k(E)$,

$$\beta(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_k} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Mais

$$\begin{aligned}
\beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) &= \sum_{1 \leq i'_1, \dots, i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, e_{i'_2}, \dots, e_{i'_k}) e^{i'_1} \otimes e^{i'_2} \otimes \dots \otimes e^{i'_k} (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i'_1 \leq \dots \leq i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_k}) e^{i'_1}(e_{i_1}) e^{i'_2}(e_{i_2}) \dots e^{i'_k}(e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i'_1, \dots, i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_k}) \delta_{i'_1}^{i_1} \dots \delta_{i'_k}^{i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\beta(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_k} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k).$$

Donc ? est démontré, et on a $\alpha \in \text{span}(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A} \rangle$, où $\mathcal{A} = \{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\}$.

Montrons que \mathcal{A} est libre. Soit

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} c_{i_1 i_2 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = 0 \in \Omega^k(E).$$

Le même calcul qu'auparavant démontre que

$$0 = 0(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = c_{i_1 \dots i_k}, \forall i_1, \dots, i_k,$$

donc

$$\forall i_1, \dots, i_k, c_{i_1 \dots i_k} = 0,$$

donc \mathcal{A} est libre. □

Remarque. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n, Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ D^2 f(x) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ &\vdots \\ D^n f(x) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))). \end{aligned}$$

Lemme. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \{\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \alpha \text{ est 2-linéaire}\}.$

Pour un élément $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, g(\vec{v}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
 Pour tout k , pour tout $x \in U, D^k f(x) \in (\Omega^k(\mathbb{R}^n))^m$. Cet espace est de dimension $m(n^k)$.
 On définit

$$\alpha_g(\vec{v})(\vec{w}) \in \mathbb{R}^m.$$

On voit que α_g est une application 2-linéaire.
 Supposons que $\alpha_g = \alpha_{g'}$, donc $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \alpha_g(\vec{v}, \vec{w}) = \alpha_{g'}(\vec{v}, \vec{w})$, donc $g(\vec{v})(\vec{w}) = g'(\vec{v})(\vec{w})$.
 Donc $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, g(\vec{v}) = g'(\vec{v}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donc $g = g'$.
 On en déduit que $g \rightarrow \alpha_g$ est injective.

Exemple. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, Tx = 2x_1 + 5x_2$. On définit $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \alpha((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = x_1x'_2 - x_2x'_1, \alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$.

Ecrire le produit tensoriel entre α et T ...

27-09-2023

Si E, F sont deux espaces vectoriels et $T : E \rightarrow F$ linéaire ($T \in \mathcal{L}(E, F)$). On peut définir une application linéaire

$$T^* : F^* \rightarrow E^*.$$

Pour $f \in F^*$, on doit déterminer $T^*(f)$ comme un élément de E^* . Alors $T^*(f)$ doit être une application linéaire $T^*(f) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, i. e. $T^*(f) : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall v \in E, (T^*(f))(v) \stackrel{\text{déf}}{=} f(T(v)) \text{ cf figure 9.}$$

On a $f \in F^*, f \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$.

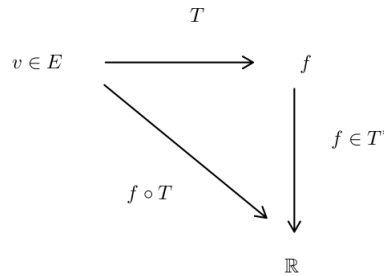


FIGURE 9 – Illustration de T^*

$F^* = \Omega^1(F), E^* = \Omega^1(E)$. On peut aussi utiliser la notation $\Omega^1(T)$ pour T^* . On peut aussi définir, à partir de T ,

$$\Omega^k(T) : \underbrace{\Omega^k(F)}_{\alpha} \longrightarrow \underbrace{\Omega^k(E)}_{\beta}.$$

Pour $\alpha \in \Omega^k(E)$, on a besoin que $\underbrace{\Omega^k(T)(\alpha)}_{k\text{-linéaire}} \in \Omega^k(E)$.

$\forall v_1, \dots, v_n$, on a besoin de définir

$$\underbrace{(\Omega^k(T)(\alpha))}_{\beta \in \Omega^k(E)}(v_1, \dots, v_k) = \underbrace{\alpha(T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k))}_{\in F^k}.$$

Exercice 3.

1. Montrer que β est k -linéaire, i. e. $\forall k, \Omega^k(T)(\alpha) \in \Omega^k(E)$.
2. Montrer que $\Omega^k(S \circ T) = \Omega^k(T) \circ \Omega^k(S)$.
3. Montrer que $\Omega^k(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Omega^k(E)}$.
4. Montrer que si $T : E \rightarrow F$ est inversible, alors

$$\Omega^k(T^{-1}) = (\Omega^k(T))^{-1}.$$

Quelques propriétés Si on a $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$, on a

$$\Omega^k(G) \xrightarrow{\Omega^k(S)} \Omega^k(F) \xrightarrow{\Omega^k(T)} \Omega^k(E).$$

On a $S \circ T : E \rightarrow G$. Alors

$$\Omega^k(T) \circ \Omega^k(S) \in \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^k(E)$$

et

$$\Omega^k(S \circ T) : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^k(E).$$

On considère $\mathbb{1}_E : E \rightarrow E$. Alors

$$\Omega^k(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Omega^k(E)}.$$

On rappelle que l'on peut associer à un vecteur $v \in E$ un vecteur contravariant $\iota(v) \in E^{**}$. On définit alors, $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 1$,

$$\Omega_l(E) := \{\alpha : \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } l\text{-linéaire}\} = \Omega^l(E^*),$$

avec la base $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq l\}$.

On a $\dim(\Omega_l(E)) = n^l$ et $\forall \alpha \in \Omega_l(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq n} \alpha(e^{i_1}, \dots, e^{i_l}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l}.$$

Pour $T : E \rightarrow F$, $\Omega_l(T) : \Omega_l(E) \rightarrow \Omega_l(F)$ (objets contravariants pour la dualité), avec $\alpha \in \Omega_l(E), \beta = \Omega_l(T)(\alpha) \in \Omega_l(F)$.

On va essayer de définir

$$\beta(f_1, \dots, f_l) = \Omega_l(T)(\alpha)(f_1, \dots, f_l) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha(T^*(f_1), \dots, T^*(f_l)).$$

$f_j \in F^* \qquad T^*(f_j) \in E^*$

On a alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & F & \xrightarrow{S} & G \\ \Omega_l(E) & \xrightarrow{\Omega_l(T)} & \Omega_l(F) & \xrightarrow{\Omega_l(S)} & \Omega_l(G). \end{array}$$

Définition 4.3. Pour tous k, l , on a

$$\Omega_l^k(E) := \left\{ \alpha : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{l \text{ fois}} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire} \right\}$$

qui a pour base

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n\}.$$

On a $\dim(\Omega_l^k) = n^{k+l}$. Pour $\alpha \in \Omega_l^k(E)$, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

Parenthèse sur les notations En physique, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_l}} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

et on dit : si α est un (l, k) tenseur, alors α est la collection de valeurs $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$.

Si $T : E \rightarrow E$ est donnée, alors $\Omega_l^k(T)(\alpha)$ est donnée maintenant par le coefficient

$$b_{i_1, \dots, i_l}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_l}.$$

4.3 Produit scalaire

Les produits scalaires sur un espace vectoriel sont des tenseurs 2-covariants.

Définition 4.4 (Produit scalaire). Une application $\alpha : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire quand

1. $\alpha \in \Omega^2(E)$;
2. α est symétrique, i. e.

$$\forall v, w, \alpha(v, w) = \alpha(w, v).$$

3. α est définie positive, i. e. $\forall v \in E, \alpha(v, v) \geq 0$ et $\alpha(v, v) = 0 \iff v = 0$. En particulier, si $v \neq 0$, alors $\alpha(v, v) > 0$.

α dans une base est donnée par les coefficients $a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$. Par exemple, on considère

$$v = \sum x_i e_i, w = \sum y_i e_i, \alpha = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j. \quad (3)$$

Dans ce cas, on a

$$\alpha(v, w) = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j \right) \left(\sum_k x_k e_k, \sum_l y_l e_l \right) \quad (4)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} a_{ij} e^i(e_k) e^j(e_l) x_k y_l = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} \delta_k^i \delta_l^j x_k y_l = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j. \quad (5)$$

Donc un produit scalaire est un $(0, 2)$ -tenseur.

Pour aller vers les formes différentielles, on a besoin d'une sous-catégorie de $\Omega_l^k(E)$ qui sont appelés les tenseurs extérieurs. Voici quelques définitions.

Définition 4.5. 1. On dit que σ est une permutation d'ordre k quand

$$\sigma : \{1, \dots, k\} \mapsto \{1, \dots, k\}$$

est une bijection. On note $\sigma_i := \sigma(i)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est l'ensemble des permutations d'ordre k . L'ensemble S_k muni de la loi \circ est un groupe. On dit qu'une permutation est une transposition quand il existe $i \neq j$ tels que

$$\sigma_i = j, \sigma_j = i, \sigma_s = s, \forall s \notin \{i, j\}.$$

$\forall \sigma \in S_k, \exists \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(l)}$ tel que

$$\sigma = \sigma_{(1)} \dots \sigma_{(l)}, \quad (6)$$

et chaque $\sigma_{(s)}$ est une transposition. Cette décomposition n'est pas unique, mais dans toutes les décompositions comme dans 6, la parité de l ne change pas.

On définit

$$\text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ est paire,} \\ 0 & \text{si } l \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Définition 4.6. $\alpha \in \Omega^k(E)$ est dite un **tenseur extérieur** (aussi appelé tenseur antisymétrique) si

$$\forall v_1, \dots, v_k \in E, \forall \sigma \in S_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k).$$

Proposition 4.3. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est extérieur ;
2. $\forall \sigma \in S_k$ telle que σ est une transposition,

$$\forall v_1, \dots, v_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k);$$

3. $\forall v_1, \dots, v_k \in E$, s'il existe $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tels que $v_i = v_j, i \neq j$, alors $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Démonstration.

1. (1) \implies (2). On a $\text{sgn}(\text{transposition}) = -1$.
2. (2) \implies (3). Donné i, j tels que $v_i = v_j, i \neq j$. On considère la transposition qui échange i et j et on a

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k),$$

mais $(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = (v_1, \dots, v_k)$ comme $v_i = v_j$ et donc

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_k) \implies \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

3. (2) \implies (1). Si $\sigma = \sigma_{(1)} \dots \sigma_{(l)}$, avec pour tout j , $\sigma_{(j)}$ est une transposition, alors

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = (-1)^l \alpha(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k).$$

4. (3) \implies (2). σ est une transposition telle que $\sigma_i = j, \sigma_j = i$. Les v_1, \dots, v_k sont donnés. On écrit :

$$\alpha(v_1, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } i}, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } j}, \dots, v_k) = 0.$$

Mais

$$\alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \quad (7)$$

$$= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \quad (8)$$

$$= \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k)}_{=0} + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \quad (9)$$

$$+ \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k)}_{=0}. \quad (10)$$

On a d'une part $9 + 10 = 0$ et d'autre part :

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}),$$

ce qui donne le résultat souhaité. □

Exemple.

1. $\alpha(v, w) = \alpha((v', v^2), (w', w^2)) = v'w^2 - v^2w'$. On vérifie facilement qu'il est antisymétrique.
2. Plus généralement, pour chaque $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$,

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]$$

est un tenseur extérieur.

Corollaire. Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas libre (i. e. linéairement dépendante), $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Démonstration. Si la famille n'est pas libre, il existe i tel que $v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j$ et la démonstration est la même que pour la proposition 4.3. □

On suppose que $\dim(E) = n$ et $k > n$. Si $\alpha \in \Omega^k(E)$ est un tenseur extérieur, alors, par convention, on écrit :

$$\forall v_1, \dots, v_k \in E, \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

On définit maintenant l'ensemble des tenseurs extérieurs, à savoir

$$\Lambda^k(E) := \{\alpha \in \Omega^k(E), \alpha \text{ est tenseur extérieur}\}.$$

Proposition 4.4. $\Lambda^k(E)$ est un sous-espace vectoriel, i. e.

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(E) \text{ et } c \in \mathbb{R}, (c\alpha + \beta) \in \Lambda^k(E).$$

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?

On cherche une base pour $\Lambda^k(E)$. Si (e_1, \dots, e_n) base de E , (e'_1, \dots, e'_n) base duale, alors

$$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq k\}$$

est une base de $\Lambda^k(E)$.

On va définir pour chaque choix d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ un élément extérieur $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_k}$ comme un élément proposé de base de $\Lambda^k(E)$ par la formule

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}).$$

Exemple.

$$e^{12}(v_1, v_2) = e^1 \otimes e^2(v_1, v_2) - e^1 \otimes e^2(v_2, v_1) = e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^2(v_1).$$

Proposition 4.5. $\varepsilon^{i_1 \dots i_k} \in \Lambda^k(E)$, autrement dit $\varepsilon^{i_1 \dots i_k}$ est un **tenseur extérieur**.

Démonstration. Soit $\tau \in S_k$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{i_1 \dots i_k}(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}) &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1}, \dots, v_{\sigma\tau_k}) \\ &= \sigma(\tau) \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1}, \dots, v_{\sigma\tau_k}). \end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_k}(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}) = \text{sgn}(\tau) \sum_{\sigma' \in S_k} \text{sgn}(\sigma') e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma'_1}, \dots, v_{\sigma'_k}) = \text{sgn}(\sigma) \varepsilon^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k).$$

□

Il existe une autre manière pour proposer des éléments de base $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. On va définir

$$\bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \dots \delta_{j_k}^{i_k}.$$

Si $j_s = j_l$ pour $s \neq l$, alors $\bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k} = 0$ par définition.

Si j_1, \dots, j_k sont k indices différents, mais pas dans l'ordre croissant, on les réordonne par une permutation $\sigma \in S_k$ avec $1 \leq \sigma_{j_1} < \dots < \sigma_{j_k} \leq n$. On définit

$$\bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{sgn}(\sigma) \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k}.$$

Exercice 4. Est-ce que on a $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ pour tout choix de $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$?

$\bar{\varepsilon}$ est prolongé par k -linéarité sur tout élément $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$.

Théorème 4.3. $\{\bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k}, \text{ pour tout } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ forme une base pour $\Lambda^k(E)$, l'espace vectoriel des tenseurs extérieurs.

Démonstration.

1. Ils sont libres. En effet,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} c_{i_1 \dots i_k} \bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k} = 0 \\ \implies & \forall 0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n, \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} c_{i_1 \dots i_k} \bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0 \\ \implies & 0 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} c_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = c_{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

2. Ils génèrent $\Lambda^k(E)$: exercice.

□

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?

C'est $\dim(\Lambda^k(E)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Par convention, $\dim(\Lambda^0(E)) = 1$ et $\Lambda^k(E) = \mathbb{R}$, $\Lambda^k(E) = \{0\}$ si $k < 0$ et

$$\dim(\Lambda^1(E)) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \text{ et } \dim(\Lambda^n(E)) = \frac{n!}{(n-n)!0!} = 1.$$

Proposition 4.6. Si $\alpha \in \Lambda^k(F)$, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $(\Omega^k(T))(\alpha) \in \Lambda^k(E)$, avec $\Omega^k(T) : \Lambda^k(F) \longrightarrow \Lambda^k(E)$.

Démonstration. Si $\beta = (\Omega^k(T))(\alpha)$, $v_1, \dots, v_k \in E$,

$$\beta(v_1, \dots, v_k) = \alpha(T(v_1), \dots, T(v_k)).$$

Si $i \neq j$, $v_i = v_j$, alors $T(v_i) = T(v_j)$ et $\alpha(T(v_1), \dots, T(v_k)) = 0$, donc $\beta(v_1, \dots, v_k) = 0$. Donc $\beta \in \Lambda^k(E)$. □

On écrit

$$\Lambda^k(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega^k(T)|_{\Lambda^k(E)}.$$

Exemple. 1.

2. Si $k = n$, on a $\dim(\Lambda^k(E)) = 1$ et

$$\bar{\varepsilon}^{1 \dots n}(e_1, \dots, e_n) = 1 \text{ et } \bar{\varepsilon}^{12 \dots n}(e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_n}) = \text{sgn}(\sigma).$$

Si $k = 2 = n$, on a

$$\bar{\varepsilon}(e_1, e_2) = 1, \bar{\varepsilon}(e_2, e_1) = -1, \bar{\varepsilon}(e_1, e_1) = 0, \bar{\varepsilon}(e_2, e_2) = 0.$$

et $\bar{\varepsilon}(v, w) = -\bar{\varepsilon}(w, v)$. Si $v = (x_1, x_2), w = (y_1, y_2)$. Donc

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(v, w) &= \bar{\varepsilon}(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\ &= \dots \text{ on développe grâce à la linéarité de l'application } = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

C'est le déterminant formé par les vecteurs v, w , à savoir l'aire du parallélogramme formé par v, w .

Donc

$$\bar{\varepsilon}^{12\dots n}(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1 \dots v_n].$$

C'est le volume n -dimensionnel signé de parallélépipède créé par (v_1, \dots, v_n) (ordonné). On dit que $\bar{\varepsilon}^{1\dots n}$ est l'élément de volume sur $\Lambda^k(E)$ et on va le noter par $\omega = \bar{\varepsilon}^{1\dots n}$.

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \text{volume signé de parallélépipède créé par } v_1, \dots, v_n = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Remarque (Sur les notations). Parfois on représente les éléments de E comme les vecteurs de colonne

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = |\vec{v}\rangle, \text{ avec } \vec{v} = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$$

et les éléments de E^* comme les vecteurs de ligne par rapport à la base duale.

$$\vec{a} = y_1 e^1 + \dots + y_n e^n, \langle \vec{a} | = [y_1 \dots y_n].$$

Pour $\vec{a} \in E^*$, pour $\vec{v} \in E$,

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{v}) &= \sum_{i=1}^n y_i x^i = \langle \vec{a} | \vec{v} \rangle \\ &= [y_1 \dots y_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dans le cas général, $\omega = \bar{\varepsilon}^{1\dots n} \in \Lambda^k(E)$ est le seul élément de base pour cet espace de dimension 1. Si $T : E \rightarrow E$ transformation linéaire $\Lambda^k(T) : \Lambda^k(E) \rightarrow \Lambda^k(E)$, mais $\dim(\Lambda^n(E)) = 1$ s'il existe $c \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \Lambda^n(E), \Lambda^n(T)(\alpha) = c\alpha$.

Définition 4.7. $\det(T) := c$.

Exercice 5. Si $E = \mathbb{R}^n, T(v) = A|\vec{v}\rangle$ pour la base standard, alors $\det(T) = \det(A)$.

On considère $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$,

$$(\Lambda^n(T))(\alpha)(w_1, \dots, w_n) = \alpha(T(w_1), \dots, T(w_n)) = \det(T)\alpha(w_1, \dots, w_n).$$

On choisit $\alpha = \omega, w_i = e_i$.

$$\omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \det(T)\omega(e_1, \dots, e_n). \quad (11)$$

Mais

$$\det(T) = \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \det[T(e_1), \dots, T(e_n)]. \quad (12)$$

11, 12 impliquent que $\det(T) = \det(A)$.

$\det(T)$ est défini directement indépendamment d'une base de E . Donc

$$\Lambda^n(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)},$$

donc $\mathbb{1}_{\Lambda^n(E)}(\alpha) = \alpha \implies c = 1$.

De plus, pour $T : E \rightarrow E, S : E \rightarrow E$,

$$\Lambda^n(S \circ T) = \Lambda^n(T) \circ \Lambda^n(S) \implies \det(S \circ T) = \det(S) \det(T).$$

Si T est inversible, alors

$$\begin{aligned} \Lambda^n(E)(T \circ T^{-1}) &= \Lambda^n(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \Lambda^n(T^{-1}) \circ \Lambda^n(T) &= \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \det(T) \det(T^{-1}) &= 1. \end{aligned}$$

Si T est inversible, on a $\det(T) \neq 0$ et

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}.$$

Aussi $\det(T) \neq 0 \implies T$ est inversible. Etant donné (e_1, \dots, e_n) , on doit démontrer que $T(e_1), \dots, T(e_n)$ forment une famille libre.

$$\omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \Lambda^n(T)(\omega)(e_1, \dots, e_n) = (\det(T))\omega(e_1, \dots, e_n) = \det(T) \cdot 1 \neq 0.$$

Comme ω est linéairement dépendant, par contraposée, $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ ne peut pas être linéairement dépendant.

Lemme. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ sont linéairement dépendants, alors $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$. Si $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ famille libre.

Aussi, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ sont libres, on définit $Te_i = v_i, T : E \rightarrow E$ devient inversible, donc $\det(T) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(T) &= \det(T)\omega(e_1, \dots, e_n) = (\Lambda^n(T))(\omega)(e_1, \dots, e_n) \\ &= \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \omega(v_1, \dots, v_n) \implies \omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0. \end{aligned}$$

$T : E \rightarrow E, (e_1, \dots, e_n)$ base de E ,

$$Te_i = A|e_i\rangle = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n A_{ji}e_j.$$

$$\begin{aligned}
\det(T) &= \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \omega\left(\sum_{j=1}^n A_{j1}e_j, \dots, \sum_{j=1}^n A_{jn}e_j\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n A_{j_1 1} A_{j_2 2} \dots A_{j_n n} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \dots A_{\sigma_n n} \operatorname{sgn}(\sigma) \\
&\implies \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \dots A_{\sigma_n n}.
\end{aligned}$$

4.4 Les éléments de volumes et orientation

On a défini

$$\omega = \varepsilon^{12\dots n} \in \Lambda^n(E).$$

Cet élément dépend du choix de la base.

Définition 4.8. On dit que ω est un élément de volume sur E , avec $\dim(E) = n$ si $\omega \in \Lambda^n(E)$ et $\omega \neq 0$.

Remarque. Si $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^n(E)$ sont deux éléments de volume, alors il existe $c \neq 0, c \in \mathbb{R}$ tel que $\omega_1 = c\omega_2$.

Définition 4.9. On dit qu'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E (base arbitraire *ordonnée*) a l'orientation positive (négative) ou est orientée positivement (négativement) par rapport à ω , qui est élément de volume donné sur E , quand $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$ ($\omega(e_1, \dots, e_n) < 0$).

Si $\omega = \varepsilon^{12\dots n}$ construit à partir de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base orientée positivement par rapport à ω , alors, par rapport à l'application linéaire $T : E \longrightarrow E, T(e_i) = e'_i$, on a $\det(T) > 0$.

Démonstration. En exercice. □

La réciproque est aussi vraie.

Définition 4.10. $\{e_1, \dots, e_n\}, \{e'_1, \dots, e'_n\}$ sont deux bases données. On dit qu'elles sont de même orientation lorsqu'il existe $\omega \in \Lambda^n(E)$ élément de volume tel que $\omega(e_1, \dots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \dots, e'_n)$ sont de même signe.

Lemme. Si un tel ω dans la définition existe, alors $\forall \omega \in \Lambda^n(E)$, $\omega(e_1, \dots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \dots, e'_n)$ ont le même signe.

Démonstration. En exercice. □

Remarque. Etre de la même orientation est une relation d'équivalence sur la collection de bases sur E . Il y a deux classes d'équivalence.

Si on fait la théorie sur \mathbb{C} (qui n'est pas un corps ordonné), on ne peut pas définir une orientation. Si $\omega(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{C}$, il n'y a pas de signe (Kähler).

On définit

$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^k(E) = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \Lambda^k(E).$$

En général, $\alpha \otimes \beta$ n'est pas un tenseur extérieur. On cherche un produit \wedge qui nous donne

$$\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E).$$

Si on essaie de mettre

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \beta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}).$$

Ce produit est tel que $\alpha \times \beta$ est antisymétrique, mais défini de cette façon, il n'est pas associatif.

Définition 4.11. $\Lambda^k(E) \times \Lambda^l(E) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+l}(E)$, avec $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est défini comme l'élément de $\Lambda^{k+l}(E)$ par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \beta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}).$$

Lemme. $\alpha \in \Lambda^k, \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E)$.

Démonstration. Prenons $\tau \in S_{k+l}$. On a

$$\begin{aligned} & \alpha \wedge \beta(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}, v_{\tau_{k+1}}, \dots, v_{\tau_{k+l}}) \\ & \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{(\sigma\tau)_1}, \dots, v_{(\sigma\tau)_k}) \beta(v_{(\sigma\tau)_{k+1}}, \dots, v_{(\sigma\tau)_{k+l}}) \end{aligned}$$

□

Proposition 4.7. Si $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E), \gamma \in \Lambda^s(E)$, alors

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Donc on peut parler sans confusion de $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \Lambda^{k+l+s}(E)$.

Donc on peut généraliser le produit sur m tenseurs extérieurs $\alpha_i \in \Lambda^{k_i}, 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m(v_1, \dots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \dots, v_{k_1+k_2}, \dots, v_{\sum_{i=1}^{m-1} k_i}, \dots, v_{\sum_{i=1}^m k_i}) \\ & = \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+\dots+k_m}} \text{sgn}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{k_1}}) \alpha_2(\dots) \dots \alpha_m(\dots). \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (e^{i_1} \otimes e^{i_n})(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma_1}) \dots e^{i_k}(v_{\sigma_k}) \\ &= \frac{1}{1! \dots 1!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma_1}) \dots e^{i_k}(v_{\sigma_n}).\end{aligned}$$

Si on met $m = k, k_1 = \dots = k_m = 1, \alpha_{k_j} = e^{i_j} \in \Lambda^1(E), 1 \leq j \leq k$, on voit que

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_k} = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

Exercice 6. Montrer que $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k}$, avec $0 < i_1 < \dots < i_k \leq n, 0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ qui montre que

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_k} = \bar{\varepsilon}^{i_1 \dots i_k}.$$

Donc pour $n = m$, on obtient $\varepsilon^{12 \dots n} = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$. Donc l'élément de volume ω associé à une base ordonnée (e_1, \dots, e_n) de E est simplement $\omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

Exemple. Si $\alpha_i \in \Lambda^1(E), v_i \in E$,

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma_1}) \dots \alpha_m(v_{\sigma_m}) = \det[\alpha_i(v_j)].$$

Exemple. $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2, \alpha(x_1, x_2, x_3) = x_3, \\ v_1 &= (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0).\end{aligned}$$

$$m = 2, n = 3.$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) &= \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma_1}) \alpha_2(v_{\sigma_2}) \\ &= \alpha_1(v_1) \alpha_2(v_2) - \alpha_2(v_1) \alpha_1(v_2) = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2.\end{aligned}$$

Proposition 4.8. $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, alors

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \times \alpha.$$

En particulier, si k est impair,

$$\forall \alpha \in \Lambda^k(E), \alpha \wedge \alpha = 0,$$

parce que dans ce cas, on a $\alpha \wedge \alpha = (-1)\alpha \wedge \alpha$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \beta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}) \\ \beta \wedge \alpha(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \beta(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_l}) \alpha(v_{l+1}, \dots, v_{l+k}).\end{aligned}$$

On doit introduire τ telle que $(-1)^{kl}$. □

Proposition 4.9. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout k , $\Lambda^k(T) : \Lambda^k(F) \longrightarrow \Lambda^k(E)$, pour $\alpha \in \Lambda^k(F)$, $\beta \in \Lambda^l(F)$,

$$\underbrace{\Lambda^{k+l}(T)(\alpha \wedge \beta)}_{\in \Lambda^{k+l}(E)} = \underbrace{\Lambda^k(T)(\alpha)}_{\in \Lambda^k(E)} \wedge \underbrace{\Lambda^l(T)(\beta)}_{\in \Lambda^l(E)}.$$

La relation entre le produit extérieur \wedge et le produit extérieur des vecteurs de \mathbb{R}^3 : soient $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ et $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$.

$$v_1 \times v_2 := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Penser à v_1, v_2 comme des éléments de $(\mathbb{R}^3)^*$, donc comme des éléments de $\Lambda^1((\mathbb{R}^3)^*)$.

Quels sont les coefficients de $v_1 \wedge v_2$ dans la base $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$?

$$\begin{aligned}v_1 \wedge v_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} v_1 \wedge v_2(e^{i_1}, e^{i_2}) \varepsilon_{i_1 i_2} = v_1 \wedge v_2(e^1, e^2) \varepsilon_{12} + v_1 \wedge v_2(e^2, e^3) \varepsilon_{23} + v_1 \wedge v_2(e^1, e^3) \varepsilon_{13} \\ &= [v_1(e^1) v_2(e^2) - v_1(e^2) v_2(e^1)] \varepsilon_{12} + [v_1(e^2) v_2(e^3) - v_2(e^2) v_1(e^3)] \varepsilon_{23} + [v_1(e^1) v_2(e^3) - v_2(e^1) v_1(e^3)] \varepsilon_{13} \\ &= (e^1(v_1) e^2(v_2) - e^2(v_1) e^1(v_2)) \varepsilon_{12} + (e^2(v_1) e^3(v_2) - e^2(v_2) e^3(v_1)) \varepsilon_{23} + (e^1(v_1) e^3(v_2) - e^1(v_2) e^3(v_1)) \varepsilon_{13} \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \varepsilon_{12} + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \varepsilon_{23} + (x_1 y_3 - x_3 y_1) \varepsilon_{13}.\end{aligned}$$

Donc si on choisit la base $\{\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}$, on obtient $\varepsilon_{31} = -\varepsilon_{13} = e_1 \wedge e_3$. On obtient les coordonnées dans la base ordonnée $(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12})$ de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ de $v_1 \wedge v_2 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ est donnée par $v_1 \times v_2$.

Définition 4.12 (Contraction d'un tenseur par vecteur). Soit $X \in E$. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(E)$, $1 \leq k \leq n$. $i_X(\alpha) \in \Omega^{k-1}(E)$ pour

$$i_X(\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha(X, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

On a $\Omega^0 \simeq \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \Omega^1(E) = E^*$, on a $i_X(\alpha) = \alpha(X) \in \mathbb{R}$. En particulier, i_X est défini sur $\Lambda^k(E)$ pour tout k .

Lemme. $X \in E, \alpha \in \Lambda^k(E)$, alors $i_X(\alpha) \in \Lambda^{k-1}(E)$.

Démonstration. Pour $v_i = v_j, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, donc

$$i_X(\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \alpha(X, v_1, \dots, v_{k-1}) = 0$$

□

Proposition 4.10. 1. $X \longrightarrow i_X$ est linéaire dans le sens que

(a) $i_{X+Y} = i_X + i_Y$,

(b) $i_{cX} = ci_X$.

2. Si on considère i_X restreint à $\Lambda^*(E)$, on a $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$ et $i_X \circ i_X = 0$.

3. Pour $i_{X|_{\Lambda^*(E)}}$, on a, pour $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$,

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta).$$

Remarque. Supposons que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, avec $\dim(F) = n-1, \dim(E) = n$, $X \notin F$ et ω est un élément de volume en E , alors $\omega \in \Lambda^n(E)$. Alors $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$ va être un élément de volume pour F .

$$I_F : F \longrightarrow E \text{ est une injection} \implies \Lambda^{n-1}(E) \xrightarrow{\Lambda^{n-1}(I_F)} \Lambda^{n-1}(F),$$

$$\Lambda^{n-1}(I_F)\alpha(v_1, \dots, v_{n-1}) = \alpha(v_1, \dots, v_{n-1}), v_i \in F.$$

Donc quand on dit que $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$, on est en train de considérer $i_X(\omega)|_{F^{n-1}}$ en réalité.

5 Analyse tensorielle sur les ouverts de \mathbb{R}^n

5.1 Motivation

18-10-2023

On veut faire une analyse (calcul différentiel) sur les surfaces, courbes, variétés (les objets courbes de dimensions supérieures).

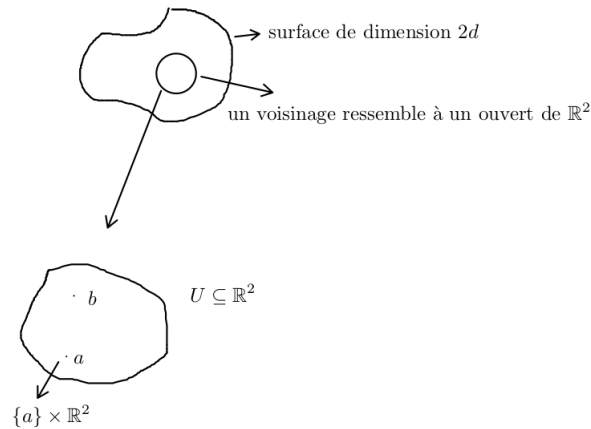


FIGURE 10 – Dans ce cas, \mathbb{R}^2 est tangent partout.

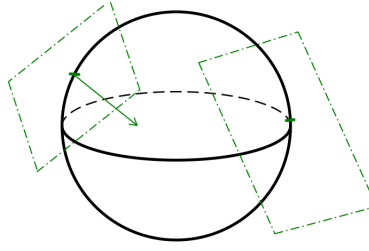


FIGURE 11 – Dans ce cas, chaque vecteur tangent est à l'intérieur et chaque plan tangent est différent.

Définition 5.1. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert. Pour tout $a \in U$, l'espace tangent

$$T_a U \stackrel{\text{déf}}{=} \{a\} \times \mathbb{R}^n,$$

et est muni d'un espace vectoriel de manière suivante :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \underbrace{(a, u)}_{\in T_a U} + (a, v) = (a, u + v),$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, r(a, u) = (a, ru).$$

$T_a U$ devient un espace vectoriel linéairement isomorphe à \mathbb{R}^n . Géométriquement on peut penser à $T_a U$ comme un vecteur de \mathbb{R}^n basé en un point a .

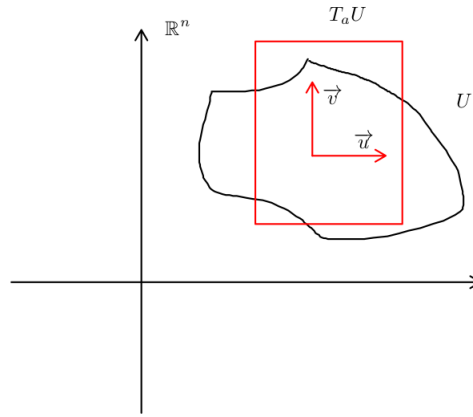


FIGURE 12 – Exemple d'un plan tangent à U .

5.2 Dérivation d'une fonction

Définition 5.2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in U$, $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. C'est une application linéaire. On va définir

$$d_a f = df(a) : T_a U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

avec

$$\underbrace{df((a, \vec{v}))}_{a \in U, \vec{v} \in \mathbb{R}^n} = Df(a)(\vec{v}).$$

Si $a \neq b$, $d_a f$ ne peut pas agir sur $T_a U$ (formellement, ce n'est pas défini).
On dit que $d_a f$ est la dérivée de f au point a .

Remarque (Personnelle). C'est la différentielle définie sur un espace tangent.

Remarque. Si $m = 1$, $d_a f \in \mathcal{L}(T_a U, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $d_a f \in (T_a U)^*$.

Remarque (Notation). $T_a^* U := (T_a U)^* \simeq \{a\} \times (\mathbb{R}^n)^*$.

Définition 5.3. Le fibré tangent sur U est

$$TU := \bigcup_{a \in U, \vec{v} \in \mathbb{R}^n} T_a U \simeq U \times \mathbb{R}^n$$

et le fibré cotangent est

$$T^* U := \bigcup_{a \in U, f \in (\mathbb{R}^n)^*} T_a^* U \simeq U \times (\mathbb{R}^n)^*.$$

Avec ce formalisme, la différentielle de $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par $df : U \rightarrow T^* U$ et $\forall a \in U, df(a) = d_a f \in T_a^* U \subseteq T^* U$.

Remarque. \triangleleft Une condition nécessaire pour qu'une application $\alpha : U \rightarrow T^* U$ soit une différentielle soit dans la forme $\alpha = df$ est que pour tout $a \in U, \alpha(a) \in T_a^* U$.

Si on définit $\pi : T_a^* \rightarrow U$ par $\pi(a, f) = a$, cette condition nécessaire est équivalente que de dire que $\pi \circ \alpha = \mathbb{1}_U$.

Exemple (De différentielle). Projection sur le composant j :

On a $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$x^j(a_1, \dots, a_n) = a_j.$$

$$d_a x^j(a, \vec{v}) = Dx^j(a)(\vec{v}) = \left[\frac{\partial x^j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x^j}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [0, \dots, 0, \underset{\text{en } j}{1}, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_j.$$

On a $dx^j : U \rightarrow T^* U$. Pour tout $a \in U, dx^j(a) \in T_a^* U$.

Donc $dx^j(a) = (a, f)$ où $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{v}) = v_j$. Pour $e_i \in \mathbb{R}^n, f(e_i) = \delta_i^j$, donc $f = e_j$, l'élément de la base duale. On a alors

$$dx^j(a) = (a, e_j).$$

Donc $(dx^1(a), \dots, dx^n(a))$ est une base naturelle pour $T_a^* U$. La base duale de cette base dans $T_a U \simeq (T_a^* U)^*$ est décrite par la notation suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(a) \right) = ((a, e_1), \dots, (a, e_n)).$$

$$\text{On a } \frac{\partial}{\partial x^j}(a) = (a, e_j), (dx^j(a)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta_i^j.$$

On suppose que $E = T_a U$. On peut construire $\Omega^k(T_a U), \Omega_l(T_a U) = \Omega_l(T_a^* U), \Omega_l^k(T_a U)$ qui sont des (l, k) -tenseurs sur $T_a U$.

On peut aussi définir $\Lambda^k(T_a U)$ (tenseurs extérieurs covariants), $\Lambda_l(T_a U) = \Lambda^l(T_a^* U)$ (tenseurs extérieurs contravariants), $\Lambda_l^k(T_a U)$.

Définition 5.4. On définit

$$(T_l^k)_a U = \Omega_l^k(T_a U)$$

et

$$(\Lambda_l^k)_a U \stackrel{\text{déf}}{=} (\Lambda_l^k)(T_a U).$$

Si $k = l = 0$, on ne va pas les écrire.

Définition 5.5. On peut alors définir les fibrés tensoriels et tensoriels extérieurs par :

$$T_l^k U := \bigcup_{a \in U} (T_l^k)_a U \text{ et } \Lambda_l^k := \bigcup_{a \in U} (\Lambda_l^k)_a U.$$

Très souvent on va avoir affaire aux fibrés où soit k soit l vaut 0. Par exemple,

$$\begin{aligned} \Lambda^k U &= \bigcup_{a \in U} \Lambda_a^k U = \bigcup_{a \in U} \Lambda^k(T_a U), \\ T^k U &= \bigcup_{a \in U} T_a^k U = \bigcup_{a \in U} \Omega^k(T_a U). \end{aligned}$$

Si $\alpha \in T_l^k U$, alors il existe $a \in U$ tel que $\alpha \in (T_l^k)_a U = \Omega_l^k(T_a U)$. Donc α est une application $(k + l)$ -linéaire sur $\underbrace{T_1 U \times \dots \times T_a U}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(T_a U)^* \times \dots \times (T_a U)^*}_{l \text{ fois}}$.

Mais une telle application peut être identifiée par une application $(k + l)$ -linéaire sur

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \times \dots \times (\mathbb{R}^n)^*}_{l \text{ fois}}$$

avec les isomorphismes $T_a U \simeq \mathbb{R}^n, T_a^* U \simeq (\mathbb{R}^n)^*$.

Donc $\Omega_l^k(T_a U) \simeq \{a\} \times \Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ et on a une projection bien définie sur la première composante

$$\tau_l^k : \Omega_l^k(T_a U) \longrightarrow U, \tau_l^k(a, \tilde{\alpha}) = a.$$

Donc si $\alpha \in T_l^k U$, on a $\tau_l^k(\alpha)$ est le point $a \in U$ pour lequel $\alpha \in (T_l^k)_a U$.

Définition 5.6. Un champ tensoriel sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une application

$$\alpha : U \longrightarrow T_l^k U$$

telle que

$$\tau_l^k \circ \alpha = \mathbb{1}_U, \text{ avec } \tau_l^k(\alpha(a)) = a.$$

α est aussi appelée parfois une section du fibré tensoriel $T_l^k U$.

Si α est un champ tensoriel, pour tout $a \in U$, $\alpha(a) \in \Omega_l^k(T_a U)$.

L'ensemble $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l})$ est une base de $\Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n$. Maintenant la base de $\Omega_l^k(T_a U)$ devient

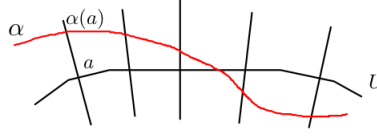


FIGURE 13 – Exemple d'un champ tensoriel

$$dx^{i_1}(a) \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}(a) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(a) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}(a).$$

Donc pour tout $a \in U$, il existe des coefficients $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(a) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha(a) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(a) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}(a).$$

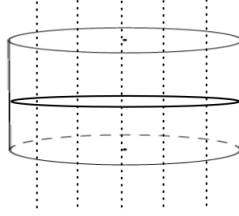


FIGURE 14 – Cylindre $S^1 \times \mathbb{R}^2$. On peut “couper” et considérer les cylindres $S^1 \times [-1, 1]$.

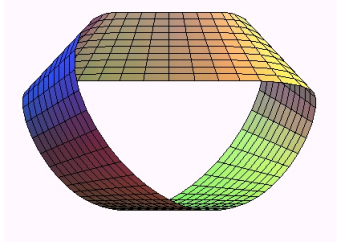


FIGURE 15 – Le Ruban de Möbius n'est pas équivalent à $S^1 \times [-1, 1]$

Donc

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

où $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application.

Définition 5.7. On dit que le champ vectoriel α est de classe \mathcal{C}^r si $\forall i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$, le coefficient

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \in \mathcal{C}^r(U).$$

Donc on peut parler de régularité de $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+n^{k+l}}$ directement, mais dans ce cas là, la définition revient à la même.

5.2.1 Exemple très important : la métrique riemannienne

Définition 5.8. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. Une métrique riemannienne sur U est un champ tensoriel 2-covariant (de type (0,2)) symétrique, positif-défini sur U .

Si g est une métrique riemannienne sur U , $g : U \rightarrow T^2U$.

Pour tout $x \in U$, $g(a) \in \Omega^2(T_aU)$, avec $\tau^2 \circ g = \mathbb{1}_U$.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in T_aU, g(a)(\vec{u}, \vec{v}) = g(a)(\vec{v}, \vec{u}) \text{ (symétrie)}.$$

Donc cela revient à dire que $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU (mais qui dépend de a).

La métrique riemannienne est donc un champ tensoriel de type (0,2) tel que $\forall a \in U$, $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU .

Donc

$$g = \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq n} g_{i_1 i_2} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Quelle est la condition sur les coefficients g_{ij} pour que g devienne une métrique riemannienne ?

Pour tout $x \in U$, on peut former la matrice

$$G_a = [g_{ij}(a)]_{n \times n}.$$

Proposition 5.1. $g(a)$ est une métrique riemannienne sur T_aU si et seulement si $g(a)$ est un produit scalaire.

Lemme. $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU si et seulement si G_a est une matrice symétrique définie positive.

Démonstration.

$$\begin{aligned} g(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij}(a) dx^i(a) \otimes dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij}(a) d^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a) \right) dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}(a) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij}(a) \delta_{i'}^i \delta_{j'}^j = g_{i'j'}(a). \end{aligned}$$

Donc $\forall i, j$,

$$g_{i'j'}(a) = g(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}(a)}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}(a)} \right) = g(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}(a)}, \frac{\partial}{\partial x^{i'}(a)} \right) = g_{j'i'}(a),$$

ce qui implique que ${}^t G_a = G_a$, donc G_a est symétrique. \square

Supposons que $g(a)$ est défini positif.

$$g(a)(\vec{v}) = \sum_{i,j} dx^i(a) \otimes dx^j(a)(\vec{v}, \vec{v}),$$

avec

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j} g_{i,j}(a) dx^i(a) \otimes dx^j(a) \left(\sum_{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \sum_{j'} v^{j'} \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right) \\
&= \sum_{i,j} \sum_{i',j'} g_{i,j}(a) v^{i'} v^{j'} dx^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a) dx^j(a) \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right) = \sum_{\substack{i,j \\ i'=i \\ j'=j}} g_{i,j}(a) v^i v^j \\
&= [v^1 \ \dots \ v^n][G_a] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \vec{v} \cdot G_a \vec{v}.
\end{aligned}$$

Donc $\vec{v} \cdot G_a \vec{v} \geq 0$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{v} \cdot G_a \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = 0$, ce qui implique que G_a est défini positif.

Le sens réciproque est démontré par les mêmes calculs.

Commentaires

1. Si $G \in \mathbb{R}^{n+n}$ est symétrique et défini positif, alors $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle_G := \vec{u} \cdot G \vec{v} = {}^t \vec{u} G \vec{v} = \langle \vec{u} \mid G \mid \vec{v} \rangle$$

est un produit scalaire.

2. Si $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , alors il existe une matrice G dans \mathbb{R}^{n+n} symétrique, définie positive telle que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_* = \langle \vec{u} \mid G \mid \vec{v} \rangle,$$

avec $G = [g_{ij}]_{i,j}$ et $g_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle_*$.

Donc pour la métrique riemannienne,

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

avec

$$g_{ij}(a) = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a), \frac{\partial}{\partial x^j}(a) \right).$$

Pour tout i , $\frac{\partial}{\partial x^i}(a) = (a, e_i) \in T_a U$ et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(a) \right)$$

est une base de $T_a U = \{a\} \times \mathbb{R}^n, a \in U$.

$g : U \longrightarrow T^2 U, \tau^2 \circ g(a) = a, \forall a \in U$ si et seulement si $\forall a \in U, g(a) \in T_a U$.

La métrique g est de classe \mathcal{C}^r si et seulement si $\forall i, j, g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^r (par définition).

Exemple (La métrique euclidienne).

$$g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$$

et

$$\forall a \in U, G_a = I_{n+n} \in \mathbb{R}^{n+n}.$$

Supposons $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ différentiable, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

On a, pour $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $(\gamma)'(t) = (x^1)'(t), \dots, (x^n)'(t)$,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (\gamma'(t) \cdot I_{n+n} \gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \langle \gamma'(t) | \gamma'(t) \rangle_{I_{n+n}}^{\frac{1}{2}} dt$$

On va définir, pour $\gamma : (a, b) \longrightarrow U$,

$$T\gamma : \underbrace{T_{(a,b)}}_{(t, \vec{v}), \vec{v} \in \mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{TU}_{(c, \vec{w}), c \in U, \vec{w} \in \mathbb{R}^n}.$$

$g(\gamma(t))$ est un produit scalaire sur $T_{\gamma(t)}U$ et

$$T\gamma(t, \vec{v}) = (\gamma(t), \vec{v} \gamma'(t)).$$

Choisissons $\{1\}$ comme base de \mathbb{R} . Alors

1.

$$T\gamma|_{T_t(a,b)} : T_{t(a,b)} \longrightarrow T_{\gamma(t)}U.$$

2. $T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), \gamma'(t))$, avec $(t, 1)$ élément de base pour $T_{t(a,b)}$.

On définit alors

$$L_g(\gamma) := \int_a^b g(\gamma(t))(T\gamma(t, 1), T\gamma(t, 1))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Si $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ et $G_c = [g_{ij}(c)]$, $\forall c \in U$, on obtient

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t) | G_{\gamma(t)} | \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Remarque. Si $c, d \in U, c \neq d, \forall \gamma : [a, b] \longrightarrow U$ tel que $\gamma(a) = c, \gamma(b) = d$ différentiable sur (a, b) , $L_g(\gamma) > 0$.

Exercice 7. Si $\gamma'(t) = 0$, alors $\gamma(t) \equiv \text{constant} \implies c = d$ impossible. Il existe $t_0 \in (a, b)$ tel que $\gamma'(t_0) \neq 0 \implies \langle \gamma'(t_0) | G_{\gamma(t_0)} | \gamma'(t_0) \rangle > 0$. Utiliser la continuité des acteurs pour conclure.

Définition 5.9 (Rappel : distance, espace métrique).

$$\forall x, y \in U, d_g(x, y) = \inf \{L_g(\gamma), \gamma : [a, b] \longrightarrow U, \gamma \text{ différentiable sur } [a, b], \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Théorème 5.1. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ connexe par arcs et g est une métrique riemannienne continue sur U , alors

$$d_g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une distance sur U et (U, d_g) devient un espace métrique.

Remarque (Point technique). Si U est connexe par arcs, $\forall x, y \in U, \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], U)$, avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, alors (analyse réelle, on utilise le fait que U est ouvert) il existe $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], U)$ avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Donc il existe un élément de $\{\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], U) \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$, avec $a = 0, b = 1$. Comme $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $|\gamma'(t)|$ est continue sur $[a, b]$ implique que il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [a, b], \|\gamma'(t)\| \leq M$ et $G_{\gamma(t)} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n}$ est aussi continue.

Cela implique que $t \longmapsto \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle$ est continue sur $[a, b]$, ce qui implique que il existe \tilde{M} tel que

$$\forall t \in [a, b], \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{M},$$

ce qui implique que

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle \leq \tilde{M}(b-a) < +\infty,$$

donc $d_g(x, y)$ ne peut être $+\infty$, $d_g(x, y) \in \mathbb{R}_+$. Donc $d_g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ est justifié.

Remarque.

1. Si U n'est pas connexe, il faut faire attention que le chemin droit de x à y peut sortir de U et n'est pas éligible pour évaluer $L_g(\gamma)$.
2. Même si U est connexe, il n'y a pas de raison que le chemin sur le segment droit joignant x à y est le chemin le plus court :

$$\gamma(t) = x + t(y - x), \gamma : [0, 1] \longrightarrow U.$$

Il peut arriver que

$$d_g(x, y) < L_g(\gamma) = \int_0^1 \langle y - x \mid G_{\gamma(t)} \mid y - x \rangle dt.$$

3. Pas toutes les métriques d des espaces métriques (X, d) où X est un ouvert de \mathbb{R}^n sont les distances d_g pour la métrique riemannienne. Par exemple, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ sinon ne peut pas dériver de la métrique riemannienne.
4. On peut remplacer les chemins γ par les chemins \mathcal{C}^1 par morceaux ou bien par les chemins polygonaux.

Définition 5.10. (U, g) où g est une métrique riemannienne et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un exemple d'une variété riemannienne.

Définition 5.11. Supposons que $(x, \vec{u}), (x, \vec{v}) \in T_x U$ pour $x \in U$. Alors l'angle entre ces deux vecteurs est défini par

$$\angle(x, \vec{u}), (x, \vec{v}) = \cos^{-1} \left(\frac{g(x)((x, \vec{u}), (x, \vec{v}))}{\|(x, \vec{u})\|_g \|(x, \vec{v})\|_g} \right).$$

Remarque (Rappel). Pour tout produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_*$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valide, c'est-à-dire :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, |\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle| \leq \langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle_*^{\frac{1}{2}} \langle \vec{v} \mid \vec{v} \rangle_*^{\frac{1}{2}}.$$

Donc pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in T_x U$, $|g(x)(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|_g \|\vec{v}\|_g$.

Avec la notation qu'on a eu sur la norme $\|\cdot\|_g$, on a, pour tout $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable,

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|T\gamma(t, 1)\|_g}_{(\gamma(t), \gamma'(t))} dt.$$

Exemple (Demi-plan de Poincaré (exemple de variété riemannienne) de dimension 2 et de géométrie non-euclidienne).

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

On définit une métrique riemannienne sur U par

$$g = \sum_{i=1}^2 g_{ii} dx^i \otimes dx^i, g_{ij}(x, y) = \delta_{ij} \frac{1}{y^2} G_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Définition 5.12. Si pour une métrique riemannienne g donnée sur U , il existe une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall a \in U, g(a) = h(a) I_{n \times n} = \begin{bmatrix} h(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h(a) \end{bmatrix}.$$

On dit que g est une métrique conforme.

Donc la métrique

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

est une métrique riemannienne.

La géométrie induite par g sur le demi-plan est la géométrie hyperbolique, connue aussi sous le nom de la géométrie de Lebachowski.

Théorème 5.2. Si g est une métrique conforme sur U et $\vec{u}, \vec{v} \in T_a U$ pour $a \in U$, alors

$$\angle_g \vec{u}, \vec{v} = \angle \vec{u}, \vec{v}$$

pour la métrique standard euclidienne.

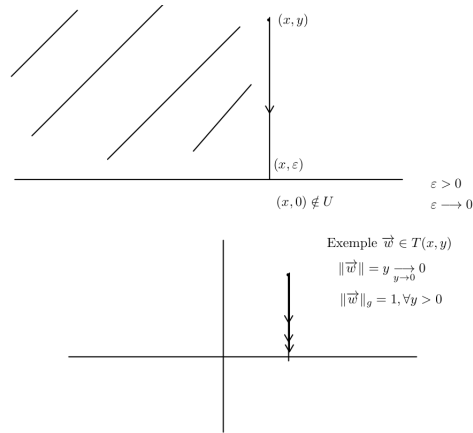


FIGURE 16 –

On a, pour le cas des figures 16 et 17, le calcul suivant, pour $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

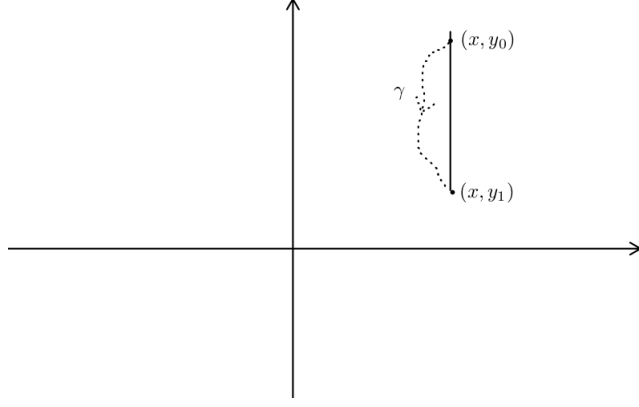


FIGURE 17 –

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \|\overbrace{y(t), \gamma'(t)}^{\in T_\gamma(t)}\|_g dt = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{y} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt.$$

On a $\eta(t) = (x, y_0) + t((x, y_1) - (x, y_0)) = (x, y_0 + t(y_1 - y_0))$ et $\eta'(t) = (0, y_1 - y_0)$, ce qui donne $\|\eta'(t)\| = |y_1 - y_0|$. Donc

$$L_g(y) = \int_0^1 \frac{\|\eta'(t)\|}{y_0 + t(y_1 - y_0)} dt = \int_0^1 \frac{|y_1 - y_0|}{y_0 + t(y_1 - y_0)} dt.$$

Notez que si l'on choisit $\tilde{\gamma}(t) = (x, y(t))$ en partant de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on a :

$$L_g(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \frac{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt = L_g(\gamma).$$

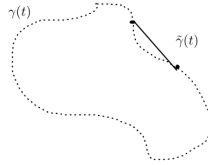


FIGURE 18 – Le chemin tout droit vertical est toujours le plus court

En conclusion, on a $L_g(\tilde{\gamma}) \leq L_g(\gamma)$, ce qui signifie que le chemin tout droit vertical est toujours le plus court par rapport à tous les chemis qui joignent (x, y_0) à (x, y_1) comme illustré dans la figure 18.

⚠ On n'a pas dit que η donne la paramétrisation du chemin le plus court entre (x, y_0) et (x, y_1) . C'est une question à discuter plus tard.

Si $\vec{w} \in T_{(x,y)}U$ pour $(x, y) \in U$ quelconque, avec $\vec{w} = (w_1, w_2)$, on a :

$$\|\vec{w}\|_g = (g(x, y)(\vec{w}, \vec{w}))^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{y^2} \|\vec{w}^2\| \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|\vec{w}\|}{y}.$$

Si $\gamma : [0, \infty) \rightarrow U$, avec $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\vec{w} = (0, -y) \in T_{(x,y)}U$, on cherche $\gamma(t)$ tel que

$$\gamma'(t) = (0, -\gamma_2(t)),$$

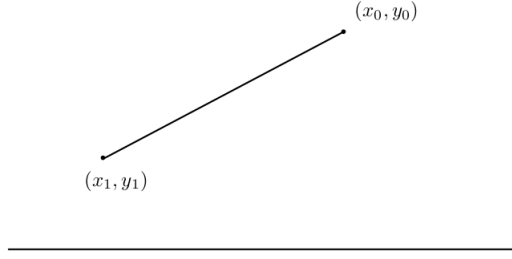


FIGURE 19 – La ligne droite n'est pas en général le chemin le plus court.

avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\gamma_1(t) = x(t)$, $\gamma_2(t) = y(t)$,

$$\begin{cases} x'(t) = 0, x(t) \equiv x_0 \\ y'(t) = 0, y(t) \equiv y_0, \end{cases}$$

alors $y(t) = y_0 e^{-t}$. Donc $\gamma(t) = (x_0, y_0 e^{-t})$ est le chemin partant de (x_0, y_0) d'une manière verticale vers l'horizon $y = 0$ avec la vitesse hyperbolique constante.

On voit bien que $\gamma(t) = (x_0, 0)$ donne $t = +\infty$.

Il y a aussi le disque de Poincaré (Escher hyperbolic disc).

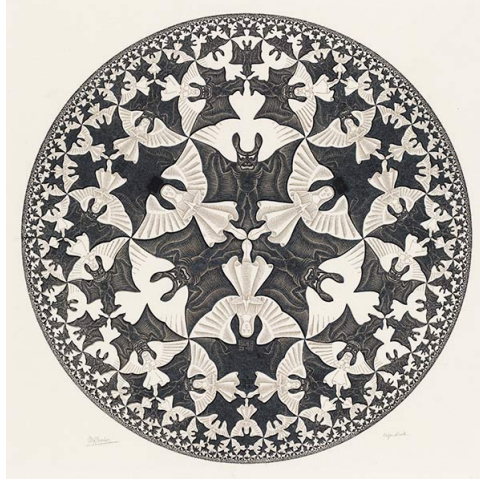


FIGURE 20 – Escher hyperbolic disc

Il faudra encore développer les techniques nécessaires pour pouvoir démontrer que les lignes droites par rapport à la métrique hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré sont effectivement des demi-cercles centrés sur la ligne $y = 0$. Ces lignes droites sont appelées les géodésies de (U, g) dans la géométrie différentielle.

Voici une première définition de la géodésie 21 (de manière rudimentaire plus géométrique que mécanique) :

Définition 5.13. On dit que $\gamma([a, b])$ est un segment géodésique dans (U, g) si pour $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$, $x, y \in U$,

$$d_g(x, y) = L_g(\gamma).$$

Une courbe $\mathcal{C} \subseteq U$ est une géodésie de (U, g) quand

$$C = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$$

où chaque \mathcal{C}_i est un segment géodésique tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, C_n \cap C_{n+1}$ est un singleton.

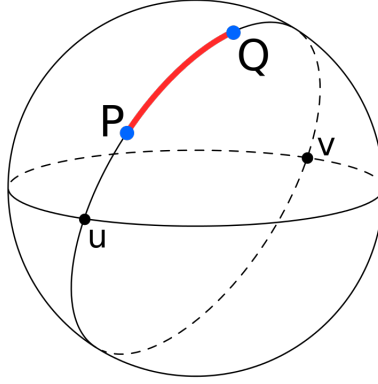


FIGURE 21 – Géodésie

Remarque (Rappel). Soit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . Soit $f \in E^*$, avec $\dim(E) = n$. Alors il existe un vecteur \vec{v}_f unique tel que

$$\forall \vec{w} \in E, f(\vec{w}) = \beta(\vec{v}_f, \vec{w}).$$

Exemple. Soit β donné par la matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive sur une base (e_1, \dots, e_n) de E . On a

$$f(\vec{w}) = f\left(\sum_i w_i e_i\right) = \sum_i w_i f(e_i),$$

avec $\vec{v}_f = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ((x_1, \dots, x_n) inconnues).

$$\beta(\vec{v}_f, \vec{w}) = \langle \vec{v}_f \mid B \mid \vec{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_j b_{ij} w_i,$$

$B = [b_{ij}]_{n \times n}$. On veut que $\forall (w_i)_{i=1}^n$,

$$\sum_i x_i f(e_i) = \sum_{i,j=1}^n x_j b_{ij} w_i$$

si et seulement si

$$\forall i, \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = f(e_i) \in \mathbb{R}.$$

$$[b_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

f étant donné, comme $\det(B) \neq 0$, il existe un unique $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait 13, et donc

$$\vec{v}_f = \sum_i x_i e_i$$

est la réponse unique.

Définition 5.14 (Rappel : gradient euclidien). Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ application linéaire de $(\mathbb{R}^n)^*$.

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, Df(a)(\vec{v}) = \langle Df(a), \vec{v} \rangle$$

avec la métrique euclidienne.

Soit (U, g) une métrique riemannienne, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application partout différentiable $df : U \longrightarrow T^*U$,

$$\forall a \in U, d_a f \in T_a^*U = (T_a U)^*,$$

où $g(a)$ est un produit scalaire sur $T_a U$. On prend $E = T_a U, d_a f \in E^*, \beta = g(a)$.

Donc il y a un vecteur unique $\nabla_g f(a) \in T_a U$ tel que

$$\forall \vec{w} \in T_a U, d_a f(\vec{w}) = g(a)(\nabla_g f(a), \vec{w}).$$

Si $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $\nabla_g f(a) \in T_a U$, on a déjà vu que pour la métrique euclidienne $g = eu$,

$$\nabla_{eu} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On peut aussi écrire

$$\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n (?)_i \frac{\partial}{\partial x^i}(a).$$

Si $\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x^i}(a)$, on écrit

$$\nabla_g f(a) = |\nabla_g f(a)\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = ?$$

Pour tout i , on a $d_a f \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a) \right) = g(a)(\nabla_g f(a), \frac{\partial}{\partial x^i}(a))$. Cela implique que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, G_a = [g_{ij}], g(a) \left(\nabla_g f(a), \frac{\partial}{\partial x^i}(a) \right) = \langle e_i | G_a | \nabla_g f(a) \rangle \partial_i f(a)$$

si et seulement si

$$G_a | \nabla_g f(a) \rangle = \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = |\nabla_g f(a)\rangle = G_a^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix}.$$

Donc $\langle \nabla_g f(a) \rangle = G_a^{-1} \langle \nabla f(a) \rangle$.

$G^{-1}(a)$ est souvent représentée par une matrice $g^{ij}(a)$. On a

$$\left(\sum_{k=1}^n g_{ik}(a) g^{kj}(a) = \delta_i^j \right), \sum_{k=1}^n g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

et

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [g^{ij}(a)] \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix},$$

$$\text{donc } \forall i, \sum_{j=1}^n g^{ij}(a) \partial_j f(a).$$

Remarque. $\underbrace{d_a}_{\in T_a^* U} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \underbrace{dx^i(a)}_{(a, e^{ij})}$ (si $\alpha = \sum a_i e^i$, $a_i = \alpha(e_i)$ et $d_a f(e_i) = \partial_i f(a)$).

Donc $d_a f \in (T_a U)^* = \Omega^1(T_a U)$, c'est un tenseur covariant d'ordre 1.

Les coefficients sont indexés en base $\partial_i f(a)$. La base indexée en haut est $dx^i(a)$. On remarque que $\nabla_g f(a) \in T_a U = \Omega_1(T_a U)$, c'est donc un tenseur contravariant d'ordre 1. Donc

$$\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i}(a).$$

On a pour tout i ,

$$c^i = \sum_{j=1}^n g^{ij}(a) \partial_j f(a).$$

On écrit

$$\nabla_g f(a) \underset{\text{dans } \Omega_1(T_a U)}{=} g_{\sharp} \left(\underset{\text{dans } \Omega^1(T_a U)}{T_a U} \right).$$

Plus généralement, si $\alpha : U \rightarrow T_l^k U$ est un champ tensoriel, i. e.

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_l}} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

et g est une métrique riemannienne pour $k \geq 1$, on peut créer un champ tensoriel dans T_{l+1}^{k-1} de trace g que l'on notera $g_{\sharp} \alpha : U \rightarrow T_{l+1}^{k-1} U$ et il vaudra :

$$g_{\sharp} \alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \dots i_{k-1} \leq n \\ 1 \leq j_1 \dots j_{l+1} \leq n}} b_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{l+1}} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_{k-1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_{l+1}}}.$$

Pour tous les choix, on a $b_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{l+1}} = g^{j_{l+1} i} a_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_l} i$.

Exemple (Tenseurs de courbure de Riemann). Parfois il est écrit comme R_{jkl}^i de type (1,3) ou comme R_{ijkl} de type (0,4).

$$\text{En fait } R_{jkl}^i = \sum_{s=1}^n g^{is} R_{sjkl}; R_{ijkl} = \sum_{s=1}^n g_{is} R_{sjkl}^s.$$

$df(a) \in T_a^* U$ ne dépend pas de g et $\nabla_g f(a) \in T_a U$. Alors

$$G_a | \nabla_g f(a) \rangle = | \nabla f(a) \rangle ; \quad \underbrace{\partial_i f(a)}_{\text{les coefs de } df(a)} = \sum_{s=1}^n g_{is} C^s,$$

$$\text{où } \nabla_g f(a) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

5.3 Champ de vecteurs

19-10-2023

Définition 5.15. Un champ de vecteurs est une application $X : U \longrightarrow TU$ telle que

$$\forall a \in U, \tau_1 \circ X(a) = a \quad (\tau_1 \circ X = id),$$

c'est-à-dire X est un champ de tenseur 1-contravariant sur U . En équivalence, X est une section de fibré tangent TU .

X est un champ de tenseurs de type $(1,0)$ et

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On a $\forall a \in U$,

$$X(a) = \sum_{i=1}^n X^i(a) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{(a, e_i)}.$$

Pour tout i , $X : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et on a $X \in C^*$ si et seulement si pour tout i , $X^i \in C^*$.

Exemple. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, par exemple $I = (a, b)$. Soit $\gamma : I \longrightarrow U$ une application continue, différentiable $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$. On a pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = ((\gamma^1)'(t), \dots, (\gamma^n)'(t)).$$

On introduit $T\gamma : TI \longrightarrow TU$ et on a $T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), \gamma'(t)) \in T_{\gamma(t)}U$.

Si X est un champ de vecteurs, $X : U \longrightarrow TU$.

Définition 5.16. On dit que $\gamma : I \longrightarrow U$ est une courbe intégrale par le champ de vecteurs $X : U \longrightarrow TU$ si $\forall t \in I$, $T\gamma(t, 1) = X(\gamma(t))$.

Remarque. Soit $X : U \longrightarrow TU$ un champ de vecteurs, alors $X(a) \in T_a U = \{a\} \times \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $a \in U$, on a $X(a) = (a, \vec{F}(a))$ où $\vec{F}(a) \in \mathbb{R}^n$, donc $X(\gamma(t)) = (\gamma(t), \vec{F}(\gamma(t)))$ par $\vec{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Alors on a pour tout $t \in I$, $(\gamma(t), \gamma'(t)) = (\gamma(t), \vec{F}(\gamma(t)))$ si et seulement si $\forall t \in I$, $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.

Remarque. $T\gamma(t, 1) = \sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(0))$. Pour $X : U \longrightarrow TU$ champ vectoriel, on a

$$X(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n (X^i)(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial X^i}(\gamma(t)).$$

Ecrire cela est équivalent à :

$$\forall t \in I, (\gamma^i)'(t) = X^i(\gamma(t))$$

avec $(\vec{F} = (X^1, \dots, X^n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$.

On voit bien qu'il s'agit d'une équation à dérivées ordinaires autonomes (i. e. F ne dépend que de $a \in U$ et pas de t directement) (EDO). On peut aussi appeler cela système de EDO.

$$\begin{cases} (\gamma^1)' = X^1(\gamma) \\ \vdots \\ (\gamma^n)' = X^n(\gamma) \end{cases} \quad \text{dans } I \iff \gamma' = \vec{F} \circ \gamma.$$

Remarque. En raison des observations précédentes, une courbe intégrale γ pour le champ de vecteurs X est aussi appelée une solution (pour les EDO).

Théorème 5.3 (Fondamental de l'existence et de l'unicité des solutions pour les EDO). *Soient $X : U \longrightarrow TU$ un champ de vecteurs de régularité \mathcal{C}^1 , $a_0 \in U, t_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Alors il existe un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma : I \longrightarrow U$ tel que $\gamma(t_0) = a_0$ et γ est une courbe intégrale pour X .*
2. *Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $t_0 \in J$ et $\lambda : J \longrightarrow U$ est une courbe intégrale pour X telle que $\lambda(t_0) = a_0$, alors $\gamma = \lambda$ sur $I \cap J$.*

Remarque. Si $X(a_0) = 0 \in T_{a_0}U$, alors on peut observer que $I = \mathbb{R}$ et $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow U$. Pour tout $t, \gamma(t) = a_0$ est une solution (donc la solution unique maximale).

Si $\gamma(t) \equiv a_0$, alors $\gamma'(t) = 0 = F(\gamma(t)), \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque. Supposons que $\gamma : I \longrightarrow U$ est une solution pour $\gamma(t_0) = a$ et $\lambda : J \longrightarrow U$ est une solution pour $\lambda(t_1) = a_0$. Pour $t_0 \in I, t_1 \in J$ et $t_0 \neq t_1$, on définit

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) &= \lambda(t + t_1 - t_0) \text{ et} \\ \tilde{J} &= \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_1 - t_0 \in J\}. \end{aligned}$$

On voit bien que $t_0 \in \tilde{J}$. De plus,

$$\tilde{\lambda} = \lambda'(\underbrace{t + t_1 - t_0}_{t \in \tilde{J}}) = \vec{F}(\lambda(t + t_1 - t_0)) = \vec{F}(\tilde{\lambda}(t)), \forall t \in \tilde{J}.$$

On a $\tilde{\lambda}(t_0) = \lambda(t_0 + t_1 - t_0) = \lambda(t_1) = a_0$. Par unicité, on a alors $\tilde{\lambda} = \gamma$ sur $I \cap \tilde{J}$. En particulier, $a_0 \in \tilde{\lambda}(I \cap \tilde{J}) = \gamma(I \cap \tilde{J})$. Donc il y a un sous-intervalle de J défini comme ceci :

$$\bar{J} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_a - t_1 \in I \cap \tilde{J}\}$$

pour lequel $\lambda(\bar{J}) = \gamma(I \cap \tilde{J})$.

$\triangleleft t_1 \in J$.

Donc quand on regarde l'ensemble de toutes les courbes intégrales, ce n'est pas possible d'observer les figures suivantes (si $X \in \mathcal{C}^1$).

Pour toute courbe intégrale, on peut faire un changement de variable $\tilde{t} = t + t_0, \bar{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$ pour lequel on obtient $\bar{\gamma}(0) = a_0$ (en principe on peut, sans perdre en généralité, supposer que $t_0 = 0$ pour les systèmes autonomes d'EDO).

Définition 5.17. Soit $\Phi : \tilde{U} \longrightarrow U$ telle que $\forall (t, x) \in \tilde{U}, t \in I_x$ et $\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$ (γ_x est solution maximale sur I_x telle que $\gamma_x(0) = x$).

Théorème 5.4. \tilde{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n . Si X est de classe \mathcal{C}^n , alors Φ est de classe \mathcal{C}^r .
 Φ est appelée le **flux** de X .

25-10-2023

Exemple. On définit $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $X(x = (x_1, x_2)) = (x, x^\perp) \in T_x \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et $\gamma_x(t) = e^{At}x, I_x = (-\infty, \infty)$. On a

$$\gamma_x(t) = (\cos(t)x_1 - \sin(t)x_2, \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

On calcule $\gamma'_x(t) = (-\sin(t)x_1 - \cos(t)x_2, \cos(t)x_1 - \sin(t)x_2) = (\gamma_x(t))^\perp$. C'est une rotation d'angle t de point x autour du point 0.

Remarque. Si $x = 0$, alors $\gamma_0 = 0$.

Exemple. $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T\mathbb{R}^2, X(x) = (x, -x) \in T_x \mathbb{R}^2$.

On a

$$-x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

$\gamma_x(t) = e^{-t}x, I_x = (-\infty, \infty)$ et $\gamma'_x(t) = -e^{-t}x = -\gamma_x(t)$ et $\gamma_x(0) = x$.

On a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}x = 0 \in \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{-t \rightarrow -\infty} \|e^{-t}x\| = +\infty.$$

Remarque (Sur la taille de I_x). On définit

$$K(x) = \max_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \left\| \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(x) \right\|$$

et

$$b = \sup\{r > 0, B(x, r) \subset U\}.$$

Alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de U (mais dépendant de ces deux paramètres) tel que

$$|I_x| \geq C \left(\frac{b}{\|X(w)\|}, K(x) \right).$$

$|I_x|$ est plus large quand $\frac{b}{\|X(x)\|}$ est plus large et $K(x)$ est plus petit.

On sait que $b(x)$, $\|X(x)\|$ et $K(x)$ sont continues en x , alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } \|y - x\| < \delta, \text{ alors } |I_y| \geq |I_x| - \varepsilon.$$

Comme $|I_x| > 0$, on peut prendre $\varepsilon = \frac{|I_x|}{2}$, on obtient $\delta > 0$ tel que

$$\|y - x\| < \delta \implies |I_y| \geq |I_x| - \frac{|I_x|}{2} = \frac{|I_x|}{2}, \quad (14)$$

ce qui implique que

$$\forall (t, x) \in \tilde{U}, (t, x) \in \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta, s \in I_y\} \subseteq \tilde{U}.$$

Indication : l'argument sur la taille de l'intervalle d'existence devrait être transporté et basé sur $t_0 = t$. Il faudra appliquer 14 autour de $t_0 = t$ et non à 0.

Définition 5.18. Le flux $\Phi : \tilde{U} \longrightarrow U$ associé à X est tel que

$$\forall (t, x) \in \tilde{U}, \phi(t, x) := \gamma_x(t).$$

On écrit aussi $\Phi_t(x)$.

Remarque. $X \in \mathcal{C}^r \implies \phi \in \mathcal{C}^r$ (il est évident que γ_x dépend régulièrement en t , $(\gamma_x^i)'(t) = X^i(\gamma_x(t))$, mais ici on réclame aussi la dépendance régulière de γ_x en x).

Pour t fixé, $\Phi_t(x)$ est défini pour $U_t = \{x \in U \mid t \in I_x\}$ qui est un sous-ensemble ouvert de U . Donc $\Phi_t : U_t \longrightarrow U$ est une application $X \in \mathcal{C}^r \implies \phi_t \in \mathcal{C}^r$.

On a $\Phi_0(x) = x$ et $\Phi_0 = \text{id}_U$.

Remarque. Si $\Phi_t(x)$ et $\Phi_s(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{s+t}(x)$ sont définis, alors

$$\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x)).$$

Démonstration. On va définir pour t fixé $\eta(s) := \Phi_s(\Phi_t(x))$. On a $\Gamma(s) = \Phi_{s+t}(x)$. On a

$$\eta(0) = \Phi_0(\Phi_t(x)) = \Phi_t(x) = y, \Gamma(0) = \Phi_{0+t}(x) = \Phi_t(x) = y.$$

De plus, si $\eta(s) = \gamma_{\Phi_t(x)}(s)$, alors

$$\eta'(s) = \gamma_{\Phi_t(x)}'(s) = \sum_{i=1}^n X^i(\gamma_{\Phi_t(x)}(s)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_{\Phi_t(x)}(s)).$$

Aussi $\Gamma(s) = \gamma_x(s+t)$ et

$$\begin{aligned} \Gamma'(s) &= \frac{d}{ds} \gamma_x(s+t) = \gamma'_x(s+t) \underbrace{\frac{d}{ds}(s+t)}_{\equiv 1} = \gamma'_x(s+t) = \sum_{i=1}^n X^i(\gamma_x(s+t)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_x(s+t)) \\ &= \sum_{i=1}^n X^i(\Gamma(s)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma(s)). \end{aligned}$$

Donc η et γ tous les deux sont une solution (courbe intégrale) de x avec $\eta(0) = \Gamma(0) = y$, donc ils devraient être égaux par unicité.

Pour tout s , on a $\eta(s) = \Gamma(s)$, ce qui implique que $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$. □

Remarque. Une observation plus fine démontre que si deux d'entre les trois acteurs $\Phi_t(x)$, $\Phi_s(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{t+s}(x)$ est défini, alors le troisième aussi est défini et on a $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$.

En particulier, si $\Phi_t(x)$ est défini (pour $t \in I_x$), alors on a $\Phi_{-t}(\Phi_t(x))$ est aussi défini et on a :

$$x = \Phi_{-t}(\Phi_t(x)).$$

Noter qu'on a pris $s = -t$ et $\Phi_0(x) = x$ est toujours défini.

Donc $\Phi_t(U_t) = U_{-t}$ et $\Phi_t : U_t \rightarrow U_{-t}$ est un difféomorphisme de régularité \mathcal{C}^r si $X \in \mathcal{C}^r$.

Proposition 5.2. Soit X un champ de vecteurs \mathcal{C}^1 sur U , $K \subset U$ compact. On fixe $T \in \mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $t \in I_x$ tel que $t \geq T$, on a $\Phi_t(x) \in K$, alors $\omega_x = +\infty$ (donc $I_x = (\omega_x, +\infty)$).
(De même si $\forall t \leq T$, $\Phi_t(x) \in K$, alors $I_x = (-\infty, \omega_x)$).

Démonstration. Pour tout $x \in U$, $\Phi_t(x) = \gamma_x(t)$ est défini pour un temps t qui dépend de $C \left(\frac{b(x)}{\|X(x)\|}, K(x) \right)$ continue en x et positive. Donc il existe $c > 0$ dépendant de K tel que $\forall x \in K$ $C \left(\frac{b(x)}{\|X(x)\|}, K(x) \right) \geq c > 0$. (le minimum de f sur K est atteint pour f continue et K compact).

Pour tout $x \in K$, $\Phi_t(x)$ est défini pour $t \in [0, \frac{c}{2}] \subset I_x$. On raisonne par contradiction. Supposons que $\forall t \geq T$, $\Phi_t(x) \in K$ et $\omega_x < +\infty$, il existe $t_k \rightarrow \omega_x \in \mathbb{R}$, $I_x = (\alpha_x, \omega_x)$ avec (t_k) une suite bornée.

$\{\Phi_{t_k}(x)\} \subseteq K$, il existe une sous suite $\Phi_{t_{k_j}}(x)$ qui converge dans K par la compacité. Alors $\Phi_{t_{k_j}}(x) \rightarrow y \in K$, $t_{k_j} \rightarrow \omega_x$.

On va prendre j assez grand tel que $0 < \omega_x - t_{k_j} < \frac{c}{2}$.

Pour $\Phi_{t_{k_j}}(x) \in K$, $\Phi_{\omega_x - t_{k_j}}(\Phi_{t_{k_j}}(x))$ est défini.

$\Phi_{t_{k_j}}(x)$ est défini. Alors

$$\Phi_{s+t}(x) = \Phi_{\omega_x - t_{k_j} + t_{k_j}}(x) = \Phi_{\omega_x}(x)$$

est défini. Comme $t_{k_j} \rightarrow \omega_x$, alors $\Phi_{t_{k_j}}(x) \rightarrow \Phi_{\omega_x}(x)$. Or comme on savait que $\Phi_{t_{k_j}}(x) \rightarrow y$, on a alors $y = \Phi_{\omega_x}(x)$.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que Φ_ε est défini et $\Phi_\varepsilon(y) = \Phi_\varepsilon(\Phi_{\omega_x}(x))$ est défini. Donc $\Phi_{\omega_x + \varepsilon}(x)$ est défini, donc $\omega_x + \varepsilon \in I_x = (-\infty, \omega_x)$ ce qui est contradictoire! \square

5.4 L'application tangente

On suppose $f : U \rightarrow V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$. On suppose que f est différentiable en $a \in U$. On a $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On a $df(a) : T_a U \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $df(a)(a, \vec{v}) = Df(a)(\vec{v})$ avec $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $(a, \vec{v}) \in T_a U$.

Définition 5.19. L'application tangente $Tf : TU \rightarrow TV$ est définie par :

$$\forall (a, \vec{v}) \in T_a U \subset TU, Tf(a, \vec{v}) = (f(a), Df(a)(\vec{v})) \in T_{f(a)} V \subseteq TV.$$

$Tf|_{T_a U} : T_a U \rightarrow T_{f(a)} U$ est linéaire.

Définition 5.20. On définit $T_a f := Tf|_{T_a U}$, avec

$$T_a f(a, \vec{v}) = (f(a), Df(a)(\vec{v})).$$

Lorsque $m = 1$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $d_a f : T_a U \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire, donc $d_a f \in (T_a U)^*$, donc $df : U \rightarrow T^*U$. C'est un champ covariant.

Maintenant on suppose que $Tf : TU \rightarrow T\mathbb{R}$ et $T_a f : \underbrace{T_a U}_{\{a\} \times \mathbb{R}} \rightarrow \{f(a)\} \times \mathbb{R}$ linéaire. On ne peut plus dire que c'est une application de l'espace dual, mais elle admet quand même des propriétés intéressantes.

Exemple. Soit $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une inclusion (injection canonique) avec $i(x) = x$. On prend $Ti : TU \rightarrow T\mathbb{R}^n$, on a $Ti(x, \vec{v}) = (x, \vec{v})$, car $Di(x)(\vec{v}) = \vec{v}$. Donc Ti est l'inclusion de TU dans $T\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.3. Si $f : U \rightarrow V$ est différentiable en $x \in U$ et $g : V \rightarrow W$ est différentiable en $f(x)$ et $W \subseteq \mathbb{R}^p$. Alors $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

Vérification. $Tf : TU \rightarrow TV, \forall (x, \vec{v}) \in T_x U \subseteq TU$, avec

$$Tf(x, \vec{v}) = (f(x), Df(x)(\vec{v})).$$

On a de plus $Tg : TV \rightarrow TW, \forall (y, \vec{w}) \in T_y V \subseteq TV$, avec

$$Tg(y, \vec{w}) = (g(y), Dg(y)(\vec{w})).$$

Alors

$$\begin{aligned} Tg \circ Tf(x, \vec{v}) &= Tg(f(x), Df(x)(\vec{v})) = (g(f(x)), (Dg(f(x)))(Df(x)(\vec{v}))) \\ &= ((g \circ f)(x), (Dg(f(x)) \circ Df(x))(\vec{v})) = T(g \circ f)(x, \vec{v}). \end{aligned}$$

□

Exemple (Un cas particulier). $U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et on a $f \circ h : U \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $d(f \circ h) : U \rightarrow T^*U$. On a donc $Th : TU \rightarrow TV$, $df : TV \rightarrow T\mathbb{R}$ et $d(f \circ h) : TU \rightarrow T\mathbb{R}$.

Démonstration. En effet $Tf = (f, Df)$, $Th = (h, Dh)$ et d'une part $T(f \circ h) = (f \circ h, D(f \circ h))$ et d'autre part $Tf \circ Th = (f \circ h, D(f \circ h))$.

$$Th(x, \vec{v}) = (h(x), Dh(x)(\vec{v})), T(f \circ h)(x, \vec{v}) = (f \circ h(x), D(f \circ h)(x)(\vec{v})) \text{ et}$$

$$Tf \circ Th(x, \vec{v}) = (f \circ h(x), Df(h(x))(Dh(x)(\vec{v}))).$$

En fait $df(h(x))(h(x), Dh(x)(\vec{v}))$ c'est $d(f \circ h)(\vec{x})(\vec{x}, \vec{v})$ évalué à $(x, \vec{v}) \in TU$. □

Rappel Si $T : E \rightarrow F$ linéaire, on rappelle que l'on peut définir $\Omega^k(T), \Omega_k(T), \dots$. Pour les applications tangentes, on peut aussi définir pour tout k :

$$\Omega^k(T_x f) : \Omega^k(T_{f(x)} V) \rightarrow \Omega^k(T_x U), \dots$$

et tous les autres espaces de tenseurs covariants, contravariants,...

Rappel On a dit que

$$\bigcup_{x \in U} (\Omega^k(T_x U)) = T^k U.$$

Définition 5.21. On définit $\Omega^k f : T^k V \longrightarrow T^k U$ une fonction, définie seulement pour tout élément $\alpha \in T^k V$ tel que $\tau^k(\alpha) \in f(U)$ (la projection sur la k -ième coordonnée).

On a $\Omega^k(\alpha) = \Omega^k(T_x f)(\alpha)$ lorsque $\alpha \in \Omega^k(T_{f(x)} V)$.

Pour $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in T_x U$, on a

$$\Omega^k f(\alpha)(\overbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k}^{\in (T_x U)^k, k \text{ fois}}) = \alpha(T_x f(\vec{v}_1), \dots, T_x f(\vec{v}_k)).$$

Définition 5.22. On dit que $\Omega^k f(\alpha) \in \Omega^k(T_x f) \subseteq T^k U$, pour $\alpha \in \Omega^k(T_{f(x)} V) \subseteq T^k V$ est le “pull-back” (le retiré) de α sous l’action de l’application tangente $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$.

Par contre, pour tout $\alpha \in \Omega_l(T_x U)$ et $f : U \longrightarrow V$ différentiable en $x \in U$, on définit $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$, et on a alors

$$\Omega_l f \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_l(T_x f) : T_l U \longrightarrow T_l V$$

et on a $\Omega_l f(\alpha) \in \Omega_l(T_{f(x)} V) \subseteq T_l V$. α étant un élément de $\Omega_l(T_x U)$, il est une application l -linéaire sur $(T_x U)^*$ (contravariant). On cherche une application l -linéaire sur $(T_{f(x)} V)^*$.

Prenons donc un l -covecteur $h_1, \dots, h_l \in T(T_{f(x)} V)^* = \mathcal{L}(T_{f(x)} V, \mathbb{R})$. On doit définir

$$\Omega_l f(\alpha)(h_1, \dots, h_l) = \alpha(h_1 \circ T_x f, h_2 \circ T_x f, \dots, h_l \circ T_x f).$$

Notez que si $h_i \in (T_{f(x)} V)^*$, $h_i : T_{f(x)} V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$, alors on obtient que $h_i \circ T_x f : T_x U \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire, donc $h_i \circ T_x f \in (T_x U)^*$.

On peut aussi interpréter $\Omega_l f(\alpha)$ de la manière suivante : si $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$ est donné, on a $(T_x f)^* : (T_{f(x)} V)^* \longrightarrow (T_x U)^*$ et

$$\Omega_l f(\alpha)(\underbrace{h_1, \dots, h_l}_{\in (T_{f(x)} V)^* \times \dots \times (T_{f(x)} V)^*}) = \alpha((T_x f)^*(h_1), \dots, (T_x f)^*(h_l)).$$

Définition 5.23. Si $\alpha \in \Omega_l(T_x U) \subseteq T_l U$, on dit que $\Omega_l f(a)$ est le “push-forward”(le poussé) de α sous l’action de $T_x f$.

Chaque vecteur $\vec{v} \in T_x U$ est un objet contravariant et il agit sur $(T_x U)^*$ par bidualité, i. e. $T_x U \simeq (T_x U)^{**}$.

Ici, $l = 1$, $\vec{v} \in T_x U$. Question : qu’est-ce $\Omega_1 f(\vec{v})$?

Démonstration. Prenons $h \in (T_{f(x)} V)^*$,

$$\Omega_1 f(\vec{v})(h) = \vec{v}(\Omega_1(T_x f)(h)) = \vec{v}((T_x f)^*(h)) = \vec{v}(h \circ T_x f) = (h \circ T_x f)(\vec{v}).$$

□

Donc on a vu que pour tout $h \in (T_{f(x)}V)^*$, $\underbrace{\Omega_1 f(\vec{v})}_{\in T_{f(x)}V}(\underbrace{h}_{\in (T_{f(x)}V)^*}) = h(T_x f(\vec{v}))$.

On a donc $\forall h \in (T_{f(x)}V)^*$, $h(\Omega_1 f(\vec{v})) = h(T_x f(\vec{v}))$. Cela implique que $\Omega_1 f(\vec{v}) = T_x f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in T_x U$.

Exercice 8.

Définition 5.24. Si $\alpha \in \Lambda^k(T_{f(x)}V)$, alors

$$\Lambda^k f(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega^k f(\alpha) \in \Lambda^k(T_x U)$$

si $(\alpha \text{ est extérieur})$.

Si $\alpha \in \Lambda_l(T_x U)$,

$$\Lambda_l f(\alpha) = \Omega_l f(\alpha) \in \Lambda_l(T_{f(x)}V).$$

Définition 5.25. Soit $F : U \longrightarrow V$ différentiable et $\alpha : V \longrightarrow T^k V$ un champ de tenseurs de type $(0, k)$ (une section de fibré tensoriel k -covariant), i. e. $\forall y \in V, \alpha(y) \in T_y^k V = \Omega^k(T_y V)$.

Le pull-back de α sur U , désigné par $f^* \alpha$ est un champ de tenseurs de type $(0, k)$ sur U , donc $f^* \alpha : U \longrightarrow T^k U$.

On a

$$\underbrace{f^* \alpha(x)}_{\in \Omega^k(T_x U)} = \Omega^k f(\underbrace{\alpha(f(x))}_{\in \Omega^k(T_{f(x)}V)}).$$

Définition 5.26. Si β est un champ de tenseurs l -contravariant (de type $(0, l)$) sur U avec $\beta : U \longrightarrow T_l U, \forall x \in U, \beta(x) \in \Omega_l(T_x U)$.

On définit, pour f **injectif**, le “push-forward” de β désigné par $f_{\#} \beta$. $f_{\#} \beta$ est un champ de tenseur de type $(l, 0)$ sur $f(U) \subseteq V$ tel que

$$\forall y = f(x) \in f(U), f_{\#} \beta(y) \in \Omega_l(T_y V).$$

On suppose maintenant que $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^n$ et $h : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ .

Si X est un champ de vecteurs sur U , alors $h_{\#} X$ est un champ de vecteurs sur $h(U)$ et comme h est injective, on aura $V = h(U)$. On aura

$$h_{\#} X(h(x)) = T_x h(X(x)).$$

Si $h \in \mathcal{C}^r, X \in \mathcal{C}^s$, on aura $h_{\#} X \in \mathcal{C}^{\min(r-1, s)}$.

Notez que $h_{\#} X(y) = Th(X(h^{-1}(y))) = (y, Dh(h^{-1}y)(X(h^{-1}(y))))$.

On a

$$h_{\#} X = Th \circ X \circ h^{-1}.$$

Avec les hypothèses $h : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ , si $X \in \mathcal{C}^1$ est un champ de vecteurs sur U avec le flux Φ , alors $h_{\#} X$ est un champ de vecteurs sur V de régularité \mathcal{C}^1 .

Dans ce cas-là, si ψ est le flux de $h_{\#} X$, on a

$$\psi_t = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}.$$

Si $\Phi_t : \underbrace{U_t}_{\subseteq U} \longrightarrow \Phi_t(U_t)$ et $\psi : \underbrace{V_t}_{\subseteq V} \longrightarrow \psi_t(V_t)$, les deux sont des difféomorphismes de régularité \mathcal{C}^1 .

On aura :

$$\begin{aligned} h^{-1}(V_t) &= U_t \quad (h(U_t) = V_t) \\ h(\Phi_t(U_t)) &= \psi_t(V_t) \end{aligned}$$

Il y a une consistance au niveau des domaines de définition.

Démonstration. $\Phi_t \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_x(t)$ la courbe intégrale de X .

On a $\eta_{h(x)}(t) := h \circ \gamma_x(t) = h(\Phi_t(x))$ ($\eta_{h(x)} = h \circ \gamma_x$). On calcule $\eta_{h(x)} = h(\gamma_x(0)) = h(x)$, donc

$$T_{\eta_{h(x)}} = Th \circ T\gamma_x.$$

Alors

$$T_{\eta_{h(x)}} \left(\frac{d}{dt}(t) \right) = Th \circ \overbrace{T\gamma_x \left(\frac{d}{dt}(t) \right)} = Th(X(\gamma_x(t))) = h_{\#}X(h(\gamma_x(t))) = h_{\#}X(\eta_{h(x)}(t)).$$

On a

$$\begin{cases} \eta_{h(x)}(0) = h(x) \\ T_{\eta_{h(x)}} \left(\frac{d}{dt}(t) \right) = (h_{\#}X)(\eta_{h(x)}(t)), \end{cases}$$

donc $\eta_{h(x)}$ est une courbe intégrale pour $h_{\#}X$ et en plus on a

$$\psi(t, h(x)) = \eta_{h(x)}(t),$$

donc

$$\psi_t(h(x)) = h(\gamma_x(t)) = h(\Phi_t(x)).$$

On a alors

$$\psi_t \circ h = h \circ \Phi_t \implies \psi_t = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}. \quad (15)$$

□

Remarque. Si $X \in \mathcal{C}^\infty$, alors on a $\Phi_t : U_t \longrightarrow \Phi_t(U_t)$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ . On peut, dans un cas spécial, utiliser $h = \Phi_t, V = \Phi_t(U_t)$. Le flux $(\Phi_t)_{\#}X$ sur V est donnée par

$$h \circ \phi_t \circ h^{-1} = \Phi_t \circ \Phi_t \circ (\Phi_t)^{-1} = \Phi_t. \quad (16)$$

Exercice 9. 16 implique que $(\Phi_t)_{\#}X(\Phi_t(x)) = X(\Phi_t(x))$.

La forme la plus concise de push-forward est :

$$(\Phi_t)_{\#}(X|_{U_t}) = X|_{\Phi_t(U_t)}.$$

Théorème 5.5 (“Ironing theorem”, “Flow-box theorem”). Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n, X$ champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur U et $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subseteq U, a \in V$ et un difféomorphisme $h : V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que

$$h_{\#}X|_V = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

En particulier, si Φ est le flux de X et $\Phi(t, x)$ est défini pour $x \in V$, on a

$$\Phi_t(x) = h^{-1} \circ \psi_t \circ h(x),$$

où ψ_t est le flux de $\frac{\partial}{\partial x^1}$ sur W .

Remarque. Si $\frac{\partial}{\partial x^1}(y) = (y, e_1)$, alors on a $\psi_t(y) = y + te_1$. Donc

$$\Phi_t(x) = h^{-1}(\psi_t(h(x))) = h^{-1}(y + te_1).$$

Avec les rotations, les dilatations et les transformations, on peut supposer que $a = 0, X(a) = \frac{\partial}{\partial x^1}(a)$. Si $X(a)$ est donné, on peut trouver l'application $h_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ affine $h_0(x) = Ax + \frac{\partial}{\partial x^1}(a)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$ telle que $h_0(a) = 0$ et $((T_{h_0})|_U)(X(a)) = \frac{\partial}{\partial x^1}(0)$.

Cela démontre l'existence de h_0 qui vient du fait que $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A inversible telle que $A\vec{v} = e_1$. Il faut fixer A comme défini et puis définir $h_0(x) = Ax$.

Exercice 10. Calculer $(T_{h_0})|_U(X(a)) = \frac{\partial}{\partial x^1}(0)$.

Exercice 11. Si $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W, \forall \alpha$ champ de tenseur de type $(0, k)$ sur W , alors

$$(g \circ f)^* = f^*(g^* \alpha).$$

Pour tout β champ de tenseurs de type $(l, 0)$ sur U ,

$$(g \circ f)_\# \beta = g_\#(f_\# \beta),$$

avec f et g injectives.

Donc $0 \in U, X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}(0)$.

On a

$$h^{-1}(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = y_{h^{-1}(y)}(t) = \Phi(t, h^{-1}(y)) = \gamma_x(t) = \Phi(t, x).$$

Si $x = (0, x_2, \dots, x_n), t = x_1$, on va imposer que $h(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$. Alors il faut chercher h^{-1} tel que

$$h^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = h^{-1}(0 + \overbrace{x_1}^t, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1, h^{-1}(0, x_2, \dots, x_n)) = \phi(\overbrace{x_1}^t, x_2, \dots, x_n).$$

Démonstration. On va alors définir (le candidat k pour h^{-1})

$$k(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n).$$

On a bien sûr $k(0) = \Phi_0(0) = 0$. k est défini pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Donc on appelle le voisinage \tilde{W} avec $0 \in \tilde{W}, k : \tilde{W} \rightarrow U$. Si $X \in \mathcal{C}^\infty$, alors $\Phi \in \mathcal{C}^\infty$ et donc $k \in \mathcal{C}^\infty$.

On veut utiliser le théorème de l'application inverse. Il faut vérifier que $Dk(0)$ est inversible. On a

$$Dk(0) = \left[\frac{\partial k}{\partial x^1} \quad \dots \quad \frac{\partial k}{\partial x^n} \right]_{|x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $j = 2, \dots, n$

On a $k(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$. On a fixé $x_1 = 0$, donc

$$k(0, x_2, \dots, x_n) = \Phi_0(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n),$$

donc

$$\frac{\partial k}{\partial x^j} \Big|_{x=0} = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0) = e_j.$$

Donc $Dk(0) = \text{Id}_{n \times n}$ inversible. Donc par le théorème de l'application inverse, il existe V ouvert avec $0 \in V$, $W \subseteq \tilde{W}$, $0 \in \tilde{W}$ tels que

$$\Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n) = h^{-1}(x_1, \dots, x_n).$$

Alors $k(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$, donc $h(0, x_2, \dots, x_n)$, donc

$$h^{-1}(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = \Phi_{t+y_1}(0, y_2, \dots, y_n) = \Phi_t(\Phi_{y_1}(0, y_2, \dots, y_n)) = \Phi(h^{-1}(\underbrace{y_1, \dots, y_n}_x)).$$

□

26-10-2023

5.4.1 Le cas de la métrique riemannienne (pull-back et push-forward)

Soit g la métrique riemannienne sur U , $g : U \rightarrow \Omega^2 U$ symétrique définie positive telle que $\forall x \in U$, $g(x)$ est un tenseur $(0,2)$ (2-covariant) symétrique défini positif sur $T_x U$. $g(x) \in \Omega^2(T_x U)$.

Un tenseur covariant est le retiré (pull-back) sous une application. On considère $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : V \rightarrow U$ difféomorphisme C^∞ . Donc le retiré u^*g est défini sur V comme un élément de $\Omega^2 V$.

$$u^*g(x) \in \Omega^2(T_x U), \forall x \in U.$$

Proposition 5.4. Soit $h := u^*g$, alors h est une métrique riemannienne sur V .

Démonstration. On sait déjà que $h^{(x)} \in \Omega^2(T_x V), \forall x \in V$. Il faut démontrer que $h(x)$ est un produit scalaire sur $T_x U$.

1. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_x V$,

$$\begin{aligned} h(x)(\vec{v}, \vec{w}) &= u^*g^{(x)}(\vec{v}, \vec{w}) = g(u(x))(T(u(\vec{v})), T(\vec{w})) \\ &= g(u(x))(Tu(\vec{w}), u(\vec{v})) = u^*g(x)(\vec{w}, \vec{v}) = h(x)(\vec{w}, \vec{v}). \end{aligned}$$

2. Pour tout $\vec{v} \in T_x V$, on a

$$h(x)(\vec{v}, \vec{w}) = u^*g(x)(\vec{v}, \vec{v}) = g(u(x))(Tu(\vec{v}), u(\vec{v})) \geq 0.$$

De plus, on a

$$h(x)(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff g(u(x))(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{v})) = 0 \iff Tu(\vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0.$$

Remarque. Si $u : U \rightarrow V$ difféomorphisme, on a pour tout $x \in V$, $T_x u : T_x V \rightarrow T_x U$ est une application linéaire inversible. En effet,

$$\begin{aligned} Tu \circ Tu^{-1} &= T(u \circ u^{-1}) = T(\text{id}_U) = \text{id}_{T_U} \\ Tu^{-1} \circ Tu &= T(u^{-1} \circ u) = T(\text{id}_V) = \text{id}_V. \end{aligned}$$

□

Théorème 5.6. Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, avec g métrique riemannienne sur U et h métrique riemannienne sur V . On suppose que $u : V \longrightarrow U$ est un difféomorphisme C^∞ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tous $x, y \in V$, $d_h(x, y) = d_g(u(x), u(y))$.
2. Pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \longrightarrow V$, $L_h(\gamma) = L_g(u \circ \gamma)$.
3. $h = u^*g$.

Démonstration. Pour le moment, on va suspendre la démonstration de 1. On va démontrer 2 implique 3. On a

$$\begin{aligned} L_h(\gamma) &:= \int_0^T h(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt \\ &= \int_0^T \sum_{i,j} H_{ij}(\gamma(t)) (\gamma^j)'(t) (\gamma^i)'(t) dt = \int_0^T \langle \gamma'(t) \mid H(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Si $h = u^*g$, on a

$$\begin{aligned} L_h(\gamma) &= \int_0^T h(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt \\ &= \int_0^T u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt \\ &= \int_0^T g(u(\gamma(t))) (Tu(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right)), Tu(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right))) dt \\ &= \int_0^T g(u \circ \gamma(t)) \left(Tu \circ T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), Tu \circ T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt \\ &= \int_0^T g(u \circ \gamma(t)) \left(T(u \circ \gamma) \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T(u \circ \gamma) \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt = L_g(u \circ \gamma), \end{aligned}$$

car $T\gamma : TI \longrightarrow TV$, $Tu : TV \longrightarrow TU$.

Par le calcul qu'on vient de faire, $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1, \gamma : [0, T] \longrightarrow V$, $L_g(u \circ \gamma) = L_h(\gamma)$ implique que

$$\begin{aligned} &\int_0^T u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt \\ &= \int_0^T h(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Soit $x \in V$, $\vec{v} \in T_x V$, avec $\vec{v} = (x, \underbrace{\vec{v}}_{\in \mathbb{R}^n})$. On pose $\gamma(t) = x + t \mid \vec{v} \rangle$, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq V$. On pose $a = -\varepsilon, b = \varepsilon \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Cela implique que

$$\int_a^s u^*g(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt = \int_a^s h(\gamma(t)) \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right) dt.$$

On a pour tout $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\frac{d}{ds} \int_a^s \dots = \frac{d}{ds} \int_0^s \dots,$$

ce qui donne pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$u^*g(\gamma(t)) = \left(T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right), T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) \right).$$

On évalue en $t = 0$. On a $\gamma(0) = x + 0 \cdot |\vec{v}\rangle = x$ et on obtient alors :

$$T\gamma \left(\frac{d}{dt}(t) \right) = (\gamma(t), \gamma'(t)) = (x, t |\vec{v}\rangle, |\vec{v}\rangle)_{t=0} = (x, |\vec{v}\rangle),$$

ce qui implique que

$$u^*g(x)((x, |\vec{v}\rangle), (x, |\vec{v}\rangle)) = h(x)((x, |\vec{v}\rangle), (x, |\vec{v}\rangle)),$$

ce qui donne

$$u^*g(x)(\vec{v}, \vec{v}) = h(x)(\vec{v}, \vec{v})$$

□

Calcul pour les matrices G et H . On a

$$h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} dx^i \otimes dx^j, g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dy^i \otimes dy^j, (y_1, \dots, y_n) \in U.$$

On a $h = u^*g$. Quelle est la relation entre les matrices G et H ?

On a $\forall x \in V, \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_x V$, avec $\vec{v} = (x, |\vec{v}\rangle), \vec{w} = (x, |\vec{w}\rangle)$, avec

$$\vec{v} = \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x)$$

et

$$|\vec{v}\rangle = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}.$$

On a

$$h = u^*g \iff \forall x, \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_x V, h(x)(\vec{v}, \vec{w}) = g(u(x))(Tu\vec{v}, Tu\vec{w}) = \langle Du(x)\vec{v} | G(u(x)) | Du(x)\vec{w} \rangle$$

On prend maintenant $|\vec{v}\rangle = e_i \in \mathbb{R}^n, |\vec{w}\rangle = e_j \in \mathbb{R}^n$. Alors on a :

$$\langle e_i | \underbrace{H(x)}_{e_i \cdot H e_j} | e_j \rangle = h_{ij}(x). \quad (17)$$

Or $Du(x)e_i$, c'est la i -ième colonne de $Du(x) = \frac{\partial u}{\partial x^i}(x)$, ce qui donne

$$17 \implies j_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) | G(u(x)) | \frac{\partial u}{\partial x^j}(x) \right\rangle.$$

On a alors

$$H(x) = {}^t Du(x) G(u(x)) Du(x).$$

Proposition 5.5. Si u difféomorphisme \mathcal{C}^∞ , h, g sur V, U tel que $h = u^*g$ et $h = \sum_{i,j} h_{ij} dx^i \otimes dx^j$ sur $V, g = \sum_{i,j} g_{ij} dy^i \otimes dy^j$ sur U , alors on a

$$h = u^*g \iff \forall x \in V, H(x) = {}^t Du(x)G(u(x))Du(x).$$

Exemple. On prend $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}.$$

On a $Du(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. u est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ . On pose $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (avec g la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n).

Alors on a

$$H = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\forall |\vec{v}|, |\vec{w}| \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle_H = v^1 w^1 + v^1 w^2 + w^2 v^1 + 2v^2 w^2$$

et

$$\|\vec{v}\|_H^2 = (v^1)^2 + 2v^1 v^2 + 2(v^2)^2 = (v^1 + v^2)^2 + (v^2)^2.$$

On obtient $h = dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 2dy \otimes dy$.

Exercice 12. Montrer que si $u : V \longrightarrow U$ difféomorphisme \mathcal{C}^∞ et g métrique sur U , alors

1. $h = u^*g$ implique que $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_x U$:

$$\|\vec{v}\|_h = \|Tu(\vec{v})\|_g \quad (18)$$

$$\angle(\vec{v}, \vec{w})_h = \angle(Tu(\vec{v}), Tu(\vec{w}))_g. \quad (19)$$

2. $\forall \vec{v} \in T_x U, \|\vec{v}\|_h = \|Tu(\vec{v})\|_g \implies h = u^*g$.

Proposition 5.6. Soit g_e la métrique euclidienne standard sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (donc $G_e = I_{n \times n}, g_e = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$) et $u : V \longrightarrow U$ est difféomorphisme \mathcal{C}^∞ .

Alors si $j = u^*g, h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} dx^i \otimes dx^j, H = [h_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on a

$$H = {}^t Du Du.$$

Remarque. $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall |\vec{v}|, |\vec{w}| \in \mathbb{R}^n$, si $H = {}^t AA$, on a

$$\langle \vec{v} | H | \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | {}^t AA | \vec{w} \rangle = \langle A\vec{v} | A\vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot ({}^t AA\vec{w}) = A\vec{v} \cdot A\vec{w}.$$

De plus, on a

$$\langle \vec{v} \mid H \mid \vec{v} \rangle = \langle A \vec{v} \mid A \vec{v} \rangle = \|A \vec{v}\|^2.$$

C'est la norme euclidienne.

Exemple. Soit $u(x, y) = (x + y^2, y)$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

On pose $D_u = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On calcule

$$H = {}^t D_u D_u = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 2y & 1 + 4y^2 \end{bmatrix}.$$

Alors $h = dx \otimes dx + 2y dx \otimes dy + 2y dy \otimes dx + (1 + 4y^2) dy \otimes dy$.

Si $u(x, y) = (x', y')$, alors on a $x + y^2 = x', y = y'$, donc $x = x' - y'^2 = x' - (y')^2$. On obtient donc

$$u^{-1}(x', y') = (x' - (y')^2, y').$$

Si la ligne droite $x' \equiv \text{constante}$ et y arbitraire (paramètre t), la courbe dans V devient de la forme $(c - t^2, t), t > 0$.

Sinon, $y' = ax' + b, t = x', y' = at + b$, donc la courbe géodésique correspondant pour (V, h) est

$$(t - (at + b)^2, \overbrace{at + b}^y).$$

★ Si $a \neq 0$, on a $y = at + b, t = \frac{y - b}{a}, x = \frac{y - b}{a} - y^2 = -y^2 + \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$.

★ Si $a = 0, y' = \text{constante} > 0, x' = t$ (paramètre), la courbe dans (V, h) est $(t - c, c)$.

Exercice 13. Soit $\{(U, g) \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ouvert}, g \text{ métrique riemannienne sur } U\}$. Pour tout $(U, g), (V, h) \in U$, on définit la relation suivante :

$$(U, g) \sim (V, h) \iff \exists u : V \longrightarrow U \text{ difféomorphisme } \mathcal{C}^\infty \text{ tel que } h = u^*g.$$