Géométrie différentielle

Mohammad Reza Pakzad

2023-2024

Table des matières

1 Fonctions continues

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.
$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$ application.
f est continue en x_0 dans U si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

avec $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.
On dit que f est une application continue quand f est continue en $x \in U$ pour tout $x \in U$.

Proposition 1.1. f est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(J)$ est ouvert, avec $f^{-1}(J) := \{x \in U \mid f(x) \in J\}$.

Démonstration. 1. *Si f est continue, alors $\forall J \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f^{-1}(J)$ est ouvert.*

Il faut montrer que $\forall x_0 \in f^{-1}(J)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

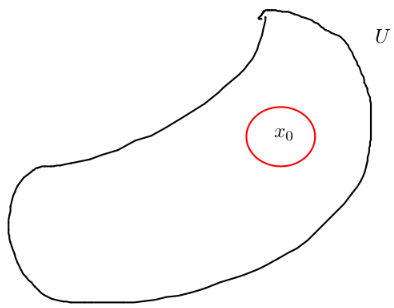

Figure 1 – Illustration

$J = (a, b)$.

$x_0 \in f^{-1}(J) \implies f(x_0) \in J \implies a < f(x_0) < b \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que

$$a < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon < b.$$

On peut choisir $\varepsilon = \min\{\frac{b - f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0) - a}{2}\}$.

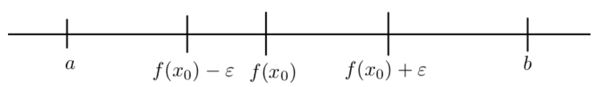

Figure 2 – On choisit ε de cette sorte

Donc il y a $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| < \delta &\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ &\implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ &\implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \implies a < f(x) < b \\ &\implies f(x) \in J \implies x \in f^{-1}(J). \end{aligned}$$

Choisissons $r := \delta$

$x \in B(x_0, r) \implies \|x - x_0\| < r = \delta$.

On a démontré que avec ce choix de δ on a $x \in f^{-1}(J) \implies B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

2. *Si $f^{-1}(J)$ ouvert pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, alors f est continue.*

Fixons $x_0 \in U$: $\varepsilon > 0$ est donné.

On met $J = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Par l'hypothèse, $f^{-1}(J)$ est ouvert, donc $\exists r > 0, B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

On met $\delta := r$.

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| < \delta &\implies x \in B(x_0, \delta) = B(x_0, r) \\ &\implies x \in f^{-1}(J) \implies f(x) \in J \\ &\implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ &\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

♣

On peut aussi généraliser ces définitions et la proposition aux cas où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application de U dans $\mathbb{R}^m$, avec

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)).$$

Exemple $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 3\cos(x_2)e^{x_1 - x_2})$, $n = 2, m = 2, U = \mathbb{R}^2$.

Définition 1.1. f est continue en $x_0 \in U$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

avec $\|f(x) - f(x_0)\| = \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \dots + (f_m(x) - f_m(x_0))^2}$.

Définition 1.2. $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue quand f est continue en $x, \forall x \in U$.

Proposition 1.2. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes.

1. $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue ;
2. $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, f_j est continue ;
3. $\forall V \subseteq \mathbb{R}^m$ ensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert.

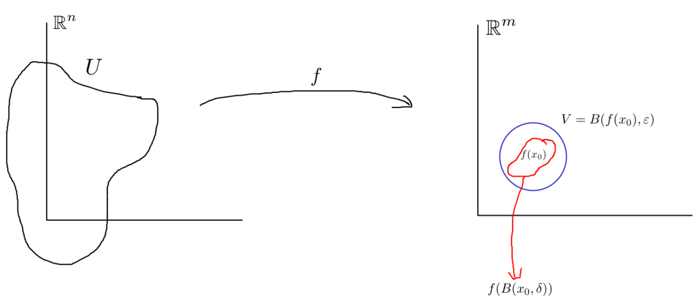

FIGURE 3 – Illustration pour 1.2

2 Dérivée, dérivée partielle, différentielle

$f : U \to \mathbb{R}$.
$x \in U$ fixé.
La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n)}{h}$$

si la limite existe.

Si $e_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ème}}, 0, \ldots, 0)$ (tel que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base standart de l'espace linéaire $\mathbb{R}^n$), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i)}{h}.$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En général, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_k \partial x_{k-1} \ldots \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right).$$

$i_1 \in \{1, \ldots, n\}, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$.
Pour $k = 1$, il y a n dérivées partielles.
Pour $k = 2, i_1 \longrightarrow n$ choix de $\{1, \ldots, n\}$.
$i_2 \longrightarrow n$ choix.
Donc il y a n^2 choix.
En général, il y a n^k dérivées partielles différentes de l'ordre k.

Définition 2.1. $r \in \mathbb{N}$.
On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ ou tout simplement f est $\mathcal{C}^r$ quand

1. Si $r = 0$, f est continue.
2. Si $r \geq 1$, f est continue et les dérivées partielles d'ordre k existent partout dans U et elles sont toutes les applications continues dans U et ceci pour tout $1 \leq k \leq r$.
3. Pour $f : U \to \mathbb{R}^m$, une application, on dit que f est $\mathcal{C}^r$ si $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j est une application $\mathcal{C}^r$, avec $f = (f_1, \ldots, f_m)$.
   On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ quand $\forall r \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^r$.

2.1 Différentiabilité des fonctions multi-variables

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$.
On dit que f est différentiable à $x \in U$ quand il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ si } \|h\| < \delta \text{ et } x + h \in U, \text{ alors } \|f(x+h) - (f(x) + L(h))\| < \varepsilon \|h\|.$$

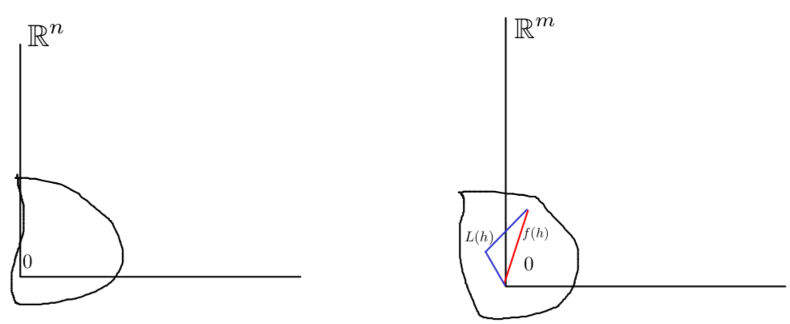

Figure 4 – Exemple illustratif avec $x = 0, f(0) = 0$

f différentiable en 0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0, \|h\| < \delta \implies \|f(h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$.

Proposition 2.1. $n = 1, m = 1, f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable selon la définition donnée sur un point $x \in I$ si et seulement si $f'(x)$ existe.

Démonstration.

1. *Sens direct : f différentiable en $x \in I \implies f'(x)$ existe.*
   $\exists L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in I \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$
   $L(h) = ah$ pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque mais fixé.
   a est la pente ou le coefficient directeur.
   Prenons a la pente du graphe de L (comme L linéaire, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}, L(h) = ah$).
   On obtient
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, x + h \in I \implies |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|.$$
   On divise par $|h| \neq 0$ pour obtenir
   $$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{ah}{h} \right| \leq \varepsilon.$$
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |h| < \delta, h + x \in I, \text{ alors } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon,$$
   c'est à dire
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$$
   Donc $f'(x)$ existe et $f'(x) = a$.
2. *Sens réciproque : $f'(x)$ existe $\implies f$ différentiable.*
   Si $f'(x)$ existe, on met $a := f'(x)$.
   On définit $L(h) = ah$. On sait que
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = a.$$
   Donc
   $$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta &\implies \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon \\ &\implies |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h| \\ &\implies \forall h, |h| < \delta, \text{ on a } |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|. \end{aligned}$$
   f est différentiable selon notre définition avec $L(h) = ah$.

♣

On suppose maintenant que $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Pour $x \in U$, f différentiable en x si $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire telle que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$
On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ est linéaire } \}$.
On écrit dans ce cas là que $Df(x) = L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
En particulier, si f est différentiable pour tout $x \in U$, on obtient une application
$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Rappel Chaque transformation linéaire est uniquement représentée par une matrice au cas où les bases des espaces de départ et d'arrivée sont fixées.

Si on choisit les bases standart $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ pour $\mathbb{R}^n$ et $\beta = \{e_1, \dots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$[T]^\alpha_\beta := A = [A_{ij}]_{m\times n}$$

et on a

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} e_i = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}.$$

C'est la j-ième colonne de la matrice A.

En particulier, pour chaque $x \in U$ où f est différentiable, en fixant les bases standart de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, on peut supposer que $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

On peut identifier $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $\mathbb{R}^{m\times n} = \{[A_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \mid A_{ij} \in \mathbb{R}\}$.

Avec cette identification, on peut utiliser la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme ça on peut parler de continuité et de différentiabilité de l'application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ou bien on peut encore identifier $\mathbb{R}^{m\times n}$ avec $\mathbb{R}^{mn}$. Alors $Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{mn}$.

Donc on peut parler de continuité de Df, de derivée de Df.

Pour $x \in U, D(Df)(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

On va noter $D(Df)$ par $D^2 f$. Alors $D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n})$.

$D^2 f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n}) \simeq \mathbb{R}^{mn^2}$.

Théorème 2.1. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ une application donnée et $r \in \mathbb{N}$.*

f est de classe $\mathcal{C}^r$ si et seulement si $D^k f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots))$ (de dimension mn^k) existe comme une application pour tout $1 \leq k \leq r$, et elle est en plus continue.

2.2 Deux points fins

En général, les dérivées partielles de f peuvent exister sans que Df soit définie.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut avoir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$ existe, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existe, mais $Df(0)$ n'existe pas.

Par contre, si $Df(x_0)$ existe, alors toutes les dérivées partielles de f existent en x_0.

Démonstration. Supposons que $Df(x_0)$ existe. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x) - f(x_0) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

Fixons une direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ et on met $h = t\overrightarrow{v}$, avec $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$. Donc $\|h\| = |t| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, t < \frac{\delta}{\|\overrightarrow{v}\|}, x_0 + t\overrightarrow{v} \in U \implies |f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) - tL(\overrightarrow{v})| < \varepsilon |t| \|\overrightarrow{v}\|.$$

On pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \|\overrightarrow{v}\|$ et $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0 \text{ tel que } |t| < \tilde{\delta} \implies \|f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) - tL(\overrightarrow{v})\| \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0, |t| < \tilde{\delta} \implies \left\| \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)\right) - L(\overrightarrow{v}) \right\| \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\implies \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)\right) = L(\overrightarrow{v}) = Df(x_0)(\overrightarrow{v}).$$

On définit

$$D_{\overrightarrow{v}} f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)).$$

Donc si $Df(x_0)$ existe, la dérivée directionnelle de f en x_0 dans une direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ existe et on a

$$D\overrightarrow{v} f(x_0) = Df(x_0)(\overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^m.$$

En particulier, si $\overrightarrow{v} = e_j, 1 \leq j \leq n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} f(x_0) = D_{e_j} f(x_0) = Df(x_0)(e_j).$$

♣

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ alors que $Df(x_0)$ n'existe pas.

Théorème 2.2. *Si $f : U \to \mathbb{R}^m, x_0 \in U$.*
Si $Df(x_0)$ existe, alors f est continue en x_0.

Démonstration. En exercice. ♣

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ en $x_0 \in U$ sans que pour autant f soit continue en x_0.

Si la matrice de $Df(x_0)$ est donnée par $[A_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, A_{e_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{bmatrix}.$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

C'est la matrice jacobienne de f.

2.3 La dérivée de composition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

$f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$.

Supposons que pour $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$.

Si f est continue, $g \circ f$ est définie dans un voisinage de x_0, par exemple dans une boule ouverte $B(x_0, r) = \tilde{U} \subset U \cap f^{-1}(V)$.

$g \circ f : \tilde{U} \to \mathbb{R}^p$.

Supposons que les trois dérivées $Df(x_0), Dg(f(x_0)), D(g \circ f)(x_0)$ existent.

$Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$D(g(f(x_0))) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.

$D(g \circ f) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 2.3. *Supposons que f est dérivable en $x_0 \in U$ avec la dérivée $Df(x_0)$ et g est dérivable en $f(x_0) \in V$ avec la dérivée $Dg(f(x_0))$, alors $g \circ f$ est bien dérivable en $x_0 \in U$ et*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

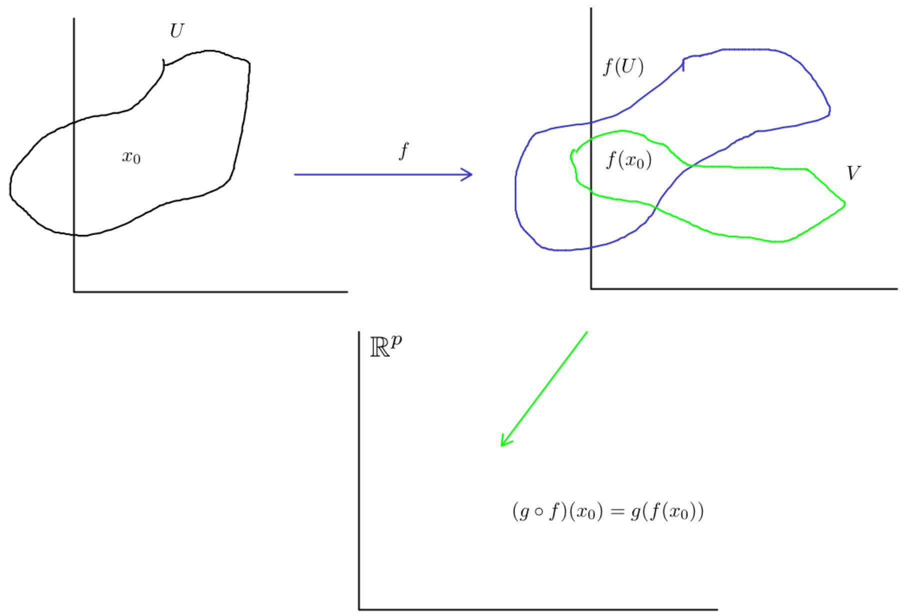

Figure 5 – La différentiation composée

Si on utilise les matrices jacobiennes de chaque dérivée ($1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$),

$$\left[\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}\right]_{p\times n}(x_0) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\right]_{p\times m}(f(x_0)) \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]_{m\times n}(x_0).$$

$$\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right](x_0) = \left[\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right](f(x_0)) \times \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right](x_0).$$

On a :

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k}(f(x_0))\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x_0).$$

$f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = f(U)$ est ouvert et $g : V \to \mathbb{R}^n$ est l'inverse de f.

Donc $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g \circ f = \mathbb{1}_U$.

Si en plus f et g sont différentiables, alors $m = n$ et $\forall x \in U, Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$, c'est à dire en particulier $Df(x)$ est une transformation linéaire inversible.

Démonstration. Si f est dérivable en $x \in U$ et g dérivable en $f(x) \in V$, $\mathbb{1} = g \circ f$ dérivable en x_0 et

$$D\mathbb{1}_U(x_0) = D(g(f(x_0))) \circ Df(x_0).$$

$$\mathbb{1}_U(x) = x \implies D\mathbb{1}_U(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Ainsi comme g est linéaire de f on a $f \circ g = \mathbb{1}_V$, donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} = Df(x_0) \circ Dg(f(x_0)).$$

♣

Lemme. *Si* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction linéaire,* $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ *et* $T(x) = L(x) + \overrightarrow{b}$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Ainsi T *est différentiable dans* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, DT(x) = L.$$

Dans ce cas, $DT : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application constante (les dérivées partielles de T aussi).

3 Inversion locale, fonctions implicites, théorème du rang

Théorème 3.1 (de Bronner). *Si* $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $h : U \to V$ *est un homéomorphisme (i. e. h continue, inversible et d'inverse* ***continue*** $h^{-1} : V \to U$*), alors* $m = n$.

3.1 Théorème de l'application inverse

Théorème 3.2 (De l'application inverse). $U \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in U, f : U \to \mathbb{R}^n$, *f est de classe* $\mathcal{C}^1$*. Supposons que* $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *est inversible.*
Alors il existe des ensembles ouverts $W \subset U$, $x_0 \in W$ *et* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *tels que* $f_{|W} : W \to V$ *est inversible. L'inverse* $(f_{|W})^{-1} : V \to W$ *est aussi de classe* $\mathcal{C}^1$.

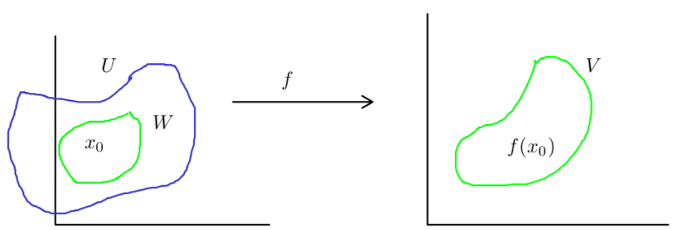

FIGURE 6 – Fonctions inversibles

Remarque. Si en plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, alors $(f_{|W})^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^r$.
Notons que $\forall y \in V, x \in W, f(x) = y$,

$$(D(f_{|W})^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}.$$

En particulier, il existe W tel que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in W$.

3.2 Théorème du rang

20-09-2023

Théorème 3.3 (Du rang)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ (avec $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$). Supposons que $\forall x \in U$,*

$$\operatorname{rang}(Df(x)) \equiv k,$$

où $1 \leq k \leq m$ est fixé.
($Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donc $0 \leq \operatorname{rang}(Df(x)) \leq m$).
Soit $x_0 \in U$. Alors il y a des ouverts $W \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ tels que $x_0 \in W, f(x_0) \in V$ et 2 applications de classe $\mathcal{C}^r$ inversibles

$$\varphi : W \to W' \text{ avec } W' \subseteq \mathbb{R}^n \text{ telle que } \varphi(x_0) = 0$$
$$\psi : V \to V' \text{ avec } V' \subseteq \mathbb{R}^m \text{ telle que } \psi(f(x_0)) = 0$$

telles que $\forall z \in W', z = (z_1, \ldots, z_n)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0).$$

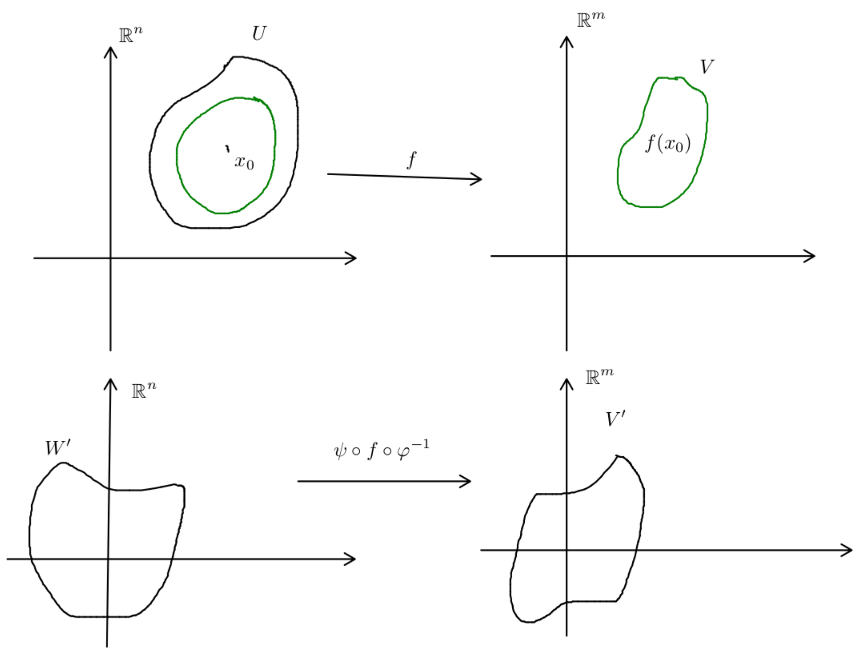

FIGURE 7 – Illustration du théorème de rang

En particulier, $f(W)$ est un objet de dimension k, de régularité $\mathcal{C}^r$ (Si $m = 3, k = 2, f(W)$ est une surface de classe $\mathcal{C}^r$) et pour tout $y \in f(W), f^{-1}(y)$ est un objet de dimension $n - k$ de régularité $\mathcal{C}^r$.

On note que les deux applications φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^r$ et inversibles. On peut démontrer que dans ce cas-là, les inverses φ^{-1} et ψ^{-1} sont aussi de classe $\mathcal{C}^r$.

$$D\varphi^{-1}(y) = (D\varphi(\varphi^{-1}(y))^{-1}), y \in W'.$$

φ^{-1} étant continue, $D\varphi$ étant continue, l'inverse d'une matrice étant continue tant que $\det \neq 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ inversible $\implies \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.1 (Difféomorphisme)**.** Soient $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts.
Si $\varphi : U \to U'$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$, avec l'inverse $\varphi^{-1} : U' \to U$ de classe $\mathcal{C}^r$, on dit que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$.

Remarque (Le théorème de rang dans le cas spécial où f est linéaire). Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\operatorname{rang}(L) = k, 0 \leq k \leq m$, alors il existe deux bases α_n et β_m pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ telles que

$$[L]_{\alpha_n}^{\beta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

(En exercice).

Corollaire. *$U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$, f est $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

Supposons que pour $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ est injective. $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Alors il existe un voisinage W de x_0 tel que f est injective sur W.

Démonstration. Pour $x \in U$,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Si $Df(x_0)$ est injective, $\operatorname{rang}(Df(x_0)) = n$ $(m \geq n)$. On obtient une sous-matrice de $Df(x)$ de taille $n \times n$ inversible. ♣

Lemme (D'algèbre linéaire)**.** *$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors* $\operatorname{rang} A = n$ *si et seulement si il existe une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de A telle que* $\det B \neq 0$.

(En exercice).

Alors sous les hypothèse du corollaire 3.2, $\operatorname{rang} Df(x) \equiv n$ dans un voisinage W de x_0, appliquant le théorème du rang

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$$

qui est injectif.

Corollaire. *Les mêmes hypothèses que dans le corollaire 3.2.*

Si $Df(x_0)$ est surjective, alors il existe un voisinage ouvert $V \subseteq f(U)$ de $f(x_0)$ (c'est à dire $f(x_0)$ est un point intérieur de $f(U)$) tel que f est surjective sur V.

Argument à travers l'observation de l'algèbre linéaire qui dit que si $\operatorname{rang}(A) = m, m \leq n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il y a une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tel que $\det(B) \neq 0$.

Théorème de rang : $k = m \leq n$.

Les détails en exercice.

3.3 Théorème de fonctions implicites

Théorème 3.4 (De fonctions implicites)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

$(x_0, y_0) \in U \to V$ donné.

$$DF(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$$

et

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} & | & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{m\times(m+n)}.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in U \times V, DyF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$. *Supposons que* $DyF(x_0)$ *est inversible. Alors il existe un voisinage* W *de* x_0 *dans* U *et une application* $\mathcal{C}^r$ $f : W \to V$ *telle que* $f(x_0) = y_0$ *et*

$$\forall x \in W, F(x, f(x)) = F(x_0, y_0).$$

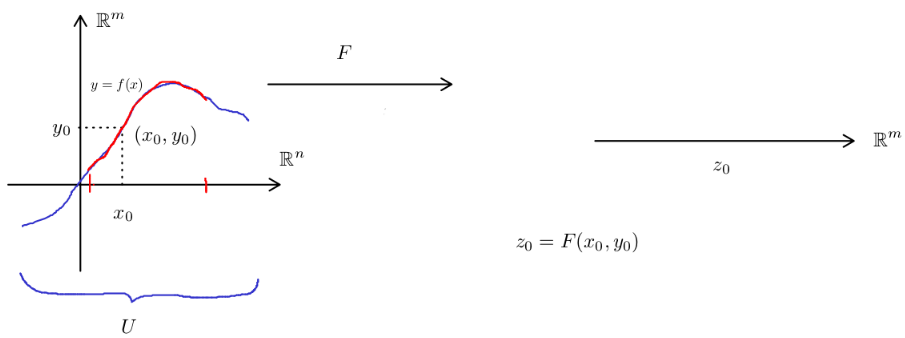

Figure 8 – Illustration du théorème de fonctions implicites

Donc le graphe de $x \longrightarrow f(x)$ dans $W \times V$ pour l'application $f : W \to V$ est à l'intérieur de $F^{-1}(x_0)$.

On peut dire que la fonction implicite

$$F(x, y) = z_0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z_0 \in \mathbb{R}^n$$

peut être exprimée explicitement $y = f(x)$ dans un voisinage W.

Exemple $m = 1 = n$.

Si $F(x, y) = y^2 - x$.

Exemple 1 $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 1$.

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty.$$

$$DyF = [2y]_{|x|}.$$

$$DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \neq 0.$$

Donc près de $(0, 1) = (x_0, y_0), y = f(x)$ a une solution $\mathcal{C}^\infty$.

Mais si $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, $DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$ n'est pas inversible. F est $\mathcal{C}^\infty$.

Implicitement, près de $(0, 0)$, on a $y^2 - x = 0$.

On essaie de trouver $y = f(x)$.

$y^2 = x \implies y = \pm\sqrt{x}$.

Mais $\sqrt{\cdot}$ n'est pas définie pour $x < 0$ près de $x_0 = 0$!

Donc il n'y a pas un moyen d'écrire explicitement $F(x, y) = 0$ près de $(0, 0)$ comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque (Sur le théorème des fonctions implicites). En effet, si $W' = f(W) \subset V$, on a

$$(x, y) \in W \times W', F(x, y) = z_0 \iff y = f(x).$$

4 Algèbre multilinéaire

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, c'est-à-dire il existe $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ base telle que

$$\forall \overrightarrow{v} \in E, \exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{v_i}.$$

En particulier, β engendre E ($E = \operatorname{span}(\beta) = \langle \beta \rangle$) si β est libre.

4.1 L'espace dual E^*

$$E^* = \{T : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire}\} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}).$$

Théorème 4.1. *On a* $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Démonstration. Supposons $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base ordonnée de E. On définit alors n éléments $(e^1, e^2, \ldots, e^n)$, $e^j \in E^*$ de la manière suivante :

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque (Personnelle). e^j est l'évaluation du vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ en e_j.

Donc $e^j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^j(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_i.$

Donc $\forall j \in \{1, \ldots, n\}, e^j \in E^*$, $\beta^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$. On montre que β^* est une base pour E^*.

1. β^* est libre. Supposons que pour $c_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e^j = 0 \in E^*.$$

   Donc pour tout i,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j\right)(e_i) = 0 \in \mathbb{R} \text{ et}$$
$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_i^j = c_i.$$

   Donc $\forall i, c_i = 0$.

2. β^* engendre E^*. Soit $T \in E^*$. Est-ce qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tel que

$$T = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \ ?$$

   Essayons de trouver les α_j en appliquant l'identité desirée en e_i.

$$\forall i, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_i^j = \alpha_i.$$

Donc pour $T \in E^*$ donnée, le candidat pour α_i est

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i \in T(e_i) \in \mathbb{R},$$

et on obtient que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \right) (e_i).$$

Comme T et $\tilde{T}$ ont les mêmes valeurs sur la base β, donc $T = \tilde{T}$.

$$T = \sum_{j=1}^{n} T(e_j) e^j.$$

♣

Définition 4.1. On dit que β^* est la base duale de β.

On considère le dual du dual $E^{**} = (E^*)^*$.

Théorème 4.2. *Si* $\dim(E) < \infty$*, il y a un isomorphisme canonique entre* E *et* E^{**}*.*

On peut définir $E \to E^{**}$. On pose $e : E \to E^{**}$.

$$(\iota(\overrightarrow{v}))(T) = T(\overrightarrow{v}),$$

$\forall T \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 1.

1. Montrer que $\forall v \in E, \iota(\overrightarrow{v}) : E^* \to \mathbb{R}$ est une transformation linéaire.
2. Montrer que $\iota : E \to E^{**}$ est une transformation linéaire.
3. Montrer que ι est bijective (donc un isomorphisme).

Démonstration.

1. $$\iota(\overrightarrow{v})(\alpha T + S) = (\alpha T + S)(\overrightarrow{v}) = \alpha T(\overrightarrow{v}) + S(\overrightarrow{v}) = \alpha \iota(\overrightarrow{v})(T) + \iota(\overrightarrow{v})(S).$$

2. $\iota : E \to E^{**}$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \iota(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})(T) = T(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &\overset{T \text{ linéaire}}{=} \alpha T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w}) \\ &= \alpha \iota(\overrightarrow{v})(T) + \iota(\overrightarrow{w})(T) = \alpha \iota(\overrightarrow{v}) + \iota(\overrightarrow{w}). \end{aligned}$$

   Comme c'est vrai $\forall T \in E^*$, on a l'identification $\iota(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha \iota(\overrightarrow{v}) + \iota(\overrightarrow{w})$ (comme un élément de E^{**}). Donc ι est une transformation linéaire.

3. On sait que $dimE = dimE^* = dimE^{**}$ (ce qui veut dire que ι est surjective). Pour démontrer que ι est un isomorphisme, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$ (que ι est injective).
   Si $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\iota)$, alors $\iota(\overrightarrow{v}) = 0 \implies \forall T \in E^*, T(\overrightarrow{v}) = \iota(\overrightarrow{v})(T) = 0(T) = 0$, donc $\overrightarrow{v}$ est tel que $\forall T \in E^*, T(\overrightarrow{v}) = 0$.

Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on peut compléter $\overrightarrow{v}$ avec une base $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ de E et définir $T(\alpha_1 \overrightarrow{v} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n}) = \alpha_1$. Dans ce cas-là, $T(\overrightarrow{v}) = 1 \neq 0$.
Si $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. On a vu que la base duale $\beta^* = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ est une base de E^*.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j.$$

$$(\beta^*)^* = \beta^{**} = (\varepsilon_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

$$\forall i, \eta_i \in E^{**}, \eta_i(e^i) = \delta_i^j, \forall i, j. \tag{1}$$

On va aussi calculer

$$\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j. \tag{2}$$

$\forall e^j$ de base β^*, on a

$$\eta_i(e^j) = \iota(e_i)(e^j), \eta_i, \iota(e_i) \in E^{**} = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{R}).$$

η_i et $i(e_i)$ coincident sur une base de E^*, donc

$$\forall i, \eta_i = \iota(e_i).$$

Pour simplifier, parfois on identifie E et E^{**} par l'application ι, c'est-à-dire on met $\overrightarrow{v} = \iota(\overrightarrow{v})$.

♣

Les éléments de E^* sont appelés **les vecteurs covariants**. Les éléments de E^{**} sont appelés **les vecteurs contravariants**.

4.2 Les applications multilinéaires

Supposons que $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et E' espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

$$\alpha : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \longrightarrow E'$$

est une application k-linéaire quand α est linéaire par rapport à chaque coordonnée dans l'un des espaces E_j quand les autres coordonnées (composantes) sont fixées.
$\overrightarrow{v_i} \in E_i$, $1 \leq i \leq k$, $\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k})$.
Si $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v_j} \in E_j$, $\overrightarrow{w} \in E_i$, on a

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, a\overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{w}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) = a\alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_i}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) + \alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overbrace{\overrightarrow{w}}^{i\text{-ème}}, \ldots, \overrightarrow{v_k}).$$

Exemple

1. $f(x, y) = xy$, $f : \overset{E_1}{\mathbb{R}} \times \overset{E_2}{\mathbb{R}} \to \overset{E'}{\mathbb{R}}$.
2. $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}$,

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \text{ 2-linéaire.}$$

3. $E_1 = E_2 = E_3 \equiv \mathbb{R}^3$, $E' = \mathbb{R}$.

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = det \left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3} \end{bmatrix} \right)_{3\times 3}.$$

Cette application est 3-linéaire.

4. $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}^n$.

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) = det\left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{bmatrix}\right).$$

C'est une application n-linéaire.

5. Le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est une application n-linéaire.

4.2.1 Quelques notations

E espace vectoriel de dimension finie.
On note $\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.
Remarquons que $\Omega^1(E) = \{\alpha : E \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est linéaire}\} = E^*$.

Proposition 4.1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k.

Démonstration. Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(E), a \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k, on doit montrer deux choses :

1. $\Omega^k(E)$ est stable par les opérations $+$ et $\cdot$ (produit par un scalaire).
2. Il existe une base de cet espace contenant n^k éléments.

Il faut démontrer que $a\alpha + \beta$ est aussi une application k-linéaire sur $E^k = \overbrace{E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$.

$$\begin{aligned}(a\alpha + \beta)(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}, \ldots) &= a[\alpha(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}, \ldots)] + \beta(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}) \\ &= a[b\alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots) + \alpha(\overrightarrow{w}, \ldots)] + b\beta(v_1, \ldots) + \beta(\overrightarrow{w}, \ldots) \\ &= b[a\alpha + \beta](\overrightarrow{v_1}, \ldots) + [a\alpha + \beta](\overrightarrow{w}, \ldots)\end{aligned}$$

De même pour chaque $1 \leq i \leq k$.

Pour trouver la dimension de $\Omega^k(E)$, il faudra trouver une base de $\Omega^k(E)$. Pour cela, il faudra d'abord introduire “le produit tensoriel”. ♣

Définition 4.2 (Produit tensoriel)**.** Supposons que $\alpha : E_1 \times \cdots \times E_k \to \mathbb{R}$ k-linéaire, $\beta : E'_1 \times \cdots \times E'_l \to \mathbb{R}$ l-linéaire.

On définit

$$\alpha \otimes \beta : E_1 \times \cdots \times E_k \times E'_1 \times \cdots \times E'_l \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\alpha \otimes \beta(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{v'_1}, \ldots, \overrightarrow{v'_l}) := \alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k})\beta(\overrightarrow{v'_1}, \ldots, \overrightarrow{v'_l})$$

qui est une application $(k + l)$-linéaire (avec $\overrightarrow{v_i} \in E_i, i \in \{1, \ldots, k\}, \overrightarrow{v'_j} \in E'_j, j \in \{1, \ldots, l\}$).

Les applications k-linéaires sont appelées les tenseurs covariants d'ordre k.

Exercice 2. On montre que $\otimes$ est une opération associative.
$\forall \alpha, \beta, \gamma$ tenseurs covariants,

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma).$$

Exemple $E_1 = \mathbb{R}^n, E_1' = \mathbb{R}^n, k = l = 1, \alpha \in E_1^*, \alpha(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v} \cdot e_1, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \beta \in E_1'^*, \beta(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v'} \cdot e_1, \forall \overrightarrow{v'} \in \mathbb{R}^n$.

$$\alpha \otimes \beta(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) = 2(\overrightarrow{v} \cdot e_1)(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)$$

et

$$\beta \otimes \alpha(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}) = 2(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)(\overrightarrow{v} \cdot e_1).$$

Mais si $\tilde{\beta}(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v'} \cdot e_2$,

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \tilde{\beta}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) &= 2(\overrightarrow{v} \cdot e_1)(\overrightarrow{v'} \cdot e_2), \\ \text{mais } \tilde{\beta} \otimes \alpha(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}) &= 2(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)(\overrightarrow{v} \cdot e_2). \end{aligned}$$

Le produit tensoriel n'est donc pas commutatif.

$E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$

$\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.

Proposition 4.2. $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k, où $n = dim(E)$.

Démonstration. On rappelle que $\dim(E) = n$, que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et que $(e^1, \ldots, e^n)$ est une base de $E^* = \Omega^1(E)$.

Par exemple si on prend

$$\underbrace{e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1}_{k \text{ fois}} : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R},$$

on aura alors

$$\begin{aligned} &e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}), \overrightarrow{v_i} \in E, \\ &= e^1(\overrightarrow{v_1}) e^1(\overrightarrow{v_2}) \ldots e^1(\overrightarrow{v_n}). \end{aligned}$$

Posons $\mathscr{A} = \{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid \text{pour } 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_k \leq n\}$.

Il y a n choix pour chaque e^{i_j} (parmi les n vecteurs de la base de E), alors, au total, on a n^k choix pour les éléments de $\mathscr{A}$ (puisqu'il y a k choix pour chaque i_k), ce qui démontre la proposition 4.2. Il nous reste maintenant à montrer que :

1. $\mathscr{A}$ engendre $\Omega^k(E)$;
2. $\mathscr{A}$ est libre.

Soit $\alpha \in \Omega^k(E)$.

On va démontrer que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}. \tag{3}$$

Prenons $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) \in E^k$. On a

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i.$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{ik} e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_{i1} \alpha\left(e_i, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{2i}, \ldots\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \ldots c_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour

$$
\beta = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_n},
$$

on calcule pour $\beta \in \Omega^k(E)$,

$$
\beta(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_k} c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} \beta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}).
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
\beta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) &= \sum_{1 \leq i'_1, \ldots, i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, e_{i'_2}, \ldots, e_{i'_k}) e^{i'_1} \otimes e^{i'_2} \otimes \cdots \otimes e^{i'_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i'_1 \leq \cdots \leq i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, \ldots, e_{i'_k}) e^{i'_1}(e_{i_1}) e^{i'_2}(e_{i_2}) \ldots e^{i'_k}(e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i'_1, \ldots, i'_k \leq n} \alpha(e_{i'_1}, \ldots, e_{i'_k}) \delta_{i_1}^{i'_1} \ldots \delta_{i_k}^{i'_k} = \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\beta(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_k} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \ldots c_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{ik}) = \alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}).
$$

Donc 3 est démontré, et on a $\alpha \in span(\mathscr{A}) = \langle \mathscr{A} \rangle$, où $\mathscr{A} = \{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}\}$.

Montrons que $\mathscr{A}$ est libre. Soit

$$
\sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} c_{i_1 i_2 \ldots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} = 0 \in \Omega^k(E).
$$

Le même calcul qu'auparavant démontre que

$$
0 = 0(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = c_{i_1 \ldots i_k}, \forall i_1, \ldots, i_k,
$$

donc

$$
\forall i_1, \ldots, i_k, c_{i_1 \ldots i_k} = 0,
$$

donc $\mathscr{A}$ est libre. ♣

Remarque. Si $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $Df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{gathered} Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ \vdots \\ D^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))). \end{gathered}$$

Lemme. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \{\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \alpha$ *est 2-linéaire*$\}$.

Pour un élément $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, g(\overrightarrow{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Pour tout k, pour tout $x \in U$, $D^k f(x) \in (\Omega^k(\mathbb{R}^n))^m$. Cet espace est de dimension $m(n^k)$.
On définit

$$\alpha_g(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w}) \in \mathbb{R}^n.$$

On voit que α_g est une application 2-linéaire.
Supposons que $\alpha_g = \alpha_{g'}$, donc $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n, \alpha_g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \alpha_{g'}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donc $g(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w}) = g'(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w})$.
Donc $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, g(\overrightarrow{v}) = g'(\overrightarrow{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donc $g = g'$.
On en déduit que $g \longrightarrow \alpha_g$ est injective.

Exemple. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Tx = 2x_1 + 5x_2$. On définit $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\alpha((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = x_1 x'_2 -$ 27-09-2023
$x_2 x'_1, \alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$.
Ecrire le produit tensoriel entre α et T...

Si E, F sont deux espaces vectoriels et $T : E \longrightarrow F$ linéaire ($T \in \mathscr{L}(E, F)$). On peut définir une application linéaire

$$T^* : F^* \longrightarrow E^*.$$

Pour $f \in F^*$, on doit déterminer $T^*(f)$ comme un élément de E^*. Alors $T^*(f)$ doit être une application linéaire $T^*(f) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, i. e. $T^*(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall v \in E, (T^*(f))(v) \overset{\text{déf}}{=} f(T(v)) \text{ cf figure 9.}$$

On a $f \in F^*, f \in \mathscr{L}(F, \mathbb{R})$.

$$\begin{tikzcd} v \in E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f \circ T"'] & f \arrow[d, "f \in T^*"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Figure 9 – Illustration de T^*

$F^* = \Omega'(F), E^* = \Omega'(E)$. On peut aussi utiliser la notation $\Omega^1(T)$ pour T^*. On peut aussi définir, à partir de T,

$$\Omega^k(T) : \underbrace{\Omega^k(F)}_{\alpha} \longrightarrow \underbrace{\Omega^k(E)}_{\beta}.$$

Pour $\alpha \in \Omega^k(E)$, on a besoin que $\underbrace{\Omega^k(T)(\alpha)}_{k\text{-linéaire}} \in \Omega^k(E)$.

$\forall v_1, \ldots, v_n$, on a besoin de définir

$$\underbrace{(\Omega^k(T))(\alpha)}_{\beta \in \Omega^k(E)}(v_1, \ldots, v_k) = \underbrace{\alpha(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k))}_{\in F^k}.$$

Exercice 3.

1. Montrer que β est k-linéaire, i. e. $\forall k, \Omega^k(T)(\alpha) \in \Omega^k(E)$.
2. Montrer que $\Omega^k(S \circ T) = \Omega^k(T) \circ \Omega^k(S)$.
3. Montrer que $\Omega^k(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Omega^k(E)}$.
4. Montrer que si $T : E \to F$ est inversible, alors

$$\Omega^k(T^{-1}) = (\Omega^k(T))^{-1}.$$

Quelques propriétés Si on a $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$, on a

$$\Omega^k(G) \xrightarrow{\Omega^k(S)} \Omega^k(F) \xrightarrow{\Omega^k(T)} \Omega^k(E).$$

On a $S \circ T : E \longrightarrow G$. Alors

$$\Omega^k(T) \circ \Omega^k(S) \in \Omega^k(G) \longrightarrow \Omega^k(E)$$

et

$$\Omega^k(S \circ T) : \Omega^k(G) \longrightarrow \Omega^k(E).$$

On considère $\mathbb{1}_E : E \to E$. Alors

$$\Omega^k(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Omega^k(E)}.$$

On rappelle que l'on peut associer à un vecteur $v \in E$ un vecteur contravariant $\iota(v) \in E^{**}$. On définit alors, $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 1$,

$$\Omega_l(E) := \{\alpha : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } l\text{-linéaire}\} = \Omega^l(E^*),$$

avec la base $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_l} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq l\}$.

On a $\dim(\Omega_l(E)) = n^l$ et $\forall \alpha \in \Omega_l(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq n} \alpha(e^{i_1}, \ldots, e^{i_l}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_l}.$$

Pour $T : E \longrightarrow F$, $\Omega_l(T) : \Omega_l(E) \to \Omega_l(F)$ (objets contravariants pour la dualité), avec $\alpha \in \Omega_l(E), \beta = \Omega_l(T)(\alpha) \in \Omega_l(F)$.

On va essayer de définir

$$\beta(\underset{f_j \in F^*}{f_1, \ldots, f_l}) = \Omega_l(T)(\alpha)(f_1, \ldots, f_l) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(\underset{T^*(f_j) \in F^*}{T^*(f_1), \ldots, T^*(f_l)}).$$

On a alors le schéma suivant :

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$$
$$\Omega_l(E) \underset{\Omega_l(T)}{\longrightarrow} \Omega_l(F) \underset{\Omega_l(S)}{\longrightarrow} \Omega_l(G).$$

Définition 4.3. Pour tous k, l, on a

$$\Omega_l^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{l \text{ fois}} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$$

qui a pour base

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n, 1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n\}.$$

On a $\dim(\Omega_l^k) = n^{k+l}$. Pour $\alpha \in \Omega_l^k(E)$, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_l}} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_l}) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

Parenthèse sur les notations En physique, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_l}} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l}.$$

et on dit : si α est un (l, k) tenseur, alors α est la collection de valeurs $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$.
Si $T : E \to E$ est donnée, alors $\Omega_l^k(T)(\alpha)$ est donnée maintenant par le coefficient

$$b_{\tilde{i_1}, \ldots, \tilde{i_l}}^{\tilde{j_1}, \ldots, \tilde{j_l}}.$$

4.3 Produit scalaire

Les produits scalaires sur un espace vectoriel sont des tenseurs 2-covariants.

Définition 4.4 (Produit scalaire)**.** Une application $\alpha : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire quand

1. $\alpha \in \Omega^2(E)$;
2. α est symétrique, i. e.

$$\forall v, w, \alpha(v, w) = \alpha(w, v).$$

3. α est définie positive, i. e. $\forall v \in E, \alpha(v, v) \geq 0$ et $\alpha(v, v) = 0 \iff v = 0$. En particulier, si $v \neq 0$, alors $\alpha(v, v) > 0$.

α dans une base est donnée par les coefficients $a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$. Par exemple, on considère

$$v = \sum x_i e_i, w = \sum y_i e_i, \alpha = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{4}$$

Dans ce cas, on a

$$\alpha(v, w) = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j \right) \left(\sum_k x_k e_k, \sum_l y_l e_l \right) \tag{5}$$

$$= \sum_{i,j,k,l} a_{ij} e^i(e_k) e^j(e_l) x_k y_l = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} \delta_k^i \delta_l^j x_k y_l = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j. \tag{6}$$

Donc un produit scalaire est un (0, 2)-tenseur.

Pour aller vers les formes différentielles, on a besoin d'une sous-catégorie de $\Omega^k_l(E)$ qui sont appelés les tenseurs extérieurs. Voici quelques définitions.

Définition 4.5. 1. On dit que σ est une permutation d'ordre k quand

$$\sigma : \{1, \dots, k\} \longmapsto \{1, \dots, k\}$$

est une bijection. On note $\sigma_i := \sigma(i)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est l'ensemble des permutations d'ordre k. L'ensemble S_k muni de la loi $\circ$ est un groupe. On dit qu'une permutation est une transposition quand il existe $i \neq j$ tels que

$$\sigma_i = j, \sigma_j = i, \sigma_s = s, \forall s \notin \{i, j\}.$$

$\forall \sigma \in S_k, \exists \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(l)}$ tel que

$$\sigma = \sigma_{(1)} \dots \sigma_{(l)}, \tag{7}$$

et chaque $\sigma_{(s)}$ est une transposition. Cette décomposition n'est pas unique, mais dans toutes les décompositions comme dans 7, la parité de l ne change pas.

On définit

$$\begin{matrix}\operatorname{sgn}(\sigma) \\ \varepsilon(\sigma)\end{matrix} := \begin{cases} 1 \text{ si } l \text{ est paire,} \\ 0 \text{ si } l \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Définition 4.6. $\alpha \in \Omega^k(E)$ est dite un **tenseur extérieur** (aussi appelé tenseur antisymétrique) si

$$\forall v_1, \dots, v_k \in E, \forall \sigma \in S_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k).$$

Proposition 4.3. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est extérieur ;
2. $\forall \sigma \in S_k$ telle que σ est une transposition,

$$\forall v_1, \dots, v_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k);$$

3. $\forall v_1, \dots, v_k \in E$, s'il existe $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tels que $v_i = v_j, i \neq j$, alors $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Démonstration.

1. (1) $\implies$ (2). On a sgn(transposition) $= -1$.
2. (2) $\implies$ (3). Donné i, j tels que $v_i = v_j, i \neq j$. On considère la transposition qui échange i et j et on a

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k),$$

mais $(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = (v_1, \dots, v_k)$ comme $v_i = v_j$ et donc

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_k) \implies \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

3. (2) $\implies$ (1). Si $\sigma = \sigma_{(1)} \dots \sigma_{(l)}$, avec pour tout j, $\sigma_{(j)}$ est une transposition, alors

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = (-1)^l \alpha(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k).$$

4. (3) $\implies$ (2). σ est une transposition telle que $\sigma_i = j, \sigma_j = i$. Les $v_1, \dots, v_k$ sont donnés. On écrit :

$$\alpha(v_1, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } i}, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } j}, \dots, v_k) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} & \alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) && (8)\\ = {} & \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) && (9)\\ = {} & \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k)}_{=0} + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) && (10)\\ & + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k)}_{=0}. && (11) \end{aligned}$$

On a d'une part $10 + 11 = 0$ et d'autre part :

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}),$$

ce qui donne le résultat souhaité.

♣

Exemple.

1. $\alpha(v, w) = \alpha((v', v^2), (w', w^2)) = v'w^2 - v^2 w'$. On vérifie facilement qu'il est antisymétrique.
2. Plus généralement, pour chaque $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$,

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det[v_1\ v_2\ \dots\ v_k]$$

est un tenseur extérieur.

Corollaire. *Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas libre (i. e. linéairement dépendante), $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.*

Démonstration. Si la famille n'est pas libre, il existe i tel que $v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j$ et la démonstration est la même que pour la proposition 4.3. ♣

On suppose que $\dim(E) = n$ et $k > n$. Si $\alpha \in \Omega^k(E)$ est un tenseur extérieur, alors, par convention, on écrit :

$$\forall v_1, \dots, v_k \in E, \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

On définit maintenant l'ensemble des tenseurs extérieurs, à savoir

$$\Lambda^k(E) := \{\alpha \in \Omega^k(E), \alpha \text{ est tenseur extérieur}\}.$$

Proposition 4.4. $\Lambda^k(E)$ est un sous-espace vectoriel, i. e.

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(E) \text{ et } c \in \mathbb{R}, (c\alpha + \beta) \in \Lambda^k(E).$$

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?

On cherche une base pour $\Lambda^k(E)$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ base duale, alors

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

est une base de $\Omega^k(E)$.

On va définir pour chaque choix d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ un élément extérieur $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ comme un élément proposé de base de $\Lambda^k(E)$ par la formule

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}).$$

Exemple.

$$\varepsilon^{12}(v_1, v_2) = e^1 \otimes e^2(v_1, v_2) - e^1 \otimes e^2(v_2, v_1) = e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^2(v_1).$$

Proposition 4.5. $\varepsilon^{i_1 \ldots i_k} \in \Lambda^k(E)$, autrement dit $\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}$ est un **tenseur extérieur**.

Démonstration. Soit $\tau \in S_k$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}) &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1}, \ldots, v_{\sigma\tau_k}) \\
&= \sigma(\tau) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1}, \ldots, v_{\sigma\tau_2}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}) &= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma') e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma'_1}, \ldots, v_{\sigma'_k}) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau) \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

♣

Il existe une autre manière pour proposer des éléments de base $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$. On va définir

$$\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}.$$

Si $j_s = j_l$ pour $s \neq l$, alors $\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k} = 0$ par définition.

Si $j_1, \ldots, j_k$ sont k indices différents, mais pas dans l'ordre croissant, on les réordonne par une permutation $\sigma \in S_k$ avec $1 \leq \sigma_{j_1} < \ldots < \sigma_{j_k} \leq n$. On définit

$$\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}.$$

Exercice 4. Est-ce que on a $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$ pour tout choix de $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$?

$\overline{\varepsilon}$ est prolongé par k-linéarité sur tout élément $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$.

Théorème 4.3. *$\{\overline{\varepsilon}^{i_1\ldots i_k}$, pour tout $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ forme une base pour $\Lambda^k(E)$, l'espace vectoriel des tenseurs extérieurs.*

Démonstration.

1. Ils sont libres. En effet,

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} c_{i_1\ldots i_k}\overline{\varepsilon}^{i_1\ldots i_k} = 0 \\ \Longrightarrow\ \forall 0 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n, &\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} c_{i_1\ldots i_k}\overline{\varepsilon}^{i_1\ldots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0 \\ \Longrightarrow\ 0 = &\sum_{1\leq i_1<\ldots i_k\leq n} c_{i_1\ldots i_k}\delta^{i_1}_{j_1}\ldots\delta^{i_k}_{j_k} = c_{j_1\ldots j_k}. \end{aligned}$$

2. Ils génèrent $\Lambda^k(E)$: exercice.

♣

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?
C'est $\dim(\Lambda^k(E)) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Par convention, $\dim(\Lambda^0(E)) = 1$ et $\Lambda^k(E) = \mathbb{R}$, $\Lambda^k(E) = \{0\}$ si $k < 0$ et

$$\dim(\Lambda^1(E)) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \text{ et } \dim(\Lambda^n(E)) = \frac{n!}{(n-n)!0!} = 1.$$

Proposition 4.6. Si $\alpha \in \Lambda^k(F)$, $T \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $(\Omega^k(T))(\alpha) \in \Lambda^k(E)$, avec $\Omega^k(T) : \Omega^k(F) \longrightarrow \Omega^k(E)$.

Démonstration. Si $\beta = (\Omega^k(T))(\alpha)$, $v_1, \ldots, v_k \in E$,

$$\beta(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(T(v_1), \ldots, T(v_k)).$$

Si $i \neq j, v_i = v_j$, alors $T(v_i) = T(v_j)$ et $\alpha(T(v_1), \ldots, T(v_k)) = 0$, donc $\beta(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Donc $\beta \in \Lambda^k(E)$. ♣

On écrit

$$\Lambda^k(T) \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k(T)_{|\Lambda^k(E)}.$$

Exemple.

1.
2. Si $k = n$, on a $\dim(\Lambda^k(E)) = 1$ et

$$\overline{\varepsilon}^{1\ldots n}(e_1, \ldots, e_n) = 1 \text{ et } \overline{\varepsilon}^{12\ldots n}(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

   Si $k = 2 = n$, on a

$$\overline{\varepsilon}(e_1,e_2)=1,\overline{\varepsilon}(e_2,e_1)=-1,\overline{\varepsilon}(e_1,e_1)=0,\overline{\varepsilon}(e_2,e_2)=0.$$

et $\overline{\varepsilon}(v,w)=-\overline{\varepsilon}(w,v)$. Si $v=(x_1,x_2),w=(y_1,y_2)$. Donc

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}(v,w)&=\overline{\varepsilon}(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2)\\ &=\dots \text{ on développe grâce à la linéarité de l'application } =x_1y_2-x_2y_1.\end{aligned}$$

C'est le déterminant formé par les vecteurs v,w, à savoir l'aire du parallélogramme formé par v,w.
Donc
$$\overline{\varepsilon}^{12\dots n}(v_1,\dots,v_n)=\det[v_1 \ \dots \ v_n].$$

C'est le volume n-dimensionnel signé de parallélipipède crée par $(v_1,\dots,v_n)$ (ordonné). On dit que $\overline{\varepsilon}^{1\dots n}$ est l'élément de volume sur $\Lambda^k(E)$ et on va le noter par $\omega=\overline{\varepsilon}^{1\dots n}$.

$$\omega(v_1,\dots,v_n)=\text{ volume signé de parallélipipède créé par } v_1,\dots,v_n=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i,0\le\lambda_i\le1\right\}.$$

Remarque (Sur les notations). Parfois on représente les éléments de E comme les vecteurs de colonne

$$\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix}=|\overrightarrow{v}\rangle,\text{ avec }\overrightarrow{v}=x^1e_1+\dots+x^ne_n$$

et les éléments de E^* comme les vecteurs de ligne par rapport à la base duale.

$$\overrightarrow{a}=y_1e^1+\dots+y_ne^n,\langle\overrightarrow{a}|=[y_1 \ \dots \ y_n].$$

Pour $\overrightarrow{a}\in E^*$, pour $\overrightarrow{v}\in E$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}(\overrightarrow{v})&=\sum_{i=1}^n y_ix^i=\langle\overrightarrow{a}\mid\overrightarrow{v}\rangle\\ &=[y_1 \ \dots \ y_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dans le cas général, $\omega=\overline{\varepsilon}^{1\dots n}\in\Lambda^k(E)$ est le seul élément de base pour cet espace de dimension 1. Si $T:E\to E$ transpormation linéaire $\Lambda^k(T):\Lambda^k(E)\longrightarrow\Lambda^k(E)$, mais $\dim(\Lambda^n(E))=1$ s'il existe $c\in\mathbb{R},\forall\alpha\in\Lambda^n(E),\Lambda^n(T)(\alpha)=c\alpha$.

Définition 4.7. $\det(T):=c$.

Exercice 5. Si $E=\mathbb{R}^n,T(v)=A|\overrightarrow{v}\rangle$ pour la base standart, alors $\det(T)=\det(A)$.

On considère $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$,

$$(\Lambda^n(T))(\alpha)(w_1,\dots,w_n)=\alpha(T(w_1),\dots,T(w_n))=\det(T)\alpha(w_1,\dots,w_n).$$

On choisit $\alpha = \omega, w_i = e_i$.

$$\omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \det(T)\omega(e_1, \dots, e_n). \tag{12}$$

Mais

$$\det(T) = \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \det[T(e_1), \dots, T(e_n)]. \tag{13}$$

$12, 13$ impliquent que $\det(T) = \det(A)$.
$\det(T)$ est défini directement indépendemment d'une base de E. Donc

$$\Lambda^n(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)},$$

donc $\mathbb{1}_{\Lambda^n(E)}(\alpha) = \alpha \implies c = 1$.
De plus, pour $T : E \to E, S : E \to E$,

$$\Lambda^n(S \circ T) = \Lambda^n(T) \circ \Lambda^n(S) \implies \det(S \circ T) = \det(S)\det(T).$$

Si T est inversible, alors

$$\begin{aligned} \Lambda^n(E)(T \circ T^{-1}) = \Lambda^n(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \Lambda^n(T^{-1}) \circ \Lambda^n(T) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \det(T)\det(T^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

Si T est inversible, on a $\det(T) \neq 0$ et

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}.$$

Aussi $\det(T) \neq 0 \implies T$ est inversible. Etant donné $(e_1, \dots, e_n)$, on doit démontrer que $T(e_1), \dots, T(e_n)$ forment une famille libre.

$$\omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \Lambda^n(T)(\omega)(e_1, \dots, e_n) = (\det(T))\omega(e_1, \dots, e_n) = \det(T) \cdot 1 \neq 0.$$

Comme ω est linéairement dépendant, par contraposée, $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ ne peut pas être linéairement dépendant.

Lemme. *Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ sont linéairement dépendants, alors $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$. Si $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ famille libre.*

Aussi, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ sont libres, on définit $Te_i = v_i, T : E \to E$ devient inversible, donc $\det(T) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(T) = \det(T)\omega(e_1, \dots, e_n) = (\Lambda^n(T))(\omega)(e_1, \dots, e_n) \\ = \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \omega(v_1, \dots, v_n) \implies \omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0. \end{aligned}$$

$T : E \to E, (e_1, \dots, e_n)$ base de E,

$$Te_i = A|e_i\rangle = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} e_j.$$

$$\det(T) = \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \omega(\sum_{j=1}^{n} A_{j1} e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} A_{jn} e_j)$$
$$= \sum_{j1} \dots \sum_{jn} A_{j_1 1} A_{j_2 2} \dots A_{j_n n} \omega(e_{j1}, \dots, e_{jn}) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \dots A_{\sigma_n n} \operatorname{sgn}(\sigma)$$
$$\implies \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \dots A_{\sigma_n n}.$$

4.4 Les éléments de volumes et orientation

On a défini

$$\omega = \varepsilon^{12\dots n} \in \Lambda^n(E).$$

Cet élément dépend du choix de la base.

Définition 4.8. On dit que ω est un élément de volume sur E, avec $\dim(E) = n$ si $\omega \in \Lambda^n(E)$ et $\omega = 0$.

Remarque. Si $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^n(E)$ sont deux éléments de volume, alors il existe $c \neq 0, c \in \mathbb{R}$ tel que $\omega_1 = c\omega_2$.

Définition 4.9. On dit qu'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E (base arbitraire *ordonnée*) a l'orientation positive (négative) ou est orientée positivement (négativement) par rapport à ω, qui est élément de volume donné sur E, quand $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0 (\omega(e_1, \dots, e_n) < 0)$.

Si $\omega = \varepsilon^{12\dots n}$ construit à partir de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base orientée positivement par rapport à ω, alors, par rapport à l'application linéaire $T : E \longrightarrow E, T(e_i) = e'_i$, on a $\det(T) > 0$.

Démonstration. En exercice. ♣

La réciproque est aussi vraie.

Définition 4.10. $\{e_1, \dots, e_n\}, \{e'_1, \dots, e'_n\}$ sont deux bases données. On dit qu'elles sont de même orientation lorsqu'il existe $\omega \in \Lambda^n(E)$ élément de volume tel que $\omega(e_1, \dots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \dots, e'_n)$ sont de même signe.

Lemme. *Si un tel ω dans la définition existe, alors $\forall \omega \in \Lambda^n(E)$, $\omega(e_1, \dots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \dots, e'_n)$ ont le même signe.*

Démonstration. En exercice. ♣

Remarque. Etre de la même orientation est une relation d'équivalence sur la collection de bases sur E. Il y a deux classes d'équivalence.

Si on fait la théorie sur $\mathbb{C}$ (qui n'est pas un corps ordonné), on ne peut pas définir une orientation. Si $\omega(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}$, il n'y a pas de signe (Kähler).

On définit
$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^k(E) = \bigoplus_{0\leq k\leq n} \Lambda^k(E).$$

En général, $\alpha \otimes \beta$ n'est pas un tenseur extérieur. On cherche un produit $\wedge$ qui nous donne
$$\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E).$$

Si on essaie de mettre
$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k+l}}).$$

Ce produit est tel que $\alpha \times \beta$ est antisymétrique, mais défini de cette façon, il n'est pas associatif.

Définition 4.11. $\Lambda^k(E) \times \Lambda^l(E) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+l}(E)$, avec $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est défini comme l'élément de $\Omega^{k+l}(E)$ par
$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k+l}}).$$

Remarque (Personnelle). $\frac{1}{k!l!}$ correspond au nombres de “cases” des deux applications α et β. Si par exemple α est 1-linéaire et β est 2-linéaire, on aurait alors
$$\frac{1}{k!l!} = \frac{1}{1!2!}.$$

Lemme. $\alpha \in \Lambda^k, \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E)$.

Démonstration. Prenons $\tau \in S_{k+l}$. On a
$$\begin{aligned}&\alpha \wedge \beta(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}, v_{\tau_{k+1}}, \ldots, v_{\tau_{k+l}})\\ &\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{(\sigma\tau)_1}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_k})\beta(v_{(\sigma\tau)_{k+1}}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_{k+l}})\end{aligned}$$

♣

Proposition 4.7. Si $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E), \gamma \in \Lambda^s(E)$, alors
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Donc on peut parler sans confusion de $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \Lambda^{k+l+s}(E)$.

Donc on peut généraliser le produit sur m tenseurs extérieurs $\alpha_i \in \Lambda^{k_i}, 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m(v_1, \ldots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \ldots, v_{k_1+k_2}, \ldots, v_{\sum_{i=1}^{m-1} k_i}, \ldots, v_{\sum_{i=1}^{m} k_i}) \\ = \frac{1}{k_1! \ldots k_m!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+\cdots+k_m}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_{k_1}})\alpha_2(\ldots) \ldots \alpha_m(\ldots).\end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_n})(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma_1}) \ldots e^{i_k}(v_{\sigma_k}) \\ &= \frac{1}{1! \ldots 1!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma_1}) \ldots e^{i_k}(v_{\sigma_n}).\end{aligned}$$

Si on met $m = k, k_1 = \cdots = k_m = 1, \alpha_{k_j} = e^{i_j} \in \Lambda^1(E), 1 \leq j \leq k$, on voit que

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_k} = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Exercice 6. Montrer que $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}$, avec $0 < i_1 < \ldots < i_k \leq n, 0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ qui montre que

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_k} = \overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}.$$

Donc pour $n = m$, on obtient $\varepsilon^{12 \ldots n} = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$. Donc l'élément de volume ω associé à une base ordonnée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est simplement $\omega = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$.

Exemple. Si $\alpha_i \in \Lambda^1(E), v_i \in E$,

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1(v_{\sigma_1}) \ldots \alpha_m(v_{\sigma_m}) = \det[\alpha_i(v_j)].$$

Exemple. $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{gathered}\alpha_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, \alpha(x_1, x_2, x_3) = x_3, \\ v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0).\end{gathered}$$

$m = 2, n = 3$.

$$\begin{gathered}\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1(v_{\sigma_1})\alpha_2(v_{\sigma_2}) \\ = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_2(v_1)\alpha_1(v_2) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2.\end{gathered}$$

Proposition 4.8. $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, alors

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \times \alpha.$$

En particulier, si k est impair,

$$\forall \alpha \in \Lambda^k(E), \alpha \wedge \alpha = 0,$$

parce que dans ce cas, on a $\alpha \wedge \alpha = (-1)\alpha \wedge \alpha$.

Démonstration.

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k+l}})$$

$$\beta \wedge \alpha(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\beta(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_l})\alpha(v_{l+1}, \ldots, v_{l+k}).$$

On doit introduire τ telle que $(-1)^{kl}$. ♣

Proposition 4.9. Soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout k, $\Lambda^k(T) : \Lambda^k(F) \longrightarrow \Lambda^k(E)$, pour $\alpha \in \Lambda^k(F), \beta \in \Lambda^l(F)$,

$$\underbrace{\Lambda^{k+l}(T)(\alpha \wedge \beta)}_{\in \Lambda^{k+l}(E)} = \underbrace{\Lambda^k(T)(\alpha)}_{\in \Lambda^k(E)} \wedge \underbrace{\Lambda^l(T)(\beta)}_{\in \Lambda^l(E)}.$$

La relation entre le produit extérieur $\wedge$ et le produit extérieur des vecteurs de $\mathbb{R}^3$: soient $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ et $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$.

$$v_1 \times v_2 := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Penser à v_1, v_2 comme des éléments de $(\mathbb{R}^3)^*$, donc comme des éléments de $\Lambda^1((\mathbb{R}^3)^*)$.

Quels sont les coefficients de $v_1 \wedge v_2$ dans la base $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$?

$$\begin{aligned}
v_1 \wedge v_2 &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} v_1 \wedge v_2(e^{i_1}, e^{i_2})\varepsilon_{i_1 i_2} = v_1 \wedge v_2(e^1, e^2)\varepsilon_{12} + v_1 \wedge v_2(e^2, e^3)\varepsilon_{23} + v_1 \wedge v_2(e^1, e^3)\varepsilon_{13} \\
&= [v_1(e^1)v_2(e^2) - v_1(e^2)v_2(e^1)]\varepsilon_{12} + [v_1(e^2)v_2(e^3) - v_2(e^2)v_1(e^3)]\varepsilon_{23} + [v_1(e^1)v_2(e^2) - v_2(e^1)v_1(e^3)]\varepsilon_{13} \\
&= (e^1(v_1)e^2(v_2) - e^2(v_1)e^1(v_2))\varepsilon_{12} + (e^2(v_1)e^3(v_2) - e^2(v_2)e^3(v_1))\varepsilon_{23} + (e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^3(v_1))\varepsilon_{13} \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\varepsilon_{12} + (x_2y_3 - x_3y_2)\varepsilon_{23} + (x_1y_3 - x_3y_1)\varepsilon_{13}.
\end{aligned}$$

Donc si on choisit la base $\{\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}$, on obtient $\varepsilon_{31} = -\varepsilon_{13} = e_1 \wedge e_3$. On obtient les coordonnées dans la base ordonnée $(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12})$ de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ de $v_1 \wedge v_2 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ est donnée par $v_1 \times v_2$.

Définition 4.12 (Contraction d'un tenseur par vecteur)**.** Soit $X \in E$. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(E), 1 \le k \le n$. $i_X(\alpha) \in \Omega^{k-1}(E)$ pour

$$i_X(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(X, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

On a $\Omega^0 \simeq \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \Omega^1(E) = E^*$, on a $i_X(\alpha) = \alpha(X) \in \mathbb{R}$. En particulier, i_X est défini sur $\Lambda^k(E)$ pour tout k.

Lemme. *$X \in E, \alpha \in \Lambda^k(E)$, alors $i_X(\alpha) \in \Lambda^{k-1}(E)$.*

Démonstration. Pour $v_i = v_j, i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, donc

$$i_X(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(X, v_1, \ldots, v_{k-1}) = 0$$

♣

Proposition 4.10.
1. $X \longrightarrow i_X$ est linéaire dans le sens que
   (a) $i_{X+Y} = i_X + i_Y$,
   (b) $i_{cX} = c i_X$.
2. Si on considère i_X restreint à $\Lambda^*(E)$, on a $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$ et $i_X \circ i_X = 0$.
3. Pour $i_{X_{|\lambda^*(E)}}$, on a, pour $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$,

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta).$$

Remarque. Supposons que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, avec $\dim(F) = n-1, \dim(E) = n$, $X \notin F$ et ω est un élément de volume en E, alors $\omega \in \lambda^n(E)$. Alors $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$ va être un élément de volume pour F.

$$I_F : F \longrightarrow E \text{ est une injection } \implies \Lambda^{n-1}(E) \overset{\Lambda^{n-1}(I_F)}{\longrightarrow} \Lambda^{n-1}(F),$$

$$\Lambda^{n-1}(I_F)\alpha(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \alpha(v_1, \ldots, v_{n-1}), v_i \in F.$$

Donc quand on dit que $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$, on est en train de considérer $i_X(\omega)_{|F^{n-1}}$ en réalité.

5 Analyse tensorielle sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$

5.1 Motivation

18-10-2023

On veut faire une analyse (calcul différentiel) sur les surfaces, courbes, variétés (les objets courbes de dimensions supérieures).

Définition 5.1. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert. Pour tout $a \in U$, l'espace tangent

$$T_a U \overset{\text{déf}}{=} \{a\} \times \mathbb{R}^n,$$

et est muni d'un espace vectoriel de manière suivante :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \underbrace{(a, u)}_{\in T_a U} + (a, v) = (a, u + v),$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, r(a, u) = (a, ru).$$

$T_a U$ devient un espace vectoriel linéairement isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Géométriquement on peut penser à $T_a U$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ basé en un point a.

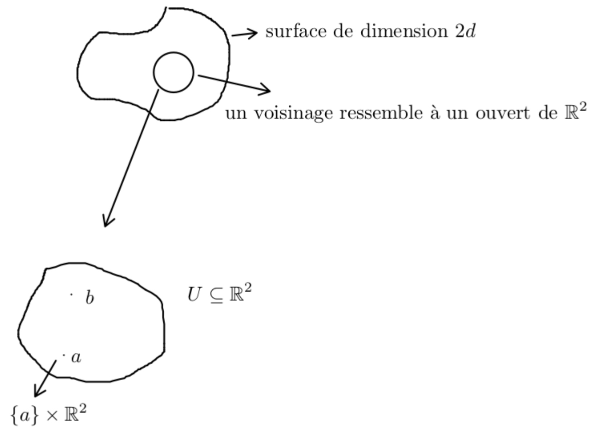

FIGURE 10 – Dans ce cas, $\mathbb{R}^2$ est tangent partout.

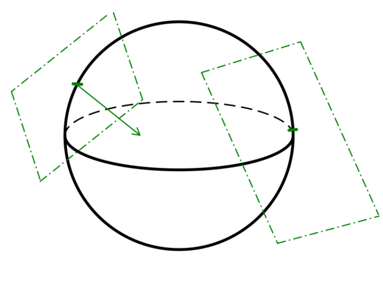

FIGURE 11 – Dans ce cas, chaque vecteur tangent est à l'intérieur et chaque plan tangent est différent.

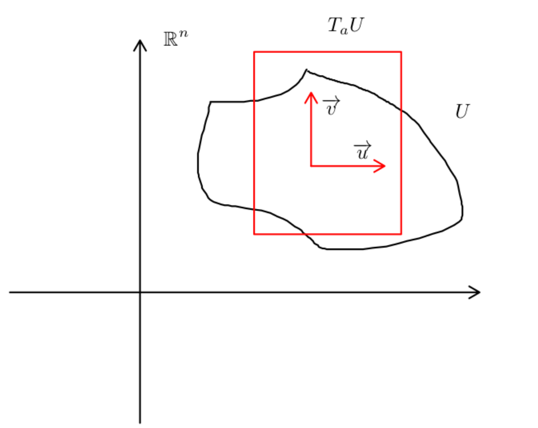

FIGURE 12 – Exemple d'un plan tangent à U.

5.2 Dérivation d'une fonction

Définition 5.2. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in U, Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. C'est une application linéaire. On va définir

$$d_a f = df(a) : T_aU \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

avec

$$\underbrace{df((a, \overrightarrow{v}))}_{a \in U, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n} = Df(a)(\overrightarrow{v}).$$

Si $a \neq b$, $d_a f$ ne peut pas agir sur T_aU (formellement, ce n'est pas défini.
On dit que $d_a f$ est la dérivée de f au point a.

Remarque (Personnelle). C'est la différentielle définie sur un espace tangent.

Remarque. Si $m = 1$, $d_a f \in \mathscr{L}(T_aU, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $d_a f \in (T_aU)^*$.

Remarque (Notation). $T_a^*U := (T_aU)^* \simeq \{a\} \times (\mathbb{R}^n)^*$.

Définition 5.3. Le fibré tangent sur U est

$$TU := \bigcup_{a \in U} \underset{(a, \overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n}{T_aU} \simeq U \times \mathbb{R}^n$$

et le fibré cotangent est

$$T^*U := \bigcup_{a \in U} \underset{(a, f), f \in (\mathbb{R}^*)^n}{T_a^*U} \simeq U \times (\mathbb{R}^*)^n.$$

Avec ce formalisme, la différentielle de $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par $df : U \longrightarrow T^*U$ et $\forall a \in U, df(a) = d_a f \in T_a^*U \subseteq T^*U$.

Remarque. ⚠ Une condition nécessaire pour qu'une application $\alpha : U \longrightarrow T^*U$ soit une différentielle soit dans la forme $\alpha = df$ est que pour tout $a \in U, \alpha(a) \in T^*U$.

Si on définit $\pi : T_a^* \longrightarrow U$ par $\pi(a, f) = a$, cette condition nécessaire est équivalente que de dire que $\pi \circ \alpha = \mathbb{1}_U$.

Exemple (De différentielle). Projection sur le composant j :
On a $x^j : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$x^j(a_1, \ldots, a_n) = a_j.$$

$$d_a x^j(a, \overrightarrow{v}) = Dx^j(a)(\overrightarrow{v}) = \left[\frac{\partial x^j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x^j}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [0, \ldots, 0, \underset{\text{en } j}{1}, 0, \ldots, 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_j.$$

On a $dx^j : U \longrightarrow T^*U$. Pour tout $a \in U$, $dx^j(a) \in T_a^*U$.
Donc $dx^j(a) = (a, f)$ où $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\overrightarrow{v}) = v_j$. Pour $e_i \in \mathbb{R}^n, f(e_i) = \delta_i^j$, donc $f = e_j$, l'élément de la base duale. On a alors

$$dx^j(a) = (a, e^j).$$

Donc $(dx^1(a), \ldots, dx^n(a))$ est une base naturelle pour T_a^*U. La base duale de cette base dans $T_aU \simeq (T_a^*U)^*$ est décrite par la notation suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(a)\right) = ((a, e_1), \ldots, (a, e_n)).$$

On a $\dfrac{\partial}{\partial x^j}(a) = (a, e_j), (dx^j(a))\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^j$.

On suppose que $E = T_aU$. On peut construire $\Omega^k(T_aU), \Omega_l(T_aU) = \Omega_l(T_a^*U), \Omega_l^k(T_aU)$ qui sont des (l,k)-tenseurs sur T_aU.

On peut aussi définir $\Lambda^k(T_aU)$ (tenseurs extérieurs covariants), $\Lambda_l(T_aU) = \Lambda^l(T_a^*U)$ (tenseurs extérieurs contravariants), $\Lambda_l^k(T_aU)$.

Définition 5.4. On définit

$$(T_l^k)_aU = \Omega_l^k(T_aU)$$

et

$$(\Lambda_l^k)_aU \overset{\text{déf}}{=} (\Lambda_l^k)(T_aU).$$

Si $k = l = 0$, on ne va pas les écrire.

Définition 5.5. On peut alors définir les fibrés tensoriels et tensoriels extérieurs par :

$$T_l^kU := \bigcup_{a\in U}(T_l^k)_aU \text{ et } \Lambda_l^k := \bigcup_{a\in U}(\Lambda_l^k)_aU.$$

Très souvent on va avoir affaire aux fibrés où soit k soit l vaut 0. Par exemple,

$$\Lambda^kU = \bigcup_{a\in U}\Lambda_a^kU = \bigcup_{a\in U}\Lambda^k(T_aU),$$
$$T^kU = \bigcup_{a\in U}T_a^kU = \bigcup_{a\in U}\Omega^k(T_aU).$$

Si $\alpha \in T_l^kU$, alors il existe $a \in U$ tel que $\alpha \in (T_l^k)_aU = \Omega_l^k(T_aU)$. Donc α est une application $(k+l)$-linéaire sur $\underbrace{T_1U \times \dots \times T_aU}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(T_aU)^* \times \dots \times (T_aU)^*}_{l \text{ fois}}$.

Mais une telle application peut être identifiée par une application $(k+l)$-linéaire sur

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \times \dots \times (\mathbb{R}^n)^*}_{l \text{ fois}}$$

avec les isomorphismes $T_aU \simeq \mathbb{R}^n$, $T_a^*U \simeq (\mathbb{R}^n)^*$.

Donc $\Omega_l^k(T_aU) \simeq \{a\} \times \Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ et on a une projection bien définie sur la première composante

$$\tau_l^k : \Omega_l^k(T_aU) \longrightarrow U, \tau_l^k(a, \tilde{\alpha}) = a.$$

Donc si $\alpha \in T_l^kU$, on a $\tau_l^k(\alpha)$ est le point $a \in U$ pour lequel $\alpha \in (T_l^k)_aU$.

Définition 5.6. Un champ tensoriel sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une application

$$\alpha : U \longrightarrow T_l^kU$$

telle que

$$\tau_l^k \circ \alpha = \mathbb{1}_U, \text{ avec } \tau_l^k(\alpha(a)) = a.$$

α est aussi appelée parfois une section du fibré tensoriel T_l^kU.

Si α est un champ tensoriel, pour tout $a \in U$, $\alpha(a) \in \Omega_l^k(T_aU)$.

FIGURE 13 – Exemple d'un champ tensoriel

L'ensemble $(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k})$ est une base de $\Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \leq n$. Maintenant la base de $\Omega_l^k(T_aU)$ devient

$$dx^{i_1}(a) \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}(a) \otimes \frac{\partial}{\partial dx^{j_1}}(a) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}(a).$$

Donc pour tout $a \in U$, il existe des coefficients $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}(a) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha(a) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n}} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(a) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}(a).$$

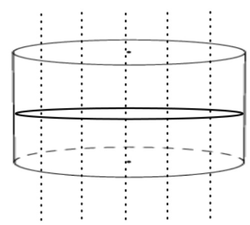

FIGURE 14 – Cylindre $S^1 \times \mathbb{R}^2$. On peut "couper" et considérer les cylindres $S^1 \times [-1, 1]$.

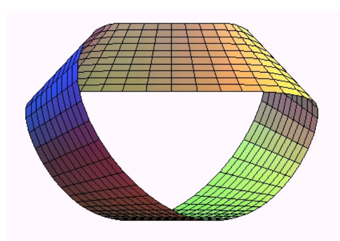

FIGURE 15 – Le Ruban de Mobius n'est pas équivalent à $S^1 \times [-1, 1]$

Donc

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \leq n} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

où $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application.

Définition 5.7. On dit que le champ vectoriel α est de classe $\mathcal{C}^r$ si $\forall i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$, le coefficient

$$\alpha_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} \in \mathcal{C}^r(U).$$

Donc on peut parler de régularité de $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n^{k+l}}$ directement, mais dans ce cas là, la définition revient à la même.

5.2.1 Exemple très important : la métrique riemanienne

Définition 5.8. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. Une métrique riemanienne sur U est un champ tensoriel 2-covariant (de type (0,2)) symétrique, positif-défini ur U.

Si g est une métrique riemanienne sur U, $g : U \longrightarrow T^2U$.
Pour tout $x \in U, g(a) \in \Omega^2(T_aU)$, avec $\tau^2 \circ g = \mathbb{1}_U$.

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in T_aU, g(a)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = g(a)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \text{ (symétrie).}$$

Donc cela revient à dire que $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU (mais qui dépend de a).

La métrique riemanienne est donc un champ tensoriel de type (0,2) tel que $\forall a \in U$, $g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU.

Donc
$$g = \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq n} g_{i_1 i_2} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Quelle est la condition sur les coefficients g_{ij} pour que g devienne une métrique riemanienne ?

Pour tout $x \in U$, on peut former la matrice

$$G_a = [g_{ij}(a)]_{n \times n}.$$

Proposition 5.1. $g(a)$ est une métrique riemanienne sur T_aU si et seulement si $g(a)$ est un produit scalaire.

Lemme. *$g(a)$ est un produit scalaire sur T_aU si et seulement si G_a est une matrice symétrique définie positive.*

Démonstration.
$$g(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(a) dx^i(a) \otimes dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \frac{\partial}{\partial dx^{j'}}\right)$$
$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(a) d^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a)\right) dx^j(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}(a)\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(a) \delta^i_{i'} \delta^j_{j'} = g_{i'j'}(a).$$

Donc $\forall i, j$,

$$g_{i'j'}(a) = g(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}(a)}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a)\right) = g(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}(a)}, \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a)\right) = g_{j'i'}(a),$$

ce qui implique que ${}^tG_a = G_a$, donc G_a est symétrique. ♣

Supposons que $g(a)$ est défini positif.

$$g(a)(\overrightarrow{v}) = \sum_{i,j} dx^i(a) \otimes dx^j(a)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}),$$

avec

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v} = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial}{\partial x^j} &= \sum_{i,j} g_{i,j}(a) dx^i(a) \otimes dx^j(a) \left(\sum_{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a), \sum_{j'} v^{j'} \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right) \\
&= \sum_{i,j} \sum_{i',j'} g_{ij}(a) v^{i'} v^{j'} dx^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(a) dx^j(a) \frac{\partial}{\partial x^{j'}}(a) \right) = \sum_{\substack{i,j \\ i'=i \\ j=j'}} g_{ij}(a) v^i v^j \\
&= [v^1 \ \dots \ v^n][G_a] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \tilde{\overrightarrow{v}} \cdot G_a \tilde{\overrightarrow{v}}.
\end{aligned}
$$

Donc $\tilde{\overrightarrow{v}} G_a \tilde{\overrightarrow{v}} \geq 0$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\overrightarrow{v}} \cdot G_a \tilde{\overrightarrow{v}} = 0 \iff \tilde{\overrightarrow{v}} = 0$, ce qui implique que G_a est défini positif.

Le sens réciproque est démontré par les mêmes calculs.

Commentaires

1. Si $G \in r^{n+n}$ est symétrique et défini positif, alors $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$
\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle_G := \overrightarrow{u} \cdot G \overrightarrow{v} =^t \overrightarrow{u} G \overrightarrow{v} = \langle \overrightarrow{u} \mid G \mid \overrightarrow{v} \rangle
$$

   est un produit scalaire.

2. Si $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe une matrice G dans $\mathbb{R}^{n+n}$ symétrique, définie positive telle que

$$
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle_* = \langle \overrightarrow{u} \mid G \mid \overrightarrow{v} \rangle,
$$

   avec $G = [g_{ij}]_{i,j}$ et $g_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle_*$.

Donc pour la métrique riemanienne,

$$
g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,
$$

avec

$$
g_{ij}(a) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a), \frac{\partial}{\partial x^j}(a) \right).
$$

Pour tout i, $\frac{\partial}{\partial x^i}(a) = (a, e_i) \in T_a U$ et

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(a) \right)
$$

est une base de $T_a U = \{a\} \times \mathbb{R}^n, a \in U$.

$g : U \longrightarrow T^2 U, \tau^2 \circ g(a) = a, \forall a \in U$ si et seulement si $\forall a \in U, g(a) \in T_a U$.

La métrique g est de classe $\mathcal{C}^r$ si et seulement si $\forall i, j, g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ (par définition).

Exemple (La métrique euclidienne).

$$
g = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i
$$

et

$$
\forall a \in U, G_a = I_{n+n} \in \mathbb{R}^{n+n}.
$$

Supposons $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ différentiable, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

On a, pour $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $(\gamma)'(t) = (x^1)'(t), \dots, (x^n)'(t)$,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b (\gamma'(t) \cdot I_{n+n} \gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid \gamma'(t) \rangle_{I_{n+n}}^{\frac{1}{2}} dt$$

On va définir, pour $\gamma : (a,b) \longrightarrow U$,

$$T\gamma : \underbrace{T_{(a,b)}}_{(t,\overrightarrow{v}),\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{TU}_{(c,\overrightarrow{w}),c\in U,\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^n}.$$

$g(\gamma(t))$ est un produit scalaire sur $T_{\gamma(t)}U$ et

$$T\gamma(t, \overrightarrow{v}) = (\gamma(t), \overrightarrow{v}\gamma'(t)).$$

Choisissons $\{1\}$ comme base de $\mathbb{R}$. Alors

1.
$$T\gamma_{|T_t(a,b)} : T_{t(a,b)} \longrightarrow T_{\gamma(t)}U.$$
2. $T\gamma(t,1) = (\gamma(t), \gamma'(t))$, avec $(t,1)$ élément de base pour $T_{t(a,b)}$.

On définit alors

$$L_g(\gamma) := \int_a^b g(\gamma(t))(T\gamma(t,1), T\gamma(t,1))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Si $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ et $G_c = [g_{ij}(c)], \forall c \in U$, on obtient

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Remarque. Si $c, d \in U, c \neq d, \forall \gamma : [a,b] \longrightarrow U$ tel que $\gamma(a) = c, \gamma(b) = d$ différentiable sur (a,b), $L_g(\gamma) > 0$.

Exercice 7. Si $\gamma'(t) = 0$, alors $\gamma(t) \equiv$ constant $\implies c = d$ impossible. Il exsite $t_0 \in (a,b)$ tel que $\gamma'(t_0) \neq 0 \implies \langle \gamma'(t_0) \mid G_{\gamma(t_0)} \mid \gamma'(t_0) \rangle > 0$. Utiliser la continuité des acteurs pour conclure.

Définition 5.9 (Rappel : distance, espace métrique)**.**

$$\forall x, y \in U, d_g(x,y) = \inf\{L_g(\gamma), \gamma : [a,b] \longrightarrow U, \gamma \text{ différentiable sur } [a,b], \gamma(a) = x, \gamma(b) = b\}.$$

Théorème 5.1. *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ connexe par arcs et g est une métrique riemanienne continue sur U, alors*

$$d_g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une distance sur U et (U, d_g) devient un espace métrique.

Remarque (Point technique)*.* Si U est connexe par arcs, $\forall x, y \in U, \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], U)$, avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, alors (analyse réelle, on utilise le fait que U est ouvert) il existe $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], U)$ avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Donc il existe un élément de $\{\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b],U) \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$, avec $a = 0, b = 1$. Comme $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $|\gamma'(t)|$ est continue sur $[a,b]$ implique que il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [a,b], \|\gamma'(t)\| \leq M$ et $G_{\gamma(t)} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n}$ est aussi continue.

Cela implique que $t \longmapsto \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle$ est continue sur $[a,b]$, ce qui implique que il existe $\tilde{M}$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{M},$$

ce qui implique que

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t) \mid G_{\gamma(t)} \mid \gamma'(t) \rangle \leq \tilde{M}(b-a) < +\infty,$$

donc $d_g(x,y)$ ne peut être $+\infty$, $d_g(x,y) \in \mathbb{R}_+$. Donc $d_g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ est justifié.

Remarque.

1. Si U n'est pas connexe, il faut faire attention que le chemin droit de x à y peut sortir de U et n'est pas éligible pour évaluer $L_g(\gamma)$.
2. Même si U est connexe, il n'y a pas de raison que le chemin sur le segment droit joignant x à y est le chemin le plus court :

$$\gamma(t) = x + t(y-x), \gamma : [0,1] \longrightarrow U.$$

Il peut arriver que

$$d_g(x,y) < L_g(\gamma) = \int_0^1 \langle y - x \mid G_{\gamma(t)} \mid y - x \rangle dt.$$

3. Pas toutes les métriques d des espaces métriques (X,d) où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont les distances d_g pour la métrique riemanienne. Par exemple, $d(x,y) = 1$ si $x = y$ et $d(x,y) = 0$ sinon ne peut pas dériver de la métrique riemanienne.
4. On peut remplacer les chemins γ par les chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux ou bien par les chemins polygonaux.

Définition 5.10. (U,g) où g est une métrique riemanienne et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un exemple d'une variété riemanienne.

Définition 5.11. Supposons que $(x, \overrightarrow{v}), (x, \overrightarrow{v}) \in T_xU$ pour $x \in U$. Alors l'angle entre ces deux vecteurs est défini par

$$\sphericalangle(x, \overrightarrow{u}), (x, \overrightarrow{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{g(x)((x, \overrightarrow{u}), (x, \overrightarrow{v}))}{\|(x, \overrightarrow{u})\|_g \|(x, \overrightarrow{v})\|}\right).$$

Remarque (Rappel)*.* Pour tout produit scalaire $\langle | \rangle_*$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valide, c'est-à-dire :

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, |\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle| \leq \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \rangle_*^{\frac{1}{2}} \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \rangle_*^{\frac{1}{2}}.$$

Donc pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in T_xU, |g(a)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \leq \|\overrightarrow{u}\|_g \|\overrightarrow{v}\|_g$.

Avec la notation qu'on a eu sur la norme $\|\cdot\|_g$, on a, pour tout $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable,

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|T\gamma(t,1)\|_g}_{(\gamma(t), \gamma'(t))} dt.$$

Exemple (Demi-plan de Poincaré (exemple de variété riemanienne) de dimension 2 et de géométrie non-euclidienne).

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

On définit une métrique riemanienne sur U par

$$g = \sum_{i=1}^{2} g_{ii} dx^i \otimes dx^i, g_{ij}(x, y) = \delta_{ij} \frac{1}{y^2} G_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Définition 5.12. Si pour une métrique riemanienne g donnée sur U, il existe une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall a \in U, g(a) = h(a) I_{n \times n} = \begin{bmatrix} h(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h(a) \end{bmatrix}.$$

On dit que g est une métrique conformale.

Donc la métrique

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

est une métrique riemanienne.

La géométrie induite par g sur le demi-plan est la géométrie hyperbolique, connue aussi sous le nom de la géométrie de Lebachowski.

Théorème 5.2. *Si g est une métrique conformale sur U et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in T_a U$ pour $a \in U$, alors*

$$\sphericalangle_g \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} = \sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$$

pour la métrique standart euclidienne.

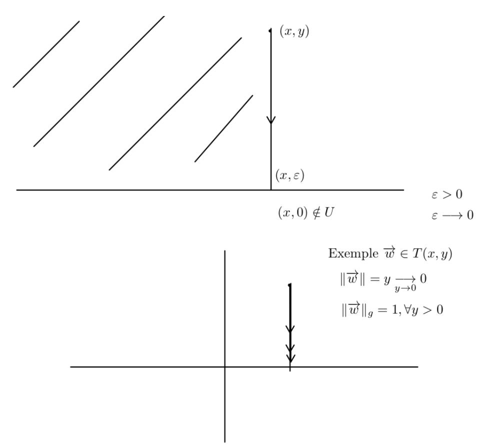

Figure 16 –

On a, pour le cas des figures 16 et 17, le calcul suivant, pour $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

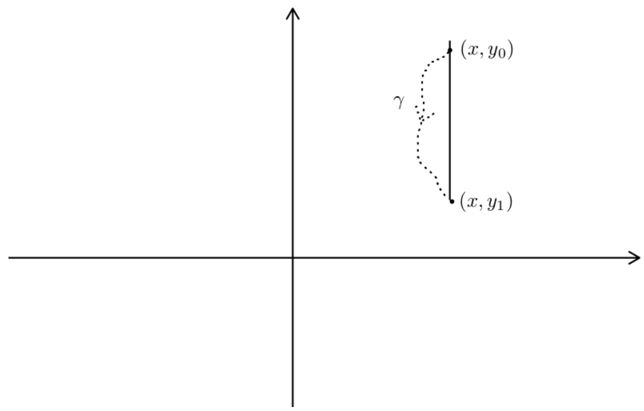

FIGURE 17 –

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \| \overbrace{y(t), \gamma'(t)}^{\in T_{\gamma}(t)} \|_g dt = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{y} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt.$$

On a $\eta(t) = (x, y_0) + t((x, y_1) - (x, y_0)) = (x, y_0 + t(y_1 - y_0))$ et $\eta'(t) = (0, y_1 - y_0)$, ce qui donne $\|\eta'(t) = |y_1 - y_0|\|$. Donc

$$L_g(y) = \int_0^1 \frac{\|\eta'(t)\|}{y_0 + t(y_1 - y_0)} dt = \int_0^1 \frac{|y_1 - y_0|}{y_0 + t(y_1 - y_0)} dt.$$

Notez que si l'on choisit $\tilde{\gamma}(t) = (x, y(t))$ en partant de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on a :

$$L_g(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \frac{\|\tilde{\gamma}(t)\|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt = L_g(\gamma).$$

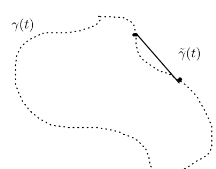

FIGURE 18 – Le chemin tout droit vertical est toujours le plus court

En conclusion, on a $L_g(\tilde{\gamma}) \leq L_g(\gamma)$, ce qui signifie que le chemin tout droit vertical est toujours le plus court par rapport à tous les chemis qui joignent (x, y_0) à (x, y_1) comme illustré dans la figure 18.

⚠ On n'a pas dit que η donne la paramétrisation du chemin le plus court entre (x, y_0) et (x, y_1). C'est une question à discuter plus tard.

Si $\overrightarrow{w} \in T_{(x,y)}U$ pour $(x, y) \in U$ quelconque, avec $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$, on a :

$$\|\overrightarrow{w}\|_g = (g(x, y)(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}))^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{y^2} \left\|\overrightarrow{w}^2\right\| \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|\overrightarrow{w}\|}{y}.$$

Si $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow U$, avec $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{w} = (0, -y) \in T_{(x,y)}U$, on cherche $\gamma(t)$ tel que

$$\gamma'(t) = (0, -\gamma_2(t)),$$

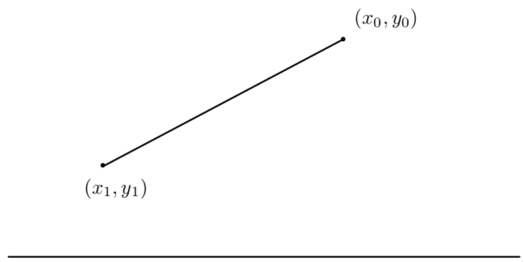

Figure 19 – La ligne droite n'est pas en général le chemin le plus court.

avec $\gamma(t) = (x(t), y(t)), \gamma_1(t) = x(t), \gamma_2(t) = y(t)$,

$$\begin{cases} x'(t) = 0, x(t) \equiv x_0 \\ y'(t) = 0, y(t) \equiv y_0, \end{cases}$$

alors $y(t) = y_0 e^{-t}$. Donc $\gamma(t) = (x_0, y_0 e^{-t})$ est le chemin partant de (x_0, y_0) d'une manière verticale vers l'horizon $y = 0$ avec la vitesse hyperbolique constante.

On voit bien que $\gamma(t) = (x_0, 0)$ donne $t = +\infty$.

Il y a aussi le disque de Poincaré (Escher hyperbolic disc).

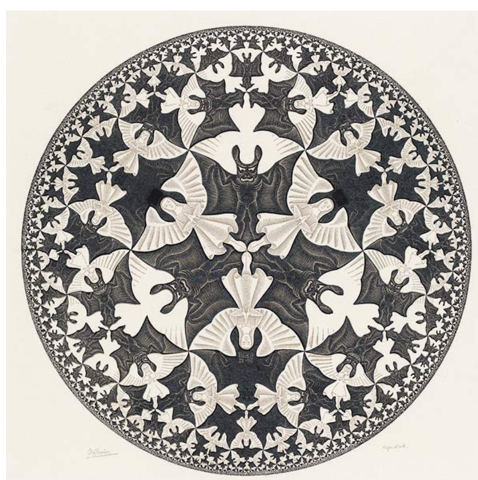

Figure 20 – Escher hyperbolic disc

Il faudra encore développer les techniques nécessaires pour pouvoir démontrer que les lignes droites par rapport à la métrique hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré sont effectivement des demi-cercles centrés sur la ligne $y = 0$. Ces lignes droites sont appelées les géodésies de (U, g) dans la géométrie différentielle.

Voici une première définition de la géodésie 21 (de manière rudimentaire plus géométrique que mécanique) :

Définition 5.13. On dit que $\gamma([a, b])$ est un segment géodésique dans (U, g) si pour $x = \gamma(a), y = \gamma(b), x, y \in U$,

$$d_g(x, y) = L_g(\gamma).$$

Une courbe $\mathscr{C} \subseteq U$ est une géodésie de (U, g) quand

$$C = \bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i$$

où chaque $\mathscr{C}_i$ est un segment géodésique tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, C_n \cap C_{n+1}$ est un singleton.

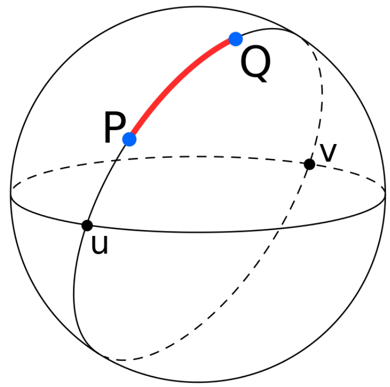

Figure 21 – Géodésie

Remarque (Rappel). Soit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit $f \in E^*$, avec $\dim(E) = n$. Alors il existe un vecteur $\overrightarrow{v_f}$ unique tel que

$$\forall \overrightarrow{w} \in E, f(\overrightarrow{w}) = \beta(\overrightarrow{v_f}, \overrightarrow{w}).$$

Exemple. Soit β donné par la matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive sur une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. On a

$$f(\overrightarrow{w}) = f\left(\sum_i w_i e_i\right) = \sum_i w_i f(e_i),$$

avec $\overrightarrow{v_f} = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ($(x_1, \dots, x_n)$ inconnues).

$$\beta(\overrightarrow{v_f}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{v_f} \mid B \mid \overrightarrow{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_j b_{ij} w_i,$$

$B = [b_{ij}]_{n \times n}$. On veut que $\forall (w_i)_{i=1}^n$,

$$\sum_i x_i f(e_i) = \sum_{i,j=1} x_j b_{ij} w_i$$

si et seulement si

$$\forall i, \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = f(e_i) \in \mathbb{R}.$$

$$[b_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

f étant donné, comme $\det(B) \neq 0$, il existe un unique $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait 14, et donc

$$\overrightarrow{v_f} = \sum_i x_i e_i$$

est la réponse unique.

Définition 5.14 (Rappel : gradient euclidien)**.** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable ,$U \subseteq \mathbb{R}^n$ et

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a)).$$

$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ application linéaire de $(\mathbb{R}^n)^*$.

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, Df(a)(\overrightarrow{v}) = \langle Df(a), \overrightarrow{v} \rangle$$

avec la métrique euclidienne.

Soit (U, g) une métrique riemanienne, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application partout différentiable $df : U \longrightarrow T^*U$,

$$\forall a \in U, d_a f \in T_a^* U = (T_a U)^*,$$

où $g(a)$ est un produit scalaire sur $T_a U$. On prend $E = T_a U, d_a f \in E^*, \beta = g(a)$.
Donc il y a un vecteur unique $\nabla_g f(a) \in T_a U$ tel que

$$\forall \overrightarrow{w} \in T_a U, d_a f(\overrightarrow{w}) = g(a)(\nabla_g f(a), \overrightarrow{w}).$$

Si $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $\nabla_g f(a) \in T_a U$, on a déjà vu que pour la métrique euclidienne $g = eu$,

$$\nabla_{eu} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On peut aussi écrire

$$\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n (?)_i \frac{\partial}{\partial x^i}(a).$$

Si $\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, on écrit

$$\nabla_g f(a) = \mid \nabla_g f(a) \rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} =?$$

Pour tout i, on a $d_a f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(a)\right) = g(a)(\nabla_g f(a), \frac{\partial}{\partial x^i}(a))$. Cela implique que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, G_a = [g_{ij}], g(a)\left(\nabla_g f(a), \frac{\partial}{\partial x^i}(a)\right) = \langle e_i \mid G_a \mid \nabla_g f(a) \rangle \, \partial_i f(a)$$

si et seulement si

$$G_a \mid \nabla_g f(a) \rangle = \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mid \nabla_g f(a) \rangle = G_a^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix}.$$

Donc $\mid \nabla_g f(a)\rangle = G_a^{-1} \mid \nabla f(a)\rangle$.

$G^{-1}(a)$ est souvent représentée par une matrice $g^{ij}(a)$. On a

$$\left(\sum_{k=1}^n g_{ik}(a)g^{kj}(a) = \delta_i^i\right), \sum_{k=1}^n g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$$

et

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [g^{ij}(a)] \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix},$$

donc $\forall i$, $\sum_{j=1}^n g^{ij}(a)\partial_j f(a)$.

Remarque. $\underbrace{d_a}_{\in T_a^* U} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \underbrace{dx^i(a)}_{(a,e^{ij})}$ (si $\alpha = \sum a_i e^i, a_i = \alpha(e_i)$ et $d_a f(e_i) = \partial_i f(a)$).

Donc $d_a f \in (T_a U)^* = \Omega^1(T_a U)$, c'est un tenseur covariant d'ordre 1.

Les coefficients sont indexés en base $\partial_i f(a)$. La base indexée en haut est $dx^i(a)$. On remarque que $\nabla_g f(a) \in T_a U = \Omega_1(T_a U)$, c'est donc un tenseur contravariant d'ordre 1. Donc

$$\nabla_g f(a) = \sum_{i=1}^n c^j \frac{\partial}{\partial x^i}(a).$$

On a pour tout i,

$$c^i = \sum_{j=1}^n g^{ij}(a)\partial_j f(a).$$

On écrit

$$\underset{\text{dans } \Omega_1(T_a U)}{\nabla_g f(a)} = g_\sharp(\underset{\text{dans } \Omega^1(T_a U)}{T_a U}).$$

Plus généralement, si $\alpha : U \longrightarrow T_l^k U$ est un champ tensoriel, i. e.

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_k}} a_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

et g est une métrique riemanienne pour $k \geq 1$, on peut créer un champ tensoriel dans T_{l+1}^{k-1} de trace g que l'on notera $g_\sharp \alpha : U \longrightarrow T_{l+1}^{k-1} U$ et il vaudra :

$$g_\sharp \alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \dots i_{k-1} \leq n \\ 1 \leq j_1 \dots j_{l+1} \leq n}} b_{i_1\dots i_{k-1}}^{j_1\dots j_{l+1}} dx^{i_1} \otimes \dots dx^{i_{k-1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_{l+1}}}.$$

Pour tous les choix, on a $b_{i_1\dots i_{k-1}}^{j_1\dots j_{l+1}} = g^{j_{l+1}i} a_{i_1\dots i_{k-1}}^{j_1\dots j_l} i$.

Exemple (Tenseurs de courbure de Riemann). Parfois il est écrit comme R_{jkl}^i de type (1,3) ou comme R_{ijkl} de type (0,4).

En fait $R_{jkl}^i = \sum_{s=1}^n g^{is} R_{sjkl}; R_{ijkl} = \sum_{s=1}^n g_{is} R_{jkl}^s$.

$df(a) \in T_a^* U$ ne dépend pas de g et $\nabla_g f(a) \in T_a U$. Alors

$$G_a \mid \nabla_g f(a)\rangle = \mid \nabla f(a)\rangle \ ; \qquad \underbrace{\partial_i f(a)}_{\text{les coefs de } df(a)} = \sum_{s=1}^{n} g_{is} C^s,$$

où $\nabla_g f(a) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

5.3 Champ de vecteurs

19-10-2023

Définition 5.15. Un champ de vecteurs est une application $X : U \longrightarrow TU$ telle que

$$\forall a \in U, \tau_1 \circ X(a) = a \ (\tau_1 \circ X = id),$$

c'est-à-dire X est un champ de tenseur 1-contravariant sur U. En équivalence, X est une section de fibré tangent TU.

X est un champ de tenseurs de type (1,0) et

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On a $\forall a \in U$,

$$X(a) = \sum_{i=1}^{n} X^i(a) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{(a,e_i)}.$$

Pour tout i, $X : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et on a $X \in C^*$ si et seulement si pour tout i, $X^i \in C^*$.

Exemple. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, par exemple $I = (a, b)$. Soit $\gamma : I \longrightarrow U$ une application continue, différentiable $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$. On a pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = ((\gamma^1)'(t), \dots, (\gamma^n)'(t)).$$

On introduit $T\gamma : TI \longrightarrow TU$ et on a $T\gamma(t, 1) = (\gamma(t), \gamma'(t)) \in T_{\gamma(t)}U$.
Si X est un champ de vecteurs, $X : U \longrightarrow TU$.

Définition 5.16. On dit que $\gamma : T \longrightarrow U$ est une courbe intégrale par le champ de vecteurs $X : U \longrightarrow TU$ si $\forall t \in I$, $T\gamma(t, 1) = X(\gamma(t))$.

Remarque. Soit $X : U \longrightarrow TU$ un champ de vecteurs, alors $X(a) \in T_aU = \{a\} \times \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $a \in U$, on a $X(a) = (a, \overrightarrow{F}(a))$ où $\overrightarrow{F}(a) \in \mathbb{R}^n$, donc $X(\gamma(t)) = (\gamma(t), \overrightarrow{F}(\gamma(t)))$ par $\overrightarrow{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Alors on a pour tout $t \in I$, $(\gamma(t), \gamma'(t)) = (\gamma(t), \overrightarrow{F}(\gamma)(t))$ si et seulement si $\forall t \in I, \gamma'(t) = \overrightarrow{F}(\gamma(t))$.

Remarque. $T\gamma(t,1) = \sum_{i=1}^{n}(\gamma^i)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(0))$. Pour $X : U \longrightarrow TU$ champ vectoriel, on a

$$X(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n}(X^i)(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial X^i}(\gamma(t)).$$

Ecrire cela est équivalent à :

$$\forall t \in I, (\gamma^i)'(t) = X^i(\gamma(t))$$

avec $(\overrightarrow{F} = (X^1, \ldots, X^n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$.

On voit bien qu'il s'agit d'une équation à dérivées ordinaires autonomes (i. e. F ne dépend que de $a \in U$ et pas de t directement) (EDO). On peut aussi appeler cela système de EDO.

$$\begin{cases} (\gamma^1)' = X^1(\gamma) \\ \vdots \\ (\gamma^n)' = X^n(\gamma) \end{cases} \quad \text{dans } I \iff \gamma' = \overrightarrow{F} \circ \gamma.$$

Remarque. En raison des observations précédentes, une courbe intégrale γ pour le champ de vecteurs X est aussi appelée une solution (pour les EDO).

Théorème 5.3 (Fondamental de l'existence et de l'unicité des solutions pour les EDO)**.** *Soient $X : U \longrightarrow TU$ un champ de vecteurs de régularité $\mathcal{C}^1$, $a_0 \in U, t_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *ALors il existe un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma : T \longrightarrow U$ tel que $\gamma(t_0) = a_0$ et γ est une courbe intégrale pour X.*
2. *Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $t_0 \in J$ et $\lambda : J \longrightarrow U$ est une courbe intégrale pour X telle que $\lambda(t_0) = a_0$, alors $\gamma = \lambda$ sur $I \cap J$.*

Remarque. Si $X(a_0) = 0 \in T_{a_0}U$, alors on peut observer que $I = \mathbb{R}$ et $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow U$. Pour tout $t, \gamma(t) = a_0$ est une solution (donc la solution unique maximale).

Si $\gamma(t) \equiv a_0$, alors $\gamma'(t) = 0 = F(\gamma(t)), \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque. Supposons que $\gamma : I \longrightarrow U$ est une solution pour $\gamma(t_0) = a$ et $\lambda : J \longrightarrow U$ est une solution pour $\lambda(t_1) = a_0$. Pour $t_0 \in I, t_1 \in J$ et $t_0 \neq t_1$, on définit

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t + t_1 - t_0) \text{ et}$$
$$\tilde{J} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_1 - t_0 \in J\}.$$

On voit bien que $t_0 \in \tilde{J}$. De plus,

$$\tilde{\lambda} = \lambda'(\underbrace{t + t_1 - t_0}_{\tilde{t} \in J}) = \overrightarrow{F}(\lambda(t + t_1 - t_0)) = \overrightarrow{F}(\tilde{\lambda}(t)), \forall t \in \tilde{J}.$$

On a $\tilde{\lambda}(t_0) = \lambda(t_0 + t_1 - t_0) = \lambda(t_1) = a_0$. Par unicité, on a alors $\tilde{\lambda} = \gamma$ sur $I \cap \tilde{J}$. En particulier, $a_0 \in \tilde{\lambda}(I \cap \tilde{J}) = \gamma(I \cap \tilde{J})$. Donc il y a un sous-intervalle de J défini comme ceci :

$$\overline{J} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_a - t_1 \in I \cap \tilde{J}\}$$

pour lequel $\lambda(\overline{J}) = \gamma(I \cap \tilde{J})$.

⚠ $t_1 \in J$.

Donc quand on regarde l'ensemble de toutes les courbes intégrales, ce n'est pas possible d'observer les figures suivantes (si $X \in \mathcal{C}^1$).

Pour toute courbe intégrale, on peut faire un changement de variable $\tilde{t} = t + t_0, \overline{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$ pour lequel on obtient $\tilde{\gamma}(0) = a_0$ (en principe on peut, sans perdre en généralité, supposer que $t_0 = 0$ pour les systèmes autonomes d'EDO).

On définit

$$\mathscr{C}_a = \{(I, \gamma) \mid \gamma(0) = a, \gamma : I \longrightarrow U \text{ est une solution } 0 \in I \text{ intervalle ouvert}\}.$$

On pose aussi $I_a := \bigcup_{(I,\gamma)\in\mathscr{C}_a} I$. I_a est un intervalle ouvert. On a $0 \in I$ pour tout $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$, donc $0 \in I_a$. On va définir $\underset{t\in I_a}{\gamma_a} : I_a \longrightarrow U$ par $\gamma_a(t) = \gamma(t)$ si $t \in I$ pour un choix de $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$. On observe que pour tout $t \in I_a$, il y a au moins une paire $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$ telle que $t \in I$. Donc $\gamma_a(t)$ peut être défini.

Maintenant, si $t \in J$ pour $(J, \lambda) \in \mathscr{C}_a$, on a par unicité

$$\lambda \left.\right|_{I\cap J} = \gamma \left.\right|_{I\cap J},$$

mais $t \in I \cap J$, donc $\lambda(t) = \gamma(t)$, donc il n'y a pas d'ambiguité pour $\gamma_a(t)$.

On observe que $\forall (I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$ par l'unicité que l'on vient d'utiliser, on a

$$\gamma_a \left.\right|_I \gamma,$$

donc γ_a est une extension de toutes les possibilités $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$. Ainsi, pour tout $t \in I_a$, il existe $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$ tel que $t \in I$ et $\gamma_a'(t) = \gamma'(t) = \overrightarrow{F}(\gamma(t)) = \overrightarrow{F}(\gamma_a(t))$.

Donc $\gamma_a : I_a \longrightarrow U$ est elle-même une courbe intégrale $(I_a, \gamma_a) \in \mathscr{C}_a$ et pour tout $(I, \gamma) \in \mathscr{C}_a$, on a $I \subset I_a$ et $\gamma = \gamma_a$.

Définition 5.17. On appelle $\gamma_a : I_a \longrightarrow U$ la solution maximale pour $\gamma_a(0) = a$, et I_a est l'intervalle maximal de solution.

Exemple. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $\overrightarrow{F}(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $(V = \mathbb{R}^n)$.

Alors $\gamma_a(t) = e^{tA}a, I_a = \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ est la solution maximale pour $\gamma_a(0) = a$.

On rappelle que pour une matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

$$e^B \overset{\text{déf}}{:=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

On a alors

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

On a $U = \mathbb{R}, F(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}, X(a) = (a, a^2) \in T_a\mathbb{R}$. On cherche une solution $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}, \gamma(0) = a$ et $\gamma'(t) = F(\gamma(t)) = (\gamma(t))^2$.

Exemple. On pose $\gamma' = \gamma^2, \gamma(0) = a$. On a l'égalité $\dfrac{\gamma'}{\gamma^2}(t) = 1$, donc

$$\int_0^t \frac{\gamma'}{\gamma^2}(s)ds = \int_0^t 1ds.$$

On a $U = \gamma(s)$, donc $dU = \gamma'(s)ds$. On obtient alors

$$\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \frac{dU}{U^2} = t.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\gamma(t)} = -t + \frac{1}{\gamma(0)} = \frac{-t\gamma(0)+1}{\gamma(0)},$$

donc

$$\gamma(t) = \frac{\gamma(0)}{-t\gamma(0)+1} = \frac{a}{-t+1} = \frac{a}{1-ta}.$$

Donc

$$\left[-\frac{1}{u}\right]_{\gamma(a)}^{\gamma(t)} = t \implies -\frac{1}{\gamma(t)} + \frac{1}{\gamma(0)} = t.$$

Donc pour

$$\begin{cases} a = 0, I_0 = \mathbb{R}, \gamma_0(t) \equiv 0 \\ a > 0, I_a = (-\infty, \frac{1}{a}), \gamma_a(t) = \frac{a}{1-ta} \\ a < 0, I_a = (\frac{1}{a}, +\infty), \gamma_a(t) = \frac{a}{1-ta}. \end{cases}$$

Supposons que $X \in \mathcal{C}^1$. Le champ de vecteur est tel que pour tout $a \in V$, I_a est l'intervalle maximal de solution

$$\tilde{U} = \bigcup_{a \in U} I_a \times \{a\} \subseteq \mathbb{R} \times U.$$

Si $I_a = (\alpha_a, \omega_a), \alpha_a, \omega_a \in \mathbb{R} \cup \{\pm a\}$.

Définition 5.18. Soit $\Phi : \tilde{U} \longrightarrow U$ telle que $\forall (t,x) \in \tilde{U}, t \in I_x$ et $\Phi(t,x) = \gamma_x(t)$ (γ_x est solution maximale sur I_x telle que $\gamma_x(0) = x$).

Théorème 5.4. *$\tilde{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si X est de classe $\mathcal{C}^n$, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^r$.*

*Φ est appelée le **flux** de X.*

25-10-2023

Exemple. On définit $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $X(x = (x_1, x_2)) = (x, x^{\perp}) \in T_x\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et $\gamma_x(t) = e^{At}x, I_x = (-\infty, \infty)$. On a

$$\gamma_x(t) = (\cos(t)x_1 - \sin(t)x_2), \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2 = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

On calcule $\gamma_x'(t) = (-\sin(t)x_1 - \cos(t)x_2, \cos(t)x_1 - \sin(t)x_2) = (\gamma_x(t))^{\perp}$. C'est une rotation d'angle t de point x autour du point 0.

Remarque. Si $x = 0$, alors $\gamma_0 = 0$.

Exemple. $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T\mathbb{R}^2$, $X(x) = (x, -x) \in T_x\mathbb{R}^2$.

On a

$$-x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

$\gamma_x(t) = e^{-t}x, I_x = (-\infty, \infty)$ et $\gamma_x'(t) = -e^{-t}x = -\gamma_x(t)$ et $\gamma_x(0) = x$.

On a

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}x = 0 \in \mathbb{R}^2$$
$$\lim_{-t\to-\infty} \left\| e^{-t}x \right\| = +\infty.$$

Remarque (Sur la taille de I_x). On définit

$$K(x) = \max_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \left\| \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(x) \right\|$$

et

$$b = \sup\{r > 0, B(x, r) \subset U\}.$$

Alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de U (mais dépendant de ces deux paramètres) tel que

$$|I_x| \geq C\left(\frac{b}{\|X(w)\|}, K(x)\right).$$

$|I_x|$ est plus large quand $\dfrac{b}{\|X(x)\|}$ est plus large et $K(x)$ est plus petit.

On sait que $b(x), \|X(x)\|$ et $K(x)$ sont continues en x, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } \|y - x\| < \delta, \text{ alors } |I_y| \geq |I_x| - \varepsilon.$$

Comme $|I_x| > 0$, on peut prendre $\varepsilon = \dfrac{|I_x|}{2}$, on obtient $\delta > 0$ tel que

$$\|y - x\| < \delta \implies |I_y| \geq |I_x| - \frac{|I_x|}{2} = \frac{|I_x|}{2}, \tag{15}$$

ce qui implique que

$$\forall (t, x) \in \tilde{U}, (t, x) \in \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta, s \in I_y\} \subseteq \tilde{U}.$$

Indication : l'argument sur la taille de l'intervalle d'existence devrait être transporté et basé sur $t_0 = t$. Il faudra appliquer 15 autour de $t_0 = t$ et non à 0.

Définition 5.19. Le flux $\Phi : \tilde{U} \longrightarrow U$ associé à X est tel que

$$\forall (t, x) \in \tilde{U}, \phi(t, x) := \gamma_x(t).$$

On écrit aussi $\Phi_t(x)$.

Remarque. $X \in \mathcal{C}^r \implies \phi \in \mathcal{C}^r$ (il est évident que γ_x dépend régulièrement en t, $(\gamma_x^i)'(t) = X^i(\gamma_x)(t)$), mais ici on réclame aussi la dépendance régulière de γ_x en x.

Pour t fixé, $\Phi_t(x)$ est défini pour $U_t = \{x \in U \mid t \in I_x\}$ qui est un sous-ensemble ouvert de U. Donc $\Phi_t : U_t \longrightarrow U$ est une application $X \in \mathcal{C}^r \implies \phi_t \in \mathcal{C}^r$.

On a $\Phi_0(x) = x$ et $\Phi_0 = \mathrm{id}_U$.

Remarque. Si $\Phi_t(x)$ et $\Phi_s(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{s+t}(x)$ sont définis, alors

$$\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x)).$$

Démonstration. On va définir pour t fixé $\eta(s) := \Phi_s(\Phi_t(x))$. On a $\Gamma(s) = \Phi_{s+t}(x)$. On a

$$\eta(0) = \Phi_0(\Phi_t(x)) = \Phi_t(x) = y, \Gamma(0) = \Phi_{0+t}(x) = \Phi_t(x) = y.$$

De plus, si $\eta(s) = \gamma_{\Phi_t(x)}(s)$, alors

$$\eta'(s) = \gamma_{\Phi_t(x)}(s) = \sum_{i=1}^{n} X^i(\gamma_{\Phi_t(x)}(s))\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_{\Phi_{t(x)}(s)}).$$

Aussi $\Gamma(s) = \gamma_x(s+t)$ et

$$\begin{aligned}\Gamma'(s) = \frac{d}{ds}\gamma_x(s+t) = \gamma_x'(s+t)\underbrace{\frac{d}{ds}(s+t)}_{\equiv 1} = \gamma_x'(s+t) &= \sum_{i=1}^{n} X^i(\gamma_x(s+t))\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_x(s+t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X^i(\Gamma(s))\frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma(s)).\end{aligned}$$

Donc η et γ tous les deux sont une solution (courbe intégrale) de x avec $\eta(0) = \Gamma(0) = y$, donc ils devraient être égaux par unicité.

Pour toit s, on a $\eta(s) = \Gamma(s)$, ce qui implique que $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$. ♣

Remarque. Une observation plus fine démontre que si deux d'entre les trois acteurs $\Phi_t(x), \Phi_s(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{t+s}(x)$ est défini, alors le troisième aussi est défini et on a $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$.

En particulier, si $\Phi_t(x)$ est défini (pour $t \in I_x$), alors on a $\Phi_{-t}(\Phi_t(x))$ est aussi défini et on a :

$$x = \Phi_{-t}(\Phi_t(x)).$$

Noter qu'on a pris $s = -t$ et $\Phi_0(x) = x$ est toujours défini.

Donc $\Phi_t(U_t) = U_{-t}$ et $\Phi_t : U_t \longrightarrow U_{-t}$ est un difféomorphisme de régularité $\mathcal{C}^r$ si $X \in \mathcal{C}^r$.

Proposition 5.2. Soit X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur U, $K \subset U$ compact. On fixe $T \in \mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $t \in I_x$ tel que $t \geq T$, on a $\Phi_t(x) \in K$, alors $\omega_x = +\infty$ (donc $I_x = (\omega_x, +\infty)$).

(De même si $\forall t \leq T, \Phi_t(x) \in K$, alors $I_x = (-\infty, \omega_x)$).

Démonstration. Pour tout $x \in U, \Phi_t(x) = \gamma_x(t)$ est défini pour un temps t qui dépend de $C\left(\frac{b(x)}{\|X(x)\|}, K(x)\right)$ continue en x et positive. Donc il existe $c > 0$ dépendant de K tel que $\forall x \in K\, C\left(\frac{b(x)}{\|X(x)\|}, K(x)\right) \geq c > 0$. (le minimum de f sur K est atteint pour f continue et K compact).

Pour tout $x \in K, \Phi_t(x)$est défini pour $t \in \left[0, \frac{c}{2}\right] \subset I_x$. On raisonne par contradiction. Supposons que $\forall t \geq T, \Phi_t(x) \in K$ et $\omega_x < +\infty$, il existe $t_k \longrightarrow \omega_x \in \mathbb{R}, I_x = (\alpha_x, \omega_x)$ avec (t_k) une suite bornée.

$\{\Phi_{t_k}(x)\} \subseteq K$, il existe une sous suite $\Phi_{t_{k_j}}(x)$ qui converge dans K par la compacité. Alors $\Phi_{t_{k_j}}(x) \longrightarrow y \in K, t_{k_j} \longrightarrow \omega_x$.

On va prendre j assez grand tel que $0 < \omega_x - t_{k_j} < \frac{c}{2}$.

Pour $\Phi_{t_{k_j}}(x) \in K$, $\Phi_{\omega_x - t_{k_j}}(\Phi_{t_{k_j}}(x))$ est défini.

$\Phi_{t_{k_j}}(x)$ est défini. Alors

$$\Phi_{s+t}(x) = \Phi_{\omega_x - tk_j + tk_j}(x) = \Phi_{\omega_x}(x)$$

est défini. Comme $t_{k_j} \longrightarrow \omega_x$, alors $\Phi_{tk_j}(x) \longrightarrow \Phi_{\omega_j}(x)$. Or comme on savait que $\Phi_{tk_j}(x) \longrightarrow y$, on a alors $y = \Phi_{\omega_x}(x)$.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que Φ_ε est défini et $\Phi_\varepsilon(y) = \Phi_\varepsilon(\Phi_{\omega_x}(x))$ est défini. Donc $\Phi_{\omega_x+\varepsilon}(x)$ est défini, donc $\omega_x + \varepsilon \in I_x = (-\infty, \omega_x)$ ce qui est contradictoire ! ♣

5.4 L'application tangente

On suppose $f : U \longrightarrow V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$. On suppose que f est différentiable en $a \in U$. On a $Df(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On a $df(a) : T_aU \longrightarrow \mathbb{R}^m$ avec $df(a)(a, \overrightarrow{v}) = Df(a)(\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ et $(a, \overrightarrow{v}) \in T_aU$.

Définition 5.20. L'application tangente $Tf : TU \longrightarrow TV$ est définie par :

$$\forall (a, \overrightarrow{v}) \in T_aU \subset TU, Tf(a, \overrightarrow{v}) = (f(a), Df(a)(\overrightarrow{v})) \in T_{f(a)V \subseteq TV}.$$

$Tf_{|T_aU} : T_aU \longrightarrow T_{f(a)}U$ est linéaire.

Définition 5.21. On définit $T_af := Tf_{|T_aU}$, avec

$$T_af(a, \overrightarrow{v}) = (f(a), Df(a)(\overrightarrow{v})).$$

Lorsque $m = 1, f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $d_af : T_aU \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire, donc $d_af \in (T_aU)^*$, donc $df : U \longrightarrow T^*U$. C'est un champ covariant.

Maintenant on suppose que $Tf : TU \longrightarrow T\mathbb{R}$ et $T_af : \underbrace{T_aU}_{\{a\}\times\mathbb{R}} \longrightarrow \{f(a)\} \times \mathbb{R}$ linéaire. On ne peut plus dire que c'est une application de l'espace dual, mais elle admet quand même des propriétés intéressantes.

Exemple. Soit $i : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une inclusion (injection canonique) avec $i(x) = x$. On prend $Ti : TU \longrightarrow T\mathbb{R}^n$, on a $Ti(x, \overrightarrow{v}) = (x, \overrightarrow{v})$, car $Di(x)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Donc Ti est l'inclusion de TU dans $T\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.3. Si $f : U \longrightarrow V$ est différentiable en $x \in U$ et $g : V \longrightarrow W$ est différentiable en $f(x)$ et $W \subseteq \mathbb{R}^p$. Alors $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

Vérification. $Tf : TU \longrightarrow TV, \forall (x, \overrightarrow{v}) \in T_xU \subseteq TU$, avec

$$Tf(x, \overrightarrow{v}) = (f(x), Df(x)(\overrightarrow{v})).$$

On a de plus $Tg : TV \longrightarrow TW, \forall (y, \overrightarrow{w}) \in T_yV \subseteq TV$, avec

$$Tg(y, \overrightarrow{w}) = (g(y), Dg(y)(\overrightarrow{w})).$$

Alors

$$\begin{aligned} Tg \circ Tf(x, \overrightarrow{v}) &= Tg(f(x), Df(x)(\overrightarrow{v})) = (g(f(x)))((Df(x))(\overrightarrow{v})) \\ &= ((g \circ f)(x), (Dg(f(x)) \circ Df(x))(\overrightarrow{v})) = T(g \circ f)(x, \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

♣

Exemple (Un cas particulier). $U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et on a $f \circ h : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $d(f \circ h) : U \longrightarrow T^*U$. On a donc $Th : TU \longrightarrow TV$, $df : TU \longrightarrow \mathbb{R}$ et $d(f \circ h) : TU \longrightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. En effet $Tf = (f, Df), Th = (h, Dh)$ et d'une part $T(f \circ h) = (f \circ h, D(f \circ h))$ et d'autre part $Tf \circ Th = (f \circ h, D(f \circ h))$.

$Th(x, \overrightarrow{v}) = (h(x), Dh(x)(\overrightarrow{v}))$, $T(f \circ h)(x, \overrightarrow{v}) = (f \circ h(x), D(f \circ h)(x)(\overrightarrow{v}))$ et

$$Tf \circ Th(x, \overrightarrow{v}) = (f \circ h(x), Df(h(x))(Dh(x)(\overrightarrow{v}))).$$

En fait $df(h(x))(h(x), Dh(x)(\overrightarrow{v}))$ c'est $d(f \circ h)(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})$ évalué à $(x, \overrightarrow{v}) \in TU$. ♣

Rappel Si $T : E \longrightarrow F$ linéaire, on rappelle que l'on peut définir $\Omega^k(T), \Omega_k(T), \ldots$

Pour les applications tangentes, on peut ausi définir pour tout k :

$$\Omega^k(T_x f) : \Omega^k(T_{f(x)} V) \longrightarrow \Omega^k(T_x U), \ldots$$

et tous les autres espaces de tenseurs covariants, contravariants,...

Rappel On a dit que

$$\bigcup_{x \in U} (\Omega^k(T_x U)) = T^k U.$$

Définition 5.22. On définit $\Omega^k f : T^k V \longrightarrow T^k U$ une fonction, définie seulement pour tout élément $\alpha \in T^k V$ tel que $\tau^k(\alpha) \in f(U)$ (la projection sur la k-ième coordonnée).

On a $\Omega^k(\alpha) = \Omega^k(T_x f)(\alpha)$ lorsque $\alpha \in \Omega^k(T_{f(x)} V)$.

Pour $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k} \in T_x U$, on a

$$\Omega^k f(\alpha)(\overbrace{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}}^{\in (T_x U)^k, k \text{ fois}}) = \alpha(T_x f(\overrightarrow{v_1}, \ldots, T_x f(\overrightarrow{v_k}))).$$

Définition 5.23. On dit que $\Omega^k f(\alpha) \in \Omega^k(T_x f) \subseteq T^k U$, pour $\alpha \in \Omega^k(F_{f(x)} V) \subseteq T^k V$ est le “pull-back” (le retiré) de α sous l'action de l'application tangente $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$.

Par contre, pour tout $\alpha \in \Omega_l(T_x U)$ et $f : U \longrightarrow V$ différentiable en $x \in U$, on définit $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$, et on a alors

$$\Omega_l f \overset{\text{déf}}{=} \Omega_l(T_x f) : T_l U \longrightarrow T_l V$$

et on a $\Omega_l f(\alpha) \in \Omega_l(T_{f(x)} V) \subseteq T_l V$. α étant un élément de $\Omega_l(T_x U)$, il est une application l-linéaire sur $(T_x U)^*$ (contravariant). On cherche une application l-linéaire sur $(T_{f(x)} V)^*$.

Prenons donc un l-covecteur $h_1, \ldots, h_l \in T(T_{f(x)} V)^* = \mathscr{L}(T_{f(x)} V, \mathbb{R})$. On doit définir

$$\Omega_l f(\alpha)(h_1, \ldots, h_l) = \alpha(h_1 \circ T_x f, h_2 \circ T_x f, \ldots, h_l \circ T_x f).$$

Notez que si $h_i \in (T_{f(x)} V)^*$, $h_i : T_{f(x)} V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$, alors on obtient que $h_i \circ T_x f : T_x U \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire, donc $h_i \circ T_x f \in (T_x U)^*$.

On peut aussi interpréter $\Omega_l f(\alpha)$ de la manière suivante : si $T_x f : T_x U \longrightarrow T_{f(x)} V$ est donné, on a $(T_x f)^* : (T_{f(x)} V)^* \longrightarrow (T_x U)^*$ et

$$\Omega_l f(\alpha)(\underbrace{h_1, \ldots, h_l}_{\in (T_{f(x)V} \times \cdots \times (T_{f(x)} V^*))}) = \alpha((T_x f)^*(h_1), \ldots, (T_x f)^*(h_l)).$$

Définition 5.24. Si $\alpha \in \Omega_l(T_xU) \subseteq T_lU$, on dit que $\Omega_l f(a)$ est le "push-forward"(le poussé) de α sous l'action de T_xf.

Chaque vecteur $\overrightarrow{v} \in T_xU$ est un objet contravariant et il agit sur $(T_xU)^*$ par bidualité, i. e. $T_xU \simeq (T_xU)^{**}$.

Ici, $l = 1$, $\overrightarrow{v} \in T_xU$. Question : qu'est-ce $\Omega_1 f(\overrightarrow{v})$?

Démonstration. Prenons $h \in (T_{f(x)}V)^*$,

$$\Omega_1 f(\overrightarrow{v})(h) = \overrightarrow{v}(\Omega_1(T_xf)(h)) = \overrightarrow{v}((T_xf)^*(h)) = \overrightarrow{v}(h \circ T_xf) = (h \circ T_xf)(\overrightarrow{v}).$$

♣

Donc on a vu que pour tout $h \in (T_{f(x)}V)^*$, $\underbrace{\Omega_1 f(\overrightarrow{v})}_{\in T_{f(x)V}}(\underbrace{h}_{\in (T_{f(x)}V)^*}) = h(T_xf(\overrightarrow{v}))$.

On a donc $\forall h \in (T_{f(x)}V)^*, h(\Omega_1 f(\overrightarrow{v})) = h(T_xf(\overrightarrow{v}))$. Cela implique que $\Omega_1 f(\overrightarrow{v}) = T_xf(\overrightarrow{v}), \forall \overrightarrow{v} \in T_xU$.

Exercice 8.

Définition 5.25. Si $\alpha \in \Lambda^k(T_{f(x)}V)$, alors

$$\Lambda^k f(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k f(\alpha) \in \Lambda^k(T_xU)$$

si (α est extérieur).

Si $\alpha \in \Lambda_l(T_xU)$,

$$\Lambda_l f(\alpha) = \Omega_l f(\alpha) \in \Lambda_l(T_{f(x)}V).$$

Définition 5.26. Soit $F : U \longrightarrow V$ différentiable et $\alpha : V \longrightarrow T^kV$ un champ de tenseurs de type $(0, k)$ (une section de fibré tensoriel k-covariant), i. e. $\forall y \in V, \alpha(y) \in T^k_yV = \Omega^k(T_yV)$.

Le pull-back de α sur U, désigné par $f^*\alpha$ est un champ de tenseurs de type $(0, k)$ sur U, donc $f^*\alpha : U \longrightarrow T^kU$.

On a

$$\underbrace{f^*\alpha(x)}_{\in \Omega^k(T_xU)} = \Omega^k f(\underbrace{\alpha(f(x))}_{\in \Omega^k(T_{f(x)V})}).$$

Définition 5.27. Si β est un champ de tenseurs l-contravariant (de type $(0, l)$) sur U avec $\beta : U \longrightarrow T_lU, \forall x \in U, \beta(x) \in \Omega_l(T_xU)$.

On définit, pour f **injectif**, le "push-forward" de β désigné par $f_\sharp\beta$. $f_\sharp\beta$ est un champ de tenseur de type $(l, 0)$ sur $f(U) \subseteq V$ tel que

$$\forall y = f(x) \in f(U), f_\sharp\beta(y) \in \Omega_l(T_yV).$$

On suppose maintenant que $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^n$ et $h : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$.

Si X est un champ de vecteurs sur U, alors $h_\sharp X$ est un champ de vecteurs sur $h(U)$ et comme h est injective, on aura $V = h(U)$. On aura

$$h_\sharp X(h(x)) = T_x h(X(x)).$$

Si $h \in \mathcal{C}^r$, $X \in \mathcal{C}^s$, on aura $h_\sharp X \in \mathcal{C}^{\min(r-1,s)}$.

Notez que $h_\sharp X(y) = Th(X(h^{-1}(y))) = (y, Dh(h^{-1}y)(X(h^{-1}(y))))$.

On a
$$h_\sharp X = Th \circ X \circ h^{-1}.$$

Avec les hypothèses $h : U \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, si $X \in \mathcal{C}^1$ est un champ de vecteurs sur U avec le flux Φ, alors $h_\sharp X$ est un champ de vecteurs sur V de régularité $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas-là, si ψ est le flux de $h_\sharp Y$, on a

$$\psi_t = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}.$$

Si $\Phi_t : \underbrace{U_t}_{\subseteq U} \longrightarrow \Phi_t(U_t)$ et $\psi : \underbrace{V_t}_{\subseteq V} \longrightarrow \psi_t(V_t)$, les deux sont des difféomorphismes de régularité $\mathcal{C}^1$. On aura :

$$h^{-1}(V_t) = U_t \ (h(U_t) = V_t)$$
$$h(\Phi_t(U_t)) = \psi_t(V_t)$$

Il y a une consistance au niveau des domaines de définition.

Démonstration. $\Phi_t \overset{\text{déf}}{=} \gamma_x(t)$ la courbe intégrale de X.

On a $\eta_{h(x)}(t) := h \circ \gamma_x(t) = h(\Phi_t(x))$ $(\eta_{h(x)} = h \circ \gamma_x)$. On calcule $\eta_{h(x)} = h(\gamma_x(0)) = h(x)$, donc

$$T_{\eta_{h(x)}} = Th \circ T\gamma_x.$$

Alors

$$T_{\eta_{h(x)}}\left(\frac{d}{dt}(t)\right) = Th \circ \overbrace{T_{\gamma_x}\left(\frac{d}{dt}(t)\right)} = Th(X(\gamma_x(t))) = h_\sharp X(h(\gamma_x(t))) = h_\sharp X(\eta_{h(x)}(t)).$$

On a

$$\begin{cases} \eta_{h(x)}(0) = h(x) \\ T_{\eta_{h(x)}}\left(\frac{d}{dt}(t)\right) = (h_\sharp X)(\eta_{h(x)}(t)), \end{cases}$$

donc $\eta_{h(x)}$ est une courbe intégrale pour $h_\sharp X$ et en plus on a

$$\psi(t, h(x)) = \eta_{h(x)}(t),$$

donc
$$\psi_t(h(x)) = h(\gamma_n(t)) = h(\Phi_t(x)).$$

On a alors

$$\psi_t \circ h = h \circ \Phi_t \implies \psi_t = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}. \tag{16}$$

♣

Remarque. Si $X \in \mathcal{C}^\infty$, alors on a $\Phi_t : U_t \longrightarrow \Phi_t(U_t)$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. On peut, dans un cas spécial, utiliser $h = \Phi_t, V = \Phi_t(U_t)$. Le flux $(\Phi)_\sharp X$ sur V est donnée par

$$h \circ \phi_t \circ h^{-1} = \Phi_t \circ \Phi_t \circ (\Phi_t)^{-1} = \Phi_t. \tag{17}$$

Exercice 9. 17 implique que $(\Phi_t)_\sharp X(\Phi_t(x)) = X(\Phi_t(x))$.

La forme la plus concise de push-forward est :

$$(\Phi_t)_\sharp(X_{|Ut}) = X_{|\Phi_t(U_t)}.$$

Théorème 5.5 (“Ironing theorem”, “Flow-box theorem")**.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n, X$ champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U et $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subseteq U, a \in V$ et un difféomorphisme $h : V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que*

$$h_\sharp X_{|V} = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

En particulier, si Φ est le flux de X et $\Phi(t, x)$ est défini pour $x \in V$, on a

$$\Phi_t(x) = h^{-1} \circ \psi_t \circ h(x),$$

où ψ_t est le flux de $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ sur W.

Remarque. Si $\dfrac{\partial}{\partial x^1}(y) = (y, e_1)$, alors on a $\psi_t(y) = y + te_1$. Donc

$$\Phi_t(x) = h^{-1}(\psi_t(h(x))) = h^{-1}(y + te_1).$$

Avec les rotations, les dilatations et les transformations, on peut supposer que $a = 0, X(a) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}(a)$. Si $X(a)$ est donné, on peut trouver l'application $h_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ affine $h_0(x) = Ax + \overrightarrow{b}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det(A) \neq 0$ telle que $h_0(a) = 0$ et $((T_{h_0})_{|U})(X(a)) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}(0)$.

Cela démontre l'existence de h_0 qui vient du fait que $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \exists A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A$ inversible telle que $A\overrightarrow{v} = e_1$. Il faut fixer A comme défini et puis définir $h_0(x) = Ax$.

Exercice 10. Calculer $(T_{h_0})_{|U}(X(a)) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}(0)$.

Exercice 11. Si $f : U \longrightarrow V, g : V \longrightarrow W$, $\forall \alpha$ champ de tenseur de type $(0, k)$ sur W, alors

$$(g \circ f)^* = f^*(g^*\alpha).$$

Pour tout β champ de tenseurs de type $(l, 0)$ sur U,

$$(g \circ f)_\sharp \beta = g_\sharp(f_\sharp \beta),$$

avec f et g injectives.

Donc $0 \in U, X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}(0)$.
On a

$$h^{-1}(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = y_{h^{-1}(y)}(t) = \Phi(t, h^{-1}(y)) = \gamma_x(t) = \Phi(t, x).$$

Si $x = (0, x_2, \dots, x_n), t = x_1$, on va imposer que $h(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$. Alors il faut chercher h^{-1} tel que

$$h^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = h^{-1}(0 + \overbrace{x_1}^{t}, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1, h^{-1}(0, x_2, \dots, x_n)) = \phi(\overbrace{x_1}^{t}, x_2, \dots, x_n).$$

Démonstration. On va alors définir (le candidat k pour h^{-1})

$$k(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n).$$

On a bien sûr $k(0) = \Phi_0(0) = 0$. k est défini pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.
Donc on appelle le voisinage $\tilde{W}$ avec $0 \in \tilde{W}, k : \tilde{W} \longrightarrow U$. Si $X \in \mathcal{C}^\infty$, alors $\Phi \in \mathcal{C}^\infty$ et donc $k \in \mathcal{C}^\infty$.
On veut utiliser le théorème de l'application inverse. Il faut vérifier que $Dk(0)$ est inversible. On a

$$Dk(0) = \left[\frac{\partial k}{\partial x^1} \ \cdots \ \frac{\partial k}{\partial x^n}\right]_{|x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $j = 2, \dots, n$
On a $k(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$. On a fixé $x_1 = 0$, donc

$$k(0, x_2, \dots, x_n) = \Phi_0(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n),$$

donc

$$\frac{\partial k}{\partial x^j}_{|x=0} = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{j}, \dots, 0) = e_j.$$

Donc $Dk(0) = \mathrm{Id}_{n\times n}$ inversible. Donc par le théorème de l'application inverse, il existe V ouvert avec $0 \in V$, $W \subseteq \tilde{W}, 0 \in \tilde{W}$ tels que

$$\Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n) = h^{-1}(x_1, \dots, x_n).$$

Alors $k(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$, donc $h(0, x_2, \dots, x_n)$, donc

$$h^{-1}(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = \Phi_{t+y_1}(0, y_2, \dots, y_n) = \Phi_t(\Phi_{y_1}(0, y_2, \dots, y_n)) = \Phi(h^{-1}\underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{x}).$$

♣

26-10-2023

5.4.1 Le cas de la métrique riemanienne (pull-back et push-forward)

Soit g la métrique riemanienne sur U, $g : U \longrightarrow \Omega^2 U$ symétrique définie positive telle que $\forall x \in U$, $g(x)$ est un tenseur (0,2) (2-covariant) symétrique défini positif sur T_xU. $g(x) \in \Omega^2(T_xU)$.

Un tenseur covariant est le retiré (pull-back) sous une application. On considère $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : V \longrightarrow U$ difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. Donc le retiré u^*g est défini sur V comme un élément de $\Omega^2 V$.

$$u^*g(x) \in \Omega^2(T_xU), \forall x \in U.$$

Proposition 5.4. Soit $h := u^*g$, alors h est une métrique riemanienne sur V.

Démonstration. On sait déjà que $h^{(x)} \in \Omega^2(T_xV), \forall x \in V$. Il faut démontrer que $h(x)$ est un produit scalaire sur T_xU.

1. $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in T_xV$,

$$\begin{aligned} h(x)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= u^*g^{(x)}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = g(u(x))(T(u(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{w})) \\ &= g(u(x))(Tu(\overrightarrow{w}), u(\overrightarrow{v})) = u^*g(x)(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = h(x)(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

2. Pour tout $\overrightarrow{v} \in T_xV$, on a

$$h(x)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = u^*g(x)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = g(u(x))(Tu(\overrightarrow{v}), u(\overrightarrow{v})) \geq 0.$$

De plus, on a

$$h(x)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff g(u(x))(Tu(\overrightarrow{v}), Tu(\overrightarrow{v})) = 0 \iff Tu(\overrightarrow{v}) \iff \overrightarrow{v} = 0.$$

Remarque. Si $u : U \longrightarrow V$ difféomorphisme, on a pour tout $x \in V$, $T_x u : T_x V \longrightarrow T_x U$ est une application linéaire inversible. En effet,

$$\begin{aligned} Tu \circ Tu^{-1} &= T(u \circ u^{-1}) = T(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{T_U} \\ Tu^{-1} \circ Tu &= T(u^{-1} \circ u) = T(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V \,. \end{aligned}$$

♣

Théorème 5.6. *Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, avec g métrique riemanienne sur U et h métrique riemanienne sur V. On suppose que $u : V \longrightarrow U$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tous $x, y \in V$, $d_h(x, y) = d_g(u(x), u(y))$.*
2. *Pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \longrightarrow V$, $L_h(\gamma) = L_g(u \circ \gamma)$.*
3. *$h = u^* g$.*

Démonstration. Pour le moment, on va suspendre la démonstration de 1. On va démontrer 2 implique 3. On a

$$\begin{aligned} L_h(\gamma) &:= \int_0^T h(\gamma(t))(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right))dt \\ &= \int_0^T \sum_{i,j} H_{ij}(\gamma(t))(\gamma^j)'(t)(\gamma^i)(t)dt = \int_0^T \langle \gamma'(t) \mid H(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

Si $h = u^* g$, on a

$$\begin{aligned} L_h(\gamma) &= \int_0^T h(\gamma(t))\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right)dt \\ &= \int_0^T u^* g(\gamma(t))\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) \\ &= \int_0^T g(u(\gamma(t)))(Tu(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)), Tu\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right))dt \\ &= \int_0^T g(u \circ \gamma(t))\left(Tu \circ T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), Tu \circ T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) \\ &= \int_0^T g(u \circ \gamma(t))\left(T(u \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T(u \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right) = L_g(u \circ \gamma), \end{aligned}$$

car $T\gamma : TI \longrightarrow TV, Tu : TV \longrightarrow TU$.
Par le calcul qu'on vient de faire, $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1, \gamma : [0, T] \longrightarrow V$, $L_g(u \circ \gamma) = L_h(\gamma)$ implique que

$$\begin{aligned} &\int_0^T u^* g(\gamma(t))\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right)dt \\ &= \int_0^T h(\gamma(t))\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right), T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right)dt. \end{aligned}$$

Soit $x \in V$, $\overrightarrow{v} \in T_x V$, avec $\overrightarrow{v} = (x, \underbrace{|\overrightarrow{v}\rangle}_{\in \mathbb{R}^n})$. On pose $\gamma(t) = x + t \mid \overrightarrow{v}\rangle$, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq V$. On pose $a = -\varepsilon, b = s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Cela implique que

$$\int_a^s u^*g(\gamma(t))\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right),T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right)dt=\int_a^s h(\gamma(t))\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right),T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right)dt.$$

On a pour tout $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$:

$$\frac{d}{ds}\int_a^s\cdots=\frac{d}{ds}\int_0^s\ldots,$$

ce qui donne pour tout $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$:

$$u^*g(\gamma(t))=\left(T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right),T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)\right).$$

On évalue en $t=0$. On a $\gamma(0)=x+0\cdot\mid\overrightarrow{v}\rangle=x$ et on obtient alors :

$$T\gamma\left(\frac{d}{dt}(t)\right)=(\gamma(t),\gamma'(t))=(x,t\mid\overrightarrow{v}\rangle,\mid\overrightarrow{v}\rangle)_{t=0}=(x,\mid\overrightarrow{v}\rangle),$$

ce qui implique que

$$u^*g(x)((x,\mid\overrightarrow{v}\rangle),(x,\mid\overrightarrow{v}\rangle))=h(x)((x,\mid\overrightarrow{v}\rangle),(x,\mid\overrightarrow{v}\rangle)),$$

ce qui donne

$$u^*g(x)(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=h(x)(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})$$

♣

Calcul pour les matrices G et H. On a

$$h=\sum_{i,j=1}^n h_{ij}dx^i\otimes dx^j,g=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}dy^i\otimes dy^j,(y_1,\ldots,y_n)\in U.$$

On a $h=u^*g$. Quelle est la relation entre les matrices G et H ?
On a $\forall x\in V,\forall\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in T_xV$, avec $\overrightarrow{v}=(x,\mid\overrightarrow{v}\rangle),\overrightarrow{w}=(x,\mid\overrightarrow{w}\rangle)$, avec

$$\overrightarrow{v}=\sum_j v^j\frac{\partial}{\partial x^j}(x)$$

et

$$\mid\overrightarrow{v}\rangle=\begin{bmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^n\end{bmatrix}.$$

On a

$$h=u^*g\iff\forall x,\forall\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in T_xV,h(x)(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=g(u(x))(Tu\overrightarrow{v},Tu\overrightarrow{w})=\langle Du(x)\overrightarrow{v}\mid G(u(x))\mid Du(x)\overrightarrow{w}\rangle$$

.

On prend maintenant $\mid\overrightarrow{v}\rangle=e_i\in\mathbb{R}^n,\mid\overrightarrow{w}\rangle=e_j\in\mathbb{R}^n$. Alors on a :

$$\langle e_i\mid\underbrace{H(x)}_{e_i\cdot He_j}\mid e_j\rangle=h_{ij}(x).\tag{18}$$

Or $Du(x)e_i$, c'est la i-ième colonne de $Du(x) = \frac{\partial u}{\partial x^i}(x)$, ce qui donne

$$18 \implies j_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) \mid G(u(x)) \mid \frac{\partial u}{\partial x^j}(x) \right\rangle.$$

On a alors

$$H(x) =^t Du(x)G(u(x))Du(x).$$

Proposition 5.5. Si u difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$, h, g sur V, U tel que $h = u^*g$ et $h = \sum_{i,j} h_{ij}dx^i \otimes dx^j$ sur $V, g = \sum_{i,j} g_{ij}dy^i \otimes dy^j$ sur U, alors on a

$$h = u^*g \iff \forall x \in V, H(x) =^t Du(x)G(u(x))Du(x).$$

Exemple. On prend $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}.$$

On a $Du(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. u est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. On pose $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (avec g la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).

Alors on a

$$H =^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\forall |\overrightarrow{v}|, |\overrightarrow{w}\rangle \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle_H = v^1w^1 + v^1w^2 + w^2v^1 + 2v^2w^2$$

et

$$\|\overrightarrow{v}\|_H^2 = (v^1)^2 + 2v^1v^2 + 2(v^2)^2 = (v^1 + v^2)^2 + (v^2)^2.$$

On obtient $h = dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 2dy \otimes dy$.

Exercice 12. Montrer que si $u : V \longrightarrow U$ difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ et g métrique sur U, alors

1. $h = u^*g$ implique que $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in T_xU$:

$$\|\overrightarrow{v}\|_h = \|Tu(\overrightarrow{v})\|_g \tag{19}$$
$$\sphericalangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})_h = \sphericalangle(Tu(\overrightarrow{v}), Tu(\overrightarrow{w}))_g. \tag{20}$$

2. $\forall \overrightarrow{v} \in T_xU, \|\overrightarrow{v}\|_h = \|Tu(\overrightarrow{v})\|_g \implies h = u^*g$.

Proposition 5.6. Soit g_e la métrique euclidienne standart sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (donc $G_e = I_{n\times n}, g_e = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$) et $u : V \longrightarrow U$ est difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$.

Alors si $j = u^*g, h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} dx^i \otimes dx^j, H = [h_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on a

$$H =^t DuDu.$$

Remarque. $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall \mid \overrightarrow{v}\rangle, \mid \overrightarrow{w}\rangle \in \mathbb{R}^n$, si $H =^t AA$, on a

$$\langle \overrightarrow{v} \mid H \mid \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{v} \mid^t AA \mid \overrightarrow{w}\rangle = \langle A\overrightarrow{v} \mid A\overrightarrow{w}\rangle = \overrightarrow{v} \cdot ({}^tAA\overrightarrow{w}) = A\overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{w}.$$

De plus, on a

$$\langle \overrightarrow{v} \mid H \mid \overrightarrow{v}\rangle = \langle A\overrightarrow{v} \mid A\overrightarrow{v}\rangle = \|A\overrightarrow{v}\|^2.$$

C'est la norme euclidienne.

Exemple. Soit $u(x, y) = (x + y^2, y)$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

On pose $D_u = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On calcule

$$H =^t DuDu = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 2y & 1 + 4y^2 \end{bmatrix}.$$

Alors $h = dx \otimes dx + 2ydx \otimes dy + 2ydy \otimes dx + (1 + 4y^2)dy \otimes dy$.

Si $u(x, y) = (x', y')$, alors on a $x + y^2 = x', y = y'$, donc $x = x' - y^2 = x' - (y')^2$. On obtient donc

$$u^{-1}(x', y') = (x' - (y')^2, y').$$

Si la ligne droite $x' \equiv$ constante et y arbitraire (paramètre t), la courbe dans V devient de la forme $(c - t^2, t), t > 0$.

Sinon, $y' = ax' + b, t = x', y' = at + b$, donc la courbe géodésique correspondant pour (V, h) est

$$(t - (at + b)^2, \overbrace{at + b}^{y}).$$

- ⋆ Si $a \neq 0$, on a $y = at + b$, $t = \dfrac{y - b}{a}, x = \dfrac{y - b}{a} - y^2 = -y^2 + \dfrac{y}{a} - \dfrac{b}{a}$.
- ⋆ Si $a = 0$, $y' =$ constante $> 0, x' = t$ (paramètre), la courbe dans (V, h) est $(t - c, c)$.

Exercice 13. Soit $\{(U, g) \mid U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert , g métrique riemanienne sur $U\}$. Pour tout $(U, g), (V, h) \in U$, on définit la relation suivante :

$$(U, g) \sim (V, h) \iff \exists u : V \longrightarrow U \text{ difféomorphisme } \mathcal{C}^\infty \text{ tel que } h = u^*g.$$