

ANALYSE FONCTIONNELLE ET DISTRIBUTIONS

2023-2024

Table des matières

1	Espaces localement convexes	5
1.1	Rappels de topologie	5
1.1.1	Axiomes	5
1.1.2	Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques	5
1.1.3	Comparaison des topologies	6
1.1.4	Espaces vectoriels topologiques	7
1.2	Semi-normes et espaces localement convexes	8
1.2.1	Semi-normes sur X espace vectoriel	8
1.3	Pourquoi “localement convexe” ?	9
1.3.1	Théorème de Hahn-Banach	11
1.4	Espaces localement convexes métrisables, espaces de Fréchet	12
1.4.1	Topologies définies par une distance	12
1.4.2	Espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$	16

Chapitre 1

Espaces localement convexes

1.1 Rappels de topologie

J. Dieudonné 1 et 2.
Reed-Simon 1, 2 et 4.
Brézis, “Analyse fonctionnelle”

Soit X ensemble. Soit (X, \mathcal{T}) espace topologique où $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$.
 \mathcal{T} parcourt l'ensemble des voisinages de x où x est un point quelconque de X .

1.1.1 Axiomes

1. Soient $x \in X$ et V' voisinage de x . Si $V \supset V'$ alors V est un voisinage de x .
2. $\bigcap_{\text{finie}} V_i$ est un voisinage de x , $\bigcap_{\text{finie}} V_i \in \mathcal{T}$, mais $\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon \neq \emptyset$ n'est pas un voisinage de x .
3. $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de x .

Définition 1.1.1 (Ouvert). Ω ouvert si et seulement si Ω est voisinage de chacun de ses points.

Exemple 1. $(-1, 1)$ ouvert tandis que $[-1, 1)$ non ouvert car -1 n'a pas de voisinage.

$V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est une base de voisinage pour la topologie usuelle de \mathbb{R} .

Exercice 1. On peut définir axiomatiquement \mathcal{T} à partir de ses ouverts.

Définition 1.1.2 (Fermé). On dit que F est un fermé si et seulement si F^C est un ouvert.

1.1.2 Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques

Définition 1.1.3 (Espace métrique, distance).

X est un ensemble, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ distance sur X si et seulement si :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- Remarque.** Si on a seulement $x = y \implies d(x, y) = 0$, alors d est un écart.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire). De ce fait, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Exemple 2. 1. Dans \mathbb{R}^n , $d(x, y) = \|x - y\|$.

2. X ensemble. On définit d de la façon suivante :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 & \text{si } x = y \\ d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Il s'agit de la distance triviale.

Si x, y, z distincts alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.1.3 Comparaison des topologies

Soient X un ensemble et $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ des topologies sur X .

Définition 1.1.4 (Plus fine). *On dit que \mathcal{T}' est plus fine que \mathcal{T} et on note $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.*

On dit aussi que \mathcal{T}' est plus forte que \mathcal{T} .

Remarque. Si $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$, il y a plus d'ouverts dans \mathcal{T}' que dans \mathcal{T} (idem pour les fermés).

Démonstration. Soit Ω ouvert dans X . On a $\Omega \in \mathcal{T} \implies \Omega \in \mathcal{T}'$.

Soit F un fermé dans X . On a $F \in \mathcal{T}$, mais $\Omega = F^C \in \mathcal{T} \implies F^C \in \mathcal{T}'$, donc $F \in \mathcal{T}'$. \square

Formulations équivalentes

1. On suppose que $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$. Si $\forall x \in X$, U est un voisinage de x pour \mathcal{T} , alors U voisinage de x pour \mathcal{T}' , car si U est un ouvert de \mathcal{T} , alors U est un ouvert de \mathcal{T}' .
2. Pour l'application identité définie comme suit

$$id : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}),$$

on a $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ si et seulement si id est continue.

Par exemple, prenons $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$. On prend \mathcal{T} topologie de la convergence simple, i. e. f_n converge vers f simplement si $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Ouverts de Ω

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{f \in X \mid \sup_{i=1,\dots,k} |f(a_i)| < \varepsilon\},$$

avec $a = a_0, \dots, a_k \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$.

$\Omega_{a,\varepsilon}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle) dans X .

Pour $f_0 \in X$, $\Omega_{a,\varepsilon} + f_0$ est une base de voisinage de f_0 , car X est un espace vectoriel (on agit par translation).

On considère maintenant la topologie de la convergence uniforme \mathcal{T}' .

$\Omega_\varepsilon = \{f \in X, \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \varepsilon\}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle).

Proposition 1.1.1. *\mathcal{T}' est plus fine que \mathcal{T} , ie $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.*

Démonstration. Soit $\Omega_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$.

Si $f \in \Omega_\varepsilon$, alors

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, |f(a_i)| < \varepsilon \text{ (car c'est vrai pour tout } x \text{)}.$$

Donc Ω_ε est un voisinage de 0 dans \mathcal{T} . On a ainsi démontré que \mathcal{T}' est plus fine que \mathcal{T} . \square

On considère l'espace des fonctions continues \mathcal{C}^0 avec la norme

$$\|f\|_0 = \sup |f(x)|$$

et l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 avec la norme

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)| + \sup |f'(x)|.$$

La topologie sur \mathcal{C}^1 est plus fine que celle sur \mathcal{C}^0 .

Démonstration. On a pour tout f ,

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1.$$

Ainsi si

$$\|f\|_1 < \varepsilon,$$

alors

$$\|f\|_0 < \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{f, \|f\|_1 < \varepsilon\} \subset \{f, \|f\|_0 < \varepsilon\}$.

Donc $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$.

On sait également que si U est un voisinage de 0 pour \mathcal{T} , alors U est un voisinage de 0 pour \mathcal{T}' . \square

Topologie métrisable (exemples)

1. Topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie la moins fine.

Remarque. $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X)$ est la topologie la plus fine.

Vérifions si la topologie grossière est métrisable dans différents cas.

- Si $X = \{a\}$, on a $d(a, a) = 0$. Le seul voisinage de a est $X = \{a\}$. Donc \mathcal{T} est métrisable.
- Supposons que $X = \{a, b\}$. Mais \mathcal{T} n'est plus métrisable, avec $d(a, b) = 1$ (distance triviale).
Raisonnons par l'absurde. Si \mathcal{T} était métrisable, \mathcal{T} devrait contenir un ouvert Ω tel que $a \in \Omega$ et $b \notin \Omega$. Or $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, donc c'est impossible.

Pour \mathcal{T}' , on choisit la distance d telle que $d(x, y) = 0$ ou 1. Est-ce que \mathcal{T}' est métrisable ?

2. Prenons \mathcal{T} telle que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.

On suppose que X contient au moins deux éléments. Dans ce cas, \mathcal{T} est une topologie sur X non métrisable, car si $d(a, b) = 1$, avec $b \neq a$, alors dans \mathcal{T} il n'existe pas de boule ouverte qui contient $\{b\}$ sans contenir $\{a\}$.

3. Considérons $X = \{a, b\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathcal{P}(X)$.

On a $d(a, b) = 1$, car $a \neq b$.

De ce fait :

$\{a\}$ voisinage de a qui ne contient pas b ($\{a\} = \{x \text{ tel que } d(x, a) < 1\}$);

$\{b\}$ voisinage de b qui ne contient pas a .

1.1.4 Espaces vectoriels topologiques

Dans le cas où (X, \mathcal{T}) est un espace vectoriel topologique, il suffit de connaître les voisinages de 0 et on agit par translation pour déterminer les voisinages de n'importe quel $x \in X$.

Définition 1.1.5 (Continuité). Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On considère :

$(U_a)_{a \in A}$ voisinage de 0 dans X

$(V_b)_{b \in B}$ voisinage de 0 dans Y

f est continue si pour tout $V = V_b + f(x_0)$ dans Y , il existe $U = \bigcap_{finie} (U_a + x_0)$ voisinage de x dans X tel que $x \in U \implies f(x) \in V$.

Cas particulier : X normé

Définition 1.1.6 (Norme). $\|\cdot\|$ est une norme sur X si

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (absolue homogénéité);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

De cette norme, on construit la distance d telle que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Voisinages de 0.

$$(U_a) = B(0, a)$$

$$A = \mathbb{R}^+.$$

— $f : X \rightarrow Y$ continue en x_0 , $\forall V = V_b + f(x_0)$, $\exists U = B(0, \delta) + x_0$, $f(U) \subset V$.

— X, Y EVN.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(0, \delta) + x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

1.2 Semi-normes et espaces localement convexes

1.2.1 Semi-normes sur X espace vectoriel

Définition 1.2.1 (Semi-norme). *L'application $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme si :*

1. $\rho(0) = 0$;
2. $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$;
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

X est un espace vectoriel \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Remarque. \triangleleft On n'a pas forcément $\rho(x) = 0 \implies x = 0$.

Exemple 3. 1. Si ρ est une norme, c'est aussi une semi-norme.

2. $X = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$. On prend $a = (a_0, \dots, a_k) \subset [0, 1]$. On définit

$$\rho_a(f) = \sup_{0 \leq i \leq k} |f(a_i)|.$$

3. Topologie faible. X est un espace vectoriel et X' est son dual (espace contenant les formes linéaires sur X).

Soit l une forme linéaire dans X' . Alors

$$p(x) = |\langle l, x \rangle|.$$

Définition 1.2.2 (Famille de semi-normes séparée). *Soit $(\rho_a)_{a \in A}$ une famille de semi-normes. On dit que $(\rho_a)_{a \in A}$ sépare les points (ou est séparée) si et seulement si*

$$\forall a \in A, \rho_a(x) = 0 \implies x = 0.$$

Définition 1.2.3 (Espace localement convexe (ELC)). *X est un espace localement convexe si et seulement si X est muni d'une famille de semi-normes qui séparent les points.*

Proposition 1.2.1. *Si X est un espace localement convexe, alors X est un espace vectoriel topologique pour la topologie définie par ρ_a .*

Démonstration. On note \mathcal{T} la topologie définie par la famille de semi-normes $(\rho_a)_{a \in A}$.

Remarque (Personnelle). *On cherche à montrer que les $\mathcal{O}_{a, \varepsilon}$ forment une topologie. On va vérifier les axiomes de topologie.*

Dans ce cas, les ouverts $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ sont $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{a, \varepsilon}$, $a \in A$, $\varepsilon > 0$ définis ci-dessous :

$$\mathcal{O}_{a, \varepsilon} = \{x \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

$\mathcal{O}_{a, \varepsilon}$ une base de voisinages de 0.

Les voisinages de x sont donnés par translation :

$$x + \mathcal{O}_{a, \varepsilon} = \{x + y, y \in \mathcal{O}_{a, \varepsilon}\}.$$

On montre facilement que $\bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{a, \varepsilon} \in \mathcal{T}$ et $\bigcup_{\text{quelconque}} \mathcal{O}_{a, \varepsilon} \in \mathcal{T}$. □

Proposition 1.2.2. \mathcal{T} est la topologie la moins fine sur X qui rend continues

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Il y a donc une compatibilité avec la structure des espaces vectoriels.

Démonstration. 1. \mathcal{T} rend continues les deux opérations de X . On a en effet

$$\rho_a(x + y) \leq \rho_a(x) + \rho_a(y).$$

Il suffit de prendre $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\rho_a(y) < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient $\rho_a(x + y) < \varepsilon$.

On a $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ et on démontre ce résultat par analogie.

2. La moins fine (en exercice).

□

Théorème 1. La topologie de X espace localement convexe est Hausdorff, i. e. elle sépare les points.

Définition 1.2.4 (Hausdorff). (X, \mathcal{T}) est de Hausdorff si et seulement si pour tout $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, il existe \mathcal{O}_x et \mathcal{O}_y voisinages de x et de y tels que

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset.$$

Exemple 4. On prend $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. On a $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Donc (X, \mathcal{T}) est séparée.

Démonstration du théorème 1. Par contraposée, on prend $y \neq 0$ et $x = 0$.

Si X est un espace localement convexe, alors il existe $a \in A$ tel que $\rho_a(y) = \varepsilon > 0$.

On pose

$$V_x = \left\{ z, \rho_a(z) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ et } V_y = \left\{ z, \rho(z - y) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (1.1)$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient $V_x \cap V_y = \emptyset$, car

$$\rho_a(x - y) > |\rho_a(x) - \rho_a(y)| > \left| \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \right| = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

□

1.3 Pourquoi “localement convexe” ?

Définition 1.3.1. Soit X un \mathbb{R} ou \mathbb{C} espace vectoriel.

1. On dit que $C \subset X$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], z = tx + (1 - t)y \in C.$$

2. On dit que $B \subset X$ est balancé (sur \mathbb{R}) ou cerclé (sur \mathbb{C}) si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \implies \forall x \in B, \lambda x \in B.$$

3. On dit que $E \subset X$ est équilibré si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \implies \forall x \in E, \lambda x \in E.$$

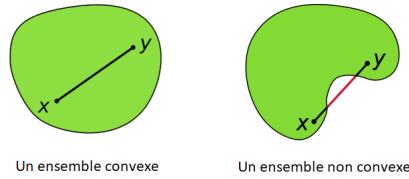


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

4. On dit que A est absorbant si

$$\bigcup_{t > 0} tA = X.$$

Exemple 5. 1. Si X est un espace vectoriel normé, $A = B(0, 1)$ et $x \in X$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in B(0, 1)$. Alors $x \in \|x\|B(0, 1)$.

2. Si $0 \in C$ convexe, alors C est équilibré si et seulement si C est balancé.

Démonstration. On suppose que C est balancé. Pour $x \in C \implies -x \in C$, donc $[-x, x] \in C$ par convexité. \square

Théorème 2. Soit X un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un espace localement convexe (réel ou complexe) ;
2. Il existe une base de voisinages de $0 \in X$ qui sont convexes, balancés (cerclés), absorbants.

Démonstration. 1. Si X est un espace localement convexe, alors une base de voisinages de 0 est donnée par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

Les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ sont convexes, balancés et absorbants (TD).

2. On utilise la jauge de Minkowski 1.3.2.

On pose

$$\rho_C(x) = \mu_C(x).$$

et on vérifie que ρ_C est une semi-norme. Grâce au lemme 1.3, on obtient les résultats suivants :

- (a) $\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$, car C est convexe ;
- (b) $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$ si $\lambda > 0$ et $\rho_C(\lambda x) = |\lambda| \rho_C(x)$, car C est cerclé.

X muni de ρ_C est un espace localement convexe. \square

Définition 1.3.2 (Jauge de Minkowski). Soit X espace vectoriel réel ou complexe. On suppose que C tel que $0 \in C$ est absorbant. Alors la jauge de Minkowski est définie comme suit :

$$\mu_C(x) = \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha C\}.$$

Remarque. Si C est absorbant, alors $\forall x \in X, \mu_C(x) < \infty$.

Lemme. Soit $C \subset X$ absorbant tel que $0 \in C$.

1. Si $\lambda \geq 0, \mu_C(\lambda x) = \lambda \mu_C(x)$;
2. Si C est convexe, alors $\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$;
3. Si C est cerclé, alors $\mu_C(\lambda x) = |\lambda| \mu_C(x)$;
4. $\{x \in X, \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X, \mu_C(x) \leq 1\}$.

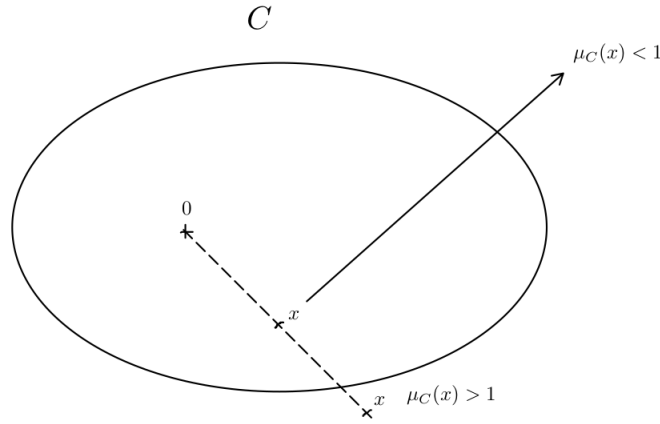


FIGURE 1.2 – La jauge de Minkowski

1.3.1 Théorème de Hahn-Banach

Il y a la forme analytique et la forme géométrique de ce théorème.

Théorème 3 (De Hahn-Banach, forme analytique). *Pour simplifier, on prend X espace vectoriel sur \mathbb{R} . Soit $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :*

- ★ $\forall x \in X, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$;
- ★ $\forall x, y \in X, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Soient Y un sous espace vectoriel de X et l une forme linéaire sur Y qui vérifie

$$\forall x \in Y, l(x) \leq p(x), \forall x \in Y.$$

Alors (prolongement) il existe L forme linéaire sur X telle que $L|_Y = l$ et

$$\forall x \in X, L(x) \leq p(x).$$

On l'applique aux espaces vectoriels normés, espaces localement convexes,...

Théorème 4 (Norme sur un espace dual). *Soit X espace vectoriel normé, X' formes linéaires continues sur X , X' est un espace vectoriel normé. La norme sur X' est définie de la façon suivante :*

$$\|L\|_{X'} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle L, x \rangle| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle L, x \rangle|}{\|x\|}.$$

Exercice 2. *Montrer que $\|\cdot\|_{X'}$ est une norme.*

Si X est un espace vectoriel normé complet (de Banach), alors X' l'est aussi.

Corollaire (Prolongement isométrique de l sur Y). *Soit X espace vectoriel normé, $Y \subset X$ sous espace vectoriel de X et $l \in Y'$ avec*

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in Y}} |\langle l, y \rangle|.$$

Alors il existe un prolongement L de l de même norme

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle l, x \rangle| = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \leq 1}} |\langle l, y \rangle|.$$

Démonstration. Par le théorème de Hahn-Banach, on pose p telle que $p(x) = \|l\|_{Y'} \|x\|$ (l'application définie ainsi vérifie les propriétés de p nécessaires à l'application du théorème).

Par Hahn-Banach, il existe L une forme linéaire sur X telle que

$$L(x) = \langle L, x \rangle \leq p(x) = \|l\|_{Y'} \|x\|.$$

Mais

$$\langle L, -x \rangle \leq \|l\|_{Y'} \|x\|,$$

donc

$$|\langle L, x \rangle| \leq \|l\|_{Y'} \|x\|.$$

Ainsi, en divisant par $\|x\|$, on obtient le résultat suivant :

$$\forall x \in X, \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'}.$$

Or si on prend $x \in Y$,

$$\left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'} = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right|.$$

Comme $Y \subset X$ (ce qui entraîne que $\sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right| \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right|$), on a donc égalité, d'où l'isométrie. \square

Corollaire. $\forall x_0 \in X$ espace vectoriel réel, il existe $L_0 \in X'$, $\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X$.

Démonstration. $Y = \mathbb{R}x_0$. Soit $l(tx_0) \stackrel{\text{déf}}{=} t\|x_0\|^2$ forme linéaire continue sur Y .

Alors, en posant $t = 1$, on obtient

$$\|l\|_{Y'} = \|x_0\|$$

et, par le théorème de Hahn-Banach,

$$\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

\square

Exercice 3. Traduire Hahn-Banach dans le cas où X est un espace localement convexe.

Théorème 5 (De Hahn-Banach, forme géométrique). Soit X espace vectoriel normé (ou espace localement convexe). Soient $A, B \subset X$ convexes et disjoints.

1. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine (d'équation $\langle L, x \rangle = \text{constante}$) \mathcal{H} qui sépare au sens large A et B .
2. Si A est fermé, B est compact, alors il existe \mathcal{H} hyperplan qui sépare A et B au sens strict.

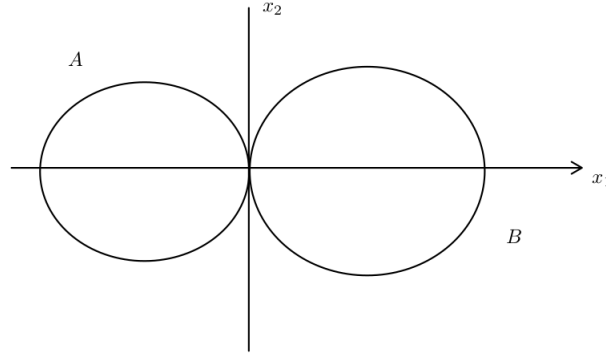
1.4 Espaces localement convexes métrisables, espaces de Fréchet

1.4.1 Topologies définies par une distance

On rappelle la définition 1.1.3.

Définition 1.4.1 (Distances équivalentes). On dit que d_1 est équivalente à d_2 si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y).$$

FIGURE 1.3 – $A = \{x_1 < 0\}$, $B = \{x_2 \geq 0\}$, $\mathcal{H} = \{x_1 = 0\}$.

$d_1 \sim d_2 \implies (X, d_1) \simeq (X, d_2)$, mais la réciproque est fausse.

Exemple 6. On prend un espace métrique (X, d) avec les distances

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta'(x, y) = \inf(1, d(x, y)).$$

Ces distances sont équivalentes entre elles.

Démonstration.

1. Montrons que $(X, d) \sim (X, \delta')$. On remarque d'abord que

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq d(x, y),$$

ce qui veut dire que $(X, d) \prec (X, \delta)$ (car si \mathcal{O} est un ouvert pour δ , alors il le sera forcément pour d).

Prenons

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}. \quad (1.2)$$

La fonction f est une bijection de \mathbb{R}^+ dans $[0, 1]$. En effet, montrons qu'il existe $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $g \circ f = f \circ g = \text{id}$.

On a

$$\frac{t}{1 + t} = s \implies t = ts + s \implies t = \frac{s}{1 - s}.$$

Donc $d(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{1 - \delta(x, y)}$. Donc si $d(x, y) < \varepsilon$, alors $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$. Donc $(X, \delta) \prec (X, d)$.

2. Montrons que $\delta \sim \delta'$.

On a

$$\delta = \frac{d}{1 + d} \leq \begin{cases} 1 \\ \delta. \end{cases}$$

En effet, cela vient du fait que $\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \xrightarrow{d(x, y) \rightarrow \infty} 1$. Donc

$$\delta(x, y) \leq \delta'(x, y).$$

Mais $\delta' \leq 2\delta$. En effet, on distingue deux cas :

- (a) Si $\delta \leq 1$ et $\delta' = d$, alors $d \leq 2d$,
- (b) Si $\delta \geq 1$ et $\delta' = 1$, alors $1 \leq 2d$.

3. Montrons que δ est une distance.

(a) Montrons l'inégalité triangulaire. Si $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, montrons que $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

Est-ce que $f(d(x, y)) \leq f(d(x, z)) + f(d(z, y))$, avec f définie dans 1.2 ?

i. f est croissante, donc $f(d(x, y)) \leq f[d(x, z) + d(z, y)]$. Il suffit de voir que $f(t) \leq f(u) + f(v)$.

ii. Montrons la sous-additivité de f . Posons

$$v \mapsto \varphi(v) = f(u + v) - f(u) - f(v).$$

On a $\varphi(0) = 0$, car $f(0) = 0$ et $\varphi(v) = f'(u + v) - f'(u) - f'(v) < 0$, car f est une fonction croissante.

□

Sous quelles conditions un espace localement convexe est métrisable ?

On remarque par exemple que $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus généralement, les topologies faibles ne sont pas métrisables, sauf si on travaille en dimension finie. Par ailleurs, X muni de la topologie grossière n'est pas métrisable (non séparée).

Proposition 1.4.1. *Soit X un espace localement convexe (donc séparé). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. X est métrisable.
2. Il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans X , et ce pour tout $x \in X$.
3. La topologie de X est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.

Démonstration. 1. (1) \implies (2). La topologie sur X est équivalente à (X, d) . Soit (X, d) un espace métrique. Il suffit de poser

$$\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \mid d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\} \quad (\mathbb{R} \text{ est archimédien}).$$

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n$ tel que $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} \subset \mathcal{O}_\varepsilon$. Donc $x + \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}$ est une base dénombrable de voisinages de x .

2. (2) \implies (3). On sait que \mathcal{T} topologie de X est donnée par une famille de semi-normes. Les voisinages de 0 dans X sont donnés par

$$\mathcal{O}_{a, \varepsilon} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_{\varepsilon, a_i}, \text{ avec } i \in \{1, \dots, n\}.$$

On rappelle que $\mathcal{O}_{\varepsilon, a_i} = \{x \mid \rho_{a_i} < \varepsilon\}$.

On peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On sait qu'il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans X . Soit U_n une base de voisinages dénombrable de 0. On pose

$$\rho_n(x) = \mu_{U_n}(x).$$

On prend les U_n convexes, balancés, absorbants comme dans le théorème 2 (c'est possible, car X est un espace localement convexe).

3. (3) \implies (1).

(a) Soit (ρ_n) une famille dénombrable de semi-normes sur X . On pose

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)}.$$

Montrons que $(X, \text{ELC}) \prec (X, d)$. Soit $U \in \mathcal{T}$ (la topologie ELC). On se ramène aux voisinages de 0. On a

$$U = \bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{\varepsilon, a}, a \in A.$$

Comme il existe une base dénombrable de voisinages, on peut choisir

$$U_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^N \{x \mid \rho_j(x-0) < \varepsilon\}, \text{ avec } A = \mathbb{N}.$$

Ce voisinage est inclus dans $\{x \mid \sum \rho_j(x-0) \leq N\varepsilon\}$.

Montrons que U est un voisinage de x pour la topologie métrique (X, d) .

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $d(x, 0) = \left(\sum_1^N + \sum_{N+1}^\infty\right) \frac{\rho_n}{1+\rho_n}$. Or N est tel que

$$\sum_{N+1}^\infty 2^{-n} < \varepsilon \implies \sum_{N+1}^\infty 2^{-n} \frac{\rho_n}{1+\rho_n} < \varepsilon.$$

De plus,

$$d(x, y) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{1+d_n} < \varepsilon + \sum_{n=1}^N d_n(x, y). \quad (1.3)$$

Or $\rho_n(x-y) < \varepsilon$, car $x \in y + U_\varepsilon$.

Donc 1.3 devient

$$d(x, y) \leq \varepsilon + N\varepsilon \text{ avec } N \text{ fixé.}$$

Donc $\mathcal{T} \prec (X, d)$.

(b) Montrons que $(X, d) \prec \mathcal{T}$. On doit majorer $\rho_m(x-y)$.

Or

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)} \geq 2^{-m} \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)}.$$

Et

$$2^m d(x, y) \geq \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)} \geq f(t).$$

Donc on a $\rho_m(x, y) \leq g(2^m d(x, y))$, où g est la réciproque de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

□

Proposition 1.4.2. *Soit X un espace localement convexe qui vérifie l'une des propriétés énoncées dans la proposition 1.4.1 (i. e. métrisable). On note la topologie de X ELC par \mathcal{T} . Alors X est complet pour \mathcal{T} si et seulement si (X, d) est complet.*

Démonstration. Cette proposition se démontre exactement comme 1.4.1. □

Définition 1.4.2. *Soit X un espace localement convexe. On dit que X est un **espace de Fréchet** si X est **métrisable et complet**.*

Exemple 7.

1. Les espaces localement convexes qui ne sont pas des Fréchet.
 - (a) Non métrisables. $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple, les topologies faibles, ...
2. Les espaces localement convexes qui sont des Fréchet. Les espaces de Banach, par exemple $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $\mathcal{C}_0^\infty(K)$, ...

1.4.2 Espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \iff \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} |x^\alpha D_\varphi^\beta| < \infty.$$

Montrons que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est complet. On va regarder $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \dots$

1. $\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon$, donc $\varphi_p \longrightarrow \varphi$, donc

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| < \varepsilon.$$

En particulier pour tout $K \subset \mathbb{R}$, φ_n est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(K)$. Or $\mathcal{C}^0(K)$ est complet, donc $\varphi_n \xrightarrow{\text{uniformément}} \varphi$. Comme K est arbitraire, elle converge localement sur tout \mathbb{R} . On a

$$\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon,$$

donc

$$\rho_{0,0}(\varphi - \varphi_p) < \varepsilon.$$

Donc φ_p converge pour $\rho_{0,0}$.

2. On a besoin de rappeler le lemme suivant :

Lemme. Si $\varphi' \longrightarrow \psi$ uniformément et $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ simplement, alors $\psi = \varphi'$.