# Analyse fonctionnelle et distributions

2023-2024

# TABLE DES MATIÈRES

# CHAPITRE 1

# ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

## 1.1 Rappels de topologie

J. Dieudonné 1 et 2.
Reed-Simon 1, 2 et 4.
Brézis, “Analyse fonctionnelle”

Soit $X$ ensemble. Soit $(X, \mathscr{T})$ espace topologique où $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$.
$\mathscr{T}$ parcourt l'ensemble des voisinages de $x$ où $x$ est un point quelconque de $X$.

### 1.1.1 Axiomes

1. Soient $x \in X$ et $V'$ voisinage de $x$. Si $V \supset V'$ alors $V$ est un voisinage de $X$.
2. $\bigcap_{\text{finie}} V_i$ est un voisinage de $x$, $\bigcap_{\text{finie}} V_i \in \mathscr{T}$, mais $\bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon \neq \emptyset$ n'est pas un voisinage de 0.
3. $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de $x$.

**Définition 1.1.1** (Ouvert)**.** $\Omega$ ouvert si et seulement si $\Omega$ est voisinage de chacun de ses points.

*Exemple.* $(-1, 1)$ ouvert tandis que $[-1, 1)$ non ouvert car -1 n'a pas de voisinage.

$V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est une base de voisinage pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

*Exercice* 1. On peut définir axiomatiquement $\mathscr{T}$ à partir de ses ouverts.

**Définition 1.1.2** (Fermé)**.** On dit que $F$ est un fermé si et seulement si $F^C$ est un ouvert.

### 1.1.2 Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques

**Définition 1.1.3** (Espace métrique, distance)**.**
$X$ est un ensemble, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ distance sur $X$ si et seulement si :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ ;
   *Remarque.* Si on a seulement $x = y \implies d(x, y) = 0$, alors $d$ est un écart.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire). De ce fait, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

*Exemple.* 1. Dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \|x - y\|$.
2. $X$ ensemble. On définit $d$ de la façon suivante :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 \text{ si } x = y \\ d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

Il s'agit de la distance triviale.
Si $x, y, z$ distincts alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

### 1.1.3 Comparaison des topologies

Soient $X$ un ensemble et $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ des topologies sur $X$.

**Définition 1.1.4** (Plus fine)**.** On dit que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$ et on note $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$ si et seulement si $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.
On dit aussi que $\mathscr{T}'$ est plus forte que $\mathscr{T}$.

*Remarque.* Si $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$, il y a plus d'ouverts dans $\mathscr{T}'$ que dans $\mathscr{T}$ (idem pour les fermés).

*Démonstration.* Soit $\Omega$ ouvert dans $X$. On a $\Omega \in \mathscr{T} \implies \Omega \in \mathscr{T}'$.
Soit $F$ un fermé dans $X$. On a $F \in \mathscr{T}$, mais $\Omega = F^C \in \mathscr{T} \implies F^C \in \mathscr{T}'$, donc $F \in \mathscr{T}'$. □

**Formulations équivalentes**

1. On suppose que $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$. Si $\forall x \in X$, $U$ est un voisinage de $x$ pour $\mathscr{T}$, alors $U$ voisinage de $x$ pour $\mathscr{T}'$, car si $U$ est un ouvert de $\mathscr{T}$, alors $U$ est un ouvert de $\mathscr{T}'$.
2. Pour l'application identité définie comme suit

$$id : (X, \mathscr{T}') \longrightarrow (X, \mathscr{T}),$$

on a $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$ si et seulement si $id$ est continue.

Par exemple, prenons $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$. On prend $\mathscr{T}$ topologie de la convergence simple, i. e. $f_n$ converge vers $f$ simplement si $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \to f(x)$.

**Ouverts de $\Omega$**

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{f \in X \mid \sup_{i=1,\dots,k} |f(a_i)| < \varepsilon\},$$

avec $a = a_0, \dots, a_k \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$.
$\Omega_{a,\varepsilon}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle) dans $X$.
Pour $f_0 \in X$, $\Omega_{a,\varepsilon} + f_0$ est une base de voisinage de $f_0$, car $X$ est un espace vectoriel (on agit par translation).

On considère maintenant la topologie de la convergence uniforme $\mathscr{T}'$.
$\Omega_\varepsilon = \{f \in X, \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \varepsilon\}$ est un voisinage de 0 (la fonction nulle).

**Proposition 1.1.1.** $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$, ie $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.

*Démonstration.* Soit $\Omega_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$.

Si $f \in \Omega_\varepsilon$, alors
$$\forall x \in [0,1], |f(x)| < \varepsilon,$$
ce qui implique que
$$\forall i \in \{1,\ldots,k\}, |f(a_i)| < \varepsilon \text{ (car c'est vrai pour tout } x).$$

Donc $\Omega_\varepsilon$ est un voisinage de 0 dans $\mathscr{T}$. On a ainsi démontré que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$. □

On considère l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}^0$ avec la norme
$$\|f\|_0 = \sup|f(x)|$$
et l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\mathcal{C}^1$ avec la norme
$$\|f\|_1 = \sup|f(x)| + \sup|f'(x)|.$$

La topologie sur $\mathcal{C}^1$ est plus fine que celle sur $\mathcal{C}^0$.

*Démonstration.* On a pour tout $f$,
$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1.$$

Ainsi si
$$\|f\|_1 < \varepsilon,$$
alors
$$\|f\|_0 < \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{f, \|f\|_1 < \varepsilon\} \subset \{f, \|f\|_0 < \varepsilon\}$.
Donc $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$.
On sait également que si $U$ est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}$, alors $U$ est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}'$. □

**Topologie métrisable (exemples)**

1. Topologie grossière $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie la moins fine.
   *Remarque.* $\mathscr{T}' = \mathscr{P}(X)$ est la topologie la plus fine.

   Vérifions si la topologie grossière est métrisable dans différents cas.
   — Si $X = \{a\}$, on a $d(a,a) = 0$. Le seul voisinage de $a$ est $X = \{a\}$. Donc $\mathscr{T}$ est métrisable.
   — Supposons que $X = \{a,b\}$. Mais $\mathscr{T}$ n'est plus métrisable, avec $d(a,b) = 1$ (distance triviale). Raisonnons par l'absurde. Si $\mathscr{T}$ était métrisable, $\mathscr{T}$ devrait contenir un ouvert $\Omega$ tel que $a \in \Omega$ et $b \notin \Omega$. Or $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$, donc c'est impossible.

   Pour $\mathscr{T}'$, on choisit la distance $d$ telle que $d(x,y) = 0$ ou 1. Est-ce que $\mathscr{T}'$ est métrisable ?
2. Prenons $\mathscr{T}$ telle que $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.
   On suppose que $X$ contient au moins deux éléments. Dans ce cas, $\mathscr{T}$ est une topologie sur $X$ non métrisable, car si $d(a,b) = 1$, avec $b \neq a$, alors dans $\mathscr{T}$ il n'existe pas de boule ouverte qui contient $\{b\}$ sans contenir $\{a\}$.
3. Considérons $X = \{a,b\}$ muni de la topologie $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathscr{P}(X)$.
   On a $d(a,b) = 1$, car $a \neq b$.
   De ce fait :
   $\{a\}$ voisinage de $a$ qui ne contient pas $b$ ( $\{a\} = \{x \text{ tel que } d(x,a) < 1\}$) ;
   $\{b\}$ voisinage de $b$ qui ne contient pas $a$.

### 1.1.4 Espaces vectoriels topologiques

Dans le cas où $(X, \mathscr{T})$ est un espace vectoriel topologique, il suffit de connaître les voisinages de 0 et on agit par translation pour déterminer les voisinages de n'importe quel $x \in X$.

**Définition 1.1.5** (Continuité)**.** Soient $X, Y$ deux espaces vectoriels topologiques et $f : X \to Y$ une application. On considère :

$$(U_a)_{a \in A} \text{ voisinage de 0 dans } X$$
$$(V_b)_{b \in B} \text{ voisinage de 0 dans } Y$$

$f$ est continue si pour tout $V = V_b + f(x_0)$ dans $Y$, il existe $U = \bigcap_{\text{finie}}(U_a + x_0)$ voisinage de $x$ dans $X$ tel que $x \in U \implies f(x) \in V$.

**Définition 1.1.6** (Norme)**.** $\|\cdot\|$ est une norme sur $X$ si

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation) ;
2. $\|\lambda x\| = |l|\|x\|$ (absolue homogénéité) ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

**Cas particulier : $X$ normé** De cette norme, on construit la distance $d$ telle que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Voisinages de 0.
$(U_a) = B(0, a)$
$A = \mathbb{R}^+$.
— $f : X \to Y$ continue en $x_0$, $\forall V = V_b + f(x_0)$, $\exists U = B(0, \delta) + x_0, f(U) \subset V$.
— $X, Y$ EVN.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(0, \delta) + x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

15-09-2023

## 1.2 Semi-normes et espaces localement convexes

### 1.2.1 Semi-normes sur $X$ espace vectoriel

**Définition 1.2.1** (Semi-norme)**.** L'application $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ est une semi-norme si :

1. $\rho(0) = 0$ ;
2. $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ ;
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

$X$ est un espace vectoriel $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

*Remarque.* ⚠ On n'a pas forcément $\rho(x) = 0 \implies x = 0$.

*Exemple.* 1. Si $\rho$ est une norme, c'est aussi une semi-norme.

2. $X = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)). On prend $a = (a_0, \dots, a_k) \subset [0,1]$. On définit

$$\rho_a(f) = \sup_{0 \leq i \leq k} |f(a_i)|.$$

3. Topologie faible. $X$ est un espace vectoriel et $X'$ est son dual (espace contenant les formes linéaires sur $X$).
   Soit $l$ une forme linéaire dans $X'$. Alors

$$p(x) = |\langle l, x \rangle|.$$

**Définition 1.2.2** (Famille de semi-normes séparée)**.** Soit $(\rho_a)_{a \in A}$ une famille de semi-normes. On dit que $(\rho_a)_{a \in A}$ sépare les points (ou est séparée) si et seulement si

$$\forall a \in A, \rho_a(x) = 0 \implies x = 0.$$

**Définition 1.2.3** (Espace localement convexe (ELC))**.** L'espace vectoriel topologique $X$ est un **espace localement convexe** si et seulement si $X$ est **muni d'une famille de semi-normes qui séparent les points**.

**Proposition 1.2.1.** Si $X$ est un espace localement convexe, alors $X$ est un espace vectoriel topologique pour la topologie définie par $\rho_a$.

*Démonstration.* On note $\mathscr{T}$ la topologie définie par la famille de semi-normes $(\rho_a)_{a \in A}$.

*Remarque* (Personnelle). On cherche à montrer que les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ forment une topologie. On va vérifier les axiomes de topologie.

Dans ce cas, les ouverts $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ sont $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{a,\varepsilon}, a \in A, \varepsilon > 0$ définis ci-dessous :

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

$\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ une base de voisinages de 0.
Les voisinages de $x$ sont donnés par translation :

$$x + \mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x + y, y \in \mathcal{O}_{a,\varepsilon}\}.$$

On montre facilement que $\bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$ et $\bigcup_{\text{quelconque}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathscr{T}$. □

**Proposition 1.2.2.** $\mathscr{T}$ est la topologie la moins fine sur $X$ qui rend continues

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (\lambda, x) \to \lambda x.$$

Il y a donc une compatibilité avec la structure des espaces vectoriels.

*Démonstration.* 1. $\mathscr{T}$ rend continues les deux opérations de $X$. On a en effet

$$\rho_a(x+y) \leq \rho_a(x) + \rho_a(y).$$

Il suffit de prendre $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient $\rho_a(x+y) < \varepsilon$.
On a $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ et on démontre ce résultat par analogie.

2. La moins fine (en exercice).

□

**Théorème 1.2.1.** *La topologie de $X$ espace localement convexe est Hausdorff, i. e. elle sépare les points.*

**Définition 1.2.4** (Hausdorff)**.** $(X, \mathscr{T})$ est de Hausdorff si et seulement si pour tout $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, il existe $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ voisinages de $x$ et de $y$ tels que

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset.$$

*Exemple.* On prend $X = \{a, b\}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. On a $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Donc $(X, \mathscr{T})$ est séparée.

*Démonstration du théorème 1.2.1.* Par contraposée, on prend $y \neq 0$ et $x = 0$.
Si $X$ est un espace localement convexe, alors il existe $a \in A$ tel que $\rho_a(y) = \varepsilon > 0$.
On pose

$$V_x = \left\{z, \rho_a(z) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \text{ et } V_y = \left\{z, \rho(z-y) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{1.1}$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient $V_x \cap V_y = \emptyset$, car

$$\rho_a(x-y) > |\rho_a(x) - \rho_a(y)| > \left|\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon\right| = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

□

## 1.3 Pourquoi "localement convexe" ?

**Définition 1.3.1.** Soit $X$ un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

1. On dit que $C \subset X$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1], z = tx + (1-t)y \in C.$$

2. On dit que $B \subset X$ est balancé (sur $\mathbb{R}$) ou cerclé (sur $\mathbb{C}$) si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \implies \forall x \in B, \lambda x \in B.$$

3. On dit que $E \subset X$ est équilibré si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \implies \forall x \in E, \lambda x \in E.$$

4. On dit que $A$ est absorbant si
$$\bigcup_{t>0} tA = X.$$

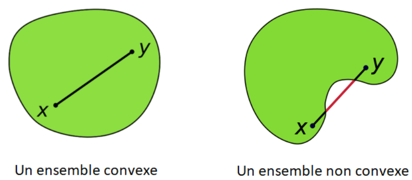


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

*Exemple.* 1. Si $X$ est un espace vectoriel normé, $A = B(0,1)$ et $x \in X$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$. Alors $x \in \|x\| B(0,1)$.
2. Si $0 \in C$ convexe, alors $C$ est équilibré si et seulement si $C$ est balancé.

*Démonstration.* On suppose que $C$ est balancé. Pour $x \in C \implies -x \in C$, donc $[-x, x] \in C$ par convexité. □

**Théorème 1.3.1.** *Soit $X$ un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *$X$ est un espace localement convexe (réel ou complexe) ;*
2. *Il existe une base de voisinages de $0 \in X$ qui sont convexes, balancés (cerclés), absorbants.*

19-09-2023

*Démonstration.* 1. Si $X$ est un espace localement convexe, alors une base de voisinages de 0 est donnée par
$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$
Les $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ sont convexes, balancés et absorbants (TD).
2. On utilise la jauge de Minkowski 1.3.2.
On pose
$$\rho_C(x) = \mu_C(x).$$
et on vérifie que $\rho_C$ est une semi-norme. Grâce au lemme 1.3, on obtient les résultats suivants :
(a) $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$, car $C$ est convexe ;
(b) $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$ si $\lambda > 0$ et $\rho_C(\lambda x) = |\lambda| \rho_C(x)$, car $C$ est cerclé.
$X$ muni de $\rho_C$ est un espace localement convexe.

□

**Définition 1.3.2** (Jauge de Minkowski)**.** Soit $X$ espace vectoriel réel ou complexe. On suppose que $C$ tel que $0 \in C$ est absorbant. Alors la jauge de Minkowski est définie comme suit :

$$\mu_C(x) = \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha C\}.$$

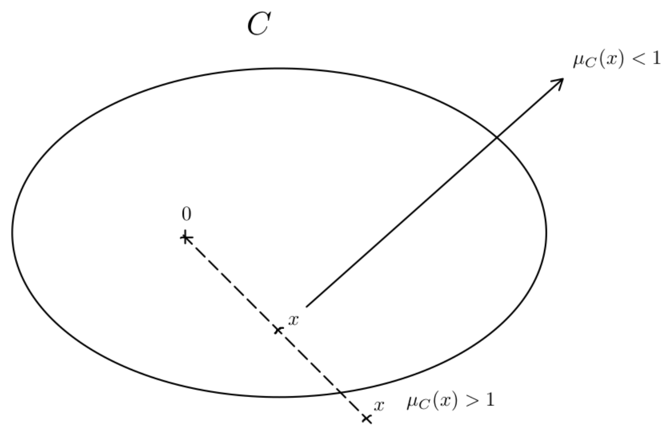


FIGURE 1.2 – La jauge de Minkowski

*Remarque.* Si $C$ est absorbant, alors $\forall x \in X$, $\mu_C(x) < \infty$.

**Lemme.** *Soit $C \subset X$ absorbant tel que $0 \in C$.*

1. *Si $\lambda \geq 0$, $\mu_C(\lambda x) = \lambda \mu_C(x)$ ;*
2. *Si $C$ est convexe, alors $\mu_C(x+y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$ ;*
3. *Si $C$ est cerclé, alors $\mu_C(\lambda x) = |\lambda| \mu_C(x)$ ;*
4. *$\{x \in X, \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X, \mu_C(x) \leq 1\}$.*

### 1.3.1 Théorème de Hahn-Banach

Il y a la forme analytique et la forme géométrique de ce théorème.

**Théorème 1.3.2** (De Hahn-Banach, forme analytique)**.** *Pour simplifier, on prend $X$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :*

- $\star$ $\forall x \in X, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ ;
- $\star$ $\forall x, y \in X$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

*Soient $Y$ un sous espace vectoriel de $X$ et $l$ une forme linéaire sur $Y$ qui vérifie*

$$\forall x \in Y, l(x) \leq p(x), \forall x \in Y.$$

*Alors (prolongement) il existe $L$ forme linéaire sur $X$ telle que $L_{|Y} = l$* ***et***

$$\forall x \in X, L(x) \leq p(x).$$

On l'applique aux espaces vectoriels normés, espaces localement convexes,...

**Théorème 1.3.3** (Norme sur un espace dual)**.** *Soit $X$ espace vectoriel normé, $X'$ formes linéaires continues sur $X$, $X'$ est un espace vectoriel normé. La norme sur $X'$ est définie de la façon suivante :*

$$\|L\|_{X'} \overset{déf}{=} \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |\langle L,x\rangle| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|\langle L,x\rangle|}{\|x\|}.$$

*Exercice* 2. Montrer que $\|\cdot\|_{X'}$ est une norme.

Si $X$ est un espace vectoriel normé complet (de Banach), alors $X'$ l'est aussi.

**Corollaire** (Prolongement isométrique de $l$ sur $Y$)**.** *Soit $X$ espace vectoriel normé, $Y \subset X$ sous espace vectoriel de $X$ et $l \in Y'$ avec*

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|y\|\leq 1\\ y\in Y}} |\langle l,y\rangle|.$$

*Alors il existe un prolongement $L$ de $l$ de même norme*

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} |\langle l,x\rangle| = \sup_{\substack{y\in Y\\ \|y\|\leq 1}} |\langle l,y\rangle|.$$

*Démonstration.* Par le théorème de Hahn-Banach, on pose $p$ telle que $p(x) = \|l\|_{Y'}\|x\|$ (l'application définie ainsi vérifie les propriétés de $p$ nécessaires à l'application du théorème).

Par Hahn-Banach, il existe $L$ une forme linéaire sur $X$ telle que

$$L(x) = \langle L,x\rangle \leq p(x) = \|l\|_{Y'}\|x\|.$$

Mais

$$\langle L,-x\rangle \leq \|l\|_{Y'}\|-x\|,$$

donc

$$|\langle L,x\rangle| \leq \|l\|_{Y'}\|x\|.$$

Ainsi, en divisant par $\|x\|$, on obtient le résultat suivant :

$$\forall x \in X, \left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \|l\|_{Y'}.$$

Or si on prend $x \in Y$,

$$\left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \|l\|_{Y'} = \sup_{y\in Y\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right|.$$

Comme $Y \subset X$ (ce qui entraîne que $\sup_{y\in Y\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \leq \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \left|\left\langle L, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right|$), on a donc égalité, d'où l'isométrie. $\square$

**Corollaire.** *$\forall x_0 \in X$ espace vectoriel réel, il existe $L_0 \in X', \|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X$.*

*Démonstration.* $Y = \mathbb{R}x_0$. Soit $l(tx_0) \overset{\text{déf}}{=} t\|x_0\|^2$ forme linéaire continue sur $Y$.

Alors, en posant $t = 1$, on obtient

$$\|l\|_{Y'} = \|x_0\|$$

et, par le théorème de Hahn-Banach,

$$\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

□

*Exercice* 3. Traduire Hahn-Banach dans le cas où $X$ est un espace localement convexe.

**Théorème 1.3.4** (De Hahn-Banach, forme géométrique). *Soit $X$ espace vectoriel normé (ou espace localement convexe). Soient $A, B \subset X$ convexes et disjoints.*

1. *On suppose que $A$ est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine (d'équation $\langle L, x\rangle =$ constante) $\mathscr{H}$ qui sépare au sens large $A$ et $B$.*
2. *Si $A$ est fermé, $B$ est compact, alors il existe $\mathscr{H}$ hyperplan qui sépare $A$ et $B$ au sens strict.*

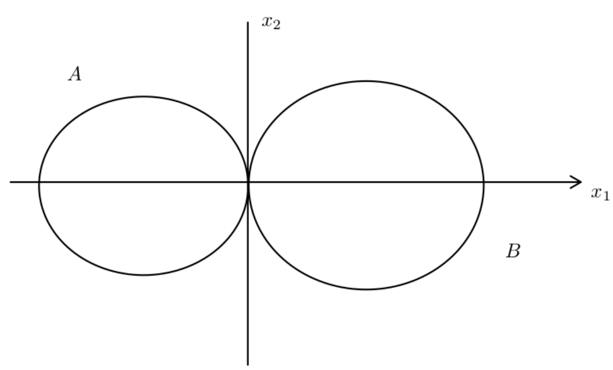


Figure 1.3 – $A = \{x_1 < 0\}, B = \{x_2 \geq 0\}, \mathscr{H} = \{x_1 = 0\}$.

## 1.4 Espaces localement convexes métrisables, espaces de Fréchet

### 26-09-2023 1.4.1 Topologies définies par une distance

On rappelle la définition 1.1.3.

**Définition 1.4.1** (Distances équivalentes). On dit que $d_1$ est équivalente à $d_2$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y).$$

$d_1 \sim d_2 \implies (X, d_1) \simeq (X, d_2)$, mais la réciproque est fausse.

*Exemple.* On prend un espace métrique $(X, d)$ avec les distances

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \text{ et } \delta'(x,y) = \inf(1, d(x,y)).$$

Ces distances sont équivalentes entre elles.

*Démonstration.*

1. Montrons que $(X, d) \sim (X, \delta')$. On remarque d'abord que

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y),$$

ce qui veut dire que $(X, d) \prec (X, \delta)$ (car si $\mathcal{O}$ est un ouvert pour $\delta$, alors il le sera forcément pour $d$).
Prenons

$$f(t) = \frac{t}{1+t}. \tag{1.2}$$

La fonction $f$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0,1]$. En effet, montrons qu'il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}$.
On a

$$\frac{t}{1+t} = s \implies t = ts + s \implies t = \frac{s}{1-s}.$$

Donc $d(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{1-\delta(x,y)}$. Donc si $d(x,y) < \varepsilon$, alors $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Donc $(X, \delta) \prec (X, d)$.

2. Montrons que $\delta \sim \delta'$.
On a

$$\delta = \frac{d}{1+d} \leq \begin{cases} 1 \\ \delta. \end{cases}$$

En effet, cela vient du fait que $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \underset{d(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc

$$\delta(x,y) \leq \delta'(x,y).$$

Mais $\delta' \leq 2\delta$. En effet, on distingue deux cas :

   (a) Si $\delta \leq 1$ et $\delta' = d$, alors $d \leq 2d$,
   (b) Si $\delta \geq 1$ et $\delta' = 1$, alors $1 \leq 2d$.

3. Montrons que $\delta$ est une distance.

   (a) Montrons l'inégalité triangulaire. Si $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, montrons que $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$.
   Est-ce que $f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)) + f(d(z,y))$, avec $f$ définie dans 1.2 ?

      i. $f$ est croissante, donc $f(d(x,y)) \leq f[d(x,z) + d(z,y)]$. Il suffit de voir que $f(t) \leq f(u) + f(v)$.
      ii. Montrons la sous-additivité de $f$. Posons

$$v \mapsto \varphi(v) = f(u+v) - f(u) - f(v).$$

      On a $\varphi(0) = 0$, car $f(0) = 0$ et $\varphi(v) = f'(u+v) - f'(v) < 0$, car $f$ est une fonction croissante.

□

*Sous quelles conditions un espace localement convexe est métrisable ?*

On remarque par exemple que $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus généralement, les topologies faibles ne sont pas métrisables, sauf si on travaille en dimension finie. Par ailleurs, $X$ muni de la topologie grossière n'est pas métrisable (non séparée).

**Proposition 1.4.1.** Soit $X$ un espace localement convexe (donc séparé). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $X$ est métrisable.
2. Il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans $X$, et ce pour tout $x \in X$.
3. La topologie de $X$ est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.

*Démonstration.*

1. (1) $\Longrightarrow$ (2). La topologie sur $X$ est équivalente à $(X,d)$. Soit $(X,d)$ un espace métrique. Il suffit de poser
$$\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \mid d(x,0) < \frac{1}{n} \right\} \text{ ($\mathbb{R}$ est archimédien).}$$
Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n$ tel que $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} \subset \mathcal{O}_\varepsilon$. Donc $x + \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}$ est une base dénombrable de voisinages de $x$.
2. (2) $\Longrightarrow$ (3). On sait que $\mathscr{T}$ topologie de $X$ est donnée par une famille de semi-normes. Les voisinages de 0 dans $X$ sont donnés par
$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon,a_i}, \text{ avec } i \in \{1,\dots,n\}.$$
On rappelle que $\mathcal{O}_{\varepsilon,a_i} = \{x \mid \rho_{a_i} < \varepsilon\}$.
On peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On sait qu'il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans $X$. Soit $U_n$ une base de voisinages dénombrable de 0. On pose
$$\rho_n(x) = \mu_{U_n}(x).$$
On prend les $U_n$ convexes, balancés, absorbants comme dans le théorème 1.3.1 (c'est possible, car $X$ est un espace localement convexe).
3. (3) $\Longrightarrow$ (1).
   (a) Soit $(\rho_n)$ une famille dénombrable de semi-normes sur $X$. On pose
   $$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}.$$
   Montrons que $(X,\mathrm{ELC}) \prec (X,d)$. Soit $U \in \mathscr{T}$ (la topologie ELC). On se ramène aux voisinages de 0. On a
   $$U = \bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{\varepsilon,a}, a \in A.$$
   Comme il existe une base dénombrable de voisinages, on peut choisir
   $$U_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{N} = \{x \mid \rho_j(x-0) < \varepsilon\}, \text{ avec } A = \mathbb{N}.$$
   Ce voisinage est inclus dans $\{x \mid \sum \rho_j(x-0) \leq N\varepsilon\}$.
   Montrons que $U$ est un voisinage de $x$ pour la topologie métrique $(X,d)$.
   Soit $\varepsilon > 0$. On pose $d(x,0) = \left(\sum_1^N + \sum_{N+1}^\infty\right) \frac{\rho_n}{1+\rho_n}$. Or $N$ est tel que

$$\sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \implies \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n}{1+\rho_n} < \varepsilon.$$

De plus,

$$d(x,y) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n}{1+d_n} < \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} d_n(x,y). \tag{1.3}$$

Or $\rho_n(x-y) < \varepsilon$, car $x \in y + U_\varepsilon$.
Donc 1.3 devient

$$d(x,y) \leq \varepsilon + N\varepsilon \text{ avec } N \text{ fixé.}$$

Donc $\mathscr{T} \prec (X,d)$.

(b) Montrons que $(X,d) \prec \mathscr{T}$. On doit majorer $\rho_m(x-y)$.
Or

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)} \geq 2^{-m} \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)}.$$

Et

$$2^m d(x,y) \geq \frac{\rho_m(x-y)}{1+\rho_m(x-y)} \geq f(t).$$

Donc on a $\rho_m(x,y) \leq g(2^m d(x,y))$, où $g$ est la réciproque de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

□

**Proposition 1.4.2.** Soit $X$ un espace localement convexe qui vérifie l'une des propriétés énoncées dans la proposition 1.4.1 (i. e. métrisable). On note la topologie de $X$ ELC par $\mathscr{T}$. Alors $X$ est complet pour $\mathscr{T}$ si et seulement si $(X,d)$ est complet.

*Démonstration.* Cette proposition se démontre exactement comme 1.4.1. □

**Définition 1.4.2.** Soit $X$ un espace localement convexe. On dit que $X$ est un **espace de Fréchet** si $X$ est **métrisable et complet**.

*Exemple.*

1. *Les espaces localement convexes qui ne sont pas des Fréchet.*
   (a) *Non métrisables.* $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple, les topologies faibles, ...
2. *Les espaces localement convexes qui sont des Fréchet.* Les espaces de Banach, par exemple $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $\mathcal{C}_0^\infty(K)$, ...

### 1.4.2 Espace de Schwarz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \iff \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} \left|x^\alpha D^\beta_\varphi\right| < \infty$.
Montrons que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est complet. On va regarder $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \dots$

1. $\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon$, donc $\varphi_p \longrightarrow \varphi$, donc

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| < \varepsilon.$$

En particulier pour tout $K \subset \mathbb{R}$, $\varphi_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(K)$. Or $\mathcal{C}^0(K)$ est complet, donc $\varphi_n \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} \varphi$. Comme $K$ est arbitraire, elle converge localement sur tout $\mathbb{R}$. On a

$$\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon,$$

donc

$$\rho_{0,0}(\varphi - \varphi_p) < \varepsilon.$$

Donc $\varphi_p$ converge pour $\rho_{0,0}$.

2. On a besoin de rappeler le lemme suivant :

**Lemme.** *Si $\varphi' \longrightarrow \psi$ uniformément et $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ simplement, alors $\psi = \varphi'$.*

## 1.5 Topologie forte et topologie faible sur les espaces de Banach

10-10-2023 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (réel ou complexe) et $(E', \|\cdot\|')$ son dual topologique. On rappelle que

$$E' = \{l \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}), \exists C > 0, \forall x \in E, |\langle l, x\rangle| \leq C \|x\|^2\},$$

avec la norme sur le dual définie dans 1.3.3.
$(E', \|\cdot\|')$ est un espace de Banach, un cas particulier de $\mathscr{L}(E, F)$, avec pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$,

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F .$$

On affaiblit $(E, \|\cdot\|)$. Alors $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine qui rend continue toutes les formes linéaires sur $E$. $X \sim \sigma(E, E')$ est muni des semi-normes $|\langle l, x\rangle| = \rho_l(x)$. Un voisinage de 0 est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_{\underline{l},\varepsilon} = \{x \in E : \sup_{1 \leq i \leq n} \langle l_i, x\rangle < \varepsilon\}, \underline{l} = (l_1, \dots, l_n).$$

### 1.5.1 Comparaison des topologies $(E, \|\cdot\|)$ et $\sigma(E, E')$

**Lemme.** *Soit $E$ un espace de Banach. Alors la norme définie*

$$x = \sup_{\substack{l \in E' \\ \|l\|' \leq 1}} |\langle l, x\rangle| = \langle l_0, x\rangle.$$

*est telle que le* $\sup$ *est atteint. On a* $\sup = \max$.

*Démonstration.* On a $x \neq 0$ par la définition de $\|\cdot\|'$. Alors

$$\left|\left\langle l, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \|l\|' \leq 1.$$

Alors

$$|\langle l, x\rangle| \leq \|x\| \text{ pour tout } l \in E' \text{ tel que } \|l\|' \leq 1.$$

Soit $x_0$ et $F$ tel que $F = \mathbb{R}x_0$. Alors $\forall\lambda \in \mathbb{R}, l_0(\lambda x_0) = \lambda$ et $\|l_0\| = \|x_0\|$. Par Hahn-Banach, on peut prolonger $l_0$ en $L_0$ sur tout l'espace de Banach. □

**Proposition 1.5.1.**

$$(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E').$$

Donc $X \sim \sigma(E, E')$ est un espace localement convexe.

*Démonstration.* On a

$$\rho_l(x) = |\langle l, x\rangle| \leq \|l\|' \|x\|.$$

□

*Autre démonstration.* Montrons que $\mathcal{O}_{\underline{l},\varepsilon}$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$, i. e. $\|x\| < \delta$. On prend $n$ formes linéaires $l_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ et on considère

$$\|x\| = \sup_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x\rangle|.$$

Or $|\langle l_i, x\rangle| < \varepsilon$ ... (à suivre). □

*Démonstration.* Montrons que $\sigma(E, E')$ est séparé. Soient $x_1, x_2$ distincts. Montrons qu'il existe $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\sigma(E, E')$ tels que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

Par le théorème de Hahn-Banach 1.3.4, pour $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$ compacts et convexes, pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a

$$\langle l, x\rangle < \alpha < \langle l, y\rangle.$$

Donc

$$\langle l, x_1\rangle < \alpha < \langle l, x_2\rangle.$$

On a $x_1 \in \mathcal{O}^1_{\alpha,l} = \{x : \langle l, x\rangle < \alpha\}$ et $\mathcal{O}^2_{\alpha,l} = \{y : \langle l, y\rangle > \alpha\}$, ces ouverts séparent $x_1$ et $x_2$. □

**Théorème 1.5.1.** *$(E, \|\cdot\|)$ est strictement plus fine que $\sigma(E, E')$ sauf en dimension finie.*

*Démonstration.* On considère $S = \{\|x\| = 1\}$. Alors $S = \overline{S}$, son adhérence.

Soit $x_0$ de norme plus petite que 1. Montrons que pour tout $V$ voisinage de 0 dans $\mathscr{T}$, $V \cap S \neq \emptyset$. On a

$$V = \{x : |\langle l_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}.$$

Comme $\dim(E) = \infty$, il existe $y_0 \neq 0$ tel que $\langle l_i, y_0\rangle = 0, \forall i$. On a

$$g(t) = \|x_0 + ty_0\|.$$

On a $g(0) = \|x_0\| < 1$ et $g(\infty) = +\infty$. La fonction $g$ est continue, donc il existe $t_0 \in (0, \infty)$ tel que $\|x_0 + t_0y_0\| = 1$. Donc $x_0 + t_0y_0 \in S$ et $x_0 + t_0y_0 \in V$, car

$$|\langle l_i, (x_0 + t_0 y_0) - x_0 \rangle| = |\langle l_i, t_0 y_0 \rangle| = |t_0 \langle l_i, y_0 \rangle| = 0 < \varepsilon.$$

□

*Remarque.* $\forall t \in \mathbb{R}, \langle l_i, x_0 + t y_0 \rangle = 0$. Alors $V$ contient toute une droite.

*Remarque.* Pour $E$ Banach séparable, $B_E$ boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est métrisable pour $\sigma(E, E')$.

Si $E$ est réfléxif (c'est-à-dire que l'injection naturelle dans son bidual est surjective), alors $B_E = \{\|x\| \le 1\}$ est un espace métrique compact pour $\mathcal{O}(E, E')$.

### 1.5.2 Théorème de Banach-Steinhaus, suites faiblement et fortement convergentes

**Théorème 1.5.2.** *Soient $E, F$ espaces de Banach et $(T_a)_{a \in A} \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que*

$$\forall x \in E, \sup_{a \in A} \|T_a x\|_F < +\infty.$$

*Alors*

$$\sup_{a \in A} \|T_a\| < +\infty \text{ (bornée en norme),}$$

*i. e.* $\exists C > 0, \forall x \in E, \forall \alpha \in A, \|T_\alpha(x)\| \le C \|x\|$.

**Corollaire.** *Soit $T_n \in \mathscr{L}(E, F)$ avec $\|T_n\| < +\infty$ avec $\forall x \in E, T_n x \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y \in F$. On note $y = Tx$. Alors $T \in \mathscr{L}(E, F)$ et $T = \liminf T_n$.*

*Démonstration.* Montrons que $T_n$ est linéaire. En effet,

$$T_n(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T_n(x) + \lambda' T_n(x').$$

Par passage à la limite, on obtient $T(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T(x) + \lambda' T(x')$.

Montrons l'autre partie du corollaire. Par Banach-Steinhaus, si on considère $A = \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $T_n x$ est convergente, donc bornée, i. e. $\|T_n x\| < \infty$, donc $\sup_n T_n < C$ comme $\|T_n x\| \le \|T_n\| \|x\|$.

Par passage à la limite, on obtient $\|Tx\| \le C \|x\|$, avec $C = \liminf \|T_n\|$. □

**Définition 1.5.1.** Soit $E$ espace de Banach. $B \subset E$ est bornée si et seulement si

$$\exists C \ge 0, \forall x \in B, \|x\| \le C.$$

**Corollaire.** *$B \subset E$ est bornée si et seulement si $\forall l \in E', l(B) \subset \mathbb{R}$ est borné.*

### 1.5.3 Suites faiblement et fortement convergentes

**Définition 1.5.2** (Suite fortement convergente)**.** Soit $x_n$ une suite de $E$. On dit que $x_n$ est fortement convergente lorsque $x_n \longrightarrow x \iff \|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

**Définition 1.5.3** (Suite fortement convergente)**.** Soit $x_n$ une suite de $E$. On dit que $x_n$ est faiblement convergente lorsque $x_n \longrightarrow x \iff \forall l \in E', \langle l, x_n \rangle \longrightarrow \langle l, x \rangle$.

On note alors $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ (avec *weak* qui signifie faible en anglais) ou $x_n \rightharpoonup x$.

**Corollaire.**

1. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$*, alors* $x_n \longrightarrow x$ *dans* $\sigma(E, E')$*.*
2. *Si* $x_n \longrightarrow x$*, alors* $x_n$ *est bornée dans* $E$ *et* $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|$*.*
3. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *et* $l_n \longrightarrow l$*, alors* $\langle l_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle l, x \rangle$*.*

*Démonstration.*

1. Soit $l \in E'$. Alors

$$|\langle l, x_n - x \rangle| \leq \|l\|' \|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $T_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on définit

$$T_n l = \langle l, x_n \rangle \longrightarrow \langle l, x \rangle = Tl,$$

car $x_n$ tend faiblement vers $x$. Alors d'après le corollaire, $\sup \|T_n\| < \infty$, avec $T \in (E')' = E''$ et $\|T\|'' \leq \liminf \|x_n\|$, donc $|Tl| = |\langle l, x \rangle|$ par passage à la limite.

3. $$\langle l_n, x_n \rangle - \langle l, x \rangle = \langle l, x_n - x \rangle + \langle l, x_n - x \rangle.$$

Or $\langle l, x_n - x \rangle \longrightarrow 0$, car $x_n \longrightarrow x$ et $\langle l, x_n - x \rangle \longrightarrow 0$, car $|\langle l_n - l, x_n \rangle| \leq \|l_n - l\| \|x_n\| \longrightarrow 0$.

□

### 1.5.4 Topologie faible ∗

On considère $E$ espace de Banach avec $(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E')$. On construit la topologie $*\sigma(E', E)$ une topologie sur $E'$. 13-10-2023

La topologie forte sur $E' = F$ est donnée par la norme

$$\|l\|' = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle l, x \rangle| .$$

Sur $E$, on a aussi $\sigma(F, F') = \sigma(E', E'')$. Si $E = E''$ (i. e. $E$ est réfléxif), alors la topologie $\sigma(E', E'')$ se confond avec la topologie faible $\sigma(E, E')$. Par contre, si $E$ s'injecte dans $E''$, on a besoin de définir une autre topologie $*\sigma(E', E)$ moins fine que $\sigma(E', E'')$.

**Proposition 1.5.2.** Il existe une isométrie $J : E \hookrightarrow E''$.

*Démonstration.* On définit une application $J : E \longrightarrow E''$ telle que

$$\langle Jx, x' \rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle x', x \rangle.$$

Montrons que $\|Jx\|' = \|x\|$.
On a besoin d'introduire le résultat suivant :

**Lemme.**

$$\|x\| = \sup_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x \rangle| = \max_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x \rangle| \, .$$

Donc $\|Jx\| = \|x\|$ en prenant

$$\sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} |\langle x', x \rangle| = \|x\| \, .$$

□

*Remarque.* $J$ n'est pas unitaire (non surjectif si $E$ n'est pas réfléxif).

*Exemple.* On considère $E = L^1$. Soit $f \in L^1$, alors $Jf \in L^\infty$ et on a :

$$\langle Jf, g \rangle = \langle g, f \rangle = \int g(x) f(x) dx \ (f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}).$$

Mais $g(0)$ ne peut pas s'écrire comme une intégrale $\int g(x)f(x)dx, \forall f \in L^1$ si $g \in C_0^0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty$.

**Proposition 1.5.3.** $*\sigma(E', E)$ est séparée.

*Démonstration.* Soient $l_1, l_2 \in E'$ tels que $l_1 \neq l_2$, alors il existe $x \in E$ tel que $l_1(x) \neq l_2(x)$, donc

$$\langle l_1, x \rangle \neq \langle l_2, x \rangle,$$

ce qui implique que $\langle l_1, x \rangle < \alpha < \langle l_2, x \rangle$.
On a $\mathcal{O}_1 = \{l \in E' : \langle l, x \rangle < \alpha\}$ ouvert de $E'$ et $\mathcal{O}_2 = \{l \in E', \langle l, x \rangle > \alpha\}$. □

*Remarque.* Pour $x$ fixé, l'application $l \longmapsto |\langle l, x \rangle|$ semi-norme de $E'$.

**Proposition 1.5.4** (Autres propriétés)**.** $*\sigma(E', E)$ n'est pas métrisable.

*Remarque.* $E$ est séparable et réfléxif si et seulement si $E'$ est séparable et réfléxif.

**Théorème 1.5.3.** *Si $E$ est un Banach séparable, alors la boule unité fermée*

$$B_E = \{\|l\| \leq 1\}$$

*est métrisable pour $*\sigma$.*

**Proposition 1.5.5.** Soit $\xi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $(\xi \in E'')$. Si $\xi$ est continue pour $*\sigma(E, E')$, il existe $x \in E, \xi = Jx$ et

$$\langle \xi, l \rangle = \langle l, x \rangle.$$

**Théorème 1.5.4** (De représentation de Riecz)**.** *Si* $\xi \in \mathscr{H}' = \mathscr{H}$*, alors*

$$\forall l \in \mathscr{H}, \langle \xi, l \rangle = \langle l, x \rangle.$$

CHAPITRE 2

# THÉORIE DE DISTRIBUTIONS

La théorie de distributions utilise une grande variété des fonctions test. 17-10-2023

Ainsi une mesure de Radon $\mu$ sur un espace localement compact $\Omega$ (par exemple un ouvert de $\mathbb{R}^d$) est une distribution d'ordre 0 agissant $\mathcal{C}_0^0$ (noté encore $\mathcal{K}(\Omega)$) notamment par

$$\langle \mu, f \rangle = \int_\Omega f(x) d\mu(x).$$

Sur $\Omega = \mathbb{R}^d$, il suffit de prendre l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui est un espace de Fréchet. Par contre si $\Omega$ est un ouvert borné, il y a des problèmes sur les bords de $\Omega$.

On cherche aussi les fonctions test dans $\mathcal{K}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_0^1$ qui ne sont ni des espaces de Banach, ni des espaces de Fréchet. On choisit généralement $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$.

Les espaces fonctionnels sont rangés en deux catégories :

— Les espaces de Lebesgue ;

— Les espaces de fonctions différentiables.

⚠

## 2.1 Espaces de Lebesgue

### 2.1.1 Mesure de Lebesgue

Il est important de rappeler la notion d'espace mesuré.

**Définition 2.1.1** (Rappel : tribu)**.** Soit $X$ un ensemble. On dit qu'une collection d'ensembles $\mathcal{T}$ est une tribu si

1. $X \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$ ;
2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors $A^C \in \mathcal{T}$ ;
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{T}$, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un espace mesurable.

*Remarque.* $\mathcal{T}$ est aussi stable par intersection dénombrable, l'intersection étant complémentaire à la réunion...

**Définition 2.1.2** (Mesure)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On dit qu'une application $\mu : X \longrightarrow [0, \infty)$ est une mesure si :

1. $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. Pour toute suite $(A_n)$ de $\mathcal{T}$ disjointe, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

*Exemple.* Pour $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne engendrée par les pavés $\displaystyle\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)$, avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. On peut aussi l'engendrer par les "quadrants" $\displaystyle\prod_{i=1}^{d}[a_i, \infty)$.

La mesure de Lebesgue se calcule comme suit. Si $d = 1$, alors $\mu([a, b)) = b - a$. Pour les pavés, on aura :

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i).$$

Elle se caractérise par le fait d'être stable par translation.

Pour avoir une théorie cohérente, il faut compléter $B(R^d) \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}$ (la tribu borélienne) en ajoutant des ensembles négligeables. Ainsi $\overline{\mathcal{T}}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{T}$ et les ensembles négligeables.

**Définition 2.1.3.** $A \in \mathbb{R}^d$, i. e. $A$ est mesurable si et seulement si $A \in \overline{\mathcal{T}}$.

*Remarque.* A toute fin utile, on considérera que tous les ensemble sont mesurables.

*Comment mesurer les fonctions $\mu(F)$ ?*

On peut utiliser :

— L'intégrale de Riemann ;

— L'intégrale de Lebesgue.

### 2.1.2 Intégrale des fonctions positives

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace normé mesuré.

**Définition 2.1.4** (Fonction mesurable)**.** On dit que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si pour tout borélien $B$ de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

**Proposition 2.1.1** (Axiomes)**.** Il existe une application définie sur l'ensemble mesurable des fonctions mesurables positives de $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $f \longmapsto \int f(x)dx$ qui réalise les propriétés suivantes :

1. *Linéarité :* pour tous $\alpha, \beta \geq 0$, on a
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$
2. *Croissance :* si $\forall x, f(x) \leq g(x)$, alors
$$\int f(x)dx \leq \int g(x)dx.$$
3. *Normalisation :* pour tout pavé $A = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)$, on a
$$\int \mathbb{1}_A(x)dx = \mu(A).$$
4. *Théorème de Beppo-Levi :* si $(f_n)$ est une suite croissante de fonctions mesurables, alors
$$\underbrace{\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx}_{\int f(x)dx} = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx \leq +\infty. \tag{2.1}$$

Au lieu d'intégrer $f$ sur tout $\mathbb{R}$, on peut l'intégrer seulement sur la partie où elle est mesurable en posant :
$$\int_A f(x)dx = \int f(x)\mathbb{1}_A(x)dx.$$

**Théorème 2.1.1.** *On peut calculer l'intégrale $\int_A f(x)dx$ de toute fonction mesurable positive par :*
$$\int_A f(x)dx = \sup \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\mu(A \cap \{f_i \geq t_i\})$$
*où le* sup *est pris sur toutes les subdivisions finies sur l'axe des $y$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n, n \in \mathbb{N}$ et dont le pas tend vers 0.*

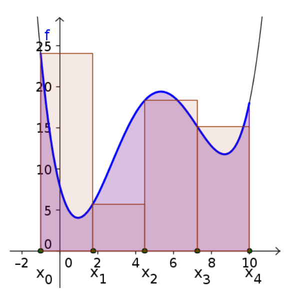


Figure 2.1 – Subdivisions et sommes de Riemann

**Proposition 2.1.2.** Si $f$ est à valeurs positives, alors
$$\int f(x)dx = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.}$$

*Démonstration.* Posons $A = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$. Alors $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A(x)$ si $\mu(A) = 0$. On obtient par 2.1 :

$$\int f(x)dx \lim_{n\to\infty} \int_A dx = 0.$$

Réciproquement, si $\int f(x)dx = 0$, alors on remarque que $\mathbb{1}_A(x) \leq \lim_{n\to\infty} nf_n(x)$ et on a encore par 2.1 :

$$\mu(A) = \int_A \mathbb{1}_A(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} n \int f(x)dx = 0.$$

□

25-10-2023

**Théorème 2.1.2** (⚠ De convergence dominée)**.** *Soit $(f_n) \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ une suite de fonctions (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert). Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est définie presque partout sauf sur $E = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$ de mesure nulle. S'il existe $h \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ telle que $|f_n| \leq h$ et si $f_n \longrightarrow f$ presque partout sur $\Omega$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx,$$

*ce qui équivaut à dire que $\|f_n - f\|_{\mathscr{L}^1} \longrightarrow 0$.*

*Remarque.* Si $f_n$ est continue sur $K \subset \Omega$ et $f_n \longrightarrow f$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

## 2.2 Espaces $L^p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ comme espaces de Banach

On définit l'espace $\mathscr{L}^1 \longrightarrow L^1$. On dit que $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ presque partout (i. e. $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$). C'est une relation d'équivalence. On définit l'espace quotient $L^1 = \mathscr{L}^1/\sim$. On montre que $L^1$ est complet.

On note $\dot{f} \in L^1$, $\dot{f}$ est un représentant de la classe de $f$. Ainsi on peut définir la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1$ par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx,$$

mais la même écriture n'a pas de sens dans $L^2$.

### 2.2.1 Les espaces $L^p, 1 \leq p < \infty$

**Théorème 2.2.1.** *L'espace $L^1$ est complet, muni de la norme*

$$\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx.$$

*Cela veut dire que c'est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Soit $f_n$ une suite de Cauchy dans $L^1$. On peut lui associer une série

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(f_{i+1} - f_i).$$

Montrons que $f_n$ converge. Il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite $f_{n_k}$ qui converge. On peut toujours écrire :

$$f_n - f = \underbrace{f_n - f_{n_k}}_{<\varepsilon} + \underbrace{f_n - f_{n_k}}_{<\varepsilon}.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, p \geq N, q \geq 0, \|f_{p+q} - f_p\|_{L^1} < \varepsilon.$$

A extraction près d'une sous-suite, on peut supposer que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1} < \varepsilon.$$

On pose $g_m(x) = \sum_{n=1}^{m-1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$. Pour tout $x$, la suite $(g_m(x))_m$ est croissante (car on rajoute un terme positif) et elle est définie presque partout. Par Beppo-Levi, on a

$$\int g(x)dx = \int \lim_{m\to\infty} g_m = \lim_{m\to\infty} \int g_m(x)dx.$$

Or on a

$$\int g_m(x)dx = \sum_{n=1}^{m-1} \int |f_{n+1}(x) - f_n(x)|\, dx.$$

C'est une série absolument convergente, car $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. On a alors

$$\int g(x)dx < +\infty$$

et en particulier $g(x) < +\infty$ presque partout.

Donc $f_m(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} f_{n+1}(x) - f_n(x)$ définit une série numérique absolument convergente, donc $f_m(x) \underset{\text{p.p.}}{\longrightarrow} f(x)$. Il reste à montrer que $f \in L^1$. On a :

$$|f_m(x)| \leq |f_1(x)| + g_m(x) \leq |f_1(x)| + g(x) = h(x) \in L^1.$$

Par Lebesgue, on a $\lim \int f_m = \int f$, avec $f \in L^1$. On a donc $\|f_m - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$. □

**Théorème 2.2.2.** *$L^p$ est aussi un Banach et ce pour tout $p \in [1, \infty)$.*

*Démonstration.* On utilise l'inégalité de Minkowski :

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{2.2}$$

La démonstration est la même que pour $L^1$. □

**Corollaire.** *SI $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p$, alors il existe une sous-suite $f_{n_k}$ qui converge presque partout vers $f$.*

*Démonstration.* Comme avant, on peut supposer que $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. On pose

$$f_m(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

C'est une série normalement convergente dans $L^p$. Par le raisonnement précédent, on détermine que $f_m(x) \underset{\text{p.p.}}{\longrightarrow} f$. □

**Théorème 2.2.3.** *Soit $\mathcal{K}(\Omega)$, l'espace de fonctions continues à support compact dans $\Omega$. Alors $\mathcal{K}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty)$.*

*Démonstration.* Brézis, théorème 4.12. □

### 2.2.2 Espace $L^\infty$

**Théorème 2.2.4.** *$L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.*

**Définition 2.2.1.** On définit la norme dans l'espace $L^\infty$ de la façon suivante :

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess} |f| .$$

Pour tout $C > \operatorname{supess}(f)$, on a $\mu(\{x : f(x) > C\}) = 0$. Si $f$ est continue, on a $\operatorname{supess} f = \sup f$.

*Démonstration.* Soit $f_n$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. On prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout $k$, il existe $N(k)$ tel que $\forall n, m \geq N(k)$, on a $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$.

Montrons que $f_n$ converge vers $f \in L^\infty$. Donc il existe $E_k$ négligeable tel que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$ pour tout $x \notin E_k$. On a que $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ est de mesure nulle. Pour tout $x \in E$, la suite numérique $f_n(x)$ est de Cauchy, donc elle converge vers $f(x)$ (partout). On a donc

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},$$

donc $\|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{k}$ avec $f \in L^\infty$. □

### 2.2.3 Espace $L^2$

**Théorème 2.2.5.** *$\mathcal{H} = L^2$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :*

$$(u \mid v) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} dx.$$

L'espace $L^2$ est engendrée par une base orthonormée (*base hilbertienne*), i.e. il existe une suite $(e_j)_j$ telle que, pour tout $f \in L^2$, on a

$$f = \sum_j f_j e_j, f_j \in \mathbb{C}.$$

**Proposition 2.2.1** (Egalité de Parseval)**.** On a pour tout $f \in L^2$ :

$$\|f\|_2^2 = \sum_j |f_j|^2 .$$

## 2.3 Espaces $L^p$ comme ELC

### 2.3.1 $L^1(\Omega)$, avec $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^d$

C'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_{L^1}$. C'est aussi un espace localement convexe muni de la famille de semi-normes $(\rho_{a,r})_{a\in\Omega, r>0}$ définies par

$$\rho_{a,r}(f) = \int_{B(a,r)} |f(x)|\, dx.$$

**Proposition 2.3.1.** $(E, (\rho_{a,r}))$ est séparé.

*Démonstration.* Si $f \neq g$ presque partout, alors

$$\rho_{a,r}(f-g) = \int_{B(a,r)} |f(x) - g(x)|\, dx \neq 0.$$

Donc il existe $E$ de mesure strictement positive tel que $\forall x \in E, g(x) \neq f(x)$. Or $E$ est partout dense dans $\Omega$ pour la mesure de Lebesgue. On a alors

$$\int_{B(a,r)} |f-g| = \int_{E\cap B(a,r)} |f-g| > 0.$$

□

### 2.3.2 $E = L^\infty$

On le munit de la famille de semi-normes

$$\rho_{a,r}(f) = \text{supess}_{B(a,r)}(|f|).$$

**Proposition 2.3.2.** $E = L^\infty(\Omega)$ est séparé, mais non séparable.

### 2.3.3 Espaces duaux de $L^p$

**Théorème 2.3.1** (De Riesz)**.** *On a* $(L^2)' = L^2$ *(l'espace dual de* $L^2$ *est lui-même), i. e. toute forme linéaire* $l \in (L^2)'$ *s'écrit comme* $\langle l, u \rangle = (v \mid u)$ *où* $v \in L^2$*.*

**Théorème 2.3.2** (Riesz-Fischer)**.** *Le dual de* $L^1$ *est* $L^\infty$*.*

*Démonstration.* Brézis, p. 63. □

*Remarque.* On n'a pas $(L^\infty)' \neq L^1$.