

# ANALYSE FONCTIONNELLE ET DISTRIBUTIONS

2023-2024



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces localement convexes</b>	<b>5</b>
1.1	Rappels de topologie . . . . .	5
1.1.1	Axiomes . . . . .	5
1.1.2	Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques . . . . .	5
1.1.3	Comparaison des topologies . . . . .	6
1.1.4	Espaces vectoriels topologiques . . . . .	7
1.2	Semi-normes et espaces localement convexes . . . . .	8
1.2.1	Semi-normes sur $X$ espace vectoriel . . . . .	8
1.3	Pourquoi “localement convexe” ? . . . . .	10
1.3.1	Théorème de Hahn-Banach . . . . .	12
1.4	Espaces localement convexes métrisables, espaces de Fréchet . . . . .	14
1.4.1	Topologies définies par une distance . . . . .	14
1.4.2	Espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ . . . . .	17



# Chapitre 1

## Espaces localement convexes

### 1.1 Rappels de topologie

J. Dieudonné 1 et 2.  
Reed-Simon 1, 2 et 4.  
Brézis, “Analyse fonctionnelle”

Soit  $X$  ensemble. Soit  $(X, \mathcal{T})$  espace topologique où  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ .  
 $\mathcal{T}$  parcourt l'ensemble des voisinages de  $x$  où  $x$  est un point quelconque de  $X$ .

#### 1.1.1 Axiomes

1. Soient  $x \in X$  et  $V'$  voisinage de  $x$ . Si  $V \supset V'$  alors  $V$  est un voisinage de  $x$ .
2.  $\bigcap_{\text{finie}} V_i$  est un voisinage de  $x$ ,  $\bigcap_{\text{finie}} V_i \in \mathcal{T}$ , mais  $\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon \neq \emptyset$  n'est pas un voisinage de  $x$ .
3.  $\bigcap_{i \in I} V_i$  est un voisinage de  $x$ .

**Définition 1.1.1** (Ouvert).  $\Omega$  ouvert si et seulement si  $\Omega$  est voisinage de chacun de ses points.

**Exemple.**  $(-1, 1)$  ouvert tandis que  $[-1, 1)$  non ouvert car  $-1$  n'a pas de voisinage.

$V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  est une base de voisinage pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.** On peut définir axiomatiquement  $\mathcal{T}$  à partir de ses ouverts.

**Définition 1.1.2** (Fermé). On dit que  $F$  est un fermé si et seulement si  $F^C$  est un ouvert.

#### 1.1.2 Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques

**Définition 1.1.3** (Espace métrique, distance).

$X$  est un ensemble,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  distance sur  $X$  si et seulement si :

1.  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  ;

**Remarque.** Si on a seulement  $x = y \implies d(x, y) = 0$ , alors  $d$  est un écart.

2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie) ;
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire). De ce fait,  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ .

**Exemple.** 1. Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

2.  $X$  ensemble. On définit  $d$  de la façon suivante :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 & \text{si } x = y \\ d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Il s'agit de la distance triviale.

Si  $x, y, z$  distincts alors  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

### 1.1.3 Comparaison des topologies

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  des topologies sur  $X$ .

**Définition 1.1.4** (Plus fine). On dit que  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$  et on note  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$  si et seulement si  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

On dit aussi que  $\mathcal{T}'$  est plus forte que  $\mathcal{T}$ .

**Remarque.** Si  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ , il y a plus d'ouverts dans  $\mathcal{T}'$  que dans  $\mathcal{T}$  (idem pour les fermés).

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  ouvert dans  $X$ . On a  $\Omega \in \mathcal{T} \implies \Omega \in \mathcal{T}'$ .

Soit  $F$  un fermé dans  $X$ . On a  $F \in \mathcal{T}$ , mais  $\Omega = F^C \in \mathcal{T} \implies F^C \in \mathcal{T}'$ , donc  $F \in \mathcal{T}'$ .  $\square$

#### Formulations équivalentes

1. On suppose que  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ . Si  $\forall x \in X$ ,  $U$  est un voisinage de  $x$  pour  $\mathcal{T}$ , alors  $U$  voisinage de  $x$  pour  $\mathcal{T}'$ , car si  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , alors  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{T}'$ .
2. Pour l'application identité définie comme suit

$$id : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}),$$

on a  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$  si et seulement si  $id$  est continue.

Par exemple, prenons  $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ . On prend  $\mathcal{T}$  topologie de la convergence simple, i. e.  $f_n$  converge vers  $f$  simplement si  $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

#### Ouverts de $\Omega$

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{f \in X \mid \sup_{i=1,\dots,k} |f(a_i)| < \varepsilon\},$$

avec  $a = a_0, \dots, a_k \in [0, 1]$  et  $\varepsilon > 0$ .

$\Omega_{a,\varepsilon}$  est un voisinage de 0 (la fonction nulle) dans  $X$ .

Pour  $f_0 \in X$ ,  $\Omega_{a,\varepsilon} + f_0$  est une base de voisinage de  $f_0$ , car  $X$  est un espace vectoriel (on agit par translation).

On considère maintenant la topologie de la convergence uniforme  $\mathcal{T}'$ .

$\Omega_\varepsilon = \{f \in X, \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \varepsilon\}$  est un voisinage de 0 (la fonction nulle).

**Proposition 1.1.1.**  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ , ie  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$ .

Si  $f \in \Omega_{a,\varepsilon}$ , alors

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, |f(a_i)| < \varepsilon \text{ (car c'est vrai pour tout } x \text{)}.$$

Donc  $\Omega_{\varepsilon}$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{T}$ . On a ainsi démontré que  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ .  $\square$

On considère l'espace des fonctions continues  $\mathcal{C}^0$  avec la norme

$$\|f\|_0 = \sup |f(x)|$$

et l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  avec la norme

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)| + \sup |f'(x)|.$$

La topologie sur  $\mathcal{C}^1$  est plus fine que celle sur  $\mathcal{C}^0$ .

*Démonstration.* On a pour tout  $f$ ,

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1.$$

Ainsi si

$$\|f\|_1 < \varepsilon,$$

alors

$$\|f\|_0 < \varepsilon.$$

Par conséquent,  $\{f, \|f\|_1 < \varepsilon\} \subset \{f, \|f\|_0 < \varepsilon\}$ .

Donc  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ .

On sait également que si  $U$  est un voisinage de 0 pour  $\mathcal{T}$ , alors  $U$  est un voisinage de 0 pour  $\mathcal{T}'$ .  $\square$

### Topologie métrisable (exemples)

1. Topologie grossière  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ . C'est la topologie la moins fine.

**Remarque.**  $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X)$  est la topologie la plus fine.

Vérifions si la topologie grossière est métrisable dans différents cas.

- Si  $X = \{a\}$ , on a  $d(a, a) = 0$ . Le seul voisinage de  $a$  est  $X = \{a\}$ . Donc  $\mathcal{T}$  est métrisable.
- Supposons que  $X = \{a, b\}$ . Mais  $\mathcal{T}$  n'est plus métrisable, avec  $d(a, b) = 1$  (distance triviale).  
Raisonnons par l'absurde. Si  $\mathcal{T}$  était métrisable,  $\mathcal{T}$  devrait contenir un ouvert  $\Omega$  tel que  $a \in \Omega$  et  $b \notin \Omega$ . Or  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ , donc c'est impossible.

Pour  $\mathcal{T}'$ , on choisit la distance  $d$  telle que  $d(x, y) = 0$  ou 1. Est-ce que  $\mathcal{T}'$  est métrisable ?

2. Prenons  $\mathcal{T}$  telle que  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ .

On suppose que  $X$  contient au moins deux éléments. Dans ce cas,  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $X$  non métrisable, car si  $d(a, b) = 1$ , avec  $b \neq a$ , alors dans  $\mathcal{T}$  il n'existe pas de boule ouverte qui contient  $\{b\}$  sans contenir  $\{a\}$ .

3. Considérons  $X = \{a, b\}$  muni de la topologie  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathcal{P}(X)$ .

On a  $d(a, b) = 1$ , car  $a \neq b$ .

De ce fait :

- $\{a\}$  voisinage de  $a$  qui ne contient pas  $b$  ( $\{a\} = \{x \text{ tel que } d(x, a) < 1\}$ );
- $\{b\}$  voisinage de  $b$  qui ne contient pas  $a$ .

### 1.1.4 Espaces vectoriels topologiques

Dans le cas où  $(X, \mathcal{T})$  est un espace vectoriel topologique, il suffit de connaître les voisinages de 0 et on agit par translation pour déterminer les voisinages de n'importe quel  $x \in X$ .

**Définition 1.1.5** (Continuité). Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On considère :

$$(U_a)_{a \in A} \text{ voisinage de } 0 \text{ dans } X$$

$$(V_b)_{b \in B} \text{ voisinage de } 0 \text{ dans } Y$$

$f$  est continue si pour tout  $V = V_b + f(x_0)$  dans  $Y$ , il existe  $U = \bigcap_{finie} (U_a + x_0)$  voisinage de  $x$  dans  $X$  tel que  $x \in U \implies f(x) \in V$ .

**Définition 1.1.6** (Norme).  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $X$  si

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  (séparation);
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (absolue homogénéité);
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

**Cas particulier :  $X$  normé** De cette norme, on construit la distance  $d$  telle que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Voisinages de 0.

$$(U_a) = B(0, a)$$

$$A = \mathbb{R}^+.$$

- $f : X \rightarrow Y$  continue en  $x_0$ ,  $\forall V = V_b + f(x_0)$ ,  $\exists U = B(0, \delta) + x_0$ ,  $f(U) \subset V$ .
- $X, Y$  EVN.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(0, \delta) + x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ .

## 1.2 Semi-normes et espaces localement convexes

### 1.2.1 Semi-normes sur $X$ espace vectoriel

**Définition 1.2.1** (Semi-norme). L'application  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une semi-norme si :

1.  $\rho(0) = 0$ ;
2.  $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ ;
3.  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ .

$X$  est un espace vectoriel  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Remarque.**  $\triangle$  On n'a pas forcément  $\rho(x) = 0 \implies x = 0$ .

**Exemple.** 1. Si  $\rho$  est une norme, c'est aussi une semi-norme.

2.  $X = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$ . On prend  $a = (a_0, \dots, a_k) \subset [0, 1]$ . On définit

$$\rho_a(f) = \sup_{0 \leq i \leq k} |f(a_i)|.$$

3. Topologie faible.  $X$  est un espace vectoriel et  $X'$  est son dual (espace contenant les formes linéaires sur  $X$ ).



Soit  $l$  une forme linéaire dans  $X'$ . Alors

$$p(x) = |\langle l, x \rangle|.$$

**Définition 1.2.2** (Famille de semi-normes séparée). Soit  $(\rho_a)_{a \in A}$  une famille de semi-normes. On dit que  $(\rho_a)_{a \in A}$  sépare les points (ou est séparée) si et seulement si

$$\forall a \in A, \rho_a(x) = 0 \implies x = 0.$$

**Définition 1.2.3** (Espace localement convexe (ELC)).  $X$  est un espace localement convexe si et seulement si  $X$  est muni d'une famille de semi-normes qui séparent les points.

**Proposition 1.2.1.** Si  $X$  est un espace localement convexe, alors  $X$  est un espace vectoriel topologique pour la topologie définie par  $\rho_a$ .

*Démonstration.* On note  $\mathcal{T}$  la topologie définie par la famille de semi-normes  $(\rho_a)_{a \in A}$ .

**Remarque** (Personnelle). On cherche à montrer que les  $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$  forment une topologie. On va vérifier les axiomes de topologie.

Dans ce cas, les ouverts  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$  sont  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{a,\varepsilon}, a \in A, \varepsilon > 0$  définis ci-dessous :

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

$\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$  une base de voisinages de 0.

Les voisinages de  $x$  sont donnés par translation :

$$x + \mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x + y, y \in \mathcal{O}_{a,\varepsilon}\}.$$

On montre facilement que  $\bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$  et  $\bigcup_{\text{quelconque}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$ . □

**Proposition 1.2.2.**  $\mathcal{T}$  est la topologie la moins fine sur  $X$  qui rend continues

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Il y a donc une compatibilité avec la structure des espaces vectoriels.

*Démonstration.* 1.  $\mathcal{T}$  rend continues les deux opérations de  $X$ . On a en effet

$$\rho_a(x + y) \leq \rho_a(x) + \rho_a(y).$$

Il suffit de prendre  $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\rho_a(y) < \frac{\varepsilon}{2}$ , on obtient  $\rho_a(x + y) < \varepsilon$ .

On a  $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$  et on démontre ce résultat par analogie.

2. La moins fine (en exercice). □

**Théorème 1.2.1.** *La topologie de  $X$  espace localement convexe est Hausdorff, i. e. elle sépare les points.*

**Définition 1.2.4** (Hausdorff).  *$(X, \mathcal{T})$  est de Hausdorff si et seulement si pour tout  $x, y \in X$  tel que  $x \neq y$ , il existe  $\mathcal{O}_x$  et  $\mathcal{O}_y$  voisinages de  $x$  et de  $y$  tels que*

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset.$$

**Exemple.** On prend  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ . On a  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ . Donc  $(X, \mathcal{T})$  est séparée.

*Démonstration du théorème 1.2.1.* Par contraposée, on prend  $y \neq 0$  et  $x = 0$ .

Si  $X$  est un espace localement convexe, alors il existe  $a \in A$  tel que  $\rho_a(y) = \varepsilon > 0$ .

On pose

$$V_x = \left\{ z, \rho_a(z) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ et } V_y = \left\{ z, \rho(z - y) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (1.1)$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient  $V_x \cap V_y = \emptyset$ , car

$$\rho_a(x - y) > |\rho_a(x) - \rho_a(y)| > \left| \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \right| = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

□

### 1.3 Pourquoi “localement convexe” ?

**Définition 1.3.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  espace vectoriel.*

1. *On dit que  $C \subset X$  est convexe si*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], z = tx + (1 - t)y \in C.$$

2. *On dit que  $B \subset X$  est balancé (sur  $\mathbb{R}$ ) ou cerclé (sur  $\mathbb{C}$ ) si*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \implies \forall x \in B, \lambda x \in B.$$

3. *On dit que  $E \subset X$  est équilibré si*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \implies \forall x \in E, \lambda x \in E.$$

4. *On dit que  $A$  est absorbant si*

$$\bigcup_{t > 0} tA = X.$$

**Exemple.** 1. Si  $X$  est un espace vectoriel normé,  $A = B(0, 1)$  et  $x \in X$ , on a  $\frac{x}{\|x\|} \in B(0, 1)$ . Alors  $x \in \|x\|B(0, 1)$ .

2. Si  $0 \in C$  convexe, alors  $C$  est équilibré si et seulement si  $C$  est balancé.

*Démonstration.* On suppose que  $C$  est balancé. Pour  $x \in C \implies -x \in C$ , donc  $[-x, x] \in C$  par convexité. □

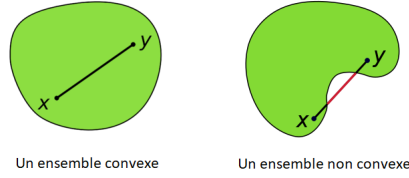


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $X$  un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $X$  est un espace localement convexe (réel ou complexe) ;
2. Il existe une base de voisinages de  $0 \in X$  qui sont convexes, balancés (cerclés), absorbants.

19-09-2023

*Démonstration.* 1. Si  $X$  est un espace localement convexe, alors une base de voisinages de 0 est donnée par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

Les  $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$  sont convexes, balancés et absorbants (TD).

2. On utilise la jauge de Minkowski 1.3.2.

On pose

$$\rho_C(x) = \mu_C(x).$$

et on vérifie que  $\rho_C$  est une semi-norme. Grâce au lemme 1.3, on obtient les résultats suivants :

- (a)  $\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$ , car  $C$  est convexe ;
- (b)  $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$  si  $\lambda > 0$  et  $\rho_C(\lambda x) = |\lambda| \rho_C(x)$ , car  $C$  est cerclé.

$X$  muni de  $\rho_C$  est un espace localement convexe.

□

**Définition 1.3.2** (Jauge de Minkowski). *Soit  $X$  espace vectoriel réel ou complexe. On suppose que  $C$  tel que  $0 \in C$  est absorbant. Alors la jauge de Minkowski est définie comme suit :*

$$\mu_C(x) = \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha C\}.$$

**Remarque.** Si  $C$  est absorbant, alors  $\forall x \in X, \mu_C(x) < \infty$ .

**Lemme.** *Soit  $C \subset X$  absorbant tel que  $0 \in C$ .*

1. Si  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu_C(\lambda x) = \lambda \mu_C(x)$  ;
2. Si  $C$  est convexe, alors  $\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$  ;
3. Si  $C$  est cerclé, alors  $\mu_C(\lambda x) = |\lambda| \mu_C(x)$  ;
4.  $\{x \in X, \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X, \mu_C(x) \leq 1\}$ .

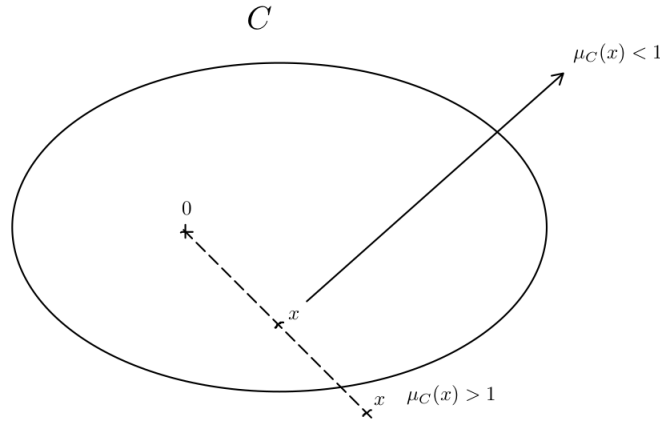


FIGURE 1.2 – La jauge de Minkowski

### 1.3.1 Théorème de Hahn-Banach

Il y a la forme analytique et la forme géométrique de ce théorème.

**Théorème 1.3.2** (De Hahn-Banach, forme analytique). *Pour simplifier, on prend  $X$  espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :*

- ★  $\forall x \in X, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$  ;
- ★  $\forall x, y \in X, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

*Soient  $Y$  un sous espace vectoriel de  $X$  et  $l$  une forme linéaire sur  $Y$  qui vérifie*

$$\forall x \in Y, l(x) \leq p(x), \forall x \in Y.$$

*Alors (prolongement) il existe  $L$  forme linéaire sur  $X$  telle que  $L|_Y = l$  et*

$$\forall x \in X, L(x) \leq p(x).$$

On l'applique aux espaces vectoriels normés, espaces localement convexes,...

**Théorème 1.3.3** (Norme sur un espace dual). *Soit  $X$  espace vectoriel normé,  $X'$  formes linéaires continues sur  $X$ ,  $X'$  est un espace vectoriel normé. La norme sur  $X'$  est définie de la façon suivante :*

$$\|L\|_{X'} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle L, x \rangle| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle L, x \rangle|}{\|x\|}.$$

**Exercice 2.** *Montrer que  $\|\cdot\|_{X'}$  est une norme.*

Si  $X$  est un espace vectoriel normé complet (de Banach), alors  $X'$  l'est aussi.

**Corollaire** (Prolongement isométrique de  $l$  sur  $Y$ ). *Soit  $X$  espace vectoriel normé,  $Y \subset X$  sous espace vectoriel de  $X$  et  $l \in Y'$  avec*

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in Y}} |\langle l, y \rangle|.$$

Alors il existe un prolongement  $L$  de  $l$  de même norme

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle l, x \rangle| = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \leq 1}} |\langle l, y \rangle|.$$

*Démonstration.* Par le théorème de Hahn-Banach, on pose  $p$  telle que  $p(x) = \|l\|_{Y'} \|x\|$  (l'application définie ainsi vérifie les propriétés de  $p$  nécessaires à l'application du théorème).

Par Hahn-Banach, il existe  $L$  une forme linéaire sur  $X$  telle que

$$L(x) = \langle L, x \rangle \leq p(x) = \|l\|_{Y'} \|x\|.$$

Mais

$$\langle L, -x \rangle \leq \|l\|_{Y'} \|x\|,$$

donc

$$|\langle L, x \rangle| \leq \|l\|_{Y'} \|x\|.$$

Ainsi, en divisant par  $\|x\|$ , on obtient le résultat suivant :

$$\forall x \in X, \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'}.$$

Or si on prend  $x \in Y$ ,

$$\left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'} = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right|.$$

Comme  $Y \subset X$  (ce qui entraîne que  $\sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right| \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right|$ ), on a donc égalité, d'où l'isométrie.  $\square$

**Corollaire.**  $\forall x_0 \in X$  espace vectoriel réel, il existe  $L_0 \in X'$ ,  $\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X$ .

*Démonstration.*  $Y = \mathbb{R}x_0$ . Soit  $l(tx_0) \stackrel{\text{déf}}{=} t\|x_0\|^2$  forme linéaire continue sur  $Y$ .

Alors, en posant  $t = 1$ , on obtient

$$\|l\|_{Y'} = \|x_0\|$$

et, par le théorème de Hahn-Banach,

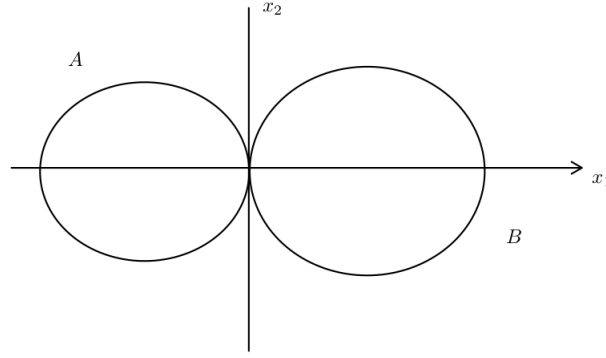
$$\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

$\square$

**Exercice 3.** Traduire Hahn-Banach dans le cas où  $X$  est un espace localement convexe.

**Théorème 1.3.4** (De Hahn-Banach, forme géométrique). Soit  $X$  espace vectoriel normé (ou espace localement convexe). Soient  $A, B \subset X$  convexes et disjoints.

1. On suppose que  $A$  est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine (d'équation  $\langle L, x \rangle = \text{constante}$ )  $\mathcal{H}$  qui sépare au sens large  $A$  et  $B$ .
2. Si  $A$  est fermé,  $B$  est compact, alors il existe  $\mathcal{H}$  hyperplan qui sépare  $A$  et  $B$  au sens strict.

FIGURE 1.3 –  $A = \{x_1 < 0\}$ ,  $B = \{x_2 \geq 0\}$ ,  $\mathcal{H} = \{x_1 = 0\}$ .

## 1.4 Espaces localement convexes métrisables, espaces de Fréchet

26-09-2023

### 1.4.1 Topologies définies par une distance

On rappelle la définition 1.1.3.

**Définition 1.4.1** (Distances équivalentes). *On dit que  $d_1$  est équivalente à  $d_2$  si et seulement si il existe  $C > 0$  tel que*

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y).$$

$d_1 \sim d_2 \implies (X, d_1) \simeq (X, d_2)$ , mais la réciproque est fausse.

**Exemple.** On prend un espace métrique  $(X, d)$  avec les distances

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta'(x, y) = \inf(1, d(x, y)).$$

Ces distances sont équivalentes entre elles.

*Démonstration.*

1. Montrons que  $(X, d) \sim (X, \delta')$ . On remarque d'abord que

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq d(x, y),$$

ce qui veut dire que  $(X, d) \prec (X, \delta)$  (car si  $\mathcal{O}$  est un ouvert pour  $\delta$ , alors il le sera forcément pour  $d$ ).

Prenons

$$f(t) = \frac{t}{1+t}. \tag{1.2}$$

La fonction  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0, 1]$ . En effet, montrons qu'il existe  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $g \circ f = f \circ g = \text{id}$ .

On a

$$\frac{t}{1+t} = s \implies t = ts + s \implies t = \frac{s}{1-s}.$$

Donc  $d(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{1-\delta(x, y)}$ . Donc si  $d(x, y) < \varepsilon$ , alors  $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ . Donc  $(X, \delta) \prec (X, d)$ .

2. Montrons que  $\delta \sim \delta'$ .

On a

$$\delta = \frac{d}{1+d} \leq \begin{cases} 1 \\ \delta. \end{cases}$$

En effet, cela vient du fait que  $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \xrightarrow{d(x,y) \rightarrow \infty} 1$ . Donc

$$\delta(x, y) \leq \delta'(x, y).$$

Mais  $\delta' \leq 2\delta$ . En effet, on distingue deux cas :

(a) Si  $\delta \leq 1$  et  $\delta' = d$ , alors  $d \leq 2d$ ,

(b) Si  $\delta \geq 1$  et  $\delta' = 1$ , alors  $1 \leq 2d$ .

3. Montrons que  $\delta$  est une distance.

(a) Montrons l'inégalité triangulaire. Si  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , montrons que  $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ .

Est-ce que  $f(d(x, y)) \leq f(d(x, z)) + f(d(z, y))$ , avec  $f$  définie dans 1.2 ?

i.  $f$  est croissante, donc  $f(d(x, y)) \leq f[d(x, z) + d(z, y)]$ . Il suffit de voir que  $f(t) \leq f(u) + f(v)$ .

ii. Montrons la sous-additivité de  $f$ . Posons

$$v \mapsto \varphi(v) = f(u+v) - f(u) - f(v).$$

On a  $\varphi(0) = 0$ , car  $f(0) = 0$  et  $\varphi(v) = f'(u+v) - f'(v) < 0$ , car  $f$  est une fonction croissante.

□

*Sous quelles conditions un espace localement convexe est métrisable ?*

On remarque par exemple que  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus généralement, les topologies faibles ne sont pas métrisables, sauf si on travaille en dimension finie. Par ailleurs,  $X$  muni de la topologie grossière n'est pas métrisable (non séparé).

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $X$  un espace localement convexe (donc séparé). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1.  $X$  est métrisable.
2. Il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans  $X$ , et ce pour tout  $x \in X$ .
3. La topologie de  $X$  est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.

*Démonstration.* 1. (1)  $\implies$  (2). La topologie sur  $X$  est équivalente à  $(X, d)$ . Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Il suffit de poser

$$\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \mid d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\} \quad (\mathbb{R} \text{ est archimédien}).$$

Alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists n$  tel que  $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} \subset \mathcal{O}_\varepsilon$ . Donc  $x + \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}$  est une base dénombrable de voisinages de  $x$ .

2. (2)  $\implies$  (3). On sait que  $\mathcal{T}$  topologie de  $X$  est donnée par une famille de semi-normes. Les voisinages de 0 dans  $X$  sont donnés par

$$\mathcal{O}_{a, \varepsilon} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_{\varepsilon, a_i}, \text{ avec } i \in \{1, \dots, n\}.$$

On rappelle que  $\mathcal{O}_{\varepsilon, a_i} = \{x \mid \rho_{a_i} < \varepsilon\}$ .

On peut choisir  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . On sait qu'il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans  $X$ . Soit  $U_n$  une base de voisinages dénombrable de 0. On pose

$$\rho_n(x) = \mu_{U_n}(x).$$

On prend les  $U_n$  convexes, balancés, absorbants comme dans le théorème 1.3.1 (c'est possible, car  $X$  est un espace localement convexe).

3. (3)  $\implies$  (1).

(a) Soit  $(\rho_n)$  une famille dénombrable de semi-normes sur  $X$ . On pose

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)}.$$

Montrons que  $(X, \text{ELC}) \prec (X, d)$ . Soit  $U \in \mathcal{T}$  (la topologie ELC). On se ramène aux voisinages de 0. On a

$$U = \bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{\varepsilon, a}, a \in A.$$

Comme il existe une base dénombrable de voisinages, on peut choisir

$$U_{\varepsilon} = \bigcap_{j=1}^N \{x \mid \rho_j(x - 0) < \varepsilon\}, \text{ avec } A = \mathbb{N}.$$

Ce voisinage est inclus dans  $\{x \mid \sum \rho_j(x - 0) \leq N\varepsilon\}$ .

Montrons que  $U$  est un voisinage de  $x$  pour la topologie métrique  $(X, d)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $d(x, 0) = \left(\sum_1^N + \sum_{N+1}^{\infty}\right) \frac{\rho_n}{1 + \rho_n}$ . Or  $N$  est tel que

$$\sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \implies \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n}{1 + \rho_n} < \varepsilon.$$

De plus,

$$d(x, y) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{1 + d_n} < \varepsilon + \sum_{n=1}^N d_n(x, y). \quad (1.3)$$

Or  $\rho_n(x - y) < \varepsilon$ , car  $x \in y + U_{\varepsilon}$ .

Donc 1.3 devient

$$d(x, y) \leq \varepsilon + N\varepsilon \text{ avec } N \text{ fixé.}$$

Donc  $\mathcal{T} \prec (X, d)$ .

(b) Montrons que  $(X, d) \prec \mathcal{T}$ . On doit majorer  $\rho_m(x - y)$ .

Or

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)} \geq 2^{-m} \frac{\rho_m(x - y)}{1 + \rho_m(x - y)}.$$

Et

$$2^m d(x, y) \geq \frac{\rho_m(x - y)}{1 + \rho_m(x - y)} \geq f(t).$$

Donc on a  $\rho_m(x, y) \leq g(2^m d(x, y))$ , où  $g$  est la réciproque de  $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ .



□

**Proposition 1.4.2.** *Soit  $X$  un espace localement convexe qui vérifie l'une des propriétés énoncées dans la proposition 1.4.1 (i. e. métrisable). On note la topologie de  $X$  ELC par  $\mathcal{T}$ . Alors  $X$  est complet pour  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $(X, d)$  est complet.*

*Démonstration.* Cette proposition se démontre exactement comme 1.4.1. □

**Définition 1.4.2.** *Soit  $X$  un espace localement convexe. On dit que  $X$  est un **espace de Fréchet** si  $X$  est **métrisable et complet**.*

**Exemple.**

1. Les espaces localement convexes qui ne sont pas des Fréchet.
  - (a) Non métrisables.  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence simple, les topologies faibles, ...
2. Les espaces localement convexes qui sont des Fréchet. Les espaces de Banach, par exemple  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence uniforme,  $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ , ...

#### 1.4.2 Espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \iff \rho_{\alpha, \beta}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} |x^\alpha D_\varphi^\beta| < \infty.$$

Montrons que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est complet. On va regarder  $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \dots$

1.  $\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon$ , donc  $\varphi_p \rightarrow \varphi$ , donc

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| < \varepsilon.$$

En particulier pour tout  $K \subset \mathbb{R}$ ,  $\varphi_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^0(K)$ . Or  $\mathcal{C}^0(K)$  est complet, donc  $\varphi_n \xrightarrow{\text{uniformément}} \varphi$ . Comme  $K$  est arbitraire, elle converge localement sur tout  $\mathbb{R}$ . On a

$$\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon,$$

donc

$$\rho_{0,0}(\varphi - \varphi_p) < \varepsilon.$$

Donc  $\varphi_p$  converge pour  $\rho_{0,0}$ .

2. On a besoin de rappeler le lemme suivant :

**Lemme.** *Si  $\varphi' \rightarrow \psi$  uniformément et  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  simplement, alors  $\psi = \varphi'$ .*