

# THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Anastasiia CHERNETCOVA

11 octobre 2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Prérequis</b>	<b>1</b>
1.1	Action de groupe sur un ensemble . . . . .	1
1.2	Orbites, actions transitive et fidèle, noyau . . . . .	2
1.3	Théorème de Lagrange . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Représentations linéaires des groupes finis</b>	<b>2</b>
2.1	Représentations, représentations isomorphiques, représentations irréductibles . . . . .	3
2.2	Théorème de Maschke . . . . .	4
-		

## 1 Prérequis

Cette section s'inspire majoritairement de [Aubry, 2021].

### 1.1 Action de groupe sur un ensemble

**Définition 1.1** (Action à gauche). Une action (à gauche) d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application

$$\begin{aligned} \psi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que :

1.  $\forall x \in X, e \cdot x = x$  (où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ ) ;
2.  $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = \underbrace{(gh)}_{\text{LCI de } G} \cdot x$ .

On dit alors que  $G$  agit sur  $X$ .

**Proposition 1.1.** Si un groupe  $G$  agit sur  $X$  par  $\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$ , alors pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\begin{aligned} \pi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est une permutation de  $X$ , et l'application

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto \pi_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

La réciproque est aussi vraie.

Cela établit deux bijections réciproques entre l'ensemble des actions de  $G$  sur  $X$  et celui des morphismes de  $G$  dans  $\mathfrak{S}_X$ .

*Remarque (Notations).* On note  $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique à  $n$  éléments.

## 1.2 Orbites, actions transitive et fidèle, noyau

**Définition 1.2.** Si un groupe  $G$  agit sur  $X$  et si  $x, y \in X$ , on définit la relation  $xRy$  si et seulement si il existe  $g \in G, y = g \cdot x$ .  $R$  est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de  $x \in X$  pour cette relation s'appelle **orbite** de  $x$  :

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}. \quad (1)$$

Ainsi, l'ensemble des orbites forme une partition de  $X$ .

On dit que l'action est **transitive** ou que  $G$  agit transitivement sur  $X$  s'il n'y a qu'une seule orbite.

Le **noyau de l'action** est le noyau du morphisme  $\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & \pi_g \end{array}$  associé, i. e. l'ensemble

$$\text{Ker}(\pi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g \in G \mid \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

On dit que l'action est **fidèle** ou que  $G$  agit **fidèlement** si le morphisme  $\pi$  associé à l'action est injectif, ie si son noyau est réduit à l'élément neutre.

*Exemple.* Le groupe  $G = SO(3)$  des rotations de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $O$  agit sur l'ensemble  $\mathbb{R}^3$ . Les orbites de cette action sont des sphères centrées en l'origine. L'action n'est pas transitive. L'action est fidèle, car la seule rotation fixant tous les points de  $\mathbb{R}^3$  est l'identité (cf figure 1).

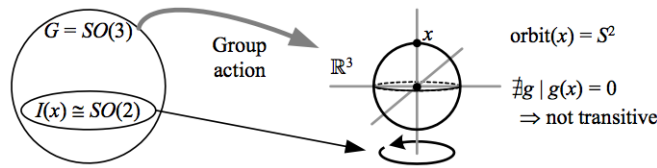


FIGURE 1 – L'action de  $G$  n'est pas transitive. En particulier, il n'existe pas de rotation  $r$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^3, r(x) = O$ .

## 1.3 Théorème de Lagrange

**Théorème 1.1** (De Lagrange). *Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors l'ordre de  $H$  divise celui de  $G$ . En particulier, l'ordre d'un élément de  $G$  divise celui de  $G$ .*

## 2 Représentations linéaires des groupes finis

Cette section est tirée de [Aubry, 2022].

## 2.1 Représentations, représentations isomorphiques, représentations irréductibles

La théorie des représentations a été introduite par Georg FROBENIUS au XIX<sup>e</sup> siècle.

**Définition 2.1.** Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  est la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  muni d'une action de groupes (à gauche) de  $G$  agissant de manière **linéaire** :

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1.  $\forall x \in V, e \cdot x = x$  ;
2.  $\forall g, g' \in G, \forall x \in V, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$  ;
3.  $\forall g \in G, \forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, g \cdot (\lambda x + \mu y) = \lambda g \cdot x + \mu g \cdot y$ .

*Remarque.* Les deux premières propriétés proviennent du fait que la représentation linéaire est une **action de groupe**  $G$  et la dernière du fait que c'est une action **linéaire**.

**Définition 2.2** (Divers). L'espace vectoriel  $V$  est appelé **l'espace de la représentation**.

La dimension de  $V$  (en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) est appelé le **degré** ou la dimension de la représentation.

Lorsque  $\rho$  est injectif, la représentation est dite **fidèle**. Le groupe  $G$  se représente alors de manière concrète comme un sous-groupe de  $GL(V)$ . Lorsque  $V$  est de dimension finie (ce que nous allons supposer dorénavant), le choix d'une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  fournit alors une représentation encore plus concrète comme groupe de matrices. En effet, si  $V \simeq \mathbb{C}^n$  et  $\dim(V) = n$ , alors  $GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})$ , le **groupe des matrices inversibles** à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

*Remarque* (Personnelle). Si  $\rho$  est une représentation fidèle, alors, si on se réfère à la définition 1, on peut alors écrire :

$$\text{Ker}(\rho) = \{g \in G \mid \forall x \in V, g \cdot x = x\} = \{e\}.$$

*Exemple.*

1. *La représentation triviale.*

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \rho_g = \left( \text{id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right). \end{aligned}$$

2. *Les représentations de degré 1.* Ce sont des morphismes de groupes

$$\rho : G \longmapsto \mathbb{C}^*.$$

En effet, si  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1, alors  $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$  puisque les endomorphismes de  $V$  sont des homothéties

$$\begin{aligned} f_\lambda : V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ f_\lambda &\longmapsto \lambda, \end{aligned}$$

l'application qui à une homothétie fait correspondre son rapport, est un isomorphisme de groupes. Si  $G$  est fini, alors tout élément de  $G$  est d'ordre fini (par le théorème 1.1) et donc, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho_g$  est une racine de l'unité dans  $\mathbb{C}$ , et en particulier  $\rho_g$  est un nombre complexe de module 1 :

$$|\rho_g| = 1.$$

*Exercice 1* (A faire chez vous ce soir avant de vous coucher). Soit  $G$  un groupe fini et soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  une représentation (complexe linéaire) de  $G$ . Montrer que, pour tout  $g \in G$ , l'endomorphisme  $\rho_g$  est diagonalisable.

*Correction.* Supposons que  $|G| = n$ . Soit  $g \in G$ .

Par le théorème de Lagrange (cf théorème 1.1), l'ordre de  $g$  divise celui de  $G$ . Donc  $g^n = e$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ . Donc on a  $(\rho_g)^n = \text{id}_V$ , d'où  $\rho_g^n - \text{id}_V = 0$ . Le polynôme  $X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $\rho_g$ . Alors le polynôme minimal de  $\rho_g$  divise  $X^n - 1$ . Or  $X^n - 1$  n'a que des racines simples, à savoir les racines  $n$ -ièmes de l'unité de  $\mathbb{C}$  :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Ainsi le polynôme minimal de  $\rho_g$  est scindé à racines simples. Donc l'endomorphisme  $\rho_g$  est diagonalisable. ■

## 2.2 Théorème de Maschke

Définissons tout d'abord la notion de somme directe de représentations.

**Définition 2.3.** Soit  $G$  un groupe fini. Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  deux représentations de  $G$ . On définit la **somme directe**  $\rho \oplus \rho'$  comme la représentation de  $G$  associée à l'espace vectoriel  $V \oplus V'$  définie par :

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\longmapsto \left( (\rho \oplus \rho')g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v'). \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

**Rappel d'algèbre linéaire** On se référera à [Nguyen et al., 2017] pour plus de détails.

**Définition 2.4.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $E$ . On note  $F + G$  l'ensemble de tous les vecteurs de  $E$  somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$  :

$$F + G = \{x + y; x \in F, y \in G\} = \{v \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, v = x + y\}.$$

**Définition 2.5** (Sous-espaces supplémentaires). Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que deux espaces  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  et on note  $E = F \oplus G$  si :

1.  $F + G = E$ , i.e. tous les vecteurs de  $E$  peuvent s'écrire comme une somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ ;

2.  $F \cap G = \emptyset$ , i. e. le seul vecteur commun à  $F$  et  $G$  est le vecteur nul.

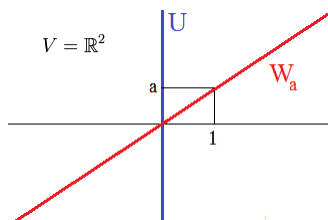


FIGURE 2 – Dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut dire que  $W_a$  est le supplémentaire de  $U$ .

**Proposition 2.1** (Caractérisation de sous-espaces vectoriels supplémentaires). Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels dans un espace vectoriel  $E$ . On a  $E = F \oplus G$  si et seulement si pour tout  $v \in E$ , il existe un unique  $(x, y) \in E^2$  tel que :

- ★  $v = x + y$ ;
- ★  $x \in F$ ;
- ★  $y \in G$ .

On peut maintenant introduire un résultat fondamental en théorie des représentations linéaires des groupes finis.

**Théorème 2.1** (De Maschke). *Toute représentation linéaire complexe de degré fini est **somme directe de représentations irréductibles**.*

**Lemme.** *Tout sous-espace stable d’une représentation linéaire complexe de degré fini d’un groupe fini admet un supplémentaire stable.*

## Références

- [Aubry, 2021] Aubry, Y. (2021). Notes de cours d’algèbre 5.
- [Aubry, 2022] Aubry, Y. (2022). Notes de cours de théorie de représentations.
- [Nguyen et al., 2017] Nguyen, N., Damir, W., Fontes, M., and Jan, C. (2017). *Mathématiques MPSI*, pages 478–479. Ellipses, 4 edition.