

THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Anastasiia CHERNETCOVA

9 octobre 2023

Table des matières

1	Prérequis	1
1.1	Action de groupe sur un ensemble	1
1.2	Orbites, actions transitive et fidèle, noyau	2
1.3	Théorème de Lagrange	2
2	Représentations linéaires des groupes finis	2
2.1	Représentations, représentations isomorphiques, représentations irréductibles	3
2.2	Théorème de Maschke	4
-		

1 Prérequis

Cette section s'inspire majoritairement de [Aubry, 2021].

1.1 Action de groupe sur un ensemble

Définition 1.1 (Action à gauche). Une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$\begin{aligned}\psi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

telle que :

1. $\forall x \in X, e \cdot x = x$ (où e est l'élément neutre de G) ;
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = \underbrace{(gh)}_{\text{LCI de } G} \cdot x$.

On dit alors que G agit sur X .

Proposition 1.1. Si un groupe G agit sur X par $\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$, alors pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned}\pi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

est une permutation de X , et l'application

$$\begin{aligned}\pi : G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto \pi_g\end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

La réciproque est aussi vraie.

Cela établit deux bijections réciproques entre l'ensemble des actions de G sur X et celui des morphismes de G dans \mathfrak{S}_X .

Remarque (Notations). On note \mathfrak{S}_n le groupe symétrique à n éléments.

1.2 Orbites, actions transitive et fidèle, noyau

Définition 1.2. Si un groupe G agit sur X et si $x, y \in X$, on définit la relation xRy si et seulement si il existe $g \in G, y = g \cdot x$. R est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de $x \in X$ pour cette relation s'appelle **orbite** de x :

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}. \quad (1)$$

Ainsi, l'ensemble des orbites forme une partition de X .

On dit que l'action est **transitive** ou que G agit transitivement sur X s'il n'y a qu'une seule orbite.

Le **noyau de l'action** est le noyau du morphisme $\pi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X$ associé, i. e. l'ensemble

$$\text{Ker}(\pi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g \in G \mid \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

On dit que l'action est **fidèle** ou que G agit **fidèlement** si le morphisme π associé à l'action est injectif, ie si son noyau est réduit à l'élément neutre.

Exemple. Le groupe $G = SO(3)$ des rotations de \mathbb{R}^3 de centre O agit sur l'ensemble \mathbb{R}^3 . Les orbites de cette action sont des sphères centrées en l'origine. L'action n'est pas transitive. L'action est fidèle, car la seule rotation fixant tous les points de \mathbb{R}^3 est l'identité (cf figure 1).

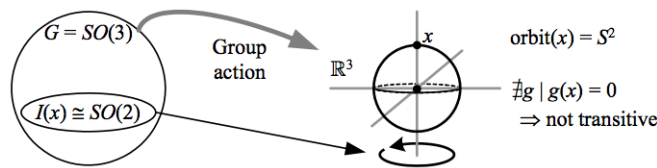


FIGURE 1 – L'action de G n'est pas transitive. En particulier, il n'existe pas de rotation r telle que $\forall x \in \mathbb{R}^3, r(x) = O$.

1.3 Théorème de Lagrange

Théorème 1.1 (De Lagrange). *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Alors l'ordre de H divise celui de G . En particulier, l'ordre d'un élément de G divise celui de G .*

2 Représentations linéaires des groupes finis

Cette section est tirée de [Aubry, 2022].

2.1 Représentations, représentations isomorphiques, représentations irréductibles

La théorie des représentations a été introduite par Georg Frobenius (2) au XIX^e siècle.



FIGURE 2 – Georg Frobenius

Définition 2.1. Une représentation linéaire d'un groupe G est la donnée d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V muni d'une action de groupes (à gauche) de G agissant de manière **linéaire** :

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1. $\forall x \in V, e \cdot x = x$;
2. $\forall g, g' \in G, \forall x \in V, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$;
3. $\forall g \in G, \forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, g \cdot (\lambda x + \mu y) = \lambda g \cdot x + \mu g \cdot y$.

Remarque. Les deux premières propriétés proviennent du fait que la représentation linéaire est une **action de groupe** G et la dernière du fait que c'est une action **linéaire**.

Définition 2.2 (Divers). L'espace vectoriel V est appelé **l'espace de la représentation**.

La dimension de V (en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel) est appelé le **degré** ou la dimension de la représentation.

Lorsque ρ est injectif, la représentation est dite **fidèle**. Le groupe G se représente alors de manière concrète comme un sous-groupe de $GL(V)$. Lorsque V est de dimension finie (ce que nous allons supposer dorénavant), le choix d'une base du \mathbb{C} -espace vectoriel V fournit alors une représentation encore plus concrète comme groupe de matrices. En effet, si $V \simeq \mathbb{C}^n$ et $\dim(V) = n$, alors $GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})$, le **groupe des matrices inversibles** à coefficients dans \mathbb{C} .

Remarque (Personnelle). Si ρ est une représentation fidèle, alors, si on se réfère à la définition 1, on peut alors écrire :

$$\text{Ker}(\rho) = \{g \in G \mid \forall x \in V, g \cdot x = x\} = \{e\}.$$

Exemple.

1. La représentation triviale.

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \rho_g = \left(\text{id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right). \end{aligned}$$

2. *Les représentations de degré 1.* Ce sont des morphismes de groupes

$$\rho : G \longmapsto \mathbb{C}^*.$$

En effet, si V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1, alors $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$ puisque les endomorphismes de V sont des homothéties

$$\begin{aligned} f_\lambda : V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ f_\lambda &\longmapsto \lambda, \end{aligned}$$

l'application qui a une homothétie fait correspondre son rapport, est un isomorphisme de groupes. Si G est fini, alors tout élément de G est d'ordre fini (par le théorème 1.1) et donc, pour tout $g \in G$, ρ_g est une racine de l'unité dans \mathbb{C} , et en particulier ρ_g est un nombre complexe de module 1 :

$$|\rho_g| = 1.$$

Exercice 1 (A faire chez vous ce soir avant de vous coucher). Soit G un groupe fini et soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation (complexe linéaire) de G . Montrer que, pour tout $g \in G$, l'endomorphisme ρ_g est diagonalisable.

Correction. Supposons que $|G| = n$. Soit $g \in G$.

Par le théorème de Lagrange (cf théorème 1.1), l'ordre de g divise celui de G . Donc $g^n = e$, où e est l'élément neutre de G . Donc on a $(\rho_g)^n = \text{id}_V$, d'où $\rho_g^n - \text{id}_V = 0$. Le polynôme $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de ρ_g . Alors le polynôme minimal de ρ_g divise $X^n - 1$. Or $X^n - 1$ n'a que des racines simples, à savoir les racines n -ièmes de l'unité de \mathbb{C} :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Ainsi le polynôme minimal de ρ_g est scindé à racines simples. Donc l'endomorphisme ρ_g est diagonalisable. ■

2.2 Théorème de Maschke

Définissons tout d'abord la notion de somme directe de représentations.

Définition 2.3. Soit G un groupe fini. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ deux représentations de G . On définit la **somme directe** $\rho \oplus \rho'$ comme la représentation de G associée à l'espace vectoriel $V \oplus V'$ définie par :

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\longmapsto \left((\rho \oplus \rho')g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v'). \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Rappel d'algèbre linéaire On se référera à [Nguyen et al., 2017] pour plus de détails.

Définition 2.4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E . On note $F + G$ l'ensemble de tous les vecteurs de E somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$F + G = \{x + y; x \in F, y \in G\} = \{v \in E \mid \exists(x, y) \in F \times G, v = x + y\}.$$

Définition 2.5 (Sous-espaces supplémentaires). Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que deux espaces F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ si :

1. $F + G = E$, i.e. tous les vecteurs de E peuvent s'écrire comme une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ;
2. $F \cap G = \emptyset$, i. e. le seul vecteur commun à F et G est le vecteur nul.

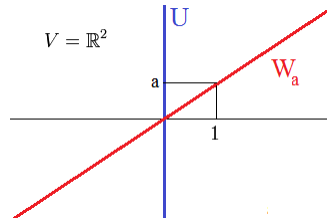


FIGURE 3 – Dans \mathbb{R}^2 , on peut dire que W_a est le supplémentaire de U .

Proposition 2.1 (Caractérisation de sous-espaces vectoriels supplémentaires). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels dans un espace vectoriel E . On a $E = F \oplus G$ si et seulement si pour tout $v \in E$, il existe un unique $(x, y) \in E^2$ tel que :

- ★ $v = x + y$;
- ★ $x \in F$;
- ★ $y \in G$.

On peut maintenant introduire un résultat fondamental en théorie des représentations linéaires des groupes finis.

Théorème 2.1 (De Maschke). *Toute représentation linéaire complexe de degré fini est somme directe de représentations irréductibles.*

Lemme. *Tout sous-espace stable d'une représentation linéaire complexe de degré fini d'un groupe fini admet un supplémentaire stable.*

Références

[Aubry, 2021] Aubry, Y. (2021). Notes de cours d'algèbre 5.

[Aubry, 2022] Aubry, Y. (2022). Notes de cours de théorie de représentations.

[Nguyen et al., 2017] Nguyen, N., Damin, W., Fontes, M., and Jan, C. (2017). *Mathématiques MPSI*. Ellipses, 4 edition.