Théorie des représentations

Anastasiia Chernetcova

30 septembre 2023

Table des matières

1 Prérequis

1.1 Action de groupe sur un ensemble

Définition 1.1 (Action à gauche)**.** Une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

telle que :

1. $\forall x \in X, e \cdot x = x$ (où e est l'élément neutre de G) ;
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = \underbrace{(gh)}_{\text{LCI de } G} \cdot x$.

On dit alors que G agit sur X.

Proposition 1.1. Si un groupe G agit sur X par $\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & g \cdot x \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$, alors pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi_g : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

est une permutation de X, et l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi : & G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ & g & \longmapsto & \pi_g \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

La réciproque est aussi vraie.

Cela établit deux bijections réciproques entre l'ensemble des actions de G sur X et celui des morphismes de G dans $\mathfrak{S}_X$.

Remarque (Notations). On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique à n éléments.

1.2 Orbites, actions transitive et fidèle, noyau

Définition 1.2. Si un groupe G agit sur G et si $x, y \in X$, on définit la relation xRy si et seulement si il existe $g \in G, y = g \cdot x$. R est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de $x \in X$ pour cette relation s'appelle **orbite** de x :

$$\mathrm{Orb}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}. \tag{1}$$

Ainsi, l'ensemble des orbites forme une partition de X.

On dit que l'action est **transitive** ou que G agit transitivement sur X s'il n'y a qu'une seule orbite.

Le **noyau de l'action** est le noyau du morphisme $\begin{array}{cccc} \pi: & G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ & g & \longmapsto & \pi_g \end{array}$ associé, i. e. l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(\pi) \overset{\text{déf.}}{=} \{g \in G \mid \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

On dit que l'action est **fidèle** ou que G agit **fidèlement** si le morphisme π associé à l'action est injectif, ie si son noyau esr réduit à l'élement neutre.

Exemple. Le groupe $G = SO(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ de centre O agit sur l'ensemble $\mathbb{R}^3$. Les orbites de cette action sont des sphères centrées en l'origine. L'action n'est pas transitive. L'action est fidèle, car la seule rotation fixant tous les points de $\mathbb{R}^3$ est l'identité (cf figure 1).

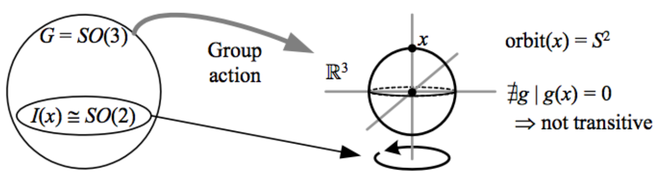

FIGURE 1 – L'action de G n'est pas transitive. En particulier, il n'existe pas de rotation r telle que $\forall x \in \mathbb{R}^3, r(x) = O$.

1.3 Théorème de Lagrange

Théorème 1.1 (De Lagrange)**.** *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Alors l'ordre de H divise celui de G. En particulier, l'ordre d'un élément de G divise celui de G.*

2 Représentations linéaires des groupes finis

2.1 Représentations, représentations isomorphiques, représentations irréductibles

La théorie des représentations a été introduite par Georg Frobenius (2) au XIX^e^ siècle.

Figure 2 – Georg Frobenius

Définition 2.1. Une représentation linéaire d'un groupe G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une action de groupes (à gauche) de G agissant de manière **linéaire** :

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

telle que

1. $\forall x \in V, e \cdot x = e$;
2. $\forall g, g' \in G, \forall x \in V, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$;
3. $\forall g \in G, \forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, g \cdot (\lambda x + \mu y) = \lambda g \cdot x + \mu g \cdot y$.

Remarque. Les deux premières propriétés proviennent du fait que la représentation linéaire est une **action de groupe** G et la dernière du fait que c'est une action **linéaire**.

Définition 2.2 (Divers)**.** L'espace vectoriel V est appelé **l'espace de la représentation**.

La dimension de V (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel) est appelé le **degré** ou la dimension de la représentation.

Lorsque ρ est injectif, la représentation est dite **fidèle**. Le groupe G se représente alors de manière concrète comme un sous-groupe de $GL(V)$. Lorsque V est de dimension finie (ce que nous allons supposer dorénavant), le choix d'une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel V fournit alors une représentation encore plus concrète comme groupe de matrices. En effet, si $V \simeq \mathbb{C}^n$ et $\dim(V) = n,$ alors $GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})$, **le groupe des matrices inversibles** à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Remarque (Personnelle)*.* Si ρ est une représentation fidèle, alors, si on se réfère à la définition 1, on peut alors écrire :

$$\operatorname{Ker}(\rho) = \{g \in G \mid \forall x \in V, g \cdot x = x\} = \{e\}.$$

Exemple.

1. *La représentation triviale.*

$$\begin{array}{cccc} \rho : & G & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ & g & \longmapsto & \rho_g = \left(\mathrm{id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right). \end{array}$$

2. *Les représentations de degré 1.* Ce sont des morphismes de groupes

$$\rho : G \longmapsto \mathbb{C}^*.$$

En effet, si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, alors $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$ puisque les endomorphismes de V sont des homothéties

$$\begin{array}{rccc} f_\lambda : & V & \longrightarrow & V \\ & x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ f_\lambda & \longmapsto & \lambda, \end{array}$$

l'application qui a une homothétie fait correspondre son rapport, est un isomorphisme de groupes. Si G est fini, alors tout élément de G est d'ordre fini (par le théorème 1.1) et donc, pour tout $g \in G$, ρ_g est une racine de l'unité dans $\mathbb{C}$, et en particulier ρ_g est un nombre complexe de module 1 :

$$|\rho_g| = 1.$$

Exercice 1 (A faire chez vous ce soir avant de vous coucher). Soit G un groupe fini et soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation (complexe linéaire) de G. Montrer que, pour tout $g \in G$, l'endomorphisme ρ_g est diagonalisable.

Correction. Supposons que $|G| = n$. Soit $g \in G$.

Par le théorème de Lagrange (cf théorème 1.1), l'ordre de g divise celui de G. Donc $g^n = e$, où e est l'élément neutre de G. Donc on a $(\rho_g)^n = \mathrm{id}_V$, d'où $\rho_g^n - \mathrm{id}_V = 0$. Le polynôme $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de ρ_g. Alors le polynôme minimal de ρ_g divise $X^n - 1$. Or $X^n - 1$ n'a que des racines simples, à savoir les racines n-ièmes de l'unité de $\mathbb{C}$:

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Ainsi le polynôme minimal de ρ_g est scindé à racines simples. Donc l'endomorphisme ρ_g est diagonalisable. □

2.2 Théorème de Maschke

Définissons tout d'abord la notion de somme directe de représentations.

Définition 2.3. Soit G un groupe fini. Soit $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$ deux représentations de G. On définit **la somme directe** $\rho \oplus \rho'$ comme le rerésentation de G associée à l'espace vectoriel $V \oplus V'$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \rho \oplus \rho' : & G & \longrightarrow & GL(V \oplus V') \\ & g & \longmapsto & \left((\rho \oplus \rho')g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v'). \end{array} \right) \end{array} \tag{2}$$

Théorème 2.1 (De Maschke)**.** *Toute représentation linéaire complexe de degré fini est somme directe de représentations irréductibles.*

Lemme. *Tout sous-espace stable d'une représentation linéaire complexe de degré fini d'un groupe fini admet un supplémentaire stable.*

Rappel d'algèbre linéaire