Géométrie différentielle

2023-2024

Table des matières

1 Fonctions continues

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.

$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$ application.

f est continue en x_0 dans U si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

avec $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

On dit que f est une application continue quand f est continue en $x \in U$ pour tout $x \in U$.

Proposition 1.1. f est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(J)$ est ouvert, avec $f^{-1}(J) := \{x \in U \mid f(x) \in J\}$.

Démonstration. 1. *Si f est continue, alors $\forall J \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f^{-1}(J)$ est ouvert.*

Il faut montrer que $\forall x_0 \in f^{-1}(J)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

$J = (a, b)$.

$x_0 \in f^{-1}(J) \implies f(x_0) \in J \implies a < f(x_0) < b \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que

$$a < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon < b.$$

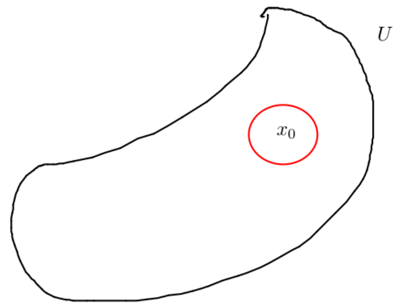

FIGURE 1 – Illustration

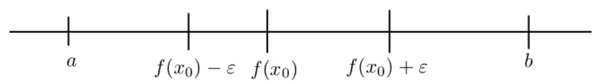

FIGURE 2 – On choisit ε de cette sorte

On peut choisir $\varepsilon = \min\{\frac{b-f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0)-a}{2}\}$.
Donc il y a $\delta > 0$ tel que

$$
\begin{aligned}
\|x - x_0\| < \delta &\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\
&\implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\
&\implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \implies a < f(x) < b \\
&\implies f(x) \in J \implies x \in f^{-1}(J).
\end{aligned}
$$

Choisissons $r := \delta$
$x \in B(x_0, r) \implies \|x - x_0\| < r = \delta$.
On a démontré que avec ce choix de δ on a $x \in f^{-1}(J) \implies B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

2. *Si $f^{-1}(J)$ ouvert pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, alors f est continue.*
   Fixons $x_0 \in U$: $\varepsilon > 0$ est donné.
   On met $J = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \neq \emptyset$.
   Par l'hypothèse, $f^{-1}(J)$ est ouvert, donc $\exists r > 0, B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.
   On met $\delta := r$.

$$
\begin{aligned}
\|x - x_0\| < \delta &\implies x \in B(x_0, \delta) = B(x_0, r) \\
&\implies x \in f^{-1}(J) \implies f(x) \in J \\
&\implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\
&\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

On peut aussi généraliser ces définitions et la proposition aux cas où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application de U dans $\mathbb{R}^m$, avec

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m)).$$

Exemple $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 3\cos(x_2)e^{x_1 - x_2})$, $n = 2, m = 2, U = \mathbb{R}^2$.

Définition 1.1. f est continue en $x_0 \in U$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

avec $\|f(x) - f(x_0)\| = \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_m(x) - f_m(x_0))^2}$.

Définition 1.2. $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue quand f est continue en $x, \forall x \in U$.

Proposition 1.2. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes.

1. $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue ;
2. $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j est continue ;
3. $\forall V \subseteq \mathbb{R}^m$ ensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert.

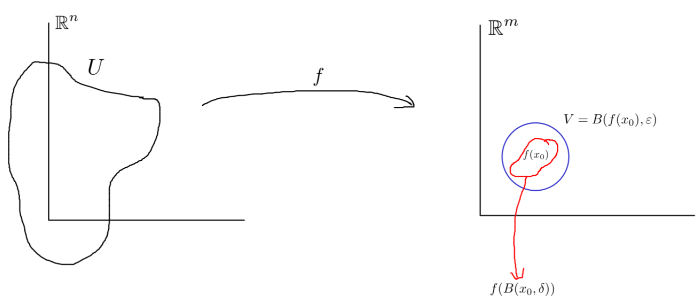

Figure 3 – Illustration pour 1.2

2 Dérivée, dérivée partielle, différentielle

$f : U \to \mathbb{R}$.
$x \in U$ fixé.
La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)}{h}$$

si la limite existe.

Si $e_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ème}}, 0, \ldots, 0)$ (tel que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base standart de l'espace linéaire $\mathbb{R}^n$), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i)}{h}.$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En général, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_k \partial x_{k-1} \dots \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right).$$

$i_1 \in \{1, \dots, n\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.
Pour $k = 1$, il y a n dérivées partielles.
Pour $k = 2, i_1 \longrightarrow n$ choix de $\{1, \dots, n\}$.
$i_2 \longrightarrow n$ choix.
Donc il y a n^2 choix.
En général, il y a n^k dérivées partielles différentes de l'ordre k.

Définition 2.1. $r \in \mathbb{N}$.
On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ ou tout simplement f est $\mathcal{C}^r$ quand

1. Si $r = 0$, f est continue.
2. Si $r \geq 1$, f est continue et les dérivées partielles d'ordre k existent partout dans U et elles sont toutes les applications continues dans U et ceci pour tout $1 \leq k \leq r$.
3. Pour $f : U \to \mathbb{R}^m$, une application, on dit que f est $\mathcal{C}^r$ si $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, f_j est une application $\mathcal{C}^r$, avec $f = (f_1, \dots, f_m)$.
   On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ quand $\forall r \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^r$.

2.1 Différentiabilité des fonctions multi-variables

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $f = (f_1, \dots, f_m)$.
On dit que f est différentiable à $x \in U$ quand il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ si } \|h\| < \delta \text{ et } x + h \in U, \text{ alors } \|f(x+h) - (f(x) + L(h))\| < \varepsilon \|h\|.$$

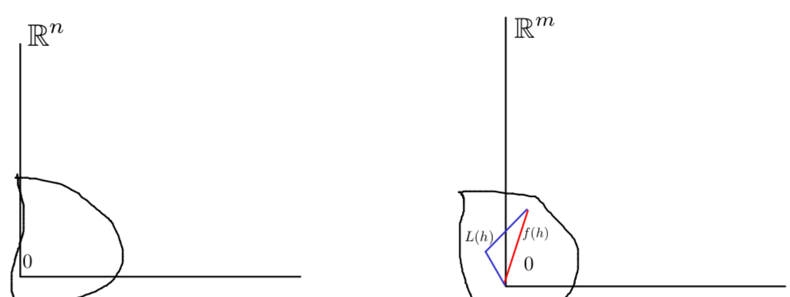

Figure 4 – Exemple illustratif avec $x = 0, f(0) = 0$

f différentiable en 0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0, \|h\| < \delta \implies \|f(h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$.

Proposition 2.1. $n = 1, m = 1, f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable selon la définition donnée sur un point $x \in I$ si et seulement si $f'(x)$ existe.

Démonstration.

1. *Sens direct : f différentiable en $x \in I \implies f'(x)$ existe.*
   $\exists L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in I \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

   $L(h) = ah$ pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque mais fixé.
   a est la pente ou le coefficient directeur.
   Prenons a la pente du graphe de L (comme L linéaire, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}, L(h) = ah$).
   On obtient

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, x + h \in I \implies |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|.$$

   On divise par $|h| \neq 0$ pour obtenir

   $$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{ah}{h} \right| \leq \varepsilon.$$

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |h| < \delta, h + x \in I, \text{ alors } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon,$$

   c'est à dire

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$$

   Donc $f'(x)$ existe et $f'(x) = a$.
2. *Sens réciproque : $f'(x)$ existe $\implies f$ différentiable.*
   Si $f'(x)$ existe, on met $a := f'(x)$.
   On définit $L(h) = ah$. On sait que

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = a.$$

   Donc

   $$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta &\implies \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon \\ &\implies |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h| \\ &\implies \forall h, |h| < \delta, \text{ on a } |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|. \end{aligned}$$

   f est différentiable selon notre définition avec $L(h) = ah$.

□

On suppose maintenant que $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Pour $x \in U$, f différentiable en x si $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ est linéaire } \}$.
On écrit dans ce cas là que $Df(x) = L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
En particulier, si f est différentiable pour tout $x \in U$, on obtient une application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Rappel Chaque transformation linéaire est uniquement représentée par une matrice au cas où les bases des espaces de départ et d'arrivée sont fixées.

Si on choisit les bases standart $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ pour $\mathbb{R}^n$ et $\beta = \{e_1, \dots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$[T]_\beta^\alpha := A = [A_{ij}]_{m\times n}$$

et on a

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} e_i = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}.$$

C'est la j-ième colonne de la matrice A.

En particulier, pour chaque $x \in U$ où f est différentiable, en fixant les bases standart de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, on peut supposer que $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

On peut identifier $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $\mathbb{R}^{m\times n} = \{[A_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \mid A_{ij} \in \mathbb{R}\}$.

Avec cette identification, on peut utiliser la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme ça on peut parler de continuité et de différentiabilité de l'application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ou bien on peut encore identifier $\mathbb{R}^{m\times n}$ avec $\mathbb{R}^{mn}$. Alors $Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{mn}$.

Donc on peut parler de continuité de Df, de derivée de Df.

Pour $x \in U, D(Df)(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

On va noter $D(Df)$ par $D^2 f$. Alors $D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n})$.

$D^2 f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n}) \simeq \mathbb{R}^{mn^2}$.

Théorème 2.1. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ une application donnée et $r \in \mathbb{N}$.*

f est de classe $\mathcal{C}^r$ si et seulement si $D^k f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots))$ (de dimension mn^k) existe comme une application pour tout $1 \leq k \leq r$, et elle est en plus continue.

2.2 Deux points fins

En général, les dérivées partielles de f peuvent exister sans que Df soit définie.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut avoir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$ existe, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existe, mais $Df(0)$ n'existe pas.

Par contre, si $Df(x_0)$ existe, alors toutes les dérivées partielles de f existent en x_0.

Démonstration. Supposons que $Df(x_0)$ existe. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x) - f(x_0) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

Fixons une direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ et on met $h = t\overrightarrow{v}$, avec $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$. Donc $\|h\| = |t| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, t < \frac{\delta}{\|\overrightarrow{v}\|}, x_0 + t\overrightarrow{v} \in U \implies |f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) - tL(\overrightarrow{v})| < \varepsilon |t| \|\overrightarrow{v}\|.$$

On pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \|\overrightarrow{v}\|$ et $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0 \text{ tel que } |t| < \tilde{\delta} \implies \|f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) - tL(\overrightarrow{v})\| \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0, |t| < \tilde{\delta} \implies \left\| \frac{1}{t} \left(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)\right) - L(\overrightarrow{v}) \right\| \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\implies \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)\right) = L(\overrightarrow{v}) = Df(x_0)(\overrightarrow{v}).$$

On définit
$$D_{\overrightarrow{v}} f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)).$$
Donc si $Df(x_0)$ existe, la dérivée directionnelle de f en x_0 dans une direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ existe et on a
$$D\overrightarrow{v} f(x_0) = Df(x_0)(\overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^m.$$
En particulier, si $\overrightarrow{v} = e_j, 1 \leq j \leq n$,
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} f(x_0) = D_{e_j} f(x_0) = Df(x_0)(e_j).$$
□

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ alors que $Df(x_0)$ n'existe pas.

Théorème 2.2. *Si $f : U \to \mathbb{R}^m, x_0 \in U$.*
Si $Df(x_0)$ existe, alors f est continue en x_0.

Démonstration. En exercice. □

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ en $x_0 \in U$ sans que pour autant f soit continue en x_0.
Si la matrice de $Df(x_0)$ est donnée par $[A_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$.
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, A_{e_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{bmatrix}.$$
$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$
C'est la matrice jacobienne de f.

2.3 La dérivée de composition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.
$f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$.
Supposons que pour $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$.
Si f est continue, $g \circ f$ est définie dans un voisinage de x_0, par exemple dans une boule ouverte $B(x_0, r) = \tilde{U} \subset U \cap f^{-1}(V)$.
$g \circ f : \tilde{U} \to \mathbb{R}^p$.
Supposons que les trois dérivées $Df(x_0), Dg(f(x_0)), D(g \circ f)(x_0)$ existent.
$Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
$D(g(f(x_0))) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.
$D(g \circ f) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 2.3. *Supposons que f est dérivable en $x_0 \in U$ avec la dérivée $Df(x_0)$ et g est dérivable en $f(x_0) \in V$ avec la dérivée $Dg(f(x_0))$, alors $g \circ f$ est bien dérivable en $x_0 \in U$ et*
$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

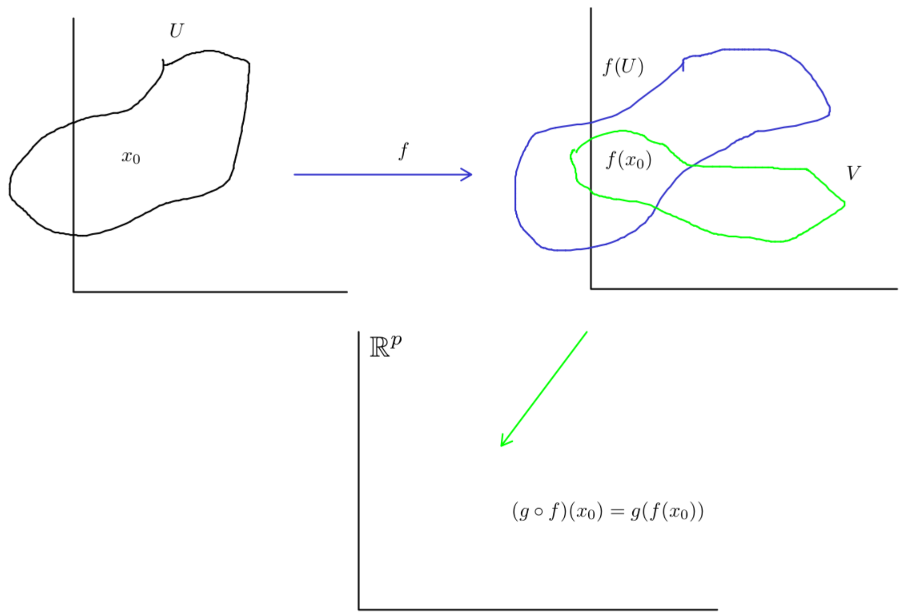

FIGURE 5 – La différentiation composée

Si on utilise les matrices jacobiennes de chaque dérivée ($1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$),

$$\left[\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}\right]_{p \times n} (x_0) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\right]_{p \times m} (f(x_0)) \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]_{m \times n} (x_0).$$

$$\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] (x_0) = \left[\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right] (f(x_0)) \times \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right] (x_0).$$

On a :

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k}(f(x_0)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x_0).$$

$f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = f(U)$ est ouvert et $g : V \to \mathbb{R}^n$ est l'inverse de f.

Donc $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g \circ f = \mathbb{1}_U$.

Si en plus f et g sont différentiables, alors $m = n$ et $\forall x \in U, Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$, c'est à dire en particulier $Df(x)$ est une transformation linéaire inversible.

Démonstration. Si f est dérivable en $x \in U$ et g dérivable en $f(x) \in V$, $\mathbb{1} = g \circ f$ dérivable en x_0 et

$$D\mathbb{1}_U(x_0) = D(g(f(x_0))) \circ Df(x_0).$$

$$\mathbb{1}_U(x) = x \implies D\mathbb{1}_U(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Ainsi comme g est linéaire de f on a $f \circ g = \mathbb{1}_V$, donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} = Df(x_0) \circ Dg(f(x_0)).$$

$\square$

Lemme. *Si* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction linéaire,* $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ *et* $T(x) = L(x) + \overrightarrow{b}$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Ainsi T *est différentiable dans* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, DT(x) = L.$$

Dans ce cas, $DT : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application constante (les dérivées partielles de T aussi).

3 Inversion locale, fonctions implicites, théorème du rang

Théorème 3.1 (de Bronner)**.** *Si* $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $h : U \to V$ *est un homéomorphisme (i. e.* h *continue, inversible et d'inverse* ***continue*** $h^{-1} : V \to U$*), alors* $m = n$.

3.1 Théorème de l'application inverse

Théorème 3.2 (De l'application inverse)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in U, f : U \to \mathbb{R}^n$, f *est de classe* $\mathcal{C}^1$*. Supposons que* $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *est inversible.*

Alors il existe des ensembles ouverts $W \subset U$, $x_0 \in W$ *et* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *tels que* $f_{|W} : W \to V$ *est inversible. L'inverse* $(f_{|W})^{-1} : V \to W$ *est aussi de classe* $\mathcal{C}^1$.

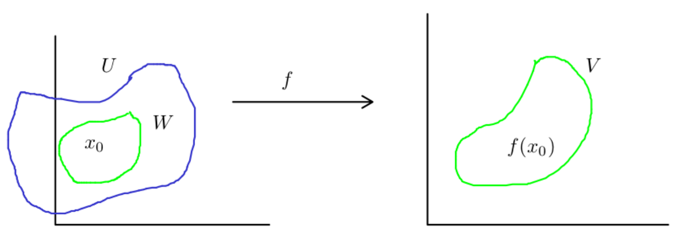

FIGURE 6 – Fonctions inversibles

Remarque. Si en plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, alors $(f_{|W})^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^r$.

Notons que $\forall y \in V, x \in W, f(x) = y$,

$$(D(f_{|W})^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}.$$

En particulier, il existe W tel que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in W$.

3.2 Théorème du rang

20-09-2023

Théorème 3.3 (Du rang)**.** *$f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$. Supposons que $\forall x \in U$,*

$$\text{rang}(Df(x)) \equiv k,$$

où $1 \leq k \leq m$ est fixé.
($Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donc $0 \leq \text{rang}(Df(x)) \leq m$).
Soit $x_0 \in U$. Alors il y a des ouverts $W \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m, x_0 \in W, f(x) \in V$, 2 applications de classe $\mathcal{C}^r$ inversibles

$$\varphi : W \to W', \varphi(x_0) = 0, W' \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\psi : V \to V', \psi(f(x_0)) = 0, V' \subseteq \mathbb{R}^m$$

telles que $\forall z \in W', z = (z_1, \ldots, z_n)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0).$$

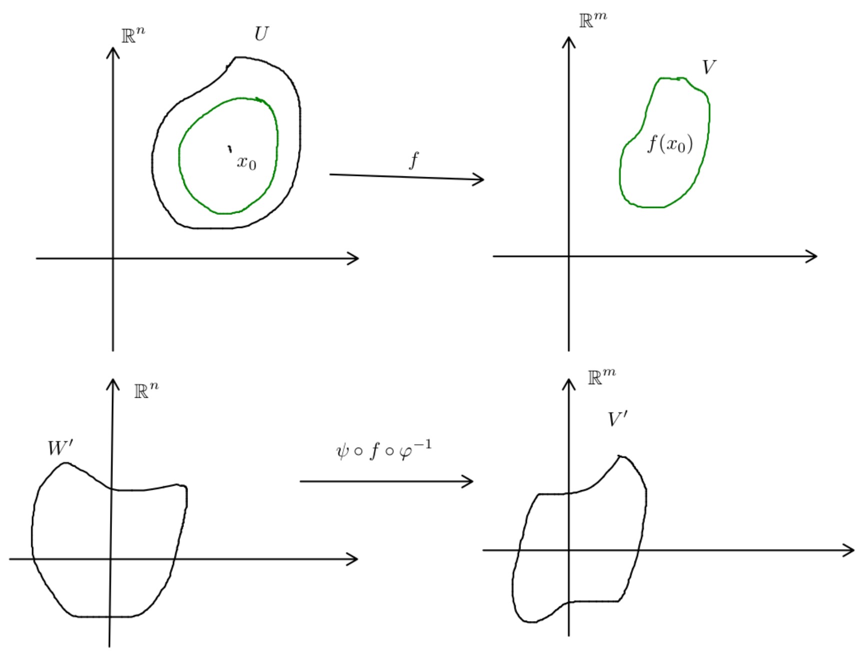

Figure 7 – Illustration du théorème de rang

En particulier, $f(W)$ est un objet de dimension k, de régularité $\mathcal{C}^r$ (Si $m = 3, k = 2, f(W)$ est une surface de classe $\mathcal{C}^r$) et pour tout $y \in f(W)$, $f^{-1}(y)$ est un objet de dimension $n - k$ de régularité $\mathcal{C}^r$.

On note que les deux applications φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^r$ et inversibles. On peut démontrer que dans ce cas-là, les inverses φ^{-1} et ψ^{-1} sont aussi de classe $\mathcal{C}^r$.

$$D\varphi^{-1}(y) = (D\varphi(\varphi^{-1}(y))^{-1}), y \in W'.$$

φ^{-1} étant continue, $D\varphi$ étant continue, l'inverse d'une matrice étant continue tant que $\det \neq 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ inversible $\implies$ φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.1 (Difféomorphisme)**.** Soient $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts.
Si $\varphi : U \to U'$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$, avec l'inverse $\varphi^{-1} : U' \to U$ de classe $\mathcal{C}^r$, on dit que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$.

Remarque (Le théorème de rang dans le cas spécial où f est linéaire). Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\text{rang}(L) = k, 0 \leq k \leq m$, alors il existe deux bases α_n et β_m pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ telles que

$$[L]_{\alpha_n}^{\beta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

(En exercice).

Corollaire. *$U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$, f est $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

Supposons que pour $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ est injective. $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Alors il existe un voisinage W de x_0 tel que f est injective sur W.

Pour $x \in U$,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Si $Df(x_0)$ est injective, $\text{rang}(Df(x_0)) = n$ $(m \geq n)$. On obtient une sous-matrice de $Df(x)$ de taille $n \times n$ inversible.

Lemme (D'algèbre linéaire)**.** *$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors* $\text{rang}\, A = n$ *si et seulement si il existe une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de A telle que* $\det B \neq 0$.

(En exercice).

Alors sous les hypothèse du corollaire 3.2, $\text{rang}\, Df(x) \equiv n$ dans un voisinage W de x_0, appliquant le théorème du rang

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$$

qui est injectif.

Corollaire. *Les mêmes hypothèses que dans le corollaire 3.2.*

Si $Df(x_0)$ est surjective, alors il existe un voisinage ouvert $V \subseteq f(U)$ de $f(x_0)$ (c'est à dire $f(x_0)$ est un point intérieur de $f(U)$) tel que f est surjective sur V.

Argument à travers l'observation de l'algèbre linéaire qui dit que si $\text{rang}(A) = m, m \leq n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il y a une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tel que $\det(B) \neq 0$.

Théorème de rang : $k = m \leq n$.

Les détails en exercice.

3.3 Théorème de fonctions implicites

Théorème 3.4 (De fonctions implicites)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

$(x_0, y_0) \in U \to V$ donné.

$$DF(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$$

et

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} & | & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{m\times(m+n)}.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in U \times V, DyF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$. *Supposons que* $DyF(x_0)$ *est inversible. Alors il existe un voisinage* W *de* x_0 *dans* U *et une application* $\mathcal{C}^r$ $f : W \to V$ *telle que* $f(x_0) = y_0$ *et*

$$\forall x \in W, F(x, f(x)) = F(x_0, y_0).$$

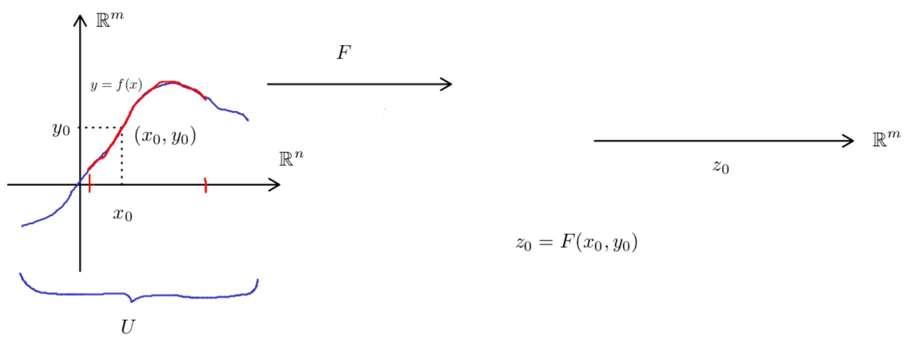

FIGURE 8 – Illustration du théorème de fonctions implicites

Donc le graphe de $x \longrightarrow f(x)$ dans $W \times V$ pour l'application $f : W \to V$ est à l'intérieur de $F^{-1}(x_0)$.

On peut dire que la fonction implicite

$$F(x, y) = z_0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z_0 \in \mathbb{R}^n$$

peut être exprimée explicitement $y = f(x)$ dans un voisinage W.

Exemple $m = 1 = n$.

Si $F(x, y) = y^2 - x$.

Exemple 1 $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 1$.

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty.$$

$$DyF = [2y]_{|x|}.$$

$$DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \neq 0.$$

Donc près de $(0, 1) = (x_0, y_0), y = f(x)$ a une solution $\mathcal{C}^\infty$.

Mais si $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, $DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$ n'est pas inversible. F est $\mathcal{C}^\infty$.

Implicitement, près de $(0, 0)$, on a $y^2 - x = 0$.

On essaie de trouver $y = f(x)$.

$y^2 = x \implies y = \pm\sqrt{x}$.

Mais $\sqrt{\cdot}$ n'est pas définie pour $x < 0$ près de $x_0 = 0$!

Donc il n'y a pas un moyen d'écrire explicitement $F(x, y) = 0$ près de $(0, 0)$ comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque (Sur le théorème des fonctions implicites). En effet, si $W' = f(W) \subset V$, on a

$$(x, y) \in W \times W', F(x, y) = z_0 \iff y = f(x).$$

4 Algèbre multilinéaire

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, c'est-à-dire il existe $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ base telle que

$$\forall \overrightarrow{v} \in E, \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{v_i}.$$

En particulier, β engendre E ($E = \operatorname{span}(\beta) = \langle \beta \rangle$) si β est libre.

4.1 L'espace dual E^*

$$E^* = \{T : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire}\} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}).$$

Théorème 4.1. *On a* $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Démonstration. Supposons $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base ordonnée de E. On définit alors n éléments $(e^1, e^2, \dots, e^n)$, $e^j \in E^*$ de la manière suivante :

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque (Personnelle). e^j est l'évaluation du vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ en e_j.

Donc $e^j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^j(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_i$.

Donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}, e^j \in E^*$, $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$. On montre que β^* est une base pour E^*.

1. β^* est libre. Supposons que pour $c_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e^j = 0 \in E^*.$$

Donc pour tout i,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j \right)(e_i) = 0 \in \mathbb{R} \text{ et}$$
$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j \right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_i^j = c_i.$$

Donc $\forall i, c_i = 0$.

2. β^* engendre E^*. Soit $T \in E^*$. Est-ce qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tel que

$$T = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \text{ ?}$$

Essayons de trouver les α_j en appliquant l'identité desirée en e_i.

$$\forall i, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_i^j = \alpha_i.$$

Donc pour $T \in E^*$ donnée, le candidat pour α_i est

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i \in T(e_i) \in \mathbb{R},$$

et on obtient que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \right) (e_i).$$

Comme T et $\tilde{T}$ ont les mêmes valeurs sur la base β, donc $T = \tilde{T}$.

$$T = \sum_{j=1}^{n} T(e_j) e^j.$$

□

Définition 4.1. On dit que β^* est la base duale de β.

On considère le dual du dual $E^{**} = (E^*)^*$.

Théorème 4.2. *Si* $\dim(E) < \infty$*, il y a un isomorphisme canonique entre* E *et* E^{**}*.*

On peut définir $E \to E^{**}$. On pose $e : E \to E^{**}$.

$$(\iota(\overrightarrow{v}))(T) = T(\overrightarrow{v}),$$

$\forall T \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 1.

1. Montrer que $\forall v \in E, \iota(\overrightarrow{v}) : E^* \to \mathbb{R}$ est une transformation linéaire.
2. Montrer que $\iota : E \to E^{**}$ est une transformation linéaire.
3. Montrer que ι est bijective (donc un isomorphisme).

Démonstration.

1. $$\iota(\overrightarrow{v})(\alpha T + S) = (\alpha T + S)(\overrightarrow{v}) = \alpha T(\overrightarrow{v}) + S(\overrightarrow{v}) = \alpha \iota(\overrightarrow{v})(T) + \iota(\overrightarrow{v})(S).$$

2. $\iota : E \to E^{**}$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \iota(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})(T) &= T(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \overset{T \text{ linéaire}}{=} \alpha T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w}) \\ &= \alpha \iota(\overrightarrow{v})(T) + \iota(\overrightarrow{w})(T) = \alpha \iota(\overrightarrow{v}) + \iota(\overrightarrow{w}). \end{aligned}$$

   Comme c'est vrai $\forall T \in E^*$, on a l'identification $\iota(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha \iota(\overrightarrow{v}) + \iota(\overrightarrow{w})$ (comme un élément de E^{**}). Donc ι est une transformation linéaire.

3. On sait que $dimE = dimE^* = dimE^{**}$ (ce qui veut dire que ι est surjective). Pour démontrer que ι est un isomorphisme, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$ (que ι est injective).
   Si $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\iota)$, alors $\iota(\overrightarrow{v}) = 0 \implies \forall T \in E^*, T(\overrightarrow{v}) = \iota(\overrightarrow{v})(T) = 0(T) = 0$, donc $\overrightarrow{v}$ est tel que $\forall T \in E^*, T(\overrightarrow{v}) = 0$.

Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on peut compléter $\overrightarrow{v}$ avec une base $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ de E et définir $T(\alpha_1 \overrightarrow{v} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{v_n}) = \alpha_1$. Dans ce cas-là, $T(\overrightarrow{v}) = 1 \neq 0$.
Si $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E. On a vu que la base duale $\beta^* = (e^1, e^2, \dots, e^n)$ est une base de E^*.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j.$$

$$(\beta^*)^* = \beta^{**} = (\varepsilon_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

$$\forall i, \eta_i \in E^{**}, \eta_i(e^i) = \delta_i^j, \forall i, j. \tag{1}$$

On va aussi calculer

$$\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j. \tag{2}$$

$\forall e^j$ de base β^*, on a

$$\eta_i(e^j) = \iota(e_i)(e^j), \eta_i, \iota(e_i) \in E^{**} = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{R}).$$

η_i et $i(e_i)$ coincident sur une base de E^*, donc

$$\forall i, \eta_i = \iota(e_i).$$

Pour simplifier, parfois on identifie E et E^{**} par l'application ι, c'est-à-dire on met $\overrightarrow{v} = \iota(\overrightarrow{v})$.

□

Les éléments de E^* sont appelés **les vecteurs covariants**. Les éléments de E^{**} sont appelés **les vecteurs contravariants**.

4.2 Les applications multilinéaires

Supposons que $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et E' espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

$$\alpha : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k \longrightarrow E'$$

est une application k-linéaire quand α est linéaire par rapport à chaque coordonnée dans l'un des espaces E_j quand les autres coordonnées (composantes) sont fixées.
$\overrightarrow{v_i} \in E_i$, $1 \leq i \leq k$, $\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k})$.
Si $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v_j} \in E_j$, $\overrightarrow{w} \in E_i$, on a

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, a\overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{w}, \dots, \overrightarrow{v_k}) = a\alpha(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_i}, \dots, \overrightarrow{v_k}) + \alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overbrace{\overrightarrow{w}}^{i\text{-ème}}, \dots, \overrightarrow{v_k}).$$

Exemple

1. $f(x, y) = xy$, $f : \overset{E_1}{\mathbb{R}} \times \overset{E_2}{\mathbb{R}} \to \overset{E'}{\mathbb{R}}$.
2. $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}$,

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \text{ 2-linéaire.}$$

3. $E_1 = E_2 = E_3 \equiv \mathbb{R}^3$, $E' = \mathbb{R}$.

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = det \left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3} \end{bmatrix} \right)_{3\times 3}.$$

Cette application est 3-linéaire.

4. $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}^n$.

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) = det\left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{bmatrix}\right).$$

C'est une application n-linéaire.

5. Le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est une application n-linéaire.

4.2.1 Quelques notations

E espace vectoriel de dimension finie.
On note $\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.
Remarquons que $\Omega^1(E) = \{\alpha : E \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est linéaire}\} = E^*$.

Proposition 4.1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k.

Démonstration. Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(E), a \in \mathbb{R}$. Il faut démontrer que $a\alpha + \beta$ est aussi une application k-linéaire sur $E^k = \overbrace{E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$.

$$\begin{aligned} a\alpha + \beta(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}, \ldots) &= a[\alpha(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}, \ldots)] + \beta(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}) \\ &= a[b\alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots) + \alpha(\overrightarrow{w}, \ldots)] + b\beta(v_1, \ldots) + \beta(\overrightarrow{w}, \ldots) \\ &= b[a\alpha + \beta](\overrightarrow{v_1}, \ldots) + [a\alpha + \beta](\overrightarrow{w}, \ldots) \end{aligned}$$

De même pour chaque $1 \leq i \leq k$.
Pour trouver la dimension de $\Omega^k(E)$, il faudra trouver une base de $\Omega^k(E)$. Pour cela, il faudra d'abord introduire "le produit tensoriel". □

Définition 4.2 (Produit tensoriel)**.** Supposons que $\alpha : E_1 \times \cdots \times E_k \to \mathbb{R}$ k-linéaire, $\beta : E'_1 \times \cdots \times E'_l \to \mathbb{R}$ l-linéaire.
On définit

$$\alpha \otimes \beta : E_1 \times \cdots \times E_k \times E'_1 \times \cdots \times E'_l \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\alpha \otimes \beta(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{v'_1}, \ldots, \overrightarrow{v'_l}) := \alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k})\beta(\overrightarrow{v'_1}, \ldots, \overrightarrow{v'_l})$$

qui est une application $(k+l)$-linéaire (avec $\overrightarrow{v_i} \in E_i, i \in \{1, \ldots, k\}, \overrightarrow{v'_j} \in E'_j, j \in \{1, \ldots, l\}$).

Les applications k-linéaires sont appelées les tenseurs covariants d'ordre k.

Exercice 2. On montre que $\otimes$ est une opération associative.
$\forall \alpha, \beta, \gamma$ tenseurs covariants,

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma).$$

Exemple $E_1 = \mathbb{R}^n, E'_1 = \mathbb{R}^n, k = l = 1, \alpha \in E_1^*, \alpha(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v} \cdot e_1, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \beta \in E_1'^*, \beta(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v'} \cdot e_1, \forall \overrightarrow{v'} \in \mathbb{R}^n$.

$$\alpha \otimes \beta(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) = 2(\overrightarrow{v} \cdot e_1)(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)$$

et

$$\beta \otimes \alpha(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}) = 2(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)(\overrightarrow{v} \cdot e_1).$$

Mais si $\tilde{\beta}(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v'} \cdot e_2$,

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \tilde{\beta}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) &= 2(\overrightarrow{v} \cdot e_1)(\overrightarrow{v'} \cdot e_2), \\ \text{mais } \tilde{\beta} \otimes \alpha(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}) &= 2(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)(\overrightarrow{v} \cdot e_2). \end{aligned}$$

Le produit tensoriel n'est donc pas commutatif.

$E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$

$\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.

Proposition 4.2. $\Omega^k(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^k, où $n = dim(E)$.

Démonstration. $dimE = n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(e^1, \ldots, e^n)$ est une base de $E^* = \Omega^1(E)$.

Par exemple si on prend

$$\underbrace{e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1}_{k \text{ fois}} : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R},$$

et

$$\begin{aligned} & e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}), \overrightarrow{v_i} \in E, \\ & = e^1(\overrightarrow{v_1}) e^1(\overrightarrow{v_2}) \ldots e^1(\overrightarrow{v_n}). \end{aligned}$$

$\mathscr{A} = \{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid \text{pour } 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_k \leq n\}$.

Il y a n choix pour chaque e^{i_j}, alors, au total, on a n^k choix pour les éléments de $\mathscr{A}$, ce qui démontre la proposition 4.2. On montre maintenant que

1. $\mathscr{A}$ engendre $\Omega^k(E)$;
2. $\mathscr{A}$ est libre.

Soit $\alpha \in \Omega^k(E)$.

On va démontrer que

$$\alpha \stackrel{?}{=} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

Prenons $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) \in E^k$. On a

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i.$$

$$\begin{aligned}\alpha(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_{i1}e_i,\dots,\sum_{i=1}^n c_{ik}e_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^n c_{i1}\alpha\left(e_i,\sum_{i_2} c_{i_2 2}e_{2i},\dots\right)\\ &= \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\dots\sum_{i_k=1}^n c_{i_1 1}c_{i_2 2}\dots c_{i_k k}\alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_k}).\end{aligned}$$

Maintenant, pour

$$\beta = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq n}\alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_n})e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_n},$$

on calcule pour $\beta\in\Omega^k(E)$,

$$\beta(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}) = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_k} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k}\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).$$

Mais

$$\begin{aligned}\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) &= \sum_{1\leq i'_1,\dots,i'_k\leq n}\alpha(e_{i'_1},e_{i'_2},\dots,e_{i'_k})e^{i'_1}\otimes e^{i'_2}\otimes\dots\otimes e^{i'_k}(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\\ &= \sum_{1\leq i'_1\leq\dots\leq i'_k\leq n}\alpha(e_{i'_1},\dots,e_{i'_k})e^{i'_1}(e_{i_1})e^{i'_2}(e_{i_2})\dots e^{i'_k}(e_{i_k})\\ &= \sum_{1\leq i'_1,\dots,i'_k\leq n}\alpha(e_{i'_1},\dots,e_{i'_k})\delta_{i_1}^{i'_1}\dots\delta_{i_k}^{i'_k} = \alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).\end{aligned}$$

Donc

$$\beta(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}) = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_k} c_{i_1 1}c_{i_2 2}\dots c_{i_k k}\alpha(e_{i_1},\dots,e_{ik}) = \alpha(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}).$$

Donc ? est démontré, et on a $\alpha\in span(\mathscr{A}) = \langle\mathscr{A}\rangle$, où $\mathscr{A} = \{e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}\}$.

Montrons que $\mathscr{A}$ est libre. Soit

$$\sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n} c_{i_1 i_2\dots i_k}e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k} = 0\in\Omega^k(E).$$

Le même calcul qu'auparavant démontre que

$$0 = 0(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) = c_{i_1\dots i_k},\forall i_1,\dots,i_k,$$

donc

$$\forall i_1,\dots,i_k, c_{i_1\dots i_k} = 0,$$

donc $\mathscr{A}$ est libre. $\square$

Remarque. Si $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $Df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{gathered} Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ \vdots \\ D^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \ldots, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))). \end{gathered}$$

Lemme. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \{\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \alpha$ *est 2-linéaire*$\}$.

Pour un élément $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, g(\overrightarrow{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Pour tout k, pour tout $x \in U$, $D^k f(x) \in (\Omega^k(\mathbb{R}^n))^m$. Cet espace est de dimension $m(n^k)$.
On définit

$$\alpha_g(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w}) \in \mathbb{R}^n.$$

On voit que α_g est une application 2-linéaire.
Supposons que $\alpha_g = \alpha_{g'}$, donc $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n, \alpha_g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \alpha_{g'}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donc $g(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w}) = g'(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w})$.
Donc $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, g(\overrightarrow{v}) = g'(\overrightarrow{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donc $g = g'$.
On en déduit que $g \longrightarrow \alpha_g$ est injective.

Exemple. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Tx = 2x_1 + 5x_2$. On définit $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\alpha((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = x_1 x_2' -$ 27-09-2023
$x_2 x_1', \alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$.
Ecrire le produit tensoriel entre α et T...

Si E, F sont deux espaces vectoriels et $T : E \longrightarrow F$ linéaire ($T \in \mathscr{L}(E, F)$). On peut définir une application linéaire

$$T^* : F^* \longrightarrow E^*.$$

Pour $f \in F^*$, on doit déterminer $T^*(f)$ comme un élément de E^*. Alors $T^*(f)$ doit être une application linéaire $T^*(f) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, i. e. $T^*(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall v \in E, (T^*(f))(v) \overset{\text{déf}}{=} f(T(v)) \text{ cf figure 9.}$$

On a $f \in F^*, f \in \mathscr{L}(F, \mathbb{R})$.

$$\begin{tikzcd} v \in E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f \circ T"'] & f \arrow[d, "f \in T^*"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

FIGURE 9 – Illustration de T^*

$F^* = \Omega'(F), E^* = \Omega'(E)$. On peut aussi utiliser la notation $\Omega^1(T)$ pour T^*. On peut aussi définir, à partir de T,

$$\Omega^k(T) : \underbrace{\Omega^k(F)}_{\alpha} \longrightarrow \underbrace{\Omega^k(E)}_{\beta}.$$

Pour $\alpha \in \Omega^k(E)$, on a besoin que $\underbrace{\Omega^k(T)(\alpha)}_{k\text{-linéaire}} \in \Omega^k(E)$.

$\forall v_1, \ldots, v_n$, on a besoin de définir

$$\underbrace{(\Omega^k(T))(\alpha)}_{\beta \in \Omega^k(E)}(v_1, \ldots, v_k) = \underbrace{\alpha(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k))}_{\in F^k}.$$

Exercice 3.

1. Montrer que β est k-linéaire, i. e. $\forall k, \Omega^k(T)(\alpha) \in \Omega^k(E)$.
2. Montrer que $\Omega^k(S \circ T) = \Omega^k(T) \circ \Omega^k(S)$.
3. Montrer que $\Omega^k(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Omega^k(E)}$.
4. Montrer que si $T : E \to F$ est inversible, alors

$$\Omega^k(T^{-1}) = (\Omega^k(T))^{-1}.$$

Quelques propriétés Si on a $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$, on a

$$\Omega^k(G) \xrightarrow{\Omega^k(S)} \Omega^k(F) \xrightarrow{\Omega^k(T)} \Omega^k(E).$$

On a $S \circ T : E \longrightarrow G$. Alors

$$\Omega^k(T) \circ \Omega^k(S) \in \Omega^k(G) \longrightarrow \Omega^k(E)$$

et

$$\Omega^k(S \circ T) : \Omega^k(G) \longrightarrow \Omega^k(E).$$

On considère $\mathbb{1}_E : E \to E$. Alors

$$\Omega^k(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Omega^k(E)}.$$

On rappelle que l'on peut associer à un vecteur $v \in E$ un vecteur contravariant $\iota(v) \in E^{**}$. On définit alors, $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 1$,

$$\Omega_l(E) := \{\alpha : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } l\text{-linéaire}\} = \Omega^l(E^*),$$

avec la base $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_l} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq l\}$.

On a $\dim(\Omega_l(E)) = n^l$ et $\forall \alpha \in \Omega_l(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq n} \alpha(e^{i_1}, \ldots, e^{i_l}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_l}.$$

Pour $T : E \longrightarrow F$, $\Omega_l(T) : \Omega_l(E) \to \Omega_l(F)$ (objets contravariants pour la dualité), avec $\alpha \in \Omega_l(E), \beta = \Omega_l(T)(\alpha) \in \Omega_l(F)$.

On va essayer de définir

$$\beta(\underbrace{f_1, \ldots, f_l}_{f_j \in F^*}) = \Omega_l(T)(\alpha)(f_1, \ldots, f_l) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(\underbrace{T^*(f_1), \ldots, T^*(f_l)}_{T^*(f_j) \in F^*}).$$

On a alors le schéma suivant :

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$$
$$\Omega_l(E) \underset{\Omega_l(T)}{\longrightarrow} \Omega_l(F) \underset{\Omega_l(S)}{\longrightarrow} \Omega_l(G).$$

Définition 4.3. Pour tous k, l, on a

$$\Omega_l^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{l \text{ fois}} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$$

qui a pour base

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n, 1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n\}.$$

On a $\dim(\Omega_l^k) = n^{k+l}$. Pour $\alpha \in \Omega_l^k(E)$, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_l}} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_l}) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

Parenthèse sur les notations En physique, on écrit

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_l}} a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l}.$$

et on dit : si α est un (l, k) tenseur, alors α est la collection de valeurs $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$.
Si $T : E \to E$ est donnée, alors $\Omega_l^k(T)(\alpha)$ est donnée maintenant par le coefficient

$$b_{\tilde{i_1}, \ldots, \tilde{i_l}}^{\tilde{j_1}, \ldots, \tilde{j_l}}.$$

4.3 Produit scalaire

Les produits scalaires sur un espace vectoriel sont des tenseurs 2-covariants.

Définition 4.4 (Produit scalaire)**.** Une application $\alpha : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire quand

1. $\alpha \in \Omega^2(E)$;
2. α est symétrique, i. e.

$$\forall v, w, \alpha(v, w) = \alpha(w, v).$$

3. α est définie positive, i. e. $\forall v \in E, \alpha(v, v) \geq 0$ et $\alpha(v, v) = 0 \iff v = 0$. En particulier, si $v \neq 0$, alors $\alpha(v, v) > 0$.

α dans une base est donnée par les coefficients $a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$. Par exemple, on considère

$$v = \sum x_i e_i, w = \sum y_i e_i, \alpha = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{3}$$

Dans ce cas, on a

$$\alpha(v, w) = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} e^i \otimes e^j \right) \left(\sum_k x_k e_k, \sum_l y_l e_l \right) \tag{4}$$

$$= \sum_{i,j,k,l} a_{ij} e^i(e_k) e^j(e_l) x_k y_l = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} \delta_k^i \delta_l^j x_k y_l = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j. \tag{5}$$

Donc un produit scalaire est un (0, 2)-tenseur.

Pour aller vers les formes différentielles, on a besoin d'une sous-catégorie de $\Omega_l^k(E)$ qui sont appelés les tenseurs extérieurs. Voici quelques définitions.

Définition 4.5. 1. On dit que σ est une permutation d'ordre k quand

$$\sigma : \{1, \ldots, k\} \longmapsto \{1, \ldots, k\}$$

est une bijection. On note $\sigma_i := \sigma(i)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est l'ensemble des permutations d'ordre k. L'ensemble S_k muni de la loi $\circ$ est un groupe. On dit qu'une permutation est une transposition quand il existe $i \neq j$ tels que

$$\sigma_i = j, \sigma_j = i, \sigma_s = s, \forall s \notin \{i, j\}.$$

$\forall \sigma \in S_k, \exists \sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(l)}$ tel que

$$\sigma = \sigma_{(1)} \ldots \sigma_{(l)}, \tag{6}$$

et chaque $\sigma_{(s)}$ est une transposition. Cette décomposition n'est pas unique, mais dans toutes les décompositions comme dans 6, la parité de l ne change pas.

On définit

$$\begin{matrix} \mathrm{sgn}(\sigma) \\ \varepsilon(\sigma) \end{matrix} := \begin{cases} 1 \text{ si } l \text{ est paire,} \\ 0 \text{ si } l \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Définition 4.6. $\alpha \in \Omega^k(E)$ est dite un **tenseur extérieur** (aussi appelé tenseur antisymétrique) si

$$\forall v_1, \ldots, v_k \in E, \forall \sigma \in S_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k).$$

Proposition 4.3. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est extérieur ;
2. $\forall \sigma \in S_k$ telle que σ est une transposition,

$$\forall v_1, \ldots, v_k, \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \ldots, v_k);$$

3. $\forall v_1, \ldots, v_k \in E$, s'il existe $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $v_i = v_j, i \neq j$, alors $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Démonstration.

1. (1) $\implies$ (2). On a sgn(transposition) $= -1$.
2. (2) $\implies$ (3). Donné i, j tels que $v_i = v_j, i \neq j$. On considère la transposition qui échange i et j et on a

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = -\alpha(v_1, \ldots, v_k),$$

mais $(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = (v_1, \ldots, v_k)$ comme $v_i = v_j$ et donc

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_k) \implies \alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$

3. (2) $\implies$ (1). Si $\sigma = \sigma_{(1)} \dots \sigma_{(l)}$, avec pour tout j, $\sigma_{(j)}$ est une transposition, alors

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = (-1)^l \alpha(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k).$$

4. (3) $\implies$ (2). σ est une transposition telle que $\sigma_i = j, \sigma_j = i$. Les $v_1, \dots, v_k$ sont donnés. On écrit :

$$\alpha(v_1, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } i}, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\text{position } j}, \dots, v_k) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} &\alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) && (7)\\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) && (8)\\ &= \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k)}_{=0} + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) && (9)\\ &+\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k)}_{=0}. && (10) \end{aligned}$$

On a d'une part $9 + 10 = 0$ et d'autre part :

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}),$$

ce qui donne le résultat souhaité.

□

Exemple.

1. $\alpha(v, w) = \alpha((v', v^2), (w', w^2)) = v'w^2 - v^2w'$. On vérifie facilement qu'il est antisymétrique.
2. Plus généralement, pour chaque $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$,

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]$$

est un tenseur extérieur.

Corollaire. *Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas libre (i. e. linéairement dépendante), $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.*

Démonstration. Si la famille n'est pas libre, il existe i tel que $v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j$ et la démonstration est la même que pour la proposition 4.3. □

On suppose que $\dim(E) = n$ et $k > n$. Si $\alpha \in \Omega^k(E)$ est un tenseur extérieur, alors, par convention, on écrit :

$$\forall v_1, \dots, v_k \in E, \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

On définit maintenant l'ensemble des tenseurs extérieurs, à savoir

$$\Lambda^k(E) := \{\alpha \in \Omega^k(E), \alpha \text{ est tenseur extérieur}\}.$$

Proposition 4.4. $\Lambda^k(E)$ est un sous-espace vectoriel, i. e.

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(E) \text{ et } c \in \mathbb{R}, (c\alpha + \beta) \in \Lambda^k(E).$$

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?

On cherche une base pour $\Lambda^k(E)$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ base duale, alors

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

est une base de $\Omega^k(E)$.

On va définir pour chaque choix d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ un élément extérieur $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ comme un élément proposé de base de $\Lambda^k(E)$ par la formule

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}).$$

Exemple.

$$e^{12}(v_1, v_2) = e^1 \otimes e^2(v_1, v_2) - e^1 \otimes e^2(v_2, v_1) = e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^2(v_1).$$

Proposition 4.5. $\varepsilon^{i_1 \ldots i_k} \in \Lambda^k(E)$, autrement dit $\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}$ est un **tenseur extérieur**.

Démonstration. Soit $\tau \in S_k$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}) &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1}, \ldots, v_{\sigma\tau_k}) \\ &= \sigma(\tau) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma\tau_1}, \ldots, v_{\sigma\tau_2}).\end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}) = \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma') e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}(v_{\sigma'_1}, \ldots, v_{\sigma'_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k).$$

$\square$

Il existe une autre manière pour proposer des éléments de base $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$. On va définir

$$\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \overset{\text{déf}}{=} \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}.$$

Si $j_s = j_l$ pour $s \neq l$, alors $\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k} = 0$ par définition.

Si $j_1, \ldots, j_k$ sont k indices différents, mais pas dans l'ordre croissant, on les réordonne par une permutation $\sigma \in S_k$ avec $1 \leq \sigma_{j_1} < \ldots < \sigma_{j_k} \leq n$. On définit

$$\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}.$$

Exercice 4. Est-ce que on a $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$ pour tout choix de $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$?

$\overline{\varepsilon}$ est prolongé par k-linéarité sur tout élément $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$.

Théorème 4.3. *$\{\overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}$, pour tout $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ forme une base pour $\Lambda^k(E)$, l'espace vectoriel des tenseurs extérieurs.*

Démonstration.

1. Ils sont libres. En effet,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} c_{i_1 \ldots i_k} \overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k} = 0 \\
\implies \forall 0 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n, &\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} c_{i_1 \ldots i_k} \overline{\varepsilon}^{i_1 \ldots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0 \\
\implies 0 = &\sum_{1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq n} c_{i_1 \ldots i_k} \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k} = c_{j_1 \ldots j_k}.
\end{aligned}$$

2. Ils génèrent $\Lambda^k(E)$: exercice.

□

Quelle est la dimension de $\Lambda^k(E)$?
C'est $\dim(\Lambda^k(E)) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Par convention, $\dim(\Lambda^0(E)) = 1$ et $\Lambda^k(E) = \mathbb{R}$, $\Lambda^k(E) = \{0\}$ si $k < 0$ et

$$\dim(\Lambda^1(E)) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \text{ et } \dim(\Lambda^n(E)) = \frac{n!}{(n-n)!0!} = 1.$$

Proposition 4.6. Si $\alpha \in \Lambda^k(F)$, $T \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $(\Omega^k(T))(\alpha) \in \Lambda^k(E)$, avec $\Omega^k(T) : \Omega^k(F) \longrightarrow \Omega^k(E)$.

Démonstration. Si $\beta = (\Omega^k(T))(\alpha)$, $v_1, \ldots, v_k \in E$,

$$\beta(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(T(v_1), \ldots, T(v_k)).$$

Si $i \neq j, v_i = v_j$, alors $T(v_i) = T(v_j)$ et $\alpha(T(v_1), \ldots, T(v_k)) = 0$, donc $\beta(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Donc $\beta \in \Lambda^k(E)$. □

On écrit

$$\Lambda^k(T) \overset{\text{déf}}{=} \Omega^k(E)_{|\Lambda^k(E)}.$$

Exemple. 1.

2. Si $k = n$, on a $\dim(\Lambda^k(E)) = 1$ et

$$\overline{\varepsilon}^{1 \ldots n}(e_1, \ldots, e_n) = 1 \text{ et } \overline{\varepsilon}^{12 \ldots n}(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Si $k = 2 = n$, on a

$$\overline{\varepsilon}(e_1,e_2)=1, \overline{\varepsilon}(e_2,e_1)=-1, \overline{\varepsilon}(e_1,e_1)=0, \overline{\varepsilon}(e_2,e_2)=0.$$

et $\overline{\varepsilon}(v,w)=-\overline{\varepsilon}(w,v)$. Si $v=(x_1,x_2), w=(y_1,y_2)$. Donc

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}(v,w)&=\overline{\varepsilon}(x_1e_1+x_2e_2, y_1e_1+y_2e_2)\\&=\ldots \text{ on développe grâce à la linéarité de l'application } = x_1y_2-x_2y_1.\end{aligned}$$

C'est le déterminant formé par les vecteurs v,w, à savoir l'aire du parallélogramme formé par v,w.
Donc

$$\overline{\varepsilon}^{12\ldots n}(v_1,\ldots,v_n)=\det[v_1 \ \ldots \ v_n].$$

C'est le volume n-dimensionnel signé de parallélipipède crée par $(v_1,\ldots,v_n)$ (ordonné). On dit que $\overline{\varepsilon}^{1\ldots n}$ est l'élément de volume sur $\Lambda^k(E)$ et on va le noter par $\omega=\overline{\varepsilon}^{1\ldots n}$.

$$\omega(v_1,\ldots,v_n)= \text{ volume signé de parallélipipède créé par } v_1,\ldots,v_n=\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, 0\leq\lambda_i\leq 1\right\}.$$

Remarque (Sur les notations). Parfois on représente les éléments de E comme les vecteurs de colonne

$$\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix}=|\overrightarrow{v}\rangle, \text{ avec } \overrightarrow{v}=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$$

et les éléments de E^* comme les vecteurs de ligne par rapport à la base duale.

$$\overrightarrow{a}=y_1e^1+\cdots+y_ne^n, \langle\overrightarrow{a}|=[y_1 \ \ldots \ y_n].$$

Pour $\overrightarrow{a}\in E^*$, pour $\overrightarrow{v}\in E$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}(\overrightarrow{v})&=\sum_{i=1}^n y_ix^i=\langle\overrightarrow{a}\mid\overrightarrow{v}\rangle\\&=[y_1 \ \ldots \ y_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dans le cas général, $\omega=\overline{\varepsilon}^{1\ldots n}\in\Lambda^k(E)$ est le seul élément de base pour cet espace de dimension 1. Si $T:E\to E$ transpormation linéaire $\Lambda^k(T):\Lambda^k(E)\longrightarrow\Lambda^k(E)$, mais $\dim(\Lambda^n(E))=1$. S'il existe $c\in\mathbb{R},\forall\alpha\in\Lambda^n(E),\Lambda^n(T)(\alpha)=c\alpha$.

Définition 4.7. $\det(T):=c$.

Exercice 5. Si $E=\mathbb{R}^n, T(v)=A|\overrightarrow{v}\rangle$ pour la base standart, alors $\det(T)=\det(A)$.

On considère $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$,

$$(\Lambda^n(T))(\alpha)(w_1,\ldots,w_n)=\alpha(T(w_1),\ldots,T(w_n))=\det(T)\alpha(w_1,\ldots,w_n).$$

On choisit $\alpha=\omega, w_i=e_i$.

$$\omega(T(e_1),\ldots,T(e_n)) = \det(T)\omega(e_1,\ldots,e_n). \tag{11}$$

Mais

$$\det(T) = \omega(T(e_1),\ldots,T(e_n)) = \det[T(e_1),\ldots,T(e_n)]. \tag{12}$$

$11, 12 \implies \det(T) = \det(A)$.
$\det(T)$ est défini directement indépendemment d'une base de E. Donc

$$\Lambda^n(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)},$$

donc $\mathbb{1}_{\Lambda^n(E)}(\alpha) = \alpha \implies c = 1$.
De plus, pour $T : E \to E, S : E \to E$,

$$\Lambda^n(S \circ T) = \Lambda^n(T) \circ \Lambda^n(S) \implies \det(S \circ T) = \det(S)\det(T).$$

Si T est inversible, alors

$$\begin{aligned} \Lambda^n(E)(T \circ T^{-1}) &= \Lambda^n(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \Lambda^n(T^{-1}) \circ \Lambda^n(T) &= \mathbb{1}_{\Lambda^n(E)} \\ \implies \det(T)\det(T^{-1}) &= 1. \end{aligned}$$

Si T est inversible, on a $\det(T) \neq 0$ et

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}.$$

Aussi $\det(T) \neq 0 \implies T$ est inversible. Etant donné $(e_1,\ldots,e_n)$, on doit démontrer que $T(e_1),\ldots,T(e_n)$ forment une famille libre.

$$\omega(T(e_1),\ldots,T(e_n)) = \Lambda^n(T)(\omega)(e_1,\ldots,e_n) = (\det(T))\omega(e_1,\ldots,e_n) = \det(T)\cdot 1 \neq 0.$$

Comme ω est linéairement dépendant, par contraposée, $\{T(e_1),\ldots,T(e_n)\}$ ne peut pas être linéairement dépendant.

Lemme. *Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ sont linéairement dépendants, alors $\omega(v_1,\ldots,v_n) = 0$. Si $\omega(v_1,\ldots,v_n) \neq 0$, alors $\{v_1,\ldots,v_n\}$ famille libre.*

Aussi, si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ sont libres, on définit $Te_i = v_i, T : E \to E$ devient inversible, donc $\det(T) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(T) &= \det(T)\omega(e_1,\ldots,e_n) = (\Lambda^n(T))(\omega)(e_1,\ldots,e_n) \\ &= \omega(T(e_1),\ldots,T(e_n)) = \omega(v_1,\ldots,v_n) \implies \omega(v_1,\ldots,v_n) \neq 0. \end{aligned}$$

$T : E \to E, (e_1,\ldots,e_n)$ base de E,

$$Te_i = A|e_i\rangle = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n A_{ji}e_j.$$

$$\det(T) = \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \omega(\sum_{j=1}^{n} A_{j1}e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} A_{jn}e_j)$$

$$= \sum_{j1} \dots \sum_{jn} A_{j_1 1} A_{j_2 2} \dots A_{j_n n} \omega(e_{j1}, \dots, e_{jn}) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \dots A_{\sigma_n n} \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\Longrightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \dots A_{\sigma_n n}.$$

4.4 Les élément de volumes et orientation

On a défini

$$\omega = \varepsilon^{12\dots n} \in \Lambda^n(E).$$

Cet élément dépend du choix de la base.

Définition 4.8. On dit que ω est un élément de volume sur E, avec $\dim(E) = n$ si $\omega \in \Lambda^n(E)$ et $\omega = 0$.

Remarque. Si $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^n(E)$ sont deux éléments de volume, alors il existe $c \neq 0, c \in \mathbb{R}$ tel que $\omega_1 = c\omega_2$.

Définition 4.9. On dit qu'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E (base arbitraire *ordonnée*) a l'orientation positive (négative) ou est orientée positivement (négativement) par rapport à ω, qui est élément de volume donné sur E, quand $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0(\omega(e_1, \dots, e_n) < 0)$.

Si $\omega = \varepsilon^{12\dots n}$ construit à partir de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base orientée positivement par rapport à ω, alors, par rapport à l'application linéaire $T : E \longrightarrow E, T(e_i) = e'_i$, on a $\det(T) > 0$.

Démonstration. En exercice. □

La réciproque est aussi vraie.

Définition 4.10. $\{e_1, \dots, e_n\}, \{e'_1, \dots, e'_n\}$ sont deux bases données. On dit qu'elles sont de même orientation lorsqu'il existe $\omega \in \Lambda^n(E)$ élément de volume tel que $\omega(e_1, \dots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \dots, e'_n)$ sont de même signe.

Lemme. *Si un tel ω dans la définition existe, alors $\forall \omega \in \Lambda^n(E)$, $\omega(e_1, \dots, e_n)$ et $\omega(e'_1, \dots, e'_n)$ ont le même signe.*

Démonstration. En exercice. □

Remarque. Etre de la même orientation est une relation d'équivalence sur la collection de bases sur E. Il y a deux classes d'équivalence.

Si on fait la théorie sur $\mathbb{C}$ (qui n'est pas un corps ordonné), on ne peut pas définir une orientation. Si $\omega(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}$, il n'y a pas de signe (Kähler).

On définit

$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^k(E) = \bigoplus_{0 \le k \le n} \Lambda^k(E).$$

En général, $\alpha \otimes \beta$ n'est pas un tenseur extérieur. On cherche un produit $\wedge$ qui nous donne

$$\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E).$$

Si on essaie de mettre

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) \beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k+l}}).$$

Ce produit est tel que $\alpha \times \beta$ est antisymétrique, mais défini de cette façon, il n'est pas associatif.

Définition 4.11. $\Lambda^k(E) \times \Lambda^l(E) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+l}(E)$, avec $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est défini comme l'élément de $\Omega^{k+l}(E)$ par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) \beta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{k+l}).$$

Lemme. $\alpha \in \Lambda^k, \beta \in \Lambda^l(E) \implies \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(E)$.

Démonstration. Prenons $\tau \in S_{k+l}$. On a

$$\begin{aligned} &\alpha \wedge \beta(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_k}, v_{\tau_{k+1}}, \ldots, v_{\tau_{k+l}}) \\ &\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{(\sigma\tau)_1}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_k}) \beta(v_{(\sigma\tau)_{k+1}}, \ldots, v_{(\sigma\tau)_{k+l}}) \end{aligned}$$

□

Proposition 4.7. Si $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E), \gamma \in \Lambda^s(E)$, alors

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Donc on peut parler sans confusion de $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \Lambda^{k+l+s}(E)$.

Donc on peut généraliser le produit sur m tenseurs extérieurs $\alpha_i \in \Lambda^{k_i}, 1 \le i \le m$,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m(v_1, \ldots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \ldots, v_{k_1+k_2}, \ldots, v_{\sum_{i=1}^{m-1} k_i}, \ldots, v_{\sum_{i=1}^{m} k_i}) \\ &= \frac{1}{k_1! \ldots k_m!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+\cdots+k_m}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_{k_1}}) \alpha_2(\ldots) \ldots \alpha_m(\ldots). \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1\dots i_k}(v_1,\dots,v_k) &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)(e^{i_1}\otimes e^{i_n})(v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_n})\\ &= \sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)e^{i_1}(v_{\sigma_1})\dots e^{i_k}(v_{\sigma_k})\\ &= \frac{1}{1!\dots 1!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)e^{i_1}(v_{\sigma_1})\dots e^{i_k}(v_{\sigma_n}).\end{aligned}$$

Si on met $m = k, k_1 = \cdots = k_m = 1, \alpha_{k_j} = e^{i_j} \in \Lambda^1(E), 1 \le j \le k$, on voit que

$$\varepsilon^{i_1\dots i_k} = e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}.$$

Exercice 6. Montrer que $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \delta^{i_1}_{j_1}\dots\delta^{i_k}_{j_k}$, avec $0 < i_1 < \ldots < i_k \le n, 0 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$ qui montre que

$$\varepsilon^{i_1\dots i_k} = \overline{\varepsilon}^{i_1\dots i_k}.$$

Donc pour $n = m$, on obtient $\varepsilon^{12\dots n} = e^1\wedge\cdots\wedge e^n$. Donc l'élément de volume ω associé à une base ordonnée $(e_1,\dots,e_n)$ de E est simplement $\omega = e^1\wedge\cdots\wedge e^n$.

Exemple. Si $\alpha_i \in \Lambda^1(E), v_i \in E$,

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m(v_1,\dots,v_m) = \sum_{\sigma\in S_m}\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1(v_{\sigma_1}\dots\alpha_m(v_{\sigma_m})) = \det[\alpha_i(v_j)].$$

Exemple. $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{gathered}\alpha_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2, \alpha(x_1,x_2,x_3) = x_3,\\ v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,0).\end{gathered}$$

$m = 2, n = 3.$

$$\begin{aligned}\alpha_1\wedge\alpha_2(v_1,v_2) &= \sum_{\sigma\in S_2}\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1(v_{\sigma_1})\alpha_2(v_{\sigma_2})\\ = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_2(v_1)\alpha_1(v_2) &= \det\left(\begin{pmatrix}\alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2)\\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2)\end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 2.\end{aligned}$$

Proposition 4.8. $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$, alors

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{kl}\beta\times\alpha.$$

En particulier, si k est impair,

$$\forall\alpha \in \Lambda^k(E), \alpha\wedge\alpha = 0,$$

parce que dans ce cas, on a $\alpha \wedge \alpha = (-1)\alpha \wedge \alpha$.

Démonstration.

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}})$$
$$\beta \wedge \alpha(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\beta(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_l})\alpha(v_{l+1}, \dots, v_{l+k}).$$

On doit introduire τ telle que $(-1)^{kl}$. □

Proposition 4.9. Soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout k, $\Lambda^k(T) : \Lambda^k(F) \longrightarrow \Lambda^k(E)$, pour $\alpha \in \Lambda^k(F), \beta \in \Lambda^l(F)$,

$$\underbrace{\Lambda^{k+l}(T)(\alpha \wedge \beta)}_{\in \Lambda^{k+l}(E)} = \underbrace{\Lambda^k(T)(\alpha)}_{\in \Lambda^k(E)} \wedge \underbrace{\Lambda^l(T)(\beta)}_{\in \Lambda^l(E)}.$$

La relation entre le produit extérieur $\wedge$ et le produit extérieur des vecteurs de $\mathbb{R}^3$: soient $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ et $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$.

$$v_1 \times v_2 := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Penser à v_1, v_2 comme des éléments de $(\mathbb{R}^3)^*$, donc comme des éléments de $\Lambda^1((\mathbb{R}^3)^*)$.
Quels sont les coefficients de $v_1 \wedge v_2$ dans la base $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$?

$$\begin{aligned}
v_1 \wedge v_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} v_1 \wedge v_2(e^{i_1}, e^{i_2})\varepsilon_{i_1 i_2} = v_1 \wedge v_2(e^1, e^2)\varepsilon_{12} + v_1 \wedge v_2(e^2, e^3)\varepsilon_{23} + v_1 \wedge v_2(e^1, e^3)\varepsilon_{13} \\
&= [v_1(e^1)v_2(e^2) - v_1(e^2)v_2(e^1)]\varepsilon_{12} + [v_1(e^2)v_2(e^3) - v_2(e^2)v_1(e^3)]\varepsilon_{23} + [v_1(e^1)v_2(e^2) - v_2(e^1)v_1(e^3)]\varepsilon_{13} \\
&= (e^1(v_1)e^2(v_2) - e^2(v_1)e^1(v_2))\varepsilon_{12} + (e^2(v_1)e^3(v_2) - e^2(v_2)e^3(v_1))\varepsilon_{23} + (e^1(v_1)e^2(v_2) - e^1(v_2)e^3(v_1))\varepsilon_{13} \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\varepsilon_{12} + (x_2y_3 - x_3y_2)\varepsilon_{23} + (x_1y_3 - x_3y_1)\varepsilon_{13}.
\end{aligned}$$

Donc si on choisit la base $\{\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}$, on obtient $\varepsilon_{31} = -\varepsilon_{13} = e_1 \wedge e_3$. On obtient les coordonnées dans la base ordonnée $(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12})$ de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ de $v_1 \wedge v_2 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ est donnée par $v_1 \times v_2$.

Définition 4.12 (Contraction d'un tenseur par vecteur)**.** Soit $X \in E$. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(E), 1 \leq k \leq n$. $i_X(\alpha) \in \Omega^{k-1}(E)$ pour

$$i_X(\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(X, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

On a $\Omega^0 \simeq \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \Omega^1(E) = E^*$, on a $i_X(\alpha) = \alpha(X) \in \mathbb{R}$. En particulier, i_X est défini sur $\Lambda^k(E)$ pour tout k.

Lemme. *$X \in E, \alpha \in \Lambda^k(E)$, alors $i_X(\alpha) \in \Lambda^{k-1}(E)$.*

Démonstration. Pour $v_i = v_j, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, donc

$$i_X(\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \alpha(X, v_1, \dots, v_{k-1}) = 0$$

□

Proposition 4.10.
1. $X \longrightarrow i_X$ est linéaire dans le sens que
   (a) $i_{X+Y} = i_X + i_Y$,
   (b) $i_{cX} = ci_X$.
2. Si on considère i_X restreint à $\Lambda^*(E)$, on a $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$ et $i_X \circ i_X = 0$.
3. Pour $i_{X_{|\lambda^*(E)}}$, on a, pour $\alpha \in \Lambda^k(E), \beta \in \Lambda^l(E)$,

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta).$$

Remarque. Supposons que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, avec $\dim(F) = n-1, \dim(E) = n$, $X \notin F$ et ω est un élément de volume en E, alors $\omega \in \lambda^n(E)$. Alors $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$ va être un élément de volume pour F.

$$I_F : F \longrightarrow E \text{ est une injection } \implies \Lambda^{n-1}(E) \overset{\Lambda^{n-1}(I_F)}{\longrightarrow} \Lambda^{n-1}(F),$$

$$\Lambda^{n-1}(I_F)\alpha(v_1, \dots, v_{n-1}) = \alpha(v_1, \dots, v_{n-1}), v_i \in F.$$

Donc quand on dit que $i_X(\omega) \in \Lambda^{n-1}(F)$, on est en train de considérer $i_X(\omega)_{|F^{n-1}}$ en réalité.