

# ANALYSE FONCTIONNELLE ET DISTRIBUTIONS

Michel ROULEUX

2023-2024



TABLE DES MATIÈRES

3



# CHAPITRE 1

## ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

### 1.1 Rappels de topologie

J. Dieudonné 1 et 2.  
Reed-Simon 1, 2 et 4.  
Brézis, “Analyse fonctionnelle”

Soit  $X$  ensemble. Soit  $(X, \mathcal{T})$  espace topologique où  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ .  
 $\mathcal{T}$  parcourt l'ensemble des voisinages de  $x$  où  $x$  est un point quelconque de  $X$ .

#### 1.1.1 Axiomes

1. Soient  $x \in X$  et  $V'$  voisinage de  $x$ . Si  $V \supset V'$  alors  $V$  est un voisinage de  $x$ .
2.  $\bigcap_{\text{finie}} V_i$  est un voisinage de  $x$ ,  $\bigcap_{\text{finie}} V_i \in \mathcal{T}$ , mais  $\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon \neq \emptyset$  n'est pas un voisinage de  $0$ .
3.  $\bigcap_{i \in I} V_i$  est un voisinage de  $x$ .

**Définition 1.1.1** (Ouvert).  $\Omega$  ouvert si et seulement si  $\Omega$  est voisinage de chacun de ses points.

**Exemple.**  $(-1, 1)$  ouvert tandis que  $[-1, 1)$  non ouvert car  $-1$  n'a pas de voisinage.

$V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  est une base de voisinage pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.** On peut définir axiomatiquement  $\mathcal{T}$  à partir de ses ouverts.

**Définition 1.1.2** (Fermé). On dit que  $F$  est un fermé si et seulement si  $F^C$  est un ouvert.

#### 1.1.2 Cas particulier d'espaces topologiques : espaces métriques

**Définition 1.1.3** (Espace métrique, distance).

$X$  est un ensemble,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  distance sur  $X$  si et seulement si :

1.  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ ;

**Remarque.** Si on a seulement  $x = y \implies d(x, y) = 0$ , alors  $d$  est un écart.

2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie);
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire). De ce fait,  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ .

**Exemple.** 1. Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

2.  $X$  ensemble. On définit  $d$  de la façon suivante :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 & \text{si } x = y \\ d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Il s'agit de la distance triviale.

Si  $x, y, z$  distincts alors  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

### 1.1.3 Comparaison des topologies

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  des topologies sur  $X$ .

**Définition 1.1.4** (Plus fine). On dit que  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$  et on note  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$  si et seulement si  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

On dit aussi que  $\mathcal{T}'$  est plus forte que  $\mathcal{T}$ .

**Remarque.** Si  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ , il y a plus d'ouverts dans  $\mathcal{T}'$  que dans  $\mathcal{T}$  (idem pour les fermés).

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  ouvert dans  $X$ . On a  $\Omega \in \mathcal{T} \implies \Omega \in \mathcal{T}'$ .

Soit  $F$  un fermé dans  $X$ . On a  $F \in \mathcal{T}$ , mais  $\Omega = F^C \in \mathcal{T} \implies F^C \in \mathcal{T}'$ , donc  $F \in \mathcal{T}'$ . ♣

#### Formulations équivalentes

1. On suppose que  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ . Si  $\forall x \in X$ ,  $U$  est un voisinage de  $x$  pour  $\mathcal{T}$ , alors  $U$  voisinage de  $x$  pour  $\mathcal{T}'$ , car si  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , alors  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{T}'$ .
2. Pour l'application identité définie comme suit

$$id : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}),$$

on a  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$  si et seulement si  $id$  est continue.

Par exemple, prenons  $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ . On prend  $\mathcal{T}$  topologie de la convergence simple, i. e.  $f_n$  converge vers  $f$  simplement si  $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

**Ouverts de  $\Omega$** 

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{f \in X \mid \sup_{i=1,\dots,k} |f(a_i)| < \varepsilon\},$$

avec  $a = a_0, \dots, a_k \in [0, 1]$  et  $\varepsilon > 0$ .

$\Omega_{a,\varepsilon}$  est un voisinage de 0 (la fonction nulle) dans  $X$ .

Pour  $f_0 \in X$ ,  $\Omega_{a,\varepsilon} + f_0$  est une base de voisinage de  $f_0$ , car  $X$  est un espace vectoriel (on agit par translation).

On considère maintenant la topologie de la convergence uniforme  $\mathcal{T}'$ .

$\Omega_\varepsilon = \{f \in X, \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \varepsilon\}$  est un voisinage de 0 (la fonction nulle).

**Proposition 1.1.1.**  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ , ie  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$ .

Si  $f \in \Omega_\varepsilon$ , alors

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, |f(a_i)| < \varepsilon \text{ (car c'est vrai pour tout } x \text{)}.$$

Donc  $\Omega_\varepsilon$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{T}$ . On a ainsi démontré que  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ . ♣

On considère l'espace des fonctions continues  $\mathcal{C}^0$  avec la norme

$$\|f\|_0 = \sup |f(x)|$$

et l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  avec la norme

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)| + \sup |f'(x)|.$$

La topologie sur  $\mathcal{C}^1$  est plus fine que celle sur  $\mathcal{C}^0$ .

*Démonstration.* On a pour tout  $f$ ,

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1.$$

Ainsi si

$$\|f\|_1 < \varepsilon,$$

alors

$$\|f\|_0 < \varepsilon.$$

Par conséquent,  $\{f, \|f\|_1 < \varepsilon\} \subset \{f, \|f\|_0 < \varepsilon\}$ .

Donc  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ .

On sait également que si  $U$  est un voisinage de 0 pour  $\mathcal{T}$ , alors  $U$  est un voisinage de 0 pour  $\mathcal{T}'$ . ♣

**Topologie métrisable (exemples)**

1. Topologie grossière  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ . C'est la topologie la moins fine.

**Remarque.**  $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X)$  est la topologie la plus fine.

Vérifions si la topologie grossière est métrisable dans différents cas.

— Si  $X = \{a\}$ , on a  $d(a, a) = 0$ . Le seul voisinage de  $a$  est  $X = \{a\}$ . Donc  $\mathcal{T}$  est métrisable.

- Supposons que  $X = \{a, b\}$ . Mais  $\mathcal{T}$  n'est plus métrisable, avec  $d(a, b) = 1$  (distance triviale).  
Raisonnons par l'absurde. Si  $\mathcal{T}$  était métrisable,  $\mathcal{T}$  devrait contenir un ouvert  $\Omega$  tel que  $a \in \Omega$  et  $b \notin \Omega$ . Or  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ , donc c'est impossible.

Pour  $\mathcal{T}'$ , on choisit la distance  $d$  telle que  $d(x, y) = 0$  ou  $1$ . Est-ce que  $\mathcal{T}'$  est métrisable ?

2. Prenons  $\mathcal{T}$  telle que  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ .

On suppose que  $X$  contient au moins deux éléments. Dans ce cas,  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $X$  non métrisable, car si  $d(a, b) = 1$ , avec  $b \neq a$ , alors dans  $\mathcal{T}$  il n'existe pas de boule ouverte qui contient  $\{b\}$  sans contenir  $\{a\}$ .

3. Considérons  $X = \{a, b\}$  muni de la topologie  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathcal{P}(X)$ .

On a  $d(a, b) = 1$ , car  $a \neq b$ .

De ce fait :

$\{a\}$  voisinage de  $a$  qui ne contient pas  $b$  ( $\{a\} = \{x \text{ tel que } d(x, a) < 1\}$ );

$\{b\}$  voisinage de  $b$  qui ne contient pas  $a$ .

### 1.1.4 Espaces vectoriels topologiques

Dans le cas où  $(X, \mathcal{T})$  est un espace vectoriel topologique, il suffit de connaître les voisinages de  $0$  et on agit par translation pour déterminer les voisinages de n'importe quel  $x \in X$ .

**Définition 1.1.5** (Continuité). Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On considère :

$(U_a)_{a \in A}$  voisinage de  $0$  dans  $X$

$(V_b)_{b \in B}$  voisinage de  $0$  dans  $Y$

$f$  est continue si pour tout  $V = V_b + f(x_0)$  dans  $Y$ , il existe  $U = \bigcap_{\text{finie}} (U_a + x_0)$  voisinage de  $x$  dans  $X$  tel que  $x \in U \implies f(x) \in V$ .

**Définition 1.1.6** (Norme).  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $X$  si

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  (séparation);
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (absolue homogénéité);
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

**Cas particulier :  $X$  normé** De cette norme, on construit la distance  $d$  telle que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Voisinages de  $0$ .

$$(U_a) = B(0, a)$$

$$A = \mathbb{R}^+.$$

—  $f : X \rightarrow Y$  continue en  $x_0$ ,  $\forall V = V_b + f(x_0)$ ,  $\exists U = B(0, \delta) + x_0$ ,  $f(U) \subset V$ .

—  $X, Y$  EVN.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(0, \delta) + x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$



## 1.2 Semi-normes et espaces localement convexes

### 1.2.1 Semi-normes sur $X$ espace vectoriel

**Définition 1.2.1** (Semi-norme). L'application  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une semi-norme si :

1.  $\rho(0) = 0$  ;
2.  $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$  ;
3.  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ .

$X$  est un espace vectoriel  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Remarque.**  $\triangleleft$  On n'a pas forcément  $\rho(x) = 0 \implies x = 0$ .

**Exemple.** 1. Si  $\rho$  est une norme, c'est aussi une semi-norme.

2.  $X = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$ . On prend  $a = (a_0, \dots, a_k) \subset [0, 1]$ . On définit

$$\rho_a(f) = \sup_{0 \leq i \leq k} |f(a_i)|.$$

3. Topologie faible.  $X$  est un espace vectoriel et  $X'$  est son dual (espace contenant les formes linéaires sur  $X$ ).

Soit  $l$  une forme linéaire dans  $X'$ . Alors

$$p(x) = |\langle l, x \rangle|.$$

**Définition 1.2.2** (Famille de semi-normes séparée). Soit  $(\rho_a)_{a \in A}$  une famille de semi-normes. On dit que  $(\rho_a)_{a \in A}$  sépare les points (ou est séparée) si et seulement si

$$\forall a \in A, \rho_a(x) = 0 \implies x = 0.$$

**Définition 1.2.3** (Espace localement convexe (ELC)). L'espace vectoriel topologique  $X$  est un **espace localement convexe** si et seulement si  $X$  est **muni d'une famille de semi-normes qui séparent les points**.

**Proposition 1.2.1.** Si  $X$  est un espace localement convexe, alors  $X$  est un espace vectoriel topologique pour la topologie définie par  $\rho_a$ .

*Démonstration.* On note  $\mathcal{T}$  la topologie définie par la famille de semi-normes  $(\rho_a)_{a \in A}$ .

**Remarque** (Personnelle). On cherche à montrer que les  $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$  forment une topologie. On va vérifier les axiomes de topologie.

Dans ce cas, les ouverts  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$  sont  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ ,  $a \in A$ ,  $\varepsilon > 0$  définis ci-dessous :

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

$\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$  une base de voisinages de 0.

Les voisinages de  $x$  sont donnés par translation :

$$x + \mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x + y, y \in \mathcal{O}_{a,\varepsilon}\}.$$

On montre facilement que  $\bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$  et  $\bigcup_{\text{quelconque}} \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \in \mathcal{T}$ . ♣

**Proposition 1.2.2.**  $\mathcal{T}$  est la topologie la moins fine sur  $X$  qui rend continues

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Il y a donc une compatibilité avec la structure des espaces vectoriels.

*Démonstration.* 1.  $\mathcal{T}$  rend continues les deux opérations de  $X$ . On a en effet

$$\rho_a(x + y) \leq \rho_a(x) + \rho_a(y).$$

Il suffit de prendre  $\rho_a(x) < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\rho_a(y) < \frac{\varepsilon}{2}$ , on obtient  $\rho_a(x + y) < \varepsilon$ .

On a  $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$  et on démontre ce résultat par analogie.

2. La moins fine (en exercice). ♣

**Théorème 1.2.1.** La topologie de  $X$  espace localement convexe est Hausdorff, i. e. elle sépare les points.

**Définition 1.2.4** (Hausdorff).  $(X, \mathcal{T})$  est de Hausdorff si et seulement si pour tout  $x, y \in X$  tel que  $x \neq y$ , il existe  $\mathcal{O}_x$  et  $\mathcal{O}_y$  voisinages de  $x$  et de  $y$  tels que

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset.$$

**Exemple.** On prend  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ . On a  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ . Donc  $(X, \mathcal{T})$  est séparée.

*Démonstration du théorème 1.2.1.* Par contraposée, on prend  $y \neq 0$  et  $x = 0$ .

Si  $X$  est un espace localement convexe, alors il existe  $a \in A$  tel que  $\rho_a(y) = \varepsilon > 0$ .

On pose

$$V_x = \left\{z, \rho_a(z) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \text{ et } V_y = \left\{z, \rho(z - y) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \quad (1.1)$$

Par l’inégalité triangulaire, on obtient  $V_x \cap V_y = \emptyset$ , car

$$\rho_a(x - y) > |\rho_a(x) - \rho_a(y)| > \left| \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \right| = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$



## 1.3 Pourquoi “localement convexe” ?

**Définition 1.3.1.** Soit  $X$  un  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  espace vectoriel.

1. On dit que  $C \subset X$  est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], z = tx + (1 - t)y \in C.$$

2. On dit que  $B \subset X$  est balancé (sur  $\mathbb{R}$ ) ou cerclé (sur  $\mathbb{C}$ ) si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \implies \forall x \in B, \lambda x \in B.$$

3. On dit que  $E \subset X$  est équilibré si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \implies \forall x \in E, \lambda x \in E.$$

4. On dit que  $A$  est absorbant si

$$\bigcup_{t>0} tA = X.$$

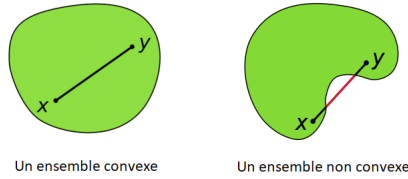


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

**Exemple.** 1. Si  $X$  est un espace vectoriel normé,  $A = B(0, 1)$  et  $x \in X$ , on a  $\frac{x}{\|x\|} \in B(0, 1)$ . Alors  $x \in \|x\|B(0, 1)$ .  
 2. Si  $0 \in C$  convexe, alors  $C$  est équilibré si et seulement si  $C$  est balancé.

*Démonstration.* On suppose que  $C$  est balancé. Pour  $x \in C \implies -x \in C$ , donc  $[-x, x] \in C$  par convexité. ♣

**Théorème 1.3.1.** Soit  $X$  un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est un espace localement convexe (réel ou complexe) ;
2. Il existe une base de voisinages de  $0 \in X$  qui sont convexes, balancés (cerclés), absorbants.

19-09-2023

*Démonstration.* 1. Si  $X$  est un espace localement convexe, alors une base de voisinages de 0 est donnée par

$$\mathcal{O}_{a,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_a(x) < \varepsilon\}$$

Les  $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$  sont convexes, balancés et absorbants (TD).

2. On utilise la jauge de Minkowski 1.3.2.

On pose

$$\rho_C(x) = \mu_C(x).$$

et on vérifie que  $\rho_C$  est une semi-norme. Grâce au lemme 1.3, on obtient les résultats suivants :

- (a)  $\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$ , car  $C$  est convexe ;
  - (b)  $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$  si  $\lambda > 0$  et  $\rho_C(\lambda x) = |\lambda| \rho_C(x)$ , car  $C$  est cerclé.
- $X$  muni de  $\rho_C$  est un espace localement convexe.

♣

**Définition 1.3.2** (Jauge de Minkowski). Soit  $X$  espace vectoriel réel ou complexe. On suppose que  $C$  tel que  $0 \in C$  est absorbant. Alors la jauge de Minkowski est définie comme suit :

$$\mu_C(x) = \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha C\}.$$

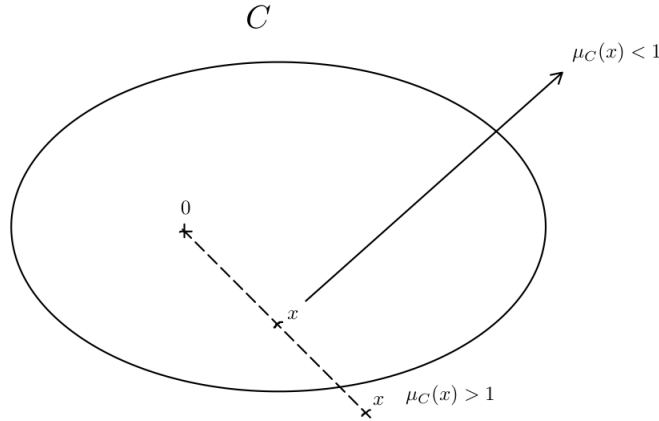


FIGURE 1.2 – La jauge de Minkowski

**Remarque.** Si  $C$  est absorbant, alors  $\forall x \in X, \mu_C(x) < \infty$ .

**Lemme.** Soit  $C \subset X$  absorbant tel que  $0 \in C$ .

- 1. Si  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu_C(\lambda x) = \lambda \mu_C(x)$  ;
- 2. Si  $C$  est convexe, alors  $\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$  ;
- 3. Si  $C$  est cerclé, alors  $\mu_C(\lambda x) = |\lambda| \mu_C(x)$  ;
- 4.  $\{x \in X, \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X, \mu_C(x) \leq 1\}$ .

### 1.3.1 Théorème de Hahn-Banach

Il y a la forme analytique et la forme géométrique de ce théorème.

**Théorème 1.3.2** (De Hahn-Banach, forme analytique). Pour simplifier, on prend  $X$  espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

- ★  $\forall x \in X, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$  ;
- ★  $\forall x, y \in X, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

Soient  $Y$  un sous espace vectoriel de  $X$  et  $l$  une forme linéaire sur  $Y$  qui vérifie

$$\forall x \in Y, l(x) \leq p(x), \forall x \in Y.$$

Alors (prolongement) il existe  $L$  forme linéaire sur  $X$  telle que  $L|_Y = l$  et

$$\forall x \in X, L(x) \leq p(x).$$

On l'applique aux espaces vectoriels normés, espaces localement convexes,...

**Théorème 1.3.3** (Norme sur un espace dual). Soit  $X$  espace vectoriel normé,  $X'$  formes linéaires continues sur  $X$ ,  $X'$  est un espace vectoriel normé. La norme sur  $X'$  est définie de la façon suivante :

$$\|L\|_{X'} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle L, x \rangle| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle L, x \rangle|}{\|x\|}.$$

**Exercice 2.** Montrer que  $\|\cdot\|_{X'}$  est une norme.

Si  $X$  est un espace vectoriel normé complet (de Banach), alors  $X'$  l'est aussi.

**Corollaire** (Prolongement isométrique de  $l$  sur  $Y$ ). Soit  $X$  espace vectoriel normé,  $Y \subset X$  sous espace vectoriel de  $X$  et  $l \in Y'$  avec

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in Y}} |\langle l, y \rangle|.$$

Alors il existe un prolongement  $L$  de  $l$  de même norme

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle l, x \rangle| = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \leq 1}} |\langle l, y \rangle|.$$

*Démonstration.* Par le théorème de Hahn-Banach, on pose  $p$  telle que  $p(x) = \|l\|_{Y'} \|x\|$  (l'application définie ainsi vérifie les propriétés de  $p$  nécessaires à l'application du théorème).

Par Hahn-Banach, il existe  $L$  une forme linéaire sur  $X$  telle que

$$L(x) = \langle L, x \rangle \leq p(x) = \|l\|_{Y'} \|x\|.$$

Mais

$$\langle L, -x \rangle \leq \|l\|_{Y'} \| -x \|,$$

donc

$$|\langle L, x \rangle| \leq \|l\|_{Y'} \|x\|.$$

Ainsi, en divisant par  $\|x\|$ , on obtient le résultat suivant :

$$\forall x \in X, \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'}.$$

Or si on prend  $x \in Y$ ,

$$\left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|_{Y'} = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right|.$$

Comme  $Y \subset X$  (ce qui entraîne que  $\sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right| \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left| \left\langle L, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right|$ ), on a donc égalité, d'où l'isométrie. ♣

**Corollaire.**  $\forall x_0 \in X$  espace vectoriel réel, il existe  $L_0 \in X'$ ,  $\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X$ .

*Démonstration.*  $Y = \mathbb{R}x_0$ . Soit  $l(tx_0) \stackrel{\text{déf}}{=} t\|x_0\|^2$  forme linéaire continue sur  $Y$ .

Alors, en posant  $t = 1$ , on obtient

$$\|l\|_{Y'} = \|x_0\|$$

et, par le théorème de Hahn-Banach,

$$\|L_0\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

♣

**Exercice 3.** Traduire Hahn-Banach dans le cas où  $X$  est un espace localement convexe.

**Théorème 1.3.4** (De Hahn-Banach, forme géométrique). Soit  $X$  espace vectoriel normé (ou espace localement convexe). Soient  $A, B \subset X$  convexes et disjoints.

1. On suppose que  $A$  est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine (d'équation  $\langle L, x \rangle = \text{constante}$ )  $\mathcal{H}$  qui sépare au sens large  $A$  et  $B$ .
2. Si  $A$  est fermé,  $B$  est compact, alors il existe  $\mathcal{H}$  hyperplan qui sépare  $A$  et  $B$  au sens strict.

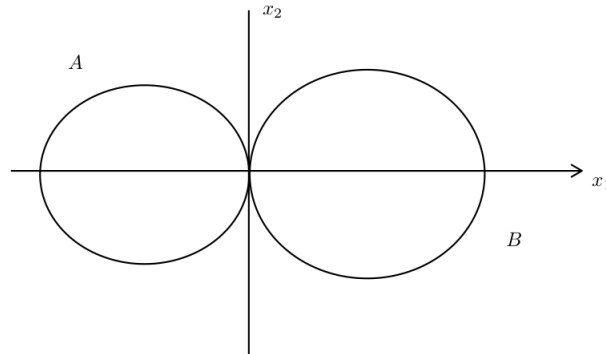


FIGURE 1.3 –  $A = \{x_1 < 0\}$ ,  $B = \{x_2 \geq 0\}$ ,  $\mathcal{H} = \{x_1 = 0\}$ .

## 1.4 Espaces de Fréchet, topologies faible et faible \*

### 1.4.1 Topologies définies par une distance

26-09-2023

On rappelle la définition 1.1.3.

**Définition 1.4.1** (Distances équivalentes). On dit que  $d_1$  est équivalente à  $d_2$  si et seulement si il existe  $C > 0$  tel que

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y).$$

$d_1 \sim d_2 \implies (X, d_1) \simeq (X, d_2)$ , mais la réciproque est fausse.

**Exemple.** On prend un espace métrique  $(X, d)$  avec les distances

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta'(x, y) = \inf(1, d(x, y)).$$

Ces distances sont équivalentes entre elles.

*Démonstration.*

1. Montrons que  $(X, d) \sim (X, \delta')$ . On remarque d'abord que

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq d(x, y),$$

ce qui veut dire que  $(X, d) \prec (X, \delta)$  (car si  $\mathcal{O}$  est un ouvert pour  $\delta$ , alors il le sera forcément pour  $d$ ).

Prenons

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}. \quad (1.2)$$

La fonction  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0, 1]$ . En effet, montrons qu'il existe  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $g \circ f = f \circ g = \text{id}$ .

On a

$$\frac{t}{1 + t} = s \implies t = ts + s \implies t = \frac{s}{1 - s}.$$

Donc  $d(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{1 - \delta(x, y)}$ . Donc si  $d(x, y) < \varepsilon$ , alors  $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ . Donc  $(X, \delta) \prec (X, d)$ .

2. Montrons que  $\delta \sim \delta'$ .

On a

$$\delta = \frac{d}{1 + d} \leq \begin{cases} 1 \\ \delta. \end{cases}$$

En effet, cela vient du fait que  $\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \xrightarrow{d(x, y) \rightarrow \infty} 1$ . Donc

$$\delta(x, y) \leq \delta'(x, y).$$

Mais  $\delta' \leq 2\delta$ . En effet, on distingue deux cas :

- (a) Si  $\delta \leq 1$  et  $\delta' = d$ , alors  $d \leq 2d$ ,

(b) Si  $\delta \geq 1$  et  $\delta' = 1$ , alors  $1 \leq 2d$ .

3. Montrons que  $\delta$  est une distance.

(a) Montrons l'inégalité triangulaire. Si  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , montrons que  $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ .

Est-ce que  $f(d(x, y)) \leq f(d(x, z)) + f(d(z, y))$ , avec  $f$  définie dans 1.2 ?

i.  $f$  est croissante, donc  $f(d(x, y)) \leq f[d(x, z) + d(z, y)]$ . Il suffit de voir que  $f(t) \leq f(u) + f(v)$ .

ii. Montrons la sous-additivité de  $f$ . Posons

$$v \mapsto \varphi(v) = f(u + v) - f(u) - f(v).$$

On a  $\varphi(0) = 0$ , car  $f(0) = 0$  et  $\varphi(v) = f'(u + v) - f'(v) < 0$ , car  $f$  est une fonction croissante.



*Sous quelles conditions un espace localement convexe est métrisable ?*

On remarque par exemple que  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus généralement, les topologies faibles ne sont pas métrisables, sauf si on travaille en dimension finie. Par ailleurs,  $X$  muni de la topologie grossière n'est pas métrisable (non séparée).

**Proposition 1.4.1.** Soit  $X$  un espace localement convexe (donc séparé). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1.  $X$  est métrisable.
2. Il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans  $X$ , et ce pour tout  $x \in X$ .
3. La topologie de  $X$  est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.

*Démonstration.* 1. (1)  $\implies$  (2). La topologie sur  $X$  est équivalente à  $(X, d)$ . Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Il suffit de poser

$$\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \mid d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\} \quad (\mathbb{R} \text{ est archimédien}).$$

Alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists n$  tel que  $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}} \subset \mathcal{O}_\varepsilon$ . Donc  $x + \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}$  est une base dénombrable de voisinages de  $x$ .

2. (2)  $\implies$  (3). On sait que  $\mathcal{T}$  topologie de  $X$  est donnée par une famille de semi-normes. Les voisinages de 0 dans  $X$  sont donnés par

$$\mathcal{O}_{a, \varepsilon} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_{\varepsilon, a_i}, \text{ avec } i \in \{1, \dots, n\}.$$

On rappelle que  $\mathcal{O}_{\varepsilon, a_i} = \{x \mid \rho_{a_i} < \varepsilon\}$ .

On peut choisir  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . On sait qu'il existe une base dénombrable de voisinages de 0 dans  $X$ . Soit  $U_n$  une base de voisinages dénombrable de 0. On pose

$$\rho_n(x) = \mu_{U_n}(x).$$

On prend les  $U_n$  convexes, balancés, absorbants comme dans le théorème 1.3.1 (c'est possible, car  $X$  est un espace localement convexe).

3. (3)  $\implies$  (1).



(a) Soit  $(\rho_n)$  une famille dénombrable de semi-normes sur  $X$ . On pose

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)}.$$

Montrons que  $(X, \text{ELC}) \prec (X, d)$ . Soit  $U \in \mathcal{T}$  (la topologie ELC). On se ramène aux voisinages de 0. On a

$$U = \bigcap_{\text{finie}} \mathcal{O}_{\varepsilon, a}, a \in A.$$

Comme il existe une base dénombrable de voisinages, on peut choisir

$$U_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^N \{x \mid \rho_j(x - 0) < \varepsilon\}, \text{ avec } A = \mathbb{N}.$$

Ce voisinage est inclus dans  $\{x \mid \sum \rho_j(x - 0) \leq N\varepsilon\}$ .

Montrons que  $U$  est un voisinage de  $x$  pour la topologie métrique  $(X, d)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $d(x, 0) = \left(\sum_1^N + \sum_{N+1}^\infty\right) \frac{\rho_n}{1 + \rho_n}$ . Or  $N$  est tel que

$$\sum_{N+1}^\infty 2^{-n} < \varepsilon \implies \sum_{N+1}^\infty 2^{-n} \frac{\rho_n}{1 + \rho_n} < \varepsilon.$$

De plus,

$$d(x, y) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{1 + d_n} < \varepsilon + \sum_{n=1}^N d_n(x, y). \quad (1.3)$$

Or  $\rho_n(x - y) < \varepsilon$ , car  $x \in y + U_\varepsilon$ .

Donc 1.3 devient

$$d(x, y) \leq \varepsilon + N\varepsilon \text{ avec } N \text{ fixé.}$$

Donc  $\mathcal{T} \prec (X, d)$ .

(b) Montrons que  $(X, d) \prec \mathcal{T}$ . On doit majorer  $\rho_m(x - y)$ .

Or

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)} \geq 2^{-m} \frac{\rho_m(x - y)}{1 + \rho_m(x - y)}.$$

Et

$$2^m d(x, y) \geq \frac{\rho_m(x - y)}{1 + \rho_m(x - y)} \geq f(t).$$

Donc on a  $\rho_m(x, y) \leq g(2^m d(x, y))$ , où  $g$  est la réciproque de  $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ .



**Proposition 1.4.2.** Soit  $X$  un espace localement convexe qui vérifie l'une des propriétés énoncées dans la proposition 1.4.1 (i. e. métrisable). On note la topologie de  $X$  ELC par  $\mathcal{T}$ . Alors  $X$  est complet pour  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $(X, d)$  est complet.

*Démonstration.* Cette proposition se démontre exactement comme 1.4.1. ♣

**Définition 1.4.2.** Soit  $X$  un espace localement convexe. On dit que  $X$  est un **espace de Fréchet** si  $X$  est **métrisable et complet**.

**Exemple.**

1. *Les espaces localement convexes qui ne sont pas des Fréchet.*
  - (a) *Non métrisables.*  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence simple, les topologies faibles, ...
2. *Les espaces localement convexes qui sont des Fréchet.* Les espaces de Banach, par exemple  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence uniforme,  $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ , ...

### 1.4.2 Espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \iff \rho_{\alpha, \beta}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} |x^\alpha D_\varphi^\beta| < \infty.$$

Montrons que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est complet. On va regarder  $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \dots$

1.  $\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon$ , donc  $\varphi_p \rightarrow \varphi$ , donc

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| < \varepsilon.$$

En particulier pour tout  $K \subset \mathbb{R}$ ,  $\varphi_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^0(K)$ . Or  $\mathcal{C}^0(K)$  est complet, donc  $\varphi_n \xrightarrow{\text{uniformément}} \varphi$ . Comme  $K$  est arbitraire, elle converge localement sur tout  $\mathbb{R}$ . On a

$$\rho_{0,0}(\varphi_{p+q} - \varphi_p) < \varepsilon,$$

donc

$$\rho_{0,0}(\varphi - \varphi_p) < \varepsilon.$$

Donc  $\varphi_p$  converge pour  $\rho_{0,0}$ .

2. On a besoin de rappeler le lemme suivant :

**Lemme.** Si  $\varphi' \rightarrow \psi$  uniformément et  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  simplement, alors  $\psi = \varphi'$ .

### 1.4.3 Topologie forte et topologie faible sur les espaces de Banach

10-10-2023 Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach (réel ou complexe) et  $(E', \|\cdot\|')$  son dual topologique. On rappelle que

$$E' = \{l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists C > 0, \forall x \in E, |\langle l, x \rangle| \leq C \|x\|^2\},$$

avec la norme sur le dual définie dans 1.3.3.

$(E', \|\cdot\|')$  est un espace de Banach, un cas particulier de  $\mathcal{L}(E, F)$ , avec pour  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F.$$

On affaiblit  $(E, \|\cdot\|)$ . Alors  $\sigma(E, E')$  est la topologie la moins fine qui rend continue toutes les formes linéaires sur  $E$ .  $X \sim \sigma(E, E')$  est muni des semi-normes  $|\langle l, x \rangle| = \rho_l(x)$ . Un voisinage de 0 est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_{\underline{l}, \varepsilon} = \{x \in E : \sup_{1 \leq i \leq n} \langle l_i, x \rangle < \varepsilon\}, \underline{l} = (l_1, \dots, l_n).$$

1.4.4 Comparaison des topologies  $(E, \|\cdot\|)$  et  $\sigma(E, E')$ 

**Lemme.** Soit  $E$  un espace de Banach. Alors la norme définie

$$x = \sup_{\substack{l \in E' \\ \|l\|' \leq 1}} |\langle l, x \rangle| = \langle l_0, x \rangle.$$

est telle que le sup est atteint. On a  $\sup = \max$ .

*Démonstration.* On a  $x \neq 0$  par la définition de  $\|\cdot\|'$ . Alors

$$\left| \left\langle l, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|l\|' \leq 1.$$

Alors

$$|\langle l, x \rangle| \leq \|x\| \text{ pour tout } l \in E' \text{ tel que } \|l\|' \leq 1.$$

Soit  $x_0$  et  $F$  tel que  $F = \mathbb{R}x_0$ . Alors  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, l_0(\lambda x_0) = \lambda$  et  $\|l_0\| = \|x_0\|$ . Par Hahn-Banach, on peut prolonger  $l_0$  en  $L_0$  sur tout l'espace de Banach. ♣

**Proposition 1.4.3.**

$$(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E').$$

Donc  $X \sim \sigma(E, E')$  est un espace localement convexe.

*Démonstration.* On a

$$\rho_l(x) = |\langle l, x \rangle| \leq \|l\|' \|x\|.$$

♣

*Autre démonstration.* Montrons que  $\mathcal{O}_{l,\varepsilon}$  est un ouvert de  $(E, \|\cdot\|)$ , i. e.  $\|x\| < \delta$ . On prend  $n$  formes linéaires  $l_i, i \in \{1, \dots, n\}$  et on considère

$$\|x\| = \sup_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x \rangle|.$$

Or  $|\langle l_i, x \rangle| < \varepsilon \dots$  (à suivre). ♣

*Démonstration.* Montrons que  $\sigma(E, E')$  est séparé. Soient  $x_1, x_2$  distincts. Montrons qu'il existe  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  de  $\sigma(E, E')$  tels que  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ .

Par le théorème de Hahn-Banach 1.3.4, pour  $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$  compacts et convexes, pour tout  $(x, y) \in A \times B$ , on a

$$\langle l, x \rangle < \alpha < \langle l, y \rangle.$$

Donc

$$\langle l, x_1 \rangle < \alpha < \langle l, x_2 \rangle.$$

On a  $x_1 \in \mathcal{O}_{\alpha,l}^1 = \{x : \langle l, x \rangle < \alpha\}$  et  $\mathcal{O}_{\alpha,l}^2 = \{y : \langle l, y \rangle > \alpha\}$ , ces ouverts séparent  $x_1$  et  $x_2$ . ♣

**Théorème 1.4.1.**  $(E, \|\cdot\|)$  est strictement plus fine que  $\sigma(E, E')$  sauf en dimension finie.

*Démonstration.* On considère  $S = \{\|x\| = 1\}$ . Alors  $S = \overline{S}$ , son adhérence.

Soit  $x_0$  de norme plus petite que 1. Montrons que pour tout  $V$  voisinage de 0 dans  $\mathcal{T}$ ,  $V \cap S \neq \emptyset$ . On a

$$V = \{x : |\langle l_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}.$$

Comme  $\dim(E) = \infty$ , il existe  $y_0 \neq 0$  tel que  $\langle l_i, y_0 \rangle = 0, \forall i$ . On a

$$g(t) = \|x_0 + ty_0\|.$$

On a  $g(0) = \|x_0\| < 1$  et  $g(\infty) = +\infty$ . La fonction  $g$  est continue, donc il existe  $t_0 \in (0, \infty)$  tel que  $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$ . Donc  $x_0 + t_0 y_0 \in S$  et  $x_0 + t_0 y_0 \in V$ , car

$$|\langle l_i, (x_0 + t_0 y_0) - x_0 \rangle| = |\langle l_i, t_0 y_0 \rangle| = |t_0 \langle l_i, y_0 \rangle| = 0 < \varepsilon.$$



**Remarque.**  $\forall t \in \mathbb{R}, \langle l_i, x_0 + ty_0 \rangle = 0$ . Alors  $V$  contient toute une droite.

**Remarque.** Pour  $E$  Banach séparable,  $B_E$  boule unité fermée de  $(E, \|\cdot\|)$  est métrisable pour  $\sigma(E, E')$ .

Si  $E$  est réflexif (c'est-à-dire que l'injection naturelle dans son bidual est surjective), alors  $B_E = \{\|x\| \leq 1\}$  est un espace métrique compact pour  $\mathcal{O}(E, E')$ .

**Exemple** (Wikipédia). On considère la convergence forte et la convergence faible dans l'espace  $L^2$  (qui est un espace de Hilbert d'après 2.2.5). La convergence forte de  $\psi_n$  vers un élément  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  signifie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_n - \psi|^2 d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La notion de convergence forte dans  $L^2$  correspond à celle de la norme dans  $L^2$ . En revanche, pour que la suite  $\psi_n$  converge faiblement, il suffit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_n} f d\mu \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi} f d\mu$$

pour toute fonction  $f \in L^2$ . Par exemple, dans  $L^2((0, 2\pi))$ , la suite de fonctions

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$$

forme une base orthonormée. La limite forte de  $\psi_n$  n'existe pas. Mais par le lemme de Riemann-Lebesgue, la limite faible existe et vaut 0.

### 1.4.5 Théorème de Banach-Steinhaus, suites faiblement et fortement convergentes

**Théorème 1.4.2.** Soient  $E, F$  espaces de Banach et  $(T_a)_{a \in A} \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$\forall x \in E, \sup_{a \in A} \|T_a x\|_F < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{a \in A} \|T_a\| < +\infty \text{ (bornée en norme),}$$

i. e.  $\exists C > 0, \forall x \in E, \forall \alpha \in A, \|T_\alpha(x)\| \leq C \|x\|$ .

**Corollaire.** Soit  $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\|T_n\| < +\infty$  avec  $\forall x \in E, T_n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y \in F$ . On note  $y = Tx$ . Alors  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $T = \liminf T_n$ .

*Démonstration.* Montrons que  $T_n$  est linéaire. En effet,

$$T_n(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T_n(x) + \lambda' T_n(x').$$

Par passage à la limite, on obtient  $T(\lambda x + \lambda' x') = \lambda T(x) + \lambda' T(x')$ .

Montrons l'autre partie du corollaire. Par Banach-Steinhaus, si on considère  $A = \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in E$ ,  $T_n x$  est convergente, donc bornée, i. e.  $\|T_n x\| < \infty$ , donc  $\sup_n \|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\|$ .

Par passage à la limite, on obtient  $\|Tx\| \leq C \|x\|$ , avec  $C = \liminf_n \|T_n\|$ . ♣

**Définition 1.4.3.** Soit  $E$  espace de Banach.  $B \subset E$  est bornée si et seulement si

$$\exists C \geq 0, \forall x \in B, \|x\| \leq C.$$

**Corollaire.**  $B \subset E$  est bornée si et seulement si  $\forall l \in E', l(B) \subset \mathbb{R}$  est borné.

### 1.4.6 Suites faiblement et fortement convergentes

**Définition 1.4.4** (Suite fortement convergente). Soit  $x_n$  une suite de  $E$ . On dit que  $x_n$  est fortement convergente lorsque  $x_n \rightarrow x \iff \|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

**Définition 1.4.5** (Suite faiblement convergente). Soit  $x_n$  une suite de  $E$ . On dit que  $x_n$  est faiblement convergente lorsque  $x_n \rightarrow x \iff \forall l \in E', \langle l, x_n \rangle \rightarrow \langle l, x \rangle$ .

On note alors  $x_n \xrightarrow{w} x$  (avec *weak* qui signifie faible en anglais) ou  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Corollaire.**

1. Si  $x_n \rightarrow x$  dans  $(E, \|\cdot\|)$ , alors  $x_n \rightarrow x$  dans  $\sigma(E, E')$ .
2. Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_n$  est bornée dans  $E$  et  $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|$ .
3. Si  $x_n \rightarrow x$  et  $l_n \rightarrow l$ , alors  $\langle l_n, x_n \rangle \rightarrow \langle l, x \rangle$ .

*Démonstration.*

1. Soit  $l \in E'$ . Alors

$$|\langle l, x_n - x \rangle| \leq \|l\|' \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.  $T_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors on définit

$$T_n l = \langle l, x_n \rangle \rightarrow \langle l, x \rangle = Tl,$$

car  $x_n$  tend faiblement vers  $x$ . Alors d'après le corollaire,  $\sup \|T_n\| < \infty$ , avec  $T \in (E')' = E''$  et  $\|T\|'' \leq \liminf \|x_n\|$ , donc  $|Tl| = |\langle l, x \rangle|$  par passage à la limite.

- 3.

$$\langle l_n, x_n \rangle - \langle l, x \rangle = \langle l, x_n - x \rangle + \langle l, x_n - x \rangle.$$

Or  $\langle l, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ , car  $x_n \rightarrow x$  et  $\langle l, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ , car  $|\langle l_n - l, x_n \rangle| \leq \|l_n - l\| \|x_n\| \rightarrow 0$ .



### 1.4.7 Topologie faible \*

13-10-2023 On considère  $E$  espace de Banach avec  $(E, \|\cdot\|) \prec \sigma(E, E')$ . On construit la topologie  $*\sigma(E', E)$  une topologie sur  $E'$ .

La topologie forte sur  $E' = F$  est donnée par la norme

$$\|l\|' = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle l, x \rangle|.$$

Sur  $E$ , on a aussi  $\sigma(F, F') = \sigma(E', E'')$ . Si  $E = E''$  (i. e.  $E$  est réflexif), alors la topologie  $\sigma(E', E'')$  se confond avec la topologie faible  $\sigma(E, E')$ . Par contre, si  $E$  s'injecte dans  $E''$ , on a besoin de définir une autre topologie  $*\sigma(E', E)$  moins fine que  $\sigma(E', E'')$ .

**Proposition 1.4.4.** Il existe une isométrie  $J : E \hookrightarrow E''$ .

*Démonstration.* On définit une application  $J : E \rightarrow E''$  telle que

$$\langle Jx, x' \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle x', x \rangle.$$

Montrons que  $\|Jx\|' = \|x\|$ .

On a besoin d'introduire le résultat suivant :

**Lemme.**

$$\|x\| = \sup_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x \rangle| = \max_{\|l\|' \leq 1} |\langle l, x \rangle|.$$

Donc  $\|Jx\| = \|x\|$  en prenant

$$\sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} |\langle x', x \rangle| = \|x\|.$$



**Remarque.**  $J$  n'est pas unitaire (non surjectif si  $E$  n'est pas réflexif).

**Exemple.** On considère  $E = L^1$ . Soit  $f \in L^1$ , alors  $Jf \in L^\infty$  et on a :

$$\langle Jf, g \rangle = \langle g, f \rangle = \int g(x)f(x)dx \quad (f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}).$$

Mais  $g(0)$  ne peut pas s'écrire comme une intégrale  $\int g(x)f(x)dx, \forall f \in L^1$  si  $g \in C_0^0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty$ .

**Proposition 1.4.5.**  $*\sigma(E', E)$  est séparée.

*Démonstration.* Soient  $l_1, l_2 \in E'$  tels que  $l_1 \neq l_2$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $l_1(x) \neq l_2(x)$ , donc

$$\langle l_1, x \rangle \neq \langle l_2, x \rangle,$$

ce qui implique que  $\langle l_1, x \rangle < \alpha < \langle l_2, x \rangle$ .

On a  $\mathcal{O}_1 = \{l \in E' : \langle l, x \rangle < \alpha\}$  ouvert de  $E'$  et  $\mathcal{O}_2 = \{l \in E' : \langle l, x \rangle > \alpha\}$ . ♣

**Remarque.** Pour  $x$  fixé, l'application  $l \mapsto |\langle l, x \rangle|$  semi-norme de  $E'$ .

**Proposition 1.4.6** (Autres propriétés).  $*\sigma(E', E)$  n'est pas métrisable.

**Remarque.**  $E$  est séparable et réflexif si et seulement si  $E'$  est séparable et réflexif.

**Théorème 1.4.3.** Si  $E$  est un Banach séparable, alors la boule unité fermée

$$B_E = \{\|l\| \leq 1\}$$

est métrisable pour  $*\sigma$ .

**Proposition 1.4.7.** Soit  $\xi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$  avec  $(\xi \in E'')$ . Si  $\xi$  est continue pour  $*\sigma(E, E')$ , il existe  $x \in E, \xi = Jx$  et

$$\langle \xi, l \rangle = \langle l, x \rangle.$$

**Théorème 1.4.4** (De représentation de Rieczy). Si  $\xi \in \mathcal{H}' = \mathcal{H}$ , alors

$$\forall l \in \mathcal{H}, \langle \xi, l \rangle = \langle l, x \rangle.$$



## CHAPITRE 2

## THÉORIE DE DISTRIBUTIONS

La théorie de distributions utilise une grande variété des fonctions test.

17-10-2023

Ainsi une mesure de Radon  $\mu$  sur un espace localement compact  $\Omega$  (par exemple un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ) est une distribution d'ordre 0 agissant  $\mathcal{C}_0^0$  (noté encore  $\mathcal{K}(\Omega)$ ) notamment par

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x).$$

L'exemple le plus couramment utilisé d'une distribution d'ordre 0 est la mesure de Dirac  $\delta_{x_0}$ .

Sur  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , il suffit de prendre l'espace de Schwarz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  qui est un espace de Fréchet. Par contre si  $\Omega$  est un ouvert borné, il y a des problèmes sur les bords de  $\Omega$ .

Les distributions d'ordre 1 agissent quant à elles par  $\langle \delta'_{x_0}, f \rangle = -f'(x_0)$  dans  $\mathcal{C}_0^1$  qui ne sont ni des espaces de Banach, ni des espaces de Fréchet. On choisit généralement  $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$ .

Les espaces fonctionnels sont rangés en deux catégories :

- Les espaces de Lebesgue ;
- Les espaces de fonctions différentiables.

△

### 2.1 Espaces de Lebesgue

#### 2.1.1 Mesure de Lebesgue

Il est important de rappeler la notion d'espace mesuré.

**Définition 2.1.1** (Rappel : tribu). Soit  $X$  un ensemble. On dit qu'une collection d'ensembles  $\mathcal{T}$  est une tribu si

1.  $X \in \mathcal{T}$  et  $\emptyset \in \mathcal{T}$  ;
2. Si  $A \in \mathcal{T}$ , alors  $A^C \in \mathcal{T}$  ;
3. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\mathcal{T}$ , alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

On dit que  $(X, \mathcal{T})$  est un espace mesurable.

**Remarque.**  $\mathcal{T}$  est aussi stable par intersection dénombrable, l'intersection étant complémentaire à la réunion...

**Définition 2.1.2** (Mesure). Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable. On dit qu'une application  $\mu : X \rightarrow [0, \infty)$  est une mesure si :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$  ;
2. Pour toute suite  $(A_n)$  de  $\mathcal{T}$  disjointe, on a

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit alors que  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  est un espace mesuré.

**Exemple.** Pour  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{T}$  est la tribu borélienne engendrée par les pavés  $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ , avec  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . On peut aussi l'engendrer par les “quadrants”  $\prod_{i=1}^d [a_i, \infty)$ .

La mesure de Lebesgue se calcule comme suit. Si  $d = 1$ , alors  $\mu([a, b]) = b - a$ . Pour les pavés, on aura :

$$\mu \left( \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Elle se caractérise par le fait d'être stable par translation.

Pour avoir une théorie cohérente, il faut compléter  $B(\mathbb{R}^d) \rightarrow \overline{\mathcal{T}}$  (la tribu borélienne) en ajoutant des ensembles négligeables. Ainsi  $\overline{\mathcal{T}}$  est la plus petite tribu contenant  $\mathcal{T}$  et les ensembles négligeables.

**Définition 2.1.3.**  $A \in \mathbb{R}^d$ , i. e.  $A$  est mesurable si et seulement si  $A \in \overline{\mathcal{T}}$ .

**Remarque.** A toute fin utile, on considérera que tous les ensemble sont mesurables.

*Comment mesurer les fonctions  $\mu(F)$  ?*

On peut utiliser :

- L'intégrale de Riemann ;
- L'intégrale de Lebesgue.

### 2.1.2 Intégrale des fonctions positives

Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace normé mesuré.

**Définition 2.1.4** (Fonction mesurable). On dit que  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  est mesurable si pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ .

**Proposition 2.1.1** (Axiomes). Il existe une application définie sur l'ensemble mesurable des fonctions mesurables positives de  $\mathbb{R}^d$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , notée  $f \longmapsto \int f(x)dx$  qui réalise les propriétés suivantes :

1. *Linéarité* : pour tous  $\alpha, \beta \geq 0$ , on a

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

2. *Croissance* : si  $\forall x, f(x) \leq g(x)$ , alors

$$\int f(x)dx \leq \int g(x)dx.$$

3. *Normalisation* : pour tout pavé  $A = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ , on a

$$\int \mathbf{1}_A(x)dx = \mu(A).$$

4. *Théorème de Beppo-Levi (ou de convergence monotone)* : si  $(f_n)$  est une suite croissante de fonctions mesurables, alors

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)dx}_{\int f(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)dx \leq +\infty. \quad (2.1)$$

Au lieu d'intégrer  $f$  sur tout  $\mathbb{R}$ , on peut l'intégrer seulement sur la partie où elle est mesurable en posant :

$$\int_A f(x)dx = \int f(x)\mathbf{1}_A(x)dx.$$

**Théorème 2.1.1.** On peut calculer l'intégrale  $\int_A f(x)dx$  de toute fonction mesurable positive par :

$$\int_A f(x)dx = \sup \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \mu(A \cap \{f_i \geq t_i\})$$

où le sup est pris sur toutes les subdivisions finies sur l'axe des  $y$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N}$  et dont le pas tend vers 0.

**Proposition 2.1.2.** Si  $f$  est à valeurs positives, alors

$$\int f(x)dx = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.}$$

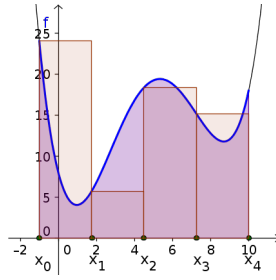


FIGURE 2.1 – Subdivisions et sommes de Riemann

*Démonstration.* Posons  $A = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ . Alors  $f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{1}_A(x)$  si  $\mu(A) = 0$ . On obtient par 2.1 :

$$\int f(x) dx \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A dx = 0.$$

Réciproquement, si  $\int f(x) dx = 0$ , alors on remarque que  $\mathbf{1}_A(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(x)$  et on a encore par 2.1 :

$$\mu(A) = \int_A \mathbf{1}_A(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int f(x) dx = 0.$$

♣

25-10-2023

**Théorème 2.1.2** (Δ De convergence dominée ou de Lebesgue). Soit  $(f_n) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  une suite de fonctions (avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est définie presque partout sauf sur  $E = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)$  de mesure nulle. S'il existe  $h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  telle que  $|f_n| \leq h$  et si  $f_n \rightarrow f$  presque partout sur  $\Omega$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx,$$

ce qui équivaut à dire que  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ .

**Remarque.** Si  $f_n$  est continue sur  $K \subset \Omega$  et  $f_n \rightarrow f$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

## 2.2 Espaces $L^p$ ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) comme espaces de Banach

On définit l'espace  $\mathcal{L}^1 \rightarrow L^1$ . On dit que  $f \sim g$  si et seulement si  $f = g$  presque partout (i. e.  $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ ). C'est une relation d'équivalence. On définit l'espace quotient  $L^1 = \mathcal{L}^1 / \sim$ . On montre que  $L^1$  est complet.

On note  $\dot{f} \in L^1$ ,  $\dot{f}$  est un représentant de la classe de  $f$ . Ainsi on peut définir la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^1$  par :

$$\widehat{\dot{f}}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

mais la même écriture n'a pas de sens dans  $L^2$ .

**2.2.1 Les espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$** 

**Théorème 2.2.1.** L'espace  $L^1$  est complet, muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int |f(x)| dx.$$

Cela veut dire que c'est un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit  $f_n$  une suite de Cauchy dans  $L^1$ . On peut lui associer une série

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(f_{i+1} - f_i).$$

Montrons que  $f_n$  converge. Il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite  $f_{n_k}$  qui converge. On peut toujours écrire :

$$f_n - f = \underbrace{f_n - f_{n_k}}_{< \varepsilon} + \underbrace{f_{n_k} - f}_{< \varepsilon}.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, p \geq N, q \geq 0, \|f_{p+q} - f_p\|_{L^1} < \varepsilon.$$

A extraction près d'une sous-suite, on peut supposer que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1} < \varepsilon.$$

On pose  $g_m(x) = \sum_{n=1}^{m-1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ . Pour tout  $x$ , la suite  $(g_m(x))_m$  est croissante (car on rajoute un terme positif) et elle est définie presque partout. Par Beppo-Levi, on a

$$\int g(x) dx = \int \lim_{m \rightarrow \infty} g_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m(x) dx.$$

Or on a

$$\int g_m(x) dx = \sum_{n=1}^{m-1} \int |f_{n+1}(x) - f_n(x)| dx.$$

C'est une série absolument convergente, car  $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$ . On a alors

$$\int g(x) dx < +\infty$$

et en particulier  $g(x) < +\infty$  presque partout.

Donc  $f_m(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} f_{n+1}(x) - f_n(x)$  définit une série numérique absolument convergente, donc  $f_m(x) \xrightarrow[p.p.]{} f(x)$ . Il reste à montrer que  $f \in L^1$ . On a :

$$|f_m(x)| \leq |f_1(x)| + g_m(x) \leq |f_1(x)| + g(x) = h(x) \in L^1.$$

Par Lebesgue, on a  $\lim \int f_m = \int f$ , avec  $f \in L^1$ . On a donc  $\|f_m - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ . ♣

**Théorème 2.2.2.**  $L^p$  est aussi un Banach et ce pour tout  $p \in [1, \infty)$ .

*Démonstration.* On utilise l'inégalité de Minkowski :

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad (2.2)$$

La démonstration est la même que pour  $L^1$ . ♣

**Corollaire.** Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p$ , alors il existe une sous-suite  $f_{n_k}$  qui converge presque partout vers  $f$ .

*Démonstration.* Comme avant, on peut supposer que  $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$ . On pose

$$f_m(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

C'est une série normalement convergente dans  $L^p$ . Par le raisonnement précédent, on détermine que  $f_m(x) \xrightarrow[p.p.]{} f$ . ♣

**Théorème 2.2.3.** Soit  $\mathcal{K}(\Omega)$ , l'espace de fonctions continues à support compact dans  $\Omega$ . Alors  $\mathcal{K}(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$  pour tout  $p \in [1, \infty)$ .

*Démonstration.* Brézis, théorème 4.12. ♣

## 2.2.2 Espace $L^\infty$

**Théorème 2.2.4.**  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach.

**Définition 2.2.1.** On définit la norme dans l'espace  $L^\infty$  de la façon suivante :

$$\|f\|_\infty = \text{supess } |f|.$$

Pour tout  $C > \text{supess}(f)$ , on a  $\mu(\{x : f(x) > C\}) = 0$ . Si  $f$  est continue, on a  $\text{supess } f = \sup f$ .

*Démonstration.* Soit  $f_n$  une suite de Cauchy dans  $L^\infty(\Omega)$ . On prend  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ . Pour tout  $k$ , il existe  $N(k)$  tel que  $\forall n, m \geq N(k)$ , on a  $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$ .

Montrons que  $f_n$  converge vers  $f \in L^\infty$ . Donc il existe  $E_k$  négligeable tel que  $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$  pour tout  $x \notin E_k$ . On a que  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$  est de mesure nulle. Pour tout  $x \in E$ , la suite numérique  $f_n(x)$  est de Cauchy, donc elle converge vers  $f(x)$  (partout). On a donc

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},$$

donc  $\|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{k}$  avec  $f \in L^\infty$ .



### 2.2.3 Espace $L^2$

**Théorème 2.2.5.**  $\mathcal{H} = L^2$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$(u | v) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

L'espace  $L^2$  est engendré par une base orthonormée (*base hilbertienne*), i.e. il existe une suite  $(e_j)_j$  telle que, pour tout  $f \in L^2$ , on a

$$f = \sum_j f_j e_j, f_j \in \mathbb{C}.$$

**Proposition 2.2.1** (Egalité de Parseval). On a pour tout  $f \in L^2$  :

$$\|f\|_2^2 = \sum_j |f_j|^2.$$

## 2.3 Espaces $L^p$ comme ELC

### 2.3.1 $L^1(\Omega)$ , avec $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^d$

C'est un espace de Banach muni de la norme  $\|f\|_{L^1}$ . C'est aussi un espace localement convexe muni de la famille de semi-normes  $(\rho_{a,r})_{a \in \Omega, r > 0}$  définies par

$$\rho_{a,r}(f) = \int_{B(a,r)} |f(x)| dx.$$

**Proposition 2.3.1.**  $(E, (\rho_{a,r}))$  est séparé.

*Démonstration.* Si  $f \neq g$  presque partout, alors

$$\rho_{a,r}(f - g) = \int_{B(a,r)} |f(x) - g(x)| dx \neq 0.$$

Donc il existe  $E$  de mesure strictement positive tel que  $\forall x \in E, g(x) \neq f(x)$ . Or  $E$  est partout dense dans  $\Omega$  pour la mesure de Lebesgue. On a alors

$$\int_{B(a,r)} |f - g| = \int_{E \cap B(a,r)} |f - g| > 0.$$



**2.3.2**  $E = L^\infty$ 

On le munit de la famille de semi-normes

$$\rho_{a,r}(f) = \sup_{B(a,r)}(|f|).$$

**Proposition 2.3.2.**  $E = L^\infty(\Omega)$  est séparé, mais non séparable.

**2.3.3** Espaces duaux de  $L^p$ 

**Théorème 2.3.1** (De Riesz). On a  $(L^2)' = L^2$  (l'espace dual de  $L^2$  est lui-même), i. e. toute forme linéaire  $l \in (L^2)'$  s'écrit comme  $\langle l, u \rangle = (v | u)$  où  $v \in L^2$ .

**Théorème 2.3.2** (Riesz-Fischer). Le dual de  $L^1$  est  $L^\infty$ .

*Démonstration.* Brézis, p. 63.



**Remarque.** Par contre on n'a pas  $(L^\infty)' \neq L^1$ .

27-10-2023

**Corollaire.** Soit  $f \in L^p$ . Si pour tout  $\varphi \in K(\Omega)$ ,  $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ , alors  $f = 0$  presque partout.

**Théorème 2.3.3.** L'espace  $L^1$  est séparable. Plus généralement,  $L^p$  est séparable pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .

*Démonstration.* On prend un représentant  $\dot{f}$  de  $f \in L^1$ . Si  $f$  est positive, on a

$$\int_A f(x)dx = \sup_{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} (t_{i+1} - t_i) \mu(A \cap \{x : f(x) \leq t_i\}),$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. On a alors

$$f = \lim \sum_i c_i \mathbb{1}_{\{f \leq t_i\}} = \lim \sum_t (t_{i+1} - t_i) \mathbb{1}_{B_i}(t).$$

On peut prendre  $t_i \in \mathbb{Q}$ . Alors la famille

$$\sum_i (t_{i+1} - t_i) \mathbb{1}_{B_i}(t)$$

est partout dense dans  $L^1$ , avec  $B_i$  des boréliens de  $\Omega$ . Ceci achève la démonstration.





**Théorème 2.3.4.** L'espace  $L^1(\Omega)$  n'est pas réflexif.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. On pose  $E = L^1$  et on suppose qu'il est réflexif. On a alors, par le théorème 2.3.2,  $E' = L^\infty$ .

Soit  $B_E$  la boule unité de  $E$  (pour la topologie de Banach, mais aussi valable pour  $\sigma(E, E')$ ). Comme  $L^1$  est séparable, la boule unité  $B_E$  pour la topologie faible est compacte. Donc de toute suite de  $B_E$  on peut extraire une suite convergente (pour la topologie faible). On prend

$$f_n(x) = \frac{1}{|B(a, \frac{1}{n})|} \mathbb{1}_{B(a, \frac{1}{n})}.$$

On a  $\int f_n = 1$  pour  $f_n \in B_E$ . On extrait  $f_{n_k}$  convergeant vers  $f \in B_E$ . Alors pour tout  $\phi \in L^\infty = E'$ , on a  $\int f_{n_k} \phi \rightarrow \int f \phi$ . On choisit  $\phi \in K(\Omega \setminus \{a\})$ . Donc

$$\int f_{n_k}(x) \phi(x) dx = 0.$$

Par le corollaire 2.3.3,  $f = 0$  p. p. dans  $\Omega \setminus \{a\}$ . Donc  $f = 0$  p. p. dans  $\Omega$ , car  $\mu(\{a\}) = 0$ . Cela aboutit à une contradiction, car pour  $\phi = \mathbb{1}_\Omega \in L^\infty$ , on a

$$0 = \int f \phi = \int \frac{1}{|B(a, \frac{1}{n})|} \mathbb{1}_{B(a, \frac{1}{n})} = 1.$$

♣

**Remarque.**  $E$  est réflexif et séparable si et seulement si  $E'$  est réflexif et séparable. Comme  $E = L^1$  n'est pas réflexif,  $E' = L^\infty$  n'est pas réflexif. En fait il n'est ni réflexif ni séparable.

**Proposition 2.3.3.**  $L^\infty$  n'est pas séparable.

**Lemme.** Soit  $E$  un espace de Banach. S'il existe  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ,  $I$  non dénombrable,  $\mathcal{O}_i$  ouverts deux-à-deux disjoints, alors  $E$  n'est pas séparable.

*Démonstration.* Une fois de plus on raisonne par l'absurde. Soit  $(u_n)$  une suite partout dense dans  $E$  telle que  $\forall i \in I, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset$  (on utilise l'axiome du choix  $u_n \in \mathcal{O}_i$ ). Comme les  $\mathcal{O}_i$  sont disjoints,  $i \mapsto n(i)$  est injective, donc  $I$  est dénombrable, ce qui aboutit à une contradiction. ♣

**Théorème 2.3.5.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Alors

1.  $L^\infty(\Omega)$  n'est pas séparable;
2.  $L^\infty(\Omega)$  n'est pas réflexif;
3. La boule unité de  $L^\infty(\Omega)$  est métrisable est compacte pour  $*(L^\infty, L^1)$ .

## 2.4 Exemple fondamental : convergence d'une suite de $L^1$ vers la mesure de Dirac

**Théorème 2.4.1.** Il existe  $f_n \in L^1$  telle que  $\forall \phi \in K(\Omega)$ ,

$$\int f_n(x)\phi(x)dx \longrightarrow \phi(x_0).$$

## CHAPITRE 3

# FONCTIONS TRONCATURE ET PARTITION DE L'UNITÉ : CAS CONTINU

En théorie de distributions, on déduit souvent une “propriété globale” à partir d’une “propriété locale”. Ceci se fait par une sorte de “copié-collé” par des partitions de l’unité. 07-11-2023

### 3.1 Les fonctions troncature

**Proposition 3.1.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Soient  $F$  et  $G$  deux fermés disjoints de  $X$ . Alors il existe une fonction continue  $\chi \in \mathcal{C}^0(X)$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$  et  $\chi \equiv 0$  près de  $F$  et  $\chi \equiv 1$  près de  $G$ .

*Démonstration.* En deux étapes.

1. On construit  $\chi_1 \equiv 0$  sur  $F$  et  $\chi_1 \equiv 1$  sur  $G$ . On définit  $\chi : X \longrightarrow [0, 1]$ , avec  $\chi_1(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$ . La continuité de  $\chi$  résulte du fait que  $x \mapsto d(x, F)$  est continue. On a de plus  $\chi_1|_F = 0$  et  $\chi_1|_G = 1$ .

Considérons  $F_1 = \chi^{-1}([0, \frac{1}{3}]) \supset F$  et  $G_1 = \chi^{-1}([\frac{2}{3}, 1]) \supset G$ . On a  $F_1 \cap G_1 = \emptyset$ . On applique la construction précédente à  $F_1$  et  $G_1$  qui sont des voisinages **fermés** de  $F$  et de  $G$ .



**Lemme.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $K \subset X$  un compact. Soit  $(U_j)_{1 \leq j \leq N}$  un recouvrement ouvert de  $K$ . Alors il existe  $K_j \subset U_j \subset X$  compact,  $1 \leq j \leq N$  tel que  $K \subset \bigcup_{j=1}^N K_j$ .

*Démonstration.* On remarque que  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$  où  $B_x$  est une boule ouverte de centre  $x$ . Cela entraîne

que  $K \subset \bigcup_{k=1}^p B_{x_k}$ .

On considère  $A_j = \{l \in \{1, \dots, p\}, \widetilde{B_{x_l}} \subset U_j\}$  où  $\widetilde{B_{x_l}}$  est une boule fermée de même centre et de même rayon que  $B_{x_l}$ .

**Remarque.**  $\overline{B_{x_l}} \subset \widetilde{B_{x_l}}$ , mais l'inclusion est stricte en général.

Si  $(X, d) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , on a  $\overline{B_{x_l}} = \widetilde{B_{x_l}}$ . On pose  $K_j = K \cap \left( \bigcup_{l \in A_j} \widetilde{B_{x_l}} \right)$ , alors  $K_j$  est compact (tout fermé dans un espace séparé est compact). ♣

**Théorème 3.1.1.** Soit  $K \subset \bigcup U_j$  compact. Alors il existe  $\varphi_j \in \mathcal{K}(X)$  tels que  $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$  et  $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$  près de  $K$ , avec  $0 \leq \varphi_j \leq 1$ . On dit que les  $\varphi_j$  forment une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de  $K$  par un nombre fini d'ouverts  $U_j$ .

*Démonstration.* Soient  $K_j$  des compacts comme dans le lemme 3.1. Pour chaque  $j \in \{1, \dots, N\}$ , on peut trouver une fonction continue  $\psi_j : X \rightarrow [0, 1]$  égale à 1 près de  $K_j$  et égale à 0 sur  $U_j^C$ . On pose

$$V = \left\{ x \in X, \sum_{j=1}^N \psi_j(x) > 0 \right\}$$

ouvert de  $X$ , donc  $V^C$  est fermé. On applique la proposition 3.1.1 à  $K$  et  $V^C$ . Il existe donc  $\psi_0$  continue avec  $\psi_0 \equiv 0$  près de  $K$  et  $\psi_0 \equiv 1$  près de  $U^C$ , car  $K \subset U$ .

On pose

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=0}^N \psi_k(x)}.$$

La fonction  $\psi_j$  est dans  $\mathcal{K}(X)$  et  $\sum_{j=1}^N \varphi_j = \frac{\sum_{j=1}^N \psi_j}{\psi_0 + \sum_{j=1}^N \psi_j} \equiv 1$  près de  $K$ , car  $\psi_0 \equiv 0$  près de  $K$ . ♣

**Application : recollement d'une famille de  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$**  Ce sont l'ensemble de fonctions intégrables seulement sur un compact. On a  $L^p(X) \subset L^1_{\text{loc}}(X)$ . On a

$$\int_K |f| = \int \mathbb{1}_K(x) |f(x)| dx = \|\mathbb{1}_K\|_q \|f\|_p = |K|^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

**Proposition 3.1.2.** Soient  $U_j \subset \mathbb{R}^d$  des ouverts,  $\Omega_{j \in I} U_j, f_j \in L^1_{\text{loc}}(U_j)$  avec  $f_i = f_j$  sur  $U_i = U_j$ . Alors il existe  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  telle que  $f = f_j$  sur  $U_j$ .

*Démonstration.* On va montrer qu'il existe  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  telle que  $\forall g \in L^\infty_{\text{comp}}(\Omega)$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx.$$

♣

## CHAPITRE 4

## FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

### 4.1 Rappels de calcul différentiel

10-11-2023

**Définition 4.1.1.** Soit  $\Omega \in \mathbb{R}$  ouvert. On dit que  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si  $f$  admet des dérivées partielles continues.

Si  $x_0 \in \Omega$ ,  $f'(x_0)$  est la différentielle de  $f$  en  $x_0$  telle que

$$\langle f'(x_0), y \rangle = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_i.$$

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  si et seulement si  $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  pour tout  $j$ . La matrice hessienne de  $f$  en  $x_0$  est

$$\text{Hess}(f) = \left( \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Par le théorème de Schwarz, elle est symétrique.

Par récurrence, on définit les fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Omega).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  est une algèbre.

**Proposition 4.1.1** (Composition). Soient  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\Phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Alors  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_2), f \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$  et on a

$$(f \circ \Phi)'(x_0) = \underbrace{f'(\Phi(x_0))}_{\in \mathcal{M}_{1 \times d_2}} \cdot \underbrace{\Phi'(x_0)}_{\in \mathcal{M}_{d_2 \times d_1}}.$$

**Exercice 4.** Calculer  $((f \circ \Phi)')(x)$ .

**Formule de Taylor avec reste intégral** Pour  $d = 1$ , on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)dy = f(0) + \left( \int_0^1 f'(tx)dt \right) x.$$

**Remarque.** Si  $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $g = \int_0^1 f'(tx)dx$  n'est plus dans  $C_0^1(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.1.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, a \in \Omega$  et  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Alors on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x-a)^\alpha + m \sum_{|\alpha|=m} \frac{(x-a)^2}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \partial^\alpha f(a + t(x-a)) dt.$$

On a  $\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$  et  $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$ .

**Remarque** (Formule d'Hadamard). Pour  $m = 1$  et  $\alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$ , on a

$$f(x) = \sum_{j=0}^d (x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t(x-a)) dt.$$

## 4.2 Classification des $\mathcal{C}^m(\Omega)$ , régularité, support

Soit  $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$  compact. On définit

$$C_K^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega), \text{ supp}(f) \subset K\}.$$

On rappelle que  $\text{supp}(f) = \text{adh}\{x \mid f(x) = 0\}$  (l'ensemble des valeurs où la fonction ne s'annule pas).

Les espaces localement convexes sont munis d'une famille de semi-normes qui leur confère une structure des espaces de Fréchet.

**Exemple.**

★ Pour  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ , on a

$$\rho_{n,\alpha:|\alpha| \leq m} = \sup_{K_n} |\partial^\alpha f(x)|$$

où  $K_n$  est une suite exhaustive de compacts avec  $K_n \subset K_{n+1}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$ .

★ Pour  $C_h^m(\Omega), f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$  bornées, on a

$$\|f\| = \sum_{|\alpha| < m} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

C'est une norme sur un espace de Banach.

★ On considère  $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_K C_K^\infty(\Omega)$  espace localement convexe.

**Remarque.**

$$\sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left( \sup_{|x| > \nu, |\alpha| \leq m_\nu} \frac{|\partial^\alpha \varphi(x)|}{\varepsilon_\nu} \right).$$

$\varepsilon_\nu$  est une suite de réels et elle tend vers 0.

...

On prend  $\mathcal{D}(\Omega) \neq \{0\}$ .

**Lemme.** Soit  $B(a, r) \subset \Omega, a \in \Omega, r > 0$ . Soit  $\Phi_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B(a, r) \\ \exp\left(-\frac{1}{r^2 - |x-a|^2}\right) & \text{si } x \in B(a, r). \end{cases}$$

Alors  $\Phi_a \in C_{B(a,r)}^\infty(\Omega)$ . Elle est dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Soit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  telle que

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est connu que  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

On construit

$$\Phi(x) = \psi(r^2 - |x-a|^2).$$

Alors  $\Phi_a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $\text{supp } \Phi_a \subset B(a, r)$  par construction. ♣

**Lemme.** Il existe une fonction  $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  croissante telle que

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

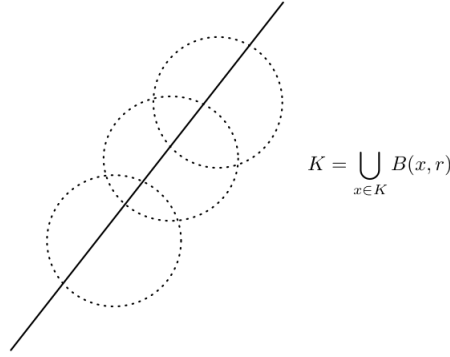
*Démonstration.* On pose  $g(t) = \psi(t)\psi(1-t) \in C_{[0,1]}^\infty(\mathbb{R})$  et on pose

$$\Psi(t) = \frac{\int_{-\infty}^t g(s) ds}{\int_0^1 g(s) ds}.$$

♣

### 4.3 Partitions de l'unité différentiables

**Lemme.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert et  $K \subset \Omega$  compact. Alors il existe une fonction  $f : \Omega \rightarrow [0, 1], f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $f \equiv 1$  au voisinage de  $K$ .

FIGURE 4.1 – Recouvrement de  $K$ 

*Démonstration.* On applique le lemme 4.2. On pose

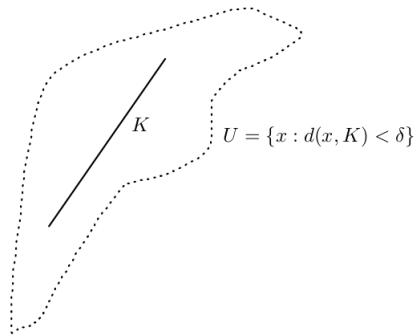
$$\Phi_x(y) = \exp\left(\frac{1}{r^2 - |y - x|^2}\right) \times 2 \exp\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

On a  $\Phi_x(x) = 2$ .

$x \in V_x = \{y : \Phi_x(y) > 1\}$  un ouvert. Les  $V_x$  recouvrent  $K$ . On peut extraire un sous-recouvrement fini  $V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$ . On pose

$$h = \sum_{j=1}^N \Phi_{x_j}, h \in C_0^\infty(\Omega), h \geq 1 \text{ près de } K.$$

Alors  $f = \psi \circ h$  répond à la question. ♣

FIGURE 4.2 – On prend  $K$  et  $U$  définis ainsi.

*Démonstration par régularisation des convolutions.* Soit  $g = \mathbf{1}_U$  et  $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ . Posons  $\Phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors  $\text{supp } \Phi_1 \subset B(0, 1)$ .

Posons  $\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \Phi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . On a  $\text{supp}(\Phi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$ .

On a

$$f(x) = f_\varepsilon(x) = \int \mathbf{1}_U(y) \Phi_\varepsilon(x - y) dy = \mathbf{1}_U \star \Phi_\varepsilon.$$

On remarque que  $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ . La convolution  $f \star g$  hérite de la meilleure régularité. On a  $\text{supp}(f \star g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ .

Donc  $\text{supp}(f_\varepsilon) \subset U + B(0, \varepsilon) \subset K + B(0, \delta) + B(0, \varepsilon) \subset K + B\left(0, \frac{3\delta}{2}\right)$ .



Montrons que  $\text{supp } f_\varepsilon \subset K + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ . Alors

$$f_\varepsilon(x) = \int \mathbf{1}_U(y) \Phi_\varepsilon(x - y) dy = 0 \text{ pour } d(x, U) > \varepsilon.$$

Montrons que  $f_\varepsilon(x) = 1$  pour  $d(x, U) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Cela implique que

$$\int \mathbf{1}_U(y) \Phi_\varepsilon(x, y) dy = \int \Phi_\varepsilon(x - y) dy = \int \Phi_\varepsilon(z) dz = 1.$$

Montrons que  $f_\varepsilon(x) \leq 1$ . C'est vrai car  $\mathbf{1}_U(y) \in [0, 1]$  et on a

$$\int \mathbf{1}_U(y) \Phi_\varepsilon(x - y) dy \leq \int \Phi_\varepsilon(x - y) dy = 1.$$



Ce lemme aboutit au théorème suivant.

**Théorème 4.3.1.** Soit  $K \in \mathbb{R}^d$  un compact recouvert par une union fini d'ouverts  $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$ . Alors il existe  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$  et  $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$  près de  $K$ .