

# THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Yves AUBRY, M-147A, [yves.aubry@univ-tln.fr](mailto:yves.aubry@univ-tln.fr), Joachim ASCH

2023-2024



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Représentations linéaires des groupes finis</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Généralités sur les groupes</b>	<b>7</b>
1.1	Rappels . . . . .	7
1.2	Exemples de groupes . . . . .	8
1.2.1	$(\mathbb{Z}, +)$ . . . . .	8
1.2.2	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	8
1.3	Groupe diédral . . . . .	9
1.3.1	Description du groupe $D_3$ . . . . .	10
1.4	Les théorèmes de Sylow . . . . .	11
1.4.1	Groupes agissant sur un ensemble ou action de groupes . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Représentations linéaires des groupes finis</b>	<b>17</b>
2.1	Premières définitions . . . . .	17
2.1.1	Sous-représentations . . . . .	20
2.2	Théorème de Maschke . . . . .	20
2.3	Caractère d'une représentation . . . . .	22
2.4	Orthogonalité des caractères irréductibles . . . . .	24



Première partie

# Représentations linéaires des groupes finis



# Chapitre 1

## Généralités sur les groupes

### 1.1 Rappels

Soit  $G$  un groupe. Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  (i. e.  $H \neq 0$  et  $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$ ).

Considérons la relation binaire suivante sur  $G$  :

Pour  $x, y \in G$ ,  $x \equiv_d y \pmod H$  ssi  $xy^{-1} \in H$ . C'est une relation d'équivalence. Elle est dite de congruence à gauche modulo  $H$ .

*Démonstration.* En effet, si  $x \in G$ , alors  $xx^{-1} = e \in H$ , donc  $x \pmod_g = x \pmod H$ . La relation est donc réflexive.

De plus, si  $x, y \in G$  tels que  $x \equiv_g y \pmod H$ , alors  $xy^{-1} \in H$ .  $H$  étant un sous-groupe de  $G$ , il est donc stable par passage au symétrique. D'où  $(xy^{-1})^{-1} \in H$ , i. e.  $yx^{-1} \in H$ , c'est-à-dire  $y \equiv_g x \pmod H$ .

Enfin, si  $x, y, z \in G$  tels que  $x \equiv_g y \pmod H$  et  $y \equiv_g z \pmod H$ , alors  $xy^{-1} \in H$  et  $yz^{-1} \in H$ . Or,  $H$  étant un sous-groupe de  $G$ , donc  $H$  est stable pour la loi de composition interne. D'où  $(xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$ . Par associativité,  $x(yy^{-1})z^{-1} \in H$ , ie  $xz^{-1} \in H$ .

Donc  $x \equiv_g z \pmod H$  et la relation est transitive.  $\square$

Soit  $x \in G$ . La classe d'équivalence de  $x$  pour cette relation d'équivalence est

$$\begin{aligned} cl_d(x) &= \{y \in G \mid xy^{-1} \in H\} \\ &= \{y \in G \mid \exists h \in H, xy^{-1} = h\} \\ &= \{y \in G \mid \exists h \in H, y = hx\} \\ &= \{hx, h \in H\} =: Hx \end{aligned}$$

De même, on considère, sur  $G$ , la relation de congruence à gauche modulo  $H$  :

$$x \equiv_g y \pmod H \text{ ssi } x^{-1}y \in H.$$

On montre de même que c'est une relation d'équivalence. Si  $x \in G$ , alors  $cl_g(x) := xH = \{xh, h \in H\}$ .

**Remarque.** Si  $G$  est abélien, alors les classes à gauche et à droite modulo  $H$  coïncident.

**Définition 1.1.1.** Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est dit distingué dans  $G$  (ou normal) si :

$$\begin{aligned} &\forall x \in G, xH = Hx, \\ \text{i. e. } &\forall x \in G, xHx^{-1} \subset H \\ \text{i. e. } &\forall x \in G, xHx^{-1} = H. \end{aligned}$$

On note alors  $H \triangleleft G$ .

**Remarque.** Tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué.

**Proposition 1.1.1.** Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ .

On note  $G/H$  l'ensemble des classes à droite ou à gauche modulo  $H$ .

Si  $x, y \in G$  et si l'on note  $\bar{a}$  la classe de  $a$  modulo  $H$ , on peut munir le quotient  $G/H$  d'une structure de groupe en posant

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}.$$

*Démonstration.* Cette loi est bien définie, i. e. elle ne dépend pas du choix des représentants des classes d'équivalence.  $\square$

**Remarque.** Cette loi de la surjection canonique  $\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/H \\ x & \longmapsto & \bar{x} \end{array}$  un morphisme de groupes.

**Théorème 1.1.1** (Lagrange). Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

Alors l'ordre de  $H$  divise l'ordre de  $G$ .

**Remarque.** L'ordre d'un groupe est simplement son cardinal.

**Remarque.** Si  $g$  est un élément de  $G$ , alors l'ordre de  $G$  est défini comme l'ordre du sous-groupe  $\langle g \rangle$  engendré par  $g$ . S'il est fini, alors l'ordre de  $g$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $g^n = e$ .

D'après le théorème de Lagrange, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

**Remarque.** Si  $G$  est un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ , alors les classes (à gauche) modulo  $H$  ont toutes le même cardinal, à savoir celui de  $H$ . En effet, l'application, pour  $x \in G$  :  $f_x : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & xH \\ h & \longmapsto & xh \end{array}$  est bijective.

## 1.2 Exemples de groupes

### 1.2.1 $(\mathbb{Z}, +)$

Groupe abélien.

$n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque.** Tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $n\mathbb{Z}$  pour un certain  $n\mathbb{Z}$ .

### 1.2.2 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

C'est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence suivante :

$$x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod{n\mathbb{Z}} \text{ ssi } x - y \in n\mathbb{Z}.$$

**Remarque.**  $\bar{x} = \bar{y}$  ssi  $xRy$ .

On munit l'ensemble quotient  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'une structure de groupe (et même d'anneau) en posant, pour  $x, y \in \mathbb{Z}$  :  $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$  (et  $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$ ).

**Remarque.**  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  anneau non intègre, car  $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$ .



**Remarque.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $n$  est premier.

**Proposition 1.2.1.** Tous les groupes  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont cycliques. Les générateurs sont les  $\bar{a}$  tels que  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux, i. e.  $(a, n) = 1$ . De plus, tout groupe cyclique est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  avec  $n = |G|$ .

Enfin, si  $G$  est cyclique d'ordre  $n$  alors pour tout diviseur  $d$  de  $n$ ,  $G$  admet un sous-groupe d'ordre  $d$ , et celui-ci est unique, et celui-ci est cyclique.

**Remarque.**  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{(\bar{a}, \tilde{a}), \bar{a} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tilde{a} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ .

**Théorème 1.2.1** (Théorème des restes chinois). Soient  $n_1, \dots, n_r$  des entiers premiers entre eux deux à deux. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/\prod_{i=1}^r n_i \mathbb{Z} &\longrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z} \\ a + (\prod_{i=1}^r n_i) \mathbb{Z} &\longmapsto (a + n_1 \mathbb{Z}, \dots, a + n_r \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux et la réciproque est vraie.

19-09-2023

## 1.3 Groupe diédral

Soit  $n \geq 3$  un entier. Le groupe diédral de degré  $n$  est le groupe des isométries du plan laissant fixe le polygone régulier à  $n$  côtés. On le note  $D_n$  (ou  $D_{2n}$ ).

$D_n$  est un groupe d'ordre  $2n$  constitué de  $n$  rotations et de  $n$  symétries.

Considérons le polygone régulier dont les sommets sont, dans le plan complexe, les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

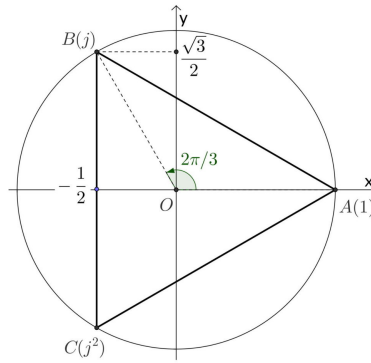


FIGURE 1.1 – Racines 3-ièmes de l'unité.

Soit  $r = \text{rot}(0, \frac{2\pi}{n})$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  et soit  $s$  la symétrie axiale d'axe la droite réelle  $(x, x)$ .

On a

$$r : \begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} z \end{aligned}$$

et

$$s : \begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned} .$$

On vérifie que l'on a  $r^n = 1 = id$ ,  $s^2 = 1 = id$  et  $rs = r^{-1}$ .

*Démonstration.* En effet, si  $z \in \mathbb{C}$ , alors

$$r^{-1}(z) = e^{-\frac{2i\pi}{n}} z \text{ et } srs(z) = sr(\bar{z}) = s\left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \bar{z}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{n}} z = r^{-1}(z),$$

donc  $srs = r^{-1}$ . □

On peut donc définir le groupe diédral  $D_n$  par “générateurs et relations” de la façon suivante :

$$D_n = \langle r, s \rangle \text{ avec } r^n = s^2 = 1 \text{ et } srs = r^{-1}.$$

Le sous-groupe de  $D_n$  engendré par  $r$  est un sous-groupe d'ordre  $n$  :

$$\langle r \rangle = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}, id\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Il est d'indice 2 dans  $D_n$ , il est donc distingué dans  $D_n$ .

### 1.3.1 Description du groupe $D_3$

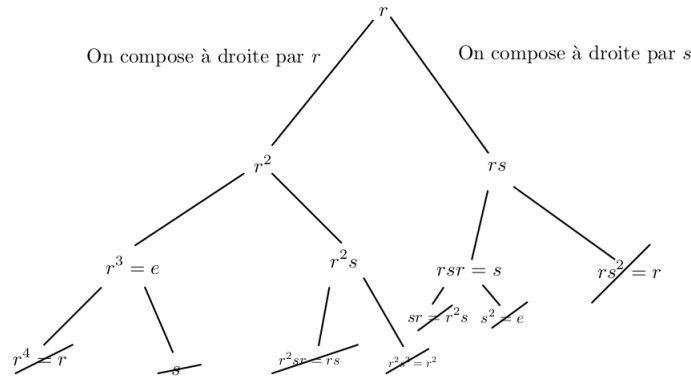


FIGURE 1.2 – Description explicite des éléments de  $D_3$ .

On a donc

$$D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$$

**Remarque.** Il n'existe que deux groupes d'ordre 6 à isomorphisme près, à savoir le groupe cyclique (abélien)  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et le groupe symétrique (non abélien)  $\mathfrak{S}_3$ .

Or  $D_3$  n'est pas abélien, donc  $D_3$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ .

**Exercice 1.** Déterminer l'ordre des éléments de  $D_3$  ainsi que ses sous-groupes.

**Exemple** (Groupe quaternionien). Soit  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions d'Hamilton.

$$\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid i^2 = j^2 = k^2 = 1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \text{ et } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{H}$  est un corps non commutatif. On  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ .

Considérons le sous-ensemble suivant de  $\mathbb{H}$  :

$$\mathbb{H}_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

**Exercice 2.** Montrer que  $\mathbb{H}_8$  muni de la multiplication est un groupe.

C'est un groupe non abélien d'ordre 8.

**Exercice 3.** Déterminer l'ordre des éléments de  $\mathbb{H}_8$  ainsi que ses sous-groupes.

**Théorème 1.3.1** (De classification des groupes abéliens finis). *Tout groupe **abélien** fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques de la forme*

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}, \text{ avec } d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r.$$

*Cette écriture est unique (à l'ordre près des facteurs).*

**Rappel** On en déduit qu'il existe trois groupes abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près :

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ et } (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3.$$

Question : a-t-on  $\mathbb{H}_8 \simeq D_4$  ?

## 1.4 Les théorèmes de Sylow

Si  $H$  est un sous-groupe d'un groupe  $G$ , ses **conjugués** dans  $G$  sont  $gHg^{-1}$ , avec  $g \in G$ . En particulier,  $H$  est distingué dans  $G$  si et seulement si il est égal à tous ses conjugués.

**Définition 1.4.1.** *Si  $G$  est un groupe fini d'ordre  $p^\alpha q$ , avec  $p$  premier,  $\alpha \geq 1$  et  $q$  premier avec  $p$ , alors tout sous-groupe de  $G$  d'ordre  $p^\beta$  est appelé un  $p$  sous-groupe de Sylow de  $G$  (ou encore un  $p$ -Sylow de  $G$ ).*

**Théorème 1.4.1** (Premier théorème de Sylow). *Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^\alpha q$ ,  $p$  premier,  $\alpha \geq 1$ ,  $(p, q) = 1$ . Pour tout  $1 \leq \beta \leq \alpha$ , il existe un sous-groupe de  $G$  d'ordre  $p^\beta$ .*

**Théorème 1.4.2** (Deuxième théorème de Sylow). *Le nombre  $n_p$  de  $p$ -Sylow de  $G$  vérifie :*

$$\begin{cases} n_p \equiv 1 \pmod{p} \\ n_p \mid q. \end{cases}$$

**Théorème 1.4.3** (Troisième théorème de Sylow).

1. *Le conjugué d'un  $p$ -Sylow est un  $p$ -Sylow.*
2. *Tous les  $p$ -Sylow sont conjugués entre eux.*

**Exercice 4.** *Montrer qu'il n'existe pas de groupes simples d'ordre 15.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe d'ordre  $3 \times 5 = 15$ . D'après le premier théorème de Sylow,  $G$  admet au moins un 3-Sylow.

Soit  $n_3$  le nombre de 3-Sylow de  $G$ . Par le deuxième théorème de Sylow, on a

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3} \text{ et } n_3 \mid 5.$$

$G$  admet donc un unique 3-Sylow  $H$ .

D'après le (1) du troisième théorème de Sylow, les conjugués de  $H$  sont des 3-Sylow de  $G$ , donc sont égaux à  $H$  puisque c'est le seul 3-Sylow de  $G$ . Donc  $H$  est égal à tous ses conjugués et donc  $H$  est distingué dans  $G$ . Puisque  $|H| = 3$ ,  $H \neq \{e\}$  et  $H \neq G$ . Donc  $G$  admet un sous-groupe distingué propre. Donc  $G$  n'est pas simple.  $\square$

### 1.4.1 Groupes agissant sur un ensemble ou action de groupes

**Définition 1.4.2** (Action de groupe). *Une action (à gauche) d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application*

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1.  $\forall x \in X, e \cdot x = x$  (où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ );
2.  $\forall g, g' \in G, \forall x \in X, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ .

On peut voir une action comme un morphisme de groupes de  $G$  dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_X$  de permutations dans  $X$  :

**Proposition 1.4.1.** *Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$  par*

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

alors pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\pi_g : \begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est une permutation de  $X$  et l'application

$$\pi : \begin{aligned} G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto \pi_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Réciproquement, si  $\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto p_g \end{aligned}$  est un morphisme de groupes, alors  $(g, x) \mapsto g \cdot x := p_g(x)$  est une action de  $G$  sur  $X$ .

*Démonstration.*

Supposons que  $G$  agisse sur un ensemble  $X$  par  $\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$ .

Soit  $g \in G$ . Considérons l'application  $\pi_g : \begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$ .

Montrons que  $\pi_g$  est injective. Soient  $x, y \in X$  tq  $\pi_g(x) = \pi_g(y)$ . D'où  $g \cdot x = g \cdot y$ . D'où  $g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot g \cdot y$ . D'où  $(g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot y$ . D'où  $e \cdot x = e \cdot y$ . Donc  $\pi_g$  est injective. Montrons que  $\pi_g$  est surjective. Soit  $y \in X$ . On a  $y = \pi_g(g^{-1}y) = g \cdot g^{-1} \cdot y$ . Donc  $\pi_g$  est surjective. Donc  $\pi_g$  est bijective.

On peut donc considérer l'application  $\pi : \begin{aligned} G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto \pi_g \end{aligned}$ .

Montrons que  $\pi$  est un morphisme de groupes. Montrons que  $\forall g, g' \in G, \pi_{gg'} = \pi_g \circ \pi_{g'}$ . Soient  $g, g' \in G$ . Soit  $x \in X$ .

$$\pi_{gg'}(x) = (gg') \cdot x = g \cdot g' \cdot x = g \cdot (\pi_{g'}(x)) = \pi_g(\pi_{g'}(x)).$$

Donc  $\pi_{gg'} = \pi_g \circ \pi_{g'}$ .

Réciproquement, si on se donne un morphisme de groupes d'un groupe  $G$  dans un groupe de permutations  $\mathfrak{S}_X$  :

$$p : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & p_g, \end{array}$$

alors l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x := p_g(x) \end{array}$$

est une action de groupes.

En effet,

1. Soit  $x \in X$ , on a  $e \cdot x = p_e(x) = id_X(x) = x$ , car  $p$  est un morphisme de groupes et l'image de l'élément neutre par un morphisme de groupes est l'élément neutre.
2. Soient  $g, g' \in G$  et soit  $x \in X$  ; on a

$$g \cdot (g' \cdot x) = g \cdot (p_{g'}(x)) = p_g(p_{g'}(x)) = (p_g \circ p_{g'})(x) = p_{gg'}(x) = (gg') \cdot x,$$

car  $p$  est un morphisme de groupes.

□

Cela établit deux bijections réciproques entre l'ensemble des actions de  $G$  sur  $X$  et celui des morphismes de  $G$  dans  $\mathfrak{S}_X$ .

**Définition 1.4.3.** Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$ , alors la relation sur  $X$  définie par : pour  $x, y \in X, x \sim y$  ssi  $\exists g \in G, y = g \cdot x$  est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de  $X$  pour cette relation s'appelle **l'orbite** de  $X$  :

$$Orb(x) := \{g \cdot x, g \in G\}.$$

Ainsi, l'ensemble des orbites forme une **partition** de  $X$ .

On dit que  $g$  agit **transitivement** s'il n'y a qu'une seule orbite.

Le **noyau** de l'action est le noyau du morphisme associé :

$$\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & \left( \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \pi_g : x & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{Ker}(\pi) = \{g \in G \mid \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

On dit que l'action est **fidèle** si son noyau est réduit à  $\{e\}$  (i. e. si le morphisme  $\pi$  est injectif).

Le **stabilisateur** (ou groupe d'isotropie) d'un élément  $x \in X$  est l'ensemble :

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

C'est un sous-groupe de  $G$  (en exercice).

**Proposition 1.4.2.** Pour  $x$  fixé dans  $X$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

définit une bijection de l'ensemble  $G/Stab(x)$  des classes à gauche modulo  $Stab(x)$  sur l'orbite de  $x$ . Ainsi, le cardinal de l'orbite  $Orb(x)$  est égal à l'indice du stabilisateur de  $x$  :

$$\#(Orb(x)) = [G : Stab(x)].$$

**Théorème 1.4.4** (Formule des classes). *Soit  $G$  un groupe fini agissant sur un ensemble fini  $X$ . Alors*

$$\#(X) = \sum_{\substack{x \text{ décrivant un système} \\ \text{des représentants des orbites}}} [G : Stab(x)].$$

*Démonstration.*

$$\#(X) = \sum_{i=1}^m \#(Orb(x_i)),$$

où  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est un système des représentants des orbites pour l'action de  $G$  sur  $X$ . □

**Exemple d'action de groupe** On fait agir un groupe  $G$  sur lui-même par conjugaison

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x := gxg^{-1}. \end{array}$$

C'est bien une action de groupes, car

1. Soit  $x \in G$ , on a  $e \cdot x = exe^{-1} = x$ .
2. Soient  $g, g' \in G$  et  $x \in G$ . On a :

$$g \cdot (g' \cdot x) = g \cdot (gxg^{-1}) = g(g'x(g')^{-1})g^{-1} = (gg')x((g')^{-1}g^{-1}) = (gg')x(gg')^{-1} = (gg') \cdot x.$$

*Cette action est-elle transitive, fidèle ? Quelle est l'orbite d'un élément ?*

Soit  $x \in G$ . L'orbite de  $x$  est :

$$Orb(x) = \{g \cdot x, g \in G\} = \{gxg^{-1}, g \in G\} = \text{classe de conjugaison de } x \text{ dans } G.$$

On a  $Orb(e) = \{e\}$ . Si  $G$  n'est pas réduit à  $\{e\}$ , il y a plusieurs orbites : l'action n'est donc pas transitive (il y a autant d'orbites que de classes de conjugaison).

*L'action est-elle fidèle ?* Etudions le noyau du morphisme  $\pi$  associé à cette action

$$\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_G \\ g & \longmapsto & \left( \pi_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array} \right). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\pi) &= \{g \in G \mid \pi_g = id_G\} = \{g \in G \mid \forall x \in G, \pi_g(x) = x\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\} = Z(G). \end{aligned}$$

L'action est fidèle si et seulement si le centre de  $G$  est réduit à l'élément neutre.

Soit  $x \in G$ . *Quel est le stabilisateur de  $x$  ?*

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} = \text{centralisateur de } x.$$

Etudions un exemple avec  $G = \mathfrak{S}_3$ . Les orbites de  $\mathfrak{S}_3$  pour cette action sont les classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_3$ . Elles constituent une partition de  $\mathfrak{S}_3$ .

1.  $Orb(e) = \{e\}$ .
2.  $Orb(\tau_3) = \{\sigma\tau_3\sigma^{-1}, \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{\text{transpositions de } \mathfrak{S}_3\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ .
3.  $Orb(\sigma_1) = \{\sigma\sigma_1\sigma^{-1}, \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{3\text{-cycles de } \mathfrak{S}_3\} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ .

La formule des classes s'écrit alors :

$$|\mathfrak{S}_3| = \sum [\mathfrak{S}_3 : Stab(x_i)],$$

où  $\{x_1, x_2, x_3\}$  est un système des représentants de l'orbite, avec  $x_1 = e, x_2 = \tau_1, x_3 = \sigma_1$ .  
On a

$$|\mathfrak{S}_3| = \sum_{i=1}^3 \#Orb(x_i) = \#Orb(x_1) + \#Orb(x_2) + \#Orb(x_3) = 1 + 3 + 2 = 6.$$

L'action est fidèle, car  $Z(\mathfrak{S}_3) = \{e\}$ . L'action n'est pas transitive, car il y a trois orbites, à savoir les trois classes de conjugaison.

$$Stab(e) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \mid \sigma e = e\sigma\} = \mathfrak{S}_3.$$

On a bien

$$[\mathfrak{S}_3 : Stab(e)] = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|Stab(e)|} = \frac{3!}{3!} = 1 = \#Orb(e).$$

On a  $[\mathfrak{S}_3 : Stab(\tau_3)] = \#Orb(\tau_3) = 3$ , donc  $|Stab(\tau_3)| = 2$ . D'où

$$Stab(\tau_3) = \{\text{permutations de } \mathfrak{S}_3 \text{ qui commutent avec } \tau_3\} = \{e, \tau_3\}.$$

On a  $[\mathfrak{S}_3 : Stab(\sigma_1)] = \#Orb(\sigma_1) = 2$ , donc  $|Stab(\sigma_1)| = 3$ . Puisque l'indice du stabilisateur est 2, on en déduit que  $Stab(\sigma_1) \triangleleft \mathfrak{S}_3$ . Or les seuls sous-groupes distingués de  $\mathfrak{S}_n$  sont  $\{e\}$ ,  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathfrak{A}_n$ . Donc

$$Stab(\sigma_1) = \mathfrak{A}_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}.$$





## Chapitre 2

# Représentations linéaires des groupes finis

Théorie introduite par Frobenius à la fin du XIX siècle.

### 2.1 Premières définitions

**Définition 2.1.1.** Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  est la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  muni d'une action de groupes (à gauche) de  $G$  agissant de manière linéaire :

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1.  $\forall x \in V, e \cdot x = x$  ;
2.  $\forall g, g' \in G, \forall x \in V, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$  ;
3.  $\forall g \in G, \forall x, x' \in V, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}, g \cdot (\lambda x + \lambda' x') = \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x$ .

Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  est donc la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et d'un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \left( \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right) \end{aligned}$$

où  $GL(V)$  est le groupe des automorphismes du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$ .

On a bien  $\forall g, g' \in G, \rho_{gg'} = \rho_g \circ \rho_{g'}$  et  $\rho_e = id_V$  et  $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$  comme vu précédemment.

De plus,  $\forall g \in G$ , la bijection  $\rho_g$  est un endomorphisme de  $V$ , i. e. une application linéaire de  $V$  dans  $V$  et donc  $\rho_g \in GL(V)$ . En effet, si  $x, x' \in V$  et  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ , alors

$$\rho_g(\lambda x + \lambda' x') = g \cdot (\lambda x + \lambda' x') \stackrel{(3)}{=} \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x' = \lambda \rho_g(x) + \lambda' \rho_g(x').$$

**Définition 2.1.2.** L'espace vectoriel  $V$  est appelé **l'espace de la représentation**.

La dimension de  $V$  (en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) est appelé le **degré** ou la dimension de la représentation.

Lorsque  $\rho$  est injectif, la représentation est dite **fidèle** ; le groupe  $G$  se représente alors de manière concrète comme un sous-groupe de  $GL(V)$  ; lorsque  $V$  est de dimension finie (ce que nous allons

supposer dorénavant), le choix d'une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  fournit alors une représentation encore plus concrète comme groupe de matrice.

**Remarque** (Personnelle). Si  $\rho$  est une représentation fidèle, alors

$$\text{Ker}(\rho) = \{g \in G \mid \forall x \in V, g \cdot x = x\} = \{e\}.$$

**Remarque.** Soient  $G$  un groupe fini et  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation (linéaire) de  $G$ . Soit  $g \in G$  un élément d'ordre  $n$ . On a alors

$$(\rho_g)^n = \rho_{g^n} = \rho_e = \text{id}_V.$$

Donc l'endomorphisme  $\rho_g$  est racine du polynôme  $X^n - 1$  qui n'a que des racines simples. Le polynôme minimal de  $\rho_g$  divise donc le polynôme  $X^n - 1$  et n'a donc aussi que des racines simples. Le polynôme minimal de  $\rho_g$  est donc scindé sur  $\mathbb{C}$  et à racines simples, on en déduit que l'endomorphisme de  $\rho_g$  est **diagonalisable**.

### Exemples

1. La représentation triviale (ou représentation unité) :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right). \end{aligned}$$

2. Les représentations de degré 1 : ce sont les morphismes de groupes

$$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

puisque si  $\dim V = 1$ , alors  $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$ , car les endomorphismes de  $V$  sont des homothéties :

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ f_\lambda &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

qui a une homothétie fait correspondre son rapport induit un isomorphisme. Si  $G$  est **fini**, tout élément de  $G$  est d'ordre fini (par le théorème de Lagrange) et donc, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho_g$  est une racine de l'unité dans  $\mathbb{C}$ , et en particulier  $\rho_g$  est un nombre complexe de module 1 :

$$|\rho_g| = 1.$$

3. Soient  $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . On définit la représentation canonique de degré  $n$  de  $\mathfrak{S}_n$  en posant :

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{S}_n &\longrightarrow GL(\mathbb{C}^n) \\ \sigma &\longmapsto \left( \rho_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ e_i & \longmapsto & \rho_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)} \end{array} \right). \end{aligned}$$

4. *La représentation de permutations.* Soit  $\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$  une action d'un groupe sur un ensemble fini  $X$ . Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension égale au cardinal de  $X$  (par exemple, on peut voir  $V$  comme le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur  $X$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  dont

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & \varepsilon_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

une base peut être donnée par les fonctions indicatrices  $\varepsilon_x$  :

pour  $x$  décrivant  $X$ ) muni d'une base indexée par les éléments de  $X$  :  $\{\varepsilon_x, x \in X\}$ . On peut écrire  $V = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}\varepsilon_x$ . On définit une représentation linéaire (complexe de dimension finie) :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : V \longrightarrow V \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_x \longmapsto \rho_g(\varepsilon_x) := \varepsilon_{g \cdot x} \right). \end{aligned}$$

C'est la représentation de permutations associée à l'action de  $G$  sur  $X$  (c'est l'application qui envoie un vecteur de base sur un autre vecteur de base).

5. *La représentation régulière.* C'est l'exemple précédent avec  $X = G$  agissant sur lui-même (par translation à gauche) :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : V \longrightarrow V \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_x \longmapsto \varepsilon_{gx} \right). \end{aligned}$$

Ici, il s'agit de la loi de composition interne de  $G$  et on a  $\dim(V) = |G|$ .

**Définition 2.1.3.** Deux représentations linéaires  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  d'un groupe  $G$  sont dites **isomorphes** ou équivalentes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels (ici application linéaire bijective)  $f : V \rightarrow V'$  tel que l'on ait :

$$\forall g \in G, \rho'_g \circ f = f \circ \rho_g.$$

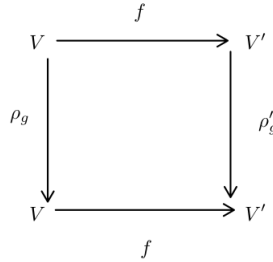


FIGURE 2.1 – Représentations linéaires isomorphes.

On peut exprimer cette condition par la commutativité du diagramme suivant :

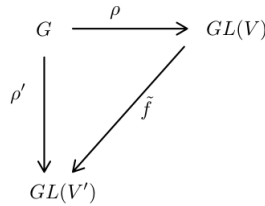


FIGURE 2.2 – Diagramme commutatif de deux représentations isomorphes.

**Remarque.** Dire que le diagramme ci-dessus commute, c'est dire que

$$\tilde{f} \circ \rho = \rho'.$$

D'où, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho'_g = \tilde{f}(\rho_g) = f \circ \rho_g \circ f^{-1}$ , i. e.  $\rho'_g \circ f = f \circ \rho_g$ .

**Remarque.** En termes de matrices, cela signifie que les matrices associées à la première représentation sont semblable à leurs homologues dans la deuxième, via la même matrice de passage :

$$\forall g \in G, \text{Mat}(\rho'_g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(\rho_g) \times \text{Mat}(f)^{-1}.$$

### 2.1.1 Sous-représentations

**Définition 2.1.4.** Si  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est une représentation linéaire d'un groupe  $G$  et si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par la représentation (i.e. stable par les automorphismes  $\rho_g$  pour  $g \in G$ , i.e.  $\forall g \in G, \rho_g(W) \subset W$ , i. e.  $\forall g \in G, \forall w \in W, \rho_g(w) \in W$ ), alors cela nous permet de définir une **sous-représentation**

$$\begin{aligned} \rho|_W : G &\longrightarrow GL(W) \\ g &\longmapsto \left( \rho_{g|_W} : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W \\ w & \longmapsto & \rho_g(w) \end{array} \right). \end{aligned}$$

**Définition 2.1.5.** Une représentation  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est dite **irréductible** si les seuls sous-espaces stables de  $V$  sont  $\{0\}$  et  $V$ .

**Remarque.** Les représentations de degré 1 sont bien évidemment des représentations irréductibles.

## 2.2 Théorème de Maschke

On définit tout d'abord la notion de **somme directe** de représentations. On rappelle que si  $V$  est un espace vectoriel et si  $W, W'$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $V$ , alors on dit que  $V$  est **somme directe** de  $W$  et  $W'$  si tout  $x \in V$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$x = w + w', \text{ avec } w \in W, w' \in W'.$$

Il revient au même de dire que

$$W \cap W' = \{0\} \text{ et } \dim(V) = \dim(W) + \dim(W').$$

On écrit alors  $V = W \oplus W'$  et l'on dit que  $W'$  est un **supplémentaire** de  $W$  dans  $V$ .

L'application  $p : v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{w'}_{\in W'} \longmapsto w$  est alors appelé le **projecteur** de  $V$  sur  $W$  associé à la

décomposition  $V = W \oplus W'$ . On a  $\text{Im}(p) = W$  et  $\text{Ker}(p) = W'$  et  $p(x) = x$  si  $x \in W$ .

Réciproquement, si  $p$  est une application linéaire de  $V$  sur lui-même vérifiant ces deux propriétés, on vérifie que  $V = W \oplus \text{Ker}(p)$ , avec  $\text{Ker}(p) = \{v \in V, p(v) = 0\}$ . On établit ainsi une **bijection** entre les projecteurs de  $V$  sur  $W$  et les **supplémentaires** de  $W$  dans  $V$ .

**Définition 2.2.1.** Soient  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations d'un groupe  $G$ . On définit la somme directe  $\rho \oplus \rho'$  comme étant la représentation d'espace vectoriel  $V \oplus V'$  définie par

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\longmapsto \left( (\rho \oplus \rho')_g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v') \end{array} \right). \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.1** (De Maschke). Toute représentation linéaire complexe de dimension finie d'un groupe fini est **somme directe de représentations irréductibles**.

**Lemme.** Tout sous-espace stable d'une représentation linéaire complexe de degré fini d'un groupe fini admet un sous-espace **supplémentaire stable**.

**Remarque.**  $\triangle$  Il existe un produit scalaire hermitien sur l'espace de la représentation qui est stable par l'action du groupe. En effet, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne un produit scalaire quelconque sur  $V$ , le produit suivant est stable par  $\rho$  :

$$\forall x, y \in V, \langle x, y \rangle_\rho := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle.$$

En effet, si  $h \in G$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \langle \rho_h(x), \rho_h(y) \rangle_\rho &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(\rho_h(x)), \rho_g(\rho_h(y)) \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_{gh}(x), \rho_{gh}(y) \rangle = \langle x, y \rangle_\rho, \end{aligned}$$

car  $g \longmapsto gh$  est une bijection de  $G$  sur lui-même.

*Démonstration du lemme.* Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable sous l'action de  $G$ , alors le supplémentaire **orthogonal** de  $W$  est lui aussi stable sous l'action puisque :  $W \subset V$  stable sous l'action de  $G$  par  $\rho$ , i. e.  $\forall g \in G, \rho_g(W) \subset W$ . On a

$$W^\perp := \{x \in V \mid \langle x, w \rangle_\rho = 0, \forall w \in W\}.$$

Montrons que  $W^\perp$  est stable par  $\rho$ . Soit  $g \in G$ , soit  $x \in W^\perp$ , montrons que  $\rho_g(x) \in W^\perp$ . Soit  $w \in W$ , montrons que  $\langle \rho_g(x), w \rangle_\rho = 0$ . On a

$$\langle \rho_g(x), w \rangle_\rho = \langle \rho_{g^{-1}}(\rho_g(x)), \rho_{g^{-1}}(w) \rangle_\rho = \langle x, \rho_{g^{-1}}(w) \rangle_\rho = 0,$$

car  $\rho_{g^{-1}}(w) \in W$ . □

*Démonstration du théorème.* Si  $\dim(V) = 1$  ou si  $V$  est irréductible, c'est démontré.

Si  $\dim(V) \geq 2$  et  $V$  est non irréductible, alors  $V$  possède une sous-représentation  $W$  distincte de  $\{0\}$  et  $V$ . Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$  est un produit scalaire hermitien sur  $V$  invariant sous l'action de  $G$ , le supplémentaire orthogonal  $W^\perp$  de  $W$  est lui aussi stable par  $G$ . On a alors  $V = W \oplus W^\perp$  et  $W$  et  $W^\perp$  sont de dimensions inférieures à celle de  $V$ .

Par l'hypothèse de récurrence, on peut les décomposer en sommes directes de représentations irréductibles. □

## 2.3 Caractère d'une représentation

**Définition 2.3.1.** On appelle **caractère** de la représentation  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  l'application

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi_\rho(g) := \text{Tr}(\rho_g). \end{aligned}$$

où  $\text{Tr}(\rho_g)$  désigne la **trace** de l'endomorphisme  $\rho_g$ .

Le degré du caractère  $\chi_\rho$  est défini comme le degré de la représentation  $\rho$ .

**Proposition 2.3.1** (Propriétés du caractère d'une représentation). Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  une représentation d'un groupe fini  $G$  de caractère  $\chi_\rho$ .

1.  $\chi_\rho(e) = \dim(V) = \text{degré de } \rho = \text{degré de } \chi_\rho$ .
2.  $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$  (conjugaison complexe).
3.  $\forall g, h \in G, \chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$ , i. e.  $\chi_\rho$  est une **fonction centrale** sur  $G$ , i. e.  $\chi_\rho$  est **constante sur les classes de conjugaison**.
4.  $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ , si  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  est une représentation de  $G$ .
5. Si  $\rho, \rho'$  sont équivalentes, alors  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

*Démonstration.* Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  représentation linéaire d'un groupe fini  $G$  de caractère  $\chi_\rho$ .

1. Par définition,  $\chi_\rho(e) = \text{Tr}(\rho_e)$ . Puisque  $\rho$  est un morphisme de groupes, l'image de l'élément neutre de  $G$  par  $\rho$  est donc l'élément neutre de  $GL(V)$ , à savoir l'identité  $\text{id}_V$  sur  $V$ . D'où :

$$\chi_\rho(e) = \text{Tr}(\rho_e) = \text{Tr}(\text{id}_V) = \text{Tr}(I_{\dim(V)}).$$

C'est la matrice identité à  $\dim(V)$  lignes et  $\dim(V)$  colonnes.

2. Montrons que  $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ .

Remarquons que si  $G$  est fini et si  $g \in G$ , alors les valeurs propres de  $\rho_g$  (les racines du polynôme de cet endomorphisme) sont les racines de l'unité. En effet, si  $G$  est d'ordre  $n$ , alors, par le théorème de Lagrange, on a  $g^n = e$ . D'où

$$\rho_g^n = \rho_{g^n} = \rho_e = \text{id}_V,$$

donc le polynôme minimal de  $\rho_g$  divise  $X^n - 1$ . Or les racines du polynôme minimal de  $\rho_g$  sont les valeurs propres de  $\rho_g$ . Donc les valeurs propres de  $\rho_g$  sont les racines de l'unité.

En particulier, les valeurs propres de  $\rho_g$  sont des nombres complexes de module 1. Donc, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\rho_g$ , alors  $|\lambda| = 1$  et donc  $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ . De plus, les valeurs propres de  $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$  (car  $\rho$  est un morphisme) sont les inverses de celles de  $\rho_g$ .

En effet, si  $f(x) = \lambda x$  avec  $x$  non nul et  $f \in GL(V)$ , alors

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x),$$

d'où  $f^{-1}(x) = \lambda^{-1}(x)$  et donc  $x$  est vecteur propre de  $f^{-1}$  pour la valeur propre  $\lambda^{-1}$ .

Enfin, puisque la trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicités), on en déduit que

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

3. Soient  $g, h \in G$ . On a

$$\begin{aligned}
\chi_\rho(ghg^{-1}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \text{Tr}(\rho_{ghg^{-1}}) \stackrel{\text{morphisme}}{=} \text{Tr}(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_{g^{-1}}) \\
&= \text{Tr}(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_g^{-1}) \stackrel{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}{=} \text{Tr}(\rho_g^{-1} \circ \rho_g \circ \rho_h) = \text{Tr}(\rho_h) = \chi_\rho(h).
\end{aligned}$$

Donc  $\chi_\rho$  est une fonction centrale sur  $G$ , i. e. qu'elle prend les mêmes valeurs sur les éléments d'une même classe de conjugaison.

4. Soient  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  deux représentations de  $G$ . La somme directe de  $\rho$  et  $\rho'$  est la représentation

$$\begin{aligned}
\rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\
g &\longmapsto \left( (\rho \oplus \rho')_g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v') \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V$  et  $(e'_1, \dots, e'_m)$  est une base de  $V'$ , alors

$$B = (e_1 + 0, \dots, e_n + 0, 0 + e'_1, \dots, 0 + e'_m)$$

est une base de  $V \oplus V'$ .

D'où

$$\text{Mat}_B((\rho \oplus \rho')_g) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\rho_g) & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{(e'_1, \dots, e'_m)}(\rho'_g) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\chi_{(\rho \oplus \rho')_g} = \text{Tr}((\rho \oplus \rho')_g) = \text{Tr}(\text{Mat}_B((\rho \oplus \rho')_g)) = \text{Tr}(\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\rho_g)) + \text{Tr}(\text{Mat}_{(e'_1, \dots, e'_m)}(\rho'_g)) = \chi_\rho(g) + \chi_{\rho'}(g').$$

5. Soient  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  deux représentations équivalentes de  $G$ . Alors il existe une isomorphisme  $f : V \rightarrow V'$  tel que

$$\forall g \in G, \rho'_g = f \circ \rho_g \circ f^{-1}.$$

D'où, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\chi_{\rho'}(g) = \text{Tr}(\rho'_g) = \text{Tr}(f \circ \rho_g \circ f^{-1}) = \text{Tr}(\rho_g) = \chi_\rho(g).$$

Donc  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

□

### Exemples de calculs de caractères

1. Si  $G$  opère sur un ensemble fini  $X$ , considérons la représentation de permutations  $\rho$  associée, avec  $V = \bigoplus_{x \in X} \langle e_x \rangle = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}e_x$ .

$$\begin{aligned}
\rho : G &\longrightarrow GL(V) \\
g &\longmapsto \left( \rho_g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \varepsilon_x & \longmapsto & \rho_g(\varepsilon_x) := \varepsilon_{g \cdot x} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

On a  $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g)$ . Dans une base  $(e_x)_{x \in X}$  de  $V$ , pour  $g \in G$  fixé, la matrice de  $\rho_g$  est une matrice de permutations, i.e. a exactement un 1 par ligne et par colonne et tous les autres coefficients sont nuls.

De plus, si  $\text{Mat}_{(e_x)}(\rho_g) = (a_{ij})_{i,j}$ , alors le terme diagonal correspondant à  $\rho_g(e_x)$  sera égal à 1 si et seulement si  $g \cdot x = x$  si et seulement si  $x$  est un point fixe de  $g$ . Sinon il vaudra 0. Donc

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \#\{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

2. Caractère de la représentation régulière (c'est le cas particulier de la représentation de permutations  $\rho$  avec  $G$  fini,  $X = G$ , l'action étant la multiplication dans  $G$ ).

On a alors, pour tout  $g \in G$  :

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \sharp\{x \in G \mid gx = x\} = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{si } g \neq e. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Définition 2.3.2.** Un caractère d'un groupe  $G$  est dit **irréductible** si c'est le caractère d'une représentation irréductible de  $G$ .

## 2.4 Orthogonalité des caractères irréductibles

Soit  $G$  un groupe fini. On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(G)$  des fonctions définies sur  $G$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On munit le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(G)$  d'une structure hermitienne donnée par le produit scalaire suivant : pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(G)$ , on a

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g).$$

**Remarque.** Si  $f \in \mathcal{F}(G)$ , alors

$$f = \sum_{g \in G} \lambda \text{Ind}_g = \sum_{g \in G} f(g) \text{Ind}_g,$$

où

$$\begin{aligned} \text{Ind}_g : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = g \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $(\text{Ind}_g)_{g \in G}$  est une base de  $G$ . En particulier,  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}(G)) = |G|$ .

**Lemme (De Schur).** Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations linéaires irréductibles d'un groupe fini  $G$ . Soit  $f : V \longrightarrow V'$  une application linéaire vérifiant :

$$\forall g \in G, f \circ \rho_g = \rho'_g \circ f.$$

1. Si  $\rho$  et  $\rho'$  ne sont pas isomorphes, alors  $f = 0$ .
2. Si  $\rho$  et  $\rho'$  sont isomorphes, alors  $f$  est une homothétie.

*Démonstration.*

1. Montrons la contraposée : on suppose que  $f$  n'est pas l'application nulle.

Le sous-espace  $\text{Ker}(f)$  de  $V$  est stable par  $\rho$ . En effet, si  $g \in G$  et si  $x \in \text{Ker}(f)$ , alors  $\rho_g(x) \in \text{Ker}(f)$ , car :

$$f(\rho_g(x)) = (f \circ \rho_g)(x) = (\rho'_g \circ f)(x) = \rho'_g(f(x)) = \rho'_g(0) = \rho'_g(0) = 0.$$

Comme  $f \neq 0$ , i. e.  $\text{Ker}(f) \neq V$ , on en déduit que  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  par irréductibilité de  $\rho$ .



De même, le sous-espace  $\text{Im}(f)$  de  $V'$  est stable par  $\rho'$ . En effet, si  $g \in G$  et  $y = f(x) \in \text{Im}(f)$ , alors  $\rho'_g(y) \in \text{Im}(f)$ , car

$$\rho'_g(y) = \rho'_g(f(x)) = (\rho'_g \circ f)(x) = (f \circ \rho_g)(x) = f(\rho_g(x)).$$

Puisque  $f \neq 0$  (i. e.  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ ), on en déduit que  $\text{Im}(f) = V'$  par irréductibilité de  $\rho'$ .

En conclusion,  $f$  est bijective. Donc  $f$  est un isomorphisme et donc  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux représentations isomorphes.

2. On suppose que  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ . On peut donc identifier  $V$  et  $V'$  (et  $\rho$  et  $\rho'$ ). Puisque  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss), l'endomorphisme  $f : V \longrightarrow V$  admet une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Le sous-espace propre  $\text{SEP}(f, \lambda)$  de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$  est stable par  $\rho$ .

En effet, si  $g \in G$  et si  $x \in \text{SEP}(f, \lambda)$ , alors  $\rho_g(x) \in \text{SEP}(f, \lambda)$ , car

$$f(\rho_g(x)) = \rho_g(f(x)) = \rho_g(\lambda x) = \lambda \rho_g(x).$$

Donc  $\text{SEP}(f, \lambda) = V$  par irréductibilité de  $\rho$ . D'où,  $\forall x \in V, f(x) = \lambda x$ , i. e.  $f$  est une homothétie de rapport  $\lambda$ .

□

**Proposition 2.4.1.** *Les caractères irréductibles d'un groupe  $G$  forment un système orthonormal de fonctions de l'espace vectoriel hermitien  $\mathcal{F}(G)$ , i. e.*

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

si  $\chi, \chi'$  ne sont pas des caractères irréductibles de  $G$ .

*Démonstration.* Soient  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations irréductibles de  $G$  et soient  $\chi$  et  $\chi'$  leurs caractères associés.

Soit  $g \in G$ , notons  $\text{Mat}(\rho_g) = (a_{ij}(g))_{1 \leq i, j \leq d}$ ,  $\text{Mat}(\rho'_g) = (a'_{ij}(g))_{1 \leq i, j \leq d'}$ , où  $d = \deg(\chi) = \dim(V)$  et  $d' = \deg(\chi') = \dim(V')$ . On a :

$$\chi(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \sum_{i=1}^d a_{ii}(g) \text{ et } \chi'(g) = \sum_{i=1}^{d'} a'_{ii}(g).$$

D'où

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \overline{a_{ii}(g)} a'_{ii}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ non isomorphes,} \\ 1 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ son isomorphes.} \end{cases}$$

□