Géométrie différentielle

2023-2024

Table des matières

1 Fonctions continues

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.
$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$ application.
f est continue en x_0 dans U si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

avec $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.
On dit que f est une application continue quand f est continue en $x \in U$ pour tout $x \in U$.

Proposition 1.1. *f est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(J)$ est ouvert, avec $f^{-1}(J) := \{x \in U \mid f(x) \in J\}$.*

Démonstration. 1. *Si f est continue, alors $\forall J \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f^{-1}(J)$ est ouvert.*
Il faut montrer que $\forall x_0 \in f^{-1}(J)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.
$J = (a, b)$.
$x_0 \in f^{-1}(J) \implies f(x_0) \in J \implies a < f(x_0) < b \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que

$$a < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon < b.$$

On peut choisir $\varepsilon = \min\{\frac{b - f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0) - a}{2}\}$.
Donc il y a $\delta > 0$ tel que

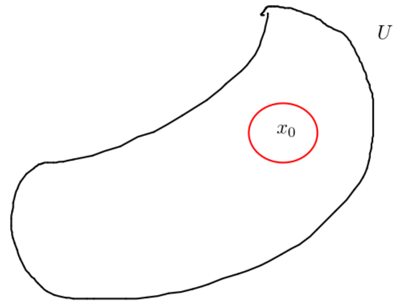

FIGURE 1 – Illustration

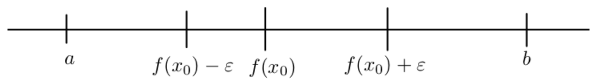

FIGURE 2 – On choisit ε de cette sorte

$$\begin{gathered}\|x-x_0\|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \\ \implies -\varepsilon < f(x)-f(x_0)<\varepsilon \\ \implies f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \implies a<f(x)<b \\ \implies f(x)\in J \implies x\in f^{-1}(J).\end{gathered}$$

Choisissons $r := \delta$
$x \in B(x_0, r) \implies \|x-x_0\| < r = \delta$.
On a démontré que avec ce choix de δ on a $x \in f^{-1}(J) \implies B(x_0, r) \subset f^{-1}(J)$.

2. *Si $f^{-1}(J)$ ouvert pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, alors f est continue.*
Fixons $x_0 \in U$: $\varepsilon > 0$ est donné.
On met $J = (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon) \neq \emptyset$.
Par l'hypothèse, $f^{-1}(J)$ est ouvert, donc $\exists r>0, B(x_0,r)\subset f^{-1}(J)$.
On met $\delta := r$.

$$\begin{gathered}\|x-x_0\|<\delta \implies x\in B(x_0,\delta)=B(x_0,r) \\ \implies x\in f^{-1}(J) \implies f(x)\in J \\ \implies f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \implies -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon \\ \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.\end{gathered}$$

□

On peut aussi généraliser ces définitions et la proposition aux cas où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application de U dans $\mathbb{R}^m$, avec

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_m)).$$

Exemple $f(x_1,x_2) = (x_1^2 + 3\cos(x_2)e^{x_1-x_2})$, $n=2, m=2, U=\mathbb{R}^2$.

Définition 1.1. *f est continue en $x_0 \in U$ si*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in U, \|x-x_0\|<\delta \implies \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon,$$

avec $\|f(x)-f(x_0)\| = \sqrt{(f_1(x)-f_1(x_0))^2+\cdots+(f_m(x)-f_m(x_0))^2}$.

Définition 1.2. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue quand f est continue en $x, \forall x \in U$.*

Proposition 1.2. *Les 3 conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue ;*
2. *$\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j est continue ;*
3. *$\forall V \subseteq \mathbb{R}^m$ ensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert.*

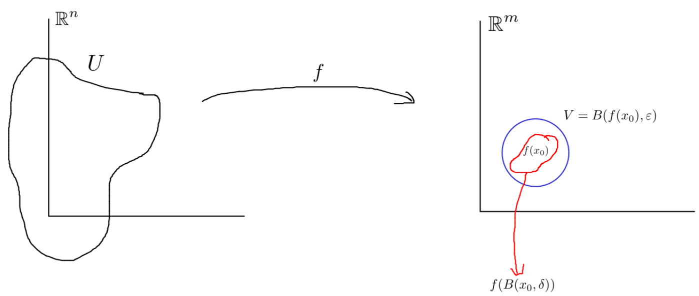

FIGURE 3 – Illustration pour 1.2

2 Dérivée, dérivée partielle, différentielle

$f : U \to \mathbb{R}$.
$x \in U$ fixé.
La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)}{h}$$

si la limite existe.

Si $e_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ème}}, 0, \ldots, 0)$ (tel que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base standart de l'espace linéaire $\mathbb{R}^n$), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i)}{h}.$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En général, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_k \partial x_{k-1} \ldots \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right).$$

$i_1 \in \{1, \ldots, n\}, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$.
Pour $k = 1$, il y a n dérivées partielles.
Pour $k = 2, i_1 \longrightarrow n$ choix de $\{1, \ldots, n\}$.
$i_2 \longrightarrow n$ choix.
Donc il y a n^2 choix.
En général, il y a n^k dérivées partielles différentes de l'ordre k.

Définition 2.1. $r \in \mathbb{N}$.
On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ ou tout simplement f est $\mathcal{C}^r$ quand

1. *Si $r = 0$, f est continue.*

2. *Si $r \geq 1$, f est continue et les dérivées partielles d'ordre k existent partout dans U et elles sont toutes les applications continues dans U et ceci pour tout $1 \leq k \leq r$.*
3. *Pour $f : U \to \mathbb{R}^m$, une application, on dit que f est $\mathcal{C}^r$ si $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j est une application $\mathcal{C}^r$, avec $f = (f_1, \ldots, f_m)$.*
   On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ quand $\forall r \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^r$.

2.1 Différentiabilité des fonctions multi-variables

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

On dit que f est différentiable à $x \in U$ quand il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ si } \|h\| < \delta \text{ et } x + h \in U, \text{ alors } \|f(x+h) - (f(x) + L(h))\| < \varepsilon \|h\|.$$

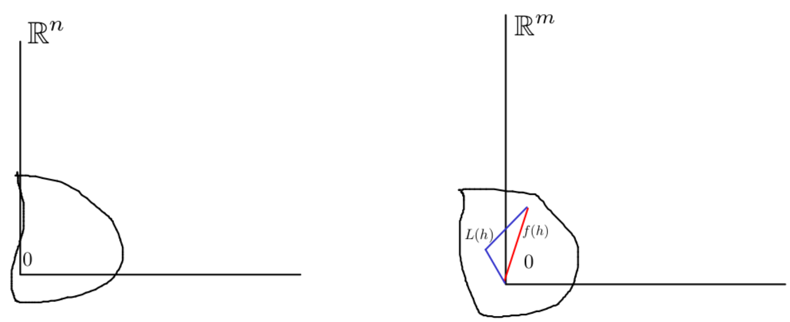

FIGURE 4 – Exemple illustratif avec $x = 0, f(0) = 0$

f différentiable en 0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0, \|h\| < \delta \implies \|f(h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$.

Proposition 2.1. *$n = 1, m = 1, f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable selon la définition donnée sur un point $x \in I$ si et seulement si $f'(x)$ existe.*

Démonstration.

1. *Sens direct : f différentiable en $x \in I \implies f'(x)$ existe.*
   $\exists L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in I \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

   $L(h) = ah$ pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque mais fixé.
   a est la pente ou le coefficient directeur.
   Prenons a la pente du graphe de L (comme L linéaire, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}, L(h) = ah$).
   On obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, x + h \in I \implies |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|.$$

   On divise par $|h| \neq 0$ pour obtenir

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{ah}{h} \right| \leq \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |h| < \delta, h + x \in I, \text{ alors } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$$

Donc $f'(x)$ existe et $f'(x) = a$.

2. *Sens réciproque : $f'(x)$ existe $\implies$ f différentiable.*
Si $f'(x)$ existe, on met $a := f'(x)$.
On définit $L(h) = ah$. On sait que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = a.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta \implies & \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon \\
\implies & |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h| \\
\implies & \forall h, |h| < \delta, \text{ on a } |f(x+h) - f(x) - ah| \leq \varepsilon |h|.
\end{aligned}$$

f est différentiable selon notre définition avec $L(h) = ah$.

□

On suppose maintenant que $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Pour $x \in U$, f différentiable en x si $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ est linéaire }\}$.
On écrit dans ce cas là que $Df(x) = L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
En particulier, si f est différentiable pour tout $x \in U$, on obtient une application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Rappel Chaque transformation linéaire est uniquement représentée par une matrice au cas où les bases des espaces de départ et d'arrivée sont fixées.
Si on choisit les bases standart $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ pour $\mathbb{R}^n$ et $\beta = \{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$[T]_\beta^\alpha := A = [A_{ij}]_{m \times n}$$

et on a

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} e_i = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}.$$

C'est la j-ième colonne de la matrice A.
En particulier, pour chaque $x \in U$ où f est différentiable, en fixant les bases standart de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, on peut supposer que $Df(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
On peut identifier $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $\mathbb{R}^{m \times n} = \{[A_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \mid A_{ij} \in \mathbb{R}\}$.
Avec cette identification, on peut utiliser la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
Comme ça on peut parler de continuité et de différentiabilité de l'application

$$Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Ou bien on peut encore identifier $\mathbb{R}^{m\times n}$ avec $\mathbb{R}^{mn}$. Alors $Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{mn}$.
Donc on peut parler de continuité de Df, de derivée de Df.
Pour $x \in U, D(Df)(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.
On va noter $D(Df)$ par $D^2 f$. Alors $D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n})$.
$D^2 f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n}) \simeq \mathbb{R}^{mn^2}$.

Théorème 1. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ une application donnée et $r \in \mathbb{N}$.*
f est de classe $\mathcal{C}^r$ si et seulement si $D^k f : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots))$ (de dimension mn^k) existe comme une application pour tout $1 \leq k \leq r$, et elle est en plus continue.

2.2 Deux points fins

En général, les dérivées partielles de f peuvent exister sans que Df soit définie.
Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut avoir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$ existe, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existe, mais $Df(0)$ n'existe pas.
Par contre, si $Df(x_0)$ existe, alors toutes les dérivées partielles de f existent en x_0.

Démonstration. Supposons que $Df(x_0)$ existe. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|h\| < \delta, x + h \in U \implies \|f(x) - f(x_0) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

Fixons une direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ et on met $h = t\overrightarrow{v}$, avec $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$. Donc $\|h\| = |t| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$.
Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, t < \frac{\delta}{\|\overrightarrow{v}\|}, x_0 + t\overrightarrow{v} \in U \implies |f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) - tL(\overrightarrow{v})| < \varepsilon |t| \|\overrightarrow{v}\|.$$

On pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \|\overrightarrow{v}\|$ et $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0 \text{ tel que } |t| < \tilde{\delta} \implies \|f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) - tL(\overrightarrow{v})\| \leq \tilde{\varepsilon}$$
$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0, |t| < \tilde{\delta} \implies \left\| \frac{1}{t} \left(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) \right) - L(\overrightarrow{v}) \right\| \leq \tilde{\varepsilon}$$
$$\implies \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0) \right) = L(\overrightarrow{v}) = Df(x_0)(\overrightarrow{v}).$$

On définit

$$D_{\overrightarrow{v}} f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)).$$

Donc si $Df(x_0)$ existe, la dérivée directionnelle de f en x_0 dans une direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ existe et on a

$$D\overrightarrow{v} f(x_0) = Df(x_0)(\overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^m.$$

En particulier, si $\overrightarrow{v} = e_j, 1 \leq j \leq n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} f(x_0) = D_{e_j} f(x_0) = Df(x_0)(e_j).$$

□

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ alors que $Df(x_0)$ n'existe pas.

Théorème 2. *Si $f : U \to \mathbb{R}^m, x_0 \in U$.*
Si $Df(x_0)$ existe, alors f est continue en x_0.

Démonstration. En exercice. □

Il se peut que toutes les dérivées directionnelles $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0)$ existent pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ en $x_0 \in U$ sans que pour autant f soit continue en x_0.

Si la matrice de $Df(x_0)$ est donnée par $[A_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$.

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, A_{e_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{bmatrix}.$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

C'est la matrice jacobienne de f.

2.3 La dérivée de composition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

$f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$.

Supposons que pour $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$.

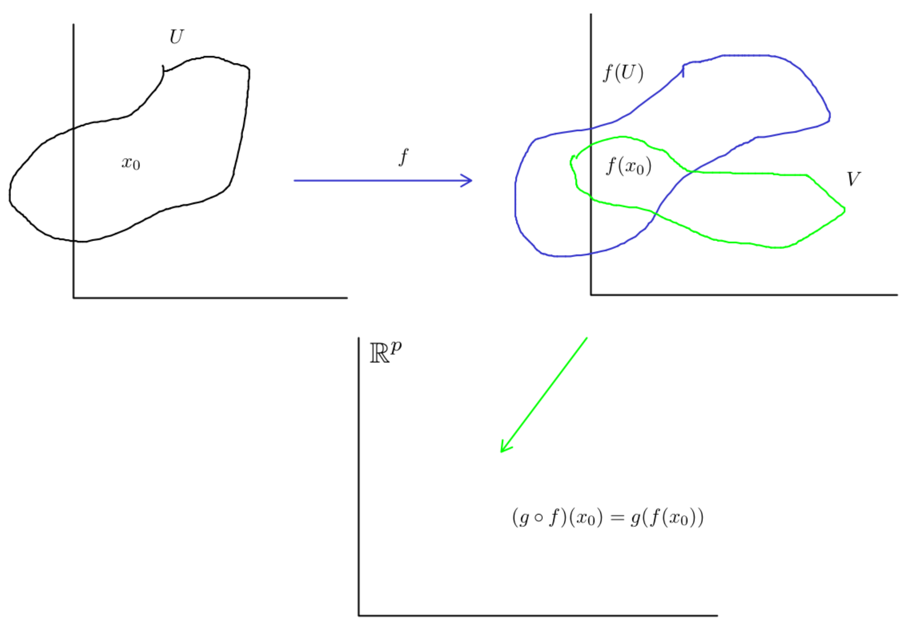

Figure 5 – La différentiation composée

Si f est continue, $g \circ f$ est définie dans un voisinage de x_0, par exemple dans une boule ouverte $B(x_0, r) = \tilde{U} \subset U \cap f^{-1}(V)$.

$g \circ f : \tilde{U} \to \mathbb{R}^p$.

Supposons que les trois dérivées $Df(x_0), Dg(f(x_0)), D(g \circ f)(x_0)$ existent.

$Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$D(g(f(x_0))) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.

$D(g \circ f) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 3. *Supposons que f est dérivable en $x_0 \in U$ avec la dérivée $Df(x_0)$ et g est dérivable en $f(x_0) \in V$ avec la dérivée $Dg(f(x_0))$, alors $g \circ f$ est bien dérivable en $x_0 \in U$ et*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Si on utilise les matrices jacobiennes de chaque dérivée ($1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$),

$$\left[\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}\right]_{p \times n} (x_0) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\right]_{p \times m} (f(x_0)) \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]_{m \times n} (x_0).$$

$$\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] (x_0) = \left[\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right] (f(x_0)) \times \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right] (x_0).$$

On a :

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k}(f(x_0)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x_0).$$

$f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = f(U)$ est ouvert et $g : V \to \mathbb{R}^n$ est l'inverse de f.

Donc $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g \circ f = \mathbb{1}_U$.

Si en plus f et g sont différentiables, alors $m = n$ et $\forall x \in U, Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$, c'est à dire en particulier $Df(x)$ est une transformation linéaire inversible.

Démonstration. Si f est dérivable en $x \in U$ et g dérivable en $f(x) \in V$, $\mathbb{1} = g \circ f$ dérivable en x_0 et

$$D\mathbb{1}_U(x_0) = D(g(f(x_0))) \circ Df(x_0).$$

$$\mathbb{1}_U(x) = x \implies D\mathbb{1}_U(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Ainsi comme g est linéaire de f on a $f \circ g = \mathbb{1}_V$, donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} = Df(x_0) \circ Dg(f(x_0)).$$

□

Lemme. *Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une fonction linéaire, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ et $T(x) = L(x) + \overrightarrow{b}$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Ainsi T est différentiable dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, DT(x) = L.$$

Dans ce cas, $DT : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application constante (les dérivées partielles de T aussi).

3 Inversion locale, fonctions implicites, théorème du rang

Théorème 4 (de Bronner)**.** *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $h : U \to V$ est un homéomorphisme (i. e. h continue, inversible et d'inverse* ***continue*** *$h^{-1} : V \to U$), alors $m = n$.*

3.1 Théorème de l'application inverse

Théorème 5 (De l'application inverse)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in U, f : U \to \mathbb{R}^n$, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible.*

Alors il existe des ensembles ouverts $W \subset U$, $x_0 \in W$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que $f_{|W} : W \to V$ est inversible. L'inverse $(f_{|W})^{-1} : V \to W$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

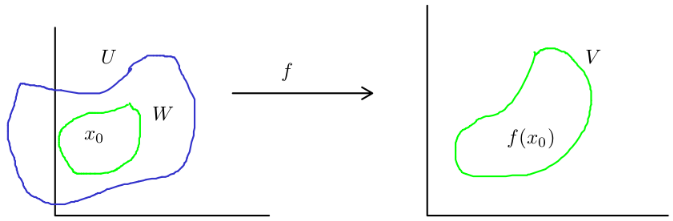

FIGURE 6 – Fonctions inversibles

Remarque. *Si en plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, alors $(f_{|W})^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^r$.*

Notons que $\forall y \in V, x \in W, f(x) = y$,

$$(D(f_{|W})^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}.$$

En particulier, il existe W tel que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in W$.

3.2 Théorème du rang

20-09-2023

Théorème 6 (Du rang)**.** *$f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$. Supposons que $\forall x \in U$,*

$$\text{rang}(Df(x)) \equiv k,$$

où $1 \leq k \leq m$ est fixé.
$(Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$ donc $0 \leq \text{rang}(Df(x)) \leq m)$.
Soit $x_0 \in U$. Alors il y a des ouverts $W \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m, x_0 \in W, f(x) \in V$, 2 applications de classe $\mathcal{C}^r$ inversibles

$$\varphi : W \to W', \varphi(x_0) = 0, W' \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\psi : V \to V', \psi(f(x_0)) = 0, V' \subseteq \mathbb{R}^m$$

telles que $\forall z \in W', z = (z_1, \ldots, z_n)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0).$$

En particulier, $f(W)$ est un objet de dimension k, de régularité $\mathcal{C}^r$ (Si $m = 3, k = 2, f(W)$ est une surface de classe $\mathcal{C}^r$) et pour tout $y \in f(W), f^{-1}(y)$ est un objet de dimension $n - k$ de régularité $\mathcal{C}^r$.

On note que les deux applications φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^r$ et inversibles. On peut démontrer que dans ce cas-là, les inverses φ^{-1} et ψ^{-1} sont aussi de classe $\mathcal{C}^r$.

$$D\varphi^{-1}(y) = (D\varphi(\varphi^{-1}(y))^{-1}), y \in W'.$$

φ^{-1} étant continue, $D\varphi$ étant continue, l'inverse d'une matrice étant continue tant que det $\neq 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ inversible $\implies$ φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.1 (Difféomorphisme)**.** *Soient $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts.*
Si $\varphi : U \to U'$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$, avec l'inverse $\varphi^{-1} : U' \to U$ de classe $\mathcal{C}^r$, on dit que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$.

Remarque (Le théorème de rang dans le cas spécial où f est linéaire)**.** *Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\text{rang}(L) = k, 0 \leq k \leq m$, alors il existe deux bases α_n et β_m pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ telles que*

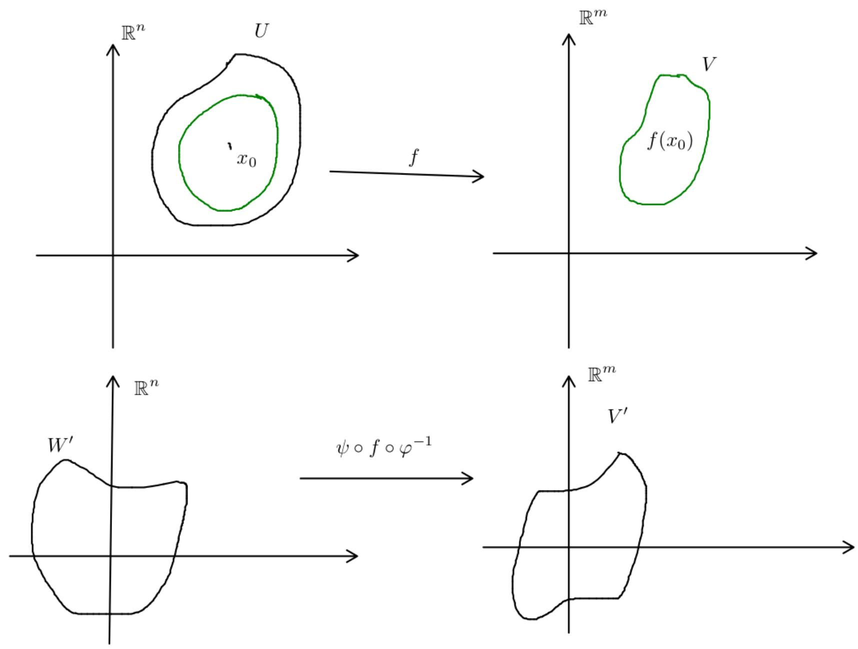

Figure 7 – Illustration du théorème de rang

$$[L]_{\alpha_n}^{\beta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

(En exercice).

Corollaire. *$U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$, f est $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

Supposons que pour $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ est injective. $Df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Alors il existe un voisinage W de x_0 tel que f est injective sur W.

Pour $x \in U$,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

Si $Df(x_0)$ est injective, $\operatorname{rang}(Df(x_0)) = n$ $(m \geq n)$. On obtient une sous-matrice de $Df(x)$ de taille $n \times n$ inversible.

Lemme (D'algèbre linéaire)**.** *$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors $\operatorname{rang} A = n$ si et seulement si il existe une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de A telle que $\det B \neq 0$.*

(En exercice).

Alors sous les hypothèse du corollaire 3.2, $\operatorname{rang} Df(x) \equiv n$ dans un voisinage W de x_0, appliquant le théorème du rang

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$$

qui est injectif.

Corollaire. *Les mêmes hypothèses que dans le corollaire 3.2.*

Si $Df(x_0)$ est surjective, alors il existe un voisinage ouvert $V \subseteq f(U)$ de $f(x_0)$ (c'est à dire $f(x_0)$ est un point intérieur de $f(U)$) tel que f est surjective sur V.

Argument à travers l'observation de l'algèbre linéaire qui dit que si $\operatorname{rang}(A) = m, m \leq n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il y a une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tel que $\det(B) \neq 0$.

Théorème de rang : $k = m \leq n$.

Les détails en exercice.

3.3 Théorème de fonctions implicites

Théorème 7 (De fonctions implicites)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r, r \geq 1$.*

$(x_0, y_0) \in U \to V$ donné.

$$DF(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times(m+n)}$$

et

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} & | & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{m\times(m+n)}.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in U \times V, DyF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Supposons que $DyF(x_0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage W de x_0 dans U et une application $\mathcal{C}^r$ $f : W \to V$ telle que $f(x_0) = y_0$ et

$$\forall x \in W, F(x, f(x)) = F(x_0, y_0).$$

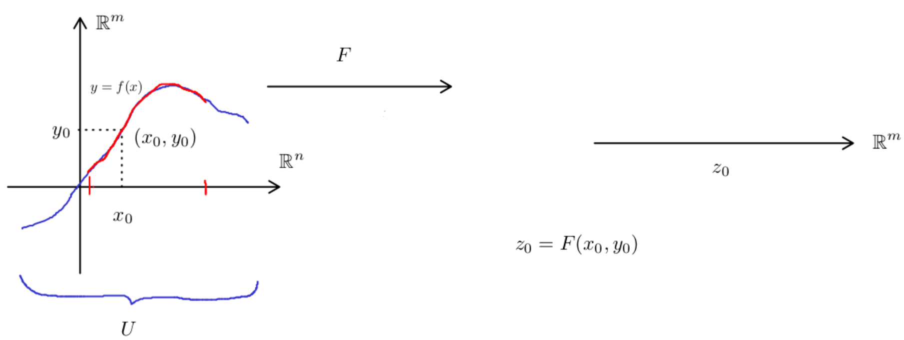

Figure 8 – Illustration du théorème de fonctions implicites

Donc le graphe de $x \longrightarrow f(x)$ dans $W \times V$ pour l'application $f : W \to V$ est à l'intérieur de $F^{-1}(x_0)$.

On peut dire que la fonction implicite

$$F(x, y) = z_0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z_0 \in \mathbb{R}^n$$

peut être exprimée explicitement $y = f(x)$ dans un voisinage W.

Exemple $m = 1 = n$.

Si $F(x, y) = y^2 - x$.

Exemple 1 $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 1$.

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty.$$

$$DyF = [2y]_{|x|}.$$

$$DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \neq 0.$$

Donc près de $(0, 1) = (x_0, y_0), y = f(x)$ a une solution $\mathcal{C}^\infty$.

Mais si $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, $DyF(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$ n'est pas inversible. F est $\mathcal{C}^\infty$.

Implicitement, près de $(0, 0)$, on a $y^2 - x = 0$.

On essaie de trouver $y = f(x)$.

$y^2 = x \implies y = \pm\sqrt{x}$.

Mais $\sqrt{\cdot}$ n'est pas définie pour $x < 0$ près de $x_0 = 0$!

Donc il n'y a pas un moyen d'écrire explicitement $F(x,y) = 0$ près de $(0,0)$ comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque (Sur le théorème des fonctions implicites)**.** *En effet, si* $W' = f(W) \subset V$*, on a*

$$(x,y) \in W \times W', F(x,y) = z_0 \iff y = f(x).$$

4 Algèbre multilinéaire

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, c'est-à-dire il existe $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ base telle que

$$\forall \overrightarrow{v} \in E, \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{v_i}.$$

En particulier, β engendre E ($E = \operatorname{span}(\beta) = \langle \beta \rangle$) si β est libre.

4.1 L'espace dual E^*

$$E^* = \{T : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire}\} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}).$$

Théorème 8. *On a* $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Démonstration. Supposons $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base ordonnée de E. On définit alors n éléments $(e^1, e^2, \dots, e^n)$, $e^j \in E^*$ de la manière suivante :

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque (Personnelle)**.** e^j *est l'évaluation du vecteur* $\overrightarrow{v} \in E$ *en* e_j.

Donc $e^j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^j(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_i$.

Donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}, e^j \in E^*$, $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$. On montre que β^* est une base pour E^*.

1. β^* est libre. Supposons que pour $c_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e^j = 0 \in E^*.$$

Donc pour tout i,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j\right)(e_i) = 0 \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^j\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_i^j = c_i.$$

Donc $\forall i, c_i = 0$.

2. β^* engendre E^*. Soit $T \in E^*$. Est-ce qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tel que

$$T = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \ ?$$

Essayons de trouver les α_j en appliquant l'identité desirée en e_i.

$$\forall i, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right) (e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_i^j = \alpha_i.$$

Donc pour $T \in E^*$ donnée, le candidat pour α_i est

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i \in T(e_i) \in \mathbb{R},$$

et on obtient que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, T(e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j \right) (e_i).$$

Comme T et $\tilde{T}$ ont les mêmes valeurs sur la base β, donc $T = \tilde{T}$.

$$T = \sum_{j=1}^{n} T(e_j) e^j.$$

□

Définition 4.1. *On dit que β^* est la base duale de β.*

On considère le dual du dual $E^{**} = (E^*)^*$.

Théorème 9. *Si $\dim(E) < \infty$, il y a un isomorphisme canonique entre E et E^{**}.*

On peut définir $E \to E^{**}$. On pose $e : E \to E^{**}$.

$$(\iota(\overrightarrow{v}))(T) = T(\overrightarrow{v}),$$

$\forall T \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 1.

1. *Montrer que $\forall v \in E, \iota(\overrightarrow{v}) : E^* \to \mathbb{R}$ est une transformation linéaire.*
2. *Montrer que $\iota : E \to E^{**}$ est une transformation linéaire.*
3. *Montrer que ι est bijective (donc un isomorphisme).*

Démonstration.

1. $$\iota(\overrightarrow{v})(\alpha T + S) = (\alpha T + S)(\overrightarrow{v}) = \alpha T(\overrightarrow{v}) + S(\overrightarrow{v}) = \alpha \iota(\overrightarrow{v})(T) + \iota(\overrightarrow{v})(S).$$

2. $\iota : E \to E^{**}$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \iota(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})(T) = T(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &\overset{T \text{ linéaire}}{=} \alpha T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w}) \\ &= \alpha \iota(\overrightarrow{v})(T) + \iota(\overrightarrow{w})(T) = \alpha \iota(\overrightarrow{v}) + \iota(\overrightarrow{w}). \end{aligned}$$

Comme c'est vrai $\forall T \in E^*$, on a l'identification $\iota(\alpha \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha \iota(\overrightarrow{v}) + \iota(\overrightarrow{w})$ (comme un élément de E^{**}). Donc ι est une transformation linéaire.

3. On sait que $dimE = dimE^* = dimE^{**}$ (ce qui veut dire que ι est surjective). Pour démontrer que ι est un isomorphisme, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$ (que ι est injective).
   Si $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\iota)$, alors $\iota(\overrightarrow{v}) = 0 \implies \forall T \in E^*, T(\overrightarrow{v}) = \iota(\overrightarrow{v})(T) = 0(T) = 0$, donc $\overrightarrow{v}$ est tel que $\forall T \in E^*, T(\overrightarrow{v}) = 0$.
   Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on peut compléter $\overrightarrow{v}$ avec une base $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ de E et définir $T(\alpha_1 \overrightarrow{v} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n}) = \alpha_1$. Dans ce cas-là, $T(\overrightarrow{v}) = 1 \neq 0$.
   Si $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. On a vu que la base duale $\beta^* = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ est une base de E^*.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j.$$

$$(\beta^*)^* = \beta^{**} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

$$\forall i, \eta_i \in E^{**}, \eta_i(e^i) = \delta_i^j, \forall i, j. \tag{1}$$

   On va aussi calculer

$$\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j. \tag{2}$$

   $\forall e^j$ de base β^*, on a

$$\eta_i(e^j) = \iota(e_i)(e^j), \eta_i, \iota(e_i) \in E^{**} = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{R}).$$

   η_i et $i(e_i)$ coincident sur une base de E^*, donc

$$\forall i, \eta_i = \iota(e_i).$$

   Pour simplifier, parfois on identifie E et E^{**} par l'application ι, c'est-à-dire on met $\overrightarrow{v} = \iota(\overrightarrow{v})$.

$\square$

Les éléments de E^* sont appelés **les vecteurs covariants**. Les éléments de E^{**} sont appelés **les vecteurs contravariants**.

4.2 Les applications multilinéaires

Supposons que $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et E' espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

$$\alpha : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \longrightarrow E'$$

est une application k-linéaire quand α est linéaire par rapport à chaque coordonnée dans l'un des espaces E_j quand les autres coordonnées (composantes) sont fixées.
$\overrightarrow{v_i} \in E_i$, $1 \leq i \leq k$, $\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k})$.
Si $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v_j} \in E_j, \overrightarrow{w} \in E_i$, on a

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, a\overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{w}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) = a\alpha(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_i}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) + \alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overbrace{\overrightarrow{w}}^{i\text{-ème}}, \ldots, \overrightarrow{v_k}).$$

Exemple

1. $f(x, y) = xy$, $f : \overset{E_1}{\mathbb{R}} \times \overset{E_2}{\mathbb{R}} \rightarrow \overset{E'}{\mathbb{R}}$.
2. $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}$,

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \text{ 2-linéaire.}$$

3. $E_1 = E_2 = E_3 \equiv \mathbb{R}^3$, $E' = \mathbb{R}$.

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = det \left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3} \end{bmatrix} \right)_{3\times 3}.$$

   Cette application est 3-linéaire.

4. $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}^n$.

$$\alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = det \left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{bmatrix} \right).$$

   C'est une application n-linéaire.

5. Le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est une application n-linéaire.

4.2.1 Quelques notations

E espace vectoriel de dimension finie.
On note $\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.
Remarquons que $\Omega^1(E) = \{\alpha : E \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est linéaire}\} = E^*$.

Proposition 4.1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Omega^k(E)$ *est un espace vectoriel de dimension* n^k.

Démonstration. Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(E), a \in \mathbb{R}$. Il faut démontrer que $a\alpha+\beta$ est aussi une application k-linéaire sur $E^k = \overbrace{E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$.

$$\begin{aligned} a\alpha + \beta(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}, \dots) &= a[\alpha(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}, \dots)] + \beta(b\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w}) \\ &= a[b\alpha(\overrightarrow{v_1}, \dots) + \alpha(\overrightarrow{w}, \dots)] + b\beta(v_1, \dots) + \beta(\overrightarrow{w}, \dots) \\ &= b[a\alpha + \beta](\overrightarrow{v_1}, \dots) + [a\alpha + \beta](\overrightarrow{w}, \dots) \end{aligned}$$

De même pour chaque $1 \leq i \leq k$.
Pour trouver la dimension de $\Omega^k(E)$, il faudra trouver une base de $\Omega^k(E)$. Pour cela, il faudra d'abord introduire "le produit tensoriel". □

Définition 4.2 (Produit tensoriel)**.** *Supposons que* $\alpha : E_1 \times \cdots \times E_k \to \mathbb{R}$ *k-linéaire,* $\beta : E'_1 \times \cdots \times E'_l \to \mathbb{R}$ *l-linéaire.*
On définit

$$\alpha \otimes \beta : E_1 \times \cdots \times E_k \times E'_1 \times \cdots \times E'_l \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\alpha \otimes \beta(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{v'_1}, \dots, \overrightarrow{v'_l}) := \alpha(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k})\beta(\overrightarrow{v'_1}, \dots, \overrightarrow{v'_l})$$

qui est une application $(k+l)$-linéaire (avec $\overrightarrow{v_i} \in E_i, i \in \{1, \dots, k\}, \overrightarrow{v'_j} \in E'_j, j \in \{1, \dots, l\}$).

Les applications k-linéaires sont appelées les tenseurs covariants d'ordre k.

Exercice 2. *On montre que $\otimes$ est une opération associative.*
$\forall \alpha, \beta, \gamma$ *tenseurs covariants,*

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma).$$

Exemple $E_1 = \mathbb{R}^n, E_1' = \mathbb{R}^n, k = l = 1, \alpha \in E_1^*, \alpha(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v} \cdot e_1, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \beta \in E_1'^*, \beta(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v'} \cdot e_1, \forall \overrightarrow{v'} \in \mathbb{R}^n$.

$$\alpha \otimes \beta(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) = 2(\overrightarrow{v} \cdot e_1)(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)$$

et

$$\beta \otimes \alpha(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}) = 2(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)(\overrightarrow{v} \cdot e_1).$$

Mais si $\tilde{\beta}(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v'} \cdot e_2$,

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \tilde{\beta}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) &= 2(\overrightarrow{v} \cdot e_1)(\overrightarrow{v'} \cdot e_2), \\ \text{mais } \tilde{\beta} \otimes \alpha(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}) &= 2(\overrightarrow{v'} \cdot e_1)(\overrightarrow{v} \cdot e_2). \end{aligned}$$

Le produit tensoriel n'est donc pas commutatif.

$E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$

$\Omega^k(E) := \{\alpha : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est } k\text{-linéaire}\}$.

Proposition 4.2. $\Omega^k(E)$ *est un espace vectoriel de dimension* n^k*, où* $n = dim(E)$*.*

Démonstration. $dimE = n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(e^1, \ldots, e^n)$ est une base de $E^* = \Omega^1(E)$.

Par exemple si on prend

$$\underbrace{e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1}_{k \text{ fois}} : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R},$$

et

$$\begin{aligned} &e^1 \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^1(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}), \overrightarrow{v_i} \in E, \\ &= e^1(\overrightarrow{v_1}) e^1(\overrightarrow{v_2}) \ldots e^1(\overrightarrow{v_n}). \end{aligned}$$

$\mathscr{A} = \{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid \text{pour } 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_k \leq n\}$.

Il y a n choix pour chaque e^{i_j}, alors, au total, on a n^k choix pour les éléments de $\mathscr{A}$, ce qui démontre la proposition 4.2. On montre maintenant que

1. $\mathscr{A}$ engendre $\Omega^k(E)$;
2. $\mathscr{A}$ est libre.

Soit $\alpha \in \Omega^k(E)$.

On va démontrer que

$$\alpha \stackrel{?}{=} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

Prenons $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) \in E^k$. On a

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i.$$

$$\begin{aligned}\alpha(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_{i1}e_i,\dots,\sum_{i=1}^n c_{ik}e_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^n c_{i1}\alpha\left(e_i,\sum_{i_2} c_{i_2 2}e_{2i},\dots\right)\\ &= \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\dots\sum_{i_k=1}^n c_{i_1 1}c_{i_2 2}\dots c_{i_k k}\alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_k}).\end{aligned}$$

Maintenant, pour

$$\beta=\sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq n}\alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_n})e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_n},$$

on calcule pour $\beta\in\Omega^k(E)$,

$$\beta(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k})=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_k} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k}\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).$$

Mais

$$\begin{aligned}\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) &= \sum_{1\leq i_1',\dots,i_k'\leq n}\alpha(e_{i_1'},e_{i_2'},\dots,e_{i_k'})e^{i_1'}\otimes e^{i_2'}\otimes\dots\otimes e^{i_k'}(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\\ &= \sum_{1\leq i_1'\leq\dots\leq i_k'\leq n}\alpha(e_{i_1'},\dots,e_{i_k'})e^{i_1'}(e_{i_1})e^{i_2'}(e_{i_2})\dots e^{i_k'}(e_{i_k})\\ &= \sum_{1\leq i_1',\dots,i_k'\leq n}\alpha(e_{i_1'},\dots,e_{i_k'})\delta_{i_1}^{i_1'}\dots\delta_{i_k}^{i_k'}=\alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).\end{aligned}$$

Donc

$$\beta(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k})=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_k} c_{i_1 1}c_{i_2 2}\dots c_{i_k k}\alpha(e_{i_1},\dots,e_{ik})=\alpha(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}).$$

Donc ? est démontré, et on a $\alpha\in span(\mathscr{A})=\langle\mathscr{A}\rangle$, où $\mathscr{A}=\{e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}\}$.

Montrons que $\mathscr{A}$ est libre. Soit

$$\sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n} c_{i_1 i_2\dots i_k}e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}=0\in\Omega^k(E).$$

Le même calcul qu'auparavant démontre que

$$0=0(e_{i_1},\dots,e_{i_k})=c_{i_1\dots i_k},\forall i_1,\dots,i_k,$$

donc

$$\forall i_1,\dots,i_k, c_{i_1\dots i_k}=0,$$

donc $\mathscr{A}$ est libre. □

Remarque. *Si* $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$, $Df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{gathered} Df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ D^2 f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ \vdots \\ D^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))). \end{gathered}$$

Lemme. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \{\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \alpha$ *est 2-linéaire*$\}$.

Pour un élément $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, g(\overrightarrow{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Pour tout k, pour tout $x \in U$, $D^k f(x) \in (\Omega^k(\mathbb{R}^n))^m$. Cet espace est de dimension $m(n^k)$.
On définit

$$\alpha_g(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w}) \in \mathbb{R}^n.$$

On voit que α_g est une application 2-linéaire.
Supposons que $\alpha_g = \alpha_{g'}$, donc $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n, \alpha_g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \alpha_{g'}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donc $g(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w}) = g'(\overrightarrow{v})(\overrightarrow{w})$.
Donc $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, g(\overrightarrow{v}) = g'(\overrightarrow{v}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donc $g = g'$.
On en déduit que $g \longrightarrow \alpha_g$ est injective.