

# THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Yves AUBRY, M-147A, [yves.aubry@univ-tln.fr](mailto:yves.aubry@univ-tln.fr), Joachim ASCH

2023-2024



<b>I</b>	<b>Représentations linéaires des groupes finis</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Généralités sur les groupes</b>	<b>7</b>
1.1	Rappels . . . . .	7
1.2	Exemples de groupes . . . . .	8
1.2.1	$(\mathbb{Z}, +)$ . . . . .	8
1.2.2	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	9
1.3	Groupe diédral . . . . .	9
1.3.1	Description du groupe $D_3$ . . . . .	10
1.4	Les théorèmes de Sylow . . . . .	11
1.4.1	Groupes agissant sur un ensemble ou action de groupes . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Représentations linéaires des groupes finis</b>	<b>17</b>
2.1	Premières définitions . . . . .	17
2.1.1	Sous-représentations . . . . .	20
2.2	Théorème de Maschke . . . . .	20
2.3	Caractère d'une représentation . . . . .	21
2.4	Orthogonalité des caractères irréductibles . . . . .	24
2.5	Théorème de Frobenius . . . . .	27
2.6	Le cas des groupes abéliens . . . . .	30
2.7	Nombre de représentations irréductibles de degré 1 . . . . .	32
	Exercices . . . . .	35



Première partie

# Représentations linéaires des groupes finis



# CHAPITRE 1

## GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES

### 1.1 Rappels

Soit  $G$  un groupe. Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  (i. e.  $H \neq 0$  et  $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$ ).

Considérons la relation binaire suivante sur  $G$  :

Pour  $x, y \in G$ ,  $x \equiv_d y \pmod H$  ssi  $xy^{-1} \in H$ . C'est une relation d'équivalence. Elle est dite de congruence à gauche modulo  $H$ .

*Démonstration.* En effet, si  $x \in G$ , alors  $xx^{-1} = e \in H$ , donc  $x \pmod_g = x \pmod H$ . La relation est donc réflexive.

De plus, si  $x, y \in G$  tels que  $x \equiv_g y \pmod H$ , alors  $xy^{-1} \in H$ .  $H$  étant un sous-groupe de  $G$ , il est donc stable par passage au symétrique. D'où  $(xy^{-1})^{-1} \in H$ , i. e.  $yx^{-1} \in H$ , c'est-à-dire  $y \equiv_g x \pmod H$ .

Enfin, si  $x, y, z \in G$  tels que  $x \equiv_g y \pmod H$  et  $y \equiv_g z \pmod H$ , alors  $xy^{-1} \in H$  et  $yz^{-1} \in H$ . Or,  $H$  étant un sous-groupe de  $G$ , donc  $H$  est stable pour la loi de composition interne. D'où  $(xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$ . Par associativité,  $x(yy^{-1})z^{-1} \in H$ , ie  $xz^{-1} \in H$ .

Donc  $x \equiv_g z \pmod H$  et la relation est transitive.  $\square$

Soit  $x \in G$ . La classe d'équivalence de  $x$  pour cette relation d'équivalence est

$$\begin{aligned} cl_d(x) &= \{y \in G \mid xy^{-1} \in H\} \\ &= \{y \in G \mid \exists h \in H, xy^{-1} = h\} \\ &= \{y \in G \mid \exists h \in H, y = hx\} \\ &= \{hx, h \in H\} =: Hx \end{aligned}$$

De même, on considère, sur  $G$ , la relation de congruence à gauche modulo  $H$  :

$$x \equiv_g y \pmod H \text{ ssi } x^{-1}y \in H.$$

On montre de même que c'est une relation d'équivalence. Si  $x \in G$ , alors  $cl_g(x) := xH = \{xh, h \in H\}$ .

*Remarque.* Si  $G$  est abélien, alors les classes à gauche et à droite modulo  $H$  coïncident.

**Définition 1.1.1.** Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est dit distingué dans  $G$  (ou normal) si :

$$\begin{aligned} & \forall x \in G, xH = Hx, \\ \text{i. e. } & \forall x \in G, xHx^{-1} \subset H \\ \text{i. e. } & \forall x \in G, xHx^{-1} = H. \end{aligned}$$

On note alors  $H \triangleleft G$ .

*Remarque.* Tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué.

**Proposition 1.1.1.** Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ .

On note  $G/H$  l'ensemble des classes à droite ou à gauche modulo  $H$ .

Si  $x, y \in G$  et si l'on note  $\bar{a}$  la classe de  $a$  modulo  $H$ , on peut munir le quotient  $G/H$  d'une structure de groupe en posant

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}.$$

*Démonstration.* Cette loi est bien définie, i. e. elle ne dépend pas du choix des représentants des classes d'équivalence.  $\square$

*Remarque.* Cette loi de la surjection canonique  $\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/H \\ x & \longmapsto & \bar{x} \end{array}$  un morphisme de groupes.

**Théorème 1.1.1** (Lagrange). Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .  
Alors l'ordre de  $H$  divise l'ordre de  $G$ .

*Remarque.* L'ordre d'un groupe est simplement son cardinal.

*Remarque.* Si  $g$  est un élément de  $G$ , alors l'ordre de  $G$  est défini comme l'ordre du sous-groupe  $\langle g \rangle$  engendré par  $g$ . S'il est fini, alors l'ordre de  $g$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $g^n = e$ .

D'après le théorème de Lagrange, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

*Remarque.* Si  $G$  est un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ , alors les classes (à gauche) modulo  $H$  ont toutes le même cardinal, à savoir celui de  $H$ . En effet, l'application, pour  $x \in G$  :  $f_x : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & xH \\ h & \longmapsto & xh \end{array}$  est bijective.

## 1.2 Exemples de groupes

### 1.2.1 $(\mathbb{Z}, +)$

Groupe abélien.

$n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

*Remarque.* Tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $n\mathbb{Z}$  pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ .



1.2.2  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 

C'est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence suivante :

$$x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod{n\mathbb{Z}} \text{ ssi } x - y \in n\mathbb{Z}.$$

*Remarque.*  $\bar{x} = \bar{y}$  ssi  $xRy$ .

On munit l'ensemble quotient  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'une structure de groupe (et même d'anneau) en posant, pour  $x, y \in \mathbb{Z}$  :  $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$  (et  $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$ ).

*Remarque.*  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  anneau non intègre, car  $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$ .

*Remarque.*  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $n$  est premier.

**Proposition 1.2.1.** Tous les groupes  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont cycliques. Les générateurs sont les  $\bar{a}$  tels que  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux, i. e.  $(a, n) = 1$ . De plus, tout groupe cyclique est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  avec  $n = |G|$ .

Enfin, si  $G$  est cyclique d'ordre  $n$  alors pour tout diviseur  $d$  de  $n$ ,  $G$  admet un sous-groupe d'ordre  $d$ , et celui-ci est unique, et celui-ci est cyclique.

*Remarque.*  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{(\bar{a}, \bar{a}), \bar{a} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \bar{a} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ .

**Théorème 1.2.1** (Théorème des restes chinois). Soient  $n_1, \dots, n_r$  des entiers premiers entre eux deux à deux. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/\prod_{i=1}^r n_i \mathbb{Z} &\longrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z} \\ a + (\prod_{i=1}^r n_i) \mathbb{Z} &\longmapsto (a + n_1 \mathbb{Z}, \dots, a + n_r \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux et la réciproque est vraie.

19-09-2023

## 1.3 Groupe diédral

Soit  $n \geq 3$  un entier. Le groupe diédral de degré  $n$  est le groupe des isométries du plan laissant fixe le polygone régulier à  $n$  côtés. On le note  $D_n$  (ou  $D_{2n}$ ).

$D_n$  est un groupe d'ordre  $2n$  constitué de  $n$  rotations et de  $n$  symétries.

Considérons le polygone régulier dont les sommets sont, dans le plan complexe, les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Soit  $r = \text{rot}(0, \frac{2\pi}{n})$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  et soit  $s$  la symétrie axiale d'axe la droite réelle  $(x, x)$ .

On a

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi}{n}} z \end{array}$$

et

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}.$$

On vérifie que l'on a  $r^n = 1 = id$ ,  $s^2 = 1 = id$  et  $rs = r^{-1}$ .



FIGURE 1.1 – Racines 3-ièmes de l'unité.

*Démonstration.* En effet, si  $z \in \mathbb{C}$ , alors

$$r^{-1}(z) = e^{-\frac{2i\pi}{n}} z \text{ et } srs(z) = sr(\bar{z}) = s\left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \bar{z}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{n}} z = r^{-1}(z),$$

donc  $srs = r^{-1}$ . □

On peut donc définir le groupe diédral  $D_n$  par “générateurs et relations” de la façon suivante :

$$D_n = \langle r, s \rangle \text{ avec } r^n = s^2 = 1 \text{ et } srs = r^{-1}.$$

Le sous-groupe de  $D_n$  engendré par  $r$  est un sous-groupe d'ordre  $n$  :

$$\langle r \rangle = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}, id\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Il est d'indice 2 dans  $D_n$ , il est donc distingué dans  $D_n$ .

### 1.3.1 Description du groupe $D_3$

FIGURE 1.2 – Description explicite des éléments de  $D_3$ .

On a donc

$$D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$$

*Remarque.* Il n'existe que deux groupes d'ordre 6 à isomorphisme près, à savoir le groupe cyclique (abélien)  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et le groupe symétrique (non abélien)  $\mathfrak{S}_3$ .

Or  $D_3$  n'est pas abélien, donc  $D_3$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ .

*Exercice 1.* Déterminer l'ordre des éléments de  $D_3$  ainsi que ses sous-groupes.

*Exemple* (Groupe quaternionien). Soit  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions d'Hamilton.

$$\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid i^2 = j^2 = k^2 = 1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \text{ et } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{H}$  est un corps non commutatif. On  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ .

Considérons le sous-ensemble suivant de  $\mathbb{H}$  :

$$\mathbb{H}_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

*Exercice 2.* Montrer que  $\mathbb{H}_8$  muni de la multiplication est un groupe.

C'est un groupe non abélien d'ordre 8.

*Exercice 3.* Déterminer l'ordre des éléments de  $\mathbb{H}_8$  ainsi que ses sous-groupes.

**Théorème 1.3.1** (De classification des groupes abéliens finis). *Tout groupe **abélien** fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques de la forme*

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}, \text{ avec } d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r.$$

*Cette écriture est unique (à l'ordre près des facteurs).*

**Rappel** On en déduit qu'il existe trois groupes abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près :

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ et } (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3.$$

Question : a-t-on  $\mathbb{H}_8 \simeq D_4$  ?

## 1.4 Les théorèmes de Sylow

Si  $H$  est un sous-groupe d'un groupe  $G$ , ses **conjugués** dans  $G$  sont  $gHg^{-1}$ , avec  $g \in G$ . En particulier,  $H$  est distingué dans  $G$  si et seulement si il est égal à tous ses conjugués.

**Définition 1.4.1.** Si  $G$  est un groupe fini d'ordre  $p^\alpha q$ , avec  $p$  premier,  $\alpha \geq 1$  et  $q$  premier avec  $p$ , alors tout sous-groupe de  $G$  d'ordre  $p^\beta$  est appelé un  $p$  sous-groupe de Sylow de  $G$  (ou encore un  $p$ -Sylow de  $G$ ).

**Théorème 1.4.1** (Premier théorème de Sylow). *Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^\alpha q$ ,  $p$  premier,  $\alpha \geq 1$ ,  $(p, q) = 1$ . Pour tout  $1 \leq \beta \leq \alpha$ , il existe un sous-groupe de  $G$  d'ordre  $p^\beta$ .*

**Théorème 1.4.2** (Deuxième théorème de Sylow). *Le nombre  $n_p$  de  $p$ -Sylow de  $G$  vérifie :*

$$\begin{cases} n_p \equiv 1 \pmod{p} \\ n_p \mid q. \end{cases}$$

**Théorème 1.4.3** (Troisième théorème de Sylow).

1. Le conjugué d'un  $p$ -Sylow est un  $p$ -Sylow.
2. Tous les  $p$ -Sylow sont conjugués entre eux.

*Exercice 4.* Montrer qu'il n'existe pas de groupes simples d'ordre 15.

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe d'ordre  $3 \times 5 = 15$ . D'après le premier théorème de Sylow,  $G$  admet au moins un 3-Sylow.

Soit  $n_3$  le nombre de 3-Sylow de  $G$ . Par le deuxième théorème de Sylow, on a

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3} \text{ et } n_3 \mid 5.$$

$G$  admet donc un unique 3-Sylow  $H$ .

D'après le (1) du troisième théorème de Sylow, les conjugués de  $H$  sont des 3-Sylow de  $G$ , donc sont égaux à  $H$  puisque c'est le seul 3-Sylow de  $G$ . Donc  $H$  est égal à tous ses conjugués et donc  $H$  est distingué dans  $G$ . Puisque  $|H| = 3$ ,  $H \neq \{e\}$  et  $H \neq G$ . Donc  $G$  admet un sous-groupe distingué propre. Donc  $G$  n'est pas simple.  $\square$

### 1.4.1 Groupes agissant sur un ensemble ou action de groupes

**Définition 1.4.2** (Action de groupe). Une action (à gauche) d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1.  $\forall x \in X, e \cdot x = x$  (où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ );
2.  $\forall g, g' \in G, \forall x \in X, g \cdot (g' \cdot x) = \underbrace{(gg')}_{\text{LCI de } G} \cdot x$ .

On peut voir une action comme un morphisme de groupes de  $G$  dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_X$  de permutations dans  $X$  :

**Proposition 1.4.1.** Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$  par

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

alors pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\pi_g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

est une permutation de  $X$  et l'application

$$\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & \pi_g \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Réciproquement, si  $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & p_g \end{array}$  est un morphisme de groupes, alors  $(g, x) \mapsto g \cdot x := p_g(x)$  est une action de  $G$  sur  $X$ .

*Démonstration.*

Supposons que  $G$  agisse sur un ensemble  $X$  par

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}.$$

Soit  $g \in G$ . Considérons l'application  $\pi_g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ .

Montrons que  $\pi_g$  est injective. Soient  $x, y \in X$  tq  $\pi_g(x) = \pi_g(y)$ . D'où  $g \cdot x = g \cdot y$ . D'où  $g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot g \cdot y$ . D'où  $(g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot y$ . D'où  $e \cdot x = e \cdot y$ . Donc  $\pi_g$  est injective. Montrons que  $\pi_g$  est surjective. Soit  $y \in X$ . On a  $y = \pi_g(g^{-1}y) = g \cdot g^{-1} \cdot y$ . Donc  $\pi_g$  est surjective. Donc  $\pi_g$  est bijective.

On peut donc considérer l'application  $\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & \pi_g \end{array}$ .

Montrons que  $\pi$  est un morphisme de groupes. Montrons que  $\forall g, g' \in G, \pi_{gg'} = \pi_g \circ \pi_{g'}$ .

Soient  $g, g' \in G$ . Soit  $x \in X$ .

$$\pi_{gg'}(x) = (gg') \cdot x = g \cdot g' \cdot x = g \cdot (\pi_{g'}(x)) = \pi_g(\pi_{g'}(x)).$$

Donc  $\pi_{gg'} = \pi_g \circ \pi_{g'}$ .

Réciproquement, si on se donne un morphisme de groupes d'un groupe  $G$  dans un groupe de permutations  $\mathfrak{S}_X$  :

$$p : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & p_g, \end{array}$$

alors l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x := p_g(x) \end{array}$$

est une action de groupes.

En effet,

1. Soit  $x \in X$ , on a  $e \cdot x = p_e(x) = id_X(x) = x$ , car  $p$  est un morphisme de groupes et l'image de l'élément neutre par un morphisme de groupes est l'élément neutre.
2. Soient  $g, g' \in G$  et soit  $x \in X$  ; on a

$$g \cdot (g' \cdot x) = g \cdot (p_{g'}(x)) = p_g(p_{g'}(x)) = (p_g \circ p_{g'})(x) = p_{gg'}(x) = (gg') \cdot x,$$

car  $p$  est un morphisme de groupes.

□

Cela établit deux bijections réciproques entre l'ensemble des actions de  $G$  sur  $X$  et celui des morphismes de  $G$  dans  $\mathfrak{S}_X$ .

**Définition 1.4.3.** Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$ , alors la relation sur  $X$  définie par : pour  $x, y \in X, x \sim y$  ssi  $\exists g \in G, y = g \cdot x$  est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de  $X$  pour cette relation s'appelle **l'orbite** de  $X$  :

$$Orb(x) := \{g \cdot x, g \in G\}.$$

Ainsi, l'ensemble des orbites forme une **partition** de  $X$ .

On dit que  $g$  agit **transitivement** s'il n'y a qu'une seule orbite.

Le **noyau** de l'action est le noyau du morphisme associé :

$$\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & \left( \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \pi_g : x & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{Ker}(\pi) = \{g \in G \mid \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

On dit que l'action est **fidèle** si son noyau est réduit à  $\{e\}$  (i. e. si le morphisme  $\pi$  est injectif).  
Le **stabilisateur** (ou groupe d'isotropie) d'un élément  $x \in X$  est l'ensemble :

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

C'est un sous-groupe de  $G$  (en exercice).

**Proposition 1.4.2.** Pour  $x$  fixé dans  $X$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

définit une bijection de l'ensemble  $G/\text{Stab}(x)$  des classes à gauche modulo  $\text{Stab}(x)$  sur l'orbite de  $x$ .  
Ainsi, le cardinal de l'orbite  $\text{Orb}(x)$  est égal à l'indice du stabilisateur de  $x$  :

$$\#(\text{Orb}(x)) = [G : \text{Stab}(x)].$$

**Théorème 1.4.4** (Formule des classes). Soit  $G$  un groupe fini agissant sur un ensemble fini  $X$ . Alors

$$\#(X) = \sum_{\substack{x \text{ décrivant un système} \\ \text{des représentants des orbites}}} [G : \text{Stab}(x)].$$

*Démonstration.*

$$\#(X) = \sum_{i=1}^m \#(\text{Orb}(x_i)),$$

où  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est un système des représentants des orbites pour l'action de  $G$  sur  $X$ . □

**Exemple d'action de groupe** On fait agir un groupe  $G$  sur lui-même par conjugaison

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x := gxg^{-1}. \end{array}$$

C'est bien une action de groupes, car

1. Soit  $x \in G$ , on a  $e \cdot x = exe^{-1} = x$ .
2. Soient  $g, g' \in G$  et  $x \in G$ . On a :

$$g \cdot (g' \cdot x) = g \cdot (gxg^{-1}) = g(g'x(g')^{-1})g^{-1} = (gg')x((g')^{-1}g^{-1}) = (gg')x(gg')^{-1} = (gg') \cdot x.$$

20-09-2023

Cette action est-elle transitive, fidèle ? Quelle est l'orbite d'un élément ?  
Soit  $x \in G$ . L'orbite de  $x$  est :

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x, g \in G\} = \{gxg^{-1}, g \in G\} = \text{classe de conjugaison de } x \text{ dans } G.$$

On a  $\text{Orb}(e) = \{e\}$ . Si  $G$  n'est pas réduit à  $\{e\}$ , il y a plusieurs orbites : l'action n'est donc pas transitive (il y a autant d'orbites que de classes de conjugaison).

L'action est-elle fidèle ? Etudions le noyau du morphisme  $\pi$  associé à cette action

$$\pi : \begin{array}{ccc} G & & \\ g & \longmapsto & \left( \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & G \\ \pi_g : & x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array} \right) \end{array} \quad \mathfrak{S}_G$$

On a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\pi) &= \{g \in G \mid \pi_g = \text{id}_G\} = \{g \in G \mid \forall x \in G, \pi_g(x) = x\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\} = Z(G). \end{aligned}$$

L'action est fidèle si et seulement si le centre de  $G$  est réduit à l'élément neutre.

Soit  $x \in G$ . Quel est le stabilisateur de  $x$  ?

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} = \text{centralisateur de } x.$$

Etudions un exemple avec  $G = \mathfrak{S}_3$ . Les orbites de  $\mathfrak{S}_3$  pour cette action sont les classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_3$ . Elles constituent une partition de  $\mathfrak{S}_3$ .

1.  $\text{Orb}(e) = \{e\}$ .
2.  $\text{Orb}(\tau_3) = \{\sigma\tau_3\sigma^{-1}, \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{\text{transpositions de } \mathfrak{S}_3\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ .
3.  $\text{Orb}(\sigma_1) = \{\sigma\sigma_1\sigma^{-1}, \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{3\text{-cycles de } \mathfrak{S}_3\} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ .

La formule des classes s'écrit alors :

$$|\mathfrak{S}_3| = \sum [\mathfrak{S}_3 : \text{Stab}(x_i)],$$

où  $\{x_1, x_2, x_3\}$  est un système des représentants de l'orbite, avec  $x_1 = e, x_2 = \tau_1, x_3 = \sigma_1$ .

On a

$$|\mathfrak{S}_3| = \sum_{i=1}^3 \# \text{Orb}(x_i) = \# \text{Orb}(x_1) + \# \text{Orb}(x_2) + \# \text{Orb}(x_3) = 1 + 3 + 2 = 6.$$

L'action est fidèle, car  $Z(\mathfrak{S}_3) = \{e\}$ . L'action n'est pas transitive, car il y a trois orbites, à savoir les trois classes de conjugaison.

$$\text{Stab}(e) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \mid \sigma e = e\sigma\} = \mathfrak{S}_3.$$

On a bien

$$[\mathfrak{S}_3 : \text{Stab}(e)] = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|\text{Stab}(e)|} = \frac{3!}{3!} = 1 = \# \text{Orb}(e).$$

On a  $[\mathfrak{S}_3 : \text{Stab}(\tau_3)] = \# \text{Orb}(\tau_3) = 3$ , donc  $|\text{Stab}(\tau_3)| = 2$ . D'où

$$\text{Stab}(\tau_3) = \{\text{permutations de } \mathfrak{S}_3 \text{ qui commutent avec } \tau_3\} = \{e, \tau_3\}.$$

On a  $[\mathfrak{S}_3 : \text{Stab}(\sigma_1)] = \# \text{Orb}(\sigma_1) = 2$ , donc  $|\text{Stab}(\sigma_1)| = 3$ . Puisque l'indice du stabilisateur est 2, on en déduit que  $\text{Stab}(\sigma_1) \triangleleft \mathfrak{S}_3$ . Or les seuls sous-groupes distingués de  $\mathfrak{S}_n$  sont  $\{e\}$ ,  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathfrak{A}_n$ . Donc

$$\text{Stab}(\sigma_1) = \mathfrak{A}_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}.$$





## CHAPITRE 2

# REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Théorie introduite par Frobenius à la fin du XIX siècle.

### 2.1 Premières définitions

**Définition 2.1.1.** Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  est la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  muni d'une action de groupes (à gauche) de  $G$  agissant de manière linéaire :

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1.  $\forall x \in V, e \cdot x = x$  ;
2.  $\forall g, g' \in G, \forall x \in V, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$  ;
3.  $\forall g \in G, \forall x, x' \in V, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}, g \cdot (\lambda x + \lambda' x') = \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x$ .

Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  est donc la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et d'un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \begin{pmatrix} V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $GL(V)$  est le groupe des automorphismes du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$ .

On a bien  $\forall g, g' \in G, \rho_{gg'} = \rho_g \circ \rho_{g'}$  et  $\rho_e = id_V$  et  $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$  comme vu précédemment.

De plus,  $\forall g \in G$ , la bijection  $\rho_g$  est un endomorphisme de  $V$ , i. e. une application linéaire de  $V$  dans  $V$  et donc  $\rho_g \in GL(V)$ . En effet, si  $x, x' \in V$  et  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ , alors

$$\rho_g(\lambda x + \lambda' x') = g \cdot (\lambda x + \lambda' x') \stackrel{(3)}{=} \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x' = \lambda \rho_g(x) + \lambda' \rho_g(x').$$

**Définition 2.1.2.** L'espace vectoriel  $V$  est appelé **l'espace de la représentation**.

La dimension de  $V$  (en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) est appelé le **degré** ou la dimension de la représentation.

Lorsque  $\rho$  est injectif, la représentation est dite **fidèle** ; le groupe  $G$  se représente alors de manière concrète comme un sous-groupe de  $GL(V)$  ; lorsque  $V$  est de dimension finie (ce que nous allons supposer

dorénavant), le choix d'une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  fournit alors une représentation encore plus concrète comme groupe de matrice.

*Remarque (Personnelle).* Si  $\rho$  est une représentation fidèle, alors

$$\text{Ker}(\rho) = \{g \in G \mid \forall x \in V, g \cdot x = x\} = \{e\}.$$

*Remarque.* Soient  $G$  un groupe fini et  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation (linéaire) de  $G$ . Soit  $g \in G$  un élément d'ordre  $n$ . On a alors

$$(\rho_g)^n = \rho_{g^n} = \rho_e = id_V.$$

Donc l'endomorphisme  $\rho_g$  est racine du polynôme  $X^n - 1$  qui n'a que des racines simples. Le polynôme minimal de  $\rho_g$  divise donc le polynôme  $X^n - 1$  et n'a donc aussi que des racines simples. Le polynôme minimal de  $\rho_g$  est donc scindé sur  $\mathbb{C}$  et à racines simples, on en déduit que l'endomorphisme de  $\rho_g$  est **diagonalisable**.

*Exemple (De représentations).*

1. La représentation triviale (ou représentation unité) :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right). \end{aligned}$$

2. Les représentations de degré 1 : ce sont les morphismes de groupes

$$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

puisque si  $\dim(V) = 1$ , alors  $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$ , car les endomorphismes de  $V$  sont des homothéties :

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ f_\lambda &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

qui a une homothétie fait correspondre son rapport induit un isomorphisme. Si  $G$  est **fini**, tout élément de  $G$  est d'ordre fini (par le théorème de Lagrange) et donc, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho_g$  est une racine de l'unité dans  $\mathbb{C}$ , et en particulier  $\rho_g$  est un nombre complexe de module 1 :

$$|\rho_g| = 1.$$

3. Soient  $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . On définit la représentation canonique de degré  $n$  de  $\mathfrak{S}_n$  en posant :

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{S}_n &\longrightarrow GL(\mathbb{C}^n) \\ \sigma &\longmapsto \left( \rho_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ e_i & \longmapsto & \rho_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)} \end{array} \right). \end{aligned}$$

4. *La représentation de permutations.* Soit  $\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$  une action d'un groupe sur un ensemble fini  $X$ . Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension égale au cardinal de  $X$  (par exemple, on peut voir  $V$  comme le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur  $X$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  dont

une base peut être donnée par les fonctions indicatrices  $\varepsilon_x : X \rightarrow \mathbb{C}$  :

$$y \mapsto \varepsilon_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour  $x$  décrivant  $X$ ) muni d'une base indexée par les éléments de  $X : \{\varepsilon_x, x \in X\}$ . On peut écrire  $V = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}\varepsilon_x$ . On définit une représentation linéaire (complexe de dimension finie) :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \varepsilon_x & \longmapsto & \rho_g(\varepsilon_x) := \varepsilon_{g \cdot x} \end{array} \right). \end{aligned}$$

C'est la représentation de permutations associée à l'action de  $G$  sur  $X$  (c'est l'application qui envoie un vecteur de base sur un autre vecteur de base).

5. *La représentation régulière.* C'est l'exemple précédent avec  $X = G$  agissant sur lui-même (par translation à gauche) :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \varepsilon_x & \longmapsto & \varepsilon_{gx} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ici, il s'agit de la loi de composition interne de  $G$  et on a  $\dim(V) = |G|$ .

**Définition 2.1.3.** Deux représentations linéaires  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  d'un groupe  $G$  sont dites **isomorphes** ou équivalentes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels (ici application linéaire bijective)  $f : V \rightarrow V'$  tel que l'on ait :

$$\forall g \in G, \rho'_g \circ f = f \circ \rho_g.$$

On peut exprimer cette condition par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & GL(V) \\ \rho' \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow \tilde{f} \\ GL(V') & & \end{array}$$

*Remarque.* Dire que le diagramme ci-dessus commute, c'est dire que

$$\tilde{f} \circ \rho = \rho'.$$

D'où, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho'_g = \tilde{f}(\rho_g) = f \circ \rho_g \circ f^{-1}$ , i. e.  $\rho'_g \circ f = f \circ \rho_g$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho_g \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \rho'_g \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

*Remarque.* En termes de matrices, cela signifie que les matrices associées à la première représentation sont semblable à leurs homologues dans la deuxième, via la même matrice de passage :

$$\forall g \in G, \text{Mat}(\rho'_g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(\rho_g) \times \text{Mat}(f)^{-1}.$$

### 2.1.1 Sous-représentations

**Définition 2.1.4.** Si  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est une représentation linéaire d'un groupe  $G$  et si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par la représentation (i.e. stable par les automorphismes  $\rho_g$  pour  $g \in G$ , i.e.  $\forall g \in G, \rho_g(W) \subset W$ , i. e.  $\forall g \in G, \forall w \in W, \rho_g(w) \in W$ ), alors cela nous permet de définir une **sous-représentation**

$$\begin{aligned} \rho|_W : G &\longrightarrow GL(W) \\ g &\longmapsto \left( \rho_{g|_W} : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W \\ w & \longmapsto & \rho_g(w) \end{array} \right). \end{aligned}$$

**Définition 2.1.5.** Une représentation  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est dite **irréductible** si les seuls sous-espaces stables de  $V$  sont  $\{0\}$  et  $V$ .

*Remarque.* Les représentations de degré 1 sont bien évidemment des représentations irréductibles.

*Démonstration personnelle.* Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation de degré 1. Alors  $\dim(V) = 1$ . Si  $W$  sous-espace vectoriel de  $V$ , alors

1.  $\dim(W) = 0$  et dans ce cas  $W = \{0\}$ ;
2. ou bien  $\dim(W) = 1$  et dans ce cas  $W = V$ .

□

## 2.2 Théorème de Maschke

On définit tout d'abord la notion de **somme directe** de représentations. On rappelle que si  $V$  est un espace vectoriel et si  $W, W'$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $V$ , alors on dit que  $V$  est **somme directe** de  $W$  et  $W'$  si tout  $x \in V$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$x = w + w', \text{ avec } w \in W, w' \in W'.$$

Il revient au même de dire que

$$W \cap W' = \{0\} \text{ et } \dim(V) = \dim(W) + \dim(W').$$

On écrit alors  $V = W \oplus W'$  et l'on dit que  $W'$  est un **supplémentaire** de  $W$  dans  $V$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & W \end{array}$$

L'application  $p : v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{w'}_{\in W'} \longmapsto w$  est alors appelé le **projecteur** de  $V$  sur  $W$  associé à la

décomposition  $V = W \oplus W'$ . On a  $\text{Im}(p) = W$  et  $\text{Ker}(p) = W'$  et  $p(x) = x$  si  $x \in W$ .

Réciproquement, si  $p$  est une application linéaire de  $V$  sur lui-même vérifiant ces deux propriétés, on vérifie que  $V = W \oplus \text{Ker}(p)$ , avec  $\text{Ker}(p) = \{v \in V, p(v) = 0\}$ . On établit ainsi une **bijection** entre les projecteurs de  $V$  sur  $W$  et les **supplémentaires** de  $W$  dans  $V$ .

**Définition 2.2.1.** Soient  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  deux représentations d'un groupe  $G$ . On définit la somme directe  $\rho \oplus \rho'$  comme étant la représentation d'espace vectoriel  $V \oplus V'$  définie par

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\longmapsto \left( (\rho \oplus \rho')_g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v') \end{array} \right). \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.1** (De Maschke). *Toute représentation linéaire complexe de dimension finie d'un groupe fini est somme directe de représentations irréductibles.*

**Lemme.** *Tout sous-espace stable d'une représentation linéaire complexe de degré fini d'un groupe fini admet un sous-espace **supplémentaire stable**.*

*Remarque.*  $\triangle$  Il existe un produit scalaire hermitien sur l'espace de la représentation qui est stable par l'action du groupe. En effet, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne un produit scalaire quelconque sur  $V$ , le produit suivant est stable par  $\rho$  :

$$\forall x, y \in V, \langle x, y \rangle_\rho := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle.$$

En effet, si  $h \in G$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \langle \rho_h(x), \rho_h(y) \rangle_\rho &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(\rho_h(x)), \rho_g(\rho_h(y)) \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_{gh}(x), \rho_{gh}(y) \rangle = \langle x, y \rangle_\rho, \end{aligned}$$

car  $g \mapsto gh$  est une bijection de  $G$  sur lui-même.

*Démonstration du lemme 2.2.* Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable sous l'action de  $G$ , alors le supplémentaire **orthogonal** de  $W$  est lui aussi stable sous l'action puisque :  $W \subset V$  stable sous l'action de  $G$  par  $\rho$ , i. e.  $\forall g \in G, \rho_g(W) \subset W$ . On a

$$W^\perp := \{x \in V \mid \langle x, w \rangle_\rho = 0, \forall w \in W\}.$$

Montrons que  $W^\perp$  est stable par  $\rho$ . Soit  $g \in G$ , soit  $x \in W^\perp$ , montrons que  $\rho_g(x) \in W^\perp$ . Soit  $w \in W$ , montrons que  $\langle \rho_g(x), w \rangle_\rho = 0$ . On a

$$\langle \rho_g(x), w \rangle_\rho = \langle \rho_{g^{-1}}(\rho_g(x)), \rho_{g^{-1}}(w) \rangle_\rho = \langle x, \rho_{g^{-1}}(w) \rangle_\rho = 0,$$

car  $\rho_{g^{-1}}(w) \in W$ . □

*Démonstration du théorème 2.2.1.* Si  $\dim(V) = 1$  ou si  $V$  est irréductible, c'est démontré.

Si  $\dim(V) \geq 2$  et  $V$  est non irréductible, alors  $V$  possède une sous-représentation  $W$  distincte de  $\{0\}$  et  $V$ . Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$  est un produit scalaire hermitien sur  $V$  invariant sous l'action de  $G$ , le supplémentaire orthogonal  $W^\perp$  de  $W$  est lui aussi stable par  $G$ . On a alors  $V = W \oplus W'$  et  $W$  et  $W'$  sont de dimensions inférieures à celle de  $V$ .

Par l'hypothèse de récurrence, on peut les décomposer en sommes directes de représentations irréductibles. □

## 2.3 Caractère d'une représentation

**Définition 2.3.1.** On appelle **caractère** de la représentation  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  l'application

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi_\rho(g) := \text{Tr}(\rho_g). \end{aligned}$$

où  $\text{Tr}(\rho_g)$  désigne la **trace** de l'endomorphisme  $\rho_g$ .

Le degré du caractère  $\chi_\rho$  est défini comme le degré de la représentation  $\rho$ .

**Proposition 2.3.1** (Propriétés du caractère d'une représentation). Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  une représentation d'un groupe fini  $G$  de caractère  $\chi_\rho$ .

1.  $\chi_\rho(e) = \dim(V) = \text{degré de } \rho = \text{degré de } \chi_\rho$ .
2.  $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$  (conjugaison complexe).
3.  $\forall g, h \in G, \chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$ , i. e.  $\chi_\rho$  est une **fonction centrale** sur  $G$ , i. e.  $\chi_\rho$  est **constante sur les classes de conjugaison**.
4.  $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ , si  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  est une représentation de  $G$ .
5. Si  $\rho, \rho'$  sont équivalentes, alors  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

27-09-2023 *Démonstration.*

Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  représentation linéaire d'un groupe fini  $G$  de caractère  $\chi_\rho$ .

1. Par définition,  $\chi_\rho(e) = \text{Tr}(\rho_e)$ . Puisque  $\rho$  est un morphisme de groupes, l'image de l'élément neutre de  $G$  par  $\rho$  est donc l'élément neutre de  $GL(V)$ , à savoir l'identité  $\text{id}_V$  sur  $V$ . D'où :

$$\chi_\rho(e) = \text{Tr}(\rho_e) = \text{Tr}(\text{id}_V) = \text{Tr}(I_{\dim(V)}).$$

C'est la matrice identité à  $\dim(V)$  lignes et  $\dim(V)$  colonnes.

2. Montrons que  $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ .

Remarquons que si  $G$  est fini et si  $g \in G$ , alors les valeurs propres de  $\rho_g$  (les racines du polynôme de cet endomorphisme) sont les racines de l'unité. En effet, si  $G$  est d'ordre  $n$ , alors, par le théorème de Lagrange, on a  $g^n = e$ . D'où

$$\rho_g^n = \rho_{g^n} = \rho_e = \text{id}_V,$$

donc le polynôme minimal de  $\rho_g$  divise  $X^n - 1$ . Or les racines du polynôme minimal de  $\rho_g$  sont les valeurs propres de  $\rho_g$ . Donc les valeurs propres de  $\rho_g$  sont les racines de l'unité.

En particulier, les valeurs propres de  $\rho_g$  sont des nombres complexes de module 1. Donc, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\rho_g$ , alors  $|\lambda| = 1$  et donc  $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ . De plus, les valeurs propres de  $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$  (car  $\rho$  est un morphisme) sont les inverses de celles de  $\rho_g$ .

En effet, si  $f(x) = \lambda x$  avec  $x$  non nul et  $f \in GL(V)$ , alors

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x),$$

d'où  $f^{-1}(x) = \lambda^{-1}(x)$  et donc  $x$  est vecteur propre de  $f^{-1}$  pour la valeur propre  $\lambda^{-1}$ .

Enfin, puisque la trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicités), on en déduit que

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

3. Soient  $g, h \in G$ . On a

$$\begin{aligned} \chi_\rho(ghg^{-1}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \text{Tr}(\rho_{ghg^{-1}}) \stackrel{\text{morphisme}}{=} \text{Tr}(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_{g^{-1}}) \\ &= \text{Tr}(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_g^{-1}) \stackrel{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}{=} \text{Tr}(\rho_g^{-1} \circ \rho_g \circ \rho_h) = \text{Tr}(\rho_h) = \chi_\rho(h). \end{aligned}$$

Donc  $\chi_\rho$  est une fonction centrale sur  $G$ , i. e. qu'elle prend les mêmes valeurs sur les éléments d'une même classe de conjugaison.

4. Soient  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations de  $G$ . La somme directe de  $\rho$  et  $\rho'$  est la représentation

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\longmapsto \left( (\rho \oplus \rho')_g : \begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & V \oplus V' \\ v + v' & \longmapsto & \rho_g(v) + \rho'_g(v') \end{array} \right). \end{aligned}$$

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V$  et  $(e'_1, \dots, e'_m)$  est une base de  $V'$ , alors

$$B = (e_1 + 0, \dots, e_n + 0, 0 + e'_1, \dots, 0 + e'_m)$$

est une base de  $V \oplus V'$ .

D'où

$$\text{Mat}_B((\rho \oplus \rho')_g) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\rho_g) & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{(e'_1, \dots, e'_m)}(\rho'_g) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi_{(\rho \oplus \rho')_g} &= \text{Tr}((\rho \oplus \rho')_g) = \text{Tr}(\text{Mat}_B((\rho \oplus \rho')_g)) \\ &= \text{Tr}(\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\rho_g)) + \text{Tr}(\text{Mat}_{(e'_1, \dots, e'_m)}(\rho'_g)) = \chi_\rho(g) + \chi_{\rho'}(g). \end{aligned}$$

5. Soient  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations équivalentes de  $G$ . Alors il existe une isomorphisme  $f : V \longrightarrow V'$  tel que

$$\forall g \in G, \rho'_g = f \circ \rho_g \circ f^{-1}.$$

D'où, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\chi_{\rho'}(g) = \text{Tr}(\rho'_g) = \text{Tr}(f \circ \rho_g \circ f^{-1}) = \text{Tr}(\rho_g) = \chi_\rho(g).$$

Donc  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

□

*Exemple* (Calcul de caractères).

1. Si  $G$  opère sur un ensemble fini  $X$ , considérons la représentation de permutations  $\rho$  associée, avec  $V = \bigoplus_{x \in X} \langle e_x \rangle = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}e_x$ .

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \left( \rho_g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \varepsilon_x & \longmapsto & \rho_g(\varepsilon_x) := \varepsilon_{g \cdot x} \end{array} \right). \end{aligned}$$

On a  $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g)$ . Dans une base  $(e_x)_{x \in X}$  de  $V$ , pour  $g \in G$  fixé, la matrice de  $\rho_g$  est une matrice de permutations, i.e. a exactement un 1 par ligne et par colonne et tous les autres coefficients sont nuls.

De plus, si  $\text{Mat}_{(e_x)}(\rho_g) = (a_{ij})_{i,j}$ , alors le terme diagonal correspondant à  $\rho_g(e_x)$  sera égal à 1 si et seulement si  $g \cdot x = x$  si et seulement si  $x$  est un point fixe de  $g$ . Sinon il vaudra 0. Donc

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \#\{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

2. Caractère de la représentation régulière (c'est le cas particulier de la représentation de permutations  $\rho$  avec  $G$  fini,  $X = G$ , l'action étant la multiplication dans  $G$ ).

On a alors, pour tout  $g \in G$  :

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \# \{x \in G \mid gx = x\} = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{si } g \neq e. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Définition 2.3.2.** Un caractère d'un groupe  $G$  est dit **irréductible** si c'est le caractère d'une représentation irréductible de  $G$ .

## 2.4 Orthogonalité des caractères irréductibles

Soit  $G$  un groupe fini. On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(G)$  des fonctions définies sur  $G$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On munit le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(G)$  d'une structure hermitienne donnée par le produit scalaire suivant : pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(G)$ , on a

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g).$$

*Remarque.* Si  $f \in \mathcal{F}(G)$ , alors

$$f = \sum_{g \in G} \lambda \text{Ind}_g = \sum_{g \in G} f(g) \text{Ind}_g,$$

où

$$\begin{aligned} \text{Ind}_g : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = g \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $(\text{Ind}_g)_{g \in G}$  est une base de  $\mathcal{F}(G)$ . En particulier,  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}(G)) = |G|$ .

**Lemme (De Schur).** Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations linéaires irréductibles d'un groupe fini  $G$ . Soit  $f : V \longrightarrow V'$  une application linéaire vérifiant :

$$\forall g \in G, f \circ \rho_g = \rho'_g \circ f.$$

1. Si  $\rho$  et  $\rho'$  ne sont pas isomorphes, alors  $f = 0$ .
2. Si  $\rho$  et  $\rho'$  sont isomorphes, alors  $f$  est une homothétie.

*Démonstration.*

1. Montrons la contraposée : on suppose que  $f$  n'est pas l'application nulle.

Le sous-espace  $\text{Ker}(f)$  de  $V$  est stable par  $\rho$ . En effet, si  $g \in G$  et si  $x \in \text{Ker}(f)$ , alors  $\rho_g(x) \in \text{Ker}(f)$ , car :

$$f(\rho_g(x)) = (f \circ \rho_g)(x) = (\rho'_g \circ f)(x) = \rho'_g(f(x)) = \rho'_g(0) = \rho'_g(0) = 0.$$

Comme  $f \neq 0$ , i. e.  $\text{Ker}(f) \neq V$ , on en déduit que  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  par irréductibilité de  $\rho$ .



De même, le sous-espace  $\text{Im}(f)$  de  $V'$  est stable par  $\rho'$ . En effet, si  $g \in G$  et  $y = f(x) \in \text{Im}(f)$ , alors  $\rho'_g(y) \in \text{Im}(f)$ , car

$$\rho'_g(y) = \rho'_g(f(x)) = (\rho'_g \circ f)(x) = (f \circ \rho_g)(x) = f(\rho_g(x)).$$

Puisque  $f \neq 0$  (i. e.  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ ), on en déduit que  $\text{Im}(f) = V'$  par irréductibilité de  $\rho'$ .

En conclusion,  $f$  est bijective. Donc  $f$  est un isomorphisme et donc  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux représentations isomorphes.

2. On suppose que  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ . On peut donc identifier  $V$  et  $V'$  (et  $\rho$  et  $\rho'$ ). Puisque  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss), l'endomorphisme  $f : V \longrightarrow V$  admet une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Le sous-espace propre  $\text{SEP}(f, \lambda)$  de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$  est stable par  $\rho$ .

En effet, si  $g \in G$  et si  $x \in \text{SEP}(f, \lambda)$ , alors  $\rho_g(x) \in \text{SEP}(f, \lambda)$ , car

$$f(\rho_g(x)) = \rho_g(f(x)) = \rho_g(\lambda x) = \lambda \rho_g(x).$$

Donc  $\underbrace{\text{SEP}(f, \lambda)}_{\neq \{0\}} = V$  par irréductibilité de  $\rho$ . D'où,  $\forall x \in V, f(x) = \lambda x$ , i. e.  $f$  est une homothétie de rapport  $\lambda$ .

□

**Proposition 2.4.1.** Les caractères irréductibles d'un groupe  $G$  forment un système orthonormal de fonctions de l'espace vectoriel hermitien  $\mathcal{F}(G)$ , i. e.

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

si  $\chi, \chi'$  ne sont pas des caractères irréductibles de  $G$ .

*Démonstration.* Soient  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  deux représentations irréductibles de  $G$  et soient  $\chi$  et  $\chi'$  leurs caractères associés.

Soit  $g \in G$ , notons  $\text{Mat}(\rho_g) = (a_{ij}(g))_{1 \leq i, j \leq d}$ ,  $\text{Mat}(\rho'_g) = (a'_{ij}(g))_{1 \leq i, j \leq d'}$ , où  $d = \deg(\chi) = \dim(V)$  et  $d' = \deg(\chi') = \dim(V')$ . On a :

$$\chi(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \sum_{i=1}^d a_{ii}(g) \text{ et } \chi'(g) = \sum_{i=1}^{d'} a'_{ii}(g).$$

D'où

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i, j} \overline{a_{ii}(g)} a'_{ii}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ non isomorphes,} \\ 1 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ son isomorphes.} \end{cases}$$

□

*Exercice 5.* On note  $\hat{G}$  l'ensemble des caractères linéaires d'un groupe  $G$ , i. e. l'ensemble des morphismes  $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$  (ce sont les caractères des représentations de degré 1 (donc irréductibles) de  $G$ ). On définit le produit  $\chi\chi'$  de deux caractères linéaires de  $G$  : pour  $g \in G$ ,

$$(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g).$$

1. Montrer que  $\hat{G}$ , muni de ce produit, est un groupe abélien.

2. On rappelle que le caractère trivial est défini par :

$$\begin{aligned} \chi_0 : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Montrer que si  $G$  est fini et si  $\chi \in \hat{G}$ , alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En déduire les relations d'orthogonalité des caractères linéaires : si  $\chi, \chi' \in \hat{G}$ , alors

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.*

1. ★ Le produit est bien une loi de composition interne dans  $\hat{G}$  car si  $\chi, \chi' \in \hat{G}$ , alors  $\chi\chi' : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$  est bien un morphisme de groupes.  
En effet, si  $g, g' \in G$ , alors

$$(\chi\chi')(gg') = \chi(gg')\chi'(gg') = \chi(g)\chi(g')\chi'(g)\chi'(g') = (\chi(g)\chi'(g))(\chi(g')\chi'(g')) = (\chi\chi')(g)(\chi\chi')(g').$$

★ La loi est associative, car la multiplication l'est dans  $\mathbb{C}$ .

★ L'application  $\chi_0 : \begin{matrix} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & 1 \end{matrix}$  est bien un morphisme de groupes et est l'élément neutre de  $\hat{G}$ .

★ Si  $\chi \in \hat{G}$ , alors le caractère linéaire  $\chi' : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$  défini par

$$\chi'(g) = \frac{1}{\chi(g)} = (\chi'(g))^{-1} = \chi(g^{-1})$$

vérifie  $\chi\chi' = \chi_0 = \chi'\chi$ , et donc  $\chi^{-1} = \chi'$  est le symétrique de  $\chi$  dans  $\hat{G}$ , car  $\chi^{-1}$  est encore un morphisme de groupes. En effet, si  $g, g' \in G$ , alors

$$\chi^{-1}(gg') = \chi((gg')^{-1}) = \chi((g')^{-1}g^{-1}) = \chi((g')^{-1})\chi(g^{-1}) = \chi^{-1}(g')\chi^{-1}(g) = \chi^{-1}(g)\chi^{-1}(g').$$

De plus,  $\chi\chi' = \chi'\chi, \forall \chi, \chi' \in \hat{G}$ , c'est-à-dire  $\hat{G}$  est un groupe abélien.

2. Si  $\chi = \chi_0$ , alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = 1.$$

Soit maintenant  $\chi \in \hat{G}$  tel que  $\chi \neq \chi_0$ . Il existe alors  $a \in G$  tel que  $\chi(a) \neq 1$ . On a :

$$\frac{\chi(a)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(a)\chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(ag) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g),$$

car l'application  $f_a$  définie par  $f_a : \begin{matrix} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & ag \end{matrix}$  est une bijection. D'où :

$$(\chi(a) - 1) \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \right) = 0.$$

Cette égalité a lieu dans  $\mathbb{C}$  qui est un corps, donc en particulier un anneau intègre et donc ne contient pas de diviseurs de 0. Or  $\chi(a) - 1 \neq 0$ , car  $\chi(a) \neq 1$ . Donc

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

3. Si  $\chi \in \hat{G}$ , alors on a :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\chi(g)} \chi(g),$$

car,  $G$  étant fini, on a pour tout  $g \in G$ ,  $g^{|G|} = e$  (par le théorème de Lagrange) et donc  $\chi(g^{|G|}) = \chi(g)^{|G|}$ , donc  $\chi(g)$  est une racine de l'unité dans  $\mathbb{C}$  ! En particulier,  $\chi(g)$  est un nombre complexe de module 1, et donc son conjugué est égal à son inverse

$$\overline{\chi(g)} = \frac{1}{\chi(g)}.$$

$$\text{Donc } \langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = \frac{|G|}{|G|} = 1.$$

Soient  $\chi, \chi' \in \hat{G}$  tels que  $\chi \neq \chi'$ . Il existe donc  $a \in G$  tel que  $\chi(a) \neq \chi'(a)$ . On a :

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(ag)} \chi'(ag)$$

grâce au même argument que dans la question précédente. D'où

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi' \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(a) \chi(g) \chi'(a) \chi'(g) \\ &= \frac{\overline{\chi(a)} \chi'(a)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \overline{\chi(a)} \chi'(a) \langle \chi, \chi' \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $(\overline{\chi(a)} \chi'(a) - 1) \langle \chi, \chi' \rangle = 0$ . On a donc  $\overline{\chi(a)} \chi'(a) - 1 = 0$  ou  $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ . Or  $\overline{\chi(a)} \chi'(a) = 1 \iff \chi'(a) = \frac{1}{\overline{\chi(a)}} = \chi(a)$ . Or on a  $\chi'(a) \neq \chi(a)$ . Donc  $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ .

□

## 2.5 Théorème de Frobenius

Soit  $G$  un groupe et soit  $\mathcal{F}(G) = \{\text{fonctions } f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$  l'ensemble des fonctions définies sur  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Les fonctions  $\mathcal{F}(G)$  qui sont **constantes** sur **les classes de conjugaison** de  $G$  sont appelées fonctions **centrales** sur  $G$ . On note  $\mathcal{F}_C(G)$  l'ensemble des fonctions centrales :

$$\mathcal{F}_C(G) := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}^*, \forall g, h \in G, f(ghg^{-1}) = f(h)\}.$$

On a vu que les caractères  $\chi_\rho$  des représentations  $\rho$  de  $G$  sont des fonctions centrales sur  $G$ .  $\mathcal{F}_C(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(G)$ .

**Théorème 2.5.1** (De Frobenius). *Les caractères **irréductibles** d'un groupe  $G$  forment une **base orthonormale** de l'espace  $\mathcal{F}_C(G)$  de fonctions centrales sur  $G$ .*

*Sketch of proof.* On a déjà vu que les caractères irréductibles forment un système libre de fonctions de  $\mathcal{F}_C(G)$  (proposition 2.4.1). Notons  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par les caractères irréductibles de  $G$ . L'idée de la preuve est de vérifier que l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$  est réduit à 0 en utilisant le lemme de Schur (cf 2.4).  $\square$

**Corollaire 1.** *Le nombre de (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles d'un groupe  $G$  est égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème de Frobenius, le nombre de représentations irréductibles d'un groupe  $G$  est égal à la dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}_C(G)$  des fonctions centrales sur  $G$ . Or une fonction est centrale si et seulement si elle est constante sur chaque classe de conjugaison ; une fonction centrale  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  peut donc s'écrire de manière unique sous la forme :

$$\phi = \sum_{C \in \text{Conj}(G)} \lambda_C 1_C,$$

où  $\text{Conj}(G)$  est l'ensemble de classes de conjugaison de  $G$  et  $1_C$  est la fonction indicatrice de  $C$ , i. e.  $1_C(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et où  $\lambda_C \in \mathbb{C}$  (on a  $\lambda_C = \phi(g)$  où  $g$  est n'importe quel élément de  $C$ ). Les fonctions indicatrices  $1_C$ , pour  $C \in \text{Conj}(G)$ , forment donc une base de  $\mathcal{F}_C(G)$ , qui, de ce fait, est de dimension le cardinal de  $\text{Conj}(G)$ .  $\square$

04-10-2023 *Remarque (Notation).* Si  $G$  est un groupe fini, on note  $\text{Irr}(G)$  l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de  $G$  qu'on identifie parfois à l'espace de ces représentations irréductibles.

$$\begin{aligned} \text{Irr}(G) &= \{ \rho : G \rightarrow W, \text{ représentations irréductibles de } G \text{ à isomorphisme près} \} \\ &= \{ \mathbb{C} - \text{espaces vectoriels } W, \text{ espaces des représentations irréductibles de } G \}. \end{aligned}$$

**Corollaire 2** (Décomposition canonique d'une représentation). *Si  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est une représentation de  $G$ , et si  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  est une décomposition de  $V$  en somme directe de représentations irréductibles de  $G$  (i. e.  $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k : G \rightarrow GL(W_1 \oplus \dots \oplus W_k)$ , avec  $\rho_i : G \rightarrow GL(W_i)$  représentation irréductible pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ ) et si  $W \in \text{Irr}(G)$ , alors le nombre  $m_W$  de  $W_i$  qui sont isomorphes à  $W$  (i. e. l'ordre de multiplicité de  $W$  dans cette représentation) est égal à  $\langle \chi_W, \chi_V \rangle$  où  $\chi_W$  et  $\chi_V$  sont les caractères associés aux représentations de  $G$  d'espaces  $W$  et  $V$ .*

*En particulier, il ne dépend de la décomposition et*

$$V \simeq \bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle W.$$

*Démonstration.* On a

$$\chi_V = \chi_{W_1} + \dots + \chi_{W_k}.$$

D'où

$$\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \langle \chi_W, \chi_{W_1} \rangle + \dots + \langle \chi_W, \chi_{W_k} \rangle.$$

$$\text{Or } \langle \chi_W, \chi_{W_i} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } W_i \simeq W \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \langle \chi_W, \chi_V \rangle = m_W. \quad \square$$

**Corollaire 3** (Les caractères caractérisent les représentations). *Deux représentations d'un même groupe fini sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère.*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2, si  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  et  $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$  sont deux représentations de  $G$  ayant même caractère  $\chi$  alors  $V$  et  $V'$  sont tous les deux isomorphes à :

$$\bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi \rangle W.$$

Réciproquement, si  $\rho$  et  $\rho'$  sont isomorphes, alors  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$  (déjà vu).  $\square$

**Corollaire 4** (Critère d'irréductibilité). *Une représentation  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  d'un groupe  $G$  est irréductible si et seulement si  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  où  $\chi$  est le caractère de  $\rho$ .*

*Démonstration.* Si  $V \simeq \bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} m_W W$ , alors

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \left\langle \sum_{w \in \text{Irr}(G)} m_W \chi_W, \sum_{w \in \text{Irr}(G)} m_W \chi_W \right\rangle = \sum_{w \in \text{Irr}(G)} m_W^2,$$

car les caractères irréductibles de  $G$  forment une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions centrales sur  $G$  par le théorème de Frobenius. Puisque les  $m_W \in \mathbb{N}$ , on en déduit que :

$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$  ssi tous les  $m_W$  sont égaux à 0 sauf un qui est égal à 1  
ssi  $V \simeq W$  ssi  $V \in \text{Irr}(G)$  ssi  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  est une représentation irréductible.  $\square$

**Corollaire 5** (Formule de Burnside). *Si  $G$  est un groupe fini, alors on a :*

$$\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim(W))^2 = |G|.$$

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe fini. Considérons le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V = \mathcal{F}(G)$  des fonctions définies sur  $G$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Une base de  $V$  est donnée par les fonctions indicatrices des éléments de  $G$  : pour  $x \in G$ , on considère la fonction indicatrice de  $\{x\}$ , à savoir la fonction

$$\begin{aligned} \varepsilon_x : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Toute fonction  $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$  s'écrit alors de manière unique sous la forme :

$$f = \sum_{x \in G} f(x) \varepsilon_x.$$

La famille  $\{\varepsilon_x\}$  est donc une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V = \mathcal{F}(G)$  de dimension égale à l'ordre de  $G$  :

$$V = \bigoplus_{x \in G} \mathbb{C}\varepsilon_x.$$

Considérons la représentation régulière de  $G$ , à savoir la représentation d'espace  $V = \mathcal{F}(G)$  donnée par

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \rho_g : \begin{pmatrix} V & \longrightarrow & V \\ \varepsilon_x & \longmapsto & \varepsilon_{gx} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrons que si  $W$  est une représentation irréductible de  $G$ , alors  $W$  apparaît dans la représentation régulière de  $G$  avec la multiplicité  $\dim(W)$ .

En effet, le caractère  $\chi$  de la représentation régulière est donné par :

$$\chi(e) = |G| \text{ et } \chi(g) = 0 \text{ pour tout } g \in G \setminus \{e\}.$$

Or, d'après le corollaire 2, la multiplicité de  $W$  dans  $V$  est égale à :

$$\langle \chi_W, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_W(e)} |G| = \overline{\chi_W(e)} = \dim(W).$$

On en déduit que

$$\chi = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim(W)) \cdot \chi_W.$$

En appliquant cette égalité à  $g = e$ , on trouve :

$$|G| = \chi(e) = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} \dim(W) \chi_W(e) = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim(W))^2.$$

□

## 2.6 Le cas des groupes abéliens

**Théorème 2.6.1** (Le cas commutatif). *Si  $G$  est abélien, alors toute représentation irréductible de  $G$  est de degré 1. Autrement dit,  $\text{Irr}(G)$  coïncide avec l'ensemble  $\hat{G}$  des caractères linéaires de  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe abélien fini. Les classes de conjugaison de  $G$  sont toutes réduites à un élément. Il y a donc autant de classes de conjugaison dans  $G$  que d'éléments de  $G$ .

Si l'on note  $\text{Conj}(G)$  l'ensemble des classes de conjugaison de  $G$ , on a donc  $\# \text{Conj}(G) = |G|$ .

Or, d'après le corollaire 1, on a  $\# \text{Irr}(G) = \# \text{Conj}(G)$ . De plus, d'après la formule de Burnside, on a :

$$\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim(W))^2 = |G|.$$

Or, on a  $\dim(W) \geq 1$  pour tout  $W \in \text{Irr}(G)$  et puisqu'il y a  $|G|$  éléments dans  $\text{Irr}(G)$ , on en déduit que  $\dim(W) = 1, \forall W \in \text{Irr}(G)$ . □

**Corollaire 6.** *Si  $G$  est abélien, alors toute fonction de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  est combinaison linéaire de caractères linéaires.*

*Démonstration.* D'après le théorème de Frobenius, toute fonction centrale (et donc toute fonction puisque  $G$  est abélien) est combinaison linéaire de caractères irréductibles. Le théorème précédent permet de conclure.  $\square$

*Remarque.* Comme les caractères linéaires d'un groupe abélien  $G$  forment une base orthonormale des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , il est facile de décomposer une fonction quelconque comme une combinaison linéaire de caractères linéaires. Si  $\phi$  est une fonction sur  $G$ , on définit la transformée de Fourier  $\hat{\phi}$  comme la fonction définie sur  $\hat{G}$  par :

$$\hat{\phi}(x) = \langle \chi, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \phi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-1} \phi(g).$$

La formule d'inversion de Fourier s'exprime alors sous la forme :

$$\phi = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{\phi}(\chi) \chi.$$

C'est la conséquence immédiate du fait que les  $\chi$ , pour  $\chi \in \hat{G}$ , forment une famille orthonormale. Par exemple, si on applique ce qui précède à la fonction

$$\begin{aligned} \phi_a : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } g = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \end{aligned}$$

on a :

$$\phi_a(\chi) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi(a)}$$

et on obtient

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in \hat{G}} \overline{\chi(a)} \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Exercice 6.* Ecrire la table de caractères irréductibles de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Le groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est abélien. Ses représentations irréductibles sont toutes de degré 1. Elles coïncident donc avec leurs caractères linéaires. Leur nombre est égal à celui des classes de conjugaison de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , à savoir 2, car  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est abélien. Les représentations irréductibles de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  les représentations irréductibles de degré 1, à savoir les morphismes de groupes :  $\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ .

On a la représentation triviale :

$$\begin{aligned} \rho_0 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \bar{0} &\longmapsto 1 \\ \bar{1} &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

dont le caractère est  $\chi_0 = \rho_0$ .

De plus,  $\rho(\bar{1})^2 = \rho(\bar{1} + \bar{1}) = \rho(\bar{0}) = 1$ . Donc  $\rho(\bar{1})$  est une racine carrée de 1 dans  $\mathbb{C}$ , i. e. vaut 1 ou -1. L'autre représentation irréductible de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est donc :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \bar{0} &\longmapsto 1 \\ \bar{1} &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

et son caractère coïncide avec  $\rho$ . La table des caractères irréductibles de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est donc :

	Conjug( $\bar{0}$ ) = $\bar{0}$	Conjug( $\bar{1}$ ) = $\bar{1}$
$\chi_0$	1	1
$\chi$	1	-1

$\square$

*Exercice 7.* Ecrire la table des caractères irréductibles de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

*Exercice 8.* Déterminer les représentations irréductibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pour  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* Le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est abélien, il admet donc  $n$  représentations irréductibles à isomorphisme près (car il possède  $n$  classes de conjugaison). De plus, par la formule de Burnside,

$$\sum_{W \in \text{Irr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} (\dim(W))^2 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n.$$

On en déduit que les représentations irréductibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont toutes de degré 1.

Elles coïncident donc avec les caractères linéaires de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , à savoir les morphismes de groupes  $\chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Or, le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est cyclique et est engendré par  $\bar{1}$  (où  $\bar{a} = a + n\mathbb{Z}$ ).

Le morphisme  $\chi$  est donc entièrement déterminé par la valeur  $\chi(\bar{1})$  de  $\chi$  en  $\bar{1}$ .

De plus, on a :  $\chi(\bar{n}) = \chi(\underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1}}_{n \text{ fois}}) = \chi(\bar{1})^n$ . Donc  $\chi(\bar{1})$  est une racine  $n$ -ième de l'unité dans

$\mathbb{C}$ . Il existe donc  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $\chi(\bar{1}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ .

On a alors, pour tout  $r : \chi(\bar{r}) = \chi(\bar{1})^r = e^{\frac{2ik\pi r}{n}} =: \chi_k(\bar{r})$ . On obtient donc les  $n$  représentations irréductibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  en considérant  $\chi_0, \dots, \chi_{n-1}$  définis par

$$\begin{aligned} \chi_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \bar{r} &\longmapsto \chi_k(\bar{r}) = e^{\frac{2ik\pi r}{n}}. \end{aligned}$$

C'est aussi la liste des caractères irréductibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .  $\chi_0$  est alors le caractère trivial de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .  $\square$

*Remarque.* L'ensemble  $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  des caractères de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un groupe pour la loi

$$\chi_k \cdot \chi_{k'} = \chi_{k+k' \pmod n}.$$

Le groupe  $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  est cyclique d'ordre  $n$ , engendré par

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \bar{r} &\longmapsto \chi_k(\bar{r}) = e^{\frac{2ik\pi r}{n}}. \end{aligned}$$

## 2.7 Nombre de représentations irréductibles de degré 1

10-10-2023

**Définition 2.7.1.** Soit  $G$  un groupe. Un **commutateur** de  $G$  est un élément de la forme :

$$xyx^{-1}y^{-1} \text{ avec } x, y \in G.$$

**Définition 2.7.2.** Soit  $G$  un groupe. Le **groupe dérivé** de  $G$ , noté  $D(G)$  ou  $G'$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par les commutateurs :

$$D(G) := \langle xyx^{-1}y^{-1}, x, y \in G \rangle.$$

*Remarque.*  $D(G)$  est donc le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant tous les commutateurs de  $G$ .

**Proposition 2.7.1.** Soit  $G$  un groupe.

1. On a  $D(G) = \{e\}$  si et seulement si  $G$  est abélien.
2. On a que  $D(G) \triangleleft G$ .
3. Soit  $H \triangleleft G$ . On a  $G/H$  est abélien si et seulement si  $D(G) \subset H$ .



*Démonstration.*

1. Si  $G$  est abélien, alors tous les commutateurs de  $G$  sont égaux à  $e$  et donc  $D(G) = \langle e \rangle = \{e\}$ . Réciproquement, si  $D(G) = \{e\}$ , alors tous les commutateurs de  $G$  valent  $e$ , i. e.  $\forall x, y \in G, xyx^{-1}y^{-1} = e$ , i. e.  $\forall x, y \in G, xy = yx$ , i. e.  $G$  est abélien.
2.  $D(G)$  est stable par tout automorphisme (on dit que  $D(G)$  est un sous-groupe caractéristique de  $G$ ), car si  $f \in \text{Aut}(G)$ , on a :

$$\forall x, y \in G, f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$$

qui est encore un commutateur. Donc, a fortiori,  $D(G)$  est stable par tout automorphisme intérieur de  $G$  (i. e. les automorphismes de la forme  $f_g : \begin{matrix} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{matrix}$  pour  $g \in G$ ). Donc  $D(G) \triangleleft G$ .

3. On a :

$$\begin{aligned} D(G) \subset H &\iff \forall x, y \in G, xyx^{-1}y^{-1} \in H \iff \forall x, y \in G, xy(yx)^{-1} \in H \\ &\iff \forall x, y \in G, Hxy = Hyx \iff \forall x, y \in G, HxHy = HyHx \iff \forall x, y \in G, \overline{xy} = \overline{yx}, \end{aligned}$$

où  $\bar{a} = Ha = aH$ , car  $H \triangleleft G$ . Donc  $G/H$  est abélien.

□

*Remarque.* On a donc  $G/D(G)$  est abélien.

*Exercice 9.* Déterminer  $D(\mathfrak{A}_3), D(\mathfrak{S}_3), D(\mathfrak{A}_4), D(\mathfrak{S}_4)$ .

*Démonstration.*

1.  $|\mathfrak{A}_3| = \frac{3!}{2} = 3$ , or 3 est premier, donc  $\mathfrak{A}_3$  est **cyclique**, donc **abélien**.
2. On a  $D(\mathfrak{S}_3) \triangleleft \mathfrak{S}_3$ . Or les seuls sous-groupes distingués de  $\mathfrak{S}_3$  sont  $\{id\}, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{A}_3$ . Donc  $D(\mathfrak{S}_3) = \{e\}$  ou  $D(\mathfrak{S}_3)\mathfrak{S}_3$  ou  $D(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{A}_3$ .  
Or  $\mathfrak{S}_3$  n'est pas abélien, donc  $D(\mathfrak{S}_3) \neq \{id\}$ . De plus, la signature d'un commutateur est égale à 1, car la signature est un morphisme de groupes et donc, pour tous  $x, y \in G$  :

$$\varepsilon(xyx^{-1}y^{-1}) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(x^{-1})\varepsilon(y^{-1}) = \varepsilon(x)\varepsilon(x^{-1})\varepsilon(y)\varepsilon(y^{-1}) = \varepsilon(e)\varepsilon(e) = 1.$$

D'où  $D(\mathfrak{S}_3) \subset \mathfrak{A}_3$ . Donc  $D(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{A}_3$ .

3. Quels sont les sous-groupes distingués de  $\mathfrak{A}_4$  ?

*Remarque.* D'après le théorème de Galois,  $\mathfrak{A}_n$  est simple si et seulement si  $n \neq 4$ , i. e.  $\mathfrak{A}_n$  n'admet pas de sous-groupes distingués propres si et seulement si  $n \neq 4$ .

On en déduit que  $\mathfrak{A}_4$  n'est pas simple. Déterminons la partition de  $\mathfrak{A}_4$  en classes de conjugaison :

$$\mathfrak{A}_4 = \{e\} \cup \{3\text{-cycles}\} \cup \{\text{type } (2, 2)\}.$$

Les types  $(2, 2)$  de  $\mathfrak{A}_4$ , à savoir les produits de deux transpositions à support disjoint sont :

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23).$$

Le sous-groupe  $V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  est distingué dans  $\mathfrak{A}_4$ , car stable par conjugaison :  $V \triangleleft \mathfrak{A}_4$ .

On montre que c'est le seul sous-groupe distingué propre de  $\mathfrak{A}_4$ .

On en déduit que  $D(\mathfrak{A}_4) = \{e\}$  ou  $D(\mathfrak{A}_4) = V$  ou  $D(\mathfrak{A}_4) = \mathfrak{A}_4$ . Or  $\mathfrak{A}_4$  n'est pas abélien, donc  $D(\mathfrak{A}_4) \neq \{e\}$ .

Considérons le groupe quotient  $\mathfrak{A}_4/V$ . Il est d'ordre

$$|\mathfrak{A}_4/V| = \frac{|\mathfrak{A}_4|}{|V|} = \frac{12}{4} = 3,$$

premier, donc est cyclique, donc est abélien. On en déduit que  $D(\mathfrak{A}_4) \subset V$ . Donc  $D(\mathfrak{A}_4) = V$ .

4. *Extrait du cours de l'année 2022-2023.*  $D(\mathfrak{S}_4) \triangleleft \mathfrak{S}_4$ , donc  $D(\mathfrak{S}_4) = \{e\}$  ou  $\mathfrak{A}_4$  ou  $\mathfrak{S}_4$ . On ne peut avoir  $D(\mathfrak{S}_4) \neq \{e\}$ , car  $\mathfrak{S}_4$  n'est pas abélien. De plus, le quotient  $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4$  a pour ordre 2 premier, donc il est cyclique, donc abélien. Par le 3 de la proposition précédente, on a  $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$ . Comme  $\mathfrak{A}_4 \subset D(\mathfrak{S}_4)$ , on conclut que ces groupes sont égaux.

□

*Exercice 10.* Montrer que, pour  $n > 4$ , on a  $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$  et  $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ .

*Remarque.* On a  $\mathfrak{A}_n \subset D(\mathfrak{S}_n)$ , car les 3-cycles sont des commutateurs. En effet,

$$(abc) = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1},$$

avec  $\tau = (bc)$  et  $\sigma = (ab)$ . Or,  $\mathfrak{A}_n$  est engendré par les 3-cycles. D'où  $\mathfrak{A}_n \subset D(\mathfrak{S}_n)$ .

*Démonstration.* Puisque les commutateurs ont pour signature 1, on a donc  $D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{A}_n$ . Donc  $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ . Enfin,  $D(\mathfrak{A}_n) \triangleleft \mathfrak{A}_n$ . Par le théorème de Galois,  $\mathfrak{A}_n$  est simple si et seulement si  $n \neq 4$ . Donc  $D(\mathfrak{A}_n) = \{e\}$  ou  $\mathfrak{A}_n$ . Or,  $\mathfrak{A}_n$  n'est pas abélien pour  $n > 4$ , donc  $D(\mathfrak{A}_n) \neq \{e\}$ . Donc  $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ . □

*Remarque.*  $\mathfrak{A}_4 \subset D(\mathfrak{S}_4)$  par la remarque précédente. Or  $D(\mathfrak{S}_4) \neq \mathfrak{S}_4$ , car  $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$ . Donc  $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$ .

**Proposition 2.7.2.** Soit  $f : G \longrightarrow G'$  un morphisme de groupes et soit  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . Le morphisme  $f$  se factorise par la surjection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

(i. e. il existe un morphisme  $\psi : G/H \longrightarrow G'$  tel que  $f = \psi \circ \pi$ ) si et seulement si  $H \subset \text{Ker}(f)$ .

*Démonstration.* Si  $f$  se factorise, alors pour tout  $h \in H$ , on a

$$f(h) = (\psi \circ \pi)(h) = \psi(\pi(h)) = \psi,$$

donc  $h \in \text{Ker}(f)$ , donc  $H \subset \text{Ker}(f)$ .

Réciproquement, si  $H \subset \text{Ker}(f)$ , alors pour  $x \in G$ ,  $f(x)$  ne dépend que de la classe  $xH$  de  $x$ . En effet, si  $xH = x'H$ , alors  $x^{-1}x' \in H$ . Or  $H \subset \text{Ker}(f)$ , donc  $x^{-1}x' \in \text{Ker}(f)$ , donc  $f(x^{-1}x') = e'$ , i. e.  $f(x)^{-1}f(x') = e'$ , i. e.  $f(x') = f(x)$ . Donc la formule  $\psi(xH) = f(x)$  définit bien une application  $\psi : G/H \longrightarrow G'$  qui est bien un morphisme. □

**Théorème 2.7.1.** Si  $G$  est un groupe fini, le nombre de ses (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de degré 1 est égal à l'indice  $[G : D(G)]$  dans  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $\rho$  une représentation irréductible de degré 1 de  $G$  et  $\chi$  le caractère (linéaire) de degré 1 associé ( $\chi = \rho$ ) :

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

On a  $\chi(G) \subset \mu_n(\mathbb{C})$ , où  $n = |G|$ .

Puisque  $(\mathbb{C}^*, \times)$  est un groupe abélien, on a donc que  $\chi(G)$  est abélien. D'après le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$G/\text{Ker}(\chi) \simeq \text{Im}(\chi) = \chi(G).$$

On en déduit que le quotient  $G/\text{Ker}(\chi)$  est abélien. D'après le 3 de la proposition sur les groupes dérivés 2.7.1, cela entraîne que  $D(G) \subset \text{Ker}(\chi)$ .

On en déduit par la proposition 2.7.2 que le morphisme  $\chi$  se factorise par  $G/D(G)$  :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C}^* \\ & \searrow \pi & \swarrow \check{\chi} \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array}$$

Il y a donc une bijection entre l'ensemble des représentations irréductibles de degré 1 de  $G$  et l'ensemble des représentations irréductibles de degré 1 de  $G/D(G)$  :

$$\begin{array}{ccc} \sim : \{ \text{rep. irréductibles de degré 1 de } G \} & \longrightarrow & \{ \text{rep. irréductibles de degré 1 de } G/D(G) \} \\ \chi & \longmapsto & \check{\chi}. \end{array}$$

*Remarque.* C'est une bijection, car si  $\psi : G/D(G) \longrightarrow \mathbb{C}^*$  est une représentation irréductible de degré 1 de  $G/D(G)$ , alors  $\chi : \psi \circ \pi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$  est une représentation irréductible de degré 1 de  $G$  et  $\check{\chi} = \psi$ .

Or  $G/D(G)$  est abélien, donc toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1. Il y en a le nombre de classes de conjugaison de  $G/D(G)$ , i. e.  $|G/D(G)|$ , car  $G/D(G)$  est abélien, i. e.  $[G : D(G)]$ .  $\square$

**Application** Quel est le nombre de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de degré 1 du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  pour  $n \geq 3$  ?

On a  $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$  pour  $n \geq 3$ . Or  $[\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] = 2$ . Donc  $[\mathfrak{S}_n : D(\mathfrak{S}_n)] = 2$ .  $\mathfrak{S}_n$  admet donc deux représentations irréductibles de dimension 1 (à isomorphisme près).

## Exercices

*Exercice 11.* On considère le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  avec  $n \geq 2$ .

11-10-2023

1. Soit  $\rho : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$  un morphisme de groupes.
  - (a) Montrer que  $\mathfrak{S}_n$  est engendré par les transpositions.
  - (b) Si  $\tau$  est une transposition, montrer que  $\rho(\tau) = \pm 1 \in \{1, -1\}$ .
  - (c) Montrer que si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux transpositions de  $\mathfrak{S}_n$ , alors  $\rho(\tau) = \rho(\tau')$ .
  - (d) En déduire que les seules représentations de degré 1 de  $\mathfrak{S}_n$  sont la représentation triviale et la signature.
2. On considère le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ .
  - (a) Montrer que  $\mathfrak{S}_3$  admet une unique représentation linéaire irréductible de degré 2.
  - (b) Montrer que la transposition  $\tau = (2 \ 3)$  et le 3-cycle  $\sigma = (1 \ 2 \ 3)$  engendrent à elles deux  $\mathfrak{S}_3$  et que  $\sigma\tau = \tau\sigma^2$ .
  - (c) Soit  $\rho : \mathfrak{S}_3 \longrightarrow GL(V)$  une représentation linéaire irréductible de degré 2 de  $\mathfrak{S}_3$ .
    - i. Déterminer les valeurs propres possibles de l'endomorphisme  $\rho_\sigma$ .
    - ii. Soit  $x \in V$  un vecteur propre de  $\rho_\sigma$ . Montrer que  $\rho_\tau(x)$  est un vecteur propre de  $\rho_\sigma$ . En déduire que le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(x, \rho_\tau(x))$  est stable par la représentation  $\rho$  et qu'il est égal à  $V$ .
    - iii. Déterminer les matrices de  $\rho_\sigma$  et  $\rho_\tau$  dans la base  $\mathcal{B} = (x, \rho_\tau(x))$ .
    - iv. On note  $\chi$  le caractère de la représentation  $\rho$ . Quelles sont les valeurs prises par  $\chi$  ? Montrer que  $\chi$  est irréductible.

- (d) Dresser la table des caractères irréductibles du groupe  $\mathfrak{S}_3$ .

*Correction.*

1. (a) Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles (à supports disjoints). De plus, tout cycle  $(i_1 \dots i_r)$  s'écrit comme produit de transpositions :

$$(i_1 \dots i_r) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{r-1} i_r).$$

En conclusion, toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions :  $\mathfrak{S}_n$  est bien engendré par les transpositions.

- (b) Puisque  $\tau$  est une transposition, on a  $\tau \circ \tau = \tau^2 = \text{id}$ . On a :

$$1 = \rho(\text{id}) = \rho(\tau \circ \tau) \underset{\rho \text{ morphisme}}{=} \rho(\tau)\rho(\tau) = \rho(\tau)^2$$

Donc  $\rho(\tau)$  est une racine carrée de 1 dans  $\mathbb{C}$ , d'où  $\rho(\tau) = 1$  ou  $\rho(\tau) = -1$

- (c) Puisque deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$  sont conjuguées entre elles si et seulement si elles ont le même type, on en déduit que les transpositions (qui sont des permutations de type (2)) sont conjuguées dans  $\mathfrak{S}_n$ . Il existe donc  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que :

$$\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}.$$

D'où

$$\rho(\tau') = \rho(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \rho(\sigma)\rho(\tau)\rho(\sigma^{-1}) = \rho(\sigma)\rho(\sigma^{-1})\rho(\tau),$$

car  $(\mathbb{C}^*, \times)$  est abélien.

Donc  $\rho(\tau') = \rho(\tau)$ .

- (d) Ou bien  $\rho(\tau) = 1$  pour toute transposition de  $\mathfrak{S}_n$  et alors on aura que  $\rho(\sigma) = 1$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\rho : \begin{matrix} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & 1 \end{matrix}$  est alors la représentation triviale.

Ou bien  $\rho(\tau) = -1$  pour toute transposition de  $\mathfrak{S}_n$  et alors  $\rho = \varepsilon$  est le morphisme signature.

2. (a) La partition de  $\mathfrak{S}_3$  en classes de conjugaison est la suivante :  $\{\{id\}, \{\text{transpositions}\}, \{\text{3-cycles}\}\}$ . On en déduit que  $\mathfrak{S}_3$  admet 3 représentations irréductibles (à isomorphisme près). De plus, d'après la formule de Burnside, on a

$$\sum_{W \in \text{Irr}(\mathfrak{S}_3)} (\dim(W))^2 = |\mathfrak{S}_3|.$$

De plus,  $\mathfrak{S}_3$  admet exactement deux représentations irréductibles de degré 1. D'où

$$1^2 + 1^2 + d^2 = 6,$$

où  $d$  est le degré de la représentation irréductible non de degré 1 de  $\mathfrak{S}_3$ . D'où  $d = 2$ .

En conclusion,  $\mathfrak{S}_3$  admet 3 représentation irréductibles : deux de degré 1 et une de degré 2.

- (b) Posons  $H = \langle \tau, \sigma \rangle$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_3$  engendré par  $\tau$  et  $\sigma$ .  
On a  $\tau^2 = e \in H$ ,  $\tau \in H$ ,  $\sigma \in H$ ,  $\sigma^2 = (1 \ 3 \ 2)$ ,  $\sigma\tau = (1 \ 2) \in H$ ,  $\tau\sigma = (1 \ 3) \in H$ .  
Conclusion :  $H = \mathfrak{S}_3$ , donc  $\tau$  et  $\sigma$  engendrent  $\mathfrak{S}_3$ .
- (c) i. Puisque  $\sigma$  est un 3-cycle, c'est donc un élément de  $\mathfrak{S}_3$  d'ordre 3 et donc on a  $\sigma^3 = e$ . D'où  $\text{id}_V = \rho(e) = \rho(\sigma^3) = \rho_{\sigma^3} = \rho(\sigma)^3 = \rho_{\sigma}^3$ . D'où

$$\rho_{\sigma}^3 - \text{id}_V = 0.$$

Donc  $\rho_{\sigma}$  est une racine du polynôme  $X^3 - 1$ . Le polynôme **minimal**  $m$  de  $\rho_{\sigma}$  est donc un diviseur de  $X^3 - 1$  et les racines de  $m_{\rho_{\sigma}}$  sont précisément les valeurs propres de  $\rho_{\sigma}$ . Les valeurs propres de  $\rho_{\sigma}$  sont donc les racines cubiques de l'unité dans  $\mathbb{C}$ , à savoir appartiennent à  $\{1, j, j^2\}$ , avec  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

ii. Notons  $\lambda \in \{1, j, j^2\}$  la valeur propre de  $\rho_\sigma$  associée au vecteur propre  $x$ . On a :

$$\begin{aligned}\rho_\sigma(\rho_\tau(x)) &= (\rho_\sigma \circ \rho_\tau)(x) = \rho_{\sigma\tau}(x) = \rho_{\tau\sigma^2}(x) = (\rho_\tau \circ \rho_{\sigma^2})(x) \\ &= \rho_\tau(\underbrace{\rho_\sigma(x)}_{\lambda x}) = \lambda^2 \rho_\tau(x).\end{aligned}$$

Donc  $\rho_\tau(x)$  est un vecteur propre de  $\rho_\sigma$  pour la valeur propre  $\lambda^2$ .

Posons  $W := \text{Vect}(x, \rho_\tau(x))$  et montrons que  $W$  est stable par la représentation  $\rho$ . On doit montrer que  $\forall g \in \mathfrak{S}_3, \rho_g(W) \subset W$ .

Or  $\mathfrak{S}_3 = \langle \tau, \sigma \rangle$ . Il suffit donc de montrer que  $\rho_\tau(W) \subset W$  et  $\rho_\sigma(W) \subset W$ .

D'une part, on a :  $\rho_\tau(x) \in W$  (évident) et  $\rho_\tau(\rho_\tau(x)) = \rho_{\tau^2}(x) = \rho_e(x) = \text{id}(x) = x \in W$  et donc  $\rho_\tau(W) \subset W$ .

D'autre part :  $\rho_\sigma(x) = \lambda x \in W$  et  $\rho_\sigma(\rho_\tau(x)) = \lambda^2 \rho_\tau(x) \in W$ . Donc  $\rho_\sigma(W) \subset W$ .

Enfin, par irréductibilité de la représentation  $\rho$  d'espace  $V$ , on en déduit, puisque  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\rho$ , que  $W = V$ .

iii. Remarquons que le vecteur propre  $x$  de  $\rho_\tau$  ne peut avoir pour valeur propre  $\lambda = 1$ , car sinon la droite engendrée par le vecteur  $x + \rho_\tau(x)$  serait invariante par la représentation  $\rho$ , ce qui contredirait l'irréductibilité de  $\rho$ .

En effet, si  $y = x + \rho_\tau(x)$  et si  $\lambda = 1$ , alors

$$\rho_\tau(y) = \rho_\tau(x + \rho_\tau(x)) = \rho_\tau(x) + \rho_{\tau^2}(x) = \rho_\tau(x) + x = y$$

et

$$\begin{aligned}\rho_\sigma(y) &= \rho_\sigma(x + \rho_\tau(x)) = \rho_\sigma(x) + \rho_{\sigma\tau}(x) = \lambda x + \rho_\sigma(\rho_\tau(x)) \\ &= \lambda x + \lambda^2 \rho_\tau(x) \underset{\lambda=1}{=} x + \rho_\tau(x) = y.\end{aligned}$$

Quitte à remplacer  $x$  par  $\rho_\tau(x)$ , on peut supposer que  $\lambda = j$  (car si  $x$  est vecteur propre de  $\rho_\sigma$  de valeur propre  $\lambda$ , alors  $\rho_\tau(x)$  est vecteur propre de  $\rho_\sigma$  de valeur propre  $\lambda^2$ ).

On calcule  $\rho_\sigma(x) = jx$  et  $\rho_\sigma(\rho_\tau(x)) = j^2 \rho_\tau(x)$ . D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho_\sigma) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

De même, on a  $\rho_\tau(x) = \rho_\tau(x)$  et  $\rho_\tau(\rho_\tau(x)) = \rho_{\tau^2}(x) = x$ , d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho_\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv.

$$\begin{array}{lll} \chi : \mathfrak{S}_3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & \text{Tr}(\rho_g) \\ e & \longmapsto & \text{Tr}(\text{id}) = 2 \\ \tau & \longmapsto & \text{Tr}(\text{Mat}(\rho_\tau)) = 0 \\ \sigma & \longmapsto & \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho_\sigma)) = j^2 + j = -1. \end{array}$$

On a

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|\mathfrak{S}_3|} \sum_{g \in \mathfrak{S}_3} \overline{\chi(g)} \chi(g) = \frac{1}{6} (2^2 + \textcolor{red}{3} \times 0^2 + \textcolor{blue}{2} \times (-1)^2) = \frac{6}{6} = 1.$$

*Remarque* (Personnelle). **3** correspond au nombre de **transpositions** dans  $\mathfrak{S}_3$  et **2** correspond au nombre de **3-cycles**. Puisque les transpositions (respectivement les 3-cycles) sont conjugués dans  $\mathfrak{S}_3$ , la valeur de  $\rho_g$  et donc de  $\chi(g)$  est identique pour chaque transposition (respectivement pour chaque 3-cycle), donc on multiplie par 3 (respectivement par 2).

Donc  $\chi$  est bien un caractère **irréductible** de  $\mathfrak{S}_3$ .

(d) On a

$$\begin{aligned} \rho_0 : \quad \mathfrak{S}_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto 1 \text{ et } \chi_0 = \rho_0, \\ \rho_\varepsilon : \quad \mathfrak{S}_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto \varepsilon(g) \text{ et } \chi_\varepsilon = \rho_\varepsilon, \\ \rho : \quad \mathfrak{S}_3 &\longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ \tau = (1\ 2) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma = (1\ 2\ 3) &\longmapsto \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \text{ avec pour caractère } \chi.$$

On obtient la table des caractères suivante :

$\mathfrak{S}_3$	$e$	$(1\ 2)_3$	$(1\ 2\ 3)_2$
$\chi_0$	1	1	1
$\chi_\varepsilon$	1	-1	1
$\chi$	2	0	-1

□

16-10-2023 *Exercice* 12. Montrer que si  $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ , alors les conjugués de  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$  forment une (respectivement deux) classe(s) de conjugaison dans  $\mathfrak{A}_n$  s'il existe une permutation impaire commutant à  $\sigma$  (respectivement sinon (c'est-à-dire s'il n'existe pas de permutation impaire)).

*Démonstration.*

*Remarque.* La classe de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_n$  et dans  $\mathfrak{A}_n$  de  $\sigma$  est :

$$\text{Conjug}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \{\tau\sigma\tau^{-1}, \tau \in \mathfrak{S}_n\} \text{ et } \text{Conjug}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \{\tau\sigma\tau^{-1}, \tau \in \mathfrak{A}_n\}.$$

On peut faire agir le groupe  $\mathfrak{S}_n$  sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n &\longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sigma \cdot \tau = \sigma\tau\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Si  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ , alors :

$$\text{Orb}_{\mathfrak{S}_n}(\tau) := \{\sigma \cdot \tau, \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{\sigma\tau\sigma^{-1}, \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \text{Conjug}_{\mathfrak{S}_n}(\tau).$$

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tau) &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \cdot \tau = \tau\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\} \\ &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma\tau = \tau\sigma\} = \text{centralisateur}_{\mathfrak{S}_n}(\tau). \end{aligned}$$

On a

$$\sharp \text{Orb}_{\mathfrak{S}_n}(\tau) = [\mathfrak{S}_n : \text{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tau)].$$

On peut aussi faire agir le groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$  sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n \times \mathfrak{A}_n &\longrightarrow \mathfrak{A}_n \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Si  $\tau \in \mathfrak{A}_n$ , alors

$$\text{Orb}_{\mathfrak{A}_n}(\tau) = \text{Conjug}_{\mathfrak{A}_n}(\tau)$$

et

$$\text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\tau) = \text{centralisateur}_{\mathfrak{A}_n}(\tau)$$

et on a :

$$\# \text{Orb}_{\mathfrak{A}_n}(\tau) = [\mathfrak{A}_n : \text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\tau)].$$

Soit  $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ . Supposons qu'il n'existe pas de permutation impaire qui commute avec  $\sigma$ . Alors  $\text{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ .

D'où

$$\begin{aligned} \# \text{Orb}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) &= [\mathfrak{S}_n : \text{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)] = [\mathfrak{S}_n : \text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)] \\ &= [\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] \times [\mathfrak{A}_n : \text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)] = 2 \times [\mathfrak{A}_n : \text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)] = \# \text{Orb}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma). \end{aligned}$$

Si  $\text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$  est d'indice  $\geq 2$  dans  $\text{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ , alors  $\text{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) \geq \# \text{Orb}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ , d'où l'égalité, car  $\text{Orb}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) \subset \text{Orb}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ .  $\square$

*Exercice 13* (Problème donné au partiel en octobre 2022).

1. Combien le groupe  $\mathfrak{S}_n$  admet de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles ?
2. On fait agir  $\mathfrak{S}_4$  sur lui-même par conjugaison et on considère le 3-cycle  $\sigma = (1\ 2\ 3)$  dans  $\mathfrak{S}_4$ .
  - (a) Quel est l'ordre du stabilisateur de  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_4$  ?
  - (b) En déduire qu'il n'existe pas de permutation impaire qui commute avec  $\sigma$ .
  - (c) En déduire que les conjugués de  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_4$  forment deux classes de conjugaison de  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_4$ .
3. Combien  $\mathfrak{A}_4$  admet-il de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles ?
4. Soit  $K = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ .
  - (a) Montrer que  $K$  est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{A}_4$ .
  - (b) Montrer que  $K$  est isomorphe au groupe de Klein.
  - (c) Le groupe quotient  $\mathfrak{A}_4/K$  est-il abélien ?
  - (d) Déterminer le sous-groupe dérivé  $D(\mathfrak{A}_4)$  de  $\mathfrak{A}_4$ .
  - (e) En déduire le nombre de représentations irréductibles de degré 1 (à isomorphisme près) de  $\mathfrak{A}_4$  et celui de degré supérieur.
5. Soit  $\chi$  un caractère linéaire  $\mathfrak{A}_4$ , i. e. un morphisme de groupes de  $\mathfrak{A}_4$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$ . 17-10-2023
  - (a) Montrer que le morphisme  $\chi$  se factorise par  $\mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4)$ , i. e. qu'il existe un morphisme  $\check{\chi} : \mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4) \rightarrow \mathbb{C}^*$  tel que  $\check{\chi} \circ \pi = \chi$ .
  - (b) En déduire que  $\chi(\tau)$  est d'ordre divisant 3 pour tout  $\tau \in \mathfrak{A}_4$ .
  - (c) En déduire les caractères de degré 1, i. e. les représentations de degré 1, de  $\mathfrak{A}_4$ .
6. Soit  $\rho : \mathfrak{A}_4 \rightarrow GL(V)$  la représentation de permutation associée à l'action naturelle de  $\mathfrak{A}_4$  sur  $\{1, 2, 3, 4\}$ . On rappelle que l'espace  $V$  de cette représentation est  $\mathbb{C}^4$  muni de l'action de  $\mathfrak{A}_4$  définie, dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  par  $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ .
  - (a) Montrer que  $V$  se décompose sous la forme  $V' \oplus W$  où  $V'$  est la droite engendrée par le vecteur  $v' = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$  et  $W$  est l'hyperplan d'équation  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ .
  - (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels  $V'$  et  $W$  sont stables par la représentation  $\rho$ .
  - (c) Soient  $\chi_V$ ,  $\chi_{V'}$  et  $\chi_W$  les caractères respectivement des représentations  $V$ ,  $V'$  et  $W$ . Montrer que  $\chi_V = \chi_{V'} + \chi_W$ .
  - (d) Rappeler que vaut le caractère d'une représentation de permutation. En déduire les valeurs de  $\chi_V$  sur les classes de conjugaison de  $\mathfrak{A}_4$ .

- (e) Montrer que  $\chi_{V'}$  est le caractère trivial et en déduire les valeurs du caractère  $\chi_W$ .
- (f) Montrer que le caractère  $\chi_W$  est irréductible.

*Démonstration.*

1. La partition de  $\mathfrak{S}_4$  en classes de conjugaison est la suivante (car deux permutations de  $\mathfrak{S}_4$  sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type). Dans  $\mathfrak{S}_4$ , on a :

$$\mathfrak{S}_4 = \underbrace{\text{Conjug}(\text{id})}_{=\{\text{id}\}} \cup \underbrace{\text{Conjug}((1\ 2))}_{\text{transpositions, } \# = 6} \cup \underbrace{\text{Conjug}((1\ 2\ 3))}_{\text{3-cycles, } \# = 8} \cup \underbrace{\text{Conjug}((1\ 2)(3\ 4))}_{\text{type } (2,2), \# = 3} \cup \underbrace{\text{Conjug}((1\ 2\ 3\ 4))}_{\text{4-cycles, } \# = 6}.$$

Le nombre de représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_4$  est égal au nombre de ses classes de conjugaison, à savoir 5.

2. (a) On a

$$[\mathfrak{S}_4 : \text{Stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)] = \# \text{Orb}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \# \text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \# \{3\text{-cycles de } \mathfrak{S}_4\}.$$

D'où

$$|\text{Stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{\# \text{Orb}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)} = \frac{24}{8} = 3.$$

*Remarque.* Le nombre de  $r$ -cycles dans  $\mathfrak{S}_n$  ( $r \leq n$ ) est égal à :

$$\frac{A_n^r}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

Par exemple, le nombre de 3-cycles dans  $\mathfrak{S}_4$  est

$$\frac{4!}{3 \times 1!} = 8.$$

- (b) Le stabilisateur de  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_4$  est le centralisateur de  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_4$  (dans ce cas précis), à savoir l'ensemble des permutations de  $\mathfrak{S}_4$  qui commutent avec  $\sigma$ . Or :
  - $e$  commute avec  $\sigma$  ;
  - $\sigma$  commute avec  $\sigma$  ;
  - $\sigma^{-1} = \sigma^2$  commute avec  $\sigma$ .

Puisque  $\text{Stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)$  est d'ordre 3, on a donc :

$$\text{Stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \{e, \sigma, \sigma^2\}.$$

Or les permutations  $e, \sigma, \sigma^2$  sont toutes paires, d'où le résultat.

- (c) On a

$$\text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \{3\text{-cycles de } \mathfrak{S}_4\} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.$$

Cette classe de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_4$  se décompose en deux classes de conjugaison dans  $\mathfrak{A}_4$  en quatre éléments chacune.

$$\text{Conjug}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3)) = \{(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$$

et

$$\text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 3\ 2)) = \{(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\}.$$

*Remarque.* En revanche, les types (2,2) constituent une classe de conjugaison dans  $\mathfrak{A}_4$ , car il existe une permutation impaire qui commute avec  $(1\ 2)(3\ 4)$ , à savoir  $(1\ 2)$ .



3. On a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_4 &= \{\text{permutations paires de } \mathfrak{S}_4\} = \{\text{id}\} \cup \{3\text{-cycles}\} \cup \{\text{type } (2,2)\} \\ &= \text{Conjug}_{\mathfrak{A}_4}(\text{id}) \cup \text{Conjug}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3)) \cup \text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 3\ 2)) \cup \text{Conjug}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2)(3\ 4)).\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_4$  admet donc 4 représentations irréductibles à isomorphisme près.

4. *Ceci est ma rédaction personnelle des questions, car elles n'étaient pas corrigées par écrit en classe.*

- (a)  $K$  contient l'élément neutre ainsi que toutes les permutations de type  $(2,2)$ . On sait que dans  $\mathfrak{S}_n$ , deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type. Cela implique que  $K$  est stable par conjugaison. Donc il est distingué dans  $\mathfrak{S}_n$ .
- (b) Il existe deux groupes d'ordre 4 à isomorphisme près : le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  et le groupe de Klein. Le groupe  $K$  n'est pas abélien, donc il ne peut être isomorphe à  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Il est forcément isomorphe au groupe de Klein.
- (c) Le quotient  $\mathfrak{A}_4/K$  est d'ordre  $\frac{|\mathfrak{A}_4|}{|K|} = \frac{12}{4} = 3$ . Comme 3 est premier, le quotient  $\mathfrak{A}_4/K$  est cyclique, donc abélien.
- (d) On a d'une part  $K \subset D(\mathfrak{A}_4)$ . D'autre part,  $K \triangleleft D(\mathfrak{A}_4)$ . Par la proposition 2.7.1, comme  $\mathfrak{A}_4/K$  est abélien,  $D(\mathfrak{A}_4) \subset K$ . Par conséquent,  $D(\mathfrak{A}_4) = K$ .
- (e) Par le théorème 2.7.1, comme  $\mathfrak{A}_4$  est un groupe fini, le nombre de ses représentations irréductibles de degré 1 est égal à l'indice  $[\mathfrak{A}_4 : D(\mathfrak{A}_4)]$  dans  $\mathfrak{A}_4$ . Or  $D(\mathfrak{A}_4) = K$ . Par conséquent,

$$[\mathfrak{A}_4 : D(\mathfrak{A}_4)] = \frac{|\mathfrak{A}_4|}{|K|} = \frac{12}{4} = 3,$$

ce qui implique qu'il y a trois représentations irréductibles de degré 1 dans  $\mathfrak{A}_4$ .

De plus, le nombre de représentations irréductibles de  $\mathfrak{A}_4$  est égal au nombre de ses classes de conjugaison. On a vu précédemment qu'il y a quatre classes de conjugaison dans  $\mathfrak{A}_4$ . De plus, par la formule de Burnside, on a

$$\sum_{W \in \text{Irr}(\mathfrak{A}_4)} \dim(W)^2 = |\mathfrak{A}_4| = 12. \quad (2.2)$$

On a trois représentations de degré 1 et une représentation de degré supérieur  $d$ . L'égalité 2.2 devient :

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + d^2 = 12,$$

ce qui donne  $d^2 = 9$ . On obtient ainsi  $d = 3$ .

- 5. (a) Le morphisme  $\chi$  se factorise par  $\pi$  si et seulement si  $\text{Ker}(\chi)$  contient  $D(\mathfrak{A}_4)$  (cf proposition 2.7.2). Or, d'après le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$\mathfrak{A}_4 / \text{Ker}(\chi) \simeq \text{Im}(\chi) = \chi(\mathfrak{A}_4) \subset \mathbb{C}^*,$$

on en déduit que  $\text{Im}(\chi)$  est abélien (car tout sous-groupe d'un groupe abélien est abélien), et donc que le quotient  $\mathfrak{A}_4 / \text{Ker}(\chi)$  est abélien (en tant que groupe isomorphe à un groupe abélien). Or, si  $G$  est un groupe et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ , alors le quotient  $G/H$  est abélien si et seulement si  $D(G) \subset H$ . On en déduit donc que  $\text{Ker}(\chi)$  contient le sous-groupe dérivé de  $\mathfrak{A}_4$ . En conclusion, le morphisme  $\chi$  se factorise par  $\mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4)$ .

- (b) Soit  $\tau \in \mathfrak{A}_4$ . Considérons  $\pi(\tau) = \bar{\tau} \in \mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4)$ . Puisque  $D = K$ , alors  $|\mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4)| = \frac{|\mathfrak{A}_4|}{|K|} = \frac{12}{4} = 3$ . Par le théorème de Lagrange,  $\bar{\tau}$  est donc d'ordre divisant 3, i. e.  $(\bar{\tau})^3 = \bar{e}$ . D'où  $\check{\chi}(\bar{e}) = \check{\chi}(\bar{\tau}^3) = (\check{\chi}(\bar{\tau}))^3$ . Donc  $\chi(\bar{\tau})$  est d'ordre divisant 3, i. e.  $\check{\chi}(\pi(\tau))$  est d'ordre divisant 3, i. e.  $\chi(\tau)$  est d'ordre divisant 3.

(c) On rappelle que  $\mathfrak{A}_4$  comprend 4 classes de conjugaison :

$$\begin{aligned}\text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}(e) &= \{e\}; \\ \text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2)(3\ 4)) &= \text{type } (2,2); \\ \text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3)); \\ \text{Conjug}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 3\ 2)).\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\pi((1\ 2)(3\ 4)) = \overline{(1\ 2)(3\ 4)} = (1\ 2)(3\ 4)D(\mathfrak{A}_4) = \bar{e},$$

car  $(1\ 2)(3\ 4) \in D(\mathfrak{A}_4)$ .

D'où  $\check{\chi} \circ \pi((1\ 2)(3\ 4)) = \check{\chi}(\bar{e}) = 1$ , donc  $\chi((1\ 2)(3\ 4)) = 1$ . Puisque les racines cubiques de l'unité dans  $\mathbb{C}$  sont 1,  $j$  et  $j^2$ , où  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , les caractères de degré 1 de  $\mathfrak{A}_4$  sont donc :

$$\begin{aligned}\chi_0 : \quad \mathfrak{A}_4 &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \tau &\longmapsto 1, \\ \chi_1 : \quad \mathfrak{A}_4 &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \text{id} &\longmapsto 1 \\ (1\ 2)(3\ 4) &\longmapsto 1 \\ (1\ 2\ 3) &\longmapsto j \\ (1\ 3\ 2) &\longmapsto j^2, \\ \chi : \quad \mathfrak{A}_4 &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \text{id} &\longmapsto 1 \\ (1\ 2)(3\ 4) &\longmapsto 1 \\ (1\ 2\ 3) &\longmapsto j^2 \\ (1\ 3\ 2) &\longmapsto j,\end{aligned}$$

et de même sur les classes de conjugaison.

6. (a) On a  $V' \cap W = \{0\}$ . En effet, si  $v \in V' \cap W$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $v = \lambda v' = \lambda e_1 + \dots + \lambda e_4$ , et on a également :  $\lambda + \lambda + \lambda + \lambda = 0$ . D'où  $\lambda = 0$  et donc  $v = 0_{\mathbb{C}^4}$ . De plus,  $\dim(V') = 1$  et  $\dim(W) = 3$ , d'où  $\dim(V') + \dim(W) = 4 = \dim(V) = \dim(\mathbb{C}^4)$ . Donc  $V = V' \oplus W$ .

(b) Montrons que, pour tout  $\tau \in \mathfrak{A}_4$ , on a  $\rho_\tau(V') \subset V'$  et  $\rho_\tau(W) \subset W$ , i. e.  $\forall \tau \in \mathfrak{A}_4, \forall v \in V', \rho_\tau(v) \in V'$  et  $\forall \tau \in \mathfrak{A}_4, \forall w \in W, \rho_\tau(w) \in W$ .

Soient  $\tau \in \mathfrak{A}_4$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $v = \lambda v' = \lambda e_1 + \dots + \lambda e_4$ . On a

$$\begin{aligned}\rho_\tau(v) &= \rho_\tau(\lambda v') = \lambda \rho_\tau(v') = \lambda \rho_\tau(e_1 + \dots + e_4) \\ &= \lambda(\rho_\tau(e_1) + \dots + \rho_\tau(e_4)) = \lambda(e_{\tau(1)} + \dots + e_{\tau(4)}) = \lambda v',\end{aligned}$$

car  $\tau$  est un élément de  $\mathfrak{A}_4$ . Conclusion :  $\rho_\tau(v) \in V'$ .

Soient  $\tau \in \mathfrak{A}_4$  et  $w \in W$ . Posons  $w = \sum_{i=1}^4 w_i e_i$ . On a

$$\rho_\tau(w) = \rho_\tau\left(\sum_{i=1}^4 w_i e_i\right) = \sum_{i=1}^4 w_i \rho_\tau(e_i) = \sum_{i=1}^4 w_i e_{\tau(i)}.$$

Donc  $\rho_\tau(w) \in W$ , car  $w_1 + \dots + w_4 = 0$  (car  $w \in W$ ). Conclusion :  $W$  est stable par la représentation  $\rho$ .

- (c) En effet, puisque  $V = V' \oplus W$  et que  $V'$  et  $W$  sont stables par  $\rho$ , on obtient le résultat.
- (d) Puisque  $\rho$  est la représentation de permutations de  $\mathfrak{A}_4$ , on en déduit que, pour tout  $\tau \in \mathfrak{A}_4$ , la trace de  $\rho_\tau$ , i. e.  $\chi_V(\tau)$ , est égale au nombre de points fixes de  $\tau$  agissant sur  $\{1, 2, 3, 4\}$ . On a donc  $\chi_V(\text{id}) = 4$ ,  $\chi_V((1\ 2)(3\ 4)) = 0$ ,  $\chi_V((1\ 3\ 2)) = 1$ .
- (e) Le vecteur  $e_1 + \dots + e_4$  est laissé fixé par toute permutation de  $\mathfrak{A}_4$ . On en déduit que  $\chi_{V'}$  est le caractère trivial  $\chi_V(\tau) = 1, \forall \tau \in \mathfrak{A}_4$ . De plus, on a

$$\chi_V = \chi_{V'} + \chi_W,$$

d'où

- $\chi_V(\text{id}) = \chi_{V'}(\text{id}) + \chi_W(\text{id}) = 1 + 3 = 4$ ;
- $\chi_W((1\ 2)(3\ 4)) = \chi_V((1\ 2)(3\ 4)) - \chi_{V'}((1\ 2)(3\ 4)) = 0 - 1 = -1$ ;
- $\chi_W((1\ 2\ 3)) = \chi_V((1\ 2\ 3)) - \chi_{V'}((1\ 2\ 3)) = 1 - 1 = 0$ ;
- $\chi_W((1\ 3\ 2)) = \chi_V((1\ 3\ 2)) - \chi_{V'}((1\ 3\ 2)) = 1 - 1 = 0$ .

- (f) On utilise le critère d'irréductibilité des caractères 4.

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = \frac{1}{|\mathfrak{A}_4|} \sum_{\tau \in \mathfrak{A}_4} \overline{\chi(\tau)} \chi(\tau) = \frac{1}{12} (1 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0) = \frac{12}{12} = 1.$$

Cela permet de conclure que  $\chi_W$  est irréductible.

□