Имитационное моделирование финансово-экономических систем

Домашняя работа 1, СМО

Поздняков Виталий

Задачу, представленную ниже, необходимо решить аналитически. Для этой же задачи написать имитационную модель в Python, а также ввести и обосновать метрику совпадения экспериментального решения с теоретическим (творческая компонента). Оцените скорость сходимости решения по введенной метрике (ошибка как функция номера итерации) или разъясните причины отсутствия сходимости.

Задача 2

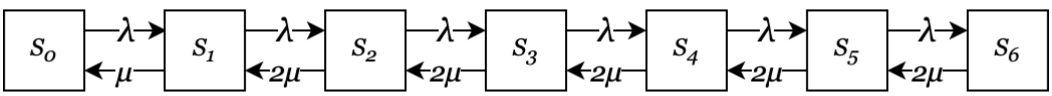
На некоторую базу в среднем через 30 мин прибывают автомашины с продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 часа. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определить показатели работы СМО.

Аналитическое решение

Для начала классифицируем СМО.

- По числу каналов: 2-канальная ($n = 2$)
- По дисциплине обслуживания: смешанного типа с ограничением на длину очереди в 4 заявки ($m = 4$)
- По ограничению потока заявок: открытая
- По количеству этапов обслуживания: однофазная

Опишем математическую модель такой системы в виде графа состояний СМО



Состояния СМО:

- S_0 — все каналы свободны
- S_1 — 1 канал занят, заявок в очереди нет
- S_2 — 2 канала заняты, заявок в очереди нет
- S_3 — 2 канала заняты, 1 заявка в очереди
- S_4 — 2 канала заняты, 2 заявки в очереди
- S_5 — 2 канала заняты, 3 заявки в очереди
- S_6 — 2 канала заняты, 4 заявки в очереди

Запишем систему уравнений предельных вероятностей

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \lambda p_2 = 2\mu p_3 \\ \dots \\ \lambda p_5 = 2\mu p_6 \end{cases}$$

где p_i — вероятность нахождения системы в состоянии S_i

Обозначим $\rho = \lambda/\mu$. Тогда из первого уравнения следует

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

Из второго и третьего:

$$p_2 = \tfrac{1}{2}\rho p_1 = \tfrac{1}{2}\rho^2 p_0$$

$$p_3 = \tfrac{1}{2^2}\rho^3 p_0$$

И так далее в общем виде получаем

$$p_k = \frac{1}{2^{k-1}}\rho^k p_0$$

Таким образом

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_6 = 1$$

$$p_0 \left(1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \cdots + \frac{1}{2^5}\rho^6\right) = 1$$

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \cdots + \frac{1}{2^5}\rho^6\right)^{-1}$$

Рассмотрим выражение в скобках. Используем свойства суммы геометрической прогрессии и получаем

$$1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2^2}\rho^3 + \cdots + \frac{1}{2^5}\rho^6$$

$$= 1 + \rho\left(1 + \frac{\rho}{2} + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\rho}{2}\right)^5\right)$$

$$= 1 + \rho\left(\frac{1 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^6}{1 - \frac{\rho}{2}}\right)$$

Тогда вероятность того, что система находится в состоянии свободных каналов

$$p_0 = \left(1 + \rho\left(\frac{1 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^6}{1 - \frac{\rho}{2}}\right)\right)^{-1}$$

По условию задачи установим входящую интенсивность потока как $\lambda = \frac{60}{30} = 2$ (машины в час), а интенсивность потока обслуживания как $\mu = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$ (машины в час). Тогда $\rho = \lambda/\mu = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$.

In [1]:
```
mu = 2/3
rho = 3
p0 = (1 + rho*((1 - (rho/2)**6) / (1 - rho/2)))**(-1)
def prob(k):
    res = rho**k * p0 / 2**(k-1)
    return res
prob_list = []
prob_list.append(p0)
for i in range(1, 7):
    prob_list.append(prob(i))
```

In [2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [3]:
```
plt.bar(['S{}'.format(i) for i in range(7)], prob_list)
plt.title('Распределение вероятностей состояний СМО')
plt.show()
```

1. Найдем вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = p_6 = \frac{1}{2^5}\rho^6 p_0$$

In [4]:
```
p_rej = prob_list[6]
p_rej
```

Out[4]: 0.3596447952639369

$$P_{\text{отк}} \approx 0.3596$$

2. Найдем относительную пропускную способность

$$Q = 1 - P_{\text{отк}}$$

In [5]:
```
q = 1 - p_rej
q
```

Out[5]: 0.6403552047360631

$$Q \approx 0.6404$$

3. Найдем абсолютную пропускную способность

$$A = \lambda Q$$

In [6]:
```
lambd = 2
a = lambd * q
a
```

Out[6]:
```
1.2807104094721262
```

$$A \approx 1.2807$$

4. Найдем среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \mathbb{E}(k) = 0 \cdot (p_0 + p_1 + p_2) + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 3 \cdot p_5 + 4 \cdot p_6$$

где k — случайная величина количества заявок в очереди

In [7]:
```
l = 1*prob_list[3] + 2*prob_list[4] + 3*prob_list[5] + 4*prob_list[6]
l
```

Out[7]:
```
2.5841144548593986
```

$$L_{\text{оч}} \approx 2.5841$$

5. Найдем среднее время ожидания заявки в очереди по формуле Литтла

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$$

In [8]:
```
t = l / lambd
t
```

Out[8]:
```
1.2920572274296993
```

$$\overline{T}_{\text{оч}} \approx 1.2921$$

6. Найдем коэффициент использования СМО

$$K_{\text{исп}} = 1 - p_0$$

In [9]:
```
k_use = 1 - prob_list[0]
k_use
```

Out[9]:
```
0.9842131228416379
```

$$K_{\text{исп}} \approx 0.9842$$

7. Найдем среднее время пребывания заявки в СМО.

Рассмотрим гипотезы $S_0, \ldots, S_6$ нахождения системы в соответствующих состояниях. Тогда среднее время пребывания можно записать как

$$\overline{T}_{\text{преб}} = \mathbb{E}(T_{\text{преб}}) = \sum_{i=0}^{6} P(S_i)\mathbb{E}(T_{\text{преб}}|S_i)$$

$$= p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot \frac{2}{2\mu} + p_2 \cdot \frac{3}{2\mu} + p_3 \cdot \frac{4}{2\mu} + p_4 \cdot \frac{5}{2\mu} + p_5 \cdot \frac{6}{2\mu} + p_6 \cdot 0$$

In [10]:
```
t_proc = 0
for i in range(1, 6):
    t_proc += prob_list[i] * (i+1) / (2*mu)
t_proc
```

Out[10]: `2.2289097187962508`

$$\overline{T}_{\text{преб}} \approx 2.2289$$

8. Найдем вероятность немедленного приема к обслуживанию.

Другими словами, найдем вероятность нахождения системы в состоянии хотя бы одного свободного канала, то есть S_1 или S_2

$$P_{\text{обсл}} = p_0 + p_1$$

In [11]:
```
p_serve = prob_list[0] + prob_list[1]
p_serve
```

Out[11]: `0.06314750863344845`

$$P_{\text{обсл}} \approx 0.0631$$

$$F(x) = P(X \leq x) = p_0 \cdot F_0(x) + p_1 \cdot F_1(x) + \dots + p_n \cdot F_n(x)$$

9. Найдем среднее число заявок в СМО

$$L_{\text{СМО}} = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + \dots + p_6 \cdot 6$$

In [12]:
```
l_cmo = 0
for i in range(1, 7):
    l_cmo += i * prob_list[i]
l_cmo
```

Out[12]: `4.505180069067588`

$$L_{\text{СМО}} \approx 4.5052$$

10. Найдем закон распределения времени ожидания заявки в очереди.

Распределение времени зависит от того, в каком состоянии находилась система во время поступления заявки. Например, если заявка пришла в момент хотя бы одного свободного канала, то она мгновенно поступит в обработку и не будет ожидать в очереди. Аналогичная ситуация возникает в состоянии переполнения очереди — заявка просто не попадает в систему, соответственно не ожидает в очереди. Во всех остальных состояниях время ожидания будет варьироваться от количества заявок в очереди. Обозначим эти два случая как две гипотезы

$$H_1 = S_0 \cup S_1 \cup S_6$$

$$H_2 = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

Для гипотезы H_1 время в очереди всегда равно 0, то есть такая случайная величина T_1 будет иметь дискретную функцию вероятности вида

$$P(T_1 = t | H_1) = \mathbb{1}\{t = 0\}$$

Теперь рассмотрим другие состояния. Например, если заявка приходит в момент состояния S_5, то ей придется занять 4 позицию в очереди. Тогда ее время ожидания в очереди будет складываться из 4 интервалов, каждый из которых является реализацией экспоненциальной СВ. Такая случайная величина имеет распределение Эрланга и задается функцией плотности вида

$$f_{k;\nu}(x) = \frac{\nu^k x^{k-1} e^{-\nu x}}{(k-1)!}$$

где k — количество экспоненциальных распределений, а ν — интенсивность потока. Тогда для S_5 имеем $k = 4$, а $\nu = 2\mu$. Функция плотности для состояния S_4 задается аналогично с параметрами $k = 3$, $\nu = 2\mu$. Запишем параметры для каждого состояния

$$\begin{aligned}
S_2 &: k = 1, \nu = 2\mu \\
S_3 &: k = 2, \nu = 2\mu \\
S_4 &: k = 3, \nu = 2\mu \\
S_5 &: k = 4, \nu = 2\mu
\end{aligned}$$

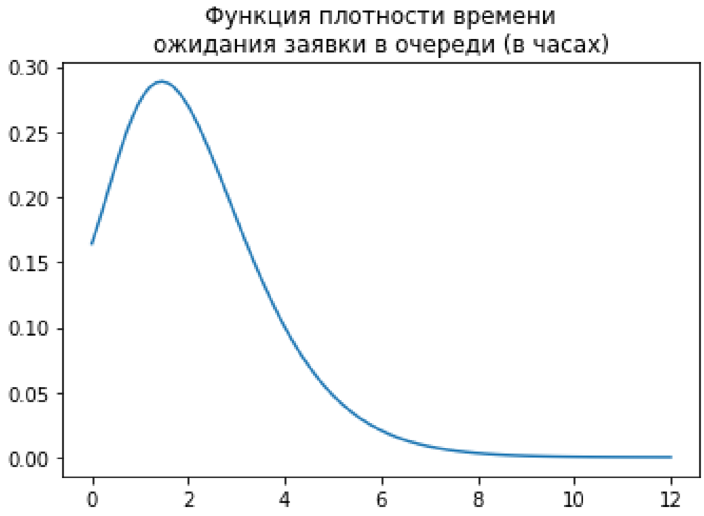
Теперь с учетом вероятностей каждого из состояний можно записать общий вид плотности распределения случайной величины T_2 для гипотезы H_2

$$\varphi(t | H_2) = \frac{p_2 \cdot f_{1;2\mu}(t) + p_3 \cdot f_{2;2\mu}(t) + p_4 \cdot f_{3;2\mu}(t) + p_5 \cdot f_{4;2\mu}(t)}{p_2 + p_3 + p_4 + p_5}$$

Построим график функции плотности

In [13]:
```
import numpy as np
from math import exp
from math import factorial

def erlang_pdf(k, nu, x):
    return (nu**k * x**(k-1) * exp(-nu*x)) / factorial(k-1)

def total_pdf(x):
    return (
        sum([prob_list[i]*erlang_pdf(i-1, 2*mu, x) for i in range(2, 6)])
        /
        sum(prob_list[2:6])
    )
```

In [14]:
```
x_space = np.linspace(0, 12, 100)
y_space = [total_pdf(x) for x in x_space]
plt.plot(x_space, y_space)
plt.title('Функция плотности времени\nожидания заявки в очереди (в часах)')
plt.show()
```



Запишем полученные значения в таблицу

Характеристика	**Обозначение**	**Значение**
Вероятность отказа	$P_{\text{отк}}$	0.3596
Относительная пропускная способность	Q	0.6404
Абсолютная пропускная способность	A	1.2807
Среднее число заявок в очереди	$L_{\text{оч}}$	2.5841
Коэффициент использования СМО	$K_{\text{исп}}$	0.9842
Среднее время ожидания заявки в очереди	$\overline{T}_{\text{оч}}$	1.2921
Среднее время пребывания заявки в СМО	$\overline{T}_{\text{преб}}$	2.2289
Вероятность немедленного приема к обслуживанию	$P_{\text{обсл}}$	0.0631
Среднее число заявок в СМО	$L_{\text{СМО}}$	4.5052

Имитационно моделирование

In [15]:
```
import simpy
```

In [16]:

```python
# 24 часовой формат времени
def now24(env):
    d = int(env.now // 60 // 24 + 1)
    h = int(env.now // 60 % 24)
    m = int(env.now % 60)
    return '[{:02} день, {:02}:{:02}]'.format(d, h, m)

# Генератор автомобилей
def setup(env, loaders, stats, queue_limit):
    i = 0
    while True:
        delay = np.random.exponential(1/lambd) * 60
        yield env.timeout(delay)
        save_stats(stats, env, loaders, True, delay)
        i += 1
        truck = Truck(env, '{}'.format(i), loaders, stats)
        stats['trucks'].append(truck)
        if (loaders.capacity == loaders.count
            and len(loaders.queue) == queue_limit):
            log.append(
                '{} База переполнена, автомобиль #{} не смог заехать'.format(
                    now24(env), i))
        else:
            env.process(truck.run())

class Truck:
    def __init__(self, env, name, loaders, stats):
        self.env = env
        self.name = name
        self.loaders = loaders
        self.stats = stats
        self.born = env.now
        self.start = env.now
        self.finish = env.now

    def run(self):
        log.append(
            '{} Прибыл автомобиль #{}'.format(now24(self.env), self.name))
        with self.loaders.request() as request:
            yield request
            log.append(
                '{} Началась разгрузка автомобиля #{}'.format(
                    now24(self.env), self.name))
            self.start = self.env.now
            delay = np.random.exponential(1/mu) * 60
            yield self.env.timeout(delay)
            self.finish = self.env.now
            save_stats(self.stats, self.env, self.loaders, False, delay)
            log.append(
                '{} Завершилась разгрузка автомобиля #{}'.format(
                    now24(self.env),
                    self.name))

# Сбор статистики
def save_stats(stats, env, loaders, in_counter, delay):
    delta_t = env.now - stats['data']['timeline'][-1]
    for i in range(7):
        stats['data']['state{}'.format(i)].append(
            delta_t if loaders.count+len(loaders.queue) == i else 0)
    stats['data']['timeline'].append(env.now)
    if in_counter:
        stats['in_counter'].append(delay)
    else:
        stats['out_counter'].append(delay)
```

```python
    if len(stats['in_counter']):
        stats['data']['av_in'].append(
            sum(stats['in_counter'])/len(stats['in_counter']))
    else: stats['data']['av_in'].append(0)

    if len(stats['out_counter']):
        stats['data']['av_out'].append(
            sum(stats['out_counter'])/len(stats['out_counter']))
    else: stats['data']['av_out'].append(0)
```

In [17]:
```python
np.random.seed(7)
lambd = 2
mu = 2/3
stats = {'data': {},
         'in_counter': [],
         'out_counter': [],
         'trucks': []}
stats['data'] = {'timeline': [0],
                 'state0': [0],
                 'state1': [0],
                 'state2': [0],
                 'state3': [0],
                 'state4': [0],
                 'state5': [0],
                 'state6': [0],
                 'av_in': [0],
                 'av_out': [0]}
log = []
env = simpy.Environment()
loaders = simpy.Resource(env, capacity=2)
env.process(setup(env, loaders, stats, queue_limit=4))
env.run(until=2*365*24*60) # 2 года имитации СМО
```

In [18]:
```python
log[0:200] # первые 200 наблюдений
```

Out[18]:
```
['[01 день, 00:02] Прибыл автомобиль #1',
 '[01 день, 00:02] Началась разгрузка автомобиля #1',
 '[01 день, 00:47] Прибыл автомобиль #2',
 '[01 день, 00:47] Началась разгрузка автомобиля #2',
 '[01 день, 00:54] Завершилась разгрузка автомобиля #1',
 '[01 день, 01:26] Прибыл автомобиль #3',
 '[01 день, 01:26] Началась разгрузка автомобиля #3',
 '[01 день, 01:49] Прибыл автомобиль #4',
 '[01 день, 01:51] Прибыл автомобиль #5',
 '[01 день, 02:01] Прибыл автомобиль #6',
 '[01 день, 02:21] Прибыл автомобиль #7',
 '[01 день, 02:28] Завершилась разгрузка автомобиля #3',
 '[01 день, 02:28] Началась разгрузка автомобиля #4',
 '[01 день, 02:56] Прибыл автомобиль #8',
 '[01 день, 03:10] База переполнена, автомобиль #9 не смог заехать',
 '[01 день, 03:12] База переполнена, автомобиль #10 не смог заехать',
 '[01 день, 03:22] База переполнена, автомобиль #11 не смог заехать',
 '[01 день, 04:34] База переполнена, автомобиль #12 не смог заехать',
 '[01 день, 04:42] База переполнена, автомобиль #13 не смог заехать',
```

Статистический анализ

Для удобства поместим реализацию нашей имитации в датасет типа `pandas.Dataframe`. В колонку `timeline` будем записывать текущее глобальное время системы в момент наблюдения (в минутах). В колонках `state` будем записывать время нахождения системы в соответствующем состоянии с момента предыдущего измерения. В колонках `av_in` и `av_out` будем записывать накопленное среднее время поступления и обработки заявок соответственно.

In [19]:
```
import pandas as pd
```

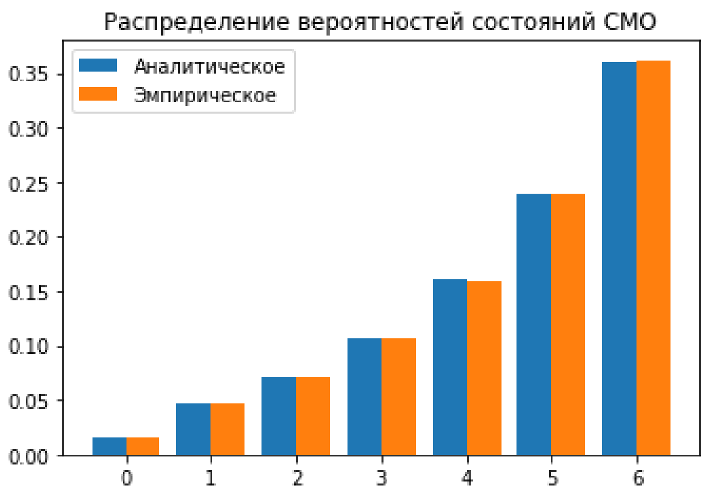
In [20]:
```
datatime = pd.DataFrame(stats['data'])
# Первые 10 наблюдений
datatime[0:10]
```

Out[20]:

	timeline	state0	state1	state2	state3	state4	state5	state6	av_in
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	2.381307	2.381307	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.381307
2	47.794068	0.000000	45.412760	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	23.897034
3	54.309675	0.000000	0.000000	6.515608	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	23.897034
4	86.356623	0.000000	32.046948	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	28.785541
5	109.554552	0.000000	0.000000	23.197928	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	27.388638
6	111.797911	0.000000	0.000000	0.000000	2.243359	0.000000	0.000000	0.000000	22.359582
7	121.175150	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	9.377239	0.000000	0.000000	20.195858
8	141.962517	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	20.787366	0.000000	20.280360
9	148.941779	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.979263	20.280360

Перед тем как перейти к оценкам характеристик сравним эмпирическое и аналитическое распределение вероятностей

In [21]:
```
emp_prob = []
for i in range(7):
    emp_prob.append(
        datatime['state{}'.format(i)].sum()/datatime.timeline.values[-1])
labels = ['P{}'.format(i) for i in range(7)]
x = np.arange(7)
width = 0.4
plt.bar(x - width/2, prob_list, width, label='Аналитическое')
plt.bar(x + width/2, emp_prob, width, label='Эмпирическое')
plt.title('Распределение вероятностей состояний СМО')
plt.legend()
plt.show()
```



Можно заметить, что распределения довольно похожи, значит в целом параметры имитации заданы верно.

1. Вероятность отказа $P_{\text{отк}}$

Будем использовать эффективную оценку вероятности отказа $\hat{P}_{\text{отк}} = \frac{T_6}{T_0+T_1+\dots+T_6}$ — доля времени нахождения системы в состоянии S_6.

In [22]:
```
plot_data = []
maxtime = datatime.timeline.max()
# Пусть первый замер будет на 3000 минуте имитации
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    plot_data.append(part_df.state6.sum()/part_df.timeline.values[-1])
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot(
    [0, 100],
    [prob_list[6], prob_list[6]], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.title('Оценка вероятности отказа')
plt.legend()
plt.show()
```

Можно заметить, что со временем эмпирическая оценка приближается к аналитическому значению.

2. Относительная пропускная способность Q

Эта характеристика оценивается как доля времени, в котором система находилась в любом состоянии кроме S_6. То есть она двойственна предыдущей характеристике, поэтому нет смысла ее оценивать отдельно. Очевидно, что со временем она приближается к аналитическому значению так же как и вероятность отказа.

3. Абсолютная пропусная способность A

Эта характеристика определяется как λQ, поэтому ее эффективной оценкой будет

$$\hat{A} = \frac{1 - \hat{P}_{\text{отк}}}{\bar{T}_{\text{вход}}}$$

где $\bar{T}_{\text{вход}}$ — среднее время появления автомобилей.

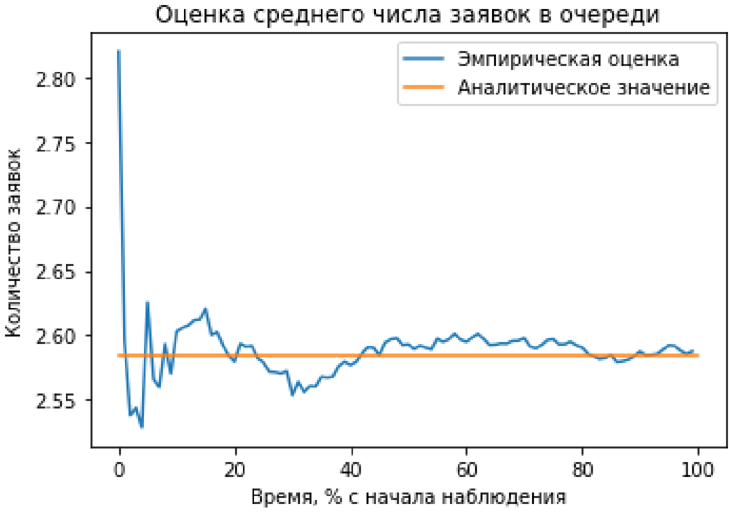
In [23]:
```
plot_data = []
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    res = (
        (1 - part_df.state6.sum()/part_df.timeline.values[-1])
        /
        (part_df.av_in.values[-1]/60)
    )
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [a, a], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Значение характеристики')
plt.title('Оценка абсолютной пропускной способности')
plt.legend()
plt.show()
```

4. Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$

Эффективной оценкой для этой характеристики будет взвешенная по доле времени сумма числа автомобилей в очереди

$$\hat{L}_{\text{оч}} = \frac{1 \cdot T_3 + 2 \cdot T_4 + 3 \cdot T_5 + 4 \cdot T_6}{T_0 + T_1 + \cdots + T_6}$$

In [24]:
```
plot_data = []
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    res = (
        sum([i*part_df['state{}'.format(i+2)].sum() for i in range(1, 5)])
        / part_df.timeline.values[-1])
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [l, l], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Количество заявок')
plt.title('Оценка среднего числа заявок в очереди')
plt.legend()
plt.show()
```



5. Среднее время ожидания заявки в очереди $\overline{T}_{\text{оч}}$

Эффективной оценкой этого параметра будет средняя длина очереди, умноженная на среднее время появления автомобилей

$$\bar{T}_{\text{оч}} = \hat{L}_{\text{оч}} \cdot \bar{T}_{\text{вход}}$$

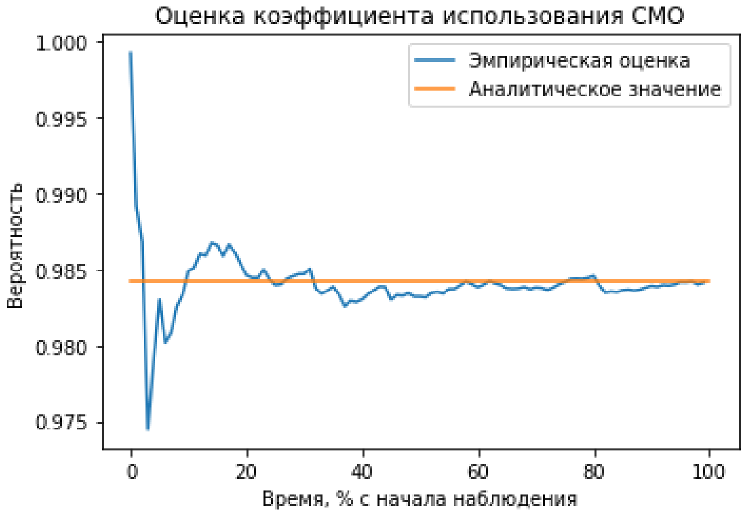
In [25]:
```
plot_data = []
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    res = (
        sum([i*part_df['state{}'.format(i+2)].sum() for i in range(1, 5)])
        / part_df.timeline.values[-1]
        *
        (part_df.av_in.values[-1]/60))
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [t, t], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Время, час')
plt.title('Оценка среднего времени ожидания в очереди')
plt.legend()
plt.show()
```

6. Коэффициент использования СМО $K_{исп}$

Эффективной оценкой этой характеристики будет

$$\hat{K}_{исп} = 1 - \hat{p}_0 = 1 - \frac{T_0}{T_0 + \dots + T_6}$$

In [26]:
```
plot_data = []
maxtime = datatime.timeline.max()
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    plot_data.append(
        1 - part_df.state0.sum()/part_df.timeline.values[-1])
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [k_use, k_use], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.title('Оценка коэффициента использования СМО')
plt.legend()
plt.show()
```



7. Среднее время пребывания заявки в СМО $\overline{T}_{\text{преб}}$

Эффективная оценка этой характеристики

$$\overline{T}_{\text{преб}} = \frac{\bar{T}_{\text{обр}}(T_1 \cdot 2 + \cdots + T_5 \cdot 6)}{2(T_0 + \cdots + T_6)}$$

In [27]:

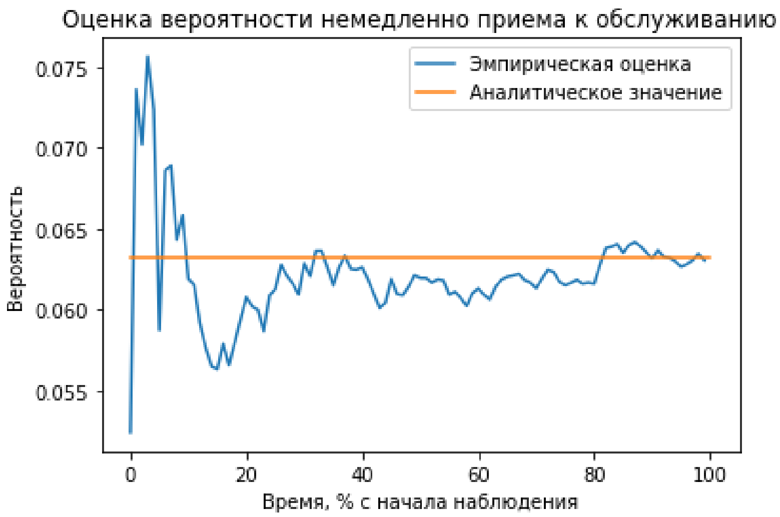
```
plot_data = []
maxtime = datatime.timeline.max()
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    res = (
        (part_df.av_out.values[-1])
        *
        (sum(
            [(i+1)
             *part_df['state{}'.format(i)].sum() for i in range(1, 6)]))
        /
        (2*(part_df.timeline.values[-1]))) / 60
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [t_proc, t_proc], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Время, час')
plt.title('Оценка среднего времени пребывания заявки в СМО')
plt.legend()
plt.show()
```

8. Вероятность немедленного приема к обслуживанию $P_{\text{обсл}}$

Эффективная оценка этой характеристики

$$\hat{P}_{\text{обс}} = \frac{T_0 + T_1}{T_0 + \dots + T_6}$$

In [28]:
```
plot_data = []
maxtime = datatime.timeline.max()
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    res = ((part_df.state0.sum() + part_df.state1.sum())
           / part_df.timeline.values[-1])
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [p_serve, p_serve], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.title('Оценка вероятности немедленно приема к обслуживанию')
plt.legend()
plt.show()
```

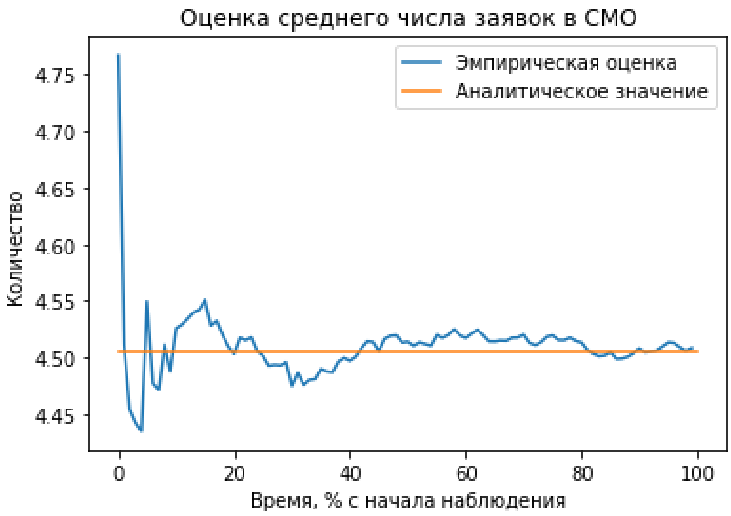


9. Среднее число заявок в СМО $L_{\text{СМО}}$

Эффективной оценкой этого параметра будет

$$\hat{L}_{\text{СМО}} = \frac{T_1 \cdot 1 + T_2 \cdot 2 + \cdots + T_6 \cdot 6}{T_0 + T_1 + \cdots + T_6}$$

In [29]:
```
plot_data = []
maxtime = datatime.timeline.max()
for i in np.linspace(3000, maxtime, 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    res = (
        (sum([i*part_df['state{}'.format(i)].sum() for i in range(1, 7)]))
        / part_df.timeline.values[-1])
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data, label='Эмпирическая оценка')
plt.plot([0, 100], [l_cmo, l_cmo], label='Аналитическое значение')
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Количество')
plt.title('Оценка среднего числа заявок в СМО')
plt.legend()
plt.show()
```



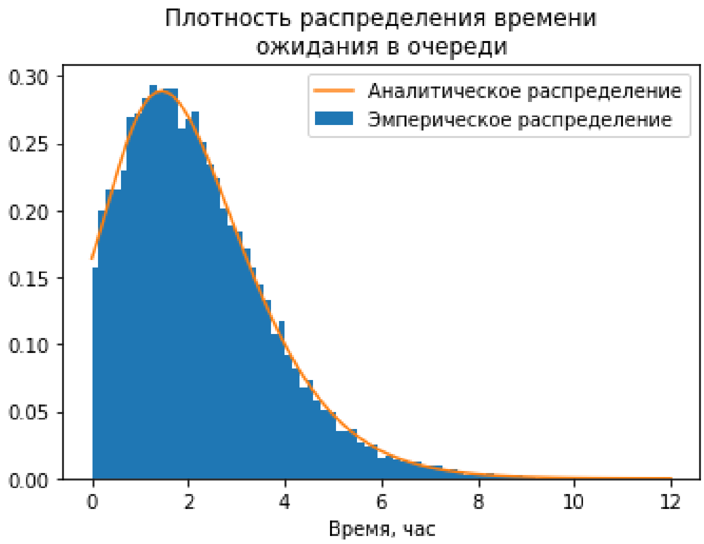
10. Закон распределения времени ожидания заявки в очереди

Ранее мы ввели две гипотезы

$$H_1 = S_0 \cup S_1 \cup S_6$$
$$H_2 = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

Для гипотезы H_1 определена только дискретная случайная величина T_1, которая принимает значение 0 с вероятностью 1, поэтому будем оценивать только гипотезу H_2. Для оценки распределения будем использовать нормированную гистограмму наблюдений, для которых время ожидания в очереди больше 0.

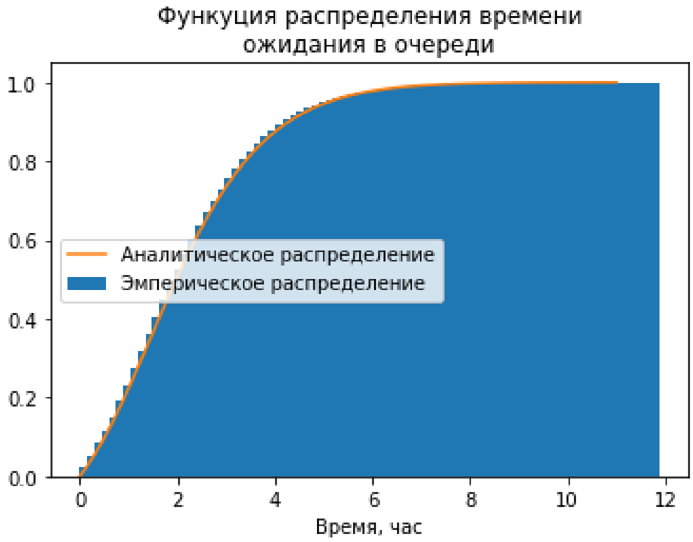
In [30]:
```
hist_data = []
for i_truck in stats['trucks']:
    if i_truck.start - i_truck.born > 0:
        hist_data.append((i_truck.start - i_truck.born)/60)
plt.hist(hist_data, bins=80, density=True, label='Эмперическое распределение')

x_space = np.linspace(0, 12, 100)
y_space = [total_pdf(x) for x in x_space]
plt.plot(x_space, y_space, label='Аналитическое распределение')

plt.xlabel('Время, час')
plt.title('Плотность распределения времени\nожидания в очереди')
plt.legend()

plt.show()
```



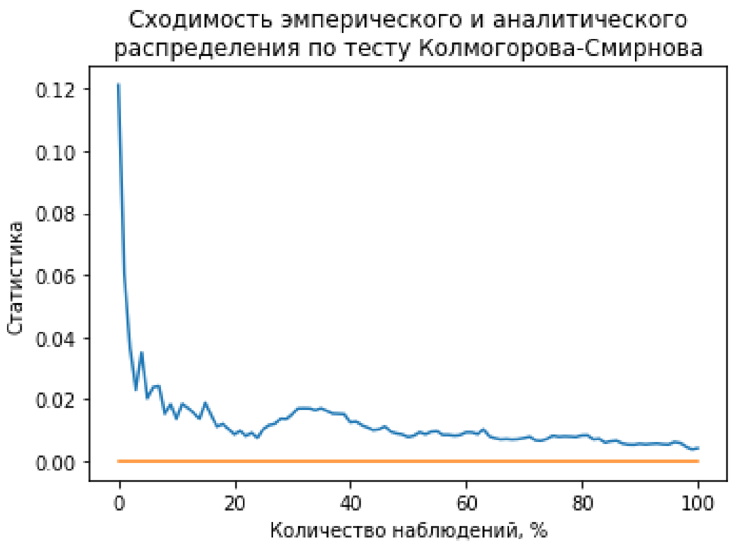
Для оценки сходимости с увеличением количества наблюдений будем использовать тест Колмогорова-Смирнова из пакета scipy, который использует функцию распределения. Для этого зададим функцию распределения нашей случайно величины T_2.

In [31]:
```
from scipy.stats import kstest
from scipy.special import gammainc

def erlang_cdf(k, nu, x):
    return gammainc(k, nu*x)

def total_cdf(x):
    return (sum([prob_list[i]*erlang_cdf(i-1, 2*mu, x) for i in range(2, 6)])
            / sum(prob_list[2:6]))
```

In [32]:
```
plt.hist(hist_data,
         bins=80,
         density=True,
         cumulative=True,
         label='Эмперическое распределение')

x_space = np.linspace(0, 11, 100)
y_space = [total_cdf(x) for x in x_space]
plt.plot(x_space, y_space, label='Аналитическое распределение')

plt.xlabel('Время, час')
plt.title('Функуция распределения времени\nожидания в очереди')
plt.legend()

plt.show()
```



In [33]:
```
plot_data = []
for i in range(100, len(hist_data) - 1, 200):
    res = kstest(hist_data[:i], total_cdf).statistic
    plot_data.append(res)
plt.plot(plot_data)
plt.plot([0, 100], [0, 0])
plt.xlabel('Количество наблюдений, %')
plt.ylabel('Статистика')
plt.title('Сходимость эмперического и аналитического\nраспределения по тесту Колмогорова-(
plt.show()
```



Анализ скорости сходимости

Рассмотрим скорость сходимости на примере параметра $L_{\text{СМО}}$ — среднее число заявок в СМО. Наблюдения можно рассматривать как реализацию независимых случайных величин $L_1, L_2, \ldots, L_n$ таких, что $\mathbb{E}[L_i] = m_i, \operatorname{Var}(L_i) = \sigma_i^2$. Тогда можно применить одно из следствий центральной предельной теоремы

$$\varepsilon = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

где ε - предельная ошибка, $\Phi(t) = \beta$ — вероятность, Φ — функция Лапласа

Для вероятности ~ 0.99 воспользуемся правилом трех сигм, то есть $t = 3$. Так как параметр σ^2 неизвестен, будем использовать его оценку s^2

$$s^2 = \frac{\sum(L_i - \bar{L})^2 n_i}{n}$$
$$\bar{L} = \frac{\sum L_i n_i}{n}$$

То есть для выбранного количества наблюдений n с вероятностью ~ 0.99 можно утверждать, что $L_{\text{СМО}} \in [\hat{L}_{\text{СМО}} - \varepsilon, \hat{L}_{\text{СМО}} + \varepsilon]$.

```
In [35]: y_val = []
y_err = []
for i in np.linspace(3000, datatime.timeline.max(), 100):
    part_df = datatime.loc[datatime.timeline < i]
    mean = ((sum([i*part_df['state{}'.format(i)].sum() for i in range(1, 7)])
            / part_df.timeline.values[-1])
    y_val.append(mean)
    var = ((sum([(i - mean)**2*part_df['state{}'.format(i)].sum() for i in ra
           / part_df.timeline.values[-1])
    eps = 3 * (var/part_df.shape[0])**(1/2)
    y_err.append(eps)
y_val = np.array(y_val)
y_err = np.array(y_err)
x_space = [i for i in range(100)]
plt.figure(figsize=(10,7))
plt.plot(x_space, y_val, label='Эмпирическая оценка')
plt.fill_between(x_space,
                 y_val - y_err,
                 y_val + y_err,
                 alpha=0.2,
                 label='Доверительный интервал')
plt.plot([0, 100], [l_cmo, l_cmo], label='Аналитическое значение')
plt.ylim((4.35, 4.65))
plt.grid(True)
plt.xlabel('Время, % с начала наблюдения')
plt.ylabel('Количество')
plt.title('Оценка среднего числа заявок в СМО')
plt.legend()
plt.show()
```