Universität Hamburg
Dr. Hendrik Baumann
Sommersemester 2016

Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Präsenzübung 6

Präsenzübung 6.1 (Erwartungswert und Varianz der minimalen Augenzahl)**.** Es bezeichne X die minimale Augenzahl beim Würfeln von zwei fairen Würfeln. Sie haben bereits ermittelt, dass die Verteilung von X wie folgt charakterisiert ist:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Sie bieten ein Glücksspiel an, bei dem die minimale Augenzahl des Wurfes mit zwei fairen Würfeln angibt, wie viele Geldeinheiten Sie dem Spieler ausbezahlen müssen. Wie viele Geldeinheiten verlangen Sie, um den Spielern ein faires Spiel zu bieten?

c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Präsenzübung 6.2 (Erwartungswert der Poisson-Verteilung)**.** Es sei $Z \sim \text{Pois}_\lambda$, d.h. es gelte $P(Z = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z]$.

b) Ist $Y \sim \text{Bin}_{n,p}$, so ist nach Vorlesung $\mathbb{E}[Y] = np$. Passt das Ergebnis aus a) zur Approximation von Binomialverteilungen durch Poisson-Verteilungen?

Hinweis: Es gilt immer noch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$.

Hausübung 6

Abgabe in Ihrer Übung am 24.5. oder 26.5.2016

Hausübung 6.1 (Roulette, 3+4+2 Punkte)**.** Beim Roulette sind die möglichen Ausgänge die Zahlen $\{0, \dots, 36\}$, bei guten Roulette-Tischen ist eine Laplace-Annahme gerechtfertigt. Im Spiel können Sie auf verschiedene Gruppen von Zahlen (einzelne Zahlen, corner, split, rot/schwarz, ...) wetten, allen Wettmöglichkeiten ist gemeinsam, dass sie die (grüne) 0 nicht enthalten. Als allgemeine Auszahlungsregel gilt: Haben Sie auf eine Gruppe aus k Zahlen gesetzt, erhalten Sie (Ihren Einsatz mitgerechnet) das $\frac{36}{k}$-fache Ihres Einsatzes zurück. Setzen Sie n Geldeinheiten ein, so beträgt Ihr Gewinn im Erfolgsfall also $n \cdot \left(\frac{36}{k} - 1\right)$, im Misserfolgsfall velieren Sie Ihren Einsatz, Ihr Gewinn beträgt also $-n$ Geldeinheiten.

a) In der einfachsten Variante setzen Sie auf „rot“ oder „schwarz“. Beide Zahlengruppen umfassen jeweils 18 der 37 möglichen Ergebnisse. Setzen Sie n Geldeinheiten ein, so können Sie im Erfolgsfall n Geldeinheiten Gewinn machen, im Misserfolgsfall verlieren Sie n Geldeinheiten. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Gewinns.

b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall mit dem Setzen auf k Zahlen und bestimmen Sie auch hier den Erwartungswert Ihres Gewinns.

c) Wie hängt der Erwartungswert des Gewinns von n ab? Wie hängt er von k ab?

Hausübung 6.2 (Die Varianz der Poisson-Verteilung, 7 Punkte)**.** Es sei $Z \sim \mathrm{Pois}_\lambda$. Bestimmen Sie $\mathbf{Var}[Z]$. *Hinweis:* Den Erwartungswert haben Sie bereits in der Präsenzübung bestimmt.

Hausübung 6.3 (Noch ein Glücksspiel, 3+2+4 Punkte)**.** Sie möchten ein neues Glücksspiel anbieten. Dazu stehen Ihnen geometrische Objekte zur Verfügung, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ jeweils einen Smiley anzeigen. Der Ablauf des Spiels sieht wie folgt aus: In der ersten Runde wird das Objekt mit Smiley-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewürfelt, in der zweiten Runde das mit Smiley-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, ..., allgemein wird in der n-ten Runde das Objekt mit Smiley-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ gewürfelt. Das Spiel endet, sobald zum ersten Mal ein Smiley erscheint. Sie bezeichnen mit X die Runde, in der zum ersten Mal ein Smiley gewürfelt wird. Nach etwas Überlegung wissen Sie, dass dann

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

gilt (Sie müssen diese Formel nicht begründen). Die Spieler setzen zu Beginn einen festen Betrag, und erhalten in Abhängigkeit von X am Ende des Spiels eine Auszahlung. Dabei ziehen Sie folgende Möglichkeiten in Betracht:

a) Ist $X = k$, so zahlen Sie k Geldeinheiten aus.

b) Ist $X = k$, so zahlen Sie k^2 Geldeinheiten aus.

c) Ist $X = k$, so zahlen Sie $\frac{8}{k+2}$ Geldeinheiten aus.

Geben Sie jeweils an, wie hoch Sie den Einsatz zu Beginn des Spiels wählen müssen, um ein faires Spiel zu erzeugen.

Hinweis: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$