~~2.1~~

2.1	2.2	2.3	2.4	Σ
1	2	1.5	4.5	9

Algorithmen und Datenstrukturen

Vincent Dahmen 6689845 Roberto Seidel 6537468
Rafael Heid 6704828

26. Oktober 2015

2.1

2.1.1

$3n^3 - 6n + 20$ liegt in n^3 da für ein festes c (z.B. c=10000) immer $c \cdot n^3 > 3n^3 - 6n + 20$ gilt.

Formal gilt: $\lim_{n\to\infty} 3n^3 - 6n + 20 = \lim_{n\to\infty} n^3$ damit liegt die Funktion aber genau in $O(n^3)$

unvollständiger Beweis

2.1.2

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 \cdot log(n)) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (n^3)$$

nach dem Satz von l'Hospital gilt

$$\lim_{n\to\infty} (2n \cdot log(n) + \tfrac{n^2}{n}) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (3n^2)$$
$$\lim_{n\to\infty} (2n \cdot log(n) + n) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (n^2)$$

Hier kann man wieder die Regeln von l'Hospital anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} (2 \cdot log(n) + \tfrac{2n}{n}) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (2n)$$
$$\lim_{n\to\infty} (2 \cdot log(n) + 2) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (2n)$$

Ein letzes Mal kann man die Regel anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} (\tfrac{2}{n} + 2) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (2n)$$
$$0 + 2 = 2 \quad \leq \quad \infty$$

Also gilt die erste Behauptung schonmal. Nun wollen wir zeigen dass die Funktion auch in $\Omega(n^2)$liegt.

Umformung notwendig, um L'Hospital anwenden zu können!

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 \cdot log(n)) \quad \geq \quad \lim_{n\to\infty} (n^2)$$

Wir leiten beide Funktionen ab (nach l'Hospital)

$$\lim_{n\to\infty} (2n \cdot log(n) + \tfrac{n^2}{n}) \quad \geq \quad \lim_{n\to\infty} (2n)$$
$$\lim_{n\to\infty} (2 \cdot log(n) + 2) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} (2)$$
$$\infty \quad \geq \quad 2$$

Wie hier ebenfalls gut zu erkennen ist liegt die Funktion ebenfalls in $\Omega(n^2)$.

Damit ist die Aussage uneingeschränkt wahr.

ML für korrekte Formalismen 1/2

2.2

Funktion	∈	Äquivalenzklasse
{4, 1000}	⊂	O(1)
$\{ln(n), log(n)\}$	⊂	O(log(n))
$n^{0.5}$	∈	$O(\sqrt{n})$
$\sqrt{n}^3$	∈	$O(n^{\frac{3}{2}})$
n^2	∈	$O(n^2)$
2^n	∈	$O(2^n)$

f(n) = n fehlt

Die obige Tabelle zeigt das Wachstumsverhalten in aufsteigender Reihenfolge. Funktionen die in der gleichen Äquivalenzklasse liegen sind entsprechend geklammert. Es folgt eine Begründung der Zusammenfassungen.

Funktion	Begründung
{4, 1000}	Beide überschreiten nie einen konstanten Wert
$\{ln(n), log(n)\}$	Das Wachstum ist bis auf einen konstanten Faktor gleich
$n^{0.5}$	
$\sqrt{n}^3$	Nach den Potenzgesetzen gilt $\sqrt{n}^a = n^{\frac{a}{2}}$
n^2	
2^n	

Wo sind die Begründungen? 2.0/4

2.3

$f(n), g(n) \in O(h(n)) \implies f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$ ist zu zeigen.

Dabei seien folgende Aequivalenzen gegeben:
$f(n) \in O(h(n)) \iff f(n) \leq c' \cdot h(n)\ fuer\ alle\ n > n_0'$
$g(n) \in O(h(n)) \iff g(n) \leq c'' \cdot h(n)\ fuer\ alle\ n > n_0''$

Durch multiplizieren der rechten Aequivalenz-Seiten beider Funktionen er-

halten wir folgendes:
$f(n) \cdot g(n) \leq (c' \cdot c'') \cdot (h(n))^2$ *fuer alle* $n > n_0$, *wobei* $n_0 = n_0' \cdot n_0''$
$\rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$

$n_0 = \max(n_0', n_0'')$

Damit ist die Richtigkeit der Implikation gezeigt. ✓

1.5/2

2.4

2.4.1

Substituionsmethode

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3(T(n-1)) + 2 \\
&= 3(3(T(n-1-1)+2)+2 = 9T(n-2) + 3 \cdot 2 + 2 \\
&= 3(9T(n-2-1) + 3 \cdot 2 + 2) + 2 = 21 \cdot T(n-3)3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \\
&= \ldots \\
\text{(vermutlich)} &= 3^k \cdot T(n-k) + \Sigma_{i=0}^{k-1}(3^i \cdot 2)
\end{aligned}
$$

eiei + ✓

Um die Vermutung zu bewweisen führen wir eine vollständige Induktion durch.

Dabei nehmen wir an dass: $3^k \cdot T(n-k) + \Sigma_{i=0}^{k-1}(3^i \cdot 2)$ gilt. $T(n)=$ nach k Abwicklungen

Die Funktion T(n) schränkt den Gültigkeitsbereich nicht ausreichend ein, da für negative Werte für n die Rekursion nie abbricht.

Für die Induktion nehmen wir an, dass $n \in \mathbb{N}$ liegt.

Daher ist unser Induktionsanfang auch bei $n = 1$.

Dann gilt:

$$T(1) = 3 \cdot T(1-1) + 2 = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

bzw mit unserer Annahme:

$$T(1) = 3^1 \cdot T(1-1) + \Sigma_{i=0}^{k-1}(3^i \cdot 2) = 3 \cdot 0 + \Sigma_{i=0}^{1-1}(3^i \cdot 2) = 0 + 2$$

Damit haben wir den Induktionsanfang gezeigt. Induktionsannahme?

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n+1) \\
3(T(n+1-1)) + 2 &= 3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{(k+1)-1}(3^i \cdot 2) \\
3(3^k \cdot T(n-k-1) + \Sigma_{i=0}^{k-1}(3^i \cdot 2)) + 2 &= 3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{(k+1)-1}(3^i \cdot 2) \\
3 \cdot 3^k \cdot T(n-(k+1)) + 3 \cdot \Sigma_{i=0}^{k-1}(3^i \cdot 2) + 2 &= 3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{(k+1)-1}(3^i \cdot 2) \\
3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{k-1}(3 \cdot 3^i \cdot 2)) + 2 &= 3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{(k+1)-1}(3^i \cdot 2) \\
3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=1}^{k}(3^i \cdot 2)) + 2 &= 3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{(k+1)-1}(3^i \cdot 2) \\
3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{k}(3^i \cdot 2)) &= 3^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) + \Sigma_{i=0}^{(k+1)-1}(3^i \cdot 2)
\end{aligned}
$$

Die Rekursion bricht bei $n-k = 0$ ab also wird mit $k = n$ weitergerechnet: ?

$$\lim_{n\to\infty}(3^k \cdot T(n-n) + \Sigma_{i=0}^{n-1}(3^i \cdot 2)) = \lim_{n\to\infty}(3^n)$$ Wieso limes?

Damit liegt die Funktion in etwa $O(3^n)$ Wie kommt ihr darauf?

Die Abschätzung mit dem Mastertheorem ist hier nicht anwendbar, da die Rekursion im falschen Format vorliegt. ✓

2.5/4

2.4.2

wo ist die vollst. Induktion? Nicht abkürzen!

Ermitteln der Größenordnung mittels Induktion:

$$
\begin{aligned}
S(k=n) &= 4^2 \cdot S(\tfrac{n}{4}) + n^2 \\
S(k=n+1) &= 4^2(4^2 \cdot S(\tfrac{n}{4^2}) + n^2) + n^2 = 4^{2 \cdot 2} \cdot S(\tfrac{n}{4^2}) + 4n^2 + n^2 \\
S(k=n+2) &= 4^2(4^{2 \cdot 2} \cdot S(\tfrac{n}{4^2} + 4 \cdot n^2 + n^2) + n^2 = 4^{3 \cdot 2} \cdot S(\tfrac{n}{4^2}) + 4^2 n^2 + 4n^2 + n^2 \\
&\ldots \\
S(k) &= 4^{(k-1) \cdot 2} \cdot S(\tfrac{n}{4(k-1)}) + \Sigma_{i=0}^{k(k-2)}(4^i \cdot k^2)
\end{aligned}
$$

$\frac{n^2}{4}$

Was passiert hier???

Das war nix!

Ermitteln der Groessenordnung mittels des Mastertheorems:

$$S(n) := \begin{cases} c, & \textit{fuer } n = 1; \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \textit{sonst}; \end{cases}$$

Fall 1: $S(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$, *falls* $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ *fuer ein* $\epsilon > 0$
Wegen $\log_b(a)$ *mit* $b = 4$ *und* $a = 16 \rightarrow \log_4(16) = 2$ *und*
$f(n) = n^2$ *ist* $f(n) \notin O(n^{2-\epsilon})$, *da mit* $\epsilon > 0$ $O(f(n)) > O(n^{2-\epsilon})$ $f(n) = \omega(n^{2-\epsilon})$

Fall 2: $S(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \log_2(n))$, $falls f(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$
$mit f(n) und \log_b(a) wieobenist f(n) \in \Theta(n^2)$
$\lim_{n->\infty} \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n->\infty} 1 = 1$, *da* $0 < 1 < \infty \rightarrow f(n) \in \Theta$ ← wozu?

Hiermit gilt $T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \log_2(n))$ $= \Theta(n^2 \log_2(n))$

Schaut euch nochmal die Substitutionsmethode in der ML an!

2/4