Corrigé du CNC 2008 Math2 PSI

Rédigé par KHOUTAIBI Abdelaziz professeur en PSI à Marrakech

I.

1. (a) $M \in \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A) \Longleftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{K}),\ M = PAP^{-1}$

   d'où $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1}/P \in GL_2(\mathbb{K})\}$.

   (b) $\forall\, x \in \mathbb{K},\ \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(xI_2) = \{xI_2\}$.

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(E_\lambda) = \det(F_\lambda) = 1 \neq 0$ donc E_λ et F_λ sont inversibles et
   $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a+\lambda c & -c\lambda^2+(d-a)\lambda+b \\ c & d-\lambda c \end{pmatrix},\ F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a-\lambda b & b \\ -b\lambda^2+(a-d)\lambda+c & b\lambda+d \end{pmatrix}.$

   (c) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
   A est semblable à elle même, donc $A \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$.
   Si $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est réduite à un singleton alors $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$,
   de plus,$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \ E_\lambda A E_\lambda^{-1} \in \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ sont dans $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$,donc

   $$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda A E_\lambda^{-1} = F_\lambda A F_\lambda^{-1} = A$$

   En identifiant les premières lignes on obtient:
   $b = c = 0$, $a = d$ et par suite $A = aI_2$.

3. Soit $\psi : \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^4, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)$ l'isomorphisme canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^4$ et
   $N : (a,b,c,d) \mapsto (|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)^{1/2}$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{K}^4$ alors

   $$\forall\, A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),\ ||A||_S = N(\psi(A))$$

   Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_2(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

   - $||A||_S = 0 \Longleftrightarrow N(\psi(A)) = 0 \Longleftrightarrow \psi(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$
   - $||\lambda A||_S = N(\psi(\lambda A)) = N(\lambda\psi(A)) = |\lambda| N(\psi(A)) = |\lambda| ||A||_S$.
   - $$\begin{aligned} ||A+B||_S &= N(\psi(A+B)) \\ &= N(\psi(A)+\psi(B)) \\ &\leq N(\psi(A)) + N(\psi(B)) \\ &= ||A||_S + ||B||_S \end{aligned}$$

   Des trois points précédents on déduit que $||.||_S$ est une norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

4. (a) Posons

   $$\mathscr{E} = \{E_\lambda A E_\lambda^{-1}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+\lambda c & -c\lambda^2+(d-a)\lambda+b \\ c & d-\lambda c \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$
   $$\mathscr{F} = \{F_\lambda A F_\lambda^{-1}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a-\lambda b & b \\ -b\lambda^2+(a-d)\lambda+c & b\lambda+d \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

   On a alors

   $\mathscr{E} \subset \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et $\mathscr{F} \subset \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$, et puisque $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est bornée, alors $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ le sont aussi.

(b) Puisque toute application polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$, bornée sur $\mathbb{K}$ est constante alors:

$b = c = 0$ et $a = d$, par suite $A = aI_2$.

5. Si $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est compacte alors elle est bornée et d'après b) A est scalaire.

6. L'application trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, qui est de dimension finie, donc elle est continue.

   L application det:
$$\mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$
   est polynômiale donc continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

7. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ alors, il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$, d'où

   - $\det(B)=\det(PAP^{-1})=\det(P)\det(A)\det(P^{-1})=\det(PP^{-1})\det(A)=\det(A)$.
   - $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \det(PAP^{-1} - \lambda I_2) = \det(P(A - \lambda I_2)P^{-1}) = \det(A - \lambda I_2) = \chi_A(\lambda)$, d'où $\chi_A = \chi_B$.

II.

1. (a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ alors A est une matrice d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et par suite elle est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   (b) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ donc,
   A est digonalisable si et seulement si elle est semblable à λI_2 c.à.d $A = \lambda I_2$.

   (c) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, id l'identité de $\mathbb{K}^2$ et notons $N_\lambda := \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.
   χ_f est de degré 2 et admet une unique racine λ, donc il est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\chi_f = (\lambda - X)^2$, comme f non diagonalisable alors $\dim N_\lambda = 1$.
   Soit $v \in \mathbb{K}^2 \setminus N_\lambda$ et $u = (f - \lambda id)(v)$.
   On a $v \notin N_\lambda$, donc $u = (f - \lambda id)(v) \neq 0$, et d'après Cayley-hamilton $(f - \lambda id)^2 = 0$ donc, $(f - \lambda id)(u) = (f - \lambda id)^2(v) = 0$ et par suite $u \in N_\lambda \setminus \{0\}$ et (u, v) est libre de $\mathbb{K}^2$ qui est de dimension 2, donc $\beta' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{K}^2$ et $mat_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
   A et $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ représentent le même endomorphisme f de $\mathbb{K}^2$, donc elles sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

2. (a) Si $A = xI_2$ où $x \in \mathbb{K}$, alors d'après I.1.b $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{xI_2\}$ est un singleton qui est un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

   (b) On pose $P_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alors $A_k = P_k T P_k^{-1}, P_k \in GL_2(\mathbb{K})$ donc A_k est semblable à T et T semblable à A d'aprés II.1.c donc par transitivité A_k est semblable à A, d'où $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$

   D'autre part: $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = \lambda I_2$.

   λI_2 est diagonale et A n'est diagonalisable , donc A n'est pas semblable à λI_2 et par suite $\lambda I_2 \notin \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$.
   $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers $\lambda I_2 \notin \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc d'après la caractérisation séquentielle d'un fermé $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

(c) i. $\forall\, k \in \mathbb{K},\ P_k(A-\alpha I_2)P_k^{-1} = P_k A P_k^{-1} - \alpha I_2$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} P_k(A-\alpha I_2)P_k^{-1} = B - \alpha I_2$$

,

d'après 7) l'application det est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} \det(P_k(A-\alpha I_2)P_k^{-1}) = \det(B-\alpha I_2)$$

D'autre part,

$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \det(P_k(A-\alpha I_2)P_k^{-1}) = \det(A-\alpha I_2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \det(P_k^{-1}(A-\alpha I_2)P_k) = 0.$
L'unicité de la limite donne $\det(B-\alpha I_2) = 0$.

ii. D'après i) on a $\det(B-\lambda I_2) = \det(B-\mu I_2) = 0$, donc $\{\lambda,\mu\} \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$, comme $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors elle admet au plus deux valeurs propres, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda,\mu\}$, et d'après 1.a, A et B sont semblables à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et par transitivité de la relation de similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, B est semblable à A d'où $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$.

On a montré que pour toute suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, sa limite est dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$, soit λ et μ ses valeurs propres éventuellement confondues.
$\Rightarrow$)
Supposons que $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée

Si A n'est pas diagonalisable alors $\lambda = \mu$ et d'après 2.b $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée, ce qui contredit l'hypothèse, d'où A est daigonalisable.

$\Leftarrow$)
Supposons que A est diagonalisabe

- Si $\lambda = \mu$ alors d'après 1.b, $A = \lambda I_2$ et d'après 2.a, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
- Si $\lambda \neq \mu$ alors d'après 2.c, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

4. (a) On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, donc le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ de A n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$, par suite son discriminant $\Delta = (\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det(A)$ est strictement négatif, d'où $4\det(A) - (\mathrm{tr}(A))^2 > 0$.

(b) $A'^2 = \dfrac{4}{\delta^2}\left(A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \dfrac{(\mathrm{tr}(A))^2}{4} I_2\right)$, or d'après cayley-hamilton $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2$, donc
$A'^2 = \dfrac{4}{\delta^2}\left(-\det(A) + \dfrac{(\mathrm{tr}(A))^2}{4}\right) I_2 = \dfrac{4}{\delta^2}\dfrac{(-\delta^2)}{4} I_2 = -I_2$

(c) Supposons que $(e, f(e))$ liée, comme $e \neq 0$ alors : $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ f(e) = \alpha e$ et comme $f^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$ alors:

$f^2(e) = \alpha f(e) = \alpha^2 e \Rightarrow -e = \alpha^2 e \Rightarrow \alpha^2 = -1,$

ceci est absurde car $\alpha \in \mathbb{R}$,

d'où $\beta_1 = (e, f(e))$ est libre de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 et par suite c'est une base de $\mathbb{R}^2$ et

$$mat_{\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) On a $A' = PA_1P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base β_1 de $\mathbb{R}^2$.

$$A'' = \frac{\delta}{2}A_1 + \frac{\mathrm{tr}(A)}{2}I_2 = \frac{\delta}{2}P^{-1}A'P + \frac{\mathrm{tr}(A)}{2}I_2 = P^{-1}\left(\frac{\delta}{2}A' + \frac{\mathrm{tr}(A)}{2}I_2\right)P = P^{-1}AP,$$

d'où A et A'' sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) i. D'après I.7), on a $\forall\, k \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}(P_kAP_k^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ et $\det(P_kAP_k^{-1}) = \det(A)$ or d'après I.6, les applications tr et det sont continues sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{tr}(P_kAP_k^{-1}) = \mathrm{tr}(\tilde{A})$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \det(P_kAP_k^{-1}) = \det(\tilde{A})$ l'unicité de la limite donne alors: $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \mathrm{tr}(A)$ et $\det(A) = \det(\tilde{A})$.

ii. D'parés i) $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\tilde{A}) = \emptyset$ et d'après 4.d, A est semblable à $A'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & -\delta \\ \delta & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$ et $\tilde{A}$ est semblable à $\tilde{A}'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\tilde{A}) & -\delta' \\ \delta' & \mathrm{tr}(\tilde{A}) \end{pmatrix}$ où $\delta' = \sqrt{4\det(\tilde{A}) - (\mathrm{tr}(\tilde{A})^2)}$,
Comme d'après i) $\det(\tilde{A}) = \det(A)$ et $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \mathrm{tr}(A)$ alors $\delta = \delta'$ et par suite $A'' = \tilde{A}''$.
Ainsi A et $\tilde{A}$ sont semblables à A'' donc elles sont semblables.

5. $\Rightarrow$)

On procède par contraposée et on suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ et A non diagonalisable alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$ et donc d'après II.2.b $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ n'est pas fermée.

$\Leftarrow$)

- Si A est diagonalisable alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ donc d'après II.2.a et II.2.c $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.
- Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ alors d'après II.4, pour toute suite (A_k) d'éléments de $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers $\tilde{A}$, on a $\tilde{A} \in \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$, et par suite $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

III.

A

1. Le polynôme caractéristique de G est de degré 2 et puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ alors χ_G admet au moins une racine réelle λ, d'où il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\chi_A = (\lambda - X)(\mu - X)$ et par suite les racines de χ_G sont λ et μ qui sont réelles .

2. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ alors $A\,{}^{t}\!A = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ d'où,

$$\|A\|_S = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A\,{}^{t}\!A)}$$

(b)

$$\begin{aligned} \|UA\,{}^{t}U\|_S &= (\mathrm{tr}(U\,{}^{t}\!A\,{}^{t}UUA\,{}^{t}U))^{1/2} \\ &= \mathrm{tr}(U\,{}^{t}\!AA\,{}^{t}U))^{1/2} \quad (\text{ car } {}^{t}UU = I_2) \\ &= (\mathrm{tr}({}^{t}\!AA\,{}^{t}UU))^{1/2} \quad (\text{ car } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\ &= (\mathrm{tr}({}^{t}\!AA))^{1/2} = \|A\|_S \end{aligned}$$

En remplaçant U par ${}^{t}U$ qui est aussi orthogonale on obtient l'autre égalité

$$\|A\|_S = \|\,{}^{t}UAU\|_S$$

3. $\mathscr{A} = \{\|PAP^{-1}\|_S;\ P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est une partie de $\mathbb{R}$
$\mathscr{A}$ n'est pas vide car $GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas vide et $\mathscr{A}$ est minorée par 0 , donc elle possède une borne inférieure.

B.

1. (a) $u_1 = \dfrac{u_1'}{\|u_1'\|}$ et $u_2 = \dfrac{w}{\|w\|}$ où $w = u_2' - (u_2'|u_1)u_1$

   (b) U est la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2), ces deux bases sont orthonormées pour le produit scalaire $(.|.)$ donc U est orthogonale et par suite ${}^tUU = I_2$.

   (c) On a: $g(u_1) = \dfrac{1}{\|u_1'\|} g(u_1') = \dfrac{\lambda}{\|u_1'\|} u_1' = \lambda u_1$, posons $g(e_2) = \alpha u_1' + \gamma u_2'$, alors :

   $T = mat_{(u_1', u_2')}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, de plus $(\lambda - X)(\mu - X) = \chi_g(X) = \chi_T(X) = (\lambda - X)(\gamma - X)$, d'où $\gamma = \mu$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   D'après la formule de changement de matrice : $G = UTU^{-1} = UT\,{}^tU$ car d'après b) ${}^tU = U^{-1}$.

   D'après A.2.b on a: $\|G\|_S = \|T\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2}$

2. (a) Soit $B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ alors A et B sont semblables donc d'après I.7) elles ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres λ et μ et d'après 1.c), il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que:

   $$\|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha_1^2} \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

   (b) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$

   (c) Posons pour $t \in \mathbb{R}^*$, $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, alors d'après b) $\forall\, t \in \mathbb{R}^*$ $A(t) \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ et par suite

   $$\|A(t)\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + t^2\alpha^2} \geq \inf_{B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$$

   En faisant tendre t vers 0, on obtient:

   $$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \geq \inf_{B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$$

   ,

   et d'après 2.a), on a:

   $$\inf_{B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

   (d) $\Rightarrow$)

   On suppose que A est diagonalisable alors, A est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donc $D \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = \|D\|_S$, d'où $\inf\limits_{B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte en D.

   $\Leftarrow$) On suppose que $\exists G \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$, $\inf\limits_{B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \|G\|_S$.

   Puisque $G \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ alors $\chi_A = \chi_B = (\lambda - X)(\mu - X)$ et d'après 1)c) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que G est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\|G\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2}$ d'où,

   $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, par suite $\alpha = 0$ et G est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donc elle est bien diagonalisable.

3. (a) Soit $\mathscr{A} = \{\|PAP^{-1}\|_S;\ P \in GL_2(\mathbb{R})\}$.

On a $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}=\inf\mathscr{A}$, donc d'après la caractérisation de la borne inférieure:
$\forall\,\varepsilon>0, \exists \|PAP^{-1}\|_S\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A),\ \|PAP^{-1}\|_S\leq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}+\varepsilon,$
en particulier pour $\varepsilon=\dfrac{1}{k+1}$, avec$k\in\mathbb{N}$, $\exists P_k\in GL_2(\mathbb{R})$, $\|P_kAP_k^{-1}\|_S\leq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}+\dfrac{1}{k+1}$,
d'où l'existence de la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ souhaitée.

(b) D'après a) $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\|P_kAP_k^{-1}\|_S\leq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}+\dfrac{1}{k+1}\leq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}+1$
Donc la suite $(P_kAP_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) Il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(P_{\varphi(k)}AP_{\varphi(k)}^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{A}$.
$\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\|P_{\varphi(k)}AP_{\varphi(k)}^{-1}\|_S\leq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}+\dfrac{1}{\varphi(k)+1}$, de la continuité de l'application $\|.\|_S$, on déduit que
$\lim\limits_{k\to+\infty}\|P_{\varphi(k)}AP_{\varphi(k)}^{-1}\|_S=\|\tilde{A}\|_S\leq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$
D'autre part $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est supposée fermée et $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $P_{\varphi(k)}AP_{\varphi(k)}^{-1}\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ alors $\tilde{A}\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ et d'après 2)a) $\|\tilde{A}\|_S\geq\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, d'où

$$\|\tilde{A}\|_S=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$$

La borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S;\ P\in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte en $\tilde{A}\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$, donc d'après 2.d) A est diagonalisable.

C.

1. On a $M'=\dfrac{2}{\delta}\begin{pmatrix}\dfrac{a-d}{2} & b\\ c & \dfrac{d-a}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$, où $\alpha=\dfrac{a-d}{\delta},\ \beta=\dfrac{2b}{\delta},\ \gamma=\dfrac{2c}{\delta}$
$-I_2=M'^2=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & 0\\ 0 & \beta\gamma+\alpha^2\end{pmatrix}=(\alpha^2+\beta\gamma)I_2$, d'où $\alpha^2+\beta\gamma=-1$

2. On a $f(v)=(\alpha x+\beta y,\gamma x-\alpha y)$, donc :

$$(v|f(v)=x(\alpha x+\beta y)+y(\gamma x-\alpha y)=\alpha^2x^2+(\beta+\gamma)xy-\alpha^2y^2$$

- Si $\alpha=0$ alors $(v|f(v))=(\beta+\gamma)xy$, il suffit de prendre $e=(1,0)$.
- Si $\alpha\neq0$, on prend $y=1$, le discriminant du polynôme du second degré en x est $\Delta=(\beta+\gamma)^2+4\alpha^4\geq0$,
donc il admet au mois une racine x dans $\mathbb{R}$ on prend alors $e=(x,1)$.

On a $\det(f)=\det(M')=-\alpha^2-\beta\gamma=1$, donc $f\in GL(\mathbb{R}^2)$ et comme $e\neq0$ alors $f(e)\neq0$.

3. On a $(u_1|u_2)=\dfrac{1}{\|e\|\|f(e)\|}(e|f(e))=0$ car $(e|f(e))=0$ et
$\|u_1\|=\|u_2\|=1$, donc (u_1,u_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

$f(u_1)=\dfrac{1}{\|e\|}f(e)=\dfrac{\|f(e\|}{\|e\|}u_2$ et $f(u_2)=\dfrac{1}{\|f(e)\|}f^2(e)=-\dfrac{1}{\|f(e)\|}e=-\dfrac{\|e\|}{\|f(e)\|}u_1$ d'où
$M_1=mat_{(u_1,u_2)}(f)=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\|e\|}{\|f(e)\|}\\ \dfrac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0\end{pmatrix}$

4. Pour U matrice orthogonale ,c'est la même réponse que la question III.B.1.b.

On a $\dfrac{\delta}{2}M'=M-\dfrac{\mathrm{tr}(M)}{2}I_2$ donc

$M=\dfrac{\delta}{2}M'+\dfrac{\mathrm{tr}(M)}{2}I_2=\dfrac{\delta}{2}UM_1\,{}^{\mathrm{t}}U+\dfrac{\mathrm{tr}(M)}{2}I_2=U\left(\dfrac{\delta}{2}M_1+\dfrac{\mathrm{tr}(M)}{2}I_2\right)\,{}^{\mathrm{t}}U=UM_2\,{}^{\mathrm{t}}U$, où

$M_2=\left(\dfrac{\delta}{2}M_1+\dfrac{\mathrm{tr}(M)}{2}I_2\right)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(M) & -\delta\ell\\ \dfrac{\delta}{\ell} & \mathrm{tr}(M)\end{pmatrix}$ et $\ell=\dfrac{\|e\|}{\|f(e)\|}$.

5. (a) M'' est semblable à M dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc $M''\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)$ et par suite :
$\inf\limits_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)}\|B\|_S\leq\|M''\|_S$.
$\|M''\|_S=\sqrt{\dfrac{1}{2}((\mathrm{tr}(M))^2+\delta^2)}=\sqrt{2\det(M)}$.

(b) $\|M_2\|_S=\sqrt{\dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(M))^2+\dfrac{1}{4}(\ell^2+\dfrac{1}{\ell^2})\delta^2}$,
d'autre part d'après l'inégalité $x^2+y^2\geq 2xy$ on a

$\|M_2\|_S\geq\sqrt{\dfrac{1}{2}((\mathrm{tr}(M))^2+\delta^2)}=\|M''\|_S$.

Soit $B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)$, alors B est semblable à M et comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\emptyset$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)=\emptyset$ et d'après 4) $\exists U\in O_2(\mathbb{R}),\ B=UB_2\,{}^{\mathrm{t}}U$ et d'après I.7) $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(M)$ et $\det(B)=\det(M)$, donc $B_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(M) & -\delta\ell'\\ \dfrac{\delta}{\ell'} & \mathrm{tr}(M)\end{pmatrix}$
où ℓ' est un réel strictement positif,
et d'après III.A.2.b $\|B\|_S=\|B_2\|_S\geq\|B''\|=\|M''\|_S=\sqrt{2\det(M)}$ (d'après a)

6. D'après 5.b), $\forall\, B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M),\ \|B\|_S\geq\sqrt{2\det(M)}$ donc $\inf\limits_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)}\|B\|_S\geq\sqrt{2\det(M)}$,
d'autre part $\|M''\|_S=\sqrt{2\det(M)}$ et $M''\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)$ donc

$$\inf_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)}\|B\|_S=\sqrt{2\det(M)}=\|M''\|\ (*)$$

d'où $\inf\limits_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)}\|B\|_S$ est atteinte en M''.

Soit $B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(M)$, tel que $\|B\|_S=\sqrt{2\det(M)}$ et soit comme dans 4) la matrice $B_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(M) & -\delta\ell'\\ \dfrac{\delta}{\ell'} & \mathrm{tr}(M)\end{pmatrix}$
on a d'après 4) $B=UB_2\,{}^{\mathrm{t}}U$ où $U\in O_2(\mathbb{R})$, donc
$\|B\|_S=\|B_2\|_S=\sqrt{\dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(M))^2+\dfrac{1}{4}(\ell'^2+\dfrac{1}{\ell'^2})\delta^2}$,

$$\begin{aligned}\|B\|_S=\|M''\|_S &\iff \sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(M))^2+\frac{1}{4}(\ell'^2+\frac{1}{\ell'^2})\delta^2}=\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(M))^2+\frac{1}{2}\delta^2}\\ &\iff \ell'=1\ \text{(car } \ell'>0)\\ &\iff B_2=B''=M''\ \text{(car } \mathrm{tr}(M)=\mathrm{tr}(B) \text{ et } \det(M)=\det(B))\end{aligned}$$

Ainsi si $\|B\|_S=\|M''\|_S$ alors $B_2=M''$, et d'après 4),

$$\exists U\in O_2(\mathbb{R}),\ B=UB_2\,{}^{\mathrm{t}}U=UM''\,{}^{\mathrm{t}}U$$

Réciproquement si $B=UM''\,{}^{\mathrm{t}}U$, alors d'après III.A.2.b) et $(*)$ on a

$\|B\|_S=\|M''\|_S=\inf\limits_{P\in GL_2(\mathbb{R})}\|PMP^{-1}\|_S$,
d'où: $\inf\limits_{P\in GL_2(\mathbb{R})}\|PMP^{-1}\|_S=\|B\|_S\iff\exists U\in O_2(\mathbb{R}),\ B=UM''\,{}^{\mathrm{t}}U$

D.

D'après l'équivalence du II.5, il suffit de montrer que:

$$\inf_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S \text{ est atteinte si et seulement si } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\emptyset \text{ ou bien } A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

$\Rightarrow$)

On suppose que $\inf\limits_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte alors
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\neq\emptyset$ on a d'après III.B.2.d A est digonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$\Leftarrow$)

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\emptyset$ alors d'après III.C.6 $\inf\limits_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte.
Si A est digonalisable alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\neq\emptyset$ et d'après III.B.2.d $\inf\limits_{B\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte.

khoutaibi@menara.ma