

## CORRIGÉ

### EXERCICE

- 1) On a :  $\mathcal{M}_B(u^3 + u) = A^3 + A = 0$ , donc  $u^3 + u = 0$  et  $\mathcal{M}_B(u) = A \neq 0$ , donc  $u \neq 0$ .
- 2) a) Si  $u$  était injectif, alors  $A$  inversible, donc  $A^3 + A = 0$  devient en multipliant par  $A^{-1}$ ,  $A^2 + I_3 = 0$ , d'où  $u^2 + id_E = 0$ . Ainsi  $A^2 = -I_3$ , donc  $\det(A^2) = \det(-I_3)$ , d'où  $\det(A)^2 = -1$  ce qui est impossible, donc  $u$  injective.  
b)  $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , donc  $\dim(\text{Ker}(u)) \leq 3$ . D'après la question précédente  $u$  est injective, donc  $\dim(\text{Ker}(u)) \neq 0$  et aussi  $u \neq 0$ , donc  $\text{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$  et donc  $\dim(\text{Ker}(u)) \neq 3$ , d'où  $\dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$ .
- 3)  $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2 + id_E) \implies u(x) = 0_E, x = -u^2(x) = -u(0_E) = 0_E$ , donc  $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker} = \{0_E\}$   
D'autre part :  $\forall x \in E$  on a :  $x = x + u^2(x) - u^2(x)$  avec  $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = 0_E$  et  $(u^2 + id_E)(-u^2(x)) = -(u^4(x) + u^2(x)) = -u(u^3(x) + u(x)) = -u(0_E) = 0_E$ , donc  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + id_E)$ , et donc  $\dim(\text{Ker}(u^2 + id_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)) = 3 - \dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$ , car  $\dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$ .
- 4) a) Soit  $x \in F = \text{Ker}(u^2 + id_E)$ , donc  $u^2(x) + x = 0_E$ , d'où  $u^3(x) + u(x) = u(0_E) = 0_E$ , donc  $(u^2 + id_E)(u(x)) = 0_E$ , d'où  $u(x) \in \text{Ker}(u^2 + id_E) = F$ , donc  $F$  est stable par  $F$ .  
b)  $x \in F \implies u^2(x)x = -x \implies v^2(x) = -x \implies v^2 = -id_F$ .  
c)  $\det(v^2) = \det(-id_F) = (-1)^{\dim(F)}$ , or  $\det(v^2) = \det(v)^2 \geq 0$ , et  $\dim(F) \in \{2, 3\}$ , d'où  $\dim(F) = 2$ .  
d) Soit  $\lambda$  une valeur réelle de  $v$ , et  $x$  un vecteur propre associé, alors  $v(x) = \lambda x$  et donc  $-x = v^2(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$ , d'où  $\lambda^2 = -1$ , impossible.
- 5) a) Soit  $\lambda, \mu$  réels tel que  $\lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E$ , on compose par  $u$ , d'où  $\lambda e'_3 - \mu e'_2 = 0_E$ , car  $u(e'_2) = e'_3$  et  $u(e'_3) = u^2(e'_2) = v^2(e'_2) = -e'_2$ , puisque  $e'_2 \in F$ ,  $F$  stable par  $u$ ,  $u = v$  sur  $F$  et  $v^2 = -id_F$ .  
On obtient alors le système suivant : 
$$\begin{cases} \lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E & (1) \\ -\mu e'_2 + \lambda e'_3 = 0_E & (2) \end{cases}$$
  
 $\lambda \times (1) - \mu \times (2) \implies (\lambda^2 + \mu^2)e'_2 = 0_E \implies \lambda^2 + \mu^2 = 0 \implies \lambda = \mu = 0$ , donc la famille  $(e'_2, e'_3)$  est libre.  
b) Comme  $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(E) = 3$ , pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.  
En effet, soit  $a, b, c$  des réels tel que  $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$ , on compose par  $u$ , on obtient alors :  $be'_3 - ce'_2 = 0$  car  $u(e'_1) = 0_E, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = -e'_2$ , or la famille  $(e'_2, e'_3)$  est libre, donc  $b = c = 0$  et par suite  $ae'_1 = 0_E$ , d'où  $a = 0$ , donc la famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est libre.

PROBLÈME.

## Première partie.

- 1) a) On a  $A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l}$ , donc :

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j} \quad \text{car : } \delta_{l,i} = 0 \text{ si } l \neq i \\ &\quad = 1 \text{ si } l = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{i,j} A &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} \delta_{k,j} E_{i,l} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l} \quad \text{car : } \delta_{k,j} = 0 \text{ si } k \neq j \\ &\quad \quad \quad = 1 \text{ si } k = j \\ &= \sum_{k=1}^n a_{j,k} E_{i,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad AM = MA &\implies AM - MA = 0 \\
&\implies \sum_n AE_{i,j} = E_{i,j}A \\
&\implies \sum_{k=1}^n a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} = 0 \\
&\implies \sum_{k \neq i,j}^n a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + \\
&\quad a_{i,i}E_{i,j} - a_{j,i}E_{i,i} + a_{j,i}E_{i,j} - a_{j,j}E_{i,j} = 0 \\
&\implies \sum_{k \neq i,j}^n a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j})E_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi  $a_{k,i} = a_{j,k} = 0$  si  $k \neq i, j$  et  $a_{i,i} = a_{j,j} = \lambda$ , d'où  $M = \lambda I_n$

- 2) a)** On sait que la trace est linéaire et que :  $Tr(E_{k,j}) = 0$  si  $k \neq j$  ,  
 $= 1$  si  $k = j$

$$\text{donc } Tr(AE_{i,j}) = Tr\left(\sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}\right) = a_{j,i}.$$

b)  $Tr(AM) = 0 \implies Tr(AE_{i,j}) = 0 \forall i, j \implies a_{j,i} \forall i, j \implies A = 0.$

- 3) Posons  $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), AB = (c_{i,j}), BA = (d_{i,j})$ , on a :
- $$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \text{ et } Tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \text{ et on a aussi :}$$

$Tr(BA) = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}$ , en échangeant les indices  $i$  et  $k$ , on voit bien que :  $Tr(AB) = Tr(BA)$ .

- 4) D'après le cours, toute composé à droite ou à gauche par un automorphisme laisse invariant le rang, donc toute multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible laisse le rang invariant, d'où  $rg(PMQ) = rg(M)$  et  $rg(P^tMQ) = rg(^tM) = rg(M)$
- 5)  $\det(PMQ) = \det(P) \det(M) \det(Q)$ , donc  $u_{P,Q}$  conserve le déterminant  $\iff \det(P) \det(Q) = 1$ . De même pour  $v_{P,Q}$ , puisque  $\det(^tM) = \det(M)$ .

Deuxième partie.

- 1) On sait que les valeurs propres d'une matrice sont exactement les racines de son polynôme caractéristique associé, que son déterminant est égal à leurs produit et que sa trace est égale à leurs somme, comptées avec leurs multiplicités. Donc deux matrices qui ont même polynôme caractéristique ont même déterminant et même trace, en particulier  $\Phi$  conserve le déterminant et la trace.
- 2) C'est une conséquence immédiate de la propriété admise au début de la 2ème partie.
- 3) a) Si  $\Phi = u_{P,Q}$ , alors  $Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(\Phi(E_{i,j})) = Tr(E_{i,j})$  car  $\Phi$  conserve la norme.  
 Si  $\Phi = u_{P,Q}$ , alors  $Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(\Phi({}^tE_{i,j})) = Tr({}^tE_{i,j}) = Tr(E_{i,j})$ .

- b) On a  $Tr(AB) = Tr(BA)$ , qu'on peut généraliser ainsi :  
 $Tr(ABC) = Tr(CAB)$ , en particulier :  
 $Tr(QPE_{i,j}) = Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(E_{i,j})$ , or la trace est linéaire et  
 $(E_{i,j})$  constitue une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donc  $Tr(QPM) = Tr(M)$ , pour  
toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , d'où  $Tr((QP - I_n)M) = 0$ , d'après la  
question 2.b) 1ère partie, on déduit que  $PQ = I_n$ , d'où  $Q = P^{-1}$ .

4) D'après tout ce qui précède on conclut que les endomorphismes qui  
conservent le polynôme caractéristique sont ceux de la forme  $u_{P,Q}$  ou  
 $v_{P,Q}$  tel que  $Q = P^{-1}$ .

- 5) a) Il est clair que  $\Phi$  est linéaire, d'autre part soit :

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\Phi)$ , donc  $Tr(M)I_2 = M$ , d'où  
 $\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  d'où  $a = b = c = d = 0$ , d'où  $\Phi$   
est injective comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie,  
alors il est isomorphisme.

- b) Soit  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on a les  
résultats suivants :

$\phi(E_{1,1}) = I_2 - E_{1,1} = E_{2,2}$ ,  $\phi(E_{1,2}) = -E_{1,2}$ ,  $\phi(E_{2,1}) =$   
 $-E_{2,1}$ ,  $\phi(E_{2,2}) = I_2 - E_{2,2} = E_{1,1}$ , donc  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi) =$   
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , le polynôme caractéristique de  $\Phi$  est égal à

$\chi_{\phi}(X) = \det(A - XI_4) = (1 + X)^3(1 - X)$ , les valeurs propres de  $\Phi$   
sont donc -1 et 1.

Soit  $M$  vecteur propre associé à -1, donc  $Tr(M) = 0$ , c'est le noyau  
de la forme linéaire trace, donc de dimension 3 égale à la multiplicité  
de -1 dans  $\chi_{\phi}(X)$ .

Soit  $M$  vecteur propre associé à 1, donc  $M = \lambda I_2$ , avec  $\lambda = \frac{1}{2}Tr(M)$ ,  
donc la dimension du sous-espace propre est égale à 1, égale la mul-  
tiplicité de 1 dans  $\chi_{\phi}(X)$ , donc  $\Phi$  est diagonalisable.

- c) soit :  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , donc  $\Phi(M) = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ , il est clair que ces

deux matrices ont même polynôme caractéristique.

- d)  $\Phi = v_{P,P^{-1}} \implies \Phi(P) = P \implies P = \lambda I_2$

### Troisième partie.

- 1) a) On a  $\chi_{\Phi(A)\Phi(B)} = \chi_{AB}$ , donc d'après la question 1), deuxième  
partie,  $\Phi(A)\Phi(B)$  et  $AB$  ont même trace, en particulier  
 $Tr(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l})) = Tr(E_{i,j}E_{k,l}) = Tr(\delta_{j,k}E_{i,l}) = \delta_{j,k}Tr(E_{i,l}) =$   
 $\delta_{j,k}\delta_{i,l}$ .

- b) On a  $\text{Card}(\Phi(E_{i,j})) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ , pour montrer que c'est  
une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.

En effet soit  $(\lambda_{i,j})$  des nombres complexes tels que  
 $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$ , on multiplie par  $\Phi(E_{k,l})$ , la trace de la somme  
est toujours nulle, tenant compte de la linéarité de la trace et de la  
relation précédente on obtient :  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,l} = \lambda_{l,k} = 0 \quad \forall k, \forall l$ ,

d'où la famille est libre.

- 2) a)  $Tr((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))\Phi(E_{i,j}))$   
 $= Tr(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(A)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(B)\Phi(E_{i,j}))$   
 $= Tr(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j})) - Tr(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) - Tr(\Phi(B)\Phi(E_{i,j}))$   
 $= Tr((A+B)E_{i,j}) - Tr(AE_{i,j}) - Tr(BE_{i,j})$   
 $= 0$  car la trace est linéaire et distributive par rapport à +

- b) Comme la trace est linéaire et que  $(\Phi(E_{i,j}))$  est une base  
de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et tenant compte de la question précédente alors  
 $Tr((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))M)$  pour toute matrice  $M \in$   
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et enfin d'après la question 2.b) 1ère partie, on conclut  
que  $\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B) = 0$ .

- 3) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , mn montre comme dans la question précédente  
que :  $Tr((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))\Phi(E_{i,j})) = 0$ , puis on en déduit que  
 $Tr((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))M) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , puis enfin que :  
 $\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A)$ , d'où  $\Phi$  est linéaire.

D'autre part : Soit  $A \in \text{Ker}(\Phi)$ , donc  $Tr(AE_{i,j}) = Tr(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) =$   
0, comme  $(E_{i,j})$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $Tr(AM) = 0 \quad \forall M \in$   
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , donc  $A = 0$  et par suite  $\Phi$  est injective, comme c'est un endom-  
phisme en dimension finie, alors c'est un automorphisme.

4)  $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}\delta_{j,i} = 0$  car  $i \neq j$ , donc  $E_{i,j}$  est nilpotente.  
D'autre part :  $\chi_{\Phi(E_{i,j}^2)}(X) = \chi_{E_{i,j}^2}(X) = (-1)^n X^n$  car  $E_{i,j}^2 = 0$ , en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton on conclut que  $\Phi(E_{i,j}^2) = 0$ , donc  $\Phi(E_{i,j})$  est nilpotente.

5) a) D'après la supposition de la partie 3, on a :  $\chi_{AG} = \chi_{\Phi(A)\Phi(G)} = \chi_{\Phi(A)}$  car  $\Phi(G) = I_n$ .

b) Tout calcul fait  $E_{i,j}G$  est la matrice dont toutes les lignes sont nulle

$$\text{sauf la } i \text{ ème, } E_{i,j}G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{j,1} & \dots & g_{j,i} & \dots & g_{j,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc sont po-}$$

lynôme caractéristique est  $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$ .

c) Pour  $i \neq j$ , la matrice  $\Phi(E_{i,j})$  est nilpotente, donc  $\chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$ , or  $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i}) = \chi_{E_{i,j}G} = \chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$ , donc  $g_{j,i} = 0$  si  $i \neq j$ , d'où  $G$  est diagonale.

D'autre part,  $\chi_{G^2} = \chi_{\Phi(G)}(1)$ , d'après 5.a) 3ème partie, or  $\Phi(G) = I_n$  et  $G^2 = \text{Diag}(g_{1,1}^2, \dots, g_{n,n}^2)$ , (matrice diagonale), la relation (1)

devient  $(-1)^n (X - 1)^n = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - g_{i,i}^2)$ , d'où  $g_{i,i}^2 = 1$  et par

suite  $G^2 = I_n$ .

6) a) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a :  $\chi_{\Psi(A)} = \chi_{\Phi(AG)} = \chi_{AG^2} = \chi_A$  en utilisant la question 5.a) 3ème partie pour  $AG$  et le fait que  $G^2 = I_n$ . Donc  $\Psi$  conserve le polynôme caractéristique.

b) On a  $\Psi$  conserve le polynôme caractéristique, d'après les résultats de la 2ème partie  $\exists G$  inversible telle que  $\Psi = u_{P,P^{-1}}$  ou  $\Psi = v_{P,P^{-1}}$ , or  $\Phi(M) = \Psi(MG^{-1}) = \Psi(MG)$  car  $G^{-1} = G$  puisque  $G^2 = I_n$ , donc  $\Phi(M) = \Psi(MG) = u_{P,P^{-1}} = PMGP^{-1}$  ou  $\Phi(M) = \Psi(MG) = v_{P,P^{-1}} = P^t MGP^{-1}$ .

7) a)  $\text{Tr}(AGBG) = \text{Tr}(AB)$  car le produit matriciel est commutatif à l'intérieur de la trace et que  $G^2 = I_n$ .

b) D'après la question précédente et vu que la trace est linéaire, on conclut que :  $\text{Tr}((GBG - B)A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , d'après la question 2.b) 1ère partie, on conclut que  $GBG - B = 0$ .

c)  $GBG = B \implies GB = BG^{-1} = BG$  et d'après 1.b) 1ère partie, on a  $G = \lambda I_n$ , or  $G^2 = I_n$ , d'où  $\lambda \in \{-1, 1\}$ .

8) Si  $w = \varepsilon u_{P,P^{-1}}$ , on a :  $\chi_{w(A)w(B)} = \chi_{\varepsilon PAP^{-1}\varepsilon PBP^{-1}} = \chi_{PABP^{-1}} = \chi_{AB}$  car deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Le même raisonnement est encore valable pour le cas où  $w = \varepsilon v_{P,P^{-1}}$ .

**Fin.**