Concours National Commun
Session 2016
Filière PSI

Épreuve de Mathématiques I : Un corrigé [1]

Problème 1

Partie I
Convergence des séries par transformation d'Abel

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $B_k = \sum_{j=0}^{n} bj = \sum_{j=0}^{n-1} bj + b_k = B_{k-1} + b_k$, donc $b_k = B_k - B_{k-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_0 b_0 + a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_0 b_0 + a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j \quad \text{on a effectué le changement d'indice } j = k-1 \\
&= a_n B_n + a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \quad \text{car } B_0 = b_0 \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.
\end{aligned}$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_0$, donc [2] la série $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0$.

1. Ce corrigé est proposé par Adham Elbekkali, professeur de mathématiques de la classe PCSI 2 au CPGE de Tanger
2. Définition : Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum u_n$ est convergente, si la suite (S_n) des sommes partielles, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

est convergente. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(b) Pour monter que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente, alors, par définition de la convergence d'une série, il suffit qu'on montre que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente. Or, d'après la question **I.1.b**, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k,$$

alors il suffit qu'on montre que les suites $(a_n B_n)$ et $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right)$ sont convergentes.

On a

- On a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite (B_n) est bornée, donc $a_n B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi la suite $(a_n B_n)$ est convergente.
- La suite (B_n) est bornée, donc $B_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$, par suite $(a_n - a_{n+1})B_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n - a_{n+1})$ et comme la série $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})$ est convergente d'après **I.2.b**, alors la série $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})B_n$ est aussi convergente, du coup la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right)$ est convergente.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente.

Partie II
Applications aux convergences de quelques types de séries

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = (-1)^n$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \in \{0,1\}$, du coup la suite (B_n) est bornée, et comme la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est convergente.

2. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a θ est différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, donc $\mathrm{e}^{i\theta}$ est différent de 1 puis

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \mathrm{e}^{i\theta} \times \frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\theta} \times \frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\theta} \times \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

(b) Soit $\alpha \leq 0$, on a $\left|\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc $\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, dès lors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

(c) Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $b_n = \mathrm{e}^{in\theta}$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. D'après la question **I.2.a**, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\theta} \times \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|},$$

donc la suite (B_n) est bornée, et comme la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum_{n\geq 1} a_n B_n = \sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente. Il en résulte que les séries $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont aussi convergentes.

(d) Soit $\alpha > 1$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

et, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right|$ sont convergentes et par suite les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes.

(e) (i) On a θ est différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc 2θ est aussi différent de $2k\pi$ et, comme $\alpha > 0$, alors, d'après la question **II.2.c**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n2\theta)}{n^\alpha}$ est convergente.

(ii) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha} = \frac{1-\cos(2n\theta)}{2n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos(2n\theta)}{2n^\alpha},$$

la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente ($\alpha < 1$) et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(2n\theta)}{n^\alpha}$ est convergente d'après la question précédente, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|\sin(n\theta)| \geq \sin^2(n\theta)$, donc $\frac{|\sin(n\theta)|}{n^\alpha} \geq \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ et, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente d'après la question précédente, alors la série $\sum\limits_{n\leq 1} \frac{|\sin(n\theta)|}{n^\alpha}$ est aussi divergente, ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente.

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ étant convergente, donc la suite des sommes partielles $(B_n)_{n\geq 1}$ est convergente et par conséquent elle est bornée et, comme la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n c_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie III
Une autre méthode pour montrer la convergence de quelques types de séries

1. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-st} f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t$ est impropres en $+\infty$.
La fonction f est décroissante et minorée (car elle positive), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$, du coup $t^2 \mathrm{e}^{-st} f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-st} f(t)}{1/t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et par suite $\mathrm{e}^{-st} f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, alors $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi $\varphi_f(s)$ est bien définie pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction g est définie, continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc, d'après la question précédente, φ_g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_g(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st}(1-t)\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}(1-t)}{s}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}{s} = \frac{1}{s} - \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}(\mathrm{e}^{-s} - 1).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f et $t \longmapsto \mathrm{e}^{-st}$ sont décroissantes, donc

$$\forall t \in [k, k+1],\quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-(k+1)s} \leq \mathrm{e}^{-ts} \leq \mathrm{e}^{-ks},$$

d'où

$$\forall t \in [k, k+1],\ \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \mathrm{e}^{-ts} f(t) \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

alors , par croissance de l'intégrale, obtient

$$\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ks} f(k)\,\mathrm{d}t,$$

c.à.d.

$$\mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

4. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!],\quad \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

En effectuant le changement d'indice $j = k+1$ dans l'expression du premier membre de l'inégalité précédente et en appliquent la relation de Chasles dans l'expression du deuxième membre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-js} f(j) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

et, comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k) + \mathrm{e}^{-Ns} f(N) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) - f(0) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

par conséquent

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0),$$

et on voit que l'inégalité est encore valable pour $N = 0$. Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0).$$

5. La série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-ns} f(n)$ est à termes positifs, donc [3], pour montrer qu'elle est convergente, il suffit qu'on montre que la suite de ses sommes partielles est majorée. D'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^n \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0),$$

donc la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-ns} f(n)$ est majorée et par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-ns} f(n)$ est convergente.

6. Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $n, N \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq N$. D'après la question **III.3**, on a

$$\forall k \in [\![n, N]\!], \quad \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

donc

$$\sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

En effectuant le changement d'indice $j = k + 1$ dans l'expression du premier membre de l'inégalité précédente et en appliquent la relation de Chasles dans l'expression du deuxième membre de l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{j=n+1}^{N+1} \mathrm{e}^{-js} f(j) \leq \int_n^{N+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{N+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

En faisant tendre $N \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

3. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge } \iff \text{ la suite de ses sommes partielles est majorée } \iff \exists M \geq 0 \;:\; \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

donc
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ et } \quad \int_{n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$
ainsi
$$\int_{n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(s, s') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{ts'}}.$$
On voit que la fonction f est continue, positive et décroissante, donc, d'après la question précédente, on a
$$\int_{n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t,$$
c.à.d.
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts'}}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks'}} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts'}}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $s' = s$ dans la question précédente, on obtient
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t.$$
On a
$$\begin{aligned}\int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t &= \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{\mathrm{e}^{ts}(\mathrm{e}^{-ts}+1)}\,\mathrm{d}t = \int_{n}^{+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-ts}\right)^2}{\mathrm{e}^{-ts}+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{n}^{+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-ts}\right)^2 + \mathrm{e}^{-ts} - \mathrm{e}^{-ts}}{\mathrm{e}^{-ts}+1}\,\mathrm{d}t = \int_{n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} - \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{\mathrm{e}^{-ts}+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ts}}{s} + \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{-ts})}{s}\right]_{t=n}^{t\to+\infty} = \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right)\end{aligned}$$
et en remplaçant n par $n+1$, on obtient $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right).$
D'où la double inégalité
$$\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right).$$

(c) D'après la question précédente, on a
$$\forall s > 0, \quad \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right)$$
et, comme $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right) = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} = 0.$

(d) D'après la question **III.7.b**, on a

$$\forall s>0,\quad \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s}-\ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}}\leq\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns}-\ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right),$$

donc

$$\forall s>0,\quad \left(\mathrm{e}^{-(n+1)s}-\ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right)\leq s\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}}\leq\left(\mathrm{e}^{-ns}-\ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right),$$

et, comme $\lim\limits_{s\to0^+}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s}-\ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right)=\lim\limits_{s\to0^+}\left(\mathrm{e}^{-ns}-\ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right)=1-\ln 2$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{s\to0^+}s\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}}=1-\ln 2$, d'où $s\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}}\underset{s\to0^+}{\sim}1-\ln 2$ et par suite

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}}\underset{s\to0^+}{\sim}\frac{1-\ln 2}{s}.$$

8. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad g(t)=f(e^{-t}).$$

- La fonction f est positive, donc la fonction g est aussi positive.
- La fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc, par composition, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t,t'\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} t\leq t' &\Longrightarrow -t'\leq t\\ &\Longrightarrow \mathrm{e}^{-t'}\leq\mathrm{e}^{-t}\qquad\text{car la fonction exp est croissante}\\ &\Longrightarrow f(\mathrm{e}^{-t'})\leq f(\mathrm{e}^{-t}),\qquad\text{car la fonction } f \text{ est croissante}\end{aligned}$$

donc la fonction g est décroissante.

(a) Soit $s\in\mathbb{R}^*$. Puisque la fonction g est continue, positive, décroissante et $s^2\in\mathbb{R}_+^*$, alors, d'après la question **III.1**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2t}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2t}f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$ converge.

(b) Soit $s\in\mathbb{R}^*$. Puisque la fonction g est continue, positive, décroissante et $s^2\in\mathbb{R}_+^*$, alors, d'après la question **III.4**, on a

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \int_0^N\mathrm{e}^{-ts^2}g(t)\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=0}^N\mathrm{e}^{-ks^2}g(k)\leq\int_0^N\mathrm{e}^{-ts^2}g(t)\,\mathrm{d}t+g(0).$$

En faisant tendre $N\longrightarrow+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ts^2}g(t)\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ks^2}g(k)\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ts^2}g(t)\,\mathrm{d}t+g(0),$$

c.à.d.

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ts^2}f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ks^2}f(\mathrm{e}^{-k})\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ts^2}f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t+f(1),$$

par conséquent

$$0\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ks^2}f(\mathrm{e}^{-k})-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ts^2}f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t\leq f(1).$$

Problème 2

Partie I

Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies

1. La variable aléatoire Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p, donc

$$Z(\Omega) = \{0, 1\}, \quad P(Z = 1) = p \quad \text{et} \quad P(Z = 0) = 1 - p$$

d'où, d'après le théorème de transfert pour les v.a. finie [4] ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Z = E(\mathrm{e}^{tZ}) = \sum_{z \in Z(\Omega)} e^{tz} P(Z = z) = \mathrm{e}^{t\times 0} P(Z = 0) + \mathrm{e}^{t\times 1} P(Z = 1) = 1 - p + p\,\mathrm{e}^t$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de transfert pour les v.a finie, on a

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(Z = x) = \sum_{k=1}^{r} e^{tx_k} P(Z = x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx_k)^n}{n!} \right) P(Z = x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{(tx_k)^n}{n!} P(Z = x_k) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{r} x_k^n P(Z = x_k) \right) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n, \end{aligned}$$

donc M_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!} = \frac{E(X^n)}{n!},$$

c.à.d.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(n)}(0) = E(X^n).$$

Autre méthode : pour les élèves de première année.

D'après le théorème de transfert pour les v.a. finie, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(Z = x) = \sum_{k=1}^{r} e^{tx_k} P(Z = x_k),$$

donc la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire (ou somme) de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, donc, d'après la formule de Taylor-Young, on a

$$M_X(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!} t^k + \mathrm{o}(t^n) \underset{t\to 0}{=} \frac{M_X^{(0)}(0)}{0!} t^0 + \frac{M_X^{(1)}(0)}{1!} t + \cdots + \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!} t^n + \mathrm{o}(t^n).$$

4. Théorème de transfert pour les v.a. finie : Soit X une v.a. finie et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $Y = f(X)$ est aussi une v.a. finie et :

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) P(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{array}{rcl}
M_X(t) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{tx_k} P(Z = x_k) \\
& \underset{t\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(X = x_k) \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(tx_k)^j}{j!} + \mathrm{o}(t^n) \right) \\
& \underset{t\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{n} P(X = x_k) \frac{(tx_k)^j}{j!} + \mathrm{o}(t^n) \\
& \underset{t\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{r} P(X = x_k) \frac{(tx_k)^j}{j!} + \mathrm{o}(t^n) \\
& \underset{t\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{j=0}^{r} \frac{t^j}{j!} \left(\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) x_k^j \right) + \mathrm{o}(t^n) \\
& \underset{t\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{E(X^j)}{j!} t^j + \mathrm{o}(t^n) \\
& \underset{t\to 0}{=} & \displaystyle\frac{E(X^0)}{0!} t^0 + \frac{E(X)}{1!} t + \cdots + \frac{E(X^n)}{n!} t^n + \mathrm{o}(t^n),
\end{array}$$

donc grâce à unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(n)}(0) = E(X^n).$$

3. (a) • On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$, donc $p_1, \ldots, p_r$ ne sont pas tous nuls, d'où l'existence de $k_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $p_{k_0} \neq 0$, or $p_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_{k=1}^{r} p_k\, \mathrm{e}^{tx_k} \geq p_{k_0}\, \mathrm{e}^{tx_{k_0}} > 0.$$

Ainsi la fonction $t \longmapsto \ln(M_X(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$ et par suite la fonction $\varphi_X : t \longmapsto \dfrac{1}{t} \ln(M_X(t))$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

• Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\begin{array}{rcll}
\varphi_X(t) & = & \dfrac{1}{t} \ln(M_X(t)) & \\
& \underset{t\to 0}{=} & \dfrac{1}{t} \ln(M_X(0) + M_X'(0)t + \mathrm{o}(t)) & \text{d'après la formule de Taylor-Young} \\
& \underset{t\to 0}{=} & \dfrac{1}{t} \ln(1 + E(X)t + \mathrm{o}(t)) & \text{d'après la question } \mathbf{I.2} \\
& \underset{t\to 0}{=} & \dfrac{1}{t} (E(X)t + \mathrm{o}(t)) & \\
& \underset{t\to 0}{=} & E(X) + \mathrm{o}(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} E(X), &
\end{array}$$

donc φ_X est prolongeable par continuité en 0 et $\varphi_X(0) = E(X)$.

(b) Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_X(t)-\varphi_X(0)}{t-0} &= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\ln(M_X(t)) - E(X)\right] \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\ln\left(M_X(0)+M_X'(0)t+\frac{M_X''(0)}{2}t^2+\mathrm{o}(t^2)\right) - E(X)\right] \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\ln\left(1+E(X)t+\frac{E(X^2)}{2}t^2+\mathrm{o}(t^2)\right) - E(X)\right] \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\left(\left(E(X)t+\frac{E(X^2)}{2}t^2\right)-\frac{1}{2}\left(E(X)t+\frac{E(X^2)}{2}t^2\right)^2+\mathrm{o}(t^2)\right) - E(X)\right] \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\left(E(X)t+\frac{E(X^2)}{2}t^2-\frac{1}{2}E(X)^2t^2+\mathrm{o}(t^2)\right) - E(X)\right] \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(E(X^2)-E(X)^2\right)+\mathrm{o}(1) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}V(X)+\mathrm{o}(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}V(X),
\end{aligned}$$

donc φ_X est dérivable en 0 et $\varphi_X'(0) = \dfrac{V(X)}{2}$.

(c) i) Soit $u \leq 0$. On applique la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à la fonction exp entre 0 et u :

$$\exp(u) = \frac{\exp^{(0)}(0)}{0!} + \frac{\exp^{(1)}(0)}{1!}u + {\frac{\exp^{(2)}(0)}{2!}}^2 u^2 + \int_0^u \frac{(t-u)^2}{2!}\exp^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc

$$\mathrm{e}^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} = -\int_u^0 \frac{(t-u)^2}{2!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leq 0,$$

ainsi

$$\forall u \leq 0, \quad \mathrm{e}^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}.$$

ii) Supposons que X ne prend que les valeurs négatives ou nulles, donc, pour tout $k \in [\![1,t]\!]$, on a $x_k \leq 0$. En utilisant l'inégalité de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0,\ M_X(t) &= \sum_{k=1}^{r} p_k\,\mathrm{e}^{tx_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{r} p_k\left(1+(x_kt)^2+\frac{1}{2}(x_kt)^2\right) \qquad \text{car } x_kt \leq 0 \text{ et } p_k \geq 0 \\
&= \sum_{k=1}^{r} p_k + t\sum_{k=1}^{r} p_kx_k + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{r} p_kx_k^2 \\
&= 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2}E(X^2),
\end{aligned}$$

donc, par croissance de la fonction ln, on a

$$\forall t > 0, \quad \ln(M_X(t)) \leq \ln(1+tE(X)+\frac{t^2}{2}E(X^2)),$$

or [5] $\forall \theta \geq 0$, $\ln(1+\theta) \leq \theta$, alors

$$\forall t > 0, \quad \ln(M_X(t)) \leq tE(X) + \frac{t^2}{2}E(X^2),$$

5. Considérons la fonction $f : \theta \longmapsto \ln(1+\theta)-\theta$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}_+, f'(\theta) = -\dfrac{\theta}{1+\theta} \leq 0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par suite $\forall \theta \in \mathbb{R}_+, f(\theta) \leq f(0)$, d'où $\forall \theta \geq 0$, $\ln(1+\theta) \leq \theta$.

par suite
$$\forall t > 0,\ \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(M_X(t)) \le E(X) + \frac{t}{2}E(X^2).$$
On voit que l'inégalité demandée est encore vraie pour $t = 0$.

(d) Quitte à réindexer la famille $(x_k)_{1\le k\le r}$, on peut supposer que $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$.

i) Supposons par l'absurde que la famille $(f_1, \ldots, f_r)$ est liée, il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que
$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r = 0. \tag{1}$$
Posons $k_0 = \min\{k \in [\![1, r]\!] \ :\ \alpha_k \neq 0\}$ de tel sorte que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k_0-1} = 0$ et $\alpha_{k_0} \neq 0$. Donc la relation (1) devient $\alpha_{k_0} f_{k_0} + \cdots + \alpha_r f_r = 0$, c.à.d.
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_{k_0}\,\mathrm{e}^{x_{k_0}t} + \cdots + \alpha_r\,\mathrm{e}^{x_r t} = 0,$$
d'où
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_{k_0} = -\sum_{k=k_0+1}^{r} \alpha_k\,\mathrm{e}^{(x_k - x_{k_0})t},$$
donc, par passage à la limite dans cette égalité lorsque t tend vers $-\infty$, on obtient $\alpha_{k_0} = 0$, ce qui est contredit la définition de k_0. Ainsi la famille $(f_1, \ldots, f_r)$ est libre.

ii) Posons $E = X(\Omega) \cup Y(\Omega)$. On a [6]
$$\begin{aligned}
\varphi_X = \varphi_Y &\iff \forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t) = \varphi_Y(t)\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{t}\ln(M_X(t)) = \frac{1}{t}\ln(M_Y(t))\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \ln(M_X(t)) = \ln(M_Y(t))\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = M_Y(t)\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x)\,\mathrm{e}^{tx} = \sum_{x\in Y(\Omega)} P(Y = x)\,\mathrm{e}^{tx}\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{x\in E} P(X = x)\,\mathrm{e}^{tx} = \sum_{x\in E} P(Y = x)\,\mathrm{e}^{tx}\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{x\in E} (P(X = x) - P(Y = x))\,\mathrm{e}^{tx} = 0\\
&\iff \sum_{x\in E} (P(X = x) - P(Y = x)) f_x = 0 \quad \text{avec } f_x(t) = \mathrm{e}^{tx}\\
&\iff \forall x \in E,\ P(X = x) - P(Y = x) \quad \text{car la famille } (f_x)_{x\in E} \text{ est libre d'après } \textbf{I.3.d.ii}\\
&\iff \forall x \in E,\ P(X = x) = P(Y = x)\\
&\iff X \text{ et } Y \text{ ont même loi}
\end{aligned}$$

(e) Supposons que X et Y sont des variables aléatoires finies indépendantes. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes, dès lors
$$\forall t \in \mathbb{R},\ M_{X+Y}(t) = E(\mathrm{e}^{t(X+Y)}) = E(\mathrm{e}^{tX}\,\mathrm{e}^{tY}) = E(\mathrm{e}^{tX})E(\mathrm{e}^{tY}) = M_X(t)M_Y(t),$$

6. Rappel : Soient X et Y deux v.a. finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et E un ensemble fini contenant $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Alors : X et Y ont même loi ssi : $\forall x \in E,\ P(X = x) = P(Y = x)$.
Rappel : Si $x \notin X(\Omega)$, alors $P(X = x) = 0$.

par suite

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi_{X+Y}(t) &= \frac{1}{t}\ln(M_{X+Y}(t))=\frac{1}{t}\ln(M_X(t)M_Y(t))\\ &= \frac{1}{t}\ln(M_X(t))+\frac{1}{t}\ln(M_Y(t))=\varphi_X(t)+\varphi_Y(t),\end{aligned}$$

finalement $\varphi_{X+Y}=\varphi_X+\varphi_Y$.

(f) Supposons que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres s et p. Considérons s variables aléatoires $Z_1,\dots,Z_s$ *indépendantes* et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p, donc [7] la variable aléatoire $Z=Z_1+\cdots+Z_s$ suit une loi binomiale de paramètres s et p et par suite les v.a. X et Z ont la même loi, du coup, pour tout $t\in\mathbb{R}$, e^{tX} et e^{tZ} ont aussi la même loi, dès lors [8]

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ M_X(t) &= E(\mathrm{e}^{tX})=E(\mathrm{e}^{tZ})\\ &= E(\mathrm{e}^{t(Z_1+\cdots+Z_s)})\\ &= E(\mathrm{e}^{tZ_1}\times\cdots\times\mathrm{e}^{tZ_s})\\ &= E(\mathrm{e}^{tZ_1})\times\cdots\times E(\mathrm{e}^{tZ_s}) \quad \text{car les v.a. } Z_1,\dots,Z_s \text{ sont indépendantes}\\ &= \left(E(\mathrm{e}^{tZ_1})\right)^s \quad \text{car les v.a. } Z_1,\dots,Z_s \text{ suivent la même loi}\\ &= (1-p+p\,\mathrm{e}^t)^s \quad \text{car } Z_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre p et d'après la question } \mathbf{I.1}\end{aligned}$$

(g) On a

$$\forall t\in\mathbb{R},\ M_{-X}(t)=E(\mathrm{e}^{t(-X)})=E(\mathrm{e}^{(-t)X})=M_X(-t),$$

donc

$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi_{-X}(t)=\frac{1}{t}\ln(M_{-X}(t))=\frac{1}{t}\ln(M_X(-t))=-\frac{1}{-t}\ln(M_X(-t))=-\varphi_X(-t),$$

ainsi

$$\begin{aligned}X \text{ est symétrique} &\iff X \text{ et } -X \text{ ont la même loi}\\ &\iff \varphi_X=\varphi_{-X} \qquad \text{d'après la question } \mathbf{I.3.d.ii}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t)=\varphi_{-X}(t)\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t)=-\varphi_X(-t)\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi_X(-t)=-\varphi_X(t)\\ &\iff \varphi_X \text{ est impaire.}\end{aligned}$$

4. (a) On a [9] $E(S_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=nm$ et, comme les v.a. $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $V(S_n)=V(X_1)+\cdots+V(X_n)=n\sigma^2$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}M_{S_n^*}(t) &= E\left(\mathrm{e}^{tS_n^*}\right)=E\left(\mathrm{e}^{t\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\\ &= E\left(\mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}\,\mathrm{e}^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}}\right)=\mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}E\left(\mathrm{e}^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}E\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_1}\times\cdots\times\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_n}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}E\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_1}\right)\times\cdots\times E\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_n}\right) \quad \text{car } X_1,\dots,X_n \text{ sont indépendantes}\\ &= \mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}E\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X}\right)\times\cdots\times E\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X}\right) \quad \text{car } X_1,\dots,X_n \text{ ont la même loi que } X\\ &= \mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}\left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n,\end{aligned}$$

7. Rappel : Si $X_1,\dots,X_n$ sont des v.a. indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, alors la v.a. $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

8. Rappel : Si X et Y sont deux v.a ayant la même loi, alors, sous réserve d'existence, on a $E(X)=E(Y)$.

9. Les v.a. $X_1,\dots,X_n$ ont la même loi que X, donc $E(X_1)=\cdots=E(X_n)=E(X)=m$ et $V(X_1)=\cdots=V(X_n)=V(X)=\sigma^2$

donc, pour tout t non nul,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{1}{t}\ln(M_{S_n^*}(t)) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathrm{e}^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}\left(M_X(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})\right)^n\right)\\
&= -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{n}{t}\ln\left(M_X(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})\right)\\
&= -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\frac{1}{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}}\ln\left(M_X(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})\right)\\
&= -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right).
\end{aligned}$$

5. D'après la question **I.3.b**, la fonction φ_X est dérivable en 0, donc elle admet un développement limité à d'ordre 1 en 0 et

$$\varphi_X(u) \underset{u\to 0}{=} \varphi_X(0) + \varphi_X'(0)u + \mathrm{o}(u) \underset{u\to 0}{=} E(X) + \frac{V(X)}{2}u + \mathrm{o}(u) \underset{u\to 0}{=} m + \frac{\sigma^2}{2}u + \mathrm{o}(u).$$

Comme $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, donc, en vertu de la question **I.4.a**,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n^*}(t) &= -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{t}{2} + \mathrm{o}\left(\frac{t}{2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

Partie II
Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X.

1. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, alors $bx \leq cx$ et, comme exp est croissante, alors $\mathrm{e}^{bx} \leq \mathrm{e}^{cx}$, par suite $\mathrm{e}^{bx} \leq \mathrm{e}^{cx} + \mathrm{e}^{ax}$. Sinon, on a $bx \leq ax$ et, comme exp est croissante, alors $\mathrm{e}^{bx} \leq \mathrm{e}^{ax}$, par suite $\mathrm{e}^{bx} \leq \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{cx}$. Donc dans les deux cas $\mathrm{e}^{bx} \leq \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{cx}$.

(b)
- On a $\mathrm{e}^{0.X} = 1$ est une variable aléatoire constante, donc elle admet une espérance, dès lors la fonction $M_X : t \longmapsto E(\mathrm{e}^{tX})$ est définie en 0 et par suite $0 \in I_X$.
- Montons que I_X est un intervalle [10] de $\mathbb{R}$.
  Soient $a, c \in I_X$ tels que $a < c$. Montrons que $[a, c] \subset I_X$. Puisque $a, c \in I_X$, il suffit de montrer que $]a, c[\subset I_X$. Soit donc $b \in]a, c[$. Puisque $a, c \in I_X$, alors $M_X(a)$ et $M_X(b)$ existent, ce qui signifie que les v.a. e^{aX} et e^{cX} admettent des espérances, du coup la v.a. $\mathrm{e}^{aX} + \mathrm{e}^{cX}$ admet aussi une espérance et, comme d'après la question **II.A.a**, $\mathrm{e}^{bX} \leq \mathrm{e}^{aX} + \mathrm{e}^{cX}$, alors [11] la v.a. e^{bX} admet une espérance et $M_X(b)$ existe, dès lors $b \in I_X$. Ainsi $[a, c] \subset I_X$ et I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a [12]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n)\,\mathrm{e}^{tn} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{tn} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda\,\mathrm{e}^t)^n}{n!}$$

10. Rappel : Une partie I de $\mathbb{R}$ est dite intervalle si : $\forall a, c \in I,\ a < c \Longrightarrow [a, c] \subset I$.
11. Soient X et Y deux v.a. réelles telles que $|X| \leq Y$. Si Y admet Une espérance, alors X admet aussi une espérance.
12. Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{P(Y=n+1)\,\mathrm{e}^{t(n+1)}}{P(Y=n)\,\mathrm{e}^{tn}} = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{2t}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1,$$

donc, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} P(Y=n)\,\mathrm{e}^{tn}$ est absolument et par suite, d'après le théorème de transfert des v.a. réelles discrètes infinies [13], la v.a. e^{tY} admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{tY}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)\,\mathrm{e}^{tn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda\,\mathrm{e}^t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\,\mathrm{e}^t)^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\exp\left(\lambda\,\mathrm{e}^t\right) = \exp\left(-\lambda+\lambda\,\mathrm{e}^t\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que M_Y est définie sur $\mathbb{R}$ et que : $\quad \forall t\in\mathbb{R},\ M_Y(t) = \exp\left(-\lambda+\lambda\,\mathrm{e}^t\right)$.

3. (a) Soient $k, n \in \mathbb{N}$ et $t \in]-\alpha,\alpha[$. On a $tx_n \leq |tx_n| \leq \alpha\,|x_n|$ et, comme la fonction exp est croissante, alors $\mathrm{e}^{tx_n} \leq \mathrm{e}^{\alpha|x_n|}$, ainsi

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| = \left|P(X=x_n)x_n^k\,\mathrm{e}^{tx_n}\right| = P(X=x_n)\,|x_n|^k\,\mathrm{e}^{tx_n} \leq P(X=x_n)\,|x_n|^k\,\mathrm{e}^{\alpha|x_n|}.$$

(b) Soit $k\in\mathbb{N}$ et considérons la fonction $f : x \longmapsto x^k\,\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)x}$. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^k\,\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)x} = 0$ (car $\alpha-\rho<0$), donc f admet une limite finie en $+\infty$, par suite elle est bornée au voisinage de $+\infty$, c.à.d. il existe $a>0$ tel que f soit bornée sur $]a,+\infty[$ et, puisque f est continue sur le segment $[0,a]$, alors elle bornée sur ce segment. Du coup f est borné sur $\mathbb{R}_+$, c.à.d. il existe $M_k>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^k\,\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)x} \leq M_k,$$

d'où

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, \quad x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x} \leq M_k\,\mathrm{e}^{\rho x},$$

ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \left|u_n^{(k)}(t)\right| \leq P(X=x_n)\,|x_n|^k\,\mathrm{e}^{\alpha|x_n|} \leq P(X=x_n)M_k\,\mathrm{e}^{\rho|x_n|}.$$

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{\rho|x_n|} \leq \mathrm{e}^{\rho x_n} + \mathrm{e}^{-\rho x_n}$, donc, en vertu de la question précédente,

$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall t\in]-\alpha,\alpha[, \ \left|u_n^{(k)}(t)\right| \leq P(X=x_n)M_k\,\mathrm{e}^{\rho|x_n|} \leq M_kP(X=x_n)\,\mathrm{e}^{\rho x_n} + M_kP(X=x_n)\,\mathrm{e}^{-\rho x_n} \quad (\star).$$

Puisque $-\rho,\rho \in]-a,a[\subset I_X$, alors $M_X(-\rho)$ et $M_X(\rho)$ existent, ce qui signifie que les v.a. $\mathrm{e}^{-\rho X}$ et $\mathrm{e}^{\rho X}$ admettent des espérances, donc, d'après le théorème de transfert pour les v.a. discrètes infinies, les séries numériques $\sum_{n\geq 0} P(X=x_n)\,\mathrm{e}^{\rho x_n}$ et $\sum_{n\geq 0} P(X=x_n)\,\mathrm{e}^{-\rho x_n}$ sont aussi convergentes, du coup la série numérique $\sum_{n\geq 0} M_kP(X=x_n)\,\mathrm{e}^{\rho x_n} + M_kP(X=x_n)\,\mathrm{e}^{-\rho x_n}$ est convergente, donc, en vertu de $(\star)$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]-\alpha,\alpha[$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, du coup

- $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]-\alpha,\alpha[$,

13. Théorème de transfert pour les v.a. réelles discrètes infinies : Soient X une v.a. réelle discrète infinies et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une énumération de ses valeurs. Soit en outre $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors, la v.a. $f(X)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 0} P(X=x_n)f(x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n)f(x_n)$

► $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $]-\alpha,\alpha[$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Or u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la fonction $M_X=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ et $M_X^{(k)}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{(k)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En particulier, on a

$$M_X^{(k)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{(k)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=x_n)x_n^k=E(X^k).$$

Comme M_X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ pour tout $\alpha\in]0,a[$, alors elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$.

4. D'après la question **II.2** la fonction M_Y est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t\in\mathbb{R},\ M_Y(t)=\exp\left(-\lambda+\lambda\,\mathrm{e}^t\right),$$

donc, en vertu de la question précédente $E(Y)=M_Y'(0)=\lambda$ et $E(Y^2)=M_Y''(0)=\lambda+\lambda^2$, il s'ensuit que $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\lambda^2$.

Partie III
Cas des variables aléatoires à densité

Il est facile de montrer que, pour tout t non nul, la v.a. e^{tX} est à densité.

1. Soit $t\in I_X\cap I_Y$. Les v.a. X et Y sont indépendantes, donc les v.a. e^{tX} et e^{tY} sont aussi indépendantes et de plus elles admettent des espérances puisque $t\in I_X\cap I_Y$, ainsi $\mathrm{e}^{tX}\times\mathrm{e}^{tY}=\mathrm{e}^{t(X+Y)}$ admet une espérance et

$$M_{X+Y}(t)=E(\mathrm{e}^{t(X+Y)})=E(\mathrm{e}^{tX}\,\mathrm{e}^{tY})=E(\mathrm{e}^{tX})E(\mathrm{e}^{tY})=M_X(t)M_Y(t).$$

2. **(a)** On a

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^k}{k!}+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq k}}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\geq\frac{x^k}{k!},$$

donc

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x^k\leq k!\,\mathrm{e}^x.$$

En particulier, on a

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall t\in\mathbb{R},\quad |ts|^k\leq k!\,\mathrm{e}^{|ts|},$$

finalement

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall t\in\mathbb{R},\quad |t|^k\leq\frac{k!}{s^k}\,\mathrm{e}^{|ts|}.$$

(b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrons que $E(|X|^k)$ est finie, ce qui revient à montrer que la v.a. $|X|^k$ admet des espérances. En vertu de la question précédente, on a

$$|X|^k\leq\frac{k!}{s^k}\,\mathrm{e}^{|sX|}\leq\frac{k!}{s^k}\left(\mathrm{e}^{sX}+\mathrm{e}^{-sX}\right).\quad\bigstar$$

Comme $-s,s\in I_X$, alors les v.a. e^{-sX} et e^{sX} admettent des espérances et par suite les v.a. $\mathrm{e}^{sX}+\mathrm{e}^{-sX}$ et $\frac{k!}{s^k}\left(\mathrm{e}^{sX}+\mathrm{e}^{-sX}\right)$ admettent aussi une espérance , dès lors, en vertu de $\bigstar$, la v.a. $|X|^k$ admet une espérance.

(c) Soit $t \in]-s, s[$. D'après le théorème de transfert pour les v.a à densité, on a

$$M_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx)^k}{n!} f(x)\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x,$$

avec $f_n(x) = \dfrac{(tx)^k}{n!} f(x)$.
On a :

- ▶ La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{tx} f(x).$$

- ▶ on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} f(x) \frac{|tx|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(x) \frac{|tx|^k}{k!} = f(x)\,\mathrm{e}^{|tx|} \leq f(x)\,\mathrm{e}^{tx} + f(x)\,\mathrm{e}^{-tx} = \varphi(x).\end{aligned}$$

Puisque $-t, t \in]-s, s[\subset I_X$, donc les v.a. e^{-tX} et e^{tX} admettent des espérances, alors, d'après le théorème de transfert pour les v.a à densité, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont absolument convergentes et par suite l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-tx} f(x) + \mathrm{e}^{tx} f(x)\right) \mathrm{d}x$ est aussi convergente et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc, d'après le théorème convergence dominée pour les séries [14], on a

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tx)^k}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{n!} E(X^n) \quad \text{d'après le théorème de transfert}\end{aligned}$$

(d) D'après la question précédente, on a

$$\forall t \in]-s, s[, \quad M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^k),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!} = \frac{E(X^n)}{n!} \ \text{ et } \ M_X^{(n)}(0) = E(X^n).$$

14. Théorème convergence dominée pour les séries : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ telle que :
- ▶ $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux.
- ▶ Il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leq \varphi(t)$

Alors les f_n et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont intégrables sur I et : $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$