ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de lafilière PSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Définitions

Pour tout ce problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \big(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\big)y = 0. \qquad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I

1. Soit x un réel.
   (a) Étudier, selon les valeurs de x, l'intégrabilité sur l'intervalle $]0,1]$ de la fonction
   $$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}.$$
   (b) Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
2. À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$?
3. On pose $\quad \Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z) > 0.$
   (a) Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer que
   $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$
   (b) En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité
   $$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)(\alpha+p-1)\ldots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1).$$
   (c) Montrer que pour tout $x > 0,\ \Gamma(x) > 0$.
   (d) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.
4. Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que
   $$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Cette formule permet de prolonger la fonction Γ *à la partie* $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ *du plan complexe.*

5. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ et qu'elle y est continue.

6. Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.
   (a) Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t.
   (b) Montrer que
   $$\forall\, x \in [a, b], \quad 0 \leqslant t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$
   (c) En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

Partie II

Soient $\lambda \geqslant 0$, α un réel et $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose
$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

1. On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_{\not 0} = 0$. Montrer que
$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad \big((\alpha+1)^2 - \lambda^2\big)a_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall\ n \geqslant 2,\ \big((\alpha+n)^2 - \lambda^2\big)a_n = a_{n-2}.$$

2. On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $\not a_0 = 0$.
   (a) Montrer que
   $$\forall\ p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha+1)}{2^{2p} p!\, \Gamma(\alpha+p+1)}.$$
   (b) Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$.
   (c) Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors
   $$\forall\ x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\, \Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$
   puis donner un équivalent de la fonction y_λ en 0.

3. On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)$ par $\frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.
   (a) En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction
   $$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\, \Gamma(-\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$
   est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

(b) Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\overrightarrow{E}$, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormée direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de $\overrightarrow{E}$ se notera $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$.

Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ, on note :

- s l'abscisse curviligne de M sur γ,
- $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}}) = \frac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\overrightarrow{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta), \overrightarrow{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{T}})$.

Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1 + \cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.
   (b) Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.
   (c) Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0, \pi], \psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0, \pi]$.
2. Préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π.
3. Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.
4. Étudier la fonction $\rho :\ \theta \longmapsto 1 + \cos\theta$ sur le segment $[0, \pi]$ et dresser son tableau de variations.
5. Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).
6. Calculer la longueur de l'arc γ_2.
7. Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1.

Deuxième partie

A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

1. Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

2. Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f'.

3. Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

4. Exprimer les coordonnées de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

1. Préciser les coordonnée de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

3. On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $\big(OM(\theta)\big)$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ.

4. On note γ_I et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1, γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.

5. Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

FIN DE L'ÉPREUVE