ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit A une matrice réelle d'ordre 3 telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Vérifier que $u^3 + u = 0$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On suppose que u est injectif ; montrer que $u^2 = -id_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \operatorname{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$. Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$?
4. On pose $F = \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -id_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre.
5. On considère un vecteur e'_1 non nul de $\operatorname{Ker} u$, un vecteur e'_2 non nul de F et on pose $e'_3 = u(e'_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e'_2, e'_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et écrire la matrice B de u dans cette base.
   (c) Que peut-on alors dire des matrices A et B ?

PROBLÈME

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes ; le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et la matrice identité se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $\mathrm{Sp}(A)$ représente le spectre de A (c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres), $\mathrm{Tr}(A)$ désignera sa trace et $\mathrm{rg}(A)$ son rang. Le polynôme caractéristique de A se notera χ_A, il est défini par

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) .$$

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dite base canonique, et que

$$\forall\,(i,j,k,l) \in \{1,\dots,n\}^4, \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}, \quad \text{avec} \quad \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad u_{P,Q}(M) = PMQ \quad \text{et} \quad v_{P,Q}(M) = P\,{}^t\!MQ.$$

Première partie

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AM = MA$; montrer que A est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer la trace de la matrice $AE_{i,j}$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}\,(AM) = 0$; montrer que A est nulle.
3. Montrer que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
4. Justifier que, pour tout $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent le rang.
5. Quels sont ceux de ces endomorphismes qui conservent le déterminant ?

Deuxième partie

Dans la suite du problème, on admettra que tout endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(\Phi(M)) = \det(M),$$

est de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ pour un certain couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det(PQ) = 1$.

Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \chi_{\Phi(M)} = \chi_M.$$

1. Montrer que Φ conserve le déterminant et la trace.
2. En déduire qu'il existe un couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.
3. Un tel couple (P, Q) ayant été choisi.
   (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$,
   $$\mathrm{Tr}\,(PE_{i,j}Q) = \mathrm{Tr}\,(E_{i,j}).$$
   (b) En déduire que $Q = P^{-1}$.
4. Préciser alors les endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

5. **Exemple**

   On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par
$$\forall\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = \mathrm{Tr}\,(M)I_2 - M.$$
   (a) Montrer que Φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de Φ et les sous-espaces propres associés. Est-ce que Φ est diagonalisable ?
   (c) Vérifier que Φ conserve le polynôme caractéristique.
   (d) Expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\Phi = v_{P,P^{-1}}$.

Troisième partie

Dans cette partie, Φ désigne une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même telle que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB aient le même polynôme caractéristique.

1. (a) Pour tout quadruplet $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4$, calculer la valeur de $\mathrm{Tr}\,(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l}))$.
   (b) Montrer alors que la famille $\big(\Phi(E_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\mathrm{Tr}\big(\big(\Phi(A + B) - \Phi(A) - \Phi(B)\big)\Phi(E_{i,j})\big) = 0$.
   (b) En déduire que $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$.

3. Montrer que Φ est linéaire puis justifier que c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente et en déduire qu'il en est de même pour la matrice $\Phi(E_{i,j})$.

5. Dans la suite de cette partie, on notera $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice telle que $\Phi(G) = I_n$.
   (a) Justifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_{AG}$.
   (b) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, le polynôme caractéristique de la matrice $E_{i,j}G$ est égal à $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.
   (c) En déduire que la matrice G est diagonale et que $G^2 = I_n$.

6. On note Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Psi(A) = \Phi(AG).$$
   (a) Montrer que Ψ conserve le polynôme caractéristique.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PMGP^{-1} \quad \text{ou} \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PG\,{}^tMP^{-1}.$$

7. (a) Montrer que, pour tout couple $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, $\mathrm{Tr}\,(AGBG) = \mathrm{Tr}\,(AB)$.
   (b) En déduire que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $GBG = B$.
   (c) Montrer alors que G est une matrice scalaire et qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $G = \varepsilon I_n$.

8. Réciproquement, montrer que si $w = \varepsilon.u_{P,P^{-1}}$ ou $w = \varepsilon.v_{P,P^{-1}}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon = \pm 1$, alors l'endomorphisme w de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie bien la propriété
$$\forall\, (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2, \quad \chi_{w(A)w(B)} = \chi_{AB}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE