L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME

Notations, définitions et rappels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}-$espace vectoriel des endomorphismes de E. Si $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ se note uv et l'identité est notée id_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, les endomorphismes itérés u^p de u sont définis par les relations $u^0 = id_E$ et $u^p = uu^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\operatorname{Tr}(u)$ la trace de u, $\det(u)$ son déterminant et χ_u son polynôme caractéristique ; on rappelle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda\, id_E - u)$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}-$espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{Tr}(A)$ sa trace, $\det(A)$ son déterminant et χ_A son polynôme caractéristique ; on rappelle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\, I_n - A)$.

On rappelle que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant et même trace.

Définition : Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *scalaire* si elle est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'objectif du problème est de montrer la propriété $\mathscr{P}$ suivantes pour $n \in \{2, 3\}$:

$\mathscr{P}$: *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice A qui n'est pas scalaire est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale est $\big(0, \operatorname{Tr}(A)\big)$ (resp. $\big(0, 0, \operatorname{Tr}(A)\big)$) si $n = 2$ (resp. $n = 3$).*

1ère Partie
Étude de quelques exemples
(Notée sur 04 points sur 20)

1.1. Un premier exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

1.1.1. Calculer les valeurs propres de u et justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Déterminer, pour chaque $i \in \{1, 2\}$, le vecteur e_i de $\mathbb{R}^2$ dont la première composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

1.1.3. Justifier que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice D de u relativement à cette base.

1.1.4. Exprimer la matrice A en fonction de D et conclure que A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

1.2. Un deuxième exemple

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

1.2.1. Calculer le polynôme caractéristique χ_B de la matrice B et en déduire que B possède une seule valeur propre λ à préciser.

1.2.2. Déterminer $\operatorname{Ker}(v - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre de v associé à son unique valeur propre λ.

1.2.3. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

1.2.4. On pose $e_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Calculer les vecteurs $v(e_1)$ et $v^2(e_1)$ puis montrer que la famille $\mathscr{C} = \big(e_1, v(e_1), v^2(e_1)\big)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(ii) Exprimer le vecteur $v^3(e_1)$ dans la base $\mathscr{C}$ et écrire la matrice B' de v dans cette base.

(iii) Exprimer la matrice B en fonction de B' et conclure que B vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Une caractérisation des homothéties
Application à l'étude de la propriété $\mathscr{P}$ en dimension 2

2.1. Une caractérisation des homothéties

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, de dimension finie $n \geqslant 1$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

2.1.1. Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, x$.

2.1.2. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$; démontrer que si la famille (x, y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$.

2.1.3. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$; démontrer que si la famille (x, y) est libre alors $\lambda_x = \lambda_y$.

2.1.4. En déduire que f est une homothétie.

2.2. Application à l'étude la propriété $\mathscr{P}$ dans le cas $n = 2$

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas scalaire et on cherche à montrer que A vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Pour cela, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

2.2.1. Justifier qu'il existe un vecteur $e \in \mathbb{C}^2$ tel que la famille $\mathscr{B} = \big(e, u(e)\big)$ soit une base de $\mathbb{C}^2$.

2.2.2. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & -\det(u) \\ 1 & \operatorname{Tr}(u) \end{pmatrix}$.

2.2.3. Montrer que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{Tr}(A) \end{pmatrix}$ et conclure.

$3^{\text{ème}}$ Partie
Démonstration de la propriété $\mathscr{P}$ dans le cas $n = 3$

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui n'est pas scalaire et on cherche à montrer que A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

On considère le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$ et on note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à A ; soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de la matrice A, comptées avec leur ordre de multiplicité. On pose enfin $\sigma_2(A) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$.

3.1. Quelques résultats utiles

3.1.1. Exprimer $\det(A)$ et $\operatorname{Tr}(A)$ en fonction des valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A.

3.1.2. Préciser les coefficients du polynôme χ_A en fonction de $\operatorname{Tr}(A)$, $\det(A)$ et $\sigma_2(A)$.

3.2. Cas où les 3 valeurs propres de A sont deux à deux distinctes

On suppose ici que les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A sont deux à deux distinctes et on note e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls de E tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. On pose enfin

$$e = e_1 + e_2 + e_3.$$

3.2.1. Montrer que $\mathscr{B} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ est une base de E. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

3.2.2. Exprimer les vecteurs $u(e)$ et $u^2(e)$ dans la base $\mathscr{B}$ puis montrer que la famille $\mathscr{C} = \big(e, u(e), u^2(e)\big)$ est aussi une base de E.

3.2.3. Vérifier que, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $u^k(e) = \lambda_1^k e_1 + \lambda_2^k e_2 + \lambda_3^k e_3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^k e_i$ puis montrer que

$$u^3(e) - \operatorname{Tr}(A)\, u^2(e) + \sigma_2(A)\, u(e) - \det(A)\, e = 0_E.$$

3.2.4. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathscr{C}$ et justifier que les matrices A et A' sont semblables, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis conclure que A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

3.3. Cas où A possède une valeur propre double et une valeur propre simple

On note λ la valeur propre double de A et μ sa valeur propre simple ; en particulier, $\lambda \neq \mu$.

3.3.1. Préciser la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(u - \mu\, id_E)$. Quelles sont les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)$?

3.3.2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mu\, id_E) \cap \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2 = \{0_E\}$ et en déduire que $\dim \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2 \leqslant 2$.

3.3.3. On admet que l'endomorphisme $(u - \mu\, id_E)(u - \lambda\, id_E)^2$ est nul. Justifier que l'endomorphisme $(u - \lambda\, id_E)^2(u - \mu\, id_E)$ est aussi nul et en déduire que $\mathrm{Im}\,(u - \mu\, id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2$.

3.3.4. Déduire de ce qui précède que $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2\big) = 2$.

3.3.5. Cas où l'endomorphisme u est diagonalisable

(i) Justifier que, dans ce cas, $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)\big) = 2$.

On choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}\,(u - \mu\, id_E) \setminus \{0_E\}$, une base (e_2, e_3) de $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)$ et on pose $e = e_1 + e_2$.

(ii) Vérifier que $\big(e, u(e)\big)$ est libre et montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(e, u(e), e_3\big)$ est une base de E.

(iii) Montrer que la matrice A' de u dans la base $\mathscr{B}$ vaut $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda\mu & 0 \\ 1 & \lambda+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(iv) Si $\mu = 0$, vérifier que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 0 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$ et conclure que la matrice A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

(v) Si $\mu \neq 0$, montrer en utilisant le cas $n = 2$ qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $(v', w') \in \mathbb{C}^2$ tels que $Q \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & v' \\ w' & 2\lambda+\mu \end{pmatrix}$ puis justifier, moyennant des produits matriciels par blocs, que la diagonale de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda\mu & 0 \\ 1 & \lambda+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ est égale à $\big(0, 0, 2\lambda+\mu\big)$. Conclure que la matrice A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

3.3.6. Cas où l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable

(i) Justifier que, dans ce cas, $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2$.

On choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}\,(u - \mu\, id_E) \setminus \{0_E\}$, $e_2 \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2 \setminus \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)$ et on pose $e = e_1 + e_2$.

(ii) Justifier que $\big(e_2, u(e_2)\big)$ est libre et montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(e_1, e_2, u(e_2)\big)$ est une base de E.

(iii) En exprimant ses éléments dans la base $\mathscr{B}$, montrer que la famille $\mathscr{C} = \big(e, u(e), u^2(e)\big)$ est une base de E.

(iv) Exprimer la matrice A' de u dans la base $\mathscr{C}$ en fonction de λ et μ, puis conclure que la matrice A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

3.4. Cas où A possède une valeur propre triple

On note λ l'unique valeur propre de A ; donc $\chi_A = \chi_u = (X - \lambda)^3$.

3.4.1. Justifier que u n'et pas diagonalisable et montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2$.

3.4.2. On considère $e \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)^2 \setminus \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, id_E)$. Justifier que $\big(e, u(e)\big)$ est une famille libre.

3.4.3. Soit $e_3 \in E$ tel que $(e, u(e), e_3)$ soit une base de E. En écrivant la matrice de u dans cette base, montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & c \\ 1 & 2\lambda & d \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $(c, d) \in \mathbb{C}^2$.

3.4.4. Si $\lambda \neq 0$, montrer en utilisant le cas $n = 2$ qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $(v, w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $P \begin{pmatrix} 2\lambda & d \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 3\lambda \end{pmatrix}$ puis justifier, moyennant des produits matriciels par blocs, que la diagonale de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & c \\ 1 & 2\lambda & d \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ est égale à $(0, 0, 3\lambda)$.

3.4.5. Envisager le cas restant et conclure que A vérifie, dans les deux cas, la propriété $\mathscr{P}$.

Fin de l'épreuve