Corrigé de l'épreuve de mathématiques I

PREMIER PROBLÈME

Partie I

1. Soit x un réel.

   (a) On sait que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$; par ailleurs on a l'équivalence
   $$t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}e^{-t}.$$
   Les fonctions considérées étant continues et positives sur l'intervalle $]0,1]$, on en déduit que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle si et seulement si $x > 0$.

   (b) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $t \longmapsto e^{-t/2}$; cette dernière fonction étant intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$, on en déduit que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$, qui est continue et positive, est-elle aussi intégrable sur cet intervalle.

2. Soit z un complexe. D'après les questions précédentes, x étant un réel donné, La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ si et seulement si $x > 0$. Ainsi, puisque
   $$|t^{z-1}e^{-t}| = |e^{(z-1)\ln t}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t},$$
   pour tout $t > 0$, alors la fonction continue $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

3. (a) On sait que $\Gamma(z)$ n'est rien d'autre que la limite en $+\infty$ de la fonction
   $$x \longmapsto \int_0^x t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$
   À l'aide d'une intégration par partie on obtient, pour $x > 0$, l'identité
   $$\int_0^x t^z e^{-t}\,dt = -x^z e^{-x} + z\int_0^x t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$
   Compte tenu du fait que $|x^z e^{-x}| = x^{\mathrm{Re}(z)}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le résultat demandé découle de l'identité précédente par passage à la limite en $+\infty$.

   (b) Si $\alpha > 0$ alors $\alpha + k > 0$ pour tout entier $k \geqslant 0$. La question précédente permet alors de voir que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
   $$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)\Gamma(\alpha+p) = (\alpha+p)(\alpha+p-1)\Gamma(\alpha+p-1).$$
   Une récurrence immédiate sur p permet de voir que
   $$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)\cdots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1).$$

   (c) Soit $x > 0$; la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive, continue et non nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$. $\Gamma(x)$ qui est la valeur de son intégrale sur cet intervalle est donc strictement positive.

   (d) Il est clair que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 1.$

4. Soit z un complexe dont la partie réelle est strictement positive ; pour tout réel $t > 0$, on pose
   $$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}.$$
   Le développement en série entière de la fonction exponentielle, permet d'écrire
   $$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t),\ \forall\, t > 0.$$

Pour $n \geqslant 1$, le module du terme général u_n de cette série de fonctions est majoré, indépendamment de $t \in]0,1]$, par $\dfrac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur l'intervalle $]0,1]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, ce qui justifie l'écriture

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\Big)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}.$$

On en déduit alors que

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\, dt = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big)\, dt = \int_0^1 t^{z-1}\, dt + \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\Big)\, dt = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}.$$

On obtient finalement,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\, dt.$$

5. On pose $\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$; on remarque que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Si $x \in \mathcal{U}$ et $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\dfrac{1}{n+x}$ est bien définie et on a $\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x} = O\big(\dfrac{1}{n!}\big)$. la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x}$ est donc convergente ; on note $\varphi(x)$ sa somme et on pose

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x},\ x \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}.$$

   Considérons $x_0 \in \mathcal{U}$ et montrons que φ est continue en x_0.

   - Si $x_0 > 0$, $]x_0/2, +\infty[$ est un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans $\mathcal{U}$ et on a

$$|v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{2}{x_0},\ x \in [x_0/2, +\infty[.$$

     Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur $]x_0/2, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$; les fonctions v_n étant continues en x_0, il en est de même de la fonction φ.
   - Si $x_0 < 0$, notons $-n_0$ la partie entière de x_0 ; alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et le disque fermé $[x_0-\eta, x_0+\eta]$, où $\eta = \min(n_0+x_0, 1-(n_0+x_0))$, est contenu dans $\mathcal{U}$ et on a

$$|v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!\,(n-n_0)} \leqslant \frac{1}{n!},\ x \in [x_0-\eta, x_0+\eta],\ n > n_0.$$

     Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} v_n$; comme les fonctions v_n sont continues en x_0, il en est de même de la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} v_n(x)$. Comme $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{n_0} v_n(x) + \sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} v_n(x)$, est somme de n_0+2 fonctions continues en x_0, elle est aussi continue en x_0.

6. Soient a et b deux réel avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

   (a) On sait que $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$, on en déduit que

   - si $t \in]0,1]$ alors $\ln(t) \leqslant 0$, et par suite $(a-1)\ln t \geqslant (b-1)\ln t$ et comme la fonction $x \longmapsto e^x$ est croissante, on obtient $t^{a-1} \geqslant t^{b-1}$ et donc $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.
   - si $t > 1$ alors $\ln t > 0$, donc $t^{a-1} \leqslant t^{b-1}$ et par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.

(b) Soit $x \in [a,b]$. D'après ce qui précède, pour $t \in]0,1]$, on a

$$0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}),$$

de même si $t > 1$, alors

$$0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

On en déduit que $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

(c) La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f(x,t)\ln t.$$

De plus, pour tout segment $[c,d] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout couple (x,t) d'éléments de $[c,d] \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln t|\, e^{-t}t^{x-1} \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}\max(t^{c-1}, t^{d-1}) \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{c-1} + t^{d-1}) = \varphi(t).$$

La fonction dominante φ est bien évidement intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque, si l'on prend $\varepsilon > 0$ dans l'intervalle $]1-c, 1[$, on obtient $t^{\varepsilon}\varphi(t) = t^{\varepsilon}(t^{c-1} + t^{d-1})e^{-t}|\ln t| \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, ce qui justifie l'intégrabilité de φ sur $]0,1]$, et l'inégalité $\varphi(t) \leqslant (t^{c-1} + t^{d-1})te^{-t} = (t^c + t^d)e^{-t}$, valable pour $t \geqslant 1$, montre que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Comme le segment $[c,d]$ est arbitraire, le théorème de dérivation sous le signe intégral, permet alors de conclure que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\ \ dt, \quad x > 0.$$

Partie II

1. L'application $x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est la somme d'une série entière de rayon de rayon de convergence $R > 0$, elle est donc de classe C^∞ sur $]0,R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme ; la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est aussi de classe C^∞ sur R^*. On en déduit que la fonction y_α, qui est le produit de ces deux fonctions, est également de classe C^∞ sur $]0,R[$ et on a

$$y'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n-1},$$

de même

$$y''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n-2}.$$

Ainsi, y_α est solution sur $]0,R[$ de l'équation différentielle (F_λ) si et seulement si

$$\forall\, x \in]0,R[, \quad -(x^2+\lambda^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n} = 0,$$

ce qui est équivaut à

$$\forall\, x \in]0,R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2 - \lambda^2)a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{\alpha+n} = 0,$$

et puisque $x^\alpha \neq 0$, pour tout $x \in]0,R[$, cela est équivaut à

$$\forall\, x \in]0,R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2 - \lambda^2)a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n. \qquad (1)$$

Or dans (1), il s'agit d'une égalité, sur l'intervalle $]0, R[$, entre les sommes de deux séries entières de même rayon de convergence R ; par continuité, ces deux fonctions coïncident donc en 0 ainsi que leurs dérivées successives ; on en déduit alors que

$$(\alpha^2 - \lambda^2)a_0 = 0, \quad \big((\alpha+1)^2 - \lambda^2\big)a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2,\ \big((\alpha+n)^2 - \lambda^2\big)a_n = a_{n-2}. \qquad (2)$$

D'où le résultat demandé puisque $a_0 \neq 0$.

2. On suppose que $\alpha = \lambda,\ a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle (F_λ).

   (a) D'après la question précédente on obtient

   $$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2 \quad ((\lambda+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-2}. \qquad (3)$$

   Les relations (3) donnent alors

   $$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 - \lambda^2} a_{2(p-1)} = \frac{1}{4p(\lambda+p)} a_{2(p-1)},$$

   et compte tenu de la question 3.(b) de la première partie, on en déduit, par récurrence immédiate, que

   $$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = a_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p!\, \Gamma(\lambda+p+1)}.$$

   (b) Avec les notation précédentes, la règle de D'alembert permet de voir que, pour tout réel x, la série numérique $\sum\limits_{p \geqslant 0} a_{2p} x^{2p}$ est convergente ; on en déduit alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est infini.

   (c) Si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

   $$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p!\, \Gamma(\lambda+p+1)} = \frac{1}{2^{2p+\lambda} p!\, \Gamma(\lambda+p+1)},$$

   et par suite

   $$\forall\, x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\, \Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}.$$

   Par ailleurs, il est bien évident que $\dfrac{y_\lambda(x)}{x^\lambda} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$, c'est à dire

   $$y_\lambda(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}.$$

3. On suppose ici que λ n'est pas un demi-entier ; en particulier $\lambda > 0$.

   (a) Les équivalence établies à la question $1.$ de cette partie et l'expression de la fonction $y_{-\lambda}$ permettent de voir facilement que cette fonction est aussi solution sur R_+^* de l'équation différentielle (F_λ) .

   (b) Soient β et δ sont des réels tels que $\quad \beta y_\lambda + \delta y_{-\lambda} = 0. \qquad (*)$

   Comme $y_\lambda(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$ et $y_{-\lambda} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{x^{-\lambda}}{2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)}$, les fonctions y_λ et $y_{-\lambda}$ tendent respectivement vers 0 et $+\infty$ en 0 ; en faisant tendre x vers 0 dans $(*)$, on obtient $\delta = 0$ et par suite $\beta = 0$. Les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont donc linéairement indépendantes.

   Par ailleurs, (F_λ) étant une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et homogène, son ensemble de solutions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc un espace vectoriel réel de dimension deux, dont $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions.

DEUXIÈME PROBLÈME

Première partie

1. (a) Le domaine de définition de la fonction ρ est égal à $\mathbb{R}$ et cette fonction est $2\pi-$périodique.

   (b) La fonction ρ est paire comme la fonction cosinus ; on en déduit que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point $\varphi(-\theta)$ du support de l'arc γ_1 se déduit du point $\varphi(\theta)$ par symétrie par rapport à l'axe polaire $O + \mathbb{R}\vec{i}$. Ainsi, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{i}$ est un axe de symétrie du support de l'arc γ_1.

   (c) Puisque la fonction ρ est $2\pi-$périodique, le support de l'arc γ_1 est complètement décrit lorsque θ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ainsi, grâce à la parité de la fonction ρ, le support de l'arc γ_1 peut être obtenu à partir de celui de l'arc γ_2 par symétrie par rapport à l'axe polaire.

2. On a $\rho(\pi) = 0$ donc $\varphi(\pi) = O$, puis $\rho'(\pi) = -\sin\pi = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos\pi = 1 \neq 0$; on en déduit que le point $O = \varphi(\pi)$ du support de l'arc γ_1 est un point de rebroussement de première espèce.

3. Pour tout réel θ, on a

$$\varphi'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad \varphi''(\theta) = \big(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\big)\vec{u}(\theta) + 2\rho'^2(\theta)\vec{v}(\theta).$$

   Le déterminant des vecteurs $\varphi'(\theta)$ et $\varphi''(\theta)$ dans une base orthonormée de $\vec{E}$ vaut alors

$$\det\big(\varphi'(\theta), \varphi''(\theta)\big) = 2\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) = 3(1+\cos\theta).$$

   On en déduit qu'en tout point $\varphi(\theta)$ de l'arc γ_1 distinct du pôle, c'est à dire que $(1+\cos\theta) \neq 0$, ce déterminant est strictement positif puisque $1+\cos\theta > 0$; ainsi, ces point sont biréguliers et la concavité de la courbe est tournée vers le pôle O.

4. La fonction ρ est de classes C^∞ et décroissante sur le segment $[0,\pi]$ puisque

$$\forall\, \theta \in [0,\pi], \quad \rho'(\theta) = -\sin\theta \leqslant 0.$$

   on en déduit le tableau de variations suivant

x	0		π
$\rho'(x)$	0	-	0
$\rho(x)$	2	$\searrow$	0

5. Voir figure 1 du document annexe joint à ce corrigé.

6. À l'aide de la définition, on obtient l'expression de la longueur de l'arc γ_2, notée $\ell(\gamma_2)$, et donnée par

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^\pi ||\varphi'(\theta)||\, d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta = 2\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4.$$

7. La portion du plan délimitée par le support de l'arc γ_1 est définie par

$$\{O + r\vec{u}(\theta)\ ;\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}\ ;$$

   elle a la même aire que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2\ ;\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}$.
   L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ est donnée par $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx\, dy$; cette intégrale double se calcule facilement par passage en coordonnées polaire, on obtient alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx\, dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\rho(\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta = \int_0^\pi (1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Deuxième partie

A- Question de cours

1. Voir figure 2 du document annexe joint à ce corrigé.

2. Par définition, l'abscisse curviligne s sur l'arc γ orienté dans le sens des θ croissants et correspondant au choix de θ_0 comme origine est la fonction définie par

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}\ dt.$$

$s(\theta_1)$ représente la longueur de la portion de l'arc γ décrite lorsque θ varie de θ_0 à θ_1 si $\theta_1 \geqslant \theta_0$ et son opposé sinon.

Il découle de cette définition que $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{f^2 + f'^2}$.

3. On sait que $\tan V = \dfrac{f}{f'}$ et par dérivation on obtient $\big(1 + \tan^2 V\big)\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{f'^2 - ff''}{f'^2}$, d'où

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - ff''}{f^2 + f'^2}.$$

Puis $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\alpha}$, et comme $\alpha = \theta + V$ alors $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{f^2 + 2f'^2 - ff''}{f^2 + f'^2}$. On en déduit alors que

$$R = \frac{(f^2 + f'^2)^{3/2}}{f^2 + 2f'^2 - ff''}.$$

Le fait que l'on puisse diviser par la quantité $f^2 + 2f'^2 - ff''$ est justifié par la birégularité de l'arc γ en question.

4. On sait que $I = M + R\vec{N}$, puis $\vec{N} = -R\sin V\vec{u} + R\cos V\vec{v}$; ainsi I a pour coordonnées $\big(-R\sin V, R\cos V\big)$ dans le repère $\big(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$. Par ailleurs on a

$$\cos V = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}} \quad \text{et} \quad \sin V = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

donc le point I a pour coordonnées $\Big(-\dfrac{(f^2 + f'^2)f}{f^2 + 2f'^2 - ff''}, \dfrac{(f^2 + f'^2)f'}{f^2 + 2f'^2 - ff''}\Big)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

1. On viens de voir que les coordonnées de $I(\theta)$, centre de courbure en $M((\theta)) = \varphi(\theta)$, dans le repère $(M(\theta), \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, sont

$$\Big(-\frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}, \frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho'}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}\Big) = \frac{2}{3}(-\rho, \rho')\ ;$$

on en déduit que les coordonnées de $I(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont

$$\frac{1}{3}(\rho, 2\rho') = \frac{1}{3}(1 + \cos\theta, -2\sin\theta),$$

c'est à dire que $\overrightarrow{OI(\theta)} = \frac{1}{3}(1 + \cos\theta).\vec{u}(\theta) - \frac{2}{3}\sin\theta.\vec{v}$.

Alors que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ses coordonnées sont $\Big(\dfrac{1}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta + \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta\Big)$, c'est à dire que

$$\overrightarrow{OI(\theta)} = \big(\frac{1}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta + \frac{2}{3}\big).\vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta.\vec{j}.$$

2. Soit Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \dfrac{1}{2}\vec{i}$, alors
$$\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = \big(\frac{1}{3}(1-\cos\theta)\cos\theta + \frac{1}{6}\big).\vec{i} + \frac{1}{3}(1-\cos\theta)\sin\theta.\vec{j} = \frac{1}{3}(1-\cos\theta).\vec{u}(\theta) + \frac{1}{6}.\vec{i}.$$
Par ailleurs
$$\overrightarrow{OM(\theta+\pi)} = -(1-\cos\theta)\vec{u}(\theta)$$
donc
$$\overrightarrow{\Omega M(\theta+\pi)} = -(1-\cos\theta)\vec{u}(\theta) - \frac{1}{2}\vec{i},$$
et par suite $\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M(\theta+\pi)}$, c'est à dire que le point $I(\theta)$ est bien l'image du point $M(\theta+\pi)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

3. On a $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \mathrm{pr}\big(\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)}\big)$, où pr désigne la projection orthogonale de $\overrightarrow{E}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}(\theta)$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)} = \dfrac{2}{3}\big(\rho(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta)\big)$ donc $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = -\dfrac{2}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$. On en déduit alors que
$$\overrightarrow{OH(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} + \overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \frac{1}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM(\theta)}.$$
Ainsi, le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

4. Voir figure 3 du document annexe joint à ce corrigé.

5. Il s'agit bien entendu de la longueur de la courbe décrite une seule fois, ce qui donne le tiers de celle de l'arc $\Big(]-\pi,\pi[,\varphi_{/]-\pi,\pi[}\Big)$; elle vaut donc $\dfrac{8}{3}$. L'aire de la portion du plan que cette courbe délimite vaut quant à elle $\dfrac{\pi}{6}$.

FIN DU CORRIGÉ