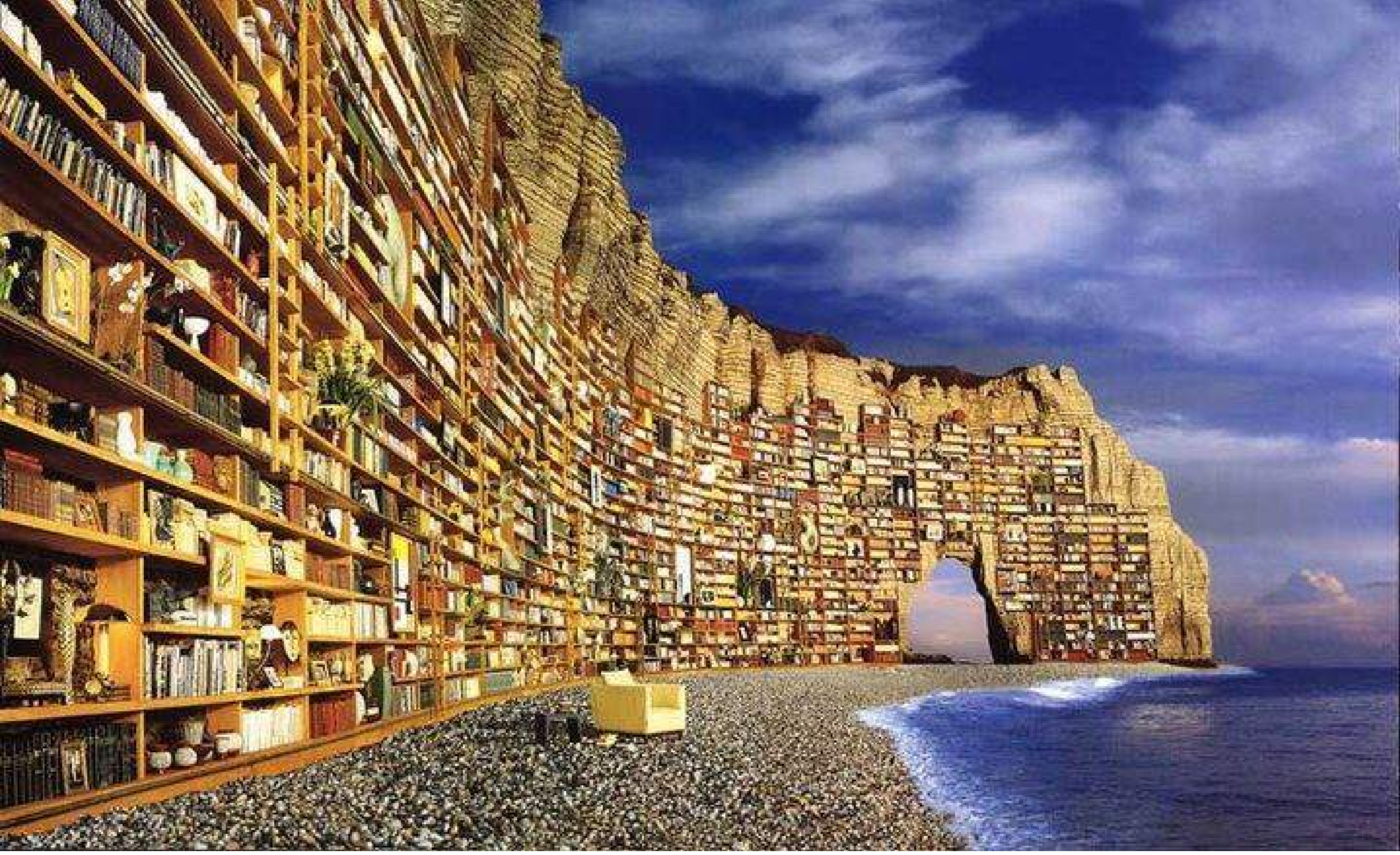
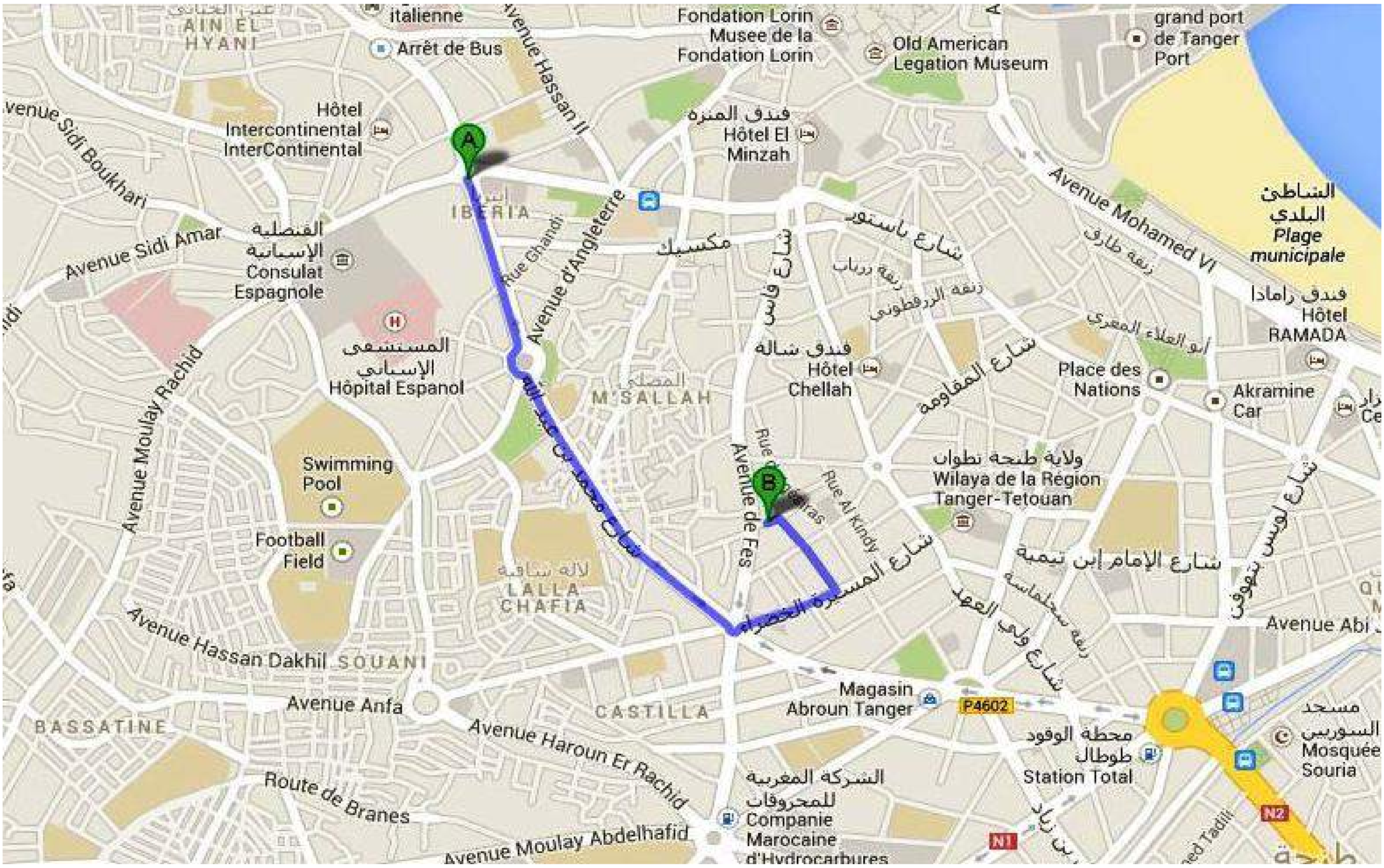


http://al9ahira.com/



Itinéraire d'accès à Al9ahira (point B sur la carte) en partant de la Place Ibéria

Concours commun marocain 2013 *

Filière PSI-math II

Ce corrigé détaillé vise à donner une approche pédagogique qui ne se contente pas seulement de résoudre les questions du sujet, mais essaye de mettre le point sur les parties de cours utilisé et les astuces classiques que le candidat doit retenir en travaillant cette épreuve. Aussi, comme on dit le diable est dans les détailles, les élèves doivent savoir détailler les étapes des problèmes qu'ils entament parce que c'est là la compréhension vraie et correcte des mathématiques.

Exercice 1

Matrice de Gram et application

Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$; on note $G(u_1, \dots, u_n)$ la matrice de terme general $< u_i, u_j >$, ou $< ., . >$ designe le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
La matrice $G(u_1, \dots, u_n)$ est dite une matrice de Gram.
On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $j \in \{1..n\}$, on note $u_j = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} e_k$ l'expression du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. On designe enfin par M la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j}$.

Dans un espace vectoriel préhilbertien de dimension finie si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est un b.o.n et si $x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_j e_k$ on a $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i$ et $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, c'est ce qu'on appelle calcul dans une b.o.n.
Attention : Si $M = (m_{ij})$ noté ${}^tM = (m_{ji})$ est faut ; ${}^tM = (m'_{ij})$ tels que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, m'_{ij} = m_{ij}$
Toute matrice qui s'écrit sous la forme ${}^tAA$ est symétrique positive et si de plus A est inversible on a ${}^tAA$ est symétrique définie positive.

1. **Question :** Pour tout couple (i, j) d'élément de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le produit scalaire $< u_i, u_j >$ à l'aide des coefficient de la matrice M et en déduire que $G(u_1 \dots, u_n) = {}^tMM$.

   Réponse : La base canonique est une base orthonormée (En abrégé b.o.n) pour le produit scalaire canonique (En abrégé p.s.c) et le calcul dans une b.o.n nous permet d'écrire

   $$< u_i, u_j >= \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j}$$

   Déduction : On a $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,
   $({}^tMM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m'_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} =< u_i, u_j >= (G(u_1 \dots, u_n))_{ij}$ avec ${}^tM = (m'_{i,j})_{i,j \in \{1..n\}}$

2. **Question :** Montrer que la matrice $G(u_1 \dots, u_n)$ est symétrique et positive, et que si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre alors la matrice $G(u_1 \dots, u_n)$ est définie positive (s.p).

* Auteur du corrigé : Ratbi My Lhassan, CPGE My Youssef Rabat- email : mylhassan@yahoo.fr

Réponse : On a $G(u_1\dots,u_n) = {}^tMM$ donc $G(u_1\dots,u_n)$ est symétrique et $\forall X \in M_{n,1}$,
${}^tXGX = {}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geqslant 0$ donc G est symétrique positive.
D'autre part puisque $M = mat_B(u_1,\dots,u_n)$ et $(u_1,\dots,u_n)$ est libre on a M est inversible donc
${}^tXGX = 0 \implies \|MX\| = 0 \implies MX = 0 \implies X = 0$

3. On note A_n de $M_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = min(a_{i,j})$.

a. Question : Exprimer A_n comme une matrice de Gram et et en déduire qu'elle est symétrique définie positive, puis expliciter une matrice $R_n \in M_n(\mathbb{R})$,triangulaire supérieure , telle que $A_n = {}^tR_nR_n$.

On peut écrire les vecteurs sous la forme
$u_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$
$u_2 = (1,1,0,\dots,0,0)$
$u_3 = (1,1,1,0,\dots,0)$
$\vdots$
$u_n = (1,1,1,\dots,1,1)$

Réponse : On pose $\forall k \in \{1\dots,..n\}, u_k = \sum_{i=1}^{k} e_i$. La famille ainsi construite vérifie $< u_i, u_j >= min(i,j)$ donc $A_n = G(u_1,\dots,u_n)$ et comme la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est clairement libre on a A_n est symétrique définie positive d'après la question précédente.
De plus on a

$$R_n = Mat_B(u_1,u_2,\dots,u_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans un système linéaire de type $AX = b$ il faut calculer les composantes de l'inconnue X en fonction de A et b. Ici dans ${}^tR_4Z = Y$ il faut calculer Z en fonction de Y c-à-d $z_1, z_2, z_3,$ et z_4 fonction de $y_1, y_2, y_3,$ et y_4, de même dans $R_4X = Z$ il faut calculer X en fonction de Z et finalement dans $A_4X = Y$ il faut calculer X en fonction de Y.

b. Question : On prend $n = 4$ et on note X (resp. Y, resp. Z) le vecteur de $M_{n,1}$ de composantes x_1, x_2, x_3 et x_4 (resp. y_1, y_2, y_3 et y_4 ,resp. z_1, z_2, z_3 et z_4.) Résoudre les systèmes linèaire ${}^tR_4Z = Y$ et $R_4X = Z$ puis en déduire la solution de système linèaire $A_4X = Y$.

Réponse : On a

$${}^tR_4Z = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ y_4 - y_3 \end{pmatrix}$$

et de même on a

$$R_4X = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - z_2 \\ z_2 - z_3 \\ z_3 - z_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$\begin{aligned} A_4X = Y &\Leftrightarrow^t R_4R_4X = Y \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R_4X &= Z \\ {}^tR_4Z &= Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - 2y_1 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 \\ -y_3 + y_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2

Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ **dans** $M_3(\mathbb{R})$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Question :** Justifier que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$. On λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$; préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.

   Réponse : Le polynôme caractéristique de A est

   $$\chi_A = X(4 - X)(10 - X)$$

   scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
   Et on a alors $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 0$.

2. **Question :** Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, déterminer le vecteur propre e_k de u associé à la valeur propre λ_k et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.

   Réponse : Les vecteurs propres associés aux valeurs propres
   $\lambda_1, \lambda_2,$ et λ_3 et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1 sont resp. $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0),$ et $v_3 = (0, 1, -4)$ exprimés dans la base canonique.

3. **Question :** Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base.

   Réponse : La famille (v_1, v_2, v_3) est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distincts donc elle est libre et comme sont cardinal est égal la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base.

4. **Question :** Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1}.

Réponse :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

5. **Question :** Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé à B.

a. Question : Justifier que $v^2 + 3v = u$.

Réponse :

C'est une question souvent mal comprise par les candidats et son but c'est utilisé l'isomorphisme d'algèbre entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{R})$ à une base fixé.

$$\begin{aligned} & B^2 + 3B = A \\ & \Leftrightarrow (Mat_B(v))^2 + 3Mat_B(v) = Mat_B(u) \\ & \Leftrightarrow Mat_B\left(v^2\right) + 3Mat_B(v) = Mat_B(u) \\ & \Leftrightarrow Mat_B\left(v^2 + 3v\right) = Mat_B(u) \\ & \Leftrightarrow v^2 + 3v = u \end{aligned}$$

Remarquer ici que $u = v^2 + 3v$ est un polynôme en v donc u et v commutent.

b. Question : Vérifier que $uv = vu$ et en déduire que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k ; conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.

Les candidats n'ont pas pu exploiter le faite que E_k est une droite et utiliser la remarque suivante

$x \in vect(a) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}, x = \alpha a$

Réponse : On a

$$uv = (v^2 + 3v)v = v^3 + 3v^2$$

et

$$vu = v(v^2 + 3v) = v^3 + 3v^2$$

donc

$$uv = vu$$

On a pour $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$uv(e_k) = vu(e_k) = v(\lambda_k e_k) = \lambda_k v(e_k)$$

donc

$$v(e_k) \in E_k = vect(e_k)$$

donc

$$v(e_k) \text{ est colinéaire à } e_k$$

d'ou

$$\exists \alpha_k \in \mathbb{R}, v(e_k) = \lambda_k e_k$$

et on conclut que

$$Mat_{\{e_1,e_2,e_3\}} v = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

c. Question : On pose $V = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Exprimer Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de α_1, α_2 et α_3 ainsi que celles de la matrice B.

Réponse : On a $Mat_{\{e_1,e_2,e_3\}}v = V$ et $Mat_{\{e_1,e_2,e_3\}}u = \Delta$
et $u = v^2 + 3v$ et en passant aux matrices dans la base (e_1, e_2, e_3) ona

$$\Delta = V^2 + 3V$$

ce qui est equivalent à

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + 3\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 + 3\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + 3\alpha_1 & = & 10 \\ \alpha_2^2 + 3\alpha_2 & = & 4 \\ \alpha_3^2 + 3\alpha_3 & = & 0 \end{cases}$$

et par suite on a les solutions

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \quad ou \quad \alpha_1 = -5 \\ \alpha_2 = 1 \quad ou \quad \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 0 \quad ou \quad \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

6. **Question :** Combien de solutions l'équation $X^2 + 3X = A$ admet-t-elle dans $M_3(\mathbb{R})$?

Réponse : Si X est solution de l'equation $X^2 + 3X = A$ d'après l'étude précédente X serait semblable à

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \alpha_1 = 2 \quad ou \quad \alpha_1 = -5 \\ \alpha_2 = 1 \quad ou \quad \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 0 \quad ou \quad \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

et on a 8 possibilités pour Δ donc 8 solutions de l'equation $X^2 + 3X = A$, Et réciproquement les solutions trouvés vérifient aisément l'equation.

Problème

Partie 1

Les opérateurs D et $\mathcal{D}$ n'ont pas de places ici ils concernent l'épreuve MP de même année.

Dans ce problème, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{D}$ l'opérateur dérivation définie sur cette espace vectoriel par : $\mathcal{D}(f) = f', f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de même, $\mathbb{C}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficient complexe à une indéterminée et $\mathcal{D}$ l'opérateur dérivation définie sur cette espace vectoriel par : $D(P) = P', P \in \mathbb{C}[X]$.
On rappelle que $\mathcal{D}$ et D sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement.

Si $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ est un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$, on lui associe l'équation différentielle linéaire homogène noté $(\mathcal{E}_P)$ suivante :

$$a_ny^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \qquad (\mathcal{E}_P)$$

Par solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_P)$ on fait référence à toute application : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, n-fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_nf^{(n)} + \ldots + a_1f' + a_0f = 0$$

1.1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}| \{0\}$ *et* $R = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{C}[X]$ *un polynôme de degré* $n \geqslant 0$.

1.1.1. *On suppose qu'il existe* $R_1 \in \mathbb{C}[X]$ *tel que* $R_1' + \alpha R_1 = R$.

1.1.1.1. **Question :** En utilisant une propriété relative au degré des polynômes, montrer que le degré de R_1 est n.

- La propriété demandé : $deg(P+Q) \leqslant$ max$(deg(P), deg(Q))$ et on a toujours si $deg(P) \neq deg(Q)$ alors $deg(P+Q) =$ max $(deg(P), deg(Q))$ $P \neq 0 \Leftrightarrow deg(P) \geqslant 0$ $P = 0 \Leftrightarrow deg(P) = -\infty$

Ici on a traduit un système en écriture matricielle, le plus souvent les candidats ont l'habitude de passer de l'écriture matricielle en système.

Réponse : On a $R_1 \neq 0$ car $R \neq 0$ donc $R_1' \neq R_1$ et $\alpha \in \mathbb{C}| \{0\}$,$deg(R_1') < deg(\alpha R_1)$ donc $deg(\underbrace{R_1' + \alpha R_1}_{R}) = max(deg(R_1'), deg(R_1)) = deg(R_1)$

Donc : $deg(R_1) = deg(R) = n$.

1.1.1.2. **Question :** On écrit donc $R_1' = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k, b_n \neq 0$, expliciter les relations liant a_k et $b_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ et préciser la matrice T tel que $TX = Y$ où X (resp. Y) les vecteurs de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ de composantes $b_0, \ldots, b_n$ (resp $a_0, \ldots, a_n$).

Réponse : On a

$$\begin{aligned}
& R_1' + \alpha R_1 = R \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{n} kb_kX^{k-1} + \alpha \sum_{k=0}^{n} b_kX^k = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)b_{k+1} + \alpha b_k)X^k + \alpha b_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccl} \alpha b_n & = & a_n \\ ((k+1)b_{k+1} + \alpha b_k & = & a_k, \quad k \in \forall \{0, \ldots, n-1\} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On pose alors $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$

1.1.2. **Question :** Montrer que la matrice T est inversible et en déduire l'existence et l'unicité du polynôme $R_1 \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $R_1' + \alpha R_1 = R$; en plus R_1 a le même degré que R.

la solution de système donne les coefficients $b_0, \ldots, b_n$ de R_1 qu'on cherche en fonction des coefficients $a_0, \ldots, a_n$ de R qui est donné.

Réponse : On a $\det T = \alpha^n \neq 0$ car $\alpha \in \mathbb{C} | \{0\}$ donc le système linéaire $TX = Y$ admet une unique solution $X = T^{-1}Y$

1.2. Soit λ un nombre complexe et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

1.2.1. **Question :** Montrer que les solutions de l'equation differentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \longmapsto G(x)e^{\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $x \longmapsto g(x)e^{-\lambda x}$.

on multiplie par $e^{-\lambda x}$ et on a $e^{-\lambda x} \neq 0$ ce qui assure l'équivalence On peut utilisé la méthode du cours qui consiste calculer la solution de l'équation homogène y_h et chercher une solution particulière y_p et déduire la forme de la solutions générale $y = y_h + y_p$.

Réponse :

$$\begin{aligned}
y' - \lambda y = g &\Leftrightarrow e^{-\lambda x}y' - e^{-\lambda x}\lambda y = e^{-\lambda x}g(x) \\
&\Leftrightarrow (e^{-\lambda x}y(x))' = e^{-\lambda x}g(x) \\
&\Leftrightarrow e^{-\lambda x}y(x) = \int e^{-\lambda t}g(t)dt + cst \\
&\Leftrightarrow y(x) = e^{\lambda x}\left(\int e^{-\lambda t}g(t)dt + cst\right) \\
&\Leftrightarrow y(x) = e^{\lambda x}G(x)
\end{aligned}$$

avec $G(x) = \left(\int e^{-\lambda t}g(t)dt + cst\right)$ qui est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}g(x)$ sur $\mathbb{R}$ et par suite les solutions de l'equation différentielle sont de la forme $y(x) = e^{\lambda x}G(x)$.

1.2.2. **Question :** Dans cette question, on pose $g(x) = R(x)e^{\lambda x}, x \in \mathbb{R}$, où $R \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les solutions de l'equation differentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \longrightarrow S(x)e^{\lambda x}$ où S est un polynôme à coefficient complexe dont le polynôme dérivé est égal à R.

Réponse : D'après la question précédente on a les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $y(x) = S(x)e^{\lambda x}$ avec S une primitive de $x \mapsto e^{-\lambda x}g(x)$ on calcul alors S :

$S(x) = \int e^{-\lambda t}g(t)dt = \int e^{-\lambda t}(R(t)e^{\lambda t}) = \int R(t)dt.$

1.2.3. **Question :** Dans cette question, on pose $g(x) = R(x)e^{\mu x}, x \in \mathbb{R}$, où $\mu \in \mathbb{C}, \mu \neq \lambda$ et $R \in \mathbb{C}[X] | \{0\}$. Montrer que les solutions de l'equation differentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \longrightarrow R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$ où R_1 est un polynôme à coefficient vérifiant $R_1' + (\mu - \lambda)R_1 = R$ et c un paramètre complexe.

Réponse : D'après la question 1.2.1 on a les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $y(x) = G(x)e^{\lambda x}$ avec G une primitive de $x \mapsto e^{-\lambda x}g(x)$ et d'autre part on a $\lambda - \mu \neq 0$ donc d'après la question 1.1.2 il existe unique R_1 de même degré que R vérifiant $R_1' + (\mu - \lambda)R_1 = R$, on calcul alors G dans ce cas :

$$G(x) = \int e^{-\lambda t}g(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int e^{-\lambda t}(R(t)e^{\mu t})dt \\
&= \int R(t)e^{(\mu-\lambda)t}dt \\
&= \int (R_1'(t) + (\mu-\lambda)R_1(t))e^{(\mu-\lambda)t}dt \\
&= \int \left(R_1(t)e^{(\mu-\lambda)t}\right)' dt \\
&= R_1(x)e^{(\mu-\lambda)x} + c.
\end{aligned}$$

avec c une constante réel.
Par suite on a $y(x) = e^{\lambda x}G(x) = R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$.

Partie 2
Expression des solutions de l'equation differentielle $\mathcal{E}_P$

2.1. Cas où $P = (X-\lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Question : Montrer que dans ce cas, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de l'equation differentielle $\mathcal{E}_P$ si, et seulement si, il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $f(x) = R(x)e^{\lambda x}, x \in \mathbb{R}$. On pourra calculer la dérivée $n-$ième de la fonction $h : x \mapsto e^{-\lambda x}f(x)$.

Formule de Leibneiz : Si f est g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ on a $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$, un résultat qu'on montre par récurrence.

Réponse : On a d'après la formule de dérivation de Leibneiz :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, (e^{-\lambda x}f(x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) \left(e^{-\lambda x}\right)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)(-\lambda)^{n-k}e^{-\lambda x} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k(-\lambda)^{n-k}}_{a_k} f^{(k)}(x)e^{-\lambda x} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x)e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

et d'autre part $P = (X-\lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-\lambda)^{n-k}X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

On utilise le résultats qu'on peut montrer par une simple récurrence $g^{(n)} = 0 \Leftrightarrow g \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

Donc :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathcal{E}_P) &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x)e^{-\lambda x} = 0 \qquad (\textit{on multiplie par } e^{-\lambda x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow (e^{-\lambda x}f(x))^{(n)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}_{n-1}[X], e^{-\lambda x}f(x) = R(x) \\
&\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}_{n-1}[X], f(x) = R(x)e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X], Q \neq 0$; on pose $P = (X-\lambda)Q$ et on écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$$

2.2.1. **Question :** Montrer que les coefficients de P et Q vérifiant les relations

$$a_0 = -\lambda b_0, a_n = b_{n-1} \text{ et } a_k = b_{k-1} - \lambda b_k, 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Réponse :

$$\begin{aligned} P = (X-\lambda)Q &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (X-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^{k+1} - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} X^k - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k \\ &\Leftrightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n = -\lambda b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1} - \lambda a_k) X^k + b_{n-1} X^n \end{aligned}$$

on identifie les coefficients des polynômes des deux membres de l'égalité et on a le résultat.

2.2.2. **Question :** Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. À l'aide des relations précédentes montrer, en opérant un changement d'indice, que $\sum_{k=0}^{n-1} b_k (f' - \lambda f)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}$, puis en déduire que f est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_P$ si, et seulement si, $(f' - \lambda f)$ est solution de $\mathcal{E}_Q$.

Attention ! il ne faut pas substituer X par f directement dans la relation $(*)$ de la question 2.2.1. Car la puissance $f^{(k)}$ est au sens de dérivation et non au sens de composition.

Réponse : On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} b_k (f' - \lambda f)^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left((f')^{(k)} - \lambda f^{(k)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^{(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda b_k f^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} f^{(k)} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda b_k f^{(k)} \\ &= b_{n-1} f^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1} - \lambda b_k) f^{(k)} - \lambda b_0 f^{(0)} \\ &= a_n f^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k f^{(k)} + a_0 f^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} \end{aligned}$$

On fait le changement d'indice $k \longrightarrow k+1$ dans $\sum_{k=0}^{n} b_k f^{(k+1)}$

En déduire que :

$$
\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathcal{E}_P) &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} b_k (f' - \lambda f)^{(k)} = 0 \\
&\Leftrightarrow f' - \lambda f \text{ solution de } (\mathcal{E}_Q)
\end{aligned}
$$

2.3. **Question :** En faisant un raisonnement par récurrence, retrouver le résultat de la question 2.1. ci-dessus sans avoir recours à un calcul de dérivée $n-$ième.

Réponse : Montrons par récurrence sur n la propriété H_n :
"Pour tout polynôme de $P = (X - \lambda)^n$:
f est solution de $(\mathcal{E}_P) \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, tel que $f(x) = R(x)e^{\lambda x}, x \in \mathbb{R}$".
Vérification : $n = 1$ on a alors $P = X - \lambda$ et $(\mathcal{E}_P)$ devient $y' - \lambda y = 0$
On a f est solution de $(\mathcal{E}_P) \Leftrightarrow f' - \lambda f = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{\lambda x} = \underbrace{R(x)}_{=c} e^{\lambda x}$ avec $\deg(R) \leqslant 0$. Et donc la propriété est vérifier pour n=1.
Soit $n \geqslant 1$, supposons le résultat H_n est vérifier et montrons le résultat H_{n+1}.
On a $P = (X - \lambda)^{n+1}$ ce qu'on écrit $P = (X - \lambda)(X - \lambda)^n$, si on note $Q = (X - \lambda)^n$ on a $P = (X - \lambda)Q$ on a alors :

$$
\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathcal{E}_P) &\Leftrightarrow f' - \lambda f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_Q) \\
&\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}_{n-1}[X], f'(x) - \lambda f(x) = R(x)e^{\lambda x} \\
&\Leftrightarrow f(x) = S(x)e^{\lambda x},
\end{aligned}
$$

car d'une part $Q = (X - \lambda)^n$ on applique l'hypothèse de récurrence et d'autre part on applique la question 1.2.2. qui donne aussi que $S(x)$ est un polynôme primitive de R donc $S \in \mathbb{C}_n[X]$. D'ou le résultat H_{n+1} est vérifier, et par suite le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.4. **Question :** Un exemple : Déterminer les entiers qui sont racines du polynôme $P_1 = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$ puis le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$; donner l'expression des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{P_1})$.

On vient de résoudre une équation différentielle linéaire de degré 4 $(\mathcal{E}_{P_1})$: $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y' - y = 0$

Réponse : $P_1 = (X - 1)(X + 1)^3 = \underbrace{(X - \lambda)}_{\lambda=1} Q$ où $Q = \underbrace{(X + 1)^3}_{\lambda=-1}$.

$$
\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_{P_1}) &\Leftrightarrow f - f' \text{ solution de } (\mathcal{E}_Q) \\
&\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}_2[X], \text{ tel que } f'(x) - f(x) = R(x)e^{-x} \\
&\Leftrightarrow f(x) = R_1(x)e^{-x} + ce^{x}, R_1 \in \mathbb{C}_2[X], c \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Donc la forme des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{P_1})$:
$f(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-x} + ce^{x}$ où a_0, a_1, a_2, et c sont des complexes quelconques.

2.5. **Question :** Cas général :
On suppose ici que le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, où r est un entier $\geqslant 2, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls.
En faisant un raisonnement par récurrence sur le degré de P, montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_P)$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$, où $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$ pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$. On pourra exploiter le résultat de la question 2.2.2.

Réponse : On raisonne par récurrence sur le degré de P, puisque $r \geqslant 2$ on a $\deg(P) \geqslant 2$.
Alors on formule l'hypothèse de récurrence $H_n, n \geqslant 2$ par :
"Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) = n$ et $P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, où r est un entier $\geqslant 2, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls, les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_P)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$$

où $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$ pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$.
Vérification $n = 2$:
$\deg(P) = 2, P = (X-\lambda_1)\underbrace{(X-\lambda_2)}_{Q} = (X-\lambda_1)Q$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Méthode de superposition : Cette méthode consiste a résoudre une équation différentielle linéaire de la forme $y' + by = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ en résolvant les deux e.q.d $y' + by = f_1(x)$ et $y' + by = f_2(x)$ et la solution général de la première e.q.d est la combinaison linéaire des deux solutions obtenues en résolvant les deux dernières e.q.d. Cette méthode se généralise a des équation différentielle linéaire d'ordre supérieur et avec des second membres qui contient une combinaison linéaire de plus de deux fonctions

On a alors

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_P) &\Leftrightarrow f' - \lambda_1 f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_Q) : y' - \lambda_2 y = 0 \\ &\Leftrightarrow f' - \lambda_1 f = c_2 e^{\lambda_2 x} \\ &\Leftrightarrow f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (Question\ 1.2.3) \end{aligned}$$

On a alors $m_1 = 1, m_2 = 1, R_1 = c_1$ et $R_2 = c_2$ on a bien $\deg(R_i) = 0 = m_i - 1$.
Soit $n \geqslant 2$**, on suppose** H_n **vérifiée et on montre** H_{n+1}**.**
Soit alors un polynôme P tel que $\deg(P) = n+1, P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, où r est un entier $\geqslant 2, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls.
Pour cela on va discuter deux cas :
Cas 1 : $\exists k \in \{1, \ldots, r\}, m_k \geqslant 2$ on peut supposer $k = 1$ c-à-d $m_1 \geqslant 2$.

On pose $P = (X-\lambda_1)Q$ avec $Q = (X-\lambda_1)^{m_1-1}\prod_{k=2}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, on a alors

$$f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_P) \Leftrightarrow f' - \lambda_1 f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_Q)$$

$$\Leftrightarrow f' - \lambda_1 f = \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}, (H.R\ car\ \deg(Q) = n)$$

ici $R_1 \in \mathbb{C}_{m_1-2}$ et $\forall k \in \{2, \ldots, r\}, R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$
Et on applique la méthode de superposition qui consiste à résoudre les équations différentielles suivantes $\begin{cases} y_1' - \lambda_1 y_1 = R_1 e^{\lambda_1 x} \\ y_k' - \lambda_1 y_k = R_k e^{\lambda_k x}, k \in \{2, \ldots, r\} \end{cases}$ On utilisant les questions 1.2.2. et 1.2.3. on a

$$\begin{cases} y_1(x) = T_1(x)e^{\lambda_1 x}, T_1 \in \mathbb{C}_{m_1-1}[X] \\ y_k(x) = S_k(x)e^{\lambda_k x} + c_k e^{\lambda_1 x}, S_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}, k \in \{2, \ldots, r\} \end{cases}$$

et la solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_P)$ est la somme des solution obtenue $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{r} S_k(x)e^{\lambda_k x}$, avec $S_1(x) = T_1(x) + \underbrace{\sum_{k=2}^{r} c_k}_{constant}$.

Cas 2 : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, m_k = 1.$
Ceci veut dire que P est scindé à racines simple.
On pose $P = (X - \lambda_1)Q$ avec $Q = \prod_{k=2}^{n+1}(X - \lambda_k)$, on a alors

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_P) &\Leftrightarrow f' - \lambda_1 f \text{ est solution de } (\mathcal{E}_Q) \\ &\Leftrightarrow f' - \lambda_1 f = \sum_{k=2}^{n+1} R_k(x)e^{\lambda_k x}, (H.R\ car\ \deg(Q) = n) \end{aligned}$$

Avec R_k de degré $\leqslant m_k - 1 = 0$ c-a-d $R_k = c_k$ est une constante. Par la méthode de superposition et la question 1.2.3. on a les solutions de l'équation différentielles sont de la forme $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} c_k e^{\lambda_k x}$
D'où le résultat H_{n+1}.

2.6. **Question :** Montrer, en précisant l'énoncé du théorème utilisé, que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_P)$ ont toujours la forme des solutions trouvées dans la question 2.5. précédente. Quelle est alors la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{E}_P)$?

Le théorème de D'Alembert-Gauss ou encore dit le théorème fondamental de l'algèbre : Tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}$ admet une racine.

Réponse : D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, tout polynôme non constant P à coefficient dans $\mathbb{C}$ est scindé
c-à-d que $P = \alpha \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $\alpha \neq 0$
donc f vérifie l'equation $(\mathcal{E}_P)$ est équivalente à f vérifie l'eauqtion $(\mathcal{E}_{P_1})$ avec $P_1 = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_k}$ donc les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_P)$ sont exactement les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=0}^{m_k-1} a_{lk} x^l e^{\lambda_k x}$$

où $R_k = \sum_{l=0}^{m_k-1} a_{lk}X^l \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$

et on a les n fonctions $x \mapsto x^l e^{\lambda_k x}$ avec $1 \leqslant k \leqslant r$ et $0 \leqslant l \leqslant m_k - 1$ sont solutions de $(\mathcal{E}_P)$ (d'aprés 2.5. ici $R_k = X^l$) on a l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_P)$ est

$$\text{vect}\{x \mapsto x^l e^{\lambda_k}, 1 \leqslant k \leqslant r \ \text{ et } \ 0 \leqslant l \leqslant m_k - 1\}$$

On peut montrer la liberté de cette famille par récurrence sur k.

qui est un sev de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et comme fonctions $x \mapsto x^l e^{\lambda_k x}$ avec $1 \leqslant k \leqslant r$ et $0 \leqslant l \leqslant m_k - 1$ forment une famille libre de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

donc cette sev est de dimension $\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=0}^{m_k-1} = \sum_{k=1}^{r} m_k = n$.

2.7. **Question :** Un autre exemple : Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{P_2})$ où $P_2 = X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1$, sachant que 1 est racine triple de P_2.

Réponse : On a $P = (X^2+1)^2(X-1)^3 = (X-i)^2(X+i)^2(X-1)^3$ les solutions sont alors de la forme

$$x \mapsto R_1(x)e^{ix} + R_2(x)e^{-ix} + R_3(x)e^x$$

où $R_1, R_2 \in \mathbb{C}_2[X]$ et $R_3 \in \mathbb{C}_3[X]$

On a $x \mapsto e^{ix} et x \mapsto e^{-ix}$ sont solutions de $(\mathcal{E}_{P_2})$ donc $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ le sont aussi par combinaison linéaire, et on construit une base de l'espace des solution à l'aide des fonctions a valeurs réelles.

Et on peut écrire les solutions réelles sous la forme

$$x \mapsto R_1(x)\cos(x) + R_2(x)\sin(x) + R_3(x)e^x$$

Remarques : :

L'étude précédente peut se faire de la façon suivante :

Soient $n \geqslant 1$ et P un polynôme de degré n donc $a_n \neq 0$

Alors l'equation $(\mathcal{E}_P)$ est équivalente à $y^{(n)} = b_{n-1}y^{(n-2)} + \ldots + b_0 y$ avec $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, b_i = \dfrac{-a_i}{a_n}$.

Et pour tout y $n-$fois dérivable on pose

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & 1 \\ b_0 & a_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

on a Y est une fonction vectoriel de classe C^1 car ses fonction composante le sont et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$.

Donc : l'équation différentielle $(\mathcal{E}_P)$ est équivalente à $AY = Y'$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et d'autre part l'application $y \longrightarrow (y, y' \ldots, y^{(n-1)})$ est un isomorphisme de l'ensemble des solutions

de l'équation $(\mathcal{E}_P)$ dans l'espace des solutions de l'équation $Y' = AY$ qui est d'après le théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire un espace vectoriel de dimension n.
Et comme $A \in M_n(\mathbb{C})$ on la trigonalise et on calcul les solutions de $Y' = AY$ par la méthode de remonté et on trouve la forme des solutions déjà trouvés

Partie 3

Soit f une fonction dérivable.
pour tout réel τ, on désigne par f_τ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_\tau(x) = f(x+\tau)$; on note $E_f = Vect(\{f_\tau; \tau \in \mathbb{R}\})$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendre par les fonctions f_τ lorsque τ décrit $\mathbb{R}$.
3.1. Exemples

3.1.1. **Question :** On considère la fonction $h_1 : x \longmapsto xe^{2x}$. Montrer que E_{h_1} est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions h_1 et $h_2 : x \longmapsto e^{2x}$. Quelle est sa dimension ?

Réponse : $\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,
$h_{1,\tau}(x) = h_1(x+\tau) = (x+\tau)e^{2(x+\tau)} = e^{2\tau}xe^{2x} + \tau e^{2\tau}e^{2x}$
donc : $h_{1,\tau} \in \text{vect}\{x \mapsto xe^{2x}, x \mapsto e^{2x}\} = \text{vect}\{h_1, h_2\}$
donc : $E_{h_1} = \text{vect}\{h_{1,\tau}, \tau \in \mathbb{R}\} \subset \text{vect}\{h_1, h_2\}$
pour $\tau = 0$ on a $h_1 = h_{1,0}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, h_2(x) = e^{2x} = \dfrac{e^2(1+x)e^{2(1+x)} - (2+x)e^{(2x+4)}}{-e^4} = \dfrac{e^2 h_{1,2}(x) - h_{2,2}(x)}{-e^4}$
donc $h_1, h_2 \in E_{h_1}$ par suite $\text{vect}\{h_1, h_2\} \subset E_{h_1}$.
d'ou : $E_{h_1} = \text{vect}\{h_1, h_2\}$
d'autre part on a (h_1, h_2) est libre, en effet :
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha h_1 + \beta h_2 = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, \alpha xe^{2x} + \beta e^{2x} = 0$
alors pour $x = 0$ on trouve $\beta = 0$
et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha h_1(x) = 0$ et si on prend $x = 1$ on a $\alpha = 0$
et finalement (h_1, h_2) est libre donne $\dim E_{h_1} = \dim \text{vect}\{h_1, h_2\} = 2$.

3.1.2. **Question :** On considère la fonction $h_3 : x \longmapsto \cos(x)e^{3x}$. Montrer que E_{h_3} est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions h_3 et $h_4 : x \longmapsto \sin(x)e^{3x}$. Quelle est sa dimension ?

Réponse : $\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_{3,\tau}(x) &= h_3(x+\tau) \\ &= \cos(x+\tau)e^{3(x+\tau)} \\ &= \underbrace{e^{3\tau}\cos(\tau)}_{\alpha}\cos(x)e^{3x} \underbrace{-e^{3\tau}\sin(\tau)}_{\beta}\sin(x)e^{3x} \\ &= \alpha h_3(x) + \beta h_4(x) \end{aligned}$$

donc : $h_{3,\tau} \in \text{vect}\{h_3, h_4\}$
donc : $E_{h_1} = \text{vect}\{h_{1,\tau}, \tau \in \mathbb{R}\} \subset \text{vect}\{h_1, h_2\}$
pour $\tau = 0$ on a $h_3 = h_{3,0}$ et $\tau = \pi$ on a $h_4 = e^{3\frac{\pi}{2}}h_{3,-\frac{\pi}{2}}$
donc $h_3, h_4 \in E_{h_3}$ par suite $\text{vect}\{h_3, h_3\} \subset E_{h_3}$.
d'ou : $E_{h_3} = \text{vect}\{h_3, h_4\}$ Comme (h_3, h_4) est libre on a $\dim E_{h_3} = 2$.

On se propose dans la suite de cette partie de caractériser f pour que E_f soit de dimension 2. Pour cela, On suppose donc que E_f est de dimension finie 2 et on note (φ_1, φ_2) une base de E_f.

3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = n(f(x + \dfrac{1}{n}) - f(x)), x \in \mathbb{R}$

3.2.1. **Question :** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n \in E_f$ et justifier qu'il existe des réels $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}$ tels que $g_n = \alpha_{1,n}\varphi_1 + \alpha_{2,n}\varphi_2$ (1)

Réponse : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ on a $g_n = n(f_{\frac{1}{n}} - f) \in E_f$ et comme (φ_1, φ_2) est une base de E_f on a $\exists \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n} \in \mathbb{R}$, tels que $g_n = \alpha_{1,n}\varphi_1 + \alpha_{2,n}\varphi_2$

3.2.2. **Question :** Montrer que, pour tout réel x, la suite réelle $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f'(x)$.

Réponse : Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ et comme f est derivable sur $\mathbb{R}$ elle est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g_n(x)$ tend vers $f'(x)$ quand n tend vers $+\infty$

3.3. On veut montrer que $f' \in E$, pour cela on va étudier les suites $(\alpha_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha_{2,n})_{n\geqslant 1}$

3.3.1. **Question :** Justifier que la fonction φ_1 n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et en déduire qu'il existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_1(a_1) \neq 0$. Montrer de plus que la fonction $x \longmapsto \varphi_2(x)\varphi_1(a_1) - \varphi_1(x)\varphi_2(a_1)$, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas identiquement nulle puis en déduire qu'il existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $M = \begin{pmatrix} \varphi_1(a_1) & \varphi_2(a_1) \\ \varphi_1(a_2) & \varphi_2(a_2) \end{pmatrix}$ soit inversible.

Réponse : On a (φ_1, φ_2) est une base de E_f.
donc $\varphi_1 \neq 0$ d'ou $\exists a_1 \in \mathbb{R}, \varphi_1(a_1) \neq 0$.
Supposons que la fonction $h : x \longmapsto \varphi_2(x)\varphi_1(a_1) - \varphi_1(x)\varphi_2(a_1)$ est nulle on a $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_2(x)\varphi_1(a_1) - \varphi_1(x)\varphi_2(a_1) = 0$.
donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_2(x) = \dfrac{\varphi_2(a_1)}{\varphi_1(a_1)}\varphi_1(x)$ donc $\varphi_2 = \dfrac{\varphi_2(a_1)}{\varphi_1(a_1)}\varphi_1$
d'où : (φ_1, φ_2) est lié ce qui est absurde.
donc la fonction $h : x \longmapsto \varphi_2(x)\varphi_1(a_1) - \varphi_1(x)\varphi_2(a_1)$ est nulle
donc $\exists a_2 \in \mathbb{R}, h(a_2) \neq 0$
d'ou $\varphi_2(a_2)\varphi_1(a_1) - \varphi_1(a_2)\varphi_2(a_1) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a_1) & \varphi_2(a_1) \\ \varphi_1(a_2) & \varphi_2(a_2) \end{vmatrix} \neq 0$

3.3.2. **Question :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \begin{pmatrix} g_n(a_1) \\ g_n(a_2) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,n} \end{pmatrix}$. Vérifie que $Z_n = MY_n$ et en déduire l'expression de $\alpha_{1,n}$ et $\alpha_{2,n}$ en fonction de $g_n(a_1), g_n(a_2)$ et des coefficients de la matrice M.

Réponse : On a : $g_n = \alpha_{1,n}\varphi_1 + \alpha_{2,n}\varphi_2$
donc :

$$\begin{cases} g_n(a_1) = \alpha_{1,n}\varphi_1(a_1) + \alpha_{2,n}\varphi_2(a_1) \\ g_n(a_2) = \alpha_{1,n}\varphi_1(a_2) + \alpha_{2,n}\varphi_2(a_2) \end{cases}$$

donc : $Z_n = MY_n$ et comme M est inversible on a $Y_n = M^{-1}Z_n$

Important : L'inverse d'une matrice de taille 2 : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det M \neq 0$ on a $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

donc :

$$(S)\quad \begin{cases} \alpha_{1,n} = \dfrac{1}{\det M}\left(\quad g_n(a_1)\varphi_2(a_2) - g_n(a_2)\varphi_2(a_1)\right) \\ \alpha_{2,n} = \dfrac{1}{\det M}\left(-g_n(a_1)\varphi_1(a_2) + g_n(a_2)\varphi_1(a_1)\right) \end{cases}$$

3.3.3. **Question :** Montrer alors que les suites $(\alpha_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha_{2,n})_{n\geqslant 1}$ sont convergentes puis en déduire que $f' \in E_f$. On pourra exploiter la relation (1) et faire tendre n vers $+\infty$.

Réponse : On a les deux suites $(\alpha_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha_{2,n})_{n\geqslant 1}$ s'écrivent en fonction de $(g_n(a_1))$ et $(g_n(a_2))$ d'apres le système (S) et $(g_n(a_1))$ et $(g_n(a_2))$ convergent donc : par opération sur les suites convergentes les suites $(\alpha_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha_{2,n})_{n\geqslant 1}$ convergent, on note respectivement α et β leurs limites.
Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\lim\limits_{n+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n+\infty}(\alpha_{1,n}\varphi_1(x) + \alpha_{2,n}\varphi_2(x)) = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$
et d'autre part d'apres la question 3.2.2. $\lim\limits_{n+\infty} g_{(x)} = f'(x)$,
l'unicité de la limite donne $f'(x) = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$
ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $f' = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in E_f$, car φ_1 et φ_2 forment une base de E_f.

3.4. **Question :** Montrer plus généralement que si $h \in E_f$ alors h est dérivable et $h' \in E_f$, puis en déduire que E_f est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

E un $\mathbb{K}-$ev et $A \subset E$. La notion de sous espace vectoriel engendré par une partie $vect(A)$ est très importante et on distingue deux cas : A fini et A quelconque. Si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, n un entier naturel donné on a $x \in$ vect(A) signifie que : $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$
Si A quelconque alors $x \in$ vect(A) signifie que : $\exists n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

Réponse : On a $\forall \tau \in \mathbb{R}, f_\tau$ est la composée de f et de la fonction $x \mapsto x + \tau$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$. donc $\forall \tau \in \mathbb{R}, f_\tau$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et on a pour tout $h \in E_f$, h s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la famille $(f_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}}$, c-à-d
$\exists k \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $h = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_{\tau_i}$ donc h est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f'_{\tau_i}$.
Or $\varphi_1 \in E_f$ donc $\exists k \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $\varphi_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_{\tau_i}$
donc $\forall \tau, \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x+\tau) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_{\tau_i}(x+\tau) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_{\tau_i+\tau}(x)$
donc l'application $x \mapsto \varphi_1(x+\tau) \in E_f$ idem $x \mapsto \varphi_2(x+\tau) \in E_f$
Or D'apres la question 3.3.3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$
donc $\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f'_\tau(x) = f'(x+\tau) = \alpha\varphi_1(x+\tau) + \beta\varphi_2(x+\tau)$
ce qui donne $f'_\tau \in E_f$ et par suite $h' = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f'_{\tau_i} \in E_f$.
et par récurrence on trouve que si $h \in E_f$ alors h est indéfiniment dérivable d'ou E_f est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.5. **Question :** Justifier que (f, f', f'') est une famille liée de E_f et en déduire que la fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux é coefficients constants. en déduire une expression de f, selon les cas, puis vérifier que ces fonctions répondent bien à la question.

On a card$(f, f', f'') = 3 > 2 = \dim E_f$ donc la famille ne peut être libre donc la famille est liée, d'où il existe a_0, a_1, a_2 des réels non tous nuls tels que $a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = 0$. Par suite f vérifie l'equation differentielle $(\mathcal{E}_P)$ avec $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$.
D'après l'étude précédente, et en tenant compte que ici on cherche des fonctions réelles, on a f est sous l'une des formes :
Si $a_2 = a_1 = 0 (\mathcal{E}_P) \Leftrightarrow a_0 y = 0$ donc $a_0 \neq 0$ par suite $f = 0$.
Si $a_2 = 0$ et $a_1 \neq 0, (\mathcal{E}_P) \Leftrightarrow a_1 y' + a_0 y = 0$
alors $f(x) = ce^{\lambda x}, \lambda = \dfrac{-a_0}{a_1}$.
Si $a_2 \neq 0$, on les trois cas suivants :
Si $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2), \lambda_1 \neq \lambda_2$ on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
Si $P = (X - \lambda)^2$ on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$
Si $P = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda}), \lambda = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$.

$\mathcal{FIN}$