Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

EXERCICE

1) $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0 \Longleftrightarrow h = Cte$ qui ne dépond pas de v mais seulement de u, donc $h(u,v) = h_1(u)$, comme h est de classe $\mathcal{C}^1$, alors h_1 l'est aussi.

2) a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1 : (u,v) \mapsto ue^v$ et $\Phi_2 : (u,v) \mapsto e^{-v}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, $\forall (x,y) \in \Omega, \exists! v = -\ln y \in \mathbb{R}$ tel que : $y = e^{-v}$ et $\exists! u = xy \in \mathbb{R}$ tel que : $x = ue^v$, donc $\exists!(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x,y) = \Phi(u,v)$, et donc Φ est bijective.

b) D'aprés ce qui précède, on a : $\Phi^{-1}(x,y) = (xy, -\ln y)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, car ses fonctions coordonnées associées Φ_1^{-1} : $(x,y) \mapsto xy$ et $\Phi_2 : (x,y) \mapsto -\ln y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3) a) $f^* = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Omega$, avec les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial y} = e^v \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial y} = ue^v \frac{\partial f}{\partial x} - e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) D'aprés la question précèdente, on a :
$\dfrac{\partial f^*}{\partial v} = ue^v \dfrac{\partial f}{\partial x} - e^{-v}\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $f^*(u,v) = F(u)$ et par suite $f(x,y) = f \circ \Phi(u,v) = f^*(u,v) = F(u) = F(xy)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

4) a) Les application linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent sous la $g(x,y) = \alpha x + \beta y$, donc $x\dfrac{\partial g}{\partial x} - y\dfrac{\partial g}{\partial y} = ax + by \Longleftrightarrow \alpha x - \beta y = a$ prendre donc $g(x,y) = ax - by$.

b) La solution générale, f de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = ax + by$, sous la forme $f = f_H + g$, où $f_H(x,y) = F(xy)$ est la solution g de l'équation homegène sans second membre, et $g(x,y) = a$ une solution particulière de l'équation avec second membre.

PROBLÉME.

Première partie

1) a) Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1 + t + o(t)$, donc $\dfrac{e^{-at} -}{t}$ $b - a + o(1) \sim b - a$ intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, donc $\dfrac{e^{-at} -}{t}$ $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b) $I(a,b) = -I(b,a)$, trés evident.
Posons : $u = ta$, donc :
$I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u}du = I\left(1, \right.$

c) i. L'application : $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est contin $[1, +\infty[\times \mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions co

qui ne s'annule pas. En $(x,0)$ on a : $f(x,t) \sim x-1$ continue, donc f est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$.
D'autre part : pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a :
$\left|\dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\right| = \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}-e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$, donc φ est continue sur $[1,+\infty[$.

ii. Pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

iii. D'aés le raisonnement fait dans la question précédente, on a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d) Si $b \geq a$, alors $x = \frac{b}{a} \geq 1$, donc $I(a,b) = I(1,\frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Si $b \leq a$, alors $x = \frac{a}{b} \geq 1$, donc :
$I(a,b) = -I(b,a) = -I(1,\frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Conclusion : $I(a,b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) a) Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t+o(t)$, d'où $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour $x \in [0,1]$ fixé, on vérifie faciulement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en prticulier la majoration du reste par son 1ér terme, donc $\left|\displaystyle\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right.$

$\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément ve
par suite la convergence de la série sur $[0,1]$ est uniforme.

d)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt \quad \text{D'aprés 2.2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt
\end{aligned}$$
Car la convergence est uniforme sur $[0,1$
$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}
\end{aligned}$$
On divise la somme en deux $n = 2p, n =$
$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}
\end{aligned}$$
Car $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}$
$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$
Car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$
$$= \frac{\pi^2}{12}$$

Deuxième partie

1) a) g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.
On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x) = f(c) \longrightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b) $\sqrt{f} \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geq 0$.
D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura :

$$\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \leq \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} \quad .$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

2) a) Il est clair que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b)
$$\begin{aligned} f \in \text{ Ker } (\psi) &\Longrightarrow \psi(f)(x) = 0,\ \forall x > 0 \\ &\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x > 0 \\ &\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0,\ \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

Donc ψ est injective.

c) D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x - 1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

3) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér o
coéfficients non constant, dont la solution est :

$$f(x) = Ke^{-\int_0^x \frac{\lambda - 1}{\lambda}tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

b) f est prolongeable en 0^+ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to} f(x)$ es
si et seulement si $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ *si et seulement si* $0 < \lambda \leq 1$.

4) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injecti

b) Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi$
$\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer qu
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c) Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f$
$\lambda f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité
tient : $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont :
$f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0, +\infty[$ pour tout $\lambda \in]0, 1]$.

Troisième partie

1) a) Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de C
Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$$

$$\leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, do
partient à E_2, d'autre part, soit $(f, g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intég
donc $f + \lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectorie

c) – Symétrie : $(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = ($

– Bilinéarité : $(f+\lambda g,h)=(f,h)+\lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.

– Positive : $(f,f)=\int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$.

– Définie : $(f,f)=0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f^2(t)dt=0 \Longrightarrow f^2=0$, car f^2 continue positive, donc $f=0$.

2) a) $\frac{g^2(t)}{t}=g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0)=0$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0)=0$.

b) $\frac{g^2(t)}{t^2}=(\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt=\int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u=g^2(t), v'=\frac{1}{t^2}$, donc $u'=2g'(t)g(t)$ et $v=-\frac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&\quad \text{car : } \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{g^2(t)}{t}=0 \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\
&\quad \text{car : } g'(t)=f(t), \frac{g(t)}{t}=\psi(f)(t)
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leq 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'aprés (1)} \qquad , \\
&\leq 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt=0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier on obtient encore le résultat demandé.

d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$

e) D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc nue.

3) a)

b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4)
$$\begin{aligned}
||\psi(f)-2f||^2 &= (\psi(f)-2f,\psi(f)-2f) \\
&= (\psi(f),\psi(f))-4(\psi(f),f)+4(f,f) \\
&= ||\psi(f)||^2-4(\psi(f),f)+4||f||^2 \\
&= -4(\psi(f),f)+8||f||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)||=2||f|| \\
&= -4(\psi(f),f)+2||\psi(f)||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)||=2||. \\
&= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}
\end{aligned}$$

Donc $\psi(f)-2f=0$, ainsi si $f\neq 0$, on aurait 2 est une valeur pr ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0,1]$.

5) a) $f_a^2(x)=e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec :
$||f_a||^2=\int_0^{+\infty} e^{-2ax}dx=\frac{1}{2a}$.

b) Pour $x\neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-at}dt=\frac{1-e^{-ax}}{ax}$.
Pour $x=0$, on a : $\psi(f_a)(0)=f_a(0)=1$.

$$\begin{aligned}
(f_a,\psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x)\psi(f_a)(x)dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx \\
&= \frac{1}{a}I(a,2a) \\
&= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{||\psi(f_a)||}{||f_a||}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a),\psi(f_a) \quad \text{D'aprés 1-1} \\
&= 4a(f_a,\psi(f_a)) \quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie} \quad . \\
&= 4\ln a
\end{aligned}$$

D'où : $\dfrac{||\psi(f_a)||}{||f_a||} = 2\sqrt{\ln a}$.

6) a) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{1+t}dt = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b) Au voisiange de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}
(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^{1} \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\
&= \int_0^{1} \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t} \\
&= \int_0^{1} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt
\end{aligned}$$

c) $(\ln t\ln(1+t))' = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= [\ln t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&\text{Intégration par parties avec :} \\
&\quad u = \ln(1+t) \quad v' = \frac{1}{t} \\
&\quad u' = \frac{1}{1+t} \qquad v = \ln t \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&\text{Car au voisinage de } 0^+ : \ \ln t\ln(1+t) \sim t\ln
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Fin.}}$