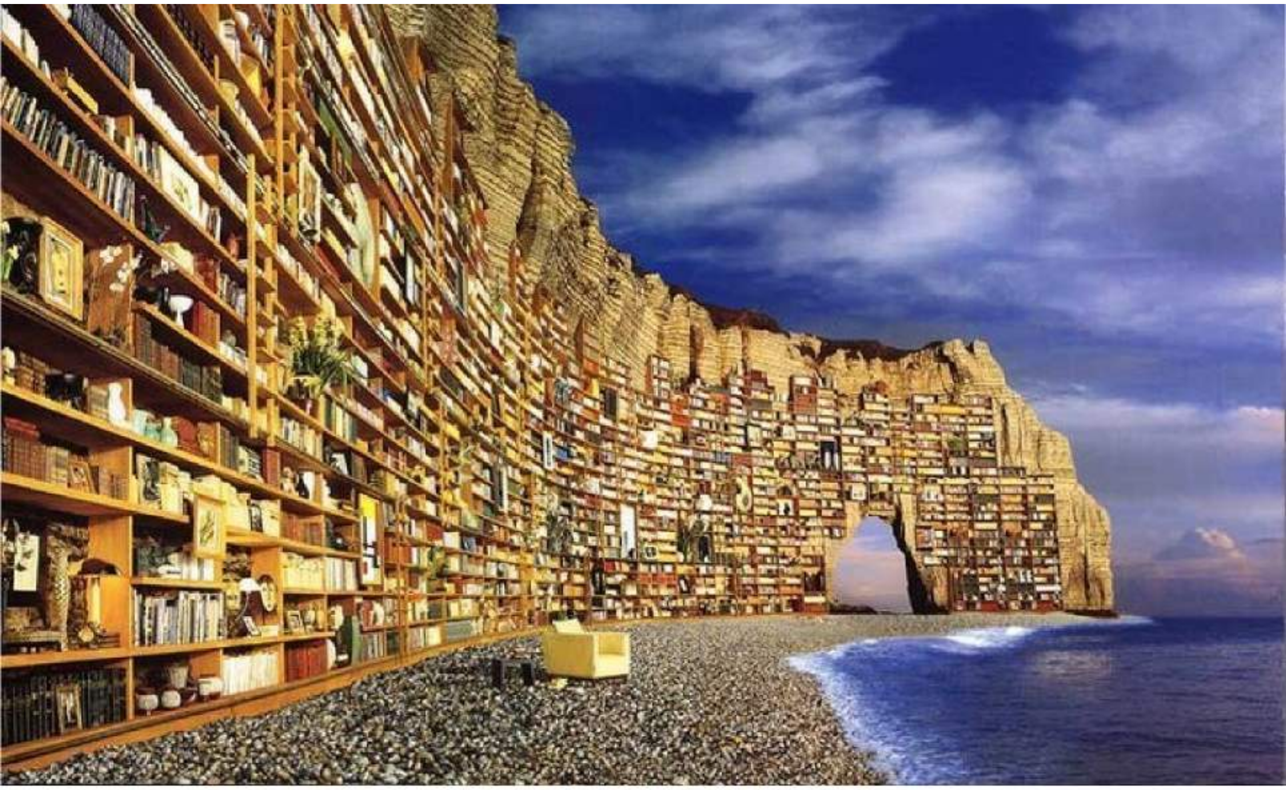
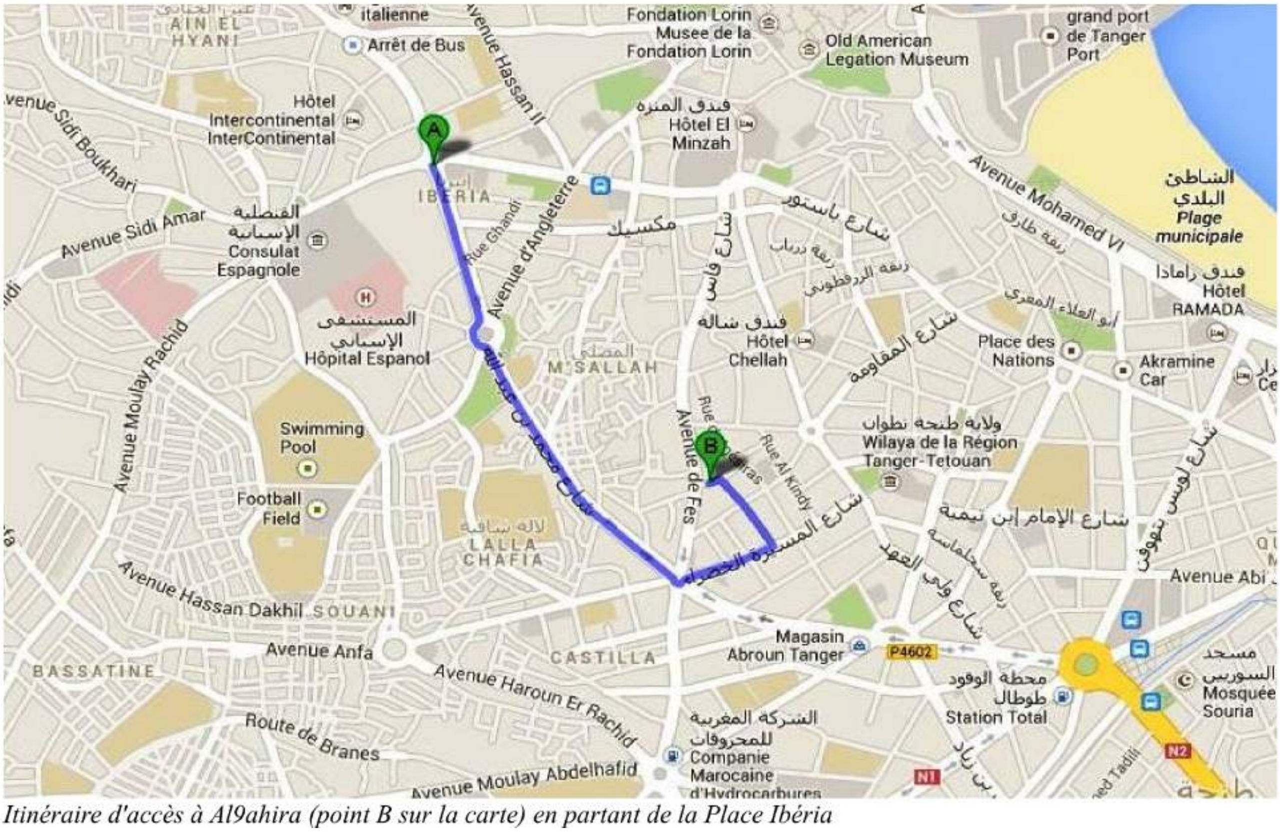


http://al9ahira.com/



Itinéraire d'accès à Al9ahira (point B sur la carte) en partant de la Place Ibéria

Corrigé

Filière PSI

I Première Partie

1 Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} 0 \text{ si } (a,b,c,d)=0 \\ 1 \text{ si } ad-bc=0, \text{ et } (a,b,c,d)\neq 0 \\ 2 \text{ si } ad-bc\neq 0 \end{cases}$

2 $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.a. De la définition du rang d'une matrice, $\text{rg}(A)=0$ si, et seulement si, le sous-espace véctoriel engendré par ses vecteurs colonnes est nul et cela équivaut á dire que $A=0$; par contre-apposée A n'est pas nulle $\text{rg}(A)\geqslant 1$.

2.b. Si A est inversible, les vecteurs colonnes $C_1(A),\ldots,C_n(A)$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim vect\left(C_1(A),\ldots,C_n(A)\right)=n$ c'est à dire $\text{rg}(A)=n$. Réciproquement, si $\text{rg}(A)=n$ la famille $(C_1(A),\ldots,C_n(A))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est inversible.

3 On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. On a

$$\text{rg}(f_A)=\dim(\text{Im}(\text{f}_A))$$

et comme $\text{Im}(\text{f}_A)=\text{vect}(C_1(A),\ldots,C_n(A))$ alors $\text{rg}(A)=rg(f_A)$.

4 **4.a.** On a $A=U.{}^tV=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v_1\ldots v_n \end{pmatrix}$; en notant $A=(a_{i,j})$ et en effectuant le produit matriciel $U.{}^tV$, on voit que $a_{k,\ell}=u_k v_\ell$ pour tout $(k,\ell)\in\{1,\ldots,n\}^2$.

4.*b*. Avec les notations de la question précèdente, on a :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^t VU$$

4.*c*. D'aprés la question (4.*a*), la $j^{ième}$ colonne de A est $C_j(A) = v_j U$.

4.*d*. $V \neq 0$ donc il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$; ainsi $C_{j_0}(A) = v_{j_0} U \neq 0$ puisque $U \neq 0$; on en déduit que $rg(A) \geqslant 1$. D'autre part, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $C_j(A) = v_j U = \dfrac{v_j}{v_{j_0}} C_{j_0}(A)$ cela montre que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$; d'où $\mathrm{rg}(A) = 1$.

5 **5.*a*.** La matrice A est de rang 1, donc non nulle d'où l'existence d'un i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.

5.*b*. On a $\mathrm{rg}(A) = \dim vect\left(\left(C_1(A), \ldots, C_n(A)\right)\right) = 1$, donc les colonnes de la matrice A sont toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; ainsi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

5.*c*. D'aprés la question (I.4.b) les vecteurs colonnes de A sont

$$\lambda_1 C_{i_0}(A), \ldots, \lambda_n C_{i_0}(A)$$

le calcul éffectué à la question (4.*a*) montre alors que $A = C_{i_0}(A).(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, c'est à dire que $A = X.{}^t Y$ avec $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

5.*d*. Si $A = X_0.{}^t Y_0 = X_1.{}^t Y_1$ et $\mathrm{rg}(A) = 1$, alors les vecteurs X_0, X_1, Y_0 et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0 = {}^t (y_1, \ldots, y_n)$, $Y_1 = {}^t (z_1, \ldots, z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$; or $C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_0 = z_{i_0} X_1$ donc $X_1 = \lambda X_0$ avec $\lambda = \dfrac{y_{i_0}}{z_{i_0}} \neq 0$. Par ailleurs, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $C_j(A) = y_j X_0 = z_j X_1 = \lambda z_j X_0$ donc $z_j = \dfrac{1}{\lambda} y_j$ et $Y_1 = \dfrac{1}{\lambda} Y_0$. Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien $(\lambda X_0).{}^t \left(\dfrac{1}{\lambda} Y_0\right) = X_0.{}^t Y_0 = A$. Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $\left(\lambda X_0, \dfrac{1}{\lambda} Y_0\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(A) = r > 0$; La matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r est la matrice identité d'ordre r, est de même rang r que A, alors les deux matrices sont dites équivalentes ce qui signifie que $A = PJ_r Q$ avec P, Q des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons E_{ij} la matrice de terme général $e_{k,l}$ avec $e_{k,l} = 1$ si $(k, l) = (i, j)$ et

$e_{kl} = 0$ sinon ; alors $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{ii}$ et par suite $A = P\left(\sum_{i=1}^{r} E_{ii}\right)Q = \sum_{i=1}^{r} PE_{ii}Q$, de plus $1 = rg\left(E_{ii}\right) = rg\left(PE_{ii}Q\right)$. puisque ces deux matrices sont équivalentes.

7 *7.a.* Si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_n$ sont tous nuls alors $\sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i = 0$. Réciproquement, si $\sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i = 0$ alors, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i\right).Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.\left({}^tZ_i.Z_j\right) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tZ_jZj)Y_i,$$

et comme les vecteurs $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendants, on obtient $\|Z_j\|^2 ={}^t Z_jZ_j = 0$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$; donc les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_n$ sont tous nuls.

7.b. Soit $\left(\lambda_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de réels tels que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_{ij}X_i.{}^tY_j = 0$ alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} X_i.\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.{}^tY_j\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i\ {}^t\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.Y_j\right).$$

La question précédente montre alors que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.{}^tY_j = 0$.

Par transposition on obtient $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.Y_j = 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

La famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$ étant libre, on déduit de ce qui préède que $\lambda_{ij} = 0$. pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$; cela montre que la famille $\left(X_i.{}^tY_j\right)_{i,j}$ est libre et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, cette famille en constitue une base.

8 *8.a.* La bilinéarité découle de la linéarité de la trace. Par ailleurs, on sait que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tM.N) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tM.N)) = \mathrm{Tr}({}^tN.M) = \langle N, M\rangle$; cela montre que la symétrie de la forme bilinéaire. Enfin, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M\rangle = \mathrm{Tr}({}^tM.M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} M_{ij}^2 \geqslant 0$, en plus

$$\langle M, M\rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} M_{ij}^2 = 0 \Longleftrightarrow M = 0.$$

Cela prouve que l'application $(M, N) \longmapsto \langle M, N\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8.b. Si X, X', Y et Y' sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\left\langle X.{}^tY, X'.{}^tY'\right\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t(X.{}^tY).\left(X'.{}^tY'\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(Y.{}^tX.X'.{}^tY'\right),$$

et comme ${}^tX.X' \in \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Tr}\left({}^tX.X'.Y.{}^tY'\right) ={}^tX.X'\mathrm{Tr}\left(Y.{}^tY'\right) = ({}^tX.X').({}^tY.Y')$.

Ainsi
$$\left\langle X.^tY, X'.^tY'\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow {}^tX.X' = 0 \text{ ou } {}^tY.Y' = 0.$$
On en déduit que les matrices $X.^tY$ et $X'.^tY'$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs X , X' ou les vecteurs Y, Y' sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

8.*c*. Si $(X_1,\dots,X_n)$, $(Y_1,\dots,Y_n)$ sont deux systèmes de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $\left(X_i.^tY_j\right)_{i,j}$ est orthonormée si et seulement si
$$\left\langle X_i.^tY_j \, , \, X_k.^tY_l\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j)=(k,l) \\ 0 & \text{si} \quad (i,j)\neq(k,l) \end{cases}$$
Or d'aprés le calcul précédent, on a $\left\langle X_i.^tY_j \, , \, X_k.^tY_l\right\rangle = {}^tX_i.X_k.^tY_j, Y_l$. Donc, pour que la famille $\left(X_i.^tY_j\right)_{i,j}$ soit orthonormée dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$, il suffit que les deux familles $(X_1,\dots,X_n)$, $(Y_1,\dots,Y_n)$ soient orthonormées dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

II Deuxième Partie

Soit $A = U.^tV$ une matrice de rang 1 , $\alpha = {}^tV.U$ et $W = \left({}^tVV\right).U$

1 On a : $A^2 = \left(U.^tV\right).\left(U.^tV\right) = U.\left({}^tV.U\right).^tV = \alpha A$

2 Une récurrence permet de conclure que $A^k = \alpha^{k-1}A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ c'est à dire si et seulement si $\alpha = 0$ puisque A est non nulle.

3 Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a
$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}A^2 = \frac{1}{\alpha^2}\alpha A = \frac{1}{\alpha}A,$$
donc la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ est celle d'un projecteur.

4 **4.*a*.** la matrice A est de rang 1 et comme $n \geqslant 2$ alors A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A ; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0, qui n'est rien d'autre que son noyau noté KerA, est par définition égal à
$$\left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;/\; AY = 0\right\} = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;/\; U^tVY = 0\right\}$$
Or, comme $U \neq 0$ on a l'équivalence $U^tVY = \left({}^tVY\right).U = 0 \Longleftrightarrow {}^tVY = 0$; on en déduit que $\mathrm{Ker}A = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;/\; {}^tVY = 0\right\}$ et d'aprés le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}A = n - rg(A) = n - 1$.

4.*b*. On a $AU = U^tVU = \left({}^tVU\right).U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A. Par ailleurs, le fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice est toujours inférieure ou égale à son ordre, adjoint au fait que $\dim \operatorname{Ker} A = n-1$ permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est de dimension 1 et ce sous-espace propre vaut $\mathbb{R}U$.

4.*c*. Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et 0 est son unique valeur propre.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est égale à n.

5 si $\alpha \neq 0$, d'aprés la question (4) , 0 et α sont les valeurs propres de A et la somme des dimensions de leur sous-espaces propres est égale à l'ordre de A, donc A est diagonalisable.

En prenant une base $(U_1, \dots, U_{n-1})$ de $\operatorname{Ker}(A)$ et une base (U_n) de $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ est $\operatorname{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$. Donc A est semblable à $\operatorname{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$ puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme f.

6 On suppose que $\alpha = 0$.

6.*a*. Comme 0 est la seule valeur propre de A, la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est nulle. Comme $A \neq 0$ alors A n'est pas diagonalisable.

6.*b*. $AU = \alpha U = 0$ donc $U \in \operatorname{Ker} f$ et comme le vecteur W est colinéaire à U et $W \neq 0$, le théorème de la base incomplète permet de compléter W en une base $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$ de $\operatorname{Ker} f$ qui est de dimension $n-1$.

6.*c*. On a $AV = U^tVV = ^t VV.U = W \neq 0$ donc $W \notin \operatorname{Ker} f$ et par suite la famille $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans la base $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6.*d*. Soit A une matrice de rang 1, d'après les questions (1.5.*c*) et (1.4.*b*), on peut écrire A sous la forme $A = U^tV$ où U, V sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{Tr}(A) = {}^tVU$; si plus A est de trace nulle, alors d'après la question (2.6.*c*), A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La transitivité de la relation de similitude permet enfin de conclure que deux matrices de rang 1 et de tarce nulle sont semblables.

III Troisième Partie

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^c sa comatrice et on rappelle la relation

$$A.{}^tA^c = {}^tA^c.A = \det A.I_n \quad (1)$$

1 **1.*a*.** $rg(A) = n$, donc A est inversible (d'aprés la question (1.2.*b*)) et $\det A \neq 0$, puis en multipliant l'égalité (1) précédente à droite par A^{-1}, on obtient ${}^tA^c = \det A.A^{-1}$. On en déduit que $rg(A^c) = rg\left({}^tA^c\right) = rg(A^{-1}) = n$ et enfin que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^tA^c$.

1.*b*. Si A est de rang $n-2$ alors comme les cofacteurs de A sont tous des déterminants d'ordre $n-1$, il découle du deuxième résultat admis que tous ces cofacteurs sont nuls, c'est à dire $A^c = 0$.

2 Si $rg(A) = n-1$.

2.*a*. D'aprés le premier résultat admis, on peut extraire de A une sous-matrice inversible A_1 qui soit d'ordre $n-1$; cette sous-matrice A_1 est obtenue à partir de A en éliminant une ligne i et une colonne j, donc $(A^c)_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_1 \neq 0$. On en déduit que la matrice A^c est non nulle et par conséquent $rg(A^c) \geqslant 1$.

2.*b*. On note f (resp g) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (resp à ${}^tA^c$) ; d'aprés la relation (1) on a $f \circ g = g \circ f = \det A.Id = 0$ et cette dernière relation montre que $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Ker} f$.

On peut donc conclure que $rg(A^c) = rg({}^tA^c) = \dim \mathrm{Im} g \leqslant \dim \mathrm{Ker} f = 1$ et comme $rg(A^c) \geqslant 1$ on a bien $rg(A^c) = 1$.

3 On rappelle que si I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des applications dérivables de I vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors l'application $\phi : t \longmapsto \det\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$ est dérivable, avec

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$$

3.*a*. On déduit ainsi que l'application $P_A : t \longmapsto \det\left(C_1(A) - te_1, \ldots, C_n(A) - te_n\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$P'_A(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(C_1(A) - te_1, \ldots, C_{k-1}(A) - te_{k-1}\,,\ -e_k\,,\ C_{k+1}(A) - te_{k+1}, \ldots, C_n(A) - te_n\right)$$

3.*b*. On a

$$P'_A(0) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(C_1(A), \ldots, C_{k-1}(A)\,,\ -e_k\,,\ C_{k+1}(A), \ldots, C_n(A)\right)$$

En développant, pour chaque k le déterminant

$$\det\Big(C_1(A),\dots,C_{k-1}(A)\ ,\ -e_k\ ,\ C_{k+1}(A),\dots,C_n(A)\Big)$$

par rapport à la k-ième colonne on trouve l'opposé du cofacteur $\Delta_{k,k}$ de la matrice A. D'où $P'_A(0) = -\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,k} = -\mathrm{Tr}(A^c)$.

4 A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; soit P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

4.*a*. On a
$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(PBP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}PB\right) = \mathrm{Tr}(B)$,
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(P^{-1}BP\right) = \mathrm{rg}(BP) = \mathrm{rg}(B)$ (car P est inversible)

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(A - tI_n) = \det\left(PBP^{-1} - tI_n\right) = \det\left(P(B - tI_n)P^{-1}\right) \\ &= \det(B - tI_n) = P_B(t) \end{aligned}$$

4.*b*. D'après la question $(3.3.b)$, $\mathrm{Tr}(A^c) = -P_A(0) = -P_B(0) = \mathrm{Tr}(B^c)$.

4.*c*. Si A est de rang n, alors inversible, il en est de même pour B de plus

$$A^c = \det A^t\left(A^{-1}\right) = \det A^t\left(PB^{-1}P^{-1}\right) = \det A^t\left(P^{-1}\right){}^tB^{-1\,t}P$$

et comme $\det A = \det B$, ${}^tP^{-1} = \left({}^tP\right)^{-1}$ et $B^c = \det B.{}^tB^{-1}$ alors $A^c = {}^tP.(B^c).\left({}^tP\right)^{-1}$ donc A^c et B^c sont semblables.

4.*d*. Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors, puisque $\mathrm{rg}(A) = rg(B)$, d'après la question $(3.1.b)$, $A^c = B^c = 0$ donc les matrices A^c et B^c sont égales donc semblables.

4.*e*. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors d'après la question $(3.2.b)$, $\mathrm{rg}(A^c) = \mathrm{rg}(B^c) = 1$. Posons $\alpha = \mathrm{Tr}(A^c) = \mathrm{Tr}(B^c)$.

i) Si $\alpha \neq 0$, alors on déduit de la question (2.5), que A^c est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(0,\dots,0,\alpha)$; de même B^c est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(0,\dots,0,\alpha)$, donc les matrices A^c et B^c sont semblables.

ii) Si $\alpha = 0$, alors les matrices A^c et B^c sont de rang 1 et de trace nulle donc semblables d'après la question $(2.6.d)$.

FIN DU CORRIGÉ