ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Définitions et notations

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x, on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt,$$

lorsque cette quantité a un sens.

Quand elle est définie, la fonction $\hat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f.

I. ÉTUDE D'UN PREMIER EXEMPLE

1. Soit x un réel strictement positifs. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.

2. Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

   (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

   (b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ'.

3. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\, \varphi(|x|).$$

   (a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   (b) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi}(x)$ a un sens et que

$$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt)\, dt.$$

   (c) Montrer que, pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\, dt,$$

   et calculer $\widehat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\ dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$, pour tout $x > 0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégrale.

   (b) En déduire soignesement que pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

II. UN AUTRE EXEMPLE

1. Soient $\alpha,\ \beta$ et A des réels avec $A > 0$.

   (a) Calculer l'intégrale

$$\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}\ dt.$$

   (b) En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^A e^{\alpha t} \cos \beta t\ dt \quad \text{et} \quad \int_0^A e^{\alpha t} \sin \beta t\ dt.$$

   (c) Si p est un réel strictement positif, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-pt} \cos \beta t$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et expliciter, à l'aide de β et de p, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos \beta t\ dt.$$

2. Montrer que la fonction $h :\ t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que pour tout réel x,

$$\hat{h}(x) = 2 \int_0^{+\infty} h(t) \cos xt\ dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\hat{h}(x) = 4 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt)\ dt + 4(-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} \cos(xt)\ dt.$$

   (c) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} \cos(xt)\ dt \right| \leqslant \frac{1}{2n+3},$$

   et en déduire soigneusement que

$$\hat{h}(x) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \cos(xt)\ dt.$$

   (d) Exprimer l'intégrale intervenant dans l'expression précédente et conclure que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(x) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{x^2 + (2n+1)^2}.$$

4. Soit x un réel ; on désigne par u la fonction 2π-périodique, impaire et définie pour $t \in]0, \pi[$ par $u(t) = \operatorname{ch}(xt)$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourrier a_n et b_n de la fonction u.
   (b) En précisant le théorème utilisé dont on vérifiera les hypothèses dans ce cas, donner la valeur de la somme de la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n \sin nt$, pour tout $t \in [0, \pi]$.
   (c) Que devient ce développement pour $t = \frac{\pi}{2}$?
5. Montrer alors que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(x) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{2} x)}.$$
   (on rappelle la formule $\operatorname{ch}(\gamma) = 2 \operatorname{ch}^2(\frac{\gamma}{2}) - 1$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$)

III. Quelques propriétés de la Transformée de Fourier d'une fonction

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**
   (a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $\hat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\hat{f}$ est bornée.
   (b) Si en plus f est continue, montrer que $\hat{f}$ est aussi continue.
2. **Transformations**
   Dans cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a : \ t \mapsto f(t-a)$ et ${}_a f : \ t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_a}(x) = e^{-iax} \hat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{{}_a f}(x) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{x}{a}) \ (a \neq 0).$$
   (b) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t) e^{iat}$ en fonction de celle de f.
   (c) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformeé de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.
   (d) Que peut-on alors dire de la tarnsformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).
3. **Dérivation**
   On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.
   (b) Montrer alors que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x),$$
   puis en déduire que $\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.
   (c) On suppose de plus que l'application $g : \ t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x).$$

Fin de l'épreuve