Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*
CPGE Med V, Casablanca, Maroc

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

CORRIGÉ

Notes du correcteur :

- **Des questions de cours dans ce problème ne seront pas redémontrées, l'étudiant peur se réferrer à son propre cours.**
- **Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la relation ${}^tXY$ définit un produit scalaire, on écrira parfois**

$$ {}^tXY = \langle X, Y\rangle \ , \ {}^tXX = \|X\|^2 $$

$1^{\text{ère}}$ Partie.

1)
- **Si** a, b, c, d **sont tous nuls, alors** $\mathbf{rg}A = 0$.
- **Si** a, b, c, d **ne sont pas tous nuls et** $\det A = 0$, **alors** $\mathbf{rg}A = 1$.
- **Si** a, b, c, d **ne sont pas tous nuls et** $\det A \neq 0$, **alors** $\mathbf{rg}A = 2$.

2) a)

$$\begin{aligned} \mathbf{rg}A = 0 &\iff Vect(C_1(A), \cdots, C_n(A)) = 0 \\ &\iff C_i(A) = 0, \forall\, i \in [\![1; n]\!] \\ &\iff a_{i,j} = 0, \forall\, i, j \in [\![1; n]\!] \\ &\iff A = 0 \end{aligned}$$

Donc $A \neq 0 \iff \mathbf{rg}(A) \neq 0 \iff \mathbf{rg}(A) \geq 1$.

b) Question de cours.

3) Question de cours.

4) a) Un calcul simple, montre que

$$a_{i,j} = u_i v_j$$

b) $\mathrm{Tr}\,(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^tUV = \langle U, V\rangle$.

c) D'aprés 4.a) on peut conclure que

$$C_j(A) = v_j U$$

d)

$$\begin{aligned} U \neq 0, V \neq 0 &\Longrightarrow \exists i, j \in [\![1; n]\!] \text{ tel que } u_i \neq 0, v_j \neq 0 \\ &\Longrightarrow \exists i, j \in [\![1; n]\!] \text{ tel que } a_{i,j} \neq 0 \\ &\Longrightarrow A \neq 0 \\ &\Longrightarrow \mathbf{rg}A \geq 1 \end{aligned}$$

D'autre part toutes les colonnes sont proportionnelles à U, **donc** $\mathbf{rg}A = \dim Vect(C_1(A), \cdots, C_n(A)) \leq 1$, **d'où l'égalité.**

5) a) Supposons le contraire, dans ce cas $A = 0$, donc rg$A = 0$, contradiction.

b) On a rg$A = \dim Vect(C_1(A), \cdots, C_n(A)) = 1$, donc $C_{i_0}(A) \neq 0$ en constitue une base, donc pour tout $j \in [\![1;n]\!], \exists \lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

c) D'aprés la question précédente, on peut conclure que $a_{i,j} = x_i \lambda_j$ où $x_i = a_{i,i_0}$, d'aprés 4.a) on conclut aussi que $A = X^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) D'aprés 4.c) on peut affirmer que : $A = X_1{}^tY_1 \Longrightarrow X = C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_1 \neq 0$, donc

$$X_1 = \alpha X$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{y_{i_0}} \neq 0$, mais aussi

$$Y_1 = \frac{1}{\alpha} Y$$

6) rg$A = r \Longrightarrow \exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PJ_rQ$ avec

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où 1 se répète r fois, on peut écrire $J_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$ où $E_{i,i}$ matrice formé par des 0 sauf à la i-éme ligne et i-éme colonne où il y a 1, il est clair que rg$E_{i,i} = 1$, donc rg$PE_{i,i}Q = 1$ car équivalentes avec $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} PE_{i,i}Q$

7) a)
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} Y_i{}^tZ_i = 0 &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} Y_i{}^tZ_iZ_i = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Y_i = 0 \quad \text{avec } \lambda_i = {}^tZ_iZ_i = \|Z_i\|^2 \\ &\Longrightarrow \lambda_i = \|Z_i\|^2 \quad \forall\, i \in [\![1;n]\!] \text{ car } (Y_i) \text{ libre} \\ &\Longrightarrow Z_i \quad \forall\, i \in [\![1;n]\!] \end{aligned}$$

L'implication réciproque est évidente.

b)
$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} X_i{}^tY_j = 0 &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}{}^tY_j \right) = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}{}^tY_j = 0, \forall\, i \in [\![1;n]\!] \text{ car } (X_i) \text{ libre} \\ &\Longrightarrow \lambda_{i,j} = 0 \quad \forall\, i,j \in [\![1;n]\!] \text{ car } ({}^tY_j) \text{ libre} \end{aligned}$$

Ainsi la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de cardinal $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc base formé de matrices de rang égal.

8) a) Posons $M = (a_{i,j}), N = (b_{i,j})$, donc $MN = (c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}$$

Et donc

$$\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tMN\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{1 \leq k,i \leq n} a_{k,i} b_{k,i}$$

Montrons maintenant qu'il s'agit bien d'un produit scalaire

- Symétrie : évident, d'aprés la formule précédente
- Bilinéarité : découle de la linéarité de la trace et celle de la transposé et la distributivité du produit par rapport à la somme.
- Positive : $\langle M, M \rangle = \displaystyle\sum_{1 \leq k,i \leq n} a_{k,i}^2 \geq 0$.

– **Définie** : $\langle M,M\rangle = 0 \implies \sum_{1\le k,i\le n} a_{k,i}^2 = 0$.

$$\implies a_{k,i}=0, \forall\, k,i \in [\![1;n]\!]$$
$$\implies A=0$$

b) $\langle X^tY, X'^tY'\rangle = \mathrm{Tr}\,(Y^tXX'^tY') = \mathrm{Tr}\,(Y\langle X,X'\rangle^tY') = \langle X,X'\rangle \mathrm{Tr}\,(Y^tY') = \langle X,X'\rangle\langle Y,Y'\rangle$

c) **Il suffit de prendre (X_i) orthonormale et (Y_j) unitaire.**

$2^{\text{ème}}$ Partie.

1) $A^2 = U^tVU^tV = U\underbrace{\langle U,V\rangle}_{\alpha}{}^tV = \alpha U^tV = \alpha A$.

2) **Par récurrence simple sur $n\in\mathbb{N}^*$, on montre que $A^n = \alpha^{n-1}A$, comme $A\neq 0$, alors elle est nilpotente *si et seulement si* $\alpha = 0$.**

3) **Supposons A non nilpotente, donc $\alpha\neq 0$, dans ce cas pour tout réel λ, on a $(\lambda A)^2 = \lambda^2\alpha A = \lambda\alpha(\lambda A)$, ainsi λA est un projecteur *si et seulement si* $\lambda\alpha = 1$, pendre donc $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.**

4) a) **$\mathrm{rg}A = 1 \neq n \ge 2$, donc A n'est pas inversible, d'où $\det A = 0$, autrement dit 0 est racine de $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$, le polynôme caractéristique de A, d'où 0 est une valeur propre de A, dont le sous espace vectoriel propre associé n'est autre que :**

$$\begin{aligned}\ker A &= \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AY=0\}\\ &= \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } U\underbrace{{}^tVY}_{\text{réel}}=0\}\\ &= \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tVY=0\} \quad \text{car } U\neq 0\end{aligned}$$

D'autre part $\mathrm{rg}A = 1$, donc $\dim\ker A = n-1$. Ainsi 0 est une valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, comme la somme des valeurs propres vaut $\mathrm{Tr}\,(A)$, alors l'autre valeur propre sera $\mathrm{Tr}\,(A)$.

b) $AU = U\underbrace{{}^tVU}_{{}^tVU=\alpha \text{ réel}} = \alpha U$, **d'où α est une valeur propre et $U\neq 0$ vecteur propre associé, dont le sous espace vectoriel propre associé sera de dimension 1, car la somme des sous espace vectoriel propre ne peut jamais dépasser n et déjà un sous espace vectoriel propre $(\ker A)$ est de dimension $n-1$.**

c) **En résumé :**

– **Si $\alpha\neq 0$, alors A admet deux valeurs propre 0, dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension $n-1$ et α dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension 1.**

– **Si $\alpha = 0$, alors A admet une seule valeur propre 0, dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension $n-1$.**

5) **Résultat immédiat du résumé de la question précédente.**

6) a) **Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice nulle, car 0 est son unique valeur propre, donc $A=0$, ce qui ne l'est pas.**

b) **D'aprés II.4.b) $AU = \alpha U = 0$n d'où $U\in\ker A = \ker f$ et par suite $W = \lambda U \in \ker f$ où $\lambda = {}^tVV = \|V\|^2\in\mathbb{R}$. Or $W\neq 0$, donc forme une famille libre dans ker et on conclut à l'aide du théorème de la base incomplète.**

c) **Posons $\mathcal{B} = (E_1,\cdots,E_{n-2},W,V)$**
Comme card$(\mathcal{B}) = n = \dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure que c'est une base.
En effet : Supposons que $\lambda_1E_1 + \cdots\lambda_{n-2}E_{n-2} + \alpha W + \beta V = 0$, on multiplie à gauche par ${}^tV$, comme $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ est une base de $\ker A = \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tVY = 0\}$ alors il ne reste que l'égalité $\beta^tVV = \beta\|V\|^2 = 0$ d'où $\beta = 0$ car $V\neq 0$, l'égalité initiale devient alors $\lambda_1E_1 + \cdots\lambda_{n-2}E_{n-2} + \alpha W = 0$, or $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ est une base de $\ker A$ donc en particulier libre, d'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \alpha = 0$.
$f(E_1) = AE_1 = 0, \cdots, f(E_{n-2}) = AE_{n-2} = 0, f(W) = AW =$

$0, f(V)=AV=U^tVV=\|V\|^2U=W$, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ & & & 0\\ \vdots & & \vdots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

d) Découle immédiatement de la question précédente car toutes les deux semblables à la matrice

$$\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ & & & 0\\ \vdots & & \vdots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3ème Partie.

1) a) $rgA=n \Longrightarrow A$ inversible $\Longrightarrow \det A\neq 0$, d'où $\dfrac{A}{\det A}A^c=I_n$ donc ${}^tA^c$ est inversible de rang n et dont l'inverse est

$$\left({}^tA^c\right)^{-1}=\frac{A}{\det A}$$

Aprés transposition on conclut que A^c est inversible de rang n et dont l'inverse est

$$\left(A^c\right)^{-1}=\frac{{}^tA}{\det A}$$

D'où

$$A^c=\frac{{}^tA^{-1}}{\det A}$$

b) Si $\text{rg}A\leq n-2$, alors toutes les $n-1$ colonnes de A sont liée donc les cofacteurs, coéfficients de A^c obtenus à partir des déterminants de ces colonnes, sont nuls, d'où $A^c=0$.

2) a) Si $\text{rg}A=n-1$, alors il existe au moins $n-1$ colonnes de A qui sont libre donc le cofacteur, coéfficient de A^c obtenu à partir du déterminant de ces colonnes, est non nul, d'où $A^c=0$, d'où $\text{rg}A^c\geq 1$.

b) $$\begin{aligned} rgA=n-1 &\Longrightarrow A \text{ non inversible}\\ &\Longrightarrow \det A=0\\ &\Longrightarrow A^tA^c=0\\ &\Longrightarrow \textbf{Im }({}^tA^c)=\textbf{ Im }(g)\subset\ker A=\ker f\end{aligned}$$

Ainsi $\text{rg}A^c=\text{rg}({}^tA^c)=\text{rg } g\leq\dim\ker f=\dim\ker A=n-\text{ rg}A=1$, d'où l'égalité.

3) a) Rappelons que si $u_1(t),\cdots,u_n(t)$ sont dérivables, comme le déterminant est n-linéaire alors $t\mapsto\det_{\mathcal{B}}(u_1(t),\cdots,u_n(t))$ est dérivable de dérivée égale à

$$\sum_{i=1}^{n}\det{}_{\mathcal{B}}(u_1(t),\cdots,u_i'(t),\cdots,u_n(t))$$

Dans notre cas $P_A(t)=\det(A-tI_n)=\det_{\mathcal{B}}(C_1(A)-te_1,\cdots,C_n(A)-te_n)$ est dérivable de dérivée égale à

$$P_A'(t)=-\sum_{i=1}^{n}\det{}_{\mathcal{B}}\left(C_1(A)-te_1,\cdots,e_i,\cdots,C_n(A)-te_n\right)$$

b) D'aprés la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}P_A'(0)&=-\sum_{i=1}^{n}\det{}_{\mathcal{B}}\left(C_1(A),\cdots,e_i,\cdots,C_n(A)\right)\\ &=-\sum_{i=1}^{n}(A^c)_{i,i}\end{aligned}$$

on a developpé le déterminant par rapport à la iéme ligne

$$=-\text{Tr}\,(A^c)$$

4) a) **Question de cours.**

b) **Comme** $P_A = P_B$ **alors** $P'_A(0) = P'_B(0)$, **d'où** $\mathrm{Tr}\,(A^c) = \mathrm{Tr}\,(B^c)$.

c) $\mathbf{rg}A = n \Longrightarrow A^c = \dfrac{{}^tA^{-1}}{\det A}$, **or** $A = PBP^{-1}$ **et** $\det A = \det B$, **d'où** $A^c = Q\dfrac{{}^tB^{-1}}{\det B}Q^{-1} = QB^cQ^{-1}$ **où** $Q = {}^tP$, **donc** A^c **et** B^c **sont semblables.**

d) $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B \leq n-2 \Longrightarrow A^c = B^c = 0$, **donc semblables.**

e) i. **On a** $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B = n-1$, **d'aprés 2.b) on a** $\mathbf{rg}(A^c) = \mathbf{rg}(B^c) = 1$, **or** $\mathrm{Tr}\,(A^c) \neq 0$, **d'aprés II.5** A^c **est semblable à diag**$(0, \cdots, 0, \mathrm{Tr}\,(A^c))$, **de même** B^c **est semblable à diag**$(0, \cdots, 0, \mathrm{Tr}\,(B^c))$, **or** $\mathrm{Tr}\,(A^c) = \mathrm{Tr}\,(B^c)$, **donc** A^c **et** B^c **semblables.**

ii. **On a** $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B = n-1$, **d'aprés 2.b) on a** $\mathbf{rg}(A^c) = \mathbf{rg}(B^c) = 1$, **or** $\mathrm{Tr}\,(A^c) = 0$, **donc** $\mathrm{Tr}\,(B^c) = 0$ **car égales, d'aprés II.6.d)** A^c **et** B^c **sont semblables.**

Fin.