ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2008
École Nationale de l'Industrie Minérale
ENIM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages. L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans ce problème, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme qui lui est associée, notée $||.||$; $\mathbb{C}$ est muni de sa norme standard $z \longmapsto |z|$ qui en fait un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On rappelle que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le disque $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| < r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

1^{ère} Partie : La propriété (H)

A. Préliminaires : On considère l'application $\psi:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ (x,y) \longmapsto \psi(x,y) = x + iy$.

1. Vérifier que l'application ψ est une bijection continue et que ψ^{-1} est aussi continue .
2. Justifier que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ alors $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \ x + iy \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

B. La propriété (H)

Définition. Si $f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, on lui associe l'application $\tilde{f}:\ \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$. On dit que f vérifie *la propriété* (**H**) si $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y).$$

1. (a) $f:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2$; montrer que f vérifie la propriété (**H**).
   (b) Même question avec l'application $f:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z$.
   (c) L'application $f:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \bar{z}$ vérifie-t-elle la propriété (**H**) ?
2. **Cas d'une fonction définie par une intégrale**
   (a) Pour quelles valeurs du complexe z la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
   (b) On note $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$; justifier que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.
   Dans la suite on pose $\quad f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt^2}\,dt,\ z \in \Omega.$
   (c) Montrer que $\tilde{f}$ possède, en tout point de $\mathcal{U}$, une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et l'exprimer sous forme intégrale.
   (d) Montrer soigneusement que $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ existe et l'exprimer sous forme intégrale.
   (e) Montrer que f vérifie la propriété (**H**).

3. **Quelques propriétés générales**

   Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et soient f, g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété (**H**).

   (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $\lambda f + g$ vérifie la propriété (**H**).

   (b) Montrer que le produit fg vérifie la propriété (**H**).

   (c) On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$; montrer que l'application $\dfrac{1}{f}$ vérifie la propriété (**H**).

   (d) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et posons $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = a + ib$.

      i. Exprimer la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0), notée $\mathrm{d}\tilde{f}(x_0, y_0)$, à l'aide des réels a et b puis écrire la matrice jacobienne A de $\tilde{f}$ au point (x_0, y_0) dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ et la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

      ii. On suppose que $a + ib \neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique ; que peut-on dire de la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A ? à quelle condition sur a et b cet endomorphisme est-il une rotation ?

   (e) Si de plus $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer le laplacien $\Delta\tilde{f}$ de $\tilde{f}$ défini par $\Delta\tilde{f} := \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Intégrales curvilignes et applications

A. Intégrales curvilignes

- On appelle chemin, toute application $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$, ce qui signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tels que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ et que $f/_{[a_{i-1}, a_i]}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$.

  Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un lacet.

- Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin vérifiant $\gamma([a, b]) \subset \Omega$, on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ, notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$, par $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$.

1. **Exemples :** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 0$; on considère $\gamma_{r,\alpha} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longrightarrow re^{i\alpha t}$.

   (a) Vérifier que $\gamma_{r,\alpha}$ est un chemin contenu dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et calculer $\displaystyle\int_{\gamma_{r,\alpha}} \frac{dz}{z}$.

   (b) i. On pose $I(r) = \displaystyle\int_{\gamma_{r,\pi}} \frac{e^{iz} - 1}{z}\, dz$; montrer que $I(r) = -i\pi + i\displaystyle\int_0^\pi e^{-r\sin u + ir\cos u}\, du$.

      ii. Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^\pi e^{-r\sin u + ir\cos u}\, du\right| \leqslant 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin u}\, du$.

      iii. En déduire que $I(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -i\pi$. (*minorer* $t \to \sin t$ *sur* $[0, \pi/2]$ *par une fonction affine*).

2. Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (**H**) telle que $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \tilde{f}$, et soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin vérifiant $\gamma([a, b]) \subset \Omega$.

(a) Montrer que l'application $F \circ \gamma : \ t \longrightarrow F(\gamma(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ et que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

(b) Que peut-on dire de cette intégrale si de plus γ est un lacet ?

3. Soient $\gamma_1 : \ [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, et $\gamma_2 : \ [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$, $c < d$, deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$; on leur associe l'application $\gamma : \ [a, b + d - c] \longrightarrow \mathbb{C}$, notée $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b + d - c. \end{cases}$$

(a) Vérifier que γ est un chemin .

(b) Si $\gamma_1([a, b]) \subset \Omega$ et $\gamma_2([c, d]) \subset \Omega$, montrer que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$

B. Étude de la somme d'une série entière et application

1. Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; on note f l'application définie par $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \ z \in D(0, R)$ (avec $D(0, R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$).

On pose $f_n(z) = a_n z^n$, $z \in D(0, R)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $y_0 \in]-R, R[$; montrer soigneusement que l'application $x \longrightarrow f(x + iy_0)$ est dérivable sur l'intervalle $] - \sqrt{R^2 - y_0^2}, \sqrt{R^2 - y_0^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et exprimer sa dérivée sous forme de la somme d'une série.

(b) Montrer que $\tilde{f}$ possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathcal{U} = \psi^{-1}\big(D(0, R)\big)$ et exprimer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.

(c) Montrer que f vérifie la propriété (**H**).

(d) Construire une fonction $F : \ D(0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (**H**) telle que $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \tilde{f}$.

2. **Application**

(a) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} z^n$. On note g sa somme ; exprimer $g(z)$, pour tout complexe non nul z de son disque ouvert de convergence, à l'aide des fonctions usuelles.

(b) Pour $r > 0$, on note $\gamma_r^1 : \ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \ t \longrightarrow (2t - 1)r$ et $\gamma_r^2 : \ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \ t \longrightarrow re^{i\pi t}$. Vérifier que le chemin $\gamma_r := \gamma_r^1 \vee \gamma_r^2$ est bien défini et dessiner son image $\gamma_r([0, 2])$, puis justifier que $\displaystyle\int_{\gamma_r} g(z)\, dz = 0$.

(c) En déduire que $\displaystyle\int_{\gamma_r^1} g(z)\, dz = -\int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz} - 1}{z}\, dz.$

(d) On note h la fonction $u \longrightarrow \frac{\sin u}{u}$ prolongée par continuité en 0 ; montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_r^1} g(z)\, dz = 2i \int_0^r h(u)\, du$ et en déduire que la fonction $r \longrightarrow \displaystyle\int_0^r h(u)\, du$ possède une limite finie en $+\infty$ qu'on notera $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$. Que vaut cette limite ?

3^{ème} Partie : Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (**H**).

1. Justifier que l'ensemble $\{\rho > 0\ ;\ \ D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

   Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$.

2. On note φ l'application de $]0, R[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(r, \theta) = \tilde{f}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$.

   Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[\times\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$. Donner une relation entre ces dérivées partielles.

3. Pour tout $r \in]0, R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_r(\theta) = \varphi(r, \theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$.

   (a) Justifier que φ_r est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée en fonction de $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.
   Dans la suite, on note $\big(c_n(r)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r.

   (b) Justifier que la suite $\big(c_n(r)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Qu'en déduit-on au sujet de la convergence de la série de Fourier de la fonction φ_r ? quelle est sa somme ? on précisera les hypothèses des théorèmes utilisés.

4. Les notations étant celles de la question précédente ; on pose $h_n(r) = \dfrac{c_n(r)}{r^n},\ r \in]0, R[,\ n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Donner l'expression intégrale de $c_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que la fonction $r \longrightarrow c_n(r)$ est dérivable sur $]0, R[$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale puis justifier que, pour tout $r \in]0, R[,\ c'_n(r) = \frac{n}{r}c_n(r)$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est constante sur l'intervalle $]0, R[$.

   (d) Montrer que si n est un entier naturel non nul alors la fonction h_{-n} est nulle puis en déduire que $c_{-n}(r) = 0$ pour tout $r \in]0, R[$. *On pourra justifier que la fonction $r \longrightarrow c_{-n}(r)$ est bornée au voisinage de 0 à droite.*

5. Soit $n \in \mathbb{N}$; d'après ce qui précède, il existe une constante $a_n \in \mathbb{C}$ telle que $a_n = h_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R et que, pour tout $z \in D(z_0, R)$, $\quad f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

6. Montrer l'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente.

7. Montrer que, pour tout $r \in]0, R[$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ $\quad$ (*Formule de Gutzmer*).

8. **Application au théorème de Liouville**

   Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (**H**) ; d'après l'étude menée dans la partie précédente, en prenant $z_0 = 0$, on obtient $R = +\infty$ et il existe une unique série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence infini dont f est la somme.

   Montrer en utilisant la formule de Gutzmer que si f est bornée, elle est constante.

FIN DE L'ÉPREUVE