Corrigé de l'épreuve de mathématiques II, filière PSI, CNC 07

Première Partie

1. Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} 0 \text{ si } (a,b,c,d)=0 \\ 1 \text{ si } ad-bc=0, (a,b,c,d)\neq 0 \\ 2 \text{ si } ad-bc\neq 0 \end{cases}$

2. $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Il est évident que $rg(A)=0$ si et seulement si le sous-espace véctoriel engendré par ses vecteurs colonnes est nul et cela équivaut á dire que$A=0$; en particulier si A n'est pas nulle $rg(A)\geqslant 1$.

   (b) Si A est inversible, les vecteurs colonnes $C_1(A),\ldots,C_n(A)$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim vect(C_1(A),\ldots,C_n(A))=n$ c'est à dire $rg(A)=n$. Réciproquement, si $rg(A)=n$ la famille $(C_1(A),\ldots,C_n(A))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est inversible.

3. On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. On a

$$rg(f_A)=\dim(\mathrm{Im}(f_A))$$

   et comme $\mathrm{Im}(f_A)=vect(C_1(A),\ldots,C_n(A))$ alors $rg(A)=rg(f_A)$.

4. (a) On a $A=U.{}^tV=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.(v_1\ldots v_n)$; en notant $A=(a_{i,j})$ et en effectuant le produit matriciel $U.{}^tV$, on voit que $a_{k,\ell}=u_kv_\ell$ pour tout $(k,\ell)\in\{1,\ldots,n\}^2$.

   (b) Avec les notations de la question précèdente, on a : $\mathrm{Tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i={}^tVU$.

   (c) D'aprés la question (4.a), la $j^{ième}$ colonne de A est $C_j(A)=v_jU$.

   (d) On a $V\neq 0$ donc il existe j_0 tel que $v_{j_0}\neq 0$; ainsi $C_{j_0}(A)=v_{j_0}U\neq 0$ puisque $U\neq 0$; on en déduit que $rg(A)\geqslant 1$. D'autre part, pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, $C_j(A)=v_jU=\dfrac{v_j}{v_{j_0}}C_{j_0}(A)$ cela montre que $rg(A)\leqslant 1$; d'où $rg(A)=1$

5. (a) La matrice A est de rang 1, donc non nulle d'où l'existence d'un i_0 tel que $C_{i_0}(A)\neq 0$.

   (b) On a $rg(A)=\dim vect((C_1(A),\ldots,C_n(A)))=1$, donc les colonnes de la matrice A sont toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; ainsi, pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A)=\lambda_jC_{i_0}(A)$.

   (c) D'aprés le calcul précédent, les vecteurs colonnes de A sont $\lambda_1C_{i_0}(A),\ldots,\lambda_nC_{i_0}(A)$; le calcul éffectué à la question (4.a) montre alors que $A=C_{i_0}(A).(\lambda_1\ldots\lambda_n)$, c'est à dire que $A=X.{}^tY$ avec $X=C_{i_0}(A)$ et $Y=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

   (d) Si $A=X_0.{}^tY_0=X_1.{}^tY_1$ et $rg(A)=1$, alors les vecteurs $X_0,\ X_1,\ Y_0$ et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0={}^t(y_1,\ldots,y_n)$, $Y_1={}^t(z_1,\ldots,z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A)\neq 0$; or $C_{i_0}(A)=y_{i_0}X_0=z_{i_0}X_1$ donc $X_1=\lambda X_0$ avec $\lambda=\dfrac{y_{i_0}}{z_{i_0}}\neq 0$. Par ailleurs, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $C_j(A) = y_j X_0 = z_j X_1 = \lambda z_j X_0$ donc $z_j = \dfrac{1}{\lambda} y_j$ et $Y_1 = \frac{1}{\lambda} Y_0$. Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien $(\lambda X_0).{}^t\left(\dfrac{1}{\lambda}Y_0\right) = X_0.{}^tY_0 = A$. Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $\left(\lambda X_0, \dfrac{1}{\lambda}Y_0\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $rg(A) = r > 0$; d'après un résultat du cours, on peut mettre A sous la forme $A = PJQ$ avec $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, I_r la matrice identité d'ordre r et P, Q des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons E_{ij} la matrice de terme général $e_{k,l}$ avec $e_{k,l} = 1$ si $(k,l) = (i,j)$ et $e_{kl} = 0$ sinon ; alors $J = \sum\limits_{i=1}^{r} E_{ii}$ et par suite $A = P\left(\sum\limits_{i=1}^{r} E_{ii}\right)Q = \sum\limits_{i=1}^{r} PE_{ii}Q$, en plus $1 = rg(E_{ii}) = rg(PE_{ii}Q)$ puisque ces deux matrices sont équivalentes.

7. (a) Il est évident que si les vecteurs $Z_1,\dots,Z_n$ sont tous nuls alors $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i = 0$. Réciproquement, si $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i = 0$ alors, pour $j \in \{1,\dots,n\}$, on a

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i\Big).Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i.Z_j = \sum_{i=1}^{n} ({}^tZ_j Zj) Y_i,$$

et comme les vecteurs $Y_1,\dots,Y_n$ sont indépendants, on obtient $||Z_j||^2 ={}^tZ_jZ_j = 0$, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$; donc les vecteurs $Z_1,\dots,Z_n$ sont tous nuls.

   (b) Soit $(\lambda_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de réels tels que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_{ij} X_i.{}^tY_j = 0$ alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} X_i.\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.{}^tY_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} X_i\ {}^t\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.Y_j\Big).$$

La question précédente montre alors que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.{}^tY_j = 0$. Par transposition on obtient $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.Y_j = 0$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$; la famille $(Y_1,\dots,Y_n)$ étant libre, on déduit de ce qui préède que $\lambda_{ij} = 0$, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$; cela montre que la famille $(X_i.{}^tY_j)_{i,j}$ est libre et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, cette famille en constitue une base.

8. (a) La bilinéarité découle de la linéarité de la trace. Par ailleurs, on sait que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \operatorname{Tr}({}^tM.N) = \operatorname{Tr}({}^t({}^tM.N)) = \operatorname{Tr}({}^tN.M) = \langle N, M\rangle$; cela montre que la symtrie de la forme bilinéaire. Enfin, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M\rangle = \operatorname{Tr}({}^tM.M) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} M_{ij}^2 \geqslant 0$, en plus

$$\langle M, M\rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} M_{ij}^2 = 0 \Longleftrightarrow M = 0.$$

Cela prouve que l'application $(M,N) \longmapsto \langle M, N\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Si X, X', Y et Y' sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\left\langle X.{}^tY, X'.{}^tY'\right\rangle = \operatorname{Tr}\left({}^t\left(X.{}^tY\right).\left(X'.{}^tY'\right)\right) = \operatorname{Tr}\left(Y.{}^tX.X'.{}^tY'\right),$$

et comme ${}^tX.X' \in \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Tr}\left({}^tX.X'.Y.{}^tY'\right) =^t X.X'\,\mathrm{Tr}\left(Y.{}^tY'\right) = ({}^tX.X').({}^tY.Y')$. Ainsi

$$\left\langle X.{}^tY, X'.{}^tY'\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow^t X.X' = 0 \text{ ou } {}^tY.Y' = 0.$$

On en déduit que les matrices $X.{}^tY$ et $X'.{}^tY'$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs X , X' ou les vecteurs $Y,\ Y'$ sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

(c) Si $(X_1,\ldots,X_n)$, $(Y_1,\ldots,Y_n)$ sont deux systèmes de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $\left(X_i.{}^tY_j\right)_{i,j}$ est orthonormée si et seulement si

$$\left\langle X_i.{}^tY_j\ ,\ X_k.{}^tY_l\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{si} \quad (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

Or d'aprés le calcul précédent, on a $\langle X_i.{}^tY_j\ ,\ X_k.{}^tY_l\rangle =^t X_i.X_k.{}^tY_j, Y_l$. Donc, pour que la famille $\left(X_i.{}^tY_j\right)_{i,j}$ soit orthonormée dans $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>\big)$, il suffit que les deux familles $(X_1,\ldots,X_n)$, $(Y_1,\ldots,Y_n)$ soient orthonormées dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

Deuxième Partie

Soit $A = U.{}^tV$ une matrice de rang 1 , $\alpha =^t V.U$ et $W = \left({}^tVV\right).U$

1. On a : $A^2 = \left(U.{}^tV\right).\left(U.{}^tV\right) = U.\left({}^tV.U\right).{}^tV = \alpha A$
2. Une récurrence permet de conclure que $A^k = \alpha^{k-1}A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ c'est à dire si et seulement si $\alpha = 0$ puisque A est non nulle.
3. Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a

$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}A^2 = \frac{1}{\alpha^2}\alpha A = \frac{1}{\alpha}A,$$

donc la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ est celle d'un projecteur.

4. (a) la matrice A est de rang 1 et comme $n \geqslant 2$ alors A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0, qui n'est rien d'autre que son noyau noté $\ker A$, est par définition égal à

$$\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ /\ AY = 0\} = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ /\ U{}^tVY = 0\right\}$$

Or, comme $U \neq 0$ on a l'équivalence $U{}^tVY = \left({}^tVY\right).U = 0 \Longleftrightarrow^t VY = 0$; on en déduit que $\ker A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ /\ {}^tVY = 0\}$ et d'aprés le théorème du rang $\dim\ker A = n - rg(A) = n - 1$.

(b) On a $AU = U{}^tVU = \left({}^tVU\right).U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A. Par ailleurs, le fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice est toujours inférieure ou égale à son ordre, adjoint au fait que $\dim\ker A = n-1$ permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est de dimension 1 et ce sous-espace propre vaut $\mathbb{R}U$.

(c) Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et 0 est son unique valeur propre.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α puisque la somme des sous-espaces propres associés est égale n.

5. si $\alpha \neq 0$, d'aprés la question (4) , 0 et α sont les valeurs propres de A et la somme de leur sous-espaces propres est égale l'ordre de A, donc A est diagonalisable.
En prenant une base $(U_1, \ldots, U_{n-1})$ de $\ker(A)$ et une base (U_n) de $\ker(A - \alpha I_n)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(U_1, \ldots, U_n)$ est $diag\,(0, \ldots, 0, \alpha)$. Donc A est semblable à $diag\,(0, \ldots, 0, \alpha)$ puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme f.
6. On suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Comme 0 est la seule valeur propre de A, la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est nulle. Comme $A \neq 0$ alors A n'est pas diagonalisable.
   (b) $AU = \alpha U = 0$ donc $U \in \ker f$ et comme le vecteur W est colinéaire à U et $W \neq 0$, le théorème de la base incomplte permet de compléter W en une base $\big(E_1, \ldots, E_{n-2}, W\big)$ de $\ker f$ qui est de dimension $n-1$.
   (c) On a $AV = U^tVV =^t VV.U = W \neq 0$ donc $W \notin \ker f$ et par suite la famille $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   La matrice de f dans la base $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Soit A une matrice de rang 1, d'après les questions (1.5.c) et (1.4.b), on peut écrire A sous la forme $A = U^tV$ où U, V sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{Tr}\,(A) =^t VU$; si plus A est de trace nulle, alors d'après la question (2.6.c), A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. La transitivité de la relation de similitude permet enfin de conclure que deux matrices de rang 1 et de tarce nulle sont semblables.

Troisième Partie

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^c sa comatrice et on rappelle la relation

$$A.{}^tA^c = {}^tA^c.A = \det A.I_n \quad (1)$$

1. (a) $rg\,(A) = n$, donc A est inversible (d'aprés la question (1.2.b)) et $\det A \neq 0$, puis en multiplions l'égalité (1) précédente à droite par A^{-1}, on obtient ${}^tA^c = \det A.A^{-1}$. On en déduit que $rg\,(A^c) = rg\,({}^tA^c) = rg(A^{-1}) = n$ et enfin que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^tA^c$.
   (b) Si A est de rang $n-2$ alors comme les cofacteurs de A sont tous des déterminants d'ordre $n-1$, il découle du deuxième résultat admis que tous ces cofacteurs sont nuls, c'est à dire $A^c = 0$.
2. Si $rg\,(A) = n-1$.
   (a) D'aprés le premier résultat admis, on peut extraire de A une sous-matrice inversible A_1 qui soit d'ordre $n-1$; cette sous-matrice A_1 est obtenue à partir de A en éliminant une ligne i et une colonne j, donc $(A^c)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_1 \neq 0$. On en déduit que la matrice A^c est non nulle et par conséquent $rg\,(A^c) \geqslant 1$.

(b) On note f (resp g) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (resp à ${}^tA^c$) ; d'aprés la relation (1) on a $f \circ g = g \circ f = \det A.Id = 0$ et cette dernière relation montre bien que $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.
On peut donc conclure que $rg\,(A^c) = rg({}^tA^c) = \dim \operatorname{Im} g \leqslant \dim \ker f = 1$ et comme $rg\,(A^c) \geqslant 1$ on a bien $rg\,(A^c) = 1$.

3. On rappelle que si I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des applications dérivables de I vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors l'application $\phi : t \longmapsto \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est dérivable, avec

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$$

(a) On déduit de ce qui précède que l'application $P_A : t \longmapsto \det(C_1(A) - te_1, \dots, C_n(A) - te_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$P'_A(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\Big(C_1(A) - te_1, \dots, C_{k-1}(A) - te_{k-1}\ ,\ -e_k\ ,\ C_{k+1}(A) - te_{k+1}, \dots, C_n(A) - te_n\Big).$$

(b) On a $P'_A(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \det\Big(C_1(A), \dots, C_{k-1}(A)\ ,\ -e_k\ ,\ C_{k+1}(A), \dots, C_n(A)\Big)$. En développant, pour chaque k, le déterminant $\det\Big(C_1(A), \dots, C_{k-1}(A)\ ,\ -e_k\ ,\ C_{k+1}(A), \dots, C_n(A)\Big)$ par rapport à la k-ième colonne on trouve l'opposé du k-ième cofacteur principal $\Delta_{k,k}$ de la matrice A. D'où $P'_A(0) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{k,k} = -\operatorname{Tr}(A^c)$.

4. A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; soit P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

(a) On a
$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(PBP^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1}PB) = \operatorname{Tr}(B)$,
$rg\,(A) = rg\,(P^{-1}BP) = rg\,(BP) = rg\,(B)$ (car P, P^{-1} inversibles),
$P_A(t) = \det(A - tI_n) = \det(PBP^{-1} - tI_n) = \det(P(B - tI_n)P^{-1}) = \det(B - tI_n) = P_B(t)$.

(b) D'après la question $(3.3.b)$, $\operatorname{Tr}(A^c) = -P_A(0) = -P_B(0) = \operatorname{Tr}(B^c)$.

(c) Si A est de rang n, donc inversible et il en est de même de B de plus

$$A^c = \det A.{}^t\big(A^{-1}\big) = \det A.{}^t\big(PB^{-1}P^{-1}\big) = \det A.{}^t\big(P^{-1}\big)^t B^{-1}.{}^tP,$$

et comme $\det A = \det B$, ${}^tP^{-1} = \left({}^tP\right)^{-1}$ et $B^c = \det B.{}^tB^{-1}$ alors $A^c = {}^t P.(B^c).\left({}^tP\right)^{-1}$ donc A^c et B^c sont semblables.

(d) Si $rg\,(A) \leqslant n-2$, alors, puisque $rg\,(A) = rg\,(B)$, d'après la question $(3.1.b)$, $A^c = B^c = 0$ donc les matrices A^c et B^c sont égales donc semblables.

(e) Si $rg\,(A) = n-1$, alors d'après la question $(3.2.b)$, $rg\,(A^c) = rg\,(B^c) = 1$. Posons $\alpha = \operatorname{Tr}(A^c) = \operatorname{Tr}(B^c)$.

i. Si $\alpha \neq 0$, alors d'après la question (2.5), A^c est semblable à la matrice $diag\,(0, \dots, 0, \alpha)$; de même B^c est semblable à la matrice $diag\,(0, \dots, 0, \alpha)$, donc les matrices A^c et B^c sont semblables.

ii. Si $\alpha = 0$, alors les matrices A^c et B^c sont de rang 1 et de trace nulle donc semblables d'après la question $(2.6.d)$.