L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Problème 1

Soit m un entier naturel non nul et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ si, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $1\leq i\leq m$ et $1\leq j\leq m$, la suite numérique des coefficients en position (i,j) des matrices A_n converge vers le coefficient en position (i,j) de A, (convergence coefficient par coefficient).
La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ converge si la suite de sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} A_k=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$. On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, et pour toute matrice A de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, on note $A^0=I_m$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^{n+1}=AA^n$, où I_m désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telle que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n$ converge, on appelle l'exponentielle de A, la matrice notée $\exp(A)$ telle que $\exp(A)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n$.
On rappelle aussi que, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P^{-1}A_nP=P^{-1}(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n)P$. On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls.

Soit m un entier, $m\geq 2$ et soit a un réel non nul, on pose $A_a=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ a & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & a & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Partie I
Exemple

Soit $t\in\mathbb{R}^*$, on pose $A(t)=\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{t} & \frac{1}{t}-1\\ 2(1-\frac{1}{t}) & \frac{2}{t}-1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}^*$, le polynôme caractéristique de A est $\chi_{A(t)}=(X-\frac{1}{t})(X-1)$.
2. Déterminer pour tout $t\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, une matrice diagonale $D(t)$ et une matrice inversible P telles que $A(t)=PD(t)P^{-1}$.
3. Vérifier que pour $t=1$, la relation définie dans la question Partie I, 2. reste aussi vraie, en posant $D(1)=I_2$.
4. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $A(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

5. Soit t un nombre réel non nul.
   a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D(t))^n$.
   b) En déduire l'existence et l'expression de $\exp(D(t))$.
   c) Montrer que $\exp(A(t))$ existe et que $\exp(A(t)) = P\exp(D(t))P^{-1}$.
   d) En déduire que $\exp(A(t)) = \begin{pmatrix} 2e - e^{\frac{1}{t}} & -e + e^{\frac{1}{t}} \\ 2e - 2e^{\frac{1}{t}} & -e + 2e^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix}$.
6. a) Déterminer deux matrices carrées J et K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que,
   $$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \exp(A(t)) = e.J + e^{\frac{1}{t}}.K.$$
   b) Montrer que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $\exp(A(t) + A(t')) = \exp(A(t))\exp(A(t'))$.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $(\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t))$.
   d) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\exp(A(t))$ est inversible et déterminer son inverse.
   e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $(\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t))$.

Partie II
Exponentielle de la matrice A_a

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on note $[\![1, q]\!]$ l'ensemble des entiers h tels que $1 \leq h \leq q$. On pose $(e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Soit a un nombre réel non nul.

1. On considère f_a l'endomorphisme canoniquement associé à A_a.
   a) Montrer que,
   $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\forall i \in [\![1, m-k]\!]$, $f_a^k(e_i) = a^k e_{i+k}$ et $\forall i \in [\![m-k+1, m]\!]$, $f_a^k(e_i) = 0$.
   b) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq m$ et $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $f_a^k(e_i) = 0$.
   c) En déduire l'existence de $\exp(A_a)$ et donner son expression sous forme d'une matrice.
2. Pour tout réel t, on note $E_a(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} A_a^k$.
   a) Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on considère g_a l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $E_a(t)$ et h_a l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $E_a(s)$.
      i) Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $(h_a \circ g_a)(e_i) = \sum\limits_{j=i}^{m} \frac{(sa)^{j-i}}{(j-i)!} \sum\limits_{h=j}^{m} \frac{(ta)^{h-j}}{(h-j)!} e_h$.
      ii) En déduire que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $(h_a \circ g_a)(e_i) = \sum\limits_{h=i}^{m} \sum\limits_{j=i}^{h} \frac{s^{j-i}}{(j-i)!} \frac{t^{h-j}}{(h-j)!} a^{h-i} e_h$.
      iii) Montrer que $E_a(s+t) = E_a(s)E_a(t)$.
   b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E_a(t)$ est inversible et déterminer son inverse.
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E_a(nt) = (E_a(t))^n$.
   d) i) Montrer que la famille $(I_m, A_a, \ldots, A_a^{m-1})$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.
      ii) Montrer que l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ par $t \mapsto E_a(t)$, est injective.
   e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation, de la variable réelle t, suivante: $E_a(t^2 - 3t + 3) = \exp(A_a)$.

Partie III
Applications

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par la relation suivante: pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = nu_n + v_n \\ w_{n+1} = \frac{n^2}{2}u_n + nv_n + w_n \end{cases}$$, avec les conditions initiales $u_0 = 8$, $v_0 = 2$ et $w_0 = 3$.

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une matrice $F_n \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, $X_{n+1} = F_n X_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante réelle a et un réel t_n, tels que, $X_{n+1} = E_a(t_n) X_0$.

c) En déduire les expressions des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

2. On prend, dans cette question, $m = 2$, et on pose pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = I_2 + E_a(\frac{1}{n}) - {}^t(E_a(\frac{1}{n}))$, où ${}^t(E_a(\frac{1}{n}))$ désigne la transposée de la matrice $E_a(\frac{1}{n})$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\theta_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tels que, $C_n = \alpha_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^n$.

3. On considère le système différentiel suivant: (S) $\left\{\begin{array}{l} x' = (2-\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-1)y \\ y' = 2(1-\sqrt{2})x + (2\sqrt{2}-1)y \end{array}\right.$.

   a) Déterminer le nombre réel t_0 tel que $X' = A(t_0)X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et X' est la dérivée de X par rapport à t, où $A(t_0)$ est la matrice définie dans la Partie I.

   b) On pose $Y = P^{-1}X$, montrer que $X' = A(t_0)X \Leftrightarrow Y' = D(t_0)Y$, où P et $D(t_0)$ désignent les matrices qui sont définies dans la question de la Partie I, 2. .

   c) En déduire la solution du système différentiel (S) avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

   d) i) Vérifier que $\exp(tA(t_0)) = P\exp(tD(t_0))P^{-1}$.

      ii) Déterminer $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, tel que $Z(t) = (\exp(tA(t_0)))Z(0)$, avec $Z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

      iii) Comparer Z avec la solution X du système différentiel (S) avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

Problème 2

Soit E un espace euclidien c'est à dire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$, on désigne par $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. On dit qu'un endomorphisme f de E est orthogonal (ou une isométrie) si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n un entier naturel non nul, on rappelle que A est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$, où I_n est la matrice identité. Soit u un endomorphisme de E, on dit que u est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. On rappelle que le spectre d'un endomorphisme g de E est l'ensemble de ses valeurs propres et il est noté $Sp(g)$.

Partie I
Quelques propriétés d'un endomorphisme orthogonal

1. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

   a) Montrer que f est bijectif et que sa bijection réciproque f^{-1} est un endomorphisme orthogonal.

   b) Montrer que $Sp(f)$ est inclus dans $\{-1, 1\}$.

2. Soit f un endomorphisme de E.

   a) Montrer que f est orthogonal si, et seulement si, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

b) Montrer que f est orthogonal si, et seulement si, f transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E.

3. Montrer que f est orthogonal si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale.
4. On suppose que f est un endomorphisme orthogonal de E.
   a) Montrer que $f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E.
   b) Soit x un vecteur propre de $f + f^{-1}$.
      i) Montrer que $Vect(x, f(x))$ est stable par f, où $Vect(x, f(x))$ désigne le sous espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.
      ii) En déduire que f admet au moins un sous espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.
   c) Soit F un sous espace vectoriel stable par f.
      i) Montrer que $f(F) = F$.
      ii) Montrer que $F^{\perp}$ est stable par f.

Partie II
Distance à un sous espace vectoriel

Soit m un entier tel que $m \geq 2$, on prend, dans cette partie, $E = \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $m-1$.
On défini l'application, notée $(.|.)$, définie sur $E \times E$ par $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. On pose $F = \{P \in E;\ \ P(0) = 0\}$ et on note $(P_0, \dots, P_{m-1})$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \dots, X^{m-1})$.

1. Vérifier que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
   Dans toute la suite, E est muni de ce produit scalaire et on note $\|.\|_E$ la norme associée à $(.|.)$.
2. Montrer que F est un hyperplan de E, (vous pouvez montrer que F est le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur E).
   Dans tout ce qui suit, on pose S un vecteur directeur de la droite vectorielle orthogonale à F.
3. a) Vérifier que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq m-1$, les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux.
   b) En déduire que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq m-1$, on a $(P_k(0))^2 = \|P_k\|_E^2 = 1$.
   c) Vérifier que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq m-1$, $(P_k|S) = P_k(0)(1|S)$.
   d) En déduire que $S = \alpha \sum\limits_{k=0}^{m-1} P_k(0)P_k$ avec $\alpha = (1|S) \neq 0$.
4. On considère φ la projection orthogonale sur F et soit ψ l'endomorphisme de E tel que $\psi = 2\varphi - Id_E$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme symétrique.
   b) Montrer que ψ est un endomorphisme orthogonal.
   c) Montrer que $\forall P \in E$, $\varphi(P) = P - \frac{(P|S)}{\|S\|_E^2} S$.
5. On considère le polynôme $h = 1$, montrer que $d(h, F) = \frac{1}{\sqrt{m}}$, où d est la distance associée à la norme $\|.\|_E$.
6. En déduire $d(h, F^{\perp})$.

FIN DE L'ÉPREUVE