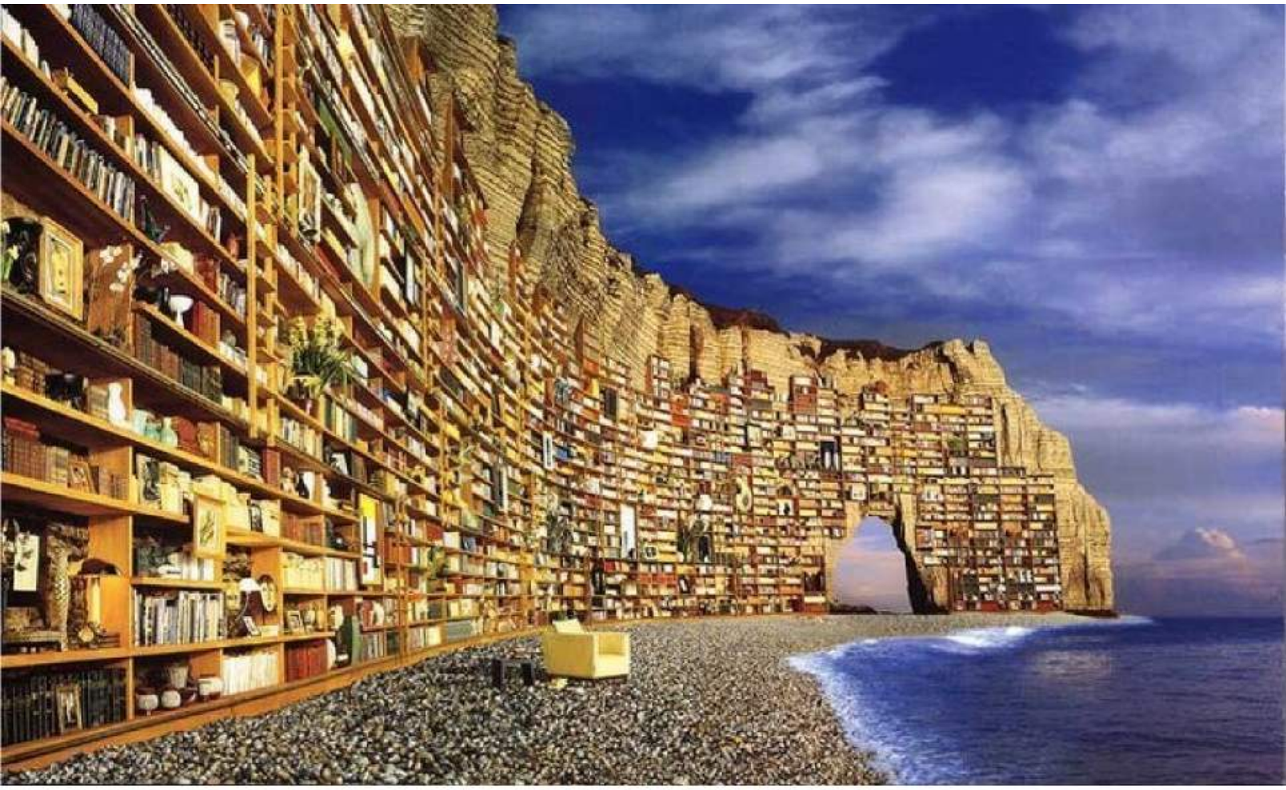
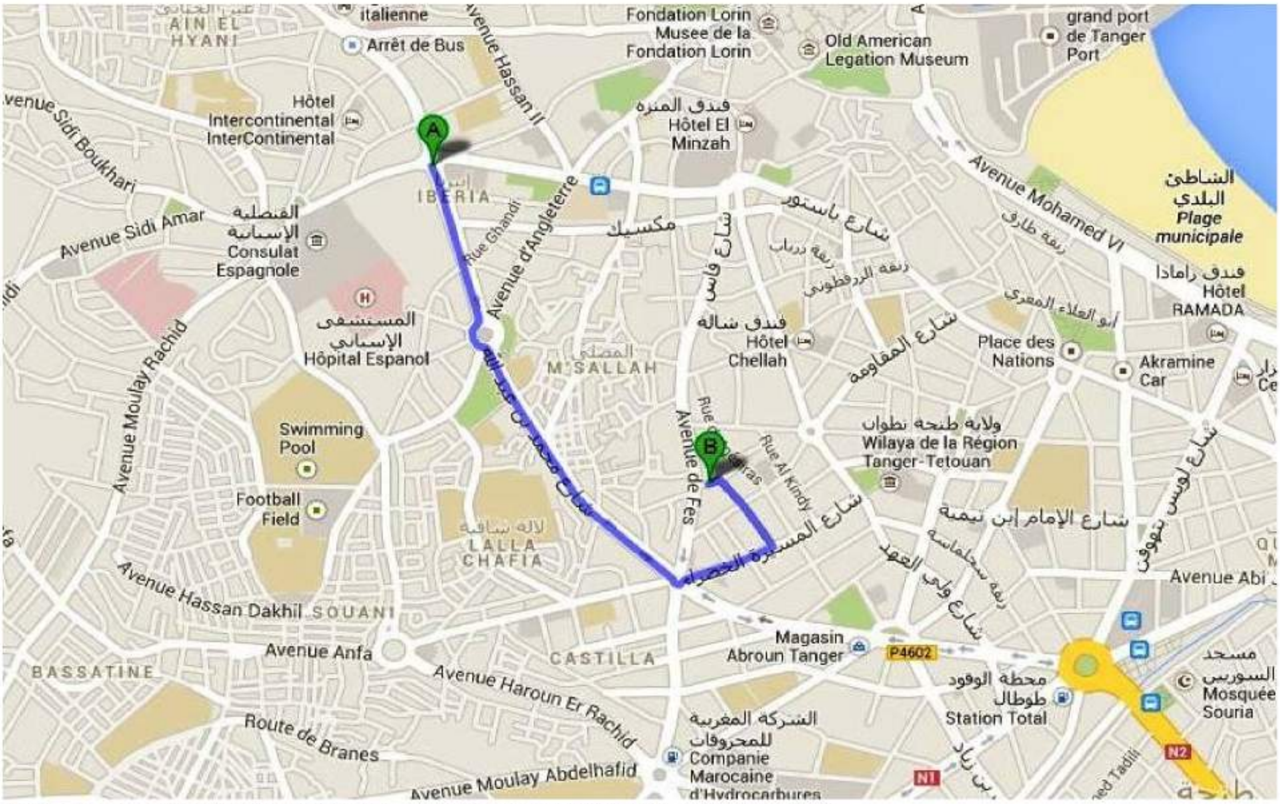


http://al9ahira.com/



Itinéraire d'accès à Al9ahira (point B sur la carte) en partant de la Place Ibéria

Corrigé

Filière PSI

I La Propriété (H)

I.A. Préliminaires

1 ψ est une application linéaire et transforme la base $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $(1,i)$ de $\mathbb{C}$, donc ψ est un isomorphisme et ψ^{-1} l'est aussi.
Comme $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{C}$) est de dimension finie alors ψ est continue (resp ψ^{-1} est continue).

2 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors,

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+iy\in\Omega\}=\psi^{-1}(\Omega)$$

est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.B. La propriété (H)

1 **1.*a*.** $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & z^2\end{array}$, donc, $\tilde{f}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2+2ixy\end{array}$ est une application de classe C^1 avec, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)=2x+2iy \quad\text{et}\quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)=-2y+2ix$$

par suite $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)$. Ainsi, f vérifie la propriété **(H)**.

1.b. De manière similaire à la question précédente $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$, donc $\tilde{f}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{x+iy} \end{array}$ est une application de classe C^1 avec, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)=e^{x+iy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)=ie^{x+iy}$$

par suite $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$. Ainsi, f vérifie la propriété **(H)**.

1.c. Pour $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$, on a : $\tilde{f}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x-iy \end{array}$ qui est bien de classe C^1 avec, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)=1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)=-i$$

Donc $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0)\neq i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0)$ et par suite f ne vérifie pas la propriété **(H)**.

2 Cas d'une fonction définie par une intégrale

2.a. Soit $z\in\mathbb{C}$, l'application $t\longmapsto e^{-zt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\left|e^{-zt^2}\right|=e^{-\mathrm{Re}(z)t^2}$.

• Si $\mathrm{Re}(z)>0$, alors $e^{-\mathrm{Re}(z)t^2}\underset{|t|\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc la fonction $t\longmapsto e^{-zt^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Si $\mathrm{Re}(z)\leq 0$, alors $\dfrac{1}{t}\underset{|t|\to+\infty}{=}o\left(e^{-\mathrm{Re}(z)t^2}\right)$, donc la fonction $t\longmapsto e^{-zt^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction $t\longmapsto e^{-zt^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z)>0$.

2.b. L'application $\varphi: z\longmapsto \mathrm{Re}(z)$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z)>0\}=\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$, donc Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2.c. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}$ nous avons :

$$\tilde{f}(x,y)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^2-iyt^2}\,\mathrm{d}t$$

Fixons $x\in\mathbb{R}$ tel que $x>0$, et posons pour tout $(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $h(y,t)=e^{-xt^2-iyt^2}$. Alors nous avons :

• h est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

• h admet une dérivée partielle par rapport à la première composante :

$$\forall (y,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[:\ \frac{\partial h}{\partial y}(y,t)=-i\,t^2e^{-xt^2-iyt^2}$$

et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

• $\forall (y,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $|h(y,t)|=e^{-xt^2}$ et la fonction $t\longmapsto e^{-xt^2}$ est continue et

intégrable sur $[0,+\infty[$.

• $\forall (y,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)\right|=t^2e^{-xt^2}$ et la fonction $t\longmapsto t^2e^{-xt^2}$ est continue et

intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après la formule de Leibniz, nous déduisons que $\widetilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et

$$\forall (x,y)\in\mathcal{U},\ \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial y}(y,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-i\,t^2e^{-xt^2-iyt^2}\,\mathrm{d}t.$$

2.*d*. Soit $y\in\mathbb{R}$. Posons pour tout $(x,t)\in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $g(x,t)=e^{-xt^2-iyt^2}$. Alors :

• g est continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

• g admet une dérivée partielle par rapport à la première composante donnée par :

$$\forall (x,t)\in]0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-t^2e^{-xt^2-iyt^2}$$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est ainsi continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

• Soit $a\in]0,+\infty[$.

$\forall (x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $|g(x,t)|=e^{-xt^2}\leq e^{-at^2}$ et la fonction $t\longmapsto e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus :

$\forall (x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=t^2e^{-xt^2}\leq t^2e^{-at^2}$ et la fonction $t\longmapsto t^2e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Alors et d'après la formule de Leibniz, nous déduisons que $\widetilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa premième variable avec :

$$\forall (x,y)\in\mathcal{U},\ \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-t^2e^{-xt^2-iyt^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi on remarque que : pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y)$.

2.e. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, nous avons : $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}-it^2e^{-xt^2-iyt^2}\,\mathrm{d}t.$

Posons pour tout $((x,y),t)\in\mathcal{U}\times[0,+\infty[$, $h((x,y),t)=-it^2e^{-xt^2-iyt^2}$.

• h est continue sur $\mathcal{U}\times[0,+\infty[$.

• Soit $a\in]0,+\infty[$, on a $\forall((x,y),t)\in([a,+\infty[\times\mathbb{R})\times[0,+\infty[$, $|h((x,y),t)|=t^2e^{-xt^2}\leq t^2e^{-at^2}$ et la fonction $t\longmapsto t^2e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Alors d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, nous déduisons que : $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Or, et d'après la question précédente, nous avons :

$$\forall(x,y)\in\mathcal{U},\quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{i}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)$$

donc $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$ est continue sur $\mathcal{U}$. Ainsi $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

Comme, de plus, pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)$ nous déduisons que f vérifie la propriété **(H)**.

3 Quelques propriétés générales.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et soient f , g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété **(H)**; on pose $\mathcal{U}=\psi^{-1}(\Omega)$.

3.a. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Nous avons $\widetilde{(\lambda f+g)}=\lambda\tilde{f}+\tilde{g}$, donc $\widetilde{(\lambda f+g)}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. Avec pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{(\lambda f+g)}}{\partial y}(x,y) &= \lambda\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y}(x,y)\\ &= i\left(\lambda\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(x,y)\right)\\ &= i\frac{\partial\widetilde{(\lambda f+g)}}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda f+g$ vérifie la propriété **(H)**.

3.b. Il est clair que $\widetilde{(fg)}=\tilde{f}\,\tilde{g}$, donc $\widetilde{(fg)}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. $\forall(x,y)\in\mathcal{U}$,

$$\frac{\partial\widetilde{(fg)}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)\times\tilde{g}(x,y)+\tilde{f}(x,y)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y}(x,y)$$

$$= i\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)\times \tilde{g}(x,y)+\tilde{f}(x,y)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,y)\right)$$
$$= i\frac{\partial \widetilde{(fg)}}{\partial x}(x,y).$$

Ainsi fg vérifie la propriété **(H)**.

3.*c*. On suppose que, pour tout $z\in\Omega$, $f(z)\neq 0$. Par $\widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}=\frac{1}{\tilde{f}}$ nous avons $\widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$:

$$\frac{\partial \widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{1}{\tilde{f}}\right)}{\partial y}(x,y)=\frac{-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)}{\left(\tilde{f}(x,y)\right)^2}=\frac{-i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)}{\left(\tilde{f}(x,y)\right)^2}=i\frac{\partial \widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}}{\partial x}(x,y)$$

Donc $\frac{1}{f}$ vérifie la propriété **(H)**.

3.*d*. Soit $z_0=x_0+iy_0\in\Omega$ et posons $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)=a+ib$. $a,b\in\mathbb{R}$.

i) $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, donc la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0,y_0) existe et pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} d\tilde{f}(x_0,y_0)(h,k) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)k \\ &= (h+ik)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)=ah-bk+i(bh+ak). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d\tilde{f}(x_0,y_0)(e_1)=a+ib \text{ et } d\tilde{f}(x_0,y_0)(e_2)=-b+ia$$

Par suite, $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$.

ii) On suppose que $a+ib\neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{pmatrix}$$

Soient h l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$

et ω l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$.

h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$ et ω est une rotation de $\mathbb{R}^2$ donc u est une similitude directe de $\mathbb{R}^2$. u est une rotation si, et seulement si, $\sqrt{a^2+b^2}=1$ c'est à dire $a^2+b^2=1$.

3.*e*. Supposons que $\tilde{f}$ est de classe C^2. f vérifie la propriété **(H)**, donc, pour tout (x,y), on a : $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$ et alors

$\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x,y)=i\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y\partial x}(x,y)$.

Le théorème de Schwarz permet d'obtenir : $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y\partial x}(x,y)$

et par suite : $i\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x,y)$ puis : $\Delta\tilde{f}(x,y)=0$.

II Intégrales curvilignes et applications

II.A. Intégrales curvilignes

1 **Exemples :** Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $r>0$; on considère $\gamma_{r,\alpha}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C},\ t\longmapsto re^{i\alpha t}$.

1.*a*. $\gamma_{r,\alpha}$ est clairement de classe C^1, avec

$$\gamma'_{r,\alpha}(t)=ir\alpha e^{i\alpha t}$$

De plus et comme $r\neq 0$, l'image de $\gamma_{r,\alpha}$ est contenu dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ainsi, $\gamma_{r,\alpha}$ est un chemin contenu dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. D'autre part nous avons par définition :

$$\int_{\gamma_{r,\alpha}}\frac{dz}{z}=\int_0^1\frac{ir\alpha e^{i\alpha t}}{re^{i\alpha t}}dt=i\alpha$$

1.*b*. i) Nous avons

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_{\gamma_{r,\pi}}\frac{e^{iz}-1}{z}dz \\ &= \int_0^1 i\pi(e^{ire^{i\pi t}}-1)dt \end{aligned}$$

$$= \quad -i\pi + i\int_0^1 e^{ire^{i\pi t}}\pi\,\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variables $u = \pi t$, nous déduisons :

$$\mathrm{I}(r) = -i\pi + i\int_0^{\pi} e^{ir(\cos u + i\sin u)}\,\mathrm{d}u$$

Ce qui entraîne le résultat.

ii) Par le théorème de majoration, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} e^{-r\sin u + ir\cos u}\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_0^{\pi}\left|e^{-r\sin u + ir\cos u}\right|\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\pi} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or et par la relation de Chasles nous avons :

$$\int_0^{\pi} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u$$

et en effectuant le changement de variables $v = \pi - u$, nous remarquons que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u$. On déduit ainsi l'inégalité :

$$\left|\int_0^{\pi} e^{-r\sin u + ir\cos u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u$$

iii) Sachant que la fonction sin est concave sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ et que la corde joignant les points de son graphe d'abscisses 0 et $\pi/2$ respectivement a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$, on déduit que pour tout $u \in [0, \pi/2]$: $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin u$. Ce qui entraîne par croissance des intégrales que :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-r\frac{2}{\pi}u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2r}\left[1 - e^{-r}\right]$$

qui tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. D'où, $\mathrm{I}(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -i\pi$.

2 **2.a.** Comme γ est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans Ω et que F est continue sur Ω, alors et par composition $\mathrm{F}\circ\gamma$ est continue. De plus, considérons une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_{\mathrm{N}})$ associée à γ. Par composition d'applications de classe C^1, nous déduisons que $\mathrm{F}\circ\gamma$ est de classe C^1 sur les intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$. Ce qui montre que $\mathrm{F}\circ\gamma$ est C^1 par morceaux sur $[a, b]$. D'autre part, on pose $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et on identifie $\gamma(t)$ au couple $(x(t), y(t))$ et $\gamma'(t)$ au couple $(x'(t), y'(t))$ quand cela a un sens, on obtient alors pour tout $t \in [a, b] \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{\mathrm{N}}\}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{F}\circ\gamma)'(t) &= (\widetilde{\mathrm{F}}\circ\gamma)'(t)\\ &= \mathrm{d}\widetilde{\mathrm{F}}(\gamma(t)).\gamma'(t)\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$$

et comme : $\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} = i\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} = \widetilde{f}$, nous déduisons que :

$$(F \circ \gamma)'(t) = \widetilde{f}(\gamma(t)).\gamma^{'}(t) = f(\gamma(t)).\gamma^{'}(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{i=N}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{i=N}\int_{a_{i-1}}^{a_i} \widetilde{f}(\gamma(t))\gamma^{'}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{i=N}\int_{a_{i-1}}^{a_i} (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème fondamental d'intégration, nous déduisons que :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{i=N}[F(\gamma(a_i)) - F(\gamma(a_{i-1}))] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

2.*b*. Lorsque γ est un lacet alors $\gamma(b) = \gamma(a)$ et par suite : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

3 Soient $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, et $\gamma_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$, $c < d$, deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$; on leur associe l'application $\gamma : [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$, notée $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b+d-c. \end{cases}$$

3.*a*. La restriction de γ à $[a,b]$ coïncide avec γ_1, ce qui entraine que : γ est continue en tout point de $[a,b[$ et que $\lim\limits_{t\mapsto b^-}\gamma(t) = \gamma_1(b)$. La restriction de γ à $[b, b+d-c]$ est la composée de l'application $t \mapsto t-b+c$ continue de $[b, b+d-c]$ à valeurs dans $[c,d]$ avec $gamma_2$ qui est continue sur $[c,d]$. On déduit alors que γ est continue sur $]b, b+d-c]$ et que $\lim\limits_{t\mapsto b^-}\gamma(t) = \gamma_1(b)$ et comme $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ nous déduisons que γ est continue sur $[a, b+d-c]$. De plus, en considèrant une subdivision $\sigma_1 = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ de $[a,b]$ associée au chemin γ_1 et une subdivision $\sigma_2 = (c_0, c_1, \dots, c_N^{'})$ de $[c,d]$ associée au chemin γ_2, pour tout $0 \leqslant i \leqslant N'$, posons : $a_{N+i} = c_i + b - c$, de sorte que $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_{N+N'})$ soit une subdivision du segment $[a, b+d-c]$, telle qu'on ait :

• pour chaque $0 \leqslant i \leqslant N$, la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ coïncide avec la restriction de γ_1 à cet intervalle et donc elle est de classe C^1.

• pour $N+1 \leqslant i \leqslant N+N'$, la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ coïncide avec la composée de l'application $t \mapsto t-b+c$ et de la restriction de γ_2 à l'intervalle $[c_{i-1-N}, c_{i-N}]$ et qui sont de classe C^1 alors et par composition la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ est de classe C^1 sur $[a_{i-1}, a_i]$.

On conclut ainsi que γ est bien un chemin.

3.*b*. De la définition, et en utilisant la rela tion de Chasles pour les intégrales nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^{b+d-c} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(t-b+c))\gamma_2'(t-b+c)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ et en effectuant le changement de variables $u = t-b+c$ nous obtenons :

$$\int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(t-b+c))\gamma_2'(t-b+c)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(\gamma_2(u))\gamma_2'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ainsi :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

II.B. Étude de la somme d'une série entière et application

1 **1.*a*.** Soit $y_0 \in]-R, R[$, posons $I = \left]-\sqrt{R^2-y_0^2}, \sqrt{R^2-y_0^2}\right[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x+iy_0)$.

Pour tout $x \in I$, nous avons : $|x+iy_0| = \sqrt{x^2+y_0^2} < \sqrt{R^2-y_0^2+y_0^2} = R$, donc g est bien définie sur I et de plus $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy_0)^n$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, : $g_n(x) = a_n(x+iy_0)^n$. Nous avons :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe C^1 sur I.

• La série $\sum g_n$ converge simplement sur I, de somme g.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $g_n'(x) = na_n(x+iy_0)^{n-1}$ et $g_0'(x) = 0$.

Soit J un compact inclus dans I, l'application $\phi : x \longmapsto x+iy_0$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, donc $\phi(J)$ est un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\phi(J) \subset D(0,R)$.

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ est de rayon de convergence R (c'est la série dérivée de $\sum a_n z^n$) donc, elle converge uniformément sur tout compact inclus dans $D(0,R)$, en particulier sur $\phi(J)$.

Et par suite la série entière $\sum na_n(x+iy_0)^{n-1}$ converge uniformément sur J.
En conclusion : g est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in$ I, $g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy_0)^{n-1}$.

1.*b*. Soit $\mathcal{U}=\psi^{-1}(D(0,R))$, pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\widetilde{f}(x,y)=f(x+iy)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$.
Soit $y\in]-R,R[$, posons $I_y=\left]-\sqrt{R^2-y^2},\sqrt{R^2-y^2}\right[$ $(=\mathbb{R}$ si $R=+\infty)$
D'après la question (a), l'application $g_y : x\longmapsto f(x+iy)$ est dérivable sur I_y et pour tout $x\in I_y$, $g_y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$. Ainsi, $\widetilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable et pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$.
• Soit $x\in]-R,R[$, posons $I_x=\left]-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}\right[$ $(=\mathbb{R}$ si $R=+\infty)$ on montre de la même façon que l'application $h_x : y\longmapsto f(x+iy)$ est dérivable sur I_x et pour tout $y\in I_x$, $h_x'(y)=\sum_{n=1}^{+\infty} ina_n(x+iy)^{n-1}$.

Donc $\widetilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty} ina_n(x+iy)^{n-1}$. On en déduit que pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$,

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$$

1.*c*. Nous avons pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, posons $g_n(x,y)=na_n(x+iy)^{n-1}$. Nous avons :
• $\forall n\in\mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $\mathcal{U}$.
• Soit K un compact inclus dans $\mathcal{U}$, comme ψ est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors $\psi(K)$ est un compact inclus dans $D(0,R)$.
Ainsi la série entière $\sum na_n z^{n-1}$ converge uniformément sur $\psi(K)$, donc la série $\sum g_n(x,y)$ converge uniformément sur K. La fonction, $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathcal{U}$.

D'après (b) $\forall(x,y)\in\mathcal{U}$, $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$, donc $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Ainsi $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$, $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$.
Donc f vérifie la propriété **(H)**.

1.*d*. Il suffit de considérer la fonction $F : D(0,R)\longrightarrow\mathbb{C}$ définie comme étant la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{a_{n+1}}{n+1}z^{n+1}$ qui admet le même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$: R ce qui montre, en remplaçant dans les questions II.B.1.*a* et II.B.1.*a*, f par F, que F vérifie la propriété (**H**) et que : $\dfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}=\widetilde{f}$.

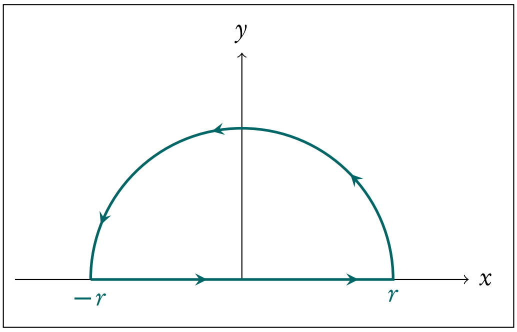
2 Application

2.*a*. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons : $a_n=\dfrac{i^{n+1}}{(n+1)!}$. On a alors : $|a_n|=\dfrac{1}{(n+1)!}$, ce qui montre que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$, non nul nous avons :

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{n+1}}{(n+1)!}z^n=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^{iz}-1}{z}$$

.

2.*b*. On remarque que γ_r^1 et γ_r^2 définissent bien des chemins (puisqu'elles sont de classe C^1) et de plus on a : $\gamma_r^1(1)=r=\gamma_r^2(0)$, ce qui montre, d'après la question II.A.3.*a*, que $\gamma_r:=\gamma_r^1\vee\gamma_r^2$ défini bien un chemin.



De plus, $\gamma(0)=\gamma_r^1(0)=-r=\gamma_r^2(1)=\gamma(1)$ ce qui montre que γ est un lacet.
Alors et d'après la question II.A.2.*b*, on déduit que : $\displaystyle\int_{\gamma_r}g(z)\,dz=0$.

2.*c*. De la question II.A.3.*b*, nous obtenons

$$\int_{\gamma_r^1}g(z)\ dz=\int_{\gamma_r^1}g(z)dz+\int_{\gamma_r^2}\frac{e^{iz}-1}{z}dz$$

et comme $\displaystyle\int_{\gamma_r} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$ alors,

$$\int_{\gamma_r^1} g(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z$$

2.d. On note h la fonction $u \longmapsto \dfrac{\sin u}{u}$ prolongée par continuité en 0 ; montrer que
Par définition de l'intégrale le long d'un chemin nous obtenons :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{e^{ir(2t-1)}-1}{(2t-1)} 2\,\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variables $u=(2t-1)r$, nous obtenons :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} \frac{e^{iu}-1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{-r}^{r} 2ie^{iu/2}\frac{\sin(u/2)}{u}\,\mathrm{d}u$$

En séparant la partie réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z)\,\mathrm{d}z = i\int_{-r}^{r} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - 2\int_{-r}^{r} \frac{\sin^2(u/2)}{u}\,\mathrm{d}u$$

et comme les fonctions à intégrer sont respectivement paire et impaire, il vient que :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z)\,\mathrm{d}z = 2i\int_0^r h(u)\,\mathrm{d}u$$

D'autre part, et d'après la question II.A.1, on reconnaît que :

$$\int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{r,\pi}} \frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{I}(r)$$

On déduit, en comparant avec l'égalité de la question précédente, que :

$$\int_0^r h(u)\,\mathrm{d}u = \frac{i}{2}\mathrm{I}(r)$$

et comme $\mathrm{I}(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -i\pi$ alors :

$$\int_0^r h(u)\,\mathrm{d}u \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

III 3ème Partie : Analyticité des applications vérifiant la propriété (H).

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

la propriété **(H)**.

1 Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$, donc il existe $\rho_0 > 0$ tel que $\mathrm{D}(z_0,\rho_0) \subset \Omega$, alors l'ensemble $\{\rho > 0;\ \mathrm{D}(z_0,\rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R=+\infty$.

2 On note φ l'application de $]0,R[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(r,\theta)=f(z_0+re^{i\theta})=\widetilde{f}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$$

On a l'application $(r,\theta)\longmapsto(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$ et $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\psi^{-1}(\Omega)$ donc φ est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$. Pour tout $(r,\theta)\in]0,R[\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\times\cos\theta+\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\times\sin\theta\\ &= e^{i\theta}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) &= \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\times(-r\sin\theta)+\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\times(r\\ &= ire^{i\theta}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall(r,\theta)\in]0,R[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)=ir\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)$$

3 Pour tout $r\in]0,R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_r(\theta)=\varphi(r,\theta)=f(z_0+re^{i\theta})$$

3.*a*. Soit $r\in]0,R[$. φ est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$, donc φ_r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\varphi_r(\theta+2\pi)=f(z_0+re^{i(\theta+2\pi)})=f(z_0+re^{i\theta})=\varphi_r(\theta)$, donc φ_r est 2π périodique sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\varphi_r'(\theta)=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)=ire^{i\theta}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$$

On note $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r.

3.*b*. φ_r est 2π périodique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc la suite $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors la série de Fourier de la fonction φ_r converge normalement sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Dirichlet, la somme de cette série est φ_r.

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \varphi_r(\theta)=c_0(r)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n(r)e^{in\theta}+c_{-n}(r)e^{-in\theta}\right)$$

4 On pose $h_n(r)=\dfrac{c_n(r)}{r^n}$, $r\in]0,R[$, $n\in\mathbb{Z}$.

4.a. $\forall r \in]0,R[\,,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$

4.b. Soit $n \in \mathbb{Z}$, posons $g(r,\theta) = \varphi_r(\theta)e^{-in\theta} = \varphi(r,\theta)e^{-in\theta}$ pour tout $(r,\theta) \in]0,R[\times[0,2\pi]$. φ est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$ donc g est de classe C^1 sur $]0,R[\times[0,2\pi]$.

D'après la formule de Leibniz (Dérivation sous le signe intégrale), la fonction $r \longmapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0,R[$ et

$$\forall r \in]0,R[\ \ c_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Pour tout $(r,\theta) \in]0,R[\times\mathbb{R}$ $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta) = i\,r\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta)$, alors $c_n'(r) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{ir}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Une intégration par parties donne :

$$c_n'(r) = [\varphi_r(\theta)e^{-in\theta}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ir}\times in\int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{n}{r}c_n(r)$$

4.c. Puisque la fonction $r \longmapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0,R[$, alors $h_n$est de classe C^1 sur $]0,R[$ et $\forall r \in]0,R[$, $h_n'(r) = \dfrac{rc_n'(r) - nc_n(r)}{r^{n+1}} = 0$.

Donc h_n est constante sur $]0,R[$.

4.d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\rho \in]0,R[$. L'application $h(r,\theta) = \tilde{f}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)e^{in\theta}$ est continue sur $[-\rho,\rho]\times[0,2\pi]$, donc, par le théorème d'intégration sous le signe intégral, l'application

$r \longmapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta$ est continue sur le compact $[-\rho,\rho]$, par suite elle est bornée sur $[-\rho,\rho]$.

Par suite l'application $r \longmapsto c_{-n}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta$ est bornée sur $]0,\rho]$ et alors $\displaystyle\lim_{r\longmapsto 0^+} h_{-n}(r) = \lim_{r\longmapsto 0^+} c_{-n}(r)\times r^n = 0$. Comme h_{-n} est constante sur $]0,R[$, alors $h_{-n} = 0$ sur $]0,R[$. Ainsi, pour tout $r \in]0,R[$, $c_{-n}(r) = \dfrac{h_{-n}(r)}{r^n} = 0$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $a_n = h_n(r)$. Soit $r \in]0,R[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| = |c_n(r)|$. D'après (3.b) Partie 3), la suite $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente, et par suite le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R.

Soit $z \in D(z_0,R)$ tel que $z \neq z_0$, alors il existe $(r,\theta) \in]0,R[\times\mathbb{R}$ tel que $z = z_0 + re^{i\theta}$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, $c_n(r) = 0$ donc

$$f(z)=f(z_0+re^{i\theta})=\varphi_r(\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(r)e^{in\theta}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(re^{i\theta})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Posons $\forall z\in \mathrm{D}(z_0,\mathrm{R})$, $g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ et $\mathrm{A}=\mathrm{D}(z_0,\mathrm{R})\setminus\{z_0\}$.

On a f et g sont continues sur $\mathrm{D}(z_0,\mathrm{R})$ et pour tout $z\in\mathrm{A}$, $f(z)=g(z)$, donc $\forall z\in \bar{\mathrm{A}}$ $f(z)=g(z)$, en particulier, $\forall z\in\mathrm{D}(z_0,\mathrm{R})$ $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$.

6 Posons pour tout $z\in\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $h(z)=f(z+z_0)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$. Pour tout $x\in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, $h(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Donc h est développable en série entière en 0 et d'après l'unicité du développement en série entière, on déduit l'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7 On a φ_r est continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ alors et d'après la formule de Parseval , $\|\varphi_r\|_2^2=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n(r)|^2$ c'est à dire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}\qquad (\text{Formule de Gutzmer})$$

8 Application au théorème de Liouville Supposons que f est bornée, alors il existe $\mathrm{M}>0$ tel que : $\forall z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\leq\mathrm{M}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a d'après la formule de Gutzmer, pour tout $r\in]0,+\infty[$,

$$\left|a_nr^{2n}\right|\leq\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2r^{2k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta\leq\mathrm{M}^2 \text{ donc } a_n=0,$$

car sinon et en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient une absurdité. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=a_0$; et donc f est constante.

FIN DU CORRIGÉ

Rien ne saurait remplacer un livre en papier

Des livres de prépas très joliment imprimés
à des prix très accessibles

Al9ahira

en ligne

En 3 clics seulement, on livre, tu étudies

CLICK HERE

La qualité est notre point fort.

Vos commentaires sont importants pour nous
Pour toute information, n'hésitez pas à nous contacter

mailto:al9ahira@gmail.com
http://al9ahira.com/
Tél : 0539/34 33 20
7, rue Égypte. Tanger