ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2009
Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée
INSEA

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

1. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de g en fonction de φ'.
   (c) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ''.
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$(1+t^2)x'' + 2tx' = t. \tag{1}$$
3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles
$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3}. \tag{2}$$
   (a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie l'équation différentielle (1).
   (b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.
   (c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (2).

PROBLÈME

1ère Partie
Calcul de l'intégrale de Gauss

Soit a un réel strictement positif ; on pose

$$\mathcal{C}(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \leqslant x \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant a\} \quad \text{et} \quad \Delta(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant a\}.$$

1. Dessiner les parties $\mathcal{C}(a)$ et $\Delta(a)$ de $\mathbb{R}^2$ sur un même graphique.
2. Justifier que $\displaystyle\iint_{\mathcal{C}(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_0^a e^{-t^2}\,dt\right)^2$.
3. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^a \left(\int_x^a e^{-x^2-y^2}\,dy\right)dx = \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}\,dy\right)dx$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\iint_{\mathcal{C}(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = 2\int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}\,dy\right)dx = 2\iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$.

4. (a) En utilisant un changement de variable, montrer que

$$\iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} re^{-r^2}\,dr \right) d\theta.$$

(b) En déduire que $\left(\int_0^a e^{-t^2}\,dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta.$

(c) Montrer que $0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta \leqslant \frac{\pi}{4}e^{-a^2}$. Quelle est alors la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta$?

5. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Montrer que la fonction $t \mapsto t^2e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt$.

7. (a) Montrer de même que la fonction $t \longmapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

(b) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

2ème Partie
Approximation polynômiale uniforme de la valeur absolue sur $[-1,1]$

A. Quelques résultats préliminaires

1. (a) Justifier que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0,n]$, $e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n \geqslant 0$.

2. (a) Justifier que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t)^n e^{nt} \geqslant (1-t^2)^n$.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2$.

(d) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0,n]$, $e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n \leqslant \frac{u^2}{n}e^{-u}$.

B. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n et tout réel α, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt\ ;\ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) À l'aide d'une intégration par partie montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

(c) En déduire que la suite $\left(nI_nI_{n-1} \right)_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\pi/2$.

2. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

(b) Déduire de ce qui précède l'encadrement $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, valable pour $n \geqslant 1$.

3. (a) En utilisant la question 1.(b) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

   (b) Dans la suite on pose $\lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

   (c) En déduire un équivalent de λ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

C. Deux suites de polynômes approchant uniformément la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad P_n = \lambda_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} X^{2k}.$

1. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

   (b) Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$, $P_n(x) = \lambda_n x \displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\, dt.$

   (c) En déduire que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$, $P_n(x) = \lambda_n \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}\, du.$

2. Soit x un réel non nul ; montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\, du = |x|\sqrt{\pi}.$

3. Soient n un entier $\geqslant 1$ et $x \in]0, 1]$; on pose

$$\Delta_n(x) = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}\, du \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\, du.$$

   (a) Vérifier que $P_n(x) - x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\lambda_n\sqrt{n\pi}\Delta_n(x) - \Delta(x)\Big)$ et montrer que

$$\big|P_n(x) - x\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\big(\frac{1}{4n}+1\big)|\Delta_n(x) - \Delta(x)| + \frac{1}{4n}\Delta(x)\Big).$$

   (b) Montrer que

$$\big|\Delta_n(x) - \Delta(x)\big| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2} - (1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}\, du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\, du \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   (c) Montrer alors que $\displaystyle\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} \Big|P_n(t) - |t|\Big| \leqslant \Big(\frac{1}{4n}+1\Big)\Big(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\Big) + \frac{1}{4n}.$

   (d) Conclure que la suite $\big(P_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur le segment $[-1, 1]$ vers la fonction $|.| :\ t \longmapsto |t|$ et que $\||P_n - |.|\||_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où $\|P_n - |.|\|_\infty := \displaystyle\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} \Big|P_n(t) - |t|\Big|$.

4. On pose $Q_n = \lambda_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2k}{2k-1} X^{2k}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant la suite $\Big(Q_n - P_n\Big)_{n\geqslant 1}$, montrer que la suite $\big(Q_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1, 1]$ et que $\|Q_n - |.|\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

FIN DE L'ÉPREUVE