Concours National Marocain
Session 2003
EPREUVE Math II - PSI

CORRIGÉ

$1^{\text{ére}}$ Partie

1. Pour cela il faut montrer que Φ est linéaire, ce qui simple en vérifiant l'égalité $\Phi(P+\lambda Q)=\Phi(P)+\lambda\Phi(Q) \quad \forall (P,Q)\in E^2;\forall\lambda\in\mathbb{R}$ et que $\Phi(P)\in E_n \quad \forall P\in E_n$, en effet : soit $P\in E_n$ donc $\deg P\leqslant n$ donc $\deg(\Phi(P))=\deg\left(((X^2-1)P')'\right)=\deg\left(((X^2-1)P')\right)-1=$ $2+\deg P'-1=\deg P\leqslant n$, donc $\Phi(P)\in E_n$ et donc Φ induit un endomorphisme Φ_n de E_n .
2. Ecrire la matrice de $\Phi_n(1)=0,\Phi_n(X)=2X,\ldots,\Phi_n(X^k)=((X^2-1)kX^{k-1})'=k(X^{k+1}-X^{k-1})'=k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2},\ldots,\Phi_n(X^n)=$ $n(n+1)X^n-n(n-1)X^{n-2}$. Donc

$$M=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & (k-1)k & \ddots & \\ & & \ddots & k(k+1) & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & (n-1)n \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de $\Phi_n \Leftrightarrow M-\lambda I_n$ non inversible, or $M-\lambda I_n$ est une matrice triangulaire, donc serait non inversible si l'un des ses termes diagonaux $(\lambda-k(k+1))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est nul, c'est à dire $\lambda\in\{0,2,\ldots,k(k+1),\ldots,n(n+1)\}$, Ainsi Φ_n est un endomorphisme de E_n qui admet $n+1=\dim E_n$ valeurs propres distinctes donc diagonalisable.
4. (a) $\mu_k=k(k+1)$, Soit $P(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX_n\in E_n$ polynôme , en notant $Y=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ l'équation $\Phi_n(P)=\mu_kP$ s'écrit matriciellemnt $MY=\mu_kY$ ou bien $Y\in\ \mathrm{Ker}(M-\mu_kI_n)$, or $M-\mu_kI_n$ est une matrice triangulaire supérieure dont un seul terme est nul, donc de rang égal à $n-1$ et par suite dim $\mathrm{Ker}(M-\mu_kI_n)=1$, on peut donc conclure que les solutions de l'équation $\Phi_n(P)=\mu_kP$ sont tous proportionnels, et parmi ces solution il n'y a bien sûr qu'un seul un unique polynôme unitaire P_k tel que : $\Phi_n(P_k)=\mu_kP_k$.

(b) Posons $\deg P_k = p$, donc $P_k(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_pX_p$ avec $a_p \neq 0$, $\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k \implies (X^2-1)P_k" + 2XP_k' = \mu_k P_k$, en identifiant dans cette égalité les coefficient de la plus grande puissance qui est X^p on trouve $a_p(p(p-1)) + 2p) = a_p\mu_k$ qui devient puisque $a_p \neq 0$, $\quad p(p+1) = k(k+1)$ ou bien $k^2 - p^2 = p-k$. Si $p \neq k$ cette égalité devient aprés simplification par $p-k$, $k+p=-1$ ce qui est impossible, donc $\deg P_k = p = k$.

5. La symétrie, bilinéarité et positivité ne posent aucun probléme. Juste la notion de définie qui mérite un peu de rédaction, soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)dt = 0$, ainsi P^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle sur $[-1,1]$ donc $P^2 = 0$ et aussi $P = 0$ sur $[-1,1]$, on a donc un polynôme P qui admet une infinité de racines donc $P = 0$.

6. Pour tout $(P,Q) \in E^2$ on a : $(\Phi(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)P'(t)\right)' Q(t)dt =$
$\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{t=-1}^{t=1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt = 0 - \Bigg(\left[P(t)(t^2-1)Q'(t)\right]_{t=-1}^{t=1} - \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\left((t^2\right.$
$(P|\Phi(Q))$, on a procédé à deux reprises par une intégration par parties.

7. Pour tout couple (k,k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a $(\Phi(P_k)|P_{k'}) = (P_k)|\Phi(P_{k'})) \implies \mu_k(P_k|P_{k'}) = \mu_{k'}(P_k|P_{k'}) \implies (\mu_k - \mu_{k'})(P_k|P_{k'}) \implies (P_k|P_{k'}) = 0$, car
$k \neq k' \implies \mu_k = k(k+1) \neq \mu_{k'} = k'(k'+1)$.

8. (a) D'aprés la question précédente la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est othogonale, en plus tous ses éléments sont des polynômes non nuls car unitaires, donc c'est une famille libre, et elle est de carinal $n+1 = \dim E_n$ donc c'est une base de E_n, pour en construire une base orthonormée $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$, comme la famille est déjà orthogonale il suffit de normaliser ses éléments en le divisant par sa norme, c'est à dire prendre $R_k = \dfrac{P_k}{||P_k||}$.

   (b) Soit $P \in E_n, \|P\| = 1$, donc $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k R_k$ avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$ car $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ est une b.o.n de E_n, d'autre part $\forall \quad 0 \leqslant k \leqslant n$ on a :
$\Phi_n(R_k) = \Phi_n\left(\dfrac{P_k}{||P_k||}\right) = \dfrac{\Phi_n(P_k)}{||P_k||} = \dfrac{\mu_k P_k}{||P_k||} = \mu_k R_k$, ainsi
$\Phi_n(P) = \Phi_n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k R_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_n(R_k) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mu_k (R_k)$, comme
$(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ est une b.o.n de E_n alors $\|\Phi_n(P)\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \mu_k^2} \leqslant$

$\mu_n\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} = \mu_n$ donc
$|||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\} \leqslant \mu_n$.
Inversement : $\|R_n\| = 1$ donc $\|\Phi_n(R_n)\| = \mu_n \leqslant |||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\}$ d'où l'égalité .

2ème Partie

1. (a) $L_k = \dfrac{1}{2^k k!}U_k = \dfrac{1}{2^k k!}V_{k,k} = \dfrac{1}{2^k k!}[(X^2-1)^k]^{(k)}$, donc $\deg L_k = \deg\left([(X^2-1)^k]^{(k)}\right) = \deg(X^2-1)^k - k = 2k - k = k$, le coefficient dominant de L_k est obtenu en dérivant k fois la plus grande puissance de $(X^2-1)^k$ qui est X^{2k}, or $(X^{2k})^{(k)} = (2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k = \dfrac{(2k)!}{k!}X^k$, donc le coefficient dominant de L_k est $\dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{(2k)!}{k!} = \dfrac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ $\left((X^2-1)^k\right)^{(k)} = \left((X-1)^k(X+1)^k\right)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \mathcal{C}_k^p \left((X-1)^k\right)^{(p)} \left((X+1)^k\right)^{(k-p)}$ (*), or 1 est une racine de $(X-1)^k$ de multiplicité k donc $\left((X-1)^k\right)^{(p)}(X=1) = 0$ pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-1$, donc en remplaçant dans (*) X par 1, on trouve
   $L_k(1) = \dfrac{1}{2^k k!}\mathcal{C}_k^k \left((X-1)^k\right)^{(k)}(X=1)\left((X+1)^k\right)^{(0)}(X=1) = 1$.

   (c) Du fait que la dérivée d'un polynôme pair est impair et comme $(X^2-1)^k$ est pair, alors sa dérivée k-ème est impaire si k impair, et elle est paire si k est pair, on peut donc conclure que la parité du polynôme L_k est la même que celle de k .

   (d) $L_k(-1) = L_k(1)$ si k pair et $L_k(-1) = -L_k(1)$ si k impair .

2. (a) $V_{p,q} = \left((X^2-1)^p\right)^{(q)}$, or 1 et -1 sont des racine de $(X^2-1)^p$ de multiplicité p, donc pour $q < p$ alors $\left((X^2-1)^p\right)^q(1) = V_{p,q}(1)$ et de même $V_{p,q}(-1) = 0$.

   (b) Si $q > 2p$, on est dans la situation où l'ordre de la dérivée depasse le degré donc $V_{p,q} = 0$.

   (c) En effectuant la première intégration par partie on a que $\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que :$p \neq q$ en supposant par exemple $p > q$; $(U_p|U_q) = \int_{-1}^{1}\left((t^2-1)^p\right)^{(p)}\left((t^2-1)^q\right)^{(q)}dt =$
   $\left[\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)}\left((t^2-1)^q\right]^{(q)}\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1}\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)}\left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)}dt$

$$= 0 - \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)} dt = -\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)} dt$$

car $\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)}(t=1) = \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)}(t=-1) = 0$.
En En effectuant une deuxième intégration par partie on aura $(U_p|U_q) = \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-2)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+2)} dt$, et ainsi de suite jusqu'à avoir $(U_p|U_q) = (-1)^p \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(0)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+p)} dt =$ 0 car $\left((t^2-1)^q\right)^{(q+p)} = 0$ puisque l'ordre de dérivée qui est ici $q+p$ dépasse le degré qui est ici $2q$, notez bien qu'on a supposé au départ $p > q$, le raisonnement sera pareil si l'on suppose $q > p$.

3. On déduit de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_k)$ est une famille orthogonale donc la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une famille orthogonale or $\forall\, 0 \leqslant p \leqslant k; \deg L_p = p \leqslant k$, donc c'est une famille orthogonale de E_k, tous ses éléments sont non nuls donc est libre et comme sont cardinal est $k+1 = \dim E_k$ alors c'est une base orthogonale de E_k.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, on a : $(XL_n|L_k) = \int_{-1}^{1} tL_n(t)L_k(t)dt = \frac{1}{2^n n! 2^k k!} \int_{-1}^{1} t \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \left((t^2-1)^k\right)^{(k)} (t)dt$
$= \frac{1}{2^n n! 2^k k!} \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} t \left((t^2-1)^k\right)^{(k)} (t)dt = (L_n|XL_k)$.
Or L_n est orthogonal à tous les $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ qui forment une base de E_{n-1} donc sera orthogonal à tout élément de XL_k qui est un polynôme de degré $k+1 \leqslant n-1$, d'où $(XL_n|L_k) = 0$.

   (b) D'aprés les questions précédentes L_{n+1}, L_n, L_{n-1} est une base de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1}, et d'aprés la question précédente XL_n est un élément de E_{n+1} orthogonal à tous les $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-2}$ qui forment une base de E_{n-2}, donc XL_n est un élément de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1} et va alors s'écrire comme combinaison linéaire de L_{n+1}, L_n, L_{n-1}.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XL_n = aL_{n+1} + bL_n + cL_{n-1}$, d'autre part $\deg L_k = k$ donc $a \neq 0$ et alors $L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}$ avec $(\alpha_n = \frac{1}{a}, \beta_n = -\frac{b}{a}, \gamma_n = -\frac{c}{a}) \in \mathbb{R}^3$

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (X^2-1)W'_n = (X^2-1)(X^2-1)^{n\prime} = (X^2-1)2nX(X^2-1)^{n-1} = 2nXW_n$.

   (b) En dérivant $(n+1)$-fois l'expression précèdente, on obtient aprés avoir utilisé la formule de Leibniz : $\left((X^2-1)W'_n\right)^{n+1} = 2n\,(XW_n)^{n+1}$ qui devient
$\sum_{p=0}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^p (X^2-1)^{(p)} (W'_n)^{(n+1-p)} = 2n \sum_{p=0}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^p X^{(p)} W_n^{(n+1-p)}$, or

$(X^2-1)^{(p)}=0$ pour $p\geqslant 3$ et $X^{(p)}=0$ pour $p\geqslant 2$, on obtient donc
$W_n^{(n+2)}+(n+1)2XW_n^{(n+1)}+n(n+1)W_n^{(n)}=2nXW_n^{(n+1)}+2n(n+1)W_n^{(n)}$ ou bien $\Phi_n(W_n)=(X^2-1)W_n^{(n)}{''}+(n+1)2XW_n^{(n)}{'}+n(n+1)W_n^{(n)}=2nXW_n^{(n)}{'}+2n(n+1)W_n^{(n)}$, ou encore $\Phi_n(W_n)=(X^2-1)W_n^{(n)}{''}+2XW_n^{(n)}{'}=n(n+1)W_n^{(n)}$ or par définition
$W_n^{(n)}=n!2^nL_n$ et comme Φ_n est linéaire alors : $\Phi_n(L_n)=n(n+1)L_n$.

(c) D'aprés la question 4.a il existe un unique polynôme unitaire P_n tel que :
$\Phi_n(P_n)=n(n+1)P_n$, et d'aprés la question précédente $\dfrac{L_n}{\mathrm{co}(L_n)}$ est aussi un polynôme unitaire tel que : $\Phi_n\left(\dfrac{L_n}{\mathrm{co}(L_n)}\right)=n(n+1)\dfrac{L_n}{\mathrm{co}(L_n)}$, donc $P_n=\dfrac{L_n}{\mathrm{co}(L_n)}$ et on peut en conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $a_n\in\mathbb{R}^*$ tel que $L_n=a_nP_n$, avec $a_n=\mathrm{co}(L_n)$, or $L_n=\dfrac{1}{2^nn!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$, donc :
$a_n=\mathrm{co}(L_n)=\dfrac{1}{2^nn!}\times$coefficient de $(X^{2n})^{(n)}=\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{(2n)!}{n!}=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

6. (a) $\forall k\in\mathbb{N}$ on a $(X|L_kL_k')=\displaystyle\int_{-1}^{1}tL_k(t)L_k'(t)dt=\frac{1}{2}\left[tL_k^2(t)\right]_{t=-1}^{t=1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}L_k^2(t)dt$
$=1-\dfrac{1}{2}\|L_k\|^2$ car $L_k(1)=1,L_k(-1)=\mp1$.

(b) Soit $k\geqslant 1$, $\deg L_k=k$, posons $L_k=a_kX^k+\ldots+a_0$ alors $XL_k'=ka_kX^k+\ldots+a_1X, kL_k=ka_kX^k+\ldots+ka_0$, en faisant la différence on obtient que : $XL_k'-kL_k$ est un polynôme de degré $\leqslant k-1$, c'est à dire $XL_k'-kL_k\in E_{k-1}$.
D'autre part L_k est orthogonal à tout polynôme de degré $\leqslant k-1$, en particulier à $XL_k'-kL_k$, donc $(XL_k'-kL_k|L_k)=0$ ou bien $(XL_k'|L_k)=k(L_k|L_k)=k\|L_k\|^2$, mais ceci pour $k\geqslant 1$, pour $k=0$ l'égalité est triviale puisque L_0 est un polynôme constant.
Donc on conclut que : $\forall k\in\mathbb{N},(XL_k'|L_k)=k\|L_k\|^2$.

(c) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a : $\|L_k\|^2=\frac{1}{k}(XL_k'|L_k)=\frac{1}{k}\int_{-1}^{1}tL_k'(t)L_k(t)dt=\frac{1}{k}\int_{-1}^{1}tL_k(t)L_k'(t)dt=\frac{1}{k}(X|L_kL_k')=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}\|L_k\|^2\right)$, ce qui donne $(2k+1)\|L_k\|^2=2$, d'où $\|L_k\|^2=\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$.

(d) D'aprés la question 5.5. L_k est un polynôme de degré k de coeffi-

cient dominant $\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$, donc $(k+1)L_{k+1} = (k+1)\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!^2}X^{k+1}+\ldots+\alpha_0 = (k+1)2(k+1)\frac{(2k+1)!}{2^{k+1}(k+1)!^2}X^{k+1}+\ldots+\alpha_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k(k)!^2}X^{k+1}+\ldots+\alpha_0$ et $(2k+1)XL_k = (2k+1)\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}X^{k+1}+\ldots+\beta_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}X^{k+1}+\ldots+\beta_0$, en faisant la différence on a bien $(k+1)L_{k+1}-(2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leqslant k$, d'autre part d'aprés la question 4.a XL_k est orthogonal à E_{k-2}, et L_{k+1} aussi, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)L_{k+1}-(2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leqslant k$, orthogonal à E_{k-2}, et par suite s'écrit sous la forme : $(k+1)L_{k+1}-(2k+1)XL_k = \alpha L_{k-1}+\beta L_k$ avec $\alpha = \frac{((k+1)L_{k+1}-(2k+1)XL_k|L_{k-1})}{\|L_{k-1}\|^2} = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(XL_k|L_{k-1}) = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)}tL_{k-1}dt$, moyennant des intégration par parties successives où tout les crochets sont nul puisque $\left[((t^2-1)^k)^{(p)}\right]_{t=-1}^{t=1} \quad \forall p<q$ vu que -1 et 1 sont des racines de $(t^2-1)^k)$ de multiplicité k on a : $\alpha = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(-1)^k\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k(tL_{k-1})^{(k)}dt$. Or tL_{k-1} est un polynôme de degré k donc $(tL_{k-1})^{(k)} = k!\,\mathrm{co}(tL_{k-1}) = k!\,\mathrm{co}(L_{k-1}) = k!\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$, donc $\alpha = \frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(-1)^{k+1}k!\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k dt$
$= (-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!}{2^{k-1}k!(2k-1)}I_k$ où $I_k = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^k dt$, dit intégrale de Wallis, on montre par récurrence que : $(-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!}{2^{k-1}k!(2k-1)}I_k = (2k+1)$.
De même $\beta = \frac{((k+1)L_{k+1}-(2k+1)XL_k|L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{(2k+1)XL_k|L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{1}{\|L_k\|^2}\int_{-1}^{1}tL_k^2(t)dt = 0$ car la fonction $t \mapsto tL_k^2(t)$ est impaire sur $[-1,1]$ donc son intégrale est nulle, donc on conclut que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)L_{k+1} = (2k+1)XL_k - kL_{k-1}$.

3ème Partie

1. (a) Pour tout $Q \in E_n$, $Q_n(t)Q(t)$ est un polynôme de degré inférieur à $2n+1$ car $\deg Q \leqslant n; \deg Q_n = n+1$, or la méthode est d'ordre $2n+1$ donc $\mathcal{E}(QQ_n) = 0$ c'est à dire : $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)dt = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i Q_n(x_i)Q(x_i) = 0$ car les x_i sont des racines de Q_n.

   (b) D'aprés la question précédente $\dfrac{Q_n}{\|Q_n\|}$ est un polynôme de degré $n+1$ orthogonal à E_n, or l'orthogonal de E_n dans E_{n+1} est de dimension 1, et R_{n+1} est aussi un polynôme de degré $n+1$ orthogonal à E_n, donc $\dfrac{Q_n}{\|Q_n\|}$ et R_{n+1} sont proportionnels, comme

ils sont unitaires les deux alors $\dfrac{Q_n}{\|Q_n\|} = \pm R_{n+1}$.
On peut alors dire de $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont les racines de R_{n+1}.

(c) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $\mathcal{L}_k$ est un polynôme de degré inférieur à n, or la méthode est d'ordre $2n+1$ donc $\mathcal{E}(\mathcal{L}_k) = 0$ c'est à dire : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathcal{L}_k(t)(x_i) = \lambda_k$, car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.
En effet $Q_n(X) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$, donc $Q_n'(X) = i = 0n \displaystyle\prod_{j \neq i}^{n}(X - x_j)$, d'où
$Q_n'(x_k) = \displaystyle\prod_{j \neq k}^{n}(x_k - x_j) = \left(\frac{Q_n(X)}{X - x_k}\right)(X = x_k)$, d'où $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.
Ainsi $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k(t)dt$.

Rappel : Si $f_0, f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions dérivables alors $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} f_i$ est aussi dérivable, avec : $\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{n} f_i\right)' = i = 0n f_i' \displaystyle\prod_{j \neq i}^{n} f_j$.

(d) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $\mathcal{L}_k^2$ est un polynôme de degré inférieur à $2n$, or la méthode est d'ordre $2n+1$ donc $\mathcal{E}(\mathcal{L}_k^2) = 0$ c'est à dire : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k^2 dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathcal{L}_k^2(t)(x_i) = \lambda_k$, car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.

2. (a) Pour tout $Q \in E_n$, posons $P = Q - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i$, on a : $\forall k \in \{0, 1 \dots, n\}$
$P(x_k) = Q(x_k) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i(x_k) = 0$ car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$, ainsi P est alors un polynôme de degré inférieur à n qui admet $n+1$ racines distinctes, donc nul, d'où $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i$.

(b) Pour tout $Q \in E_n$, $\quad -11Q(t)dt = -11 \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i) - 11\mathcal{L}_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\lambda_i$, donc $\mathcal{E}(Q) = 0$, d'où la méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant n$.

(c) - $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont les $n+1$ racines distinctes de Q_n et

R_{n+1}, tous deux polynômes de degré $n+1$, donc sont proportionnels, (utiliser la décompostion en facteur irréductible d'un polynôme).
Or R_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur à n, donc Q_n aussi, d'où $\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)dt = 0$.
- On a donc $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt = \int_{-1}^{1} R(t)dt = i = 0n\lambda_i R(x_i)$, parceque R est un polynôme de degré inférieur à n, et la méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant n$, or $P(x_i) = Q_n(xi)Q(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$, donc $\int_{-1}^{1} P(t)dt = i = 0n\lambda_i P(x_i)$, d'où $\mathcal{E}(P) = 0$.

(d) Conclusion directe de la question précèdente.

FIN DU CORRIGÉ
