Concours National Commun
Session 2015
Filière PSI

Épreuve de Mathématiques I : Un corrigé [1]

Problème 1
Étude d'une fonction définie par une intégrale

Première partie
Convergence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

1.1.1. On a :

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- On a, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$ et, comme d'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ est aussi convergente.
- La fonction $t \longmapsto \left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right|$ est prolongeable par continuité en 0, car $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| = \frac{1}{2}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 et en suite elle convergente.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ est convergente et par suite la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

1.1.2. Soit $(\varepsilon, a) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < a$. Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \longmapsto \sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, a]$, intégrons donc par parties :

$$\int_\varepsilon^a \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^a \frac{1}{t}\times \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\times(1-\cos t)\right]_{t=\varepsilon}^{t=a} - \int_\varepsilon^a \frac{-1}{t^2}\times(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos a}{a} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^a \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1.1.3. • D'après la question précédente, pour $\varepsilon = 1$, on a

$$\forall a > 1,\quad \int_1^a \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos a}{a} - 1 + \cos 1 + \int_1^a \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En vertu de la question **1.1.1.**, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, du coup, par définition de l'intégrale généralisée, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie et, comme $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} = \frac{1-\cos a}{a} - 1 + \cos 1 = \cos 1 - 1$, car la fonction $a \longmapsto 1-\cos a$ est bornée, alors $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie, dès lors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

• La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, car $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ faussement impropre en 0 et en suite elle convergente.

1. Ce corrigé est proposé par Adham Elbekkali, professeur de mathématiques de la classe PCSI 2 au CPGE de Tanger

- Conclusion : comme les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

1.2.1. Soient $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ikt}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikt}\right)$. Comme $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{e}^{it} \neq 0$ et par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{it})^k = \mathrm{e}^{it}\frac{(\mathrm{e}^{it})^n - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \mathrm{e}^{it}\frac{\mathrm{e}^{int} - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \mathrm{e}^{it}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{nt}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{nt}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{tn}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
Du coup $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}t}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)$. Finalement [2]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{-t}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{2} + n = \frac{2n+1}{2}$.

1.2.2. En vertu de la question précédente, on a, pour tout $t \in]0, \pi]$, $\displaystyle\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi} + \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

1.3.1. • Pour tout $t \in]0, \pi]$, on a $g(t) = \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}$, donc la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$ et on a

$$\forall t \in]0, \pi],\ g'(t) = -\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} + \frac{1}{t^2}.$$

- Pour tout $t \in]0, \pi]$, on a

$$g(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{t - 2\left[\frac{t}{2} + o(t)\right]}{2\left[\frac{t}{2} + o(t)\right]} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{o(t)}{t + o(t)} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 = g(0)$$

- Pour tout $t \in]0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}g'(t) &= -\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} + \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2\cos\frac{t}{2} + 4\sin^2\frac{t}{2}}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}}\\ &\underset{t\to 0^+}{=} \frac{-t^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + o(t^2)\right] + 4\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + o(t^4)\right]^2}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}}\\ &\underset{t\to 0^+}{=} \frac{\left[-t^2 + \frac{1}{8}t^4 + o(t^4)\right] + 4\left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + o(t^4)\right]}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}}\\ &\underset{t\to 0^+}{=} \frac{\frac{t^4}{24} + o(t^4)}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{t^4}{24}}{4t^2\left(\frac{t}{2}\right)^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{24} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

2. Rappel : $2\sin a\cos b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

- Conclusion : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, et de plus les limites $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} g'(t)$ existent et sont finies, donc, d'après le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement [3], la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1.3.2. Les fonctions $t \longmapsto g(t)$ et $t \longmapsto \sin\dfrac{2n+1}{2}t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, intégrons donc par parties :

$$\int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t = \left[g(t)\times\frac{-\cos\frac{2n+1}{2}t}{\frac{2n+1}{2}}\right]_0^\pi - \int_0^\pi g'(t)\frac{-\cos\frac{2n+1}{2}t}{\frac{2n+1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi g'(t)\cos\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t.$$

1.3.3. D'après la question **1.3.1.** la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donc g' est continue sur le segment $[0,\pi]$, du coup g' est bornée sur le segment $[0,\pi]$, c.à.d. : $\exists M\geq 0 : \forall t\in[0,\pi],\ \left|g'(t)\right|\leq M\ \ (\star)$.

En vertu de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
0\leq\left|\int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi g'(t)\cos\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \left|g'(t)\right|\left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi M \quad \text{car } \left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right|\leq 1 \text{ et } \left|g'(t)\right|\leq M \text{ d'après } (\star) \\
&= \frac{2\pi M}{2n+1}
\end{aligned}$$

et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\pi M}{2n+1}=0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t=0$.

1.4.1. Pour tout $t\in]0,\pi]$, on a

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t} = \sin\frac{2n+1}{2}t\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}+\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right] = \sin\frac{2n+1}{2}t\left[-g(t)+\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right] = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} - g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t,$$

donc, par passage à l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} - g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \quad \text{d'après les questions } \textbf{1.2.2.} \text{ et } \textbf{1.3.3.}
\end{aligned}$$

1.4.2. Calculons $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}\,\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $x=\dfrac{2n+1}{2}t$. Les nouvelles bornes de l'intégrale sont 0 et $\dfrac{2n+1}{2}\pi$, et de plus $t=\dfrac{2}{2n+1}x$ et $\mathrm{d}t=\dfrac{2}{2n+1}\,\mathrm{d}x$. Il s'ensuit que

$$\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin x}{\frac{2}{2n+1}x}\frac{2}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, d'après la question **1.1.3.**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, alors, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

3. Théorème de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I\setminus\{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i\in\{0,1,\dots,k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente, alors, grâce à l'unicité de la limite d'une suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

deuxième partie
Application à l'étude d'une fonction

2.1.1. on a :

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos(tx)}{(1+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $t\in[0,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{1-\cos(tx)}{(1+t)^2}\right| \leq \dfrac{2}{(1+t)^2}$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est convergent, car $\dfrac{2}{(1+t)^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{1-\cos(tx)}{(1+t)^2}\right|\mathrm{d}t$ converge et en suite la fonction $t\longmapsto\dfrac{1-\cos(tx)}{(1+t)^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2.1.2. Soit $a>0$. Les fonction $t\longmapsto\sin(xt)$ et $t\longmapsto\dfrac{1}{1+t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, intégrons donc par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^a\sin(xt)\times\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1-\cos(xt)}{x}\times\frac{1}{1+t}\right]_{t=0}^{t=a} - \int_0^a\frac{1-\cos(xt)}{x}\times\frac{-1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1-\cos(xa)}{x(1+a)}+\frac{1}{x}\int_0^a\frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2.1.3. D'après la question précédente, on a

$$\forall a>0,\quad \int_0^a\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(xa)}{x(1+a)}+\frac{1}{x}\int_0^a\frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t. \quad \spadesuit$$

Puisque la fonction $t\longmapsto\dfrac{1-\cos(tx)}{(1+t)^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la question **2.1.1.**, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Il s'ensuit que $\lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_0^a\frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie et, comme $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{1-\cos(xa)}{x(1+a)}=0$, alors, en vertu de $\spadesuit$, $\lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_0^a\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie, dès lors, par définition de la convergence d'une intégrale généralisée, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. De plus, par passage à la limite, lorsque $a\longrightarrow+\infty$, dans $\spadesuit$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

2.2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a

$$f(-x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin((-x)t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t = -f(x),$$

donc la fonction f est impaire.

2.3.1. Soit $x>0$. D'après la question **2.1.3.**, on a $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. Par ailleurs, on a

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad 0\leq\frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\leq\frac{2}{(1+t)^2},$$

donc, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{1+t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = 2,$$

par suite $0 \leq f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{2}{x}$ et, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2.3.2. Soit $x>0$. D'après la question **2.1.3.**, on a $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et, puisque les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ convergent, alors

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{1}{x}\left(\left[-\frac{1}{1+t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc, pour monter que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, il suffit de monter que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$ ou encore[4] $x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$.

Soit $a>0$. Les fonctions $t \longmapsto \cos(xt)$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ étant de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, intégrons donc par parties :

$$\begin{aligned} x\int_0^a \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^a \cos(xt)\times\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t &= x\left[\frac{\sin(xt)}{x}\times\frac{1}{(1+t)^2}\right]_{t=0}^{t=a} - x\int_0^a \frac{\sin(xt)}{x}\times\frac{-2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin(xa)}{(1+a)^2} + \int_0^a \frac{2\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t \end{aligned},$$

par suite

$$\begin{aligned} \left|x\int_0^a \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{\sin(xa)}{(1+a)^2} + \int_0^a \frac{2\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|\sin(xa)|}{(1+a)^2} + \int_0^a \left|\frac{2\sin(xt)}{(1+t)^3}\right|\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+a)^2} + \int_0^a + \left[\frac{-1}{(1+t)^2}\right]_{t=0}^{t=a} = 1, \end{aligned}$$

donc, par passage à la limite, lorsque $a \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\forall x>0, \quad \left|x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq 1,$$

ainsi $x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$ et par conséquent $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2.4.1. Soit $x>0$. D'après la question **2.1.3.**, on a $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. Maintenant, calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $u = xt$. Les nouvelles bornes de l'intégrale sont 0 et $+\infty$, et de plus $t = \dfrac{u}{x}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{x}$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{\left(1+\frac{u}{x}\right)^2}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{(x+u)^2}\,\mathrm{d}u.$$

Par conséquent $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{(x+u)^2}\,\mathrm{d}u$.

4. Rappelons que $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ signifie que la fonction est bornée au voisinage de a.

2.4.2. Soient $x, y \in]0, +\infty[$, on a

$$
\begin{aligned}
x < y &\Longrightarrow \forall u \in [0, +\infty[, \quad x + u < y + u \\
&\Longrightarrow \forall u \in [0, +\infty[, \quad (x+u)^2 < (y+u)^2 \\
&\Longrightarrow \forall u \in [0, +\infty[, \quad \frac{1}{(y+u)^2} < \frac{1}{(x+u)^2} \\
&\Longrightarrow \forall u \in [0, +\infty[, \quad \frac{1-\cos u}{(y+u)^2} \leq \frac{1-\cos u}{(x+u)^2} \\
&\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{(y+u)^2}\,\mathrm{d}u < \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{(x+u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&\Longrightarrow f(y) < f(x), \quad \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}
$$

donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et, comme elle impaire d'après la question **2.2.**, alors elle aussi strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

2.5.1. Soit $x > 0$. On a :

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(xt)}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\left|\dfrac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\right| \leq \dfrac{1}{(1+t)^3}$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ est convergente, car $\dfrac{1}{(1+t)^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ est convergente.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\right|\mathrm{d}t$ est convergente et par suite l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

Montrons maintenant que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Posons donc $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{(1+t)^3}$.

On a :

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{(1+t)^3}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall t \geq 0, \forall x > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t)^3}\cos(xt).$$

- Domination : $\forall t \geq 0, \forall x > 0, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t}{(1+t)^3}$, et la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{t}{(1+t)^3}$ est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $\dfrac{t}{(1+t)^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente.
- Pour tout $x \in]0, = \infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{(1+t)^3}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (on vient de le monter).
- pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t)^3}\cos(xt)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de dérivation sous signe intégral, la fonction $h : t \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^3}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

2.5.2. D'après la question précédente, la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \left|h'(x)\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)^3}\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{(1+t)^3}\cos(xt)\right|\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t+1-1}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

donc[5] la fonction h est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $]0,+\infty[$, c.à.d. : $\forall x,y>0,\ |h(x)-h(y)|\le\dfrac{1}{2}|x-y|$.

2.5.3. Soit $x>0$. D'après la question **2.3.2.**, on a

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $a>0$. Les fonctions $t\longmapsto\cos(xt)$ et $t\longmapsto\dfrac{1}{(1+t)^2}$ étant de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^a\cos(xt)\times\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin(xt)}{x}\times\frac{1}{(1+t)^2}\right]_{t=0}^{t=a}-\int_0^a\frac{\sin(xt)}{x}\times\frac{-2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sin(xa)}{x(1+a)^2}+\frac{2}{x}\int_0^a\frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et, comme $\dfrac{\sin(xa)}{x(1+a)^2}\xrightarrow[a\to+\infty]{}0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ est convergente d'après la question **2.5.1.**, alors, passage à la limite, lorsque $a\longrightarrow+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$. Par conséquent

$$\forall x>0,\quad f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}h(x).$$

Or la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ selon la question **2.5.1.**, alors la fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

2.6.1. Soit $x>0$. D'après la question **1.4.2.**, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$, donc $\displaystyle\frac{\pi}{2}-f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Maintenant, calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $u=xt$. Les nouvelles bornes sont 0 et $+\infty$, et de plus $t=\dfrac{u}{x}$ et $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{x}$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{1+\frac{u}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{x}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{x+u}\,\mathrm{d}u.$$

Finalement

$$\frac{\pi}{2}-f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{x+u}\,\mathrm{d}u=x\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u.$$

2.6.2. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u\right| &= \left|\int_0^{1}\frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u\right|\\ &\le \int_0^{1}\frac{|\sin u|}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{|\sin u|}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u\\ &\le \int_0^{1}\frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{1}{u(x+u)}\,\mathrm{d}t\quad\text{car } |\sin u|\le 1 \text{ et } \forall u\in[0,1],\ \sin u\ge 0\end{aligned}$$

5. Si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par k, alors f est k-lipschitzienne.

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \frac{u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(x+u)}\,\mathrm{d}t \quad \text{car } \forall u\in[0,1],\ \sin u \leq u\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x+u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} - \frac{1}{x+u}\,\mathrm{d}t\\
&= [\ln(x+u)]_{u=0}^{u=1} + \frac{1}{x}\left[\ln u - \ln(u+x)\right]_{u=1}^{u\to+\infty}\\
&= [\ln(x+u)]_{u=0}^{u=1} + \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{u}{x+u}\right)\right]_{u=1}^{u\to+\infty}\\
&= \ln(x+1) - \ln x + \frac{\ln(x+1)}{x}\\
&\leq \ln(x+1) - \ln x + 1 \quad \text{car } \forall x>-1,\ \ln(x+1)\leq x.
\end{aligned}$$

2.6.3. D'après la question précédente, on a

$$\forall x>0, \quad \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u\right| \leq 1 + \ln(x+1) - \ln x,$$

donc

$$\forall x>0, \quad 0 \leq \left|x\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u\right| \leq x + x\ln(x+1) - x\ln x,$$

et, comme $\lim\limits_{x\to0^+} x + x\ln(x+1) - x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} 0 = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to0^+} x\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u = 0$, donc, en vertu de la question **2.6.1.**, $\frac{\pi}{2} - f(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ et en suite $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, alors

$$\forall x\in]0,+\infty[, \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) < f(x) < \lim_{t\to0^+} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to0^+} f(t) = \sup_{t>0} f(t).$$

Or, on vient de trouver que $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = \frac{\pi}{2}$ et, d'après la question **2.3.1**, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, alors

$$\forall x\in]0,+\infty[, \quad 0 < f(x) < \frac{\pi}{2} = \sup_{t>0} f(t).$$

2.6.4. *Remarque : Rectifiez, dans cette question, une erreur de frappe : à la place de $+\infty$, il faut mettre 0^+.*

- Soit $x>0$. En vertu de la question **2.6.1.**, on a

$$\frac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u \quad \clubsuit$$

  et, d'après la question précédente, on a $f(x) < \frac{\pi}{2}$, donc $0 < \frac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u$.

- On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi}u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u \quad \text{car } \forall u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sin u \geq \frac{2}{\pi}u\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(x+\frac{2}{\pi}\right) - \ln x\right)
\end{aligned}$$

  et

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{-1}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{x}\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

  donc, en vertu de $\clubsuit$ ci-dessus, on a

$$\forall x>0, \quad \frac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(x+\frac{2}{\pi}\right) - \ln x\right) + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{x}\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty.$$

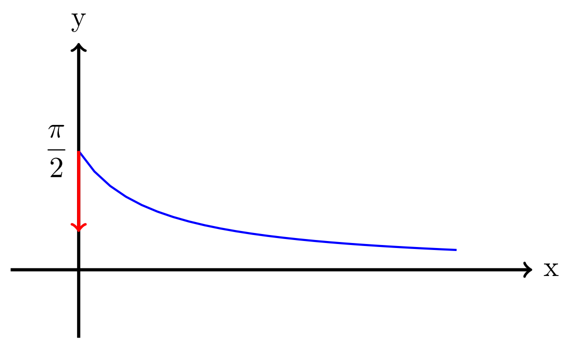
  Du coup, en vertu du théorème de minoration, $\frac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$.

2.7. • D'après la question **2.6.3.**, on a $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \frac{\pi}{2}$, donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{\pi}{2}$. D'après la question précédente, on a

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty,$$

donc la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• L'allure de la courbe représentative de f :



2.8. On a :

▶ En vertu de la question **2.5.3.**, la fonction f^2 est continue sur $]0, +\infty[$.

▶ D'après la question **2.3.2.**, on a $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $f^2(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Il s'en suite que, pour tout $x > 0$, $f^2(x) = \frac{1}{x^2} + g(x)$, avec $g(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente et par suite l'intégrale $\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ est convergent comme somme de deux intégrales convergentes.

▶ d'après la question **2.6.3.**, on a $\lim_{x \to 0^+} f^2(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, donc l'intégrale $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

▶ la fonction f^2 est positive sur $]0, +\infty[$.

Donc la fonction f^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Problème 2
Étude d'un problème de Dirichlet

Première partie
Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

3.1. • Soient $x, y \in \mathbb{Z}$, on a

$$y \in V(x) \iff \|y-x\|_1 \iff |y-x| = 1 \iff y-x=1 \text{ ou } y-x=-1 \iff y=x+1 \text{ ou } y=x-1,$$

donc $V(x) = \{x-1, x+1\}$.

• Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

$$\begin{aligned} f \text{ est harmonique sur } \mathbb{Z} \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = \frac{1}{2}\sum_{y \in V(x)} f(y) \quad \text{ car } d=1 \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \quad 2f(x) = f(x-1)+f(x+1) \ \text{ car } V(x) = \{x-1, x+1\} \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{Z},\ f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 0 \\ &\iff \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0. \end{aligned}$$

Dans la dernière équivalence, on a posé $k = x-1$ et on a utilisé le fait que lorsque x parcours $\mathbb{Z}$, alors k parcours aussi $\mathbb{Z}$.

3.2. *Rappel : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle vérifiant*

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ et, comme 1 est la seule racine de cette équation, alors il existe $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \geq n_0,\ u_n = \alpha n + \beta$.

Notons F l'ensemble des fonctions harmonique sur $\mathbb{Z}$. Soient $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad g(k) = f(-k).$$

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} f \in F \quad &\iff \quad f \text{ est harmonique sur } \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ &\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ \forall k \leq -1, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ \forall l \geq 1, \quad f(-l+2) - 2f(-l+1) + f(-l) = 0 \quad \text{ on a posé } l = -k \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ \forall l \geq 1, \quad g(l-2) - 2g(l-1) + g(l) = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ \forall k \geq -1, \quad g(k) - 2g(k+1) + g(k+2) = 0 \quad \text{ on a posé } k = l-2 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ \forall k \geq 1, \quad g(k) - 2g(k+1) + g(k+2) = 0 \\ g(-1) - 2g(0) + g(1) = 0 \\ g(0) - 2g(1) + g(2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \quad \exists \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} : \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k) = \alpha k + \beta \\ \forall k \geq 1, \quad g(k) = \alpha' k + \beta' \\ f(1) - 2f(0) + g(1) = 0 \\ f(0) - 2g(1) + g(2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \exists \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} : \begin{cases} \forall k \geq 0, \quad f(k) = \alpha k + \beta \\ \forall k \geq 1, \quad g(k) = \alpha' k + \beta' \\ \beta' = \beta \text{ et } \alpha' = -\alpha \end{cases}$$

$$\iff \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \forall k \geq 0, \ f(k) = \alpha k + \beta \\ \forall k \leq -1, \ f(k) = \alpha k + \beta \end{cases}$$

$$\iff \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ f(k) = \alpha k + \beta$$

donc $F = \{k \longmapsto \alpha k + \beta \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(f_1 : l \longmapsto k, f_2 : k \longmapsto 1)$, c.à.d. F est le s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ engendré par la famille (f_1, f_2) et, comme il est clair que cette famille est libre, alors F est un e.v. de dimension 2 dont une base est (f_1, f_2).

- Soit $x \in \mathbb{Z}$. D'après la question précédente, on a $V(x) = \{x-1, x+1\}$, donc

  $$x \in I(\mathbb{Z}^*) \iff V(x) \subset \mathbb{Z}^* \iff \{x-1, x+1\} \subset \mathbb{Z}^* \iff x - 1 \neq 0 \text{ et } x + 1 \neq 0 \iff x \neq 1 \text{ et } x \neq -1,$$

  en suite $I(\mathbb{Z}^*) = \{x \in \mathbb{Z}^* \ : \ V(x) \subset \mathbb{Z}^*\} = \{x \in \mathbb{Z}^* \ : \ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

- Notons G l'ensemble des fonctions harmoniques sur $I(\mathbb{Z})$. Soient $f : I(\mathbb{Z}^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $g : I(\mathbb{Z}^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

  $$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad g(k) = f(-k).$$

  On a

$$\begin{aligned}
f \in F \quad &\iff \quad f \text{ est harmonique sur } \mathbb{Z} \\
&\iff \quad \forall l \in I(\mathbb{Z}^*), f(l) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V(l)} f(y) \quad \text{ car } d = 1 \\
&\iff \quad \forall l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}, \ f(l+1) - 2f(l) + f(l-1) = 0 \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall l \geq 2, \ f(l+1) - 2f(l) + f(l-1) = 0 \\ \forall l \leq -2, \ f(l+1) - 2f(l) + f(l-1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall l \geq 2, \ f(l+1) - 2f(l) + f(l-1) = 0 \\ \forall l \geq 2, \ f(-l+1) - 2f(-l) + f(-l-1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall l \geq 2, \ f(l+1) - 2f(l) + f(l-1) = 0 \\ \forall l \geq 2, \ g(l-1) - 2g(l) + f(l+1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, \ f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0 \\ \forall k \geq 1, \ g(k) - 2g(k+1) + g(k+2) = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, \ f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) \\ \forall k \geq 1, \ g(k+1) = 2g(k+1) + g(k) \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \ \forall k \geq 1, \ f(k) = \alpha k + \beta \\ \exists \alpha', \beta' \in \mathbb{R} \ : \ \forall k \geq 1, \ g(k) = \alpha' k + \beta' \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \quad \exists \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \forall k \geq 1, \ f(k) = \alpha k + \beta \\ \forall k \leq 1, \ f(k) = -\alpha' k + \beta' \end{cases}$$
$$\iff \quad \exists \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \forall k \geq 1, \ f(k) = (\alpha k + \beta)\chi_{\mathbb{Z}_+^*}(k) + (-\alpha' k + \beta')\chi_{\mathbb{Z}_-^*}(k) \\ \forall k \leq 1, \ f(k) = (\alpha k + \beta)\chi_{\mathbb{Z}_+^*}(k) + (-\alpha' k + \beta')\chi_{\mathbb{Z}_-^*}(k) \end{cases}$$
$$\iff \quad \exists \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} \ : \ \forall k \in I(\mathbb{Z}^*), \ f(k) = (\alpha k + \beta)\chi_{\mathbb{Z}_+^*}(k) + (-\alpha' k + \beta')\chi_{\mathbb{Z}_-^*}(k)$$

donc $G = \left\{ k \longmapsto (\alpha k + \beta)\chi_{\mathbb{Z}_+^*}(k) + (-\alpha' k + \beta')\chi_{\mathbb{Z}_-^*}(k) \ : \ \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(g_1 : k \longmapsto k\chi_{\mathbb{Z}_+^*}(k), g_2 : k \longmapsto \chi_{\mathbb{Z}_+^*}(k), g_3 : k \longmapsto k\chi_{\mathbb{Z}_-^*}(k), g_4 : k \longmapsto \chi_{\mathbb{Z}_-^*}(k))$, c.à.d. G est le s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ engendré par la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) et, comme est clair que cette famille est libre, alors G est un e.v. de dimension 4 dont une base est (g_1, g_2, g_3, g_4).

3.4.1. Soient $k \in \mathbb{Z}^d$ et $l \in V(k)$. Puisque f est positive et harmonique sur $\mathbb{Z}^d$, alors

$$2df(k) = 2d \times \frac{1}{2d} \sum_{x \in V(k)} f(x) = f(l) + \sum_{x \in V(k) \setminus \{l\}} f(x) \geq f(l).$$

3.4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'assertion suivante

$$H_n : \text{Pour tous } l, k \in \mathbb{Z}^d \text{ tels que } \|l - k\|_1 = n, \text{ on a } f(l) \leq (2d)^{\|l-k\|_1} f(k).$$

Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion H_n est vraie.

Initialisation : H_0 est vraie. En effet, pour tous $l, k \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\|l - k\|_1 = 0$, on a $l = k$ et par suit $f() = (2d)^{\|l-k\|_1} f(k)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie et montrons que H_{n+1} est aussi vraie.

Soient $l, k \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\|l - k\|_1 = n + 1$. Posons $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $l = (l_1, \ldots, l_d)$ et $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$. On a $\|l - k\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |l_i - k_i| = n + 1 > 0$, il existe donc $i_0 \in [\![1, d]\!]$ tel que $l_{i_0} - k_{i_0} \neq 0$. Soit ε le nombre valant 1 si $l_{i_0} - k_{i_0} > 0$ et -1 si $l_{i_0} - k_{i_0} < 0$, donc

$$\begin{aligned}
|l_{i_0} - k_{i_0} - \varepsilon| &= \begin{cases} l_{i_0} - k_{i_0} - \varepsilon & \text{si } l_{i_0} - k_{i_0} > 0 \\ -(l_{i_0} - k_{i_0} - \varepsilon) & \text{si } l_{i_0} - k_{i_0} < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} l_{i_0} - k_{i_0} - 1 & \text{si } l_{i_0} - k_{i_0} > 0 \\ -(l_{i_0} - k_{i_0}) - 1 & \text{si } l_{i_0} - k_{i_0} < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} |l_{i_0} - k_{i_0}| - 1 & \text{si } l_{i_0} - k_{i_0} > 0 \\ |l_{i_0} - k_{i_0}| - 1 & \text{si } l_{i_0} - k_{i_0} < 0 \end{cases} \\
&= |l_{i_0} - k_{i_0}| - 1.
\end{aligned}$$

On a $l - k - \varepsilon e_{i_0} = (l_1 - k_1, \ldots, l_{i_0} - k_{i_0}, \ldots, l_n - k_n) - (0, \ldots, \varepsilon, \ldots, 0) = (l_1 - k_1, \ldots, l_{i_0} - k_{i_0} - \varepsilon, \ldots, l_n - k_n)$, donc

$$\begin{aligned}
\|l - (k + \varepsilon e_{i_0})\| &= |l_1 - k_1| + \cdots + |l_{i_0} - k_{i_0} - \varepsilon| + \cdots + |l_n - k_n)| \\
&= |l_1 - k_1| + \cdots + |l_{i_0} - k_{i_0}| - 1 + \cdots + |l_n - k_n| \\
&= |l_1 - k_1| + \cdots + |l_{i_0} - k_{i_0}| + \cdots + |l_n - k_n| - 1 \\
&= \|l - k\|_1 - 1 = n,
\end{aligned}$$

alors, d'après H_n, on a $f(l) \leq (2d)^n f(k + \varepsilon e_{i_0})$ ♠. par ailleurs, on a $\|(k + \varepsilon e_{i_0}) - k\| = \|\varepsilon e_{i_0}\| = 1$, donc $k + \varepsilon e_{i_0} \in V(k)$, du coup, d'après la question précédente, $f(k + \varepsilon e_{i_0}) \leq 2df(k)$ ♣. En combinant ♠ et ♣, on obtient $f(l) \leq (2d)^{n+1} f(k) = (2d)^{\|l-k\|} f(k)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

3.4.3. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $f(k) = 0$. En vertu de la question précédente et la positivité de la fonction f, on a

$$\forall l \in \mathbb{Z}^d, \quad 0 \leq f(l) \leq (2d)^{\|l-k\|} f(k) = 0,$$

donc, pour tout $l \in \mathbb{Z}^d$, $f(l) = 0$. Ainsi f est la fonction nulle.

3.4.4. Supposons que f n'est pas la fonction nulle, donc en vertu de la question précédente, f ne s'annule jamais et, comme f est positive, alors : $\forall l \in \mathbb{Z}^d,\ f(l) > 0$.

Soient $k, l \in \mathbb{Z}^d$. D'après la question **3.4.2.**, on a

$$\begin{aligned} f(l) \leq (2d)^{\|l-k\|} f(k) &\implies \ln(f(l)) \leq \ln\left((2d)^{\|l-k\|_1} f(k)\right) \\ &\implies \ln(f(l)) \leq \|l-k\|_1 \ln(2d) + \ln(f(k)) \\ &\implies \ln(f(l)) - \ln(f(k)) \leq \|l-k\|_1 \ln(2d) \end{aligned}$$

et, en échangeant les rôles de k et l, on obtient $\ln(f(k)) - \ln(f(l)) \leq \|l-k\|_1 \ln(2d)$, dès lors

$$|\ln(f(l)) - \ln(f(k))| \leq \|l-k\|_1 \ln(2d).$$

Deuxième partie
Problème de Dirichlet sur le graphe $\mathbb{Z}^2$

4.1.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Z_n = \begin{cases} e[1] & \text{si } X_n = 1 \\ -e[1] & \text{si } X_n = -1 \\ e[2] & \text{si } X_n = 2 \\ -e[2] & \text{si } X_n = -2 \end{cases},$$

de telle sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = Y_n + Z_n.$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

On a $\overline{A_{a,\nu}} =$ « $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a+Y_n\|_1 \neq \nu$ » et, comme $\|a+Y_0\|_1 < \nu$ et $\|a+Y_{n+1}\|_1 = \|a+Y_n\|_1 \pm 1$, alors $\overline{A_{a,\nu}} =$ « $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a+Y_n\|_1 < \nu$ ». On écrit $Z_n = (Z_{n,1}, Z_{n,2})$, donc

$$\begin{aligned} \overline{A_{a,\nu}} &= \text{« } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a+Y_n\|_1 < \nu \text{ »} \\ &= \text{« } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\|a + \sum_{k=1}^{n} Z_k\right\|_1 < \nu \text{ »} \\ &= \text{« } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|a_1 + \sum_{k=1}^{n} Z_{k,1}\right| + \left|a_2 + \sum_{k=1}^{n} Z_{k,2}\right| < \nu \text{ »} \\ &\subset \text{« } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|a_1 + \sum_{k=1}^{n} Z_{k,1}\right| < \nu \text{ »} \\ &= \text{« } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\nu - a_1 < \sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} < \nu - a_1 \text{ »} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(-\nu - a_1 < \sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} < \nu - a_1\right), \end{aligned}$$

du coup

$$P(\overline{A_{a,\nu}}) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left(-\nu - a_1 < \sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} \leq \nu - a_1\right)\right) \leq P\left(-\nu - a_1 < \sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} < \nu - a_1\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a $Z_{n,1}(\Omega) = \{0, \pm 1\}$ et

$$P(Z_{n,1} = 1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{4},\ P(Z_{n,1} = -1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{4},\ P(Z_{n,1} = 0) = P(X_n = \pm 2) = \frac{1}{2}.$$

Donc, puisque les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $Z_{n,1}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi. De plus, on a $\mu := E(Z_{n,k}) = 0$ et $\sigma^2 := V(Z_{n,1}) = \dfrac{1}{2}$.

Calculons maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(-\nu - a_1 < \sum\limits_{k=1}^{n} Z_{k,1} < \nu - a_1\right)$ en utilisant le théorème de la limite centré.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n} Z_{k,1}$ et

$$\begin{aligned}
P\left(-\nu - a_1 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} \leq \nu - a_1\right) &= P\left((-\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} \leq (\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left((-\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq (\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a [6] $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) - \Phi(-x) = 0$, donc, par définition de la limite d'une fonction, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\eta, \eta], \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leq \Phi(x) - \Phi(-x) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\nu - a_1)\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}(\nu - a_1)\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0$, donc, par définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$-\eta < (-\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad (\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leq \eta.$$

On en déduit que, tout entier $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
&P\left((-\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq (\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) \\
&\quad\leq P\left(-\eta < \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq \eta\right) \\
&\quad= P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq \eta\right) - P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq -\eta\right) \quad \spadesuit
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la limite centré [7], on a

$$P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq \eta\right) - P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq -\eta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(\eta) - \Phi(-\eta).$$

6. Rappelons la fonction de répartition d'une v.a. suivant une normale centrée et réduite : $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

7. Théorème de la limite centré : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite $\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)\right)_{n\geq 1}$, où $\mu = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Il existe donc $n_1 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad 0 \leq P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq \eta\right) - P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq -\eta\right) \leq \Phi(\eta) - \Phi(-\eta) + \frac{\varepsilon}{2},$$

donc, en vertu de $(\star)$, on a

$$\forall n \geq n_1, \quad 0 \leq P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k}{\sqrt{n}} \leq \eta\right) - P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k}{\sqrt{n}} \leq -\eta\right) \leq \Phi(\eta) - \Phi(-\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et en vertu de $\spadesuit$ on obtient

$$\forall n \geq n_1, \quad 0 \leq P\left((-\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq (\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) \leq \varepsilon,$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(-\nu - a_1 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} \leq \nu - a_1\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left((-\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{k,1} - n\mu\right) \leq (\nu - a_1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) =$$

Finalement $P\left(\overline{A_{a,\nu}}\right) = 0$.

4.1.2. On a $T_a(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $(T_a = m)_{m\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, c.à.d.

$$\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (T_a = m) \quad \text{et} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (T_a = n) \cap (T_a = m) = \emptyset.$$

On a $(Y_{T_a} \in W) = (Y_{T_a} \in W) \cap \Omega = (Y_{T_a} \in W) \cap \left[\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (T_a = m)\right] = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [(Y_{T_a} \in W) \cap (T_a = m)]$ et

$\forall m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m \Longrightarrow [(Y_{T_a} \in W) \cap (T_a = n)] \cap [(Y_{T_a} \in W) \cap (T_a = m)] = (Y_{T_a} \in W) \cap (T_a = n) \cap (T_a = m) = \emptyset,$

donc, par $\sigma-$additivité de la probabilité P, on a

$$P\left(Y_{T_a} \in W\right) = P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} [(Y_{T_a} \in W) \cap (T_a = m)]\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} P\left((Y_{T_a} \in W) \cap (T_a = m)\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} P\left(Y_m \in W \text{ et } T_a = m\right),$$

car $(Y_0 \in W \text{ et } T_a = 0) \subset (T_a = 0) = \overline{A_{a,\nu}}$ et $P(\overline{A_{a,\nu}}) = 0$ en vertu de la question précédente.

4.2.1. Posons $Z = a + Y_{T_a}$. Soit $\omega \in \Omega$ et $n = T_a(\omega)$, alors $\|Z(\omega)\|_1 = \left\|a + Y_{T_a(\omega)}(\omega)\right\|_1 = \|a + Y_n(\omega)\|_1 = \nu$. Ainsi $Z(\Omega) \subset \partial K_\nu$ et, comme ∂K_ν est un ensemble fini, alors Z est une variable aléatoire finie et par suite, d'après le théorème de transfert pour les variables aléatoires finies, la variable aléatoire $\varphi(Z)$ admet une espérance donnée par

$$\begin{aligned}
E\left(\varphi(Z)\right) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} \varphi(z) P(Z = z) \\
&= \sum_{z\in\partial K_\nu} \varphi(z) P(a + Y_{T_a} = z) \\
&= \sum_{z\in\partial K_\nu} \varphi(z) P(Y_{T_a} = z - a) \\
&= \sum_{z\in\partial K_\nu} \varphi(z) \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_a = n \text{ et } Y_n = z - a) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \sum_{z\in\partial K_\nu} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(z) P(T_a = n \text{ et } Y_n = z - a) \\
&= \sum_{n\geq 1,\, z\in\partial K_\nu} \varphi(z) P(T_a = n \text{ et } a + Y_n = z)
\end{aligned}$$

Remarque : Si $a=(\nu-1)e[1]$ et $z=\nu e[1]$, alors $\|a\|_1=\nu-1<\nu$, $z\in\partial K_\nu$ et

$$P(T_a=1 \text{ et } a+Y_1=z)=P(a+Y_1=z)=P(X_0=1)=\frac{1}{4}.$$

*Ainsi, on ne peut pas avoir $E(\varphi(Z))=\sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z)$. On verra, dans la question **4.2.3.**, que si $\|a\|_1\leq\nu-2$, alors $E(\varphi(Z))=\sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z)$.*

4.2.2. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $z\in\partial K_\nu$. On a $(a+Y_1)(\Omega)=V(a)$, donc la famille $(a+Y_1=k)_{b\in V(a)}$ est un système complet d'événements, du coup, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z) &= \sum_{b\in V(a)}P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z/a+Y_1=b)P(a+Y_n=b)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{b\in V(a)}P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z/a+Y_1=b) \quad \text{car } P(a+Y_n=b)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $b\in V(a)$, on a

$$\|b\|_1=\|(b-a)+a\|_1\leq\|b-a\|_1+\|a\|_1\leq 1+\nu-2=\nu-1<\nu$$

et par suite, par translation du problème, $P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z/a+Y_1=b)=P(T_b=n-1 \text{ et } b+Y_{n-1}=z)$. Finalement

$$P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z)=\frac{1}{4}\sum_{b\in V(a)}P(T_b=n-1 \text{ et } b+Y_{n-1}=z).$$

4.2.3. D'après la question **4.3.1.**, on a

$$f(a)=E\left(\varphi(a+Y_{T_a})\right)=\sum_{n\geq 1, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z) \qquad (\text{car } a\in K_{\nu-1})$$

Par ailleurs, on a $a+Y_1\in V(a)$, donc

$$\|a+Y_1\|_1=\|((a+Y_1)-a)+a\|_1\leq\|(a+Y_1)-a\|_1+\|a\|_1\leq 1+\nu-2=\nu-1<\nu,$$

dès lors $P(T_a=1)=0$ et, comme $(T_a=1 \text{ et } a+Y_1=z)\subset(T_a=1)$, il vient $P(T_a=1 \text{ et } a+Y_1=z)=0$. Ainsi

$$\begin{aligned}f(a) &= \sum_{n\geq 1,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z)\\ &= \sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n \text{ et } a+Y_n=z)\\ &= \sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)\times\frac{1}{4}\sum_{k\in V(a)}P(T_a=n-1 \text{ et } b+Y_{n-1}=z) \quad \text{d'après } \mathbf{4.2.2.}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu}\sum_{k\in V(a)}\varphi(z)P(T_a=n-1 \text{ et } b+Y_{n-1}=z)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k\in V(a)}\sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n-1 \text{ et } b+Y_{n-1}=z)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k\in V(a)}\sum_{n\geq 1,\, z\in\partial K_\nu}\varphi(z)P(T_a=n \text{ et } b+Y_n=z)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k\in V(a)}f(b) \quad \text{car } b\in V(a).\end{aligned}$$

4.2.4. D'après la question **4.2.1.**, on a

$$f(a) = E\left(\varphi(a+Y_{T_a})\right) = \sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z). \qquad (\text{car } a \in K_{\nu-1})$$

Puisque $(a+Y_1 = b)_{b\in V(a)}$ est un système complet d'événements, alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall n\geq 1,\ \forall z \in \partial K_\nu, \quad P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z) = \sum_{b\in V(a)} P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b)P(a+Y_1 = b)$$

et par suite

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu}\ \sum_{b\in V(a)} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b)P(a+Y_1 = b) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu}\ \sum_{b\in V(a)} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b) \quad \text{ car } P(a+Y_1 = b) = \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{b\in V(a)}\ \sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b) \end{aligned}$$

On a $\|a\|_1 = \nu - 1$, donc, pour tout $b\in V(a)$, $\|b\|_1 = \nu$ ou $\nu - 2$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{4}\sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu}}\ \sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}}\ \sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b). \end{aligned}$$

- Soit $b\in V(a)$ tel que $\|b\| = \nu$. Si $a+Y_1 = b$, alors $T_1 = 1$ et

  $$\forall n\geq 2, \forall z\in \partial K_\nu \setminus \{b\}, \quad T_a \neq n \text{ et } a+Y_1 \neq z.$$

  Du coup

  $$\begin{cases} P(T_a = 1 \text{ et } a+Y_1 = b/a+Y_1 = b) = 1 \\ \forall z\in\partial K_\nu\setminus\{b\},\ P(T_a = 1 \text{ et } a+Y_1 = z/a+Y_1 = b) = 0 \\ \forall n\geq 2, \forall z\in\partial K_\nu,\ P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b) = 0. \end{cases}$$

  Ainsi

  $$\sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu}}\ \sum_{n\geq 1,\ z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b) = \sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu}} \varphi(b) = \sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu}} f(b). \quad (\text{car } b\in\partial K_\nu)$$

- Soit $b\in V(a)$ tel que $\|b\| = \nu$. Si $a+Y_1 = b$, alors $\|a+Y_1\|_1 \neq \nu$ et $T_a \neq 1$, ce qui implique $P(T_a = 1/a+Y_1 = b) = 0$ et par suite $P(T_a = 1 \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1 = b) = 0$ puisque

$(T_a = n \text{ et } a + Y_n = z) \subset (T_a = n)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}} \sum_{n\geq 1,\, z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1=b)\\
&= \sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}} \sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z/a+Y_1=b)\\
&= \sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}} \sum_{n\geq 2,\, z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n-1 \text{ et } a+Y_{n-1} = z) \text{ car } \|b\|<\nu\\
&= \sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}} \sum_{n\geq 1,\, z\in\partial K_\nu} \varphi(z)P(T_a = n \text{ et } a+Y_n = z)\\
&= \sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}} f(b) \text{ car } \|b\|<\nu
\end{aligned}$$

Finalement

$$f(a) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu}} f(b) + \frac{1}{4}\sum_{\substack{b\in V(a)\\ \|b\|_1=\nu-2}} f(b) = \frac{1}{4}\sum_{b\in V(a)} f(b).$$

4.2.5. En vertu des questions **4.2.3.** et **4.2.4.**, pour tout $a \in I(K_\nu) = \left\{a\in\mathbb{Z}^2 \ :\ \|a\|_1 \leq \nu-1\right\}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{4}\sum_{b\in V(a)} f(b).$$

Ainsi f est harmonique sur $I(K_\nu)$.