

Corrigé du CCM 2005 Mah2 PSI
Proposé par Abdelaziz KHOUTAIBI

I

1. $\chi_A(X) = (1-X)(2-X)(3-X)$, donc $sp(u) = \{1, 2, 3\}$
A admet trois valeurs propres réelles distincts, donc elle est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

2. $e_1 = (-1, 1, 0); e_2 = (1, 1, -1); e_3 = (1, 1, 0)$

3. • **1ere methode**
 $\det(e_1, e_2, e_3) = -2 \neq 0$

• **2eme methode**

Pour $i \in 1, 2, 3$, Soit $E_i = \text{vect}(u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, le sous espace propre associé a la valeur propre λ_i .

u est diagonalisable donc $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ donc $E_i = \text{vect}(e_i)$, on déduit que $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

$$\text{mat}_{\beta}(u) = \text{diag}(1, 2, 3) = D$$

La formule de changement de matrice pour une application linéaire donne:

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est la matrice de passage de la base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ à la base } \beta.$$

4. (a) • Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On a: $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v) \Rightarrow B^2 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v^2)$ et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, donc:

$$B^2 = A \iff v^2 = u.$$

$$\bullet vu = vv^2 = v^3 = v^2v = vu.$$

- (b) $uv(e_i) = vu(e_i) = v(\lambda_i e_i) = \lambda_i v(e_i)$

d'où $v(e_i) \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}(e_i)$ et par suite $v(e_i)$ est colinéaire à e_i , c.à.d que e_i est un vecteur propre de v

- (c) D'après 4-2 $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, v(e_i) = \alpha_i e_i$ et donc $\text{mat}_{\beta} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = V$

$$v^2 = u \iff V^2 = D \iff \begin{cases} \alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm \sqrt{2} \\ \alpha_3 = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

5. Soit B une solution de l'équation $X^2 = A$

D'après le question précédente $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec $\begin{cases} \alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm \sqrt{2} \\ \alpha_3 = \pm \sqrt{3} \end{cases}$, donc:

$V \in \{\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sqrt{2}, \varepsilon_3 \sqrt{3}) / (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3\}$, comme $B = PVP^{-1}$ alors :

$B \in \{P \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sqrt{2}, \varepsilon_3 \sqrt{3}) P^{-1} / (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3\}$

Réciproquement si $B = P^{-1} \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sqrt{2}, \varepsilon_3 \sqrt{3}) P$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$, on a bien $B^2 = PD^2P^{-1} = A$

En conclusion l'ensemble des solutions de l'équation est :

$\{P \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sqrt{2}, \varepsilon_3 \sqrt{3}) P^{-1} / (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3\}$, On trouve 8 solutions qui sont:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

II-A

1. facile

2. (a) Soit $g : x \mapsto \sum_0^n a_n x^n$

La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et la dérivation s'effectue terme à terme :

$$\forall x \in]-r, r[, (1+x)g'(x) - \alpha g(x) = \sum_0^\infty ((k+1)a_{k+1} - (\alpha - k)a_k)x^k$$

y est une solution de (1) sur $] -r, r[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-r, r[, (1+x)y'(x) - \alpha g(x) = \sum_0^\infty ((k+1)a_{k+1} - (\alpha - k)a_k)x^k = 0$$

Or si une série entière est de somme nulle sur un intervalle ouvert centré en 0 alors cette série entière est nulle, donc : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$.

(b) On montre par une récurrence simple sur k que: $\forall k \geq 1, a_k = a_0 \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!}$.

(c) Pour $a_0 = 1$, deux cas à distinguer:

- $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \geq \alpha, a_k = 0$, donc la série entière est une fonction polynomiale, donc $\rho = +\infty$;
- $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, alors la suite $\forall k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0$ et $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$, la règle de d'Alembert donne $\rho = 1$.

$I =]-\rho, \rho[\cap]-1, +\infty[$ est un intervalle non vide de \mathbb{R} contenant $] -1, 1[$, et g et f_α sont deux solutions de l'éq diff linéaire (1), vérifiant : $g(0) = f_\alpha(0) = 1, x \mapsto (1+x)$ ne s'annulant pas sur I , le théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire affirme l'unicité de la solution sur I de l'éq diff (1) vérifiant la condition initiale: $y(0) = 1$, d'où $g = f_\alpha$ sur I .

pour $\alpha \in \mathbb{N},]-\rho, \rho[=]-\infty, +\infty[$, or la fonction f_α est définie sur $] -1, +\infty[$, donc dans le cas général f_α coïncide avec g sur I et non sur $] -\rho, \rho[$ comme le dit le sujet. Et dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}, I =]-\rho, \rho[$.

3. • $f_{\frac{1}{2}}(0) = 1 \Rightarrow b_0 = 1$

• f étant développable en série entière à l'origine il en est de même de f^2 et le développement en série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ de f^2 s'obtient comme produit de Cauchy de $\sum_{k=0}^\infty b_k x^k$ par elle-même, ce qui donne

$$\forall q \in \mathbb{N}, c_q = \sum_{k=0}^q b_k b_{q-k}$$

D'autre part On a $\forall x \in]-1, 1[, f_{\frac{1}{2}}^2(x) = 1+x$

L'unicité du développement en série entière à l'origine donne alors:

$$c_1 = 2b_0 b_1 = 1 \text{ et } \forall q \geq 2, c_q = \sum_{k=0}^q b_k b_{q-k} = 0$$

II.B

1. (a) Par définition de l'entier p on a: $u^{p-1} \neq 0$, donc $\exists x_0 \in E, u^{p-1}(x_0) \neq 0$

(b) c'est une question classique:

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tq $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$, montrons par récurrence finie sur i que $\forall i \in [1, n] \lambda_i = 0$

$$\text{Base de récurrence: } 0 = f^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{p+k-1}(x_0) = \lambda_0 u^{p-1}(x_0)$$

Comme $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, alors $\lambda_0 = 0$

Hypothèse de récurrence: Soit $j \in [1, p-1]$, Supposons que: $\forall i \in [1, j-1], \lambda_i = 0$ et montrons que $\lambda_j = 0$

$$0 = f^{p-1-j} \left(\sum_{k=j}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) \right) = \sum_{k=j}^{p-1} \lambda_k u^{p+k-j-1}(x_0) = \lambda_j u^{p-1}(x_0), \text{ Or } u^{p-1}(x_0) \neq 0 \text{ d'où } \lambda_j = 0$$

Conclusion : $\forall i \in [1, n], \lambda_i = 0$.

(c) $\dim(E) = n$ et $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E à p vecteurs, donc $p \neq n$, car le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension.

On a $n - p \geq 0$, donc: $u^p = 0 \Rightarrow u^n = u^{n-p} u^p = 0$

2. (a) $v^{2p} = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$, donc v est nilpotent d'indice de nilpotence $q \geq 2p - 1$

D'après la question 2-1: $q \leq n$ donc $2p - 1 \leq n$ ie $p \leq \frac{n+1}{2}$

(b) $n = 2$, il suffit de prendre une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p > \frac{3}{2}$ c.a.d $p = 2$, par

exemple: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$3. w^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i u^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j u^j \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} b_i u^i b_j u^j = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} b_i b_j u^{i+j}.$$

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n-1} b_i b_j u^{i+j} = \sum_{q=0}^{2n-2} \sum_{k=0}^q b_k b_{q-k}$$

D'après les relations de la question I-3, on alors : $(\pm w)^2 = w^2 = b_0 u^0 + 2b_0 b_1 u = I_E + u$

4. (a) D'après la question 1-1-2 la famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre à n vecteurs, donc c'est une base de E .

$g(x_1) \in E$ donc il s'exprime dans la base précédente, c.a.d: $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, g(x_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i(x_1)$

(b) $u = g^2 - I_n \in \mathbb{R}[g]$, donc g commute avec u ie : $gu = ug$.

Soit $h = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i$, montrons que $g = h$, il suffit pour cela de montrer que f et g coïncident sur la base

$(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$, or: $h \in \mathbb{R}[u] \Rightarrow hu = uh$

$\forall i \in [0, n-1], h(u^i(x_1)) = u^i(h(x_1)) = u^i(g(x_1)) = g(u^i(x_1))$, d'où $h = g$.

(c) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^k = 0$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^k(x_1) = 0$ et comme $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre alors : $\forall i \in [0, n-1], \lambda_i = 0$.

D'après la question 3 $g = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i \Rightarrow g^2 = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \alpha_i \alpha_j u^{i+j} = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \alpha_i \alpha_j u^{i+j} = \sum_{q=0}^{n-1} \beta_q u^q$ où

$$\beta_k = \sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k}$$

Or $g^2 = I_E + u$, comme (I_E, u, \dots, u^{n-1}) est une base alors :

$\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0 \alpha_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k}$ pour $2 \leq q \leq n-1$

(d) Si $\alpha_0 = 1$ alors par une récurrence facile on montre que $\alpha_k = b_k$

Si $\alpha_0 = -1$ alors la suite $(\gamma_k) = (-\alpha_k)$ vérifie

$\gamma_0^2 = 1, \gamma_0 \gamma_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^q \gamma_k \gamma_{q-k} = 0$ pour $2 \leq q \leq n-1$. Donc $\gamma_k = b_k$, c.a.d $\alpha_k = -b_k$

On déduit que $g = \pm \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k = \pm w$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = I_4 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice de nilpotence $p =$

4, d'après ce qui précède il y a deux solutions de l'équation $X^2 = A$ qui sont $\pm B$ où $B = \sum_{k=0}^3 b_k N^k$

Les calculs donnent:

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{8}, b_3 = \frac{1}{16} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III

1. $\nu d = d\nu$, donc les sous espaces propres de d sont stables par ν (c'est du cours!!!)
 $\exists p \in \mathbb{N}^*, \nu^p = 0 \Rightarrow \nu_\lambda^p = 0$, donc ν_λ est nilpotent.
-

2. Soit $\lambda \in sp(d)$, alors ν_λ est nilpotent donc non injectif soit $x \in \text{Ker } \nu_\lambda - \{0\}$, alors:
 $u(x) = d(x) + \nu(x) = \lambda x + \nu_\lambda(x) = \lambda x$, donc $\lambda \in sp(u)$.
 Comme $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors $Sp(d) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc 0 n'est pas une valeur propre de d et, comme $\frac{n}{R}$ est de dimension finie alors d est inversible.
-

3. • D'après le cours, d étant diagonalisable alors E est somme directe des sous espaces propres de d , c.à.d. $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$.
 • $d(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$
-

4. Soit $\delta \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x = \sum_{i=1}^r x_i \in \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} \delta(x) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} x_i$, alors:
- $\delta^2 = d$
 - Soit $x = \sum_{i=1}^r x_i \in \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$ alors $\forall i \in [1, r], \nu(x_i) \in E_{\lambda_i}$; on a alors:
 $\nu \delta(x) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \nu(x_i) = \delta \left(\sum_{i=1}^r \nu(x_i) \right) = \delta \nu(x)$, c.à.d. $\nu \delta = \delta \nu$
-

5. • $\det(\delta^2) = \det(\delta)^2 = \det(d)$, $\det(d) \neq 0 \Rightarrow \det(\delta) \neq 0$, donc $\delta \in GL(E)$
 • $\nu^p = 0$ et $\nu \delta^{-2}$ commutent, donc
 $(\nu \delta^{-2})^p = \nu^p \delta^{-2p} = 0$, c.à.d. que $\nu \delta^{-2}$ est nilpotent
-

6. On applique le résultat de la section II.B:

- $f = \nu \delta^{-2}$ endomorphismes nilpotents de E donc $w = \sum_{i=0}^{p-1} f^i$ vérifie:
 $w = P(f)$ où $P = \sum_{i=0}^{p-1} X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $w^2 = I_E + f$.
- $v = \delta w$ vérifie $v^2 = \delta^2 w^2 = d + \nu = u$

III-B

1. $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X^t M M X = {}^t (M X) M X = \|M X\|^2 \geq 0$

2. (a) • Si $A \in S_n^+$, soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ alors $\exists X \neq 0, AX = \lambda X$, donc ${}^t X A X = \lambda {}^t X X_{eq} 0$, or ${}^t X X = \|X\|^2 \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$
- Réciproquement supposons $Sp_{\mathbb{R}}(A) \in \mathbb{R}_+$ alors:
 A étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans le groupe orthogonal (c'est le théorème spectral!!!), c.a.d: $\exists P \in O_n(\mathbb{R}), {}^t P A P = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres distinctes ou non de A .

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = P X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors:

$${}^t X A X = {}^t (P X) D (P X) = {}^t Y D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

- (b) • A est semblable à D , donc $tr(A) = tr(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$
- Si $A \in GL(E) \cap S_n^+$ alors $det(A) = det(D) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, donc $\forall i \in [1, n], \lambda_i > 0$
-

3. Avec les memes notations de la question 2, on a :
 $A = {}^t P D P = {}^t P \Delta P^t P \Delta P = B^2$ où $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = {}^t P \Delta P$, de plus :
 ${}^t B = B$ et $Sp(B) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+$, donc $B \in S_n^+$
-

4. (a) question de cours facile
-

- (b) • **1ere methode:** ${}^t X B C B X = {}^t (B X) C (B X)$, comme $C \in S_n^+$ alors: ${}^t (B X) C (B X) \geq 0$
- **2eme methode:** D'après la question 3, $C \in S_n^+ \Rightarrow \exists T \in S_n^+, C = T^2$, donc :
 $BCB = B T T B = {}^t (T B) (B T)$, la question 1 permet de conclure que $BCB \in S_n^+$
 $tr(AC) = tr(B^2 C) = tr(B B C) = tr(B C B) \geq 0$ car $BCB \in S_n^+$.
-

- (c) • $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in GL_n(E)$
 $AC = B^2 C \Rightarrow B^{-1} A C B = B C B$, donc AC est semblable à BCB , or $BCB \in S_n^+$, donc elle est diagonalisable et par suite AC est diagonalisable.
- Un contre exemple dans $M_2(\mathbb{R})$:
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A \in S_2^+$ non inversible, $C \in S_2^+(\mathbb{R})$, $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.