

# ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale  
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement  
Supérieur, de la Formation des Cadres  
et de la Recherche Scientifique

## Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs Session 2004

### ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est *interdit*

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,  
comporte 3 pages.  
L'usage de la calculatrice est interdit .**

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

## Définitions et notations

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions* à valeurs réelles définies sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles, on lui associe l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0. \quad (\mathcal{E}_f)$$

Le but du problème est d'étudier des conditions d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$ , et lorsque ces conditions sont remplies, certaines propriétés des ces solutions sont ensuite étudiées.

### I. EXEMPLE ET RÉSULTATS GÉNÉRAUX

#### 1. Un exemple

Soient  $\alpha$  un réel et  $f_\alpha$  la fonction  $x \mapsto e^{\alpha x}$ .

- (a) Résoudre l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_{f_1})$ . Cette équation possède-t-elle des solutions bornées au voisinage de  $+\infty$  ?
- (b) Ici on suppose que  $\alpha = 1/$ 
  - i. Résoudre l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$ .
  - ii. À quel condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  cette équation admet-elle des solutions bornées au voisinage de  $+\infty$  ? Lesquelles ?
- (c) L'équation différentielle  $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$  admet-elle des solutions bornées sur  $\mathbb{R}$  ?

#### 2. Résultats généraux

- (a) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  ?
- (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  sont de la forme

$$y_\lambda : x \mapsto e^x \left( \lambda - \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (c) On suppose que la solution  $y_\lambda$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ . Montrer alors que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  est convergente et vaut  $\lambda$ .
- (d) Combien de solutions bornées au voisinage de  $+\infty$  l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  peut-elle avoir au maximum ?

(e) On suppose maintenant que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  est convergente et on pose

$$\lambda_f = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \quad \text{et} \quad Y_f = y_{\lambda_f}.$$

- i. Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ .
  - ii. La solution  $Y_f$  est-elle nécessairement bornée au voisinage de  $+\infty$  ?
- (f) On suppose ici que  $f$  est bornée.
- i. Montrer que  $Y_f$  est bien définie et que c'est l'unique solution bornée, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$ .
  - ii. Si en outre  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ , montrer que  $Y_f$  possède une limite nulle en  $+\infty$ .
  - iii. Si maintenant  $f$  tend vers 0 en  $-\infty$ , montrer que  $Y_f$  possède une limite nulle en  $-\infty$ .

## II. CAS D'UNE FONCTION INTÉGRABLE

### A- Cas où $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

On suppose que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et on pose, pour tout réel  $x$ ,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

1. Montrer que la fonction  $G$  est continue, bornée et tend vers 0 en  $-\infty$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ , la fonction  $t \mapsto e^{-t} f(t)$  est intégrable sur  $[x, +\infty[$ .
3. Montrer alors que la solution  $Y_f$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |Y_f(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt,$$

puis en déduire que  $Y_f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et tend vers 0 en  $+\infty$ .

4. Montrer que  $Y_f = -G + Y_G$  et conclure que  $Y_f$  tend vers 0 en  $-\infty$ .
5. Justifier que la solution  $Y_{|f|}$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_{|f|})$  est bornée et tend vers 0 en  $\pm\infty$ .
6. Montrer alors que  $Y_{|f|}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
7. En déduire que  $Y_f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

8. On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et intégrables sur  $\mathbb{R}$  ; on le muni de la norme  $N_1$  définie, pour tout élément  $g$  de  $E$ , par

$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt.$$

Montrer que l'application  $\Phi : g \mapsto Y_g$  est un endomorphisme continu de  $E$  et calculer sa norme.

**B- Cas où l'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  converge**

On suppose ici que  $f$  possède une intégrale convergente sur  $\mathbb{R}$  et on pose, pour tout réel  $x$ ,

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

1. Montrer que la fonction  $F$  est continue, bornée et tend vers 0 en  $+\infty$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ , l'intégrale  $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  est convergente et que

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = F(x) - Y_F(x).$$

(on pourra faire une intégration par partie)

3. En déduire que la solution  $Y_f$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  est bornée et tend vers 0 en  $+\infty$ .
4. Montrer que  $Y_f$  tend vers 0 en  $-\infty$ .
5. Montrer alors que  $Y_f$  possède une intégrale convergente sur  $\mathbb{R}$ , égale à celle de  $f$ .

**III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE**

On suppose ici que  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

1. Montrer que l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  possède une unique solution bornée qui est la fonction  $Y_f$ .
2. Montrer que  $Y_f$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ .
3. Calculer les coefficients de FOURIER complexes de  $Y_f$  en fonction de ceux de  $f$ .
4. On pose  $f_0 = f$  et  $f_{n+1} = Y_{f_n}$ ,  $n \geq 0$ .
  - (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer les coefficients de FOURIER complexes de  $f_n$  en fonction de ceux de  $f_1$ .
  - (b) Montrer que la série de FOURIER de  $f_1$  est normalement convergente.
  - (c) En déduire la convergence de la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|)$ .
  - (d) En utilisant le théorème de DIRICHLET, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|).$$

- (e) Quelle conclusion concernant le mode de convergence de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut-on tirer de ce qui précède ?

FIN DE L'ÉPREUVE