Concours marocain : *Corrigé 2004* *Maths 2, PSI*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myis

Partie I. Résultats généraux

1) a) Il est clair que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\|A\|^n$ est convergente dont la somme est $e^{\|A\|}$.

b) $\|E_{n+m}(A) - E_n(A)\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\|A\|^k}{k!} = E_{n+m}(\|A\|) - E_n(\|A\|) \to 0$ car $(E_n(\|A\|))_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY puisque convergente, ainsi $(E_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui est complet, donc converge.

2) $\|BA_nC - BAC\| = \|B(A_n - A)C\| \leq \|B\|\|A_n - A\|\|C\| \to 0$ car $\|A_n - A\| \to 0$, d'où la suite $(BA_nC)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC

3) a) $E_n(PAP^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)P^{-1} = PE_n(A)P^{-1}$.

b) $E_n(PAP^{-1}) \to \exp(PAP^{-1})$, et d'autre part $E_n(PAP^{-1}) = PE_n(A)P^{-1} \to P\exp(A)P^{-1}$ car $E_n(A) \to \exp(A)$, d'où $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

4) a) L'application $X \longmapsto {}^t X$ est continue car linéaire sur une espace vectoriel de dimension finie.

b) Comme la transposée est linéaire et que ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$, alors $\exp({}^tA) = \lim E_n({}^tA) = \lim {}^tE_n(A) = {}^t\lim E_n(A) = {}^t(\exp(A))$. Noter bien qu'on a utilisé ici la continuité de la fonction $X \longmapsto {}^tX$ pour le passage $\lim {}^tE_n(A) = {}^t\lim E_n(A)$.

Partie II. Exemples de calcul de l'exponentielle d'une matrice

1) a) $D = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.

b) $E_n(D) = \begin{pmatrix} E_n(\alpha) & 0 \\ 0 & E_n(\beta) \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par suite exp
$\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$.

2) a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a\mu \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

b) Par récurrence sur $n \geq 2$, on montre que :$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

c) On en déduit que : $E_n(A) = \begin{pmatrix} E_n(a) & E_{n-1}(a)\mu \\ 0 & E_n(a) \end{pmatrix}$, pour tout
puis que
$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$.

3) En identifiant a avec b, on a : $B = {}^t A$, d'où $\exp(B) = \exp($
$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ e^b\mu & e^b \end{pmatrix}$.

4) a) Commençons d'abord par chercher les valeurs propres de C
de son polynôme caractéristique $\det(C - XI_2) = (c - X)$
qui sont $\lambda_1 = c - \mu$ et $\lambda_2 = c + \mu$, puis déterminons les v
propres de chacune d'elles. $CX = (c - \mu)X \Longleftrightarrow X = ($
$CX = (c + \mu)X \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, on prend alors P dont les co
sont formées par des vecteurs propres par exemple $P = ($

dans ce cas $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}CP = D = \begin{pmatrix} c-\mu & 0 \\ 0 & c+\mu \end{pmatrix}$ est diagonale.

b) $P^{-1}\exp(C)P \exp(P^{-1}CP) = \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{c-\mu} & 0 \\ 0 & e^{c+\mu} \end{pmatrix}$, d'où $\exp(C) = P\exp(D)P^{-1} = e^c \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\mu) & \mathrm{sh}(\mu) \\ \mathrm{sh}(\mu) & \mathrm{ch}(\mu) \end{pmatrix}$.

c) $A+B = \begin{pmatrix} a+b & \mu \\ \mu & a+b \end{pmatrix}$, donc $\exp(A+B) = e^{a+b}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\mu) & \mathrm{sh}(\mu) \\ \mathrm{sh}(\mu) & \mathrm{ch}(\mu) \end{pmatrix}$, d'autre part $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ et $\exp(B) = \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ e^b\mu & e^b \end{pmatrix}$ d'où $\exp(A)\exp(B) = e^{a+b}\begin{pmatrix} 1+\mu^2 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$. Donc une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ est que $\mu = 0$.

5) a) Avec un raisonnement pareil que celui adopté pour la matrice C, les valeurs propres de R sont $\lambda_1 = a+ib$ et $\lambda_2 = a-ib$, dont les vecteurs propres associés sont respectivement de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$, on a alors $Q^{-1}RQ = D$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$.

b) $R = QDQ^{-1}$, d'où $\exp(R) = \exp(QDQ^{-1}) = Q\exp(D)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{a-ib} \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = e^a\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

c) On prend $J = R$ avec $a = 0$ et $b = \pi$ alors $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie III. Détermination de l'image de la fonction exponentielle

A- Étude dans le cas complexe

1) a) Si A est diagonalisable, alors $\exists D$ diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$, d'où $\exp(A) = \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$ est semblable à $\exp(D)$ qui est aussi diagonale.

b) i. Si A n'est pas diagonalisable, alors elle n 'admet qu'une se leur propre $a \in \mathbb{C}$ et elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, p son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, donc A e blable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec puisque la matrice n'est pas diagonalisable.

ii. A semblable à $T = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc $\exp(A)$ est semblable à trice $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$.

iii. Si la matrice $\exp(A)$ etait diagonalisable, alors exp $\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ le serait aussi, donc $\exists Q$ inversible tel $\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}Q^{-1} = Qe^aI_2Q^{-1} = e^aI_2$, ce qu pas le cas pusique $\mu \neq 0$.

2) – 1ér cas : A est diagonalisable, alors $A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec a valeurs propres de A, donc $Tr(A) = a+b$ et $\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ d'où $\det(\exp(A)) = e^ae^b = e^{a+b} = e^{Tr(A)}$.

– 2ème cas : A est n'est pas diagonalisable, donc admet une seule propre a, et trigonalisable, alors $A = P\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}P^{-1}$, donc $Tr(A$ et $\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^b \end{pmatrix}P^{-1}$, d'où $\det(\exp(A)) = e^ae^a =$ $e^{Tr(A)}$.

3) $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \det(\exp(A)) = e^{Tr(A)} \neq 0 \Longrightarrow A \in GL_2(\mathbb{C})$.

4) On a montré que toute matrice qui s'écrit comme exponentielle d'u trice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible, il suffit alors de montrer que tou trice B inversible s'écrit comme exponentielle d'une matrice $A \in$ En effet, d'aprés ce qui précède A diagonalisable *si et seuler* $\exp(A)$ diagonalisable.

– 1ér cas : B diagonalisable, on cherche alors A diagonalisable telle que $B = \exp(A)$, donc $A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} \Longrightarrow B = \exp(A) = P\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}P^{-1}$, donc si λ et μ sont les valeurs propres de B, il suffit de trouver a et b tels que : $\begin{matrix} \lambda = e^a \\ \mu = e^b \end{matrix}$, prendre alors

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(a) = \ln|\lambda| & \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Arg}(\lambda) \\ \mathrm{Re}(b) = \ln|\mu| & \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Arg}(\mu) \end{cases}$$

– 2ème cas : B n'est pas diagonalisable, on cherche alors A non diagonalisable telle que $B = \exp(A)$, donc A et B sont trigonalisables et admettent chacune une seule valeur propre $A = P\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}P^{-1} \Longrightarrow$ $B = \exp(A) = P\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^b \end{pmatrix}P^{-1}$, donc si b est la valeur propre de B, il suffit de trouver a et μ tels que : $\begin{matrix} b = e^a \\ \lambda = e^a\mu \end{matrix}$, prendre alors

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(a) = \ln|b| & \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Arg}(b) \\ \mu = \frac{\lambda}{b} \end{cases}$$

N'oublier pas que puisque la matrice B est inversible alors ses valeurs propres sont non nulles, en particulier on peut parler de leurs arguments.

B- Étude dans le cas réel

1) a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, alors A ne peut pas avoir de valeurs propres complexes non réelles, puisque la conjuguée aussi serait valeur propre de A et A admet au plus deux valeurs propres, ainsi le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ donc A diagonalisable, (semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, diagonale) ou bien trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$) puisqu'elle n'admet dans ce cas qu'une seule valeur propre réelle.

b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors A admet deux valeurs propres complexes non réelles simples et conjuguées, a et $\overline{a}$ donc semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

c) Reprendre le même raisonnement que celui de III.A.2, d'o
tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{tr}A} > 0$.

2) a) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) = \{-1\}$, supposons N diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, a
inversible telle que $N = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = P(-I_2)P^{-1} =$
qui n'est pas le cas, donc N n'est pas diagonalisable .

b) Supposons que : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, on a d'abord A non diagonalisa
$\exp(A) = N$ non diagonalisable, donc d'aprés la question III
A semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type (
avec $\mu \neq 0$, donc $N = \exp(A)$ est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ donc ont mêmes valeurs p
d'où $e^a = -1$, impossible puisque $a \in \mathbb{R}$.

c) Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et d'aprés la question III.B.1.b) A est sem
dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$, do
gonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, d'où $N = \exp(A)$ est aussi diagona
d'où une contradiction. On peut en conclure qu'ils existent d
trices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) > 0$ mais qui ne s'ecrive
exponentielles de matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Soit A un élément quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.
Supposons que A est une exponentielle, alors $A = \exp(N$
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N) \neq \emptyset$

– 1ér cas : N admet deux valeurs propres réelles distinctes
alors N diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = \exp(N)$ es
diagonalisable semblable à $\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$, donc les valeurs pro
A sont $e^\lambda > 0$ et $e^\mu > 0$.

– 2ème cas : N admet une seule valeur propre réelle μ et
diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = \exp(N)$ est aussi di
lisable semblable à $\begin{pmatrix} e^\mu & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} = \lambda I_2$, donc $A = \lambda I_2$.

– 3ème cas : N admet une valeur propre réelle a mais n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc trigonalisable, d'où semblable à $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc $A = \exp(N)$ est aussi trigonalisable, d'où semblable à $\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$, donc la valeur propre de A est $e^a > 0$.

Inversement, c'est la même discussion, en ajoutant que puisque les valeurs propres sont strictement positifs alors ils s'ecrivent des exponentielles.

b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, on a vu que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

i. Soit $X = X_1 + iX_2$ vecteur propre de A associé à a, donc $AX = aX$, d'où
$AX_1 + iAX_2 = (\mathrm{Re}(a)X_1 - \mathrm{Im}(a)X_2) + i(\mathrm{Re}(a)X_2 + \mathrm{Im}(a)X_1)$, d'où

$$AX_2 = \mathrm{Re}(a)X_2 + \mathrm{Im}(a)X_1$$
$$AX_1 = -\mathrm{Im}(a)X_2 + \mathrm{Re}(a)X_1$$

alors A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$, en considèrant la matrice de passa (X_2, X_1).

ii. Posons $x = \mathrm{Re}(a), y = \mathrm{Im}(a)$, alors $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(\\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a \end{pmatrix}$
$|a| \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} & -\frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} \\ \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} & \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} \end{pmatrix} = e^{\epsilon} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\epsilon =$ l
$\theta = \mathrm{Arg}(a)$ réels qui existent car $a \neq 0$ puisque A est inv
A est une exponentielle car semblable à $e^{\epsilon}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{si} \\ \sin\theta & \cos \end{pmatrix}$
$\exp(R)$ où $R = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\theta \\ \theta & \varepsilon \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Fin.}}$