

Corrigé

Filière PSI

PREMIER PROBLÈME

I Première Partie

1 Soit x un réel.

1.a. On sait que la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$; par ailleurs on a l'équivalence

$$t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} e^{-t}.$$

Les fonctions considérées étant continues et positives sur l'intervalle $]0, 1]$, on en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle si et seulement si $x > 0$.

1.b. La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$; cette dernière fonction étant intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on en déduit que la fonction continue et positive, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est elle aussi intégrable sur cet intervalle.

2 Soit z un complexe. D'après les questions précédentes, x étant un réel donné, La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. Ainsi, puisque

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\ln t} e^{-t}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t},$$

pour tout $t > 0$, alors la fonction continue $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

3 3.a. On sait que $\Gamma(z)$ n'est rien d'autre que la limite en $+\infty$ de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt$$

À l'aide d'une intégration par partie on obtient, pour $x > 0$, l'identité

$$\int_0^x t^z e^{-t} dt = -x^z e^{-x} + z \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt$$

Compte tenu du fait que $|x^z e^{-x}| = x^{\operatorname{Re}(z)} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, le résultat demandé découle de l'identité précédente par passage à la limite en $+\infty$.

- 3.b.** Si $\alpha > 0$ alors $\alpha + k > 0$ pour tout entier $k \geq 0$. La question précédente permet alors de voir que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)\Gamma(\alpha + p) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1)\Gamma(\alpha + p - 1).$$

Une récurrence immédiate sur p permet de voir que

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p) \cdots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$

- 3.c.** Soit $x > 0$; la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est positive, continue et non nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$. $\Gamma(x)$ qui est la valeur de son intégrale sur cet intervalle est donc strictement positive.

- 3.d.** Il est clair que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 1$.

- 4** Soit z un complexe dont la partie réelle est strictement positive ; pour tout réel $t > 0$, on pose

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}.$$

Le développement en série entière de la fonction exponentielle, permet d'écrire

$$t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t), \quad \forall t > 0.$$

Pour $n \geq 1$, le module du terme général u_n de cette série de fonctions est majoré, indépendamment de $t \in]0, 1]$, par $\frac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$, ce qui justifie l'écriture

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \int_0^1 t^{z-1} dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} \end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

5 On pose $\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$; on remarque que \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R} .

Si $x \in \mathcal{U}$ et $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\frac{1}{n+x}$ est bien définie et on a $\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$.

la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est donc convergente ; on note $\varphi(x)$ sa somme et on pose

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}, \quad x \in \mathcal{U}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considérons $x_0 \in \mathcal{U}$ et montrons que φ est continue en x_0 .

- Si $x_0 > 0$, $]x_0/2, +\infty[$ est un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans \mathcal{U} et on a

$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \frac{2}{x_0}, \quad x \in [x_0/2, +\infty[.$$

Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur $]x_0/2, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} v_n$; les fonctions v_n étant continues en x_0 , il en est de même de la

fonction φ .

- Si $x_0 < 0$, notons $-n_0$ la partie entière de x_0 ; alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et le segment $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, où $\eta = \min(n_0 + x_0, 1 - (n_0 + x_0))$, est contenu dans \mathcal{U} et on a

$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{n!(n - n_0)} \leq \frac{1}{n!}, \quad x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta], \quad n > n_0.$$

Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq n_0+1} v_n$; comme les fonctions v_n sont continues en x_0 , il en est de

même de la fonction $x \mapsto \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} v_n(x)$. Comme $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n_0} v_n(x) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} v_n(x)$,

est somme de $n_0 + 2$ fonctions continues en x_0 , elle est aussi continue en x_0 .

6 Soient a et b deux réel avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

6.a. On sait que $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$, on en déduit que

- si $t \in]0, 1]$ alors $\ln(t) \leq 0$, et par suite $(a-1)\ln t \geq (b-1)\ln t$ et comme la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante, on obtient $t^{a-1} \geq t^{b-1}$ et donc $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.
- si $t > 1$ alors $\ln t > 0$, donc $t^{a-1} \leq t^{b-1}$ et par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.

6.b. Soit $x \in [a, b]$. D'après ce qu précède, pour $t \in]0, 1]$, on a

$$0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}),$$

de même si $t > 1$, alors

$$0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

On en déduit que $0 < t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

6.c. La fonction $f : (x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = f(x, t) \ln t.$$

De plus, pour tout segment $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout couple (x, t) d'éléments de $[c, d] \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln t| e^{-t} t^{x-1} \leq |\ln t| e^{-t} \max(t^{c-1}, t^{d-1}) \leq |\ln t| e^{-t} (t^{c-1} + t^{d-1}) = \varphi(t)$$

La fonction dominante φ est bien évidemment intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque, si l'on prend $\varepsilon > 0$ dans l'intervalle $]1 - c, 1[$, on obtient $t^\varepsilon \varphi(t) = t^\varepsilon (t^{c-1} + t^{d-1}) e^{-t} |\ln t| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0$, ce qui justifie l'intégrabilité de φ sur $]0, 1]$, et l'inégalité $\varphi(t) \leq (t^{c-1} + t^{d-1}) t e^{-t} = (t^c + t^d) e^{-t}$, valable pour $t \geq 1$, montre que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Comme le segment $[c, d]$ est arbitraire, le théorème de dérivation sous le signe intégral, permet alors de conclure que la fonction Γ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt, \quad x > 0.$$

II Deuxième partie

1 L'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, elle est donc de classe C^∞ sur $]0, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme ; la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est aussi de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* . On en déduit que la fonction γ_α , qui est le produit de ces deux fonctions, est également de classe C^∞ sur $]0, R[$ et on a

$$\gamma'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1},$$

de même

$$\gamma''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}.$$

Ainsi, γ_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle (F_λ) si et seulement si

$$\forall x \in]0, R[, -(x^2 + \lambda^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n} = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\forall x \in]0, R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} ((n+\alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\alpha+n} = 0,$$

et puisque $x^\alpha \neq 0$, pour tout $x \in]0, R[$, cela est équivalent à

$$\forall x \in]0, R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} ((n+\alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n. \quad (1)$$

Or dans (1), il s'agit d'une égalité, sur l'intervalle $]0, R[$, entre les sommes de deux séries entières de même rayon de convergence R ; par continuité, ces deux fonctions coïncident donc en 0 ainsi que leurs dérivées successives ; on en déduit alors que

$$(\alpha^2 - \lambda^2) a_0 = 0, \quad ((\alpha+1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, ((\alpha+n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}. \quad (2)$$

D'où le résultat demandé puisque $a_0 \neq 0$.

- 2** On suppose que $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle (F_λ) .

2.a. D'après la question précédente on obtient

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad ((\lambda+n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}. \quad (3)$$

Les relations (3) donnent alors

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 - \lambda^2} a_{2(p-1)} = \frac{1}{4p(\lambda+p)} a_{2(p-1)} \end{cases}$$

et compte tenu de la question 3.(b) de la première partie, on en déduit, par récurrence immédiate, que

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = a_0 \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\lambda+p+1)} \end{cases}$$

- 2.b.** Avec les notations précédentes, la règle de D'Alembert permet de voir que, pour tout réel x , la série numérique $\sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$ est convergente ; on en déduit alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est infini.

- 2.c.** Si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\lambda+p+1)} = \frac{1}{2^{2p+\lambda} p! \Gamma(\lambda+p+1)},$$

et par suite

$$\forall x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}.$$

Par ailleurs, il est bien évident que $\frac{y_\lambda(x)}{x^\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$, c'est à dire

$$y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}.$$

3 On suppose ici que λ n'est pas un demi-entier ; en particulier $\lambda > 0$.

3.a. Les équivalences établies à la question 1. de cette partie et l'expression de la fonction $y_{-\lambda}$ permettent de voir facilement que cette fonction est aussi solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle (F_λ) .

3.b. Soient β et δ sont des réels tels que $\beta y_\lambda + \delta y_{-\lambda} = 0$. (*)

Comme $y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$ et $y_{-\lambda} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^{-\lambda}}{2^{-\lambda} \Gamma(-\lambda + 1)}$, les fonctions y_λ et $y_{-\lambda}$ tendent respectivement vers 0 et $+\infty$ en 0 ; en faisant tendre x vers 0 dans (*), on obtient $\delta = 0$ et par suite $\beta = 0$. Les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont donc linéairement indépendantes.

Par ailleurs, (F_λ) étant une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et homogène, son ensemble de solutions à valeurs réelles sur \mathbb{R}_+^* est donc un espace vectoriel réel de dimension deux, dont $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est une base.

DEUXIÈME PROBLÈME

III Première partie

1 **1.a.** Le domaine de définition de la fonction ρ est égal à \mathbb{R} et cette fonction est 2π -périodique.

1.b. La fonction ρ est paire comme la fonction cosinus ; on en déduit que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point $\varphi(-\theta)$ du support de l'arc γ_1 se déduit du point $\varphi(\theta)$ par symétrie par rapport à l'axe polaire $O + \mathbb{R}\vec{i}$. Ainsi, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{i}$ est un axe de symétrie du support de l'arc γ_1 .

1.c. Puisque la fonction ρ est 2π -périodique, le support de l'arc γ_1 est complètement décrit lorsque θ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ainsi, grâce à la parité de la fonction ρ , le support de l'arc γ_1 peut être obtenu à partir de celui de l'arc γ_2 par symétrie par rapport à l'axe polaire.

2 On a $\rho(\pi) = 0$ donc $\varphi(\pi) = O$, puis $\rho'(\pi) = -\sin \pi = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos \pi = 1 \neq 0$; on en déduit que le point $O = \varphi(\pi)$ du support de l'arc γ_1 est un point de rebroussement de première espèce.

- 3 Pour tout réel θ , on a

$$\varphi'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad \varphi''(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\vec{u}(\theta) + 2\rho'(\theta)\vec{v}(\theta).$$

Le déterminant des vecteurs $\varphi'(\theta)$ et $\varphi''(\theta)$ dans une base orthonormée de \vec{E} vaut alors

$$\det(\varphi'(\theta), \varphi''(\theta)) = 2\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) = 3(1 + \cos\theta).$$

On en déduit qu'en tout point $\varphi(\theta)$ de l'arc γ_1 distinct du pôle, c'est à dire que $(1 + \cos\theta) \neq 0$, ce déterminant est strictement positif puisque $1 + \cos\theta > 0$; ainsi, ces point sont biréguliers et la concavité de la courbe est tournée vers le pôle O.

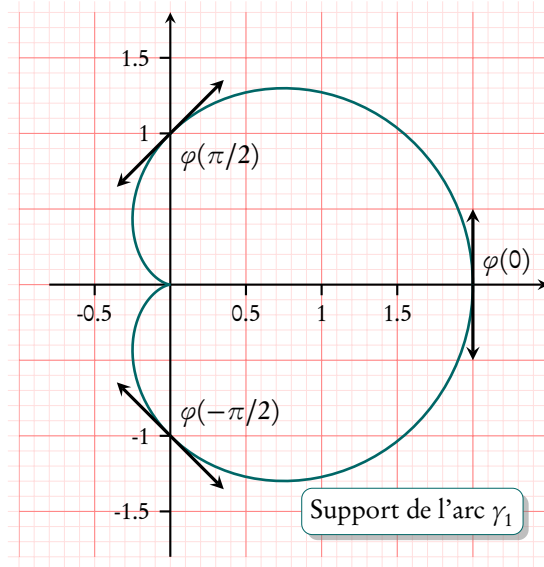
- 4 La fonction ρ est de classes C^∞ et décroissante sur le segment $[0, \pi]$ puisque

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \rho'(\theta) = -\sin\theta \leq 0.$$

on en déduit le tableau de variations suivant

x	0	π
$\rho'(x)$	0	0
$\rho(x)$	2	0

- 5



- 6 À l'aide de la définition, on obtient l'expression de la longueur de l'arc γ_2 , notée $\ell(\gamma_2)$, et donnée par

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^\pi \|\varphi'(\theta)\| d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi \cos(\theta/2) d\theta = 4$$

- 7 La portion du plan délimitée par le support de l'arc γ_1 est définie par

$$\{O + r\vec{u}(\theta); -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq \rho(\theta)\};$$

elle a la même aire que l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 ; -\pi \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$$

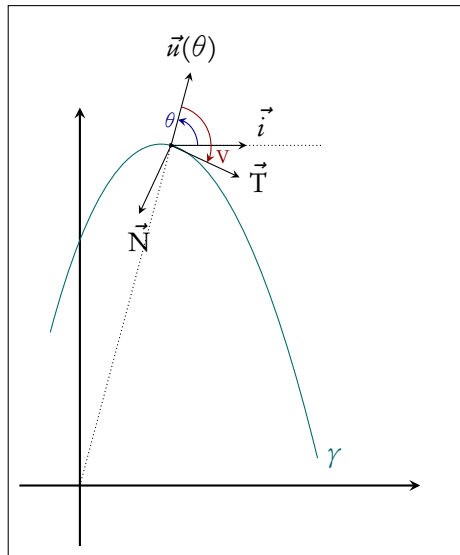
L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de \mathcal{D} est donnée par $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$; cette intégrale double se calcule facilement par passage en coordonnées polaire, on obtient alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

IV Deuxième partie

IV.A. Question de cours

1



- 2 Par définition, l'abscisse curviligne s sur l'arc γ orienté dans le sens des θ croissants et correspondant au choix de θ_0 comme origine est la fonction définie par

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)} dt.$$

$s(\theta_1)$ représente la longueur de la portion de l'arc γ décrite lorsque θ varie de θ_0 à θ_1 si $\theta_1 \geq \theta_0$ et son opposé sinon.

Il découle de cette définition que $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{f^2 + f'^2}$.

- 3 On sait que $\tan V = f/f'$ et par dérivation on obtient $(1 + \tan^2 V) \frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - f f''}{f'^2}$,

d'où

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - f f''}{f^2 + f'^2}.$$

Puis $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\alpha}$, et comme $\alpha = \theta + V$ alors $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{f^2 + 2f'^2 - f f''}{f^2 + f'^2}$.

On en déduit alors que

$$R = \frac{(f^2 + f'^2)^{3/2}}{f^2 + 2f'^2 - f f''}.$$

Le fait que l'on puisse diviser par la quantité $f^2 + 2f'^2 - f f''$ est justifié par la birégularité de l'arc γ en question.

- 4 On sait que $I = M + R\vec{N}$, puis $\vec{N} = -R \sin V \vec{u} + R \cos V \vec{v}$; ainsi I a pour coordonnées $(-R \sin V, R \cos V)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$. Par ailleurs on a

$$\cos V = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}} \quad \text{et} \quad \sin V = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

donc le point I a pour coordonnées $\left(-\frac{(f^2 + f'^2)f}{f^2 + 2f'^2 - f f''}, \frac{(f^2 + f'^2)f'}{f^2 + 2f'^2 - f f''} \right)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

IV.B. Retour à l'arc γ_1

- 1 On vient de voir que les coordonnées de $I(\theta)$, centre de courbure en $M((\theta)) = \varphi(\theta)$, dans le repère $(M(\theta), \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, sont

$$\left(-\frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}, \frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho'}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right) = \frac{2}{3}(-\rho, \rho');$$

on en déduit que les coordonnées de $I(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont

$$\frac{1}{3}(\rho, 2\rho') = \frac{1}{3}(1 + \cos \theta, -2 \sin \theta),$$

c'est à dire que $\overrightarrow{OI(\theta)} = \frac{1}{3}(1 + \cos \theta) \cdot \vec{u}(\theta) - \frac{2}{3} \sin \theta \cdot \vec{v}$.

Alors que dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , ses coordonnées sont

$$\left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \right)$$

c'est à dire que

$$\overrightarrow{OI(\theta)} = \left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{2}{3} \right) \cdot \vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \cdot \vec{j}.$$

- 2 Soit Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\vec{i}$, alors

$$\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = \left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{1}{6}\right) \cdot \vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \cdot \vec{j} = \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cdot \vec{u}(\theta) + \frac{1}{6} \cdot \vec{i}.$$

Par ailleurs $\overrightarrow{OM(\theta + \pi)} = -(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta)$

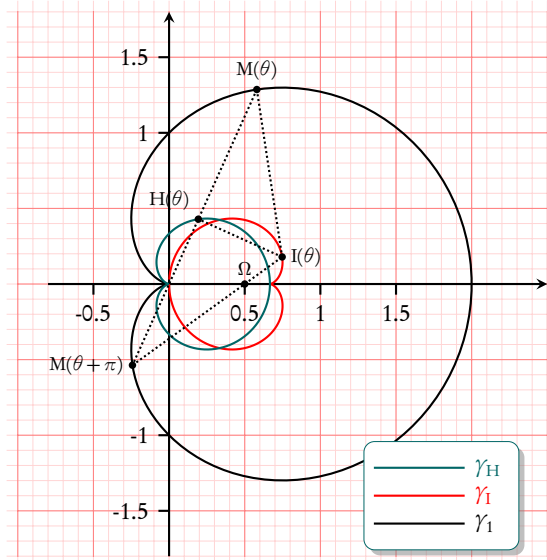
donc $\overrightarrow{\Omega M(\theta + \pi)} = -(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta) - \frac{1}{2} \vec{i}$ et par suite $\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega M(\theta + \pi)}$, c'est à dire que le point $I(\theta)$ est bien l'image du point $M(\theta + \pi)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{3}$.

- 3 On a $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \text{pr}(\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)})$, où pr désigne la projection orthogonale de \vec{E} sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}(\theta)$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)} = \frac{2}{3}(\rho(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta))$ donc $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = -\frac{2}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$. On en déduit alors que

$$\overrightarrow{OH(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} + \overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \frac{1}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM(\theta)}.$$

Ainsi, le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

4



- 5 Il s'agit bien entendu de la longueur de la courbe décrite une seule fois, ce qui donne le

tiers de celle de l'arc $\left(]-\pi, \pi[, \varphi /]-\pi, \pi[\right)$; elle vaut donc $\frac{8}{3}$. L'aire de la portion du plan que cette courbe délimite vaut quant à elle $\frac{\pi}{6}$.

FIN DU CORRIGÉ

Rien ne saurait remplacer un livre en papier

*Des livres de prépas très joliment imprimés
à des prix très accessibles*

Al9ahira
en ligne

En 3 clics seulement, on livre, tu étudies



La qualité est notre point fort.

Vos commentaires sont importants pour nous
Pour toute information, n'hésitez pas à nous contacter

<mailto:al9ahira@gmail.com>

<http://al9ahira.com/>

Tél : 0539/34 33 20

7, rue Égypte. Tanger