Corrigé

Filière PSI

par S. BOUJAIDA
Lycée Moulay Youssef
Rabat

I Première partie

E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et u un endomorphisme de E.
On suppose que $\chi_u = (\lambda - X)^2(\mu - X)$ ou $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ et on pose $v = (u - \lambda \mathrm{id}_E)^2$ et $w = u - \mu \mathrm{id}_E$

1. ***1.a.*** Les deux endomorphismes $\lambda \mathrm{id}_E$ et u commutent.
Donc $v^2 = u^2 - 2\lambda u + \lambda^2 \mathrm{id}_E$.

Oubli de la commutativité (1pt)

1.b. Soit $x \in \operatorname{Ker} w$. $(u - \mu \mathrm{id}_E)(x) = 0_E$ donc $u(x) = \mu x$.
On en déduit que $(u - \lambda \mathrm{id}_E)(x) = (\mu - \lambda)x$ et donc que $v(x) = (u - \lambda \mathrm{id}_E)^2(x) = (\mu - \lambda)^2 x$.

$(u - \lambda \mathrm{id})^2(x) = (u(x) - \lambda x)^2$ *!*
(1pt+1pt)

1.c. Soit $x \in \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Ker} w$. $x \in \operatorname{Ker} w$ donc d'après la question précédente $v(x) = (\mu - \lambda)^2 x$. Comme $v(x) = 0_E$ et $\mu \neq \lambda$ alors $x = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Ker} w = \{0_E\}$.

1pt

2. ***2.a.*** Soit $x \in E$. $w\big(v(x)\big)(x) = vw(x) = (u - \lambda \mathrm{id}_E)^2(u - \mu \mathrm{id}_E)(x)$.
Or d'après le théorème de Cayley–Hamilton $\chi_u(u) = -(u - \lambda \mathrm{id}_E)^2(u - \mu \mathrm{id}_E) = 0$. Donc $w\big(v(x)\big) = 0_E$, soit $v(x) \in \operatorname{Ker} w$.
De la même façon pour tout $x \in E$, $w(x) \in \operatorname{Ker} v$.

1pt+1pt+1pt

2.b. $(X - \lambda)^2 = (X - \mu)(X - 2\lambda + \mu) + \lambda^2 - \mu(2\lambda - \mu) = (X - \mu)(X - 2\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)^2$.

2pt

Soit $x \in E$. En appliquant à u et ensuite à x l'égalité précédente on obtient

$$v(x) - \big(u - (2\lambda + \mu)\mathrm{id}_E\big)w(x) = (\lambda - \mu)^2 x$$

2pt

On pose alors $x_1 = \dfrac{1}{(\lambda - \mu)^2} v(x)$ et $x_2 = \dfrac{1}{(\lambda - \mu)^2}\big(u - (2\lambda + \mu)\mathrm{id}_E\big)w(x)$. de telle façon que $x = x_1 + x_2$. $v(x) \in \operatorname{Ker} w$ donc $x_1 \in \operatorname{Ker} w$. $w(x) \in \operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Ker} v$ est stable par le polynôme en v, $u - (2\lambda + \mu)\mathrm{id}_E = v - 2\lambda \mathrm{id}_E$ donc on a aussi $x_2 \in \operatorname{Ker} v$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} v + \operatorname{Ker} w$.
Alors $E = \operatorname{Ker} v + \operatorname{Ker} w$ et puisque on a déjà démontré que $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Ker} w = \{0_E\}$, cette somme est directe.

★★★★★
Une application directe du lemme des noyaux permet d'aboutir plus rapidement. On reprend la démonstration du lemme ici en quelque sorte

1pt+1pt

ceci est toujours vrai : si une valeur propre est de multiplicité 1 alors le sous espace propre associé est de dimension 1

2.c. $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker}(u - \mu \mathrm{id}_E) = E_\mu(u)$ et μ est une valeur propre de u de multiplicité 1 donc $\dim \operatorname{Ker} w \leqslant 1$. $\operatorname{Ker} w$ est non nul puisque μ est une valeur propre de u donc on a forcément $\dim \operatorname{Ker} w = 1$.
Comme $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Ker} w$ sont supplémentaires dans E, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} v = 2$.

2pt

3. un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si pour chaque valeur propre de u la dimension du sous espace propre qui lui est associé est égale à sa multiplicité.
Dans le cas de u ceci se réalise si et seulement si $\dim E_\lambda(u) = 2$.

1pt+1pt

4. $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)^2$ soit $E_\lambda(u) \subset \operatorname{Ker} v$.
u est non diagonalisable donc $\dim E_\lambda(u) < 2$. Puisque $\dim \operatorname{Ker} v = 2$, alors $E_\lambda(u)$ est un sous espace strict de $\operatorname{Ker} v$.

5. $e_2 \in \operatorname{Ker} v \backslash E_\lambda$ et $e_1 = (u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_2)$.

2pt+2pt

5.a. $(u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_1) = (u - \lambda \mathrm{id}_E)^2(e_2)$ et $e_2 \in \operatorname{Ker} v$ donc $(u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_1) = 0_E$ soit $u(e_1) = \lambda e_1$.
Ensuite ; e_1 est un vecteur de E_λ et $e_2 \notin E_\lambda$ donc la famille (e_1, e_2) est libre. Puisque $\dim \operatorname{Ker} v = 2$ alors c'est une base de $\operatorname{Ker} v$.

2pt+2pt

5.b. (e_1, e_2) est une base de $\operatorname{Ker} v$, (e_3) est une base de $\operatorname{Ker} w$ ($\dim \operatorname{Ker} w = 1$) donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Ker} w$.
Ensuite ; $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = e_1 + \lambda e_2$ et $u(e_3) = \mu e_3$ donc

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

6. **Un exemple :** f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2pt

6.a. $\chi_f = -(X-1)^2(X-2)$.

2pt+1pt+1pt

Si pour uns scalaire α le système $AX = \alpha X$ donne 0 pour seule solution alors α n'est pas une va. p. de A. Revoyez χ_A

6.b. $E_2(f) = \mathbb{R}.v_3$ avec $v_3 = (1,1,1)$ et $E_1(f) = \mathbb{R}v_1$ avec $v_1 = (1,0,1)$.
$\dim E_1(f) + \dim E_2(f) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$ et 1 et 2 sont les seules valeurs propres de f donc f n'est pas diagonalisable.

1pt+1pt+1pt

6.c. $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rg}(f - \mathrm{id})^2 = \operatorname{rg}(A - I)^2 = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})^2 = 2$.
Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ alors

$$(f - \mathrm{id})^2(x) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})^2$ est donc le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

6.d. On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \lambda \mathrm{id})(e_2)$ (*avec ici* $\lambda = 1$, *par analogie avec les notations de la question* (5)).

i) Le calcul donne $e_1 = (-2, 0, -2)$ et on a $E_1(f) = \mathbb{R}e_1$. Un vecteur propre de f avec le deuxième coordonnée valant 1 ne peut être colinéaire à e_1, il est donc associé à la valeur propre 2. 1pt+1pt

Le calcul permet de prendre $e_3 = (1, 1, 1)$.

La famille (e_1, e_2, e_3) correspond à la description donnée à la famille de la question (5.b), c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

ii) Toujours d'après (5.b) 1pt+1pt+1pt

$$B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. La formule de passage donne ensuite $A = PBP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) B est diagonale par blocs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 1pt+1pt+1pt+1pt

$$B^n = \begin{pmatrix} \boxed{C^n} & 0 \\ & 0 \\ 0 \quad 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C = I_2 + N$ avec $N^2 = 0$.donc selon la formule du binôme, pour tout $n \geqslant 2$, puisque I_2 et N commutent, $C^n = I_2 + nN = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. expression encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$. Ainsi

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Ensuite $A^n = PB^nP^{-1}$, (*on laisse de coté le calcul définitif de A^n pour l'instant*).

7. **7.a.** Considérons la norme $|.|$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne canonique $\|.\|$ de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ 2pt

$$\left|\frac{1}{k!}M^k\right| \leqslant \frac{|M|^k}{k!}$$

La série réelle $\sum \frac{|M|^k}{k!}$ converge car la série entière $\sum \frac{x^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini (ou utiliser le critère de d'Alembert) donc la série $\sum \frac{1}{k!}M^k$ à termes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est absolument convergente. Elle est donc convergente.

Application de D'Alembert à la série $\sum ({}^1\!/_{k!})M^k$ elle même. C'est quoi le quotient de deux matrices ?

7.b. Vu l'expression donnée pour B^k dans (6.d.iii). on a 2pt+2pt

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

en notant que $\sum_{n=0}^{+\infty} {}^n\!/_{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^n\!/_{n!} = \exp'(1) = e$.

Justifions maintenant que $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k\right)P^{-1}$.

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n}({}^1\!/_{k!})B^k\right)_n$ converge vers $\exp(B)$ et l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est continue car elle est linéaire et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}({}^1\!/_{k!})A^k\right)_n$ converge vers $P\exp(B)P^{-1}$.

Comme $\left(\sum_{k=0}^{n}({}^1\!/_{k!})A^k\right)_n$ converge vers $\exp(A)$, on obtient le résultat voulu par unicité de la limite d'une suite.

Calculons alors $\exp(A)$. Pour cela on commence par calculer P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et ensuite

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -2\,e + e^2 & -e + e^2 & 3\,e - e^2 \\ -e + e^2 & e^2 & e - e^2 \\ -3\,e + e^2 & -e + e^2 & 4\,e - e^2 \end{pmatrix}$$

II Deuxième partie

1pt

1. En posant $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} a_{n+1} = \alpha_1 a_n + \beta_1 b_n + \gamma_1 c_n \\ b_{n+1} = \alpha_2 a_n + \beta_2 b_n + \gamma_2 c_n \\ c_{n+1} = \alpha_3 a_n + \beta_3 b_n + \gamma_3 c_n \end{cases}$

1pt+1pt

2. Si V est un vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre λ alors

$$v_{n+1} = {}^tX_{n+1}V = {}^tX_n\,{}^tMV = \lambda\,{}^tX_nV = \lambda v_n$$

donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison λ.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

L'application propose une approche intéressante pour la résolution d'une relation de récurrence

3. Application : $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ des suites réelles telles que $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 15b_n + 3c_n \\ b_{n+1} = a_n - 4b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 10b_n + 3c_n \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

1pt+1pt

3.a. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

2pt+1pt

3.b. $\chi_{{}^tM} = \chi_M = -(X-1)^3$, 1 est donc la seule valeur propre de ${}^tM$. Le sous espace propre associé est le plan de E d'équation cartésienne dans la base canonique : $3x + y + 2z = 0$.

3pt

3.c. On prend

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les deux suite $(v_n^1)_n$ et $(v_n^2)_n$ vérifient alors les relations $v_{n+1}^1 = v_n^1$ et $v_{n+1}^2 = v_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elles sont donc constantes.

Question très rarement abordée

Comme $v_0^1 = {}^tX_0V_1 = 1$ et $v_0^2 = {}^tX_0V_2 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n^1 = {}^tX_nV_1 = 1$ et $v_n^2 = {}^tX_nV_2 = 0$. Ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_n - 3b_n = 1 \\ -2b_n + c_n = 0 \end{cases}$$

ou encore $a_n = 1 + 3b_n$ et $c_n = 2b_n$ et en reportant dans la deuxième équation du système de récurrence $(\mathcal{S})$, on obtient $b_{n+1} = a_n - 4b_n + c_n = b_n + 1$. $(b_n)_n$ est donc une suite arithmétique de raison 1. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 + n = n$, et par suite $a_n = 3n + 1$ et $c_n = 2n$.

III Troisième partie

f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

1. **1.a.** Le calcul donne : $\chi_f = -(X+1)^3$. -1 est la seule valeur propre de f

2pt+1pt

1.b. Le sous espace propre de f associé à la valeur propre -1 de f est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne : $-x+5y+2z=0$. Il est de dimension 2.

1pt+1pt

1.c. -1 est la seule valeur propre de f et $\dim E_{-1}(f) < \dim \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas diagonalisable.

1pt

1.d. On pose $u_1 = e_1$, $u_2 = (f+\mathrm{id})(u_1)$, et $u_3 = 2e_1 + e_3$

i) Un calcul matriciel donne :

1pt+1pt

- $f(u_3) = -2e_1 + e_3 = -u_3$.
- $u_2 = (f+\mathrm{id})(e_1) = (-1,-1,2)$ et ensuite $f(u_2) = -u_2$.

u_2 et u_3 sont bien dans $E_{-1}(f)$.

ii) Le déterminant du système de vecteurs (u_1,u_2,u_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

1pt

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La famille $\mathcal{B}_1 = (u_1,u_2,u_3)$ est donc libre. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. **2.a.** $f(u_1) = -u_1 + u_2$, $f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -u_3$ donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

2pt

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.b. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La méthode de réduction de Gauss–Jordan serait bien indiquée ici (1pt+2pt)

2.c. $A = PBP^{-1}$.

3. On pose $J = I + B$.

1pt

3.a. $J^2 = 0$

Ne pas développer $(I+B)^2$, *calculer plutôt* $I+B$ *puis élever au carré.* (1pt)

3.b. $B = (-I + J)$ et les matrices I et J commutent donc selon la formule du binôme de Newton, pour tout $k \geqslant 2$

2pt

$$B^k = \sum_{p=1}^{k} C_k^p (-1)^{k-p} J^p$$

$J^2 = 0$ donc seuls les termes d'indice $p=0$ et $p=1$ subsistent dans cette dernière somme : $B^k = (-1)^k I + k(-1)^{k-1} J = (-1)^k (I - kJ)$

Cette expression est encore valable pour $k=0$ et pour $k=1$.

3.c. Soit $k \in \mathbb{N}$. $A^k = PB^kP^{-1} = (-1)^k P\big(I - kJ\big)P^{-1} = (-1)^k \big(I - kPJP^{-1}\big)$. Ensuite

1pt+2pt

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k}{k!} PJP^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{k!} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k!}(-1)^{k-1} = -\exp'(-1) = -e^{-1}$$

L'expression de A^k pour $k=1$ donne $PJP^{-1} = A + I$.
Ainsi $\exp(A) = e^{-1}I + e^{-1}(A+I) = e^{-1}(2I+A)$, ou encore

On n'a pas eu besoin du calcul de P^{-1}, par contre on a pu exprimer $\exp(A)$ comme un polynôme en A, chose qui est théoriquement toujours vraie.

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 0 & 5e^{-1} & 2e^{-1} \\ -e^{-1} & 6e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -10e^{-1} & -3e^{-1} \end{pmatrix}$$

4. On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & -2u(t)+5v(t)+2w(t) \\ v'(t) & = & -u(t)+4v(t)+2w(t) \\ w'(t) & = & 2u(t)-10v(t)-5w(t) \end{array}\right. \qquad (S)$$

1pt

4.a. Il est clair que le système (S) est équivalent à l'*équation différentielle linéaire autonome du premier ordre*

$$\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \qquad (E)$$

si on pose $\varphi(t) = (u(t), v(t), w(t))$.

Là aussi le sujet évite d'utiliser les résultats tout prêts du cours et adopte une approche élémentaire

2pt

4.b. On écrit $\varphi(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$.
N.B : x, y et z sont les applications composantes de φ dans la base (u_1, u_2, u_3). Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$, elles le sont aussi.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = f\Big(x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3\Big) &= x(t)f(u_1) + y(t)f(u_2) + z(t)f(u_3) \\ &= x(t)(-u_1+u_2) - y(t)u_2 - z(t)u_3 = -x(t)u_1 + (x(t)-y(t))u_2 - z(t)u_3\end{aligned}$$

D'autre part $\varphi'(t) = x'(t)u_1 + y'(t)u_2 + z'(t)$, donc en identifiant les coordonnées dans la base (u_1, u_2, u_3) on obtient le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & -x(t) \\ y'(t) & = & x(t)-y(t) \\ z'(t) & = & -z(t) \end{array}\right. \qquad (S')$$

1pt+1pt+1pt

4.c. $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc $x(0) = -2$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

1pt+2pt+1pt

4.d. $x'(t) = -x(t)$ donc ile existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = \alpha e^{-t}$. $x(0) = -2$ donne ensuite $\alpha = -2$. Ainsi $x(t) = -2e^{-t}$. De même $z(t) = e^{-t}$.
Pour y : $y'(t) + y(t) = x(t) = -2e^{-t}$. La résolution de cette dernière équation prouve qu'il existe une constante k telle que $y(t) = (-2t+k)e^{-t}$ et comme $y(0) = 0$ alors $k = 0$.
Ainsi l'unique solution du système différentiel (S') vérifiant la condition initiale $x(0) = -2, y(0) = 0$ et $z(0) = 1$ est donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -2e^{-t} \\ y(t) & = & -2te^{-t} \\ z(t) & = & e^{-t} \end{array}\right.$$

4.*e*. Matriciellement

2pt+2pt

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -2te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 1-4t \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{cases} u(t) & = & 2te^{-t} \\ v(t) & = & 2te^{-t} \\ w(t) & = & (1-4t)e^{-t} \end{cases}$$

Ensuite ; on pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$. D'après le cours l'unique solution du système différentiel $U'(t) = AU(t)$ vérifiant la condition $U(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donnée par

$$U(t) = e^{tA}U(0) = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

L'unique solution du problème de Cauchy
$X'(t) = AX(t)$ et $X(t_0) = X_0$
est la fonction X *définie par*
$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$