Corrigé du CCM 2005 Mah1 PSI
Proposé par Abdelaziz KHOUTAIBI

Partie 1

1. C'est une question de cours
   $(\mathcal{E}_f)$ est une éqution differentielle du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique :$r^2+1=0$
   D'aprés le cours ,S_0 est un s.e.v de $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dim 2, dont une base est(p,q) où $p(x)=\cos x$ et $q(x)=\sin x$.

2. (a) Les fonctions :$u : t\mapsto f(t)\cos t$ et $v : t\mapsto f(t)\sin t$ sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions φ_1 et φ_2 sont respectivement les primitives de u et de v qui s'annulent en 0 , dont elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et:
   $\varphi_1'(x)=f(x)\cos x$, $\varphi_2'x=f(x)\sin x$
   (b) Partant de $\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$ et remplacant dans l'exoresssin de $\varphi_f(x)$, on obtient facilement par linéarité de l'integrale:$\varphi_f(x)=\varphi_1(x)\sin x-\varphi_2(x)\cos x$.
   $\varphi_f(0)=0$.
   (c) φ_f est d'aprés la question précédente,est produit et somme de fonctions dérivables, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_fx=\varphi_1(x)\cos x+\varphi_2(x)\sin x$
   (d) L 'expression de $\varphi'_f(x)$ montre que φ'_f est également produit et somme de fonctions dérivables ,donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi''_f(x)=f(x)\cos^2 x+f(x)\sin^2 x-\varphi_1(x)\sin x+\varphi_2(x)\cos x=f(x)-\varphi_f(x)$
   Donc $\varphi''_f+\varphi_f=f$,ie φ_f est solution de l'eq diff $(\mathcal{E}_f)$.
   (e) φ_f est une solution de $(\mathcal{E}_f)$ vérifiant:$\varphi_f(0)=\varphi'_f(0)=0$.
   Le théoréme de cauchy lipshitz linéraire assure l'unicié de la solution de $(\mathcal{E}_f)$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$,cette solution est donc φ_f.

3. D'aprés le cours l'ensemble S_f des solutions de l'eq diff $(\mathcal{E}_f)$ est donné par:$S_f=\varphi_f+S_0=\{y+\varphi_f/y\in S_0\}$, on en déduit d'aprés $I-1$ que les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sont toutes de la forme :
   $x\mapsto \alpha\cos x+\beta\sin t+\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ où α et β sont des réels.

4. (a) h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie:$h''+h=f_1$, donc h est une solution de $(\mathcal{E}_{f_1})$
   (b) D'aprés la questoin I-3 il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, h(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x+\displaystyle\int_0^x f_1(t)\sin(x-t)dt$, donc:
   $h(x+\pi)+h(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)-\int_0^{x+\pi} f(t)\sin(x-t)=\int_0^x f_1(t)\sin(x-t)dt-\int_0^x f_1(t)\sin(x-t)dt-\int_x^{x+\pi} f_1(t)\sin(x-t)dt$.
   D'autre part, le changement de variable: $u=t-x$ donne:
   $\displaystyle\int_x^{x+\pi} f(t)\sin(x-t)dt=-\int_0^\pi f_1(u+x)\sin(u)du$, d'où:$h(x+\pi)+h(x)=\displaystyle\int_0^\pi f_1(u+x)\sin(u)du$.
   $f_1=h''+h\geq 0$ et $\sin\geq 0$ sur $[0,\pi]$, donc $\displaystyle\int_0^\pi f_1(u+x)\sin(u)du\geq 0$

5. **Cas où f est 2π périodique**
   (a) i. D'aprés le cours on connait une relation entre les coefficients de fourier exponnentielle de g et g'':
   $c_n(g'')=(in)^2c_n(g)=-n^2c_n(g)$.
   Comme $c_n(g)=\dfrac{a_n(g)-ib_n(g)}{2}, c_n(g'')=\dfrac{a_n(g'')-ib_n(g'')}{2}$, Donc :
   $a_n(g'')=-n^2a_n(g)$, et $b_n(g'')=-n^2b_n(g)$.
   D'autre part $a_n(f)=a_n(g+g'')=a_n(g)+a_n(g'')=(1-n^2)a_n(g)$ de meme $b_n(f)=(1-n^2)b_n(g)$
   ii. Les relations précédentes donnent:$a_1(f)=b_1(f)=0$.
   (b) $\boxed{\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)=0}$:

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)dt = \int_x^0 f(t)\sin(t-x)dt + \int_0^{2\pi} f(t)\sin(t-x)dt + \int_{2\pi}^{2\pi+x} f(t)\sin(t-x)dt.$$

D'autre part ,le changement de variable:$u = t-2\pi$ et la 2π- périodicité de f et sin donne :

$$\int_{2\pi}^{2\pi+x} f(t)\sin(t-x)dt = \int_0^x f(u)\sin(u-x)du,$$

D'où $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(t-x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(u-x)du = \pi(b_1\cos x - a_1\sin x) = 0$

$\displaystyle\varphi_f(x+2\pi) - \varphi_f(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t) = 0$,donc φ_f est 2π-périodique.

Si y est une solution de $(\mathcal{E}_f)$,il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, y(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \varphi_f(x)$, comme cos sin et φ_f sontb 2π-periodique , il en est de meme de y.

(c) On a établit dans les qustions a) et b)l'équivalence entre $(\mathcal{E}_f)$ admet des solutions 2π-periodiques et $a_1(f) = b_1(f) = 0$
Si $f(x) = \sin x$,$a_1(f) = 0$ et $b_1(f) = 1$, donc $(\mathcal{E}_f)$ n'admet pas de solutions périodiques.

Partie 2

1. (a) On écrit la définition de la limite:
   pour $\varepsilon = 1, \exists A > 0, x \geq A, |f(x)-\ell| \leq 1$,comme $|f(x)| = |f(x)-\ell+\ell| \leq |f(x)-\ell| + |\ell|$, alors pour $x \geq A, |f(x)| \leq 1 + |\ell|$

   (b) D'aprés a)f est bornée sur $[A,+\infty[$,de plus f étant continue sur le segment $[0,A]$,est bornée sur $[0,A]$, ainsi f est bornée sur $[0,+\infty[$.

   (c) f est croissnte et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,donc $f' \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$, d'autre part:
   $\displaystyle\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - f(0)$, donc f' est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)dt = \ell - f(0)$.

2. Les fonctions $\chi : t \mapsto f'(t)\sin t$ et $\psi : t \mapsto f'(t)\cos t$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
   $\forall\, t \in [0,+\infty[, |\chi(t)| \leq f'(t)$ et $|\psi(t)| \leq f'(t)$,comme f' est intégrable sur $[0,+\infty[$, il en est de meme des fonctions χ et ψ.

3. Une integration par parties donne:

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = [f(t)\cos(x-t)]_0^x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)dt$$

4. D'aprés I-3 les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sont de la forme:
   $\displaystyle y_{\alpha,\beta}(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$
   En utilisant l'égalité établie dans la question précédente on obtient:
   $\displaystyle y_{\alpha,\beta}(x) = f(x) + \left(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t\right)\cos x + \left(\beta - \int_0^x f'(t)\sin t\right)\sin x$

5. On a montré que f est bornée sur $[0,+\infty[$ ie $|f| \leq M_1$. sur $[0,+\infty[$
   $\displaystyle\forall\, x \in [0,+\infty[, \left|\int_0^x f'(t)\cos t\right| dt \leq \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^{+\infty} f'(t)dt = M_2$ de meme $\displaystyle\left|\int_0^x f'(t)\sin t\right| dt \leq M_2$
   Donc $|y_{\alpha,\beta}| \leq M_1 + |\alpha| + |\beta| + |f(0)| + 2M_2$ sur $[0,+\infty[$

6. (a) $n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc si $y_{\alpha,\beta}$ admet une limite en $+\infty$ il en est de meme de $y_{\alpha,\beta}(n\pi)$.
   $\displaystyle y_{\alpha,\beta}(n\pi) = f(n\pi) + (-1)^n\left(\alpha - f(0) - \int_0^{n\pi} f'(t)\cos t dt\right)$
   $\displaystyle f(n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ , \int_0^{n\pi} f'(t)\cos t dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f'(t)\cos t dt$
   Comme la suite $((-1)^n)_n$ est divergente, $(y_{\alpha,\beta}(n\pi))_n$ va admettre une limite lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\displaystyle\alpha - f(0) - \int_0^{+\infty} f'(t)\cos t dt = 0$ ie $\displaystyle\alpha = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\cos t dt$.

   (b) En étudiant de meme la suite $(y_{\alpha,\beta}(\frac{\pi}{2} + n\pi))_n$, on montre de la meme maniére que dans la question a) que :$\displaystyle\beta = \int_0^{+\infty} f'(t)\sin t dt$

7. L'unicité de Y_f vient de la questioon précédente car :$\alpha = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t dt$ et $\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\sin t dt$, ce qui donne $Y_f(x) = f(x) + \displaystyle\int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)dt$

   Réciproquement , cette fonction est une solutoin de $(\mathcal{E}_f)$ de limite 0 en $+\infty$.

Partie 3

1. (a) • Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n(x) = 0$, donc $(S_n(0))_n$ est bornée

   • Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}, S_n(x) = \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{2})\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$,donc: $\forall\, n \in \mathbb{N}, |S_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

   (b) C'est la fameuse **transformation d'Abel** :
   En posant $S_0(x) = 0$,on a:$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \sin kx = S_k - S_{k-1}$,on a donc:
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} b_k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n} b_k S_{k-1}$
   En effectuant dans la deuxiémé sommation du dernier terme le changement d'indice:$k' = k-1$, on obtient alors,,compte tenu de $S_0 = 0$:
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k = b_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k$

   (c) Contrairement a ce que le sujet laisse criore en disant:Montrer alors..,cette question ne se déduit pas de la transformation d'Abel , mais uniquement de la question a) , en effet,comme $(S_n(x))$ est bornée et $(b_p)_p$ décroissante on a:
   $\exists M > 0, \forall\, p \in \mathbb{N}, |(b_{p+1} - b_p)S_p(x)| \leq M(b_p - b_{p+1})$
   Comme $b_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,la série téléscopique $\displaystyle\sum_{p\geq 1}(b_p - b_{p+1})$ est convergente,on conclut que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}(b_p - b_{p+1})S_p(x)$ est absolument convergente.

   (d) $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(S_n(x))$ bornée donc $b_n S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}(b_p - b_{p+1})S_p(x)$ entraine sa convergence , et par suite la convergence de sa suite de sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k\right)_n$, et compte tenu de la relation de la question b) on déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_n$ des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente , d'où la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$.
   Pour tout $n \geq 1$ la fonctions v_n est 2π-périodique et impaire , il en est de meme de la fonction f.

2. (a) C'est encore la transformation d'Abel , on fait la meme chose que 1-b.

   (b) Soit $x \in]0,\pi[$
   D'aprés a) et et comptre tenu de $|S_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ on a:
   $$\left|\sum_{k=n+1}^{q} b_k \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}(b_q + \sum_{k=n+1}^{q-1}(b_k - b_{k+1}) + b_{n+1}$$
   Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{q-1}(b_k - b_{k+1}) = b_{n+1} - b_q$
   D'où $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{q} b_k \sin kx\right| \leq 2\dfrac{b_{n+1}}{\sin\frac{x}{2}}$

3. (a) D'aprés 2-b:$\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{q} b_k \sin(kx)\sin(px)\right| \leq 2\dfrac{b_{n+1}}{\sin\frac{x}{2}}|\sin(px)|$.
   Or :$\dfrac{x}{2} \in [0,\pi/2] \Rightarrow \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \dfrac{\pi}{x}$ et $|\sin(px)| \leq px$,donc
   $$\left|\sum_{k=n+1}^{q} b_k \sin(kx)\sin(px)\right| \leq 2p\pi b_{n+1}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ et en tenant compte de la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ établie dans la question 1-d, on obtient: $\forall\, x \in [0,\pi],\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx)\sin(px)\right| \leq 2p\pi b_{n+1}$

D'où : $\sup_{x\in[0,\pi]}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx)\sin(px)\right| \leq 2p\pi b_{n+1}$.

(b)
- $\forall\, x\in\mathbb{R}, w_n(x) = v_n(x)\sin px$, comme la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f alors la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge simplement vers $w : x \mapsto f(x)\sin(px)$.
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,la fonction w_n est 2πperiodique et paire, donc il suffit de montrer la convergence uniforme de la série de fonction $\sum_{n\geq 1} w_n(x)$ sur $[0,\pi]$.
- Pour $x\in\mathbb{R}$ le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} w_n(x)$ est $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx)\sin(px)$
  D'aprés la question 3-a: $\sup_{x\in[0,\pi]}|R_n(x)| \leq 2p\pi b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite de fonction (R_n) convege uniformément vers 0,d'où la convergence uniforme de la série de fonction $\sum_{n\geq 1} w_n(x)$ sur $[0,\pi]$

(c) On applique les théorèmes de continuité de la somme d'une série de fonction et d'integration terme à terme d'une série de fonctione fonctions , vérifions les hypothéses de ces théoréme:

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction w_n est continue sur $[-\pi,\pi]$
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge uniformément sur $[-\pi,\pi]$ vers $w : x\mapsto f(x)\sin(px)$

Donc w est continue sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)dx$

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)dx = \begin{cases} \pi b_p \text{ si } n=p \\ 0 \text{ si } n\neq p\end{cases}$

D'où $b_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(pt)dt$

4. (a)
- **premiére méthode**
  $F(\theta+2\pi) = \displaystyle\int_0^{\theta+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t)dt$
  Or la périodicité et l'imparité de f donne : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$, et $\displaystyle\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t)dt = \int_0^{\theta} f(t)dt$
- **deuxiéme méthode**
  Soit $G : \theta\mapsto F(\theta+2\pi) - F(\theta)$, alors G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = f(\theta+2\pi) - f(\theta) = 0$, donc G est constante sur $\mathbb{R}$ et $G(0) = F(2\pi) = 0$,donc $G = 0$.

(b) $F' = f$,donc $c_n(f) = inc_n(F)$, on en déduit $a_n(F) = \dfrac{-1}{n} b_n(f) = \dfrac{-1}{n} b_n$ et $b_n(F) = 0$ car F est paire.

(c) F est 2π-periodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,le théoréme de convergence normale de dirichlet affirme que la série de fourier de F converge normalement vers F sur $\mathbb{R}$.
On a $\forall\, x\in\mathbb{R}, F(x) = \dfrac{a_0(F)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(F)\cos(nx) = \dfrac{a_0(F)}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\cos(nx)$, pour $x=0$ on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \dfrac{a_0(F)}{2}$

5. (a) $\varphi_f(x) = -\varphi_2(x)\cos x$
Il suffit de montrer que φ_1 est paire et φ_2 est impaire.
Le changement de variable :$u=-t$ donne compte tenu de l'impárité de f : $\varphi_1(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} f(t)\cos(t)dt =$

$\displaystyle\int_0^x f(u)\cos(u)du = \varphi_1(x)$
de la meme facon on a:$\varphi_2(-x) = -\varphi_2(x)$.

(b) Si φ_f est 2π-per alors $0 = \varphi_f(0) = \varphi_f(2\pi) = -\varphi_2(2\pi) = -2\pi b_1$ d'où $b_1 = 0$.
Réciproquement si $b_1 = 0$, alors $\varphi_2(x+2\pi) = \varphi_2(2\pi) + \displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(t)dt$.
Or $\varphi_2(2\pi) = \pi b_1 = 0$, et $\displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(t)dt = \varphi_2(x)$ d'où φ_2 est 2π périodique et parsuite φ_f est 2π périodique.

6. (a) φ_f étant impaire ,$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n(\varphi_f) = 0$.

(b) φ_f est une solution 2π-periodique de $(\mathcal{E}_f)$,d'aprés la question I-5a-i,$\forall\, n \geq 2, b_n(\varphi_f) = \dfrac{b_n}{1-n^2}$.

(c) φ_f est 2π-periodique de classe C^2, d'aprés le théoréme de dirichlet, la série de fourier de φ_f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers φ_f ,ie : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi_f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi_f)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{1-n^2}\sin(nx)$
Donc ,la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{b_n}{1-n^2}\sin(nx)$ est convergente et :$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{1-n^2}\sin(nx) = \varphi_f(x) - b_1(\varphi_f)\sin(x)$

(d) Vérifions les hypothéses du théoréme de dérivation terme à terme :

- $\forall\, n \geq 2, h_n : x \mapsto \dfrac{b_n}{1-n^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $h'_n(x) = \dfrac{nb_n}{1-n^2}\cos(nx)$
- la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 2} h_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $h : x \mapsto \varphi_f(x) - b_1(\varphi_f)\sin(x)$.
- $\forall\, n \geq 2, \forall\, x \in \mathbb{R}, |h'_n(x)| \leq \dfrac{nb_n}{1-n^2}$, de plus:
  $\dfrac{nb_n}{1-n^2} \sim \dfrac{b_n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{b_n}{n}$ est convergente d'aprés 4-c.
  d'où $\displaystyle\sum_{n\geq 2} h'_n(x)$ converge normalement , donc uniformément , sur $\mathbb{R}$.
  Le théoréme affirme donc , que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :
  $\forall\, x \in \mathbb{R}, h'(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} h'_(x)$, soit en remplacant ,$\varphi'_f(x) = b_1(\varphi_f)\cos x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{1-n^2}\cos(nx)$

(e) En faisant $x = 0$ dans la relation précédente on obtient:
$0 = \varphi'_f(0) = b_1(\varphi_f) + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{1-n^2}$
D'où :$b_1(\varphi_f) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{n^2-1}$