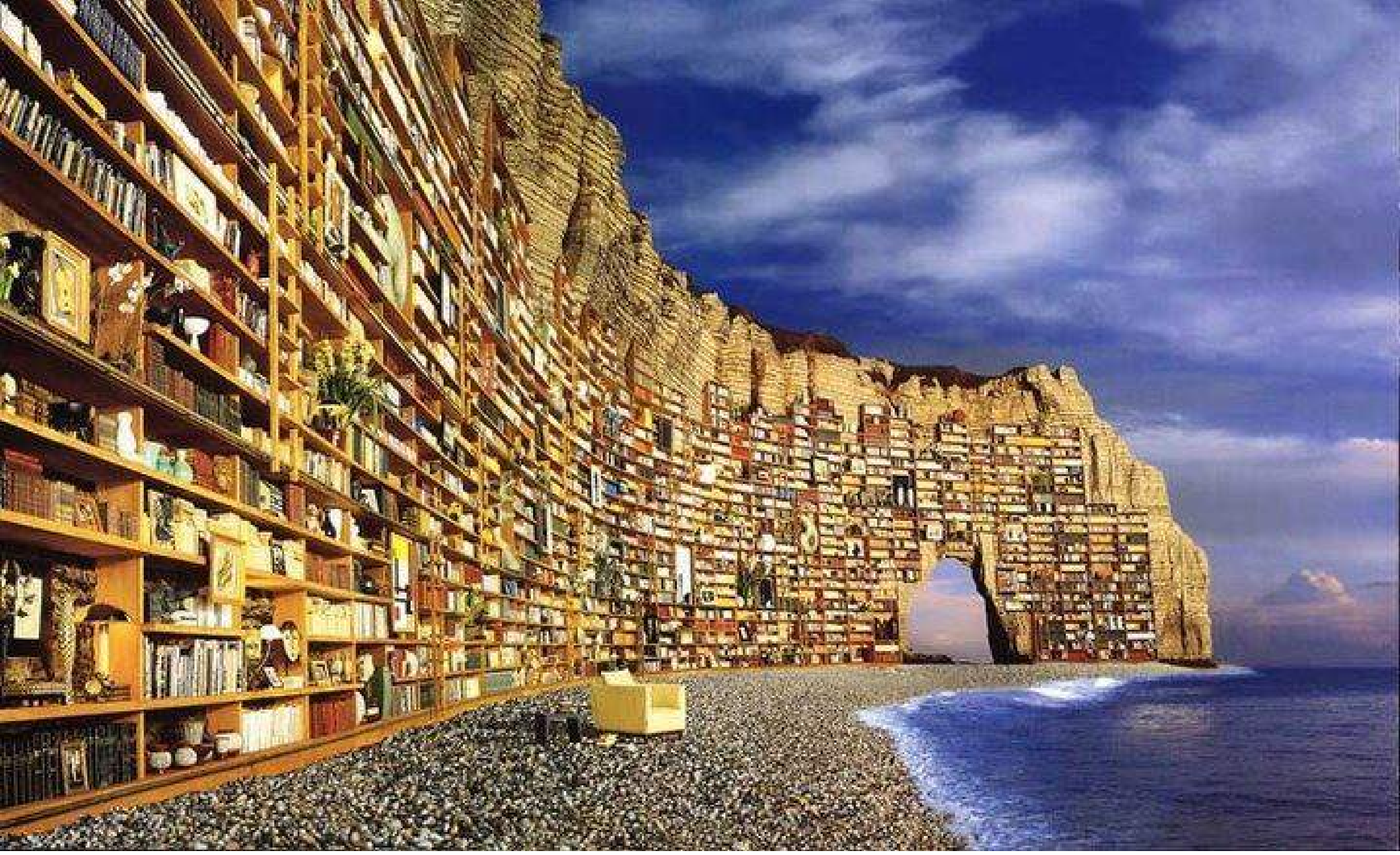
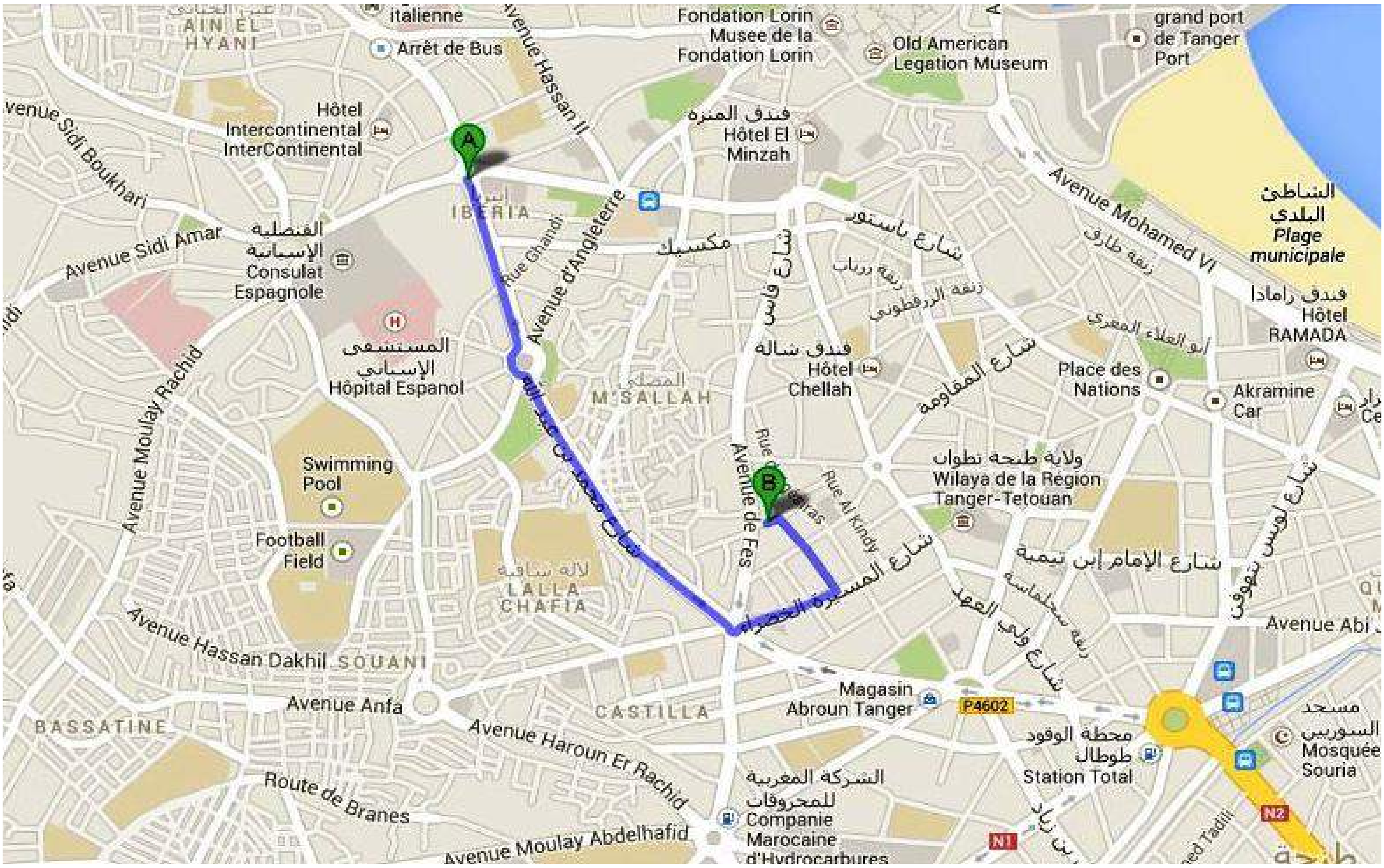


http://al9ahira.com/



Itinéraire d'accès à Al9ahira (point B sur la carte) en partant de la Place Ibéria

Exercice :

1. Pour $x, y \in [0,1]$, on sait que $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$, donc $\boxed{2\sqrt{xy} \leq x+y}$.

   Par ailleurs $(1-x)(1-y) \leq \left(1-\sqrt{xy}\right)^2 \iff -(x+y) \leq -2\sqrt{xy}$ ce qui est juste selon l'inégalité ci-dessus.

2. Soit $x, y \in [0,1]$, si $1-xy=0$, alors $y \neq 0$ et $1 \leq \dfrac{1}{y} = x \leq 1$, donc $x=y=1$.

   - F est continue sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$ comme fonction rationnelle en (x,y) avec un dénominateur ne s'annulant jamais.
   - Au voisinage de $(1,1)$: $|F(x,y)| \leq \dfrac{xy\left(1-\sqrt{xy}\right)^2}{(1-xy)} = \dfrac{xy\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)}$, ce dernier terme tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(1,1)$. Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} F(x,y) = 0 = F(1,1)$, F est alors continue au point $(1,1)$.
   - On conclut que F est continue sur $[0,1]^2$.

3. Il est clair que $[0,1]^2$ est un fermé-borné de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie, c'est alors un compact de $\mathbb{R}^2$, F étant continue sur ce compact, elle est donc bornée et atteint ses bornes

4. Pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a $F(x,y) \geq 0$, donc $\inf\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) \geq 0$, de plus cette valeur est atteinte sur les quatres segments de la frontière de $[0,1]^2$.

   On conclut que $\inf\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) = 0$ et que cette valeur est atteinte sur l'ensemble :

   $(\{0\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{1\}) \cup (\{1\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{1\})$.

5. F est de classe C^1 sur $]0,1[^2$ comme fonction rationnelle en (x,y) avec un dénominateur ne s'annulant jamais.

   - Un calcul simple fournit : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x(1-x)}{(1-xy)^2}\left(x^2y-2x+1\right)$
   - F étant symétrique en (x,y), on obtient : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(1-y)}{(1-xy)^2}\left(y^2x-2y+1\right)$

6. Soit $(x_0,y_0) \in]0,1[^2$, on alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ est équivaut à $\begin{cases} x^2y-2x+1=0 & (1) \\ y^2x-2y+1=0 & (2) \end{cases}$, en faisant $y\times(1) - x\times(2)$, on trouve $x=y$, en repportant dans (1), on obtient $x^3-2x+1=0$, on remaque facilement que $x=1$ est solution, on effectue alors la division euclidienne par $(x-1)$, on aura :

   $x^3-2x+1 = (x-1)\left(x^2+x-1\right)$, ainsi $x^3-2x+1=0 \iff \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$, la première et troisième solution sont exclues car n'appartenant à $]0,1[$.

   Ainsi le seul point critique est $\boxed{(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$.

7. Un calcul fastidieux donne $F(x_0,y_0) = \dfrac{5\sqrt{5}-11}{2} \approx 9.0170 \times 10^{-2}$.

Par ailleurs F étant nul sur la frontière de $[0,1]^2$, donc

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) = \sup_{(x,y)\in]0,1[^2} F(x,y)$$

Et puisque F de classe C^1 et n'admet qu'un seul point critique (x_0,y_0) sur l'ouvert $]0,1[^2$, alors forcément

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) = \sup_{(x,y)\in]0,1[^2} F(x,y) = F(x_0,y_0).$$

Problème :

PARTIE I

1.1 Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto e^{2x\cos(t)}$ est continue, positive et non nulle sur le segment $[0,\pi]$, donc $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{2x\cos t}dt>0$.

1.2. On a $f(-x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{-2x\cos t}dt=\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2x\cos(\pi-t)}dt$, puis on effectue le changement $u=\pi-t$, pour avoir $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{2x\cos(\pi-t)}dt=\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2x\cos u}du$. D'où $f(-x)=f(x)$, f est alors paire.

1.3. Pour $x\geq 0$ et $t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, On a $2x\cos t\leq 0$, donc $e^{2x\cos t}\leq 1$ et par suite $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi/2}^\pi e^{2x\cos t}dt\leq\dfrac{1}{2}$. Ainsi $x\longmapsto\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi/2}^\pi e^{2x\cos t}dt$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1.4.

1.4.1. On peut étudier la fonction, ou mieux utiliser la convexité : on a $\cos''=-\cos\leq 0$ sur $[0,\pi/2]$, donc cos est concave sur cette intervalle, donc cos est au dessus de sa corde joignant les points $(0,1)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$. D'où $\cos(t)\geq\left(1-\dfrac{2}{\pi}t\right)$, pour $t\in[0,\pi/2]$.

1.4.2. D'après la question ci-dessus, pour $t\in[0,\pi/2]$, et $x>0$, $e^{2x\cos t}\geq e^{2x-4tx/\pi}$, en intégrant cette inégalité, on obtient : $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}e^{2x\cos t}dt\geq\dfrac{e^{2x}}{\pi}\int_0^{\pi/2}e^{-4xt/\pi}dt$. Or $\dfrac{e^{2x}}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}e^{-4xt/\pi}dt=\dfrac{e^{2x}}{\pi}\dfrac{-\pi}{4x}\left[e^{-4xt/\pi}\right]_0^{\pi/2}=\dfrac{e^{2x}}{4x}\left(1-e^{-2x}\right)$. D'où le résultat cherchée.

1.4.3. Pour $x>0$, $f(x)\geq\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}e^{2x\cos t}dt\geq\dfrac{e^{2x}}{4x}\left(1-e^{-2x}\right)$, de plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{4x}\left(1-e^{-2x}\right)=+\infty$ puisque les exponentielles l'emportent sur les puissances. D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On a aussi pour les mêmes raisons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, donc la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction (oy).

1.5. On a $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{2x\cos t}dt=\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi h(x,t)\,dt$, avec $h(x,t)=e^{2x\cos(t)}$.

- On a h est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=2\cos(t)\,e^{2x\cos t}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.

  On conclut alors que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi 2\cos(t)\,e^{2x\cos t}dt$. (Pas besoin de domination puisque l'on intégre sur un segment).

1.6. Avec les mêmes notations du **1.5.**, on a déjà vu que f était de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a de plus : $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=4\cos^2(t)\,e^{2x\cos t}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.

- On conclut alors que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi 4\cos^2(t)\,e^{2x\cos t}dt$. (Encore Pas besoin de domination puisque l'on intégre sur un segment).

1.7. On a $f'(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos(t)\,e^{2x\cos t}dt$, on intégre par partie avec $u'(t)=2\cos t$ et $v(t)=e^{2x\cos t}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\pi}\left[2\sin(t)\,e^{2x\cos t}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x\sin^2(t)\,e^{2x\cos t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x\sin^2(t)\,e^{2x\cos t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x\left(1-\cos^2(t)\right)e^{2x\cos t}dt=4xf(x)-xf''(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différenntielle (1) $xy''+y'-4xy=0$, qui vérifie clairement $f(0)=1$.

PARTIE II

2.1.

2.1.1. Sachant que la somme d'une série entière est de classe C^{∞} et se dérive terme à terme sur $]-R,R[$, h est alors solution de (1) sur $]-R,R[$, si et seulement si

$$\forall\ x\in\,]-R,R[\,,\ x\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\,a_kx^{k-2}+\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kx^{k-1}-4x\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k=0$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall\ x\in\,]-R,R[\,,\ \sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\,a_kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kx^{k-1}-4\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{k+1}=0$$

Ce qui est encore équivalent, en faisant les changements d'indice $k-1\leftarrow k$ et $k+1\leftarrow k$:

$$\begin{aligned} \forall\ x &\in\ ]-R,R[\,,\ \sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)\,a_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,a_{k+1}x^k-4\sum_{k=1}^{+\infty}a_{k-1}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[(k+1)^2a_{k+1}-4a_{k-1}\right]x^k+a_1x^0=0 \end{aligned}$$

Par unicité d'un développement en série entière, ceci est équivalent à :

$$a_1=0 \text{ et } \forall\ k\geq 1,\ a_{k+1}=\frac{4}{(k+1)^2}a_{k-1}$$

En faisant le changement $k\leftarrow k+1$, on conclut alors que :

$$a_1=0 \text{ et } \forall\ k\geq 0,\ a_{k+2}=\frac{4}{(k+2)^2}a_k$$

2.1.2. Montrons le résultat par récurrence sur k

- Pour $k=0$, on a $a_{\ 2k+1}=a_1=0$ et $a_{2k}=a_0=\dfrac{1}{(k!)^2}a_0$, c'est vérifié.
- Soit $k\geq 0$, supposons le résultat vrai pour k, alors en utilisant la relation récurrence et l'hypothèse de récurrence, on aura : $a_{\ 2k+3}=a_{\ 2k+1+2}=\dfrac{4}{(2k+3)^2}a_{2k+1}=0$ et $a_{2k+2}=\dfrac{4}{(2k+2)^2}a_{2k}=\dfrac{1}{(k+1)^2}\dfrac{1}{(k!)^2}a_0=\dfrac{1}{((k+1)!)^2}a_0$. D'où le résultat.

2.2. Si $h(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ est une solution développable en série entière de (1), alors selon le **2.1.2**, on a $a_{2k+1}=0$ et $a_{2k}=\dfrac{1}{(k!)^2}a_0$. De plus $h(0)=a_0=1$, donc les a_k sont déterminés de manière unique. Ainsi (1) admet (au plus) une solution DSE prenant la valeur 1 en $x=0$.

2.3.

2.3.1. Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{\left|\dfrac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2!}\right|}{\left|\dfrac{x^{2N}}{(n)^2!}\right|} = \dfrac{x^2}{(n+1)^2} \longrightarrow l = 0 < 1$ losrque $n \to +\infty$; donc la série $\sum \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ selon le crtère de D'Alembert pour les séries numériques. On conclut que $R = +\infty$.

2.3.2. On note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2}$, g étant la somme d'une série entière de rayon infini, donc g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et se dérive terme à terme, donc

$$xg''(x) + g'(x) - 4xg(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(n!)^2} x^{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(n!)^2} x^{2n+1}$$

On effectue le changement $n \leftarrow n+1$, dans les 2 premières sommes, pour avoir :

$$\begin{aligned} xg''(x) + g'(x) - 4xg(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{((n+1)!)^2} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)}{((n+1)!)^2} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(n!)^2} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{4(n+1)^2}{((n+1)!)^2} - \frac{4}{(n!)^2} \right] x^{2n+1} = 0 \end{aligned}$$

Donc g est solution de (1) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g(0) = 1$.

2.3.3.

- On a $g(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-x)^{2n}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} = g(x)$, g est alors paire.
- Pour $x > 0$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n}{(n!)^2} x^{2n-1} > 0$, et $g'(0) = 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Par croissance de g, pour $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 1$.

2.4. D'après la question **2.1**, toute solution h DSE de (1) est de la forme

$$h(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \lambda g(x), \text{ où } \lambda = a_0$$

PARTIE III

3.1. On a y et g sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (1), donc sont deux fois dérivable; de plus g est paire avec $g(x) = g(-x) \geq 1$, pour $x \geq 0$; donc g ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (on le voir directement sur l'xpression de g). On conclut que le quotient $\phi = \dfrac{y}{g}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On a $\phi' = \dfrac{y'g - yg'}{g^2}$ et $\phi'' = \dfrac{y''g - yg''}{g^2} - 2\dfrac{g'}{g}\left(\dfrac{y'g - yg'}{g^2}\right)$ (Après simplification)
- Or g et y sont solution de (1), donc $\begin{cases} xg'' + g' - 4xg = 0 \\ xy'' + y' - 4xy = 0 \end{cases}$, donc $x(y''g - yg'') = (yg' - gy')$
- On obtient alors : $x\phi'' = -\phi' - 2x\dfrac{g'}{g}\phi' = 0$, ainsi ϕ est solution sur $\mathbb{R}$ de (2) : $xz' = -\left(1 + 2x\dfrac{g'}{g}\right)z$.

3.2. On a : $\left((xg^2(x)\phi'(x))\right)' = g^2(x)\phi'(x) + 2xg'(x)g(x)\phi'(x) + xg^2(x)\phi''(x)$, en remplaçant $x\phi''(x) = -\left(1 + 2x\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right)\phi'(x)$, on obtient que cette dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$.

3.3. On a $x \mapsto xg^2(x)\phi'(x)$ étant de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc elle est constante et vaut sa valeur en $x = 0$ qui vaut 0. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xg^2(x)\phi'(x) = 0$, or g ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc pour tout

$x \neq 0$, $\phi'(x) = 0$, par continuité en 0, on obtient $\phi' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et par suite ϕ est constante et vaut $a \in \mathbb{R}$, ainsi $y = ag$.

3.4. D'après l'étude précédente, $\sum = vect\,(g)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

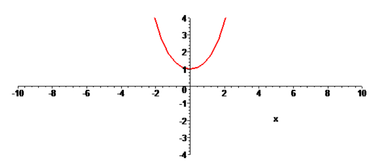
3.5.

3.5.1. Selon la question **1.7.**, f est solution de (1) sur prenant la valeur 1 en 0, donc $f = ag$, avec $a = f(0) = 1$. Ainsi $f = g$.

3.5.2.

- On a $f = g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, selon **2.3.3.**
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ selon **1.3.4.**
- On a f est paire, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3.5.3. On a $f'(0) = 0$, la tangente en ce point est alors horizontale.
l'allure de Γ_f ressemble à ceci :



PARTIE IV

4.1. On a (1) est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2 sans second membre, dont les coefficients sont continues sur $]0, +\infty[$ et avec le coefficient de y'' ne s'annule jamais sur $]0, +\infty[$; donc selon le théorème de Cauchy-Lipschitz (*cas linéaire*) , $\sum_+$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

4.2.

- On a d'abord $t \longmapsto \dfrac{1}{t\,(g_1(t))^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$
- Pour $x > 0$, on a vu à la question **3.5.1.,** que $g_1(x) = g(x) = f(x)$.
- De plus on a aussi selon **1.4.2.**,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2x\cos t}dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{2x\cos t}dt \geq \frac{e^{2x}}{4x}\left(1 - e^{-2x}\right) > 0$$

donc $\left|\dfrac{1}{g_1(t)}\right| \leq \dfrac{4t}{e^{2t}(1 - e^{-2t})}$, et par suite $\left|\dfrac{1}{t\,(g_1(t))^2}\right| \leq \dfrac{16t}{e^{4t}(1 - e^{-2t})^2} =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, avec $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

- On conclut alors que $t \longmapsto \dfrac{1}{t\,(g_1(t))^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$

4.3.

4.3.1. Puisque g_1 est solution de (1) sur $]0, +\infty[$, alors les mêmes calculs de la question **3.2.**, fournissent que $x \longmapsto x g_1^2(x)\,\psi'(x)$ est constante sur $]0, +\infty[$.

4.3.2. Selon la question ci-dessus, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t > 0,\ t g_1^2(t)\,\psi'(t) = -\beta,\ \text{càd}\ \psi'(t) = \frac{-\beta}{t g_1^2(t)}$$

Donc $t \longmapsto \psi'(t)$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ selon **4.2.,** donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_x^X \psi'(t)\,dt = \lim\limits_{X\to+\infty}\psi(X)-\psi(x)$ existe. On note alors $\lim\limits_{X\to+\infty}\psi(X)=\alpha\in\mathbb{R}$.

On intégre le relation $\psi'(t)=\dfrac{-\beta}{tg_1^2(t)}$ sur $[x,+\infty[$, on obtient :

$$\int_x^{+\infty}\psi'(t)\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{-\beta}{tg_1^2(t)}dt,\ \text{donc}\ \alpha-\psi(x)=\int_x^{+\infty}\frac{-\beta}{tg_1^2(t)}dt$$

Enfin, $y(x)=g_1(x)\psi(x)=\alpha g_1(x)+\beta g_1(x)\int_x^{+\infty}\dfrac{1}{tg_1^2(t)}dt.$

4.4.

4.4.1. Pour éviter le cas où $\beta=0$, on va procéder directement :

- On a $t\longmapsto\dfrac{1}{t(g_1(t))^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc $x\longmapsto\int_x^{+\infty}\dfrac{1}{tg_1^2(t)}dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, par suite g_2 est dérivable sur $]0,+\infty[$.
- $g_2'(x)=g_1'(x)\int_x^{+\infty}\dfrac{1}{tg_1^2(t)}dt-\dfrac{1}{xg_1(x)}$
- g_2' est encore dérivable et $g_2''(x)=g_1''(x)\int_x^{+\infty}\dfrac{1}{tg_1^2(t)}dt-\dfrac{g_1'(x)}{xg_1(x)}-\dfrac{g_1(x)-xg_1'(x)}{x^2g_1^2(x)}$
- On obtient :

$$\begin{aligned} xg_2''(x)+g_2'(x)-4xg_2(x) &= \left[\underbrace{xg_1''(x)+g_1'(x)-4xg_1(x)}_{=0}\right]\int_x^{+\infty}\frac{1}{tg_1^2(t)}dt- \\ \left[\underbrace{\frac{g_1'(x)}{g_1(x)}+\frac{g_1(x)-xg_1'(x)}{xg_1^2(x)}+\frac{1}{xg_1(x)}}_{=0}\right] &= 0\end{aligned}$$

- On conclut que g_2 est une solution de (1) sur $\mathbb{R}^{*+}$.

4.4.2. On a $\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}=\int_x^{+\infty}\dfrac{1}{tg_1^2(t)}dt\longmapsto 0$ quand $x\to+\infty$, comme reste d'une intéegrale convergente en $+\infty$. Donc $g_2(x)=o(g_1(x))$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

4.4.3. Puisque $g_2(x)=o(g_1(x))$ au $\mathcal{V}(+\infty)$, g_1 et g_2 ne peuvent pas-être colinéaire, donc (g_1,g_2) est famille libre de $\sum_+$, qui est de dimension 2, c'est donc une base de cet espace.

On conclut que $\sum_+=\left\{\alpha g_1+\beta g_2\ /\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}.$