ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Définitions et notations

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y'' + y = f, \qquad (\mathcal{E}_f)$$

et on définit une fonction, notée φ_f, par $\quad \varphi_f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$

On rappelle que si ψ est une fonction réelle 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de ψ sont définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n(\psi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(\psi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\sin(nt)\,dt.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première partie

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\quad \varphi_1(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\cos t\,dt \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\,dt.$

1. Montrer que l'ensemble S_0 des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

2. (a) Montrer que φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, $\quad \varphi_f(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_f(0)$?
   (c) En déduire que φ_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi_f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\varphi_f'(0)$?
   (d) Montrer que φ_f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.
   (e) Justifier que φ_f est l'unique solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en 0.

3. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont toutes de la forme
   $x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad$ où α et β sont des réels.

4. **Application :** Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h'' + h \geqslant 0$.
   (a) Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h'' + h$.
   (b) En déduire une expression de h puis montrer que, pour tout réel x, $\quad h(x+\pi) + h(x) \geqslant 0$.

5. **Cas où f est 2π-périodique**

   On revient au cas général et on suppose que f est en plus 2π-périodique.

   (a) Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

      i. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de g'' en fonction de ceux de g et en déduire des relations entre les coefficients de Fourier trigonométriques de g et ceux de f.

      ii. Montrer alors que $a_1(f) = b_1(f) = 0$.

   (b) Si $a_1(f) = b_1(f) = 0$; montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire, d'abord que φ_f est 2π-périodique, puis que toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ le sont aussi.

   (c) Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et possédant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel $x \geqslant A$, $\quad |f(x)| \leqslant 1 + |\ell|$.

   (b) Montrer alors que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que la fonction f' est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, puis préciser la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$.

   (b) En déduire que les fonctions $t \longmapsto f'(t)\cos t$ et $t \longmapsto f'(t)\sin t$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

3. (a) Montrer que, pour tout réel x,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,dt.$$

   (b) En déduire que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont toutes de la forme

$$y_{\alpha,\beta} :\ x \longmapsto f(x) + \Big(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t\,dt\Big)\cos x + \Big(\beta - \int_0^x f'(t)\sin t\,dt\Big)\sin x,$$

   où α et β sont des réels.

   (c) Montrer alors que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

4. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; on suppose que la solution $y_{\alpha,\beta}$ de $(\mathcal{E}_f)$ admet une limite finie en $+\infty$.

   (a) En étudiant la suite $\big(y_{\alpha,\beta}(n\pi)\big)_{n\geqslant 0}$, montrer que $\alpha = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$.

   (b) Montrer de même que $\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\sin t\,dt$.

5. Montrer alors que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution, notée Y_f, ayant une limite finie en $+\infty$ à préciser, et que Y_f est définie par

$$Y_f(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Troisième partie

Dans cette partie, $(b_k)_{k\geqslant 1}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle ; pour tout entier $n \geqslant 1$, on note v_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad v_n(x) = b_n \sin(nx).$$

Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$; on rappelle que

$$S_n(x) = \frac{\sin(n\frac{x}{2})\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{si} \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

1. Soit x un réel.
   - (a) Montrer que, pour tout réel x, la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
   - (b) Montrer, pour tout entier $n > 1$, la relation
   $$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) = b_n S_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k(x).$$
   - (c) Montrer alors que la série numérique $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}(b_p - b_{p+1})S_p(x)$ est absolument convergente.
   - (d) Déduire de ce qui précède que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et vérifier que sa somme, notée f, est une fonction impaire et 2π-périodique.
2. Soit x un réel et (n,q) un couple d'entiers vérifiant $q \geqslant n+1 \geqslant 1$.
   - (a) Montrer la relation $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{q} b_k \sin(kx) = b_q S_q(x) + \sum_{k=n+1}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) S_k(x) - b_{n+1} S_n(x).$
   - (b) En déduire, pour $x \in]0,\pi]$, l'inégalité $\displaystyle\left| \sum_{k=n+1}^{q} b_k \sin(kx) \right| \leqslant 2 \frac{b_{n+1}}{\sin(\frac{x}{2})}.$
3. On admet que $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$ si $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.
   - (a) En utilisant ce qui précède montrer que, pour tout $p > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$,
   $$\sup_{x\in[0,\pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx)\sin(px) \right| \leqslant 2p\pi b_{n+1}.$$
   - (b) Soit $p > 0$; on pose $w_n(x) = v_n(x)\sin(px)$, $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \longmapsto f(x)\sin(px)$.
   - (c) En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto f(x)\sin(px)$ est continue et que $b_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(pt)\,dt$.

On suppose désormais que la fonction f définie à la question 1.(d) précédente est continue.

4. On considère la fonction $\quad F : \theta \longmapsto \displaystyle\int_0^\theta f(t)\,dt.$

   (a) Montrer que F est paire et 2π-périodique.

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer le coefficient $a_n(F)$ en fonction de b_n. Que vaut $b_n(F)$?

   (c) Que peut-on dire de mieux concernant le mode de convergence de la série de Fourier de la fonction F ? Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n}$ est convergente de somme $\frac{a_0(F)}{2}$.

5. (a) Montrer que la fonction φ_f est impaire.

   (b) Montrer que la fonction φ_f est 2π-périodique si et seulement si $b_1 = 0$.

6. On suppose que $b_1 = 0$ et on cherche à calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction φ_f.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut le coefficient $a_n(\varphi_f)$?

   (b) Calculer le coefficient $b_n(\varphi_f)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

   (c) Montrer que, pour tout réel x, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{b_n}{1-n^2}\sin(nx)$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide de $\varphi_f(x)$.

   (d) En utilisant le théorème de dérivation terme à terme, montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{1-n^2}\sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

   $$\varphi_f'(x) = b_1(\varphi_f)\cos x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{1-n^2}\cos(nx).$$

   (e) En déduire l'expression de $b_1(\varphi_f)$.

Remarque : *On peut montrer, mais ce n'est pas demandé dans cette épreuve, que la fonction f est continue si et seulement si la suite $(nb_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 .*

FIN DE L'ÉPREUVE