Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

I.ETUDE D'UN PREMIER EXEMPLE

1) On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{e^{-t}}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi .

2) a) On a : $\frac{e^{-t}}{t} > 0 \quad \forall t \in [x, +\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt > 0$, d'autre part :

$\frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x} \quad \forall t \in]x, +\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt < \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{e^{-t}}{x}$, donc on a montré que , pour tout réel strictement positif x on a : $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable comme différence d'une constante, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ et d'une primitive $\displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ de $\frac{e^{-x}}{x}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

3) a) Montrons d'abord que φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, en effet d'aprés ce qui précède on peut affirmer que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$, de plus $\dfrac{e^{-t}}{t} \sim \dfrac{1}{t}$ au voisinage de 0 et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, donc $\displaystyle\int_x^{1} \frac{e^{-t}}{t}dt \sim \int_x^{1} \frac{1}{t}dt = \ln x$ au voisinage de 0, or $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{1} \frac{e^{-t}}{t}dt + K$ où $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$, donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et pa
$\psi : x \mapsto \varphi(|x|)$ est intégrable sur les deux intervalles $] - \infty$
$]0, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ixt}\psi| \leq |\varphi(t)|$ et $t \mapsto |\psi|$ int
sur les deux intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc $t \mapsto$ e
l'est aussi donc les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}\psi dt$ et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{ixt}\psi(t)dt$ ont un sens et donc $\widehat{\psi}(x) = I_1 + I_2$ a u
D'autre part : $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi($
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(-t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-ixu}\varphi(u$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-ixt}\varphi(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)d$

c) Pour tout réel non nul x, on a à l'aide d'une intégration par
$\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = \left[\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}\right]_{t\to}^{t\to}$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin xt}{x}dt =$
$\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$, car d'aprés 2.a $|\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}| \leq \frac{e^{-t}}{x} \to 0,$
$t \to +\infty$ pour x fixé, et d'aprés ce qui précède $\varphi(t) \sim \ln t$ -
voisinage de 0, donc

$\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} \sim (\ln t + K)\dfrac{\sin xt}{x}$ quand $t \to 0$ pour x fixé, comme $\dfrac{\sin xt}{x} \sim t$ quand $t \to 0$ pour x fixé, alors $\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} \sim (\ln t + K)t$ quand $t \to 0$ pour x fixé et donc $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} = 0$, pour x fixé.

Ainsi $\widehat{\psi}(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, avec $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \rho(x,t)dt$ telle que $\Phi(0) = 0$ et
$\rho(x,t) = \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$, donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0)$ à condition qu'on peut dériver sous signe intégral, ce qui n'est pas difficile à justifier puisque $\dfrac{\partial\rho}{\partial x} : t \mapsto e^{-t}\cos xt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque majorée par e^{-t}, intégrable sur $[0,+\infty[$, pour x fixé.

Donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}(0,t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$

4) a) Dans la question précédente on a déjà montré que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$, pour tout $x > 0$, puis on a : $\Phi'(x) = \Re e\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt} = \Re e\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} = \Re e\left[\dfrac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} = -\Re e\left(\dfrac{1}{ix-1}\right) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Notez bien que : $|e^{(ix-1)t}| = e^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

b) D'aprés la question précédente, on a : $\widehat{\psi}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ pour tout réel non nul x, et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan x + \lambda$ $\forall x > 0$, de même $\Phi(x) = \arctan x + \mu$ $\forall x < 0$, donc

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x + \lambda}{x} & \forall x > 0 \\ \frac{\arctan x + \mu}{x} & \forall x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

comme $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\lambda = \mu = 0$ d'où le résultat.

II.UN AUTRE EXEMPLE

1) a) $\displaystyle\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt = \dfrac{e^{(\alpha+i\beta)A}}{\alpha+i\beta}$.

b) $\displaystyle\int_0^A e^{\alpha t}\cos(\beta t)dt = \Re e\left(\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt\right) = \Re e\left(\dfrac{e^{(\alpha+i\beta)A}}{\alpha+i\beta}\right) =$ $e^{\alpha A}\Re e\left(\dfrac{(\cos(\beta A)+i\sin(\beta A))(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2}\right) = e^{\alpha A}\dfrac{\alpha\cos(\beta A)+\ldots}{\alpha^2+\ldots}$

De même : $\displaystyle\int_0^A e^{\alpha t}\sin(\beta t)dt = \Im m\left(\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt\ldots\right.$ $e^{\alpha A}\dfrac{\alpha\sin(\beta A)-\beta\cos(\beta A)}{\alpha^2+\beta^2}$.

c) Pour p réel strictement positif, la fonction $t \mapsto e^{-p\ldots}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par la fonction e^{-pt} qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(\beta\ldots$ $\lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}\displaystyle\int_0^A e^{-pt}\cos(\beta t)dt = \lim\limits_{A\longrightarrow+\infty} e^{-pA}\dfrac{-p\cos(\beta A)+\beta\sin(\ldots}{p^2+\beta^2}$ 0, les exponentielles l'emportent sur les puissances.

2) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}t}$ est paire, pour montrer qu'elle est intégra... $\mathbb{R}$, il suffit de le montrer au voisinage de ∞, en effet $\dfrac{1}{\text{ch}t} = \dfrac{2}{e^t+e^{-\ldots}}$ $2e^{-t}$, qui est intégrable en $+\infty$, donc h aussi.

3) a) $\widehat{h}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{ixt}h(t)dt + \int_{-\infty}^0\dfrac{1}{2}e^{ixt}h(-\ldots$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{-ixu}h(u)du = \int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{ixt}h(\ldots$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{-ixt}h(t)dt = 2\int_0^{+\infty}h(t)\cos(xt)dt.$

b) Pour tout réel u différent de 1 et tout entier naurel $n \geq \ldots$ a : $(1-u)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u^k = 1-u^{n+1}$, donc $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}u^k + \dfrac{u^{n\ldots}}{1-\ldots}$ particulier pour tout $t \geq 0$, on a $h(t) = \dfrac{1}{\text{ch }t} = 2\dfrac{e^{-\ldots}}{1+\ldots}$

$2e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt}+(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}\right) = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t} + (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1-e^{-2t}}$ et donc pour tout réel x, on a : $\widehat{h}(x) = 2\int_0^{+\infty} h(t)\cos(xt)dt = 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)dt + 4(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt.$

c) Pour tout réel x et tout entier naurel $n \geq 1$, on a :
$\left|\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)\right|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}dt = \dfrac{1}{2n+3}$
D'autre part : $\left|\widehat{h}(x) - 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)dt\right| = 4\left|\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt\right| \leq \dfrac{4}{2n+3} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$,
d'où : $\widehat{h}(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\cos(xt)dt.$

d) D'aprés la question II.1.c on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h}(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$

4) a) Calcul des coefficients de Fourrier :
$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(nt)dt = 0$ car $t \mapsto u(t)\cos(nt)$ impaire sur $[-\pi,\pi]$, de même
$t \mapsto u(t)\sin(nt)$ paire sur $[-\pi,\pi]$, alors
$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(nt)dt = 2\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch}(xt)\sin(nt)dt$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{xt}\sin(nt)dt + \int_0^{\pi} e^{-xt}\sin(nt)dt\right)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(e^{x\pi}\dfrac{x\sin(n\pi)-n\cos(n\pi)}{x^2+n^2} + e^{-x\pi}\dfrac{-x\sin(n\pi)-n\cos(n\right.$ ...
$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{(-1)^n n}{x^2+n^2}\mathrm{ch}(x\pi).$

b) **<u>Théorème</u>** : Si f est une fonction 2π-périodique, de classe ... morceaux, alors sa série de Fourrier converge simplement, et ... point de continuité x de f, sa somme est égale à $f(x)$ et ... point de discontinuité x de f, sa somme est égale à la demi- ... $\dfrac{f_d(x)+f_g(x)}{2}$.
La fonction u vérifie bien les hypotèses du théorème et conti... $]0,\pi[$, avec :
$\dfrac{f_d(x)+f_g(x)}{2} = 0$ pour $x=0$ ou $x=\pi$, la série de Fourri... fonction u étant $\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt$, d'où $\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt = \mathrm{ch}(xt)$ $\forall t$ ...
et $\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt = 0$ pour $t=0$ ou $t=\pi$.

c) Pour $t = \frac{\pi}{2}$ ce développement devient : $\sum_{n\geq 0} b_{2n+1}\sin$ ... $1)\dfrac{\pi}{2} = \mathrm{ch}(\dfrac{x\pi}{2})$ car $\sin 2n\frac{\pi}{2} = 0$, donc . $\mathrm{ch}(\frac{x}{2}$ ... $\dfrac{\mathrm{ch}(x\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$

5) D'aprés les questions II.3.d et II.4.c et la formule $\mathrm{ch}\gamma = \mathrm{ch}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right.$ ... $\gamma \in \mathbb{R}$)

III.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOU... D'UNE FONCTION

1) Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

a) Pour x fixé, on a : $|e^{-ixt}f(t)| \leq |f(t)|$ $\forall t \in \mathbb{R}$, or f une f... continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; donc $t \mapsto e^{-ixt}f($ ...

aussi d'où pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$ est bien définie, en plus $|\widehat{f}(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = M$, constante qui ne dépond pas de x et donc la fonction $\widehat{f}$ est bornée .

b) Si de plus f est continue, alors $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-ixt} f(t)$ continue sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f}$ est aussi continue .

2) Transformations

a) f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel a, les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_af(t) = f(at)$ sont aussi des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ et par suite possédent des transformés de Fourier, avec que pour tout réel x, $\widehat{f_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t-a)dt = e^{-iax} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} f(u)du = e^{-iax}\widehat{f}(x)$, en utilisant le changement de variable $u = t - a$ et de même avec le changement de variable $v = at$ on obtient $\widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$, faites attention ici aux bornes si $a < 0$ alors $-\infty$ devient $+\infty$ et inversement ce qui justifie le $|a|$.

b) La transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ au point x est :
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t} f(t)dt = \widehat{f}(x-a)$.

c) Si f est paire alors $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{-ixt} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu} f(-u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu} f(u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixt} f(t)du = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(xt) f(t)dt$, on a utilisé le changement de variable $u = -t$ puis on a remplacé u par t puisque sont deux variables muettes.
Si f est impaire on obtient $\widehat{f}(x) = 2i\int_{0}^{+\infty} \sin(xt) f(t)dt$.

d) La transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réel
que celle d'une fonction réelle impaire est imaginaire.

3) Dérivation

a) f' étant intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(0)$ adm
limite finie quad $x \longrightarrow +\infty$, et donc $\lim\limits_{+\infty} f$ est finie, soit
limite, si $L \neq 0$ alors $|f(x)| \longrightarrow |L| > \frac{|L|}{2}$, quand $x \longrightarrow +\infty$
est continue, donc un intervalle $[A, +\infty[$ sur lequel $|f| > \frac{|L|}{2}$,
intégrable sur $[A, +\infty[$, donc le fonction constante $\frac{|L|}{2}$ le sera
ce qui n'est pas le cas, donc $L = \lim\limits_{+\infty} f = 0$, et de même on
que $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

b) f' étant une fonction continue par morceaux et intégral
$\mathbb{R}$, donc admet une transformée de Fourrier, définie par l
tion : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f'(t)dt = \left[e^{-ixt} f(t)\right]$
$ix\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt = ix\widehat{f}(x)$, donc $\widehat{f}(x) = \frac{\widehat{f'}(x)}{x}$ tend ver
$\pm\infty$, car $\widehat{f'}$ est bornée en utilisant la question II.1.a pour l
tion f'.

c) Le fait que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur
permet d'affirmer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dériver
signe intégral ; avec :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} t f(t)dt = -i\widehat{g}(x)$.

$\boxed{\text{Fin.}}$