Corrigé du Concours National Commun
Session 2009
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II
Filière PSI

Par K. Chaira

$1^{\text{ère}}$ partie : Étude de l'application f_m

1. R est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et admet $n+1$ racines $x_o, x_1, \cdots, x_n$ distinctes deux à deux, donc R est le polynôme nul.

2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_m^2$.

$$f_m(\lambda.P+Q) = ((\lambda.P+Q)(x_o), \cdots, (\lambda.P+Q)(x_n)) = ((\lambda.P(x_o)+Q(x_o), \cdots, (\lambda.P(x_n)+Q(x_n))$$
$$= \lambda.f_m(P) + f_m(Q).$$

3. (a) $P \in Kerf_m$ équivaut à $P(x_i) = 0$, pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, donc le polynôme $\pi = (X - x_o)(X - x_1)\cdots(X - x_n)$ divise P; et, comme $deg(P) \leq m$ et $deg(\pi) = n+1$, donc il existe $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$ tel que $P = Q\ \pi$. D'où, $Kerf_m \subseteq \{Q\ \pi\ ;\ Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$. Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que le polynôme π admet $x_o, x_1, \cdots, x_n$ comme racines.

(b) D'abord $Kerf_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{P}_m$, puisque $n+1 \leq m$.

$*$ Si $P \in Kerf_m \cap \mathcal{P}_m$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $P(x_i) = 0$, et $deg(P) \leq n$; et, d'après la question 1), le polynôme P est nul. D'où, Ker $f_m \cap \mathcal{P}_m = \{0\}$.

$*$ Soit $H \in \mathcal{P}_m$. On effectue la division euclidienne de H par π, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $H = Q\ \pi + R$ et $deg(R) < deg(\pi) = n+1$; donc $H \in Kerf_m + \mathcal{P}_n$. D'où, $\mathcal{P}_m = Kerf_m + \mathcal{P}_n$.
Ainsi, $\mathcal{P}_m = Kerf_m \bigoplus \mathcal{P}_n$.

(c) $dim(Kerf_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(\mathcal{P}_n) = (m+1) - (n+1) = m - n$.

$(X^i\ \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une famille de polynômes échelonnées de $Kerf_m$, donc elle est libre; et, comme son cardinal est égal à la dimension de $Kerf_m$, donc $(X^i\ \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une base de $Kerf_m$.

(d) $*$ $rg(f_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(Kerf_m) = (m+1) - (m-n) = n+1$.

$*$ Comme $Im(f_m) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ et $rg(f_m) = n+1 = dim(\mathbb{R}^{n+1})$, donc $Im(f_m) = \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi, l'application f_m est surjective.

4. Dans cette question, $m \leq n$.

(a) Si $P \in Kerf_m$, alors les $n+1$ réels $x_o, x_1, \cdots, x_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes et $deg(P) \leq m < n+1$, donc P est nul. D'où, f_m est injectif.

(b) f_m étant injective, donc $Kerf_m = \{0\}$; et, par suite

$rg(f_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(Kerf_m) = m+1$.

(c) f_m est surjective si, et seulement si, $rg(f_m) = dim(\mathbb{R}^{n+1})$ si, et seulement si, $m = n$.

5. (a) Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $deg(L_i) = n$.

Soit $(k, i) \in \{0, 1, \cdots, n\}^2$.

Si $k = i$, $L_i(x_i) = \prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \dfrac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = 1$,

si $k \neq i$, $\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j) = 0$; et, par suite $L_i(x_k) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j)}{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)} = 0$.

(b) Soit $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

$f_n(L_i) = (L_i(x_0), L_i(x_1), \cdots, L_i(x_n)) = (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \cdots, \delta_{i,i}, \cdots, \delta_{i,n}) = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots, 0)$, le réel 1 est situé à la $(i+1)^{\text{ème}}$ place.

La famille $(f_n(L_o), f_n(L_1), \cdots, f_n(L_n))$ représente la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Soit $(\alpha_O, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i.L_i = 0$. Donc, pour tout $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on a $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i.L_i(x_j) = 0$ c'est-à-dire $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i.\delta_{i,j} = 0$ ce qui traduit à $\alpha_j = 0$. D'où, $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une famille libre; et, comme le cardinal de cette famille est égal à $dim(\mathcal{P}_n) = n+1$, donc $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

(d) i. D'après la question 4), l'application f_n est bijective de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, pour tout $y = (y_o, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que

$f_n(P_y) = y = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.

ii. D'après la question précédente, $f_n(P_y) = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$. Comme $P_y \in \mathcal{P}_n$ et $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$, donc il existe $(\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P_y = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i.L_i$. Et, par suite

$(y_o, y_1, \cdots, y_n) = f_n(P_y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i.f_n(L_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i.\varepsilon_i = (\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n)$. Ainsi, $P_y = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i L_i$.

$2^{\text{ème}}$ partie : Approximation polynômiale au moindres carrés

A. On suppose $m \geq n+1$.

1. D'après la question d-3) de la première partie, l'application f_m est surjective de $\mathcal{P}_m$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, pour l'élément $(y_o, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe $Q_o \in \mathcal{P}_m$ tel que

$f_m(Q_o) = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.

2. $*$ On rappelle que $f_m(Q_o) = (Q_o(x_o), \cdots, Q_o(x_n))$. Pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - P(x_i))^2$ est positif; et, comme $\Phi_m(Q_o) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - Q_o(x_i))^2 = 0$, donc la valeur minimal λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$ est nulle.

$*$ $(Q \in \mathcal{P}_m,\ \Phi_m(Q) = 0)$ équivaut à $(Q \in \mathcal{P}_m,\ Q(x_i) = y_i = Q_o(x_i),\ \textit{pour tout } i \in \{0, 1, \cdots, n\})$ équivaut à $Q - Q_o \in Ker f_m$.

L'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte est $Q_o + Ker f_m$.

B. On suppose que $m \leq n$.

1. $*$ On pose $M = [m_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ et $N = [n_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$. On a $M + N = [m_{i,j} + n_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$; donc, ${}^t(M+N) = [m_{j,i} + n_{j,i}]_{\substack{1\leq j\leq q\\ 1\leq i\leq p}} = [m_{j,i}]_{\substack{1\leq j\leq q\\ 1\leq i\leq p}} + [n_{j,i}]_{\substack{1\leq j\leq q\\ 1\leq i\leq p}} = {}^tM + {}^tN$.

$*$ On pose $M' = [m'_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ et $N' = [n'_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq r}}$.

$M'N' = [c_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq r}}$, où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} m'_{i,k}n'_{k,j}$ et,

${}^tN'\,{}^tM' = [d_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq p}}$, où $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} n'_{k,i}m'_{j,k} = \sum_{k=1}^{q} m'_{j,k}n'_{k,i} = c_{j,i}$.

Ainsi, ${}^tN'\,{}^tM' = {}^t(M'N')$.

2. (a) $Av = {}^t(P_v(x_o), P_v(x_1), \cdots, P_v(x_n))$.

(b) Si $Av = 0$, où ${}^tv = (v_o, \cdots, v_m)$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $P(x_i) = 0$. Donc, le polynôme P_v s'annulle en $n+1$ points distinctes deux à deux et, comme $deg(P_v) \leq m < n+1$, donc $P = \sum_{k=0}^{m} v_k X^k$ est nul; et, par suite $v = 0$.

3. $*$ ${}^tuu = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$.

$*$ ${}^tuu \geq 0$ car c'est la somme des réels positifs.

${}^tuu = 0$ si, et seulement si, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $u_k^2 = 0$ si, et seulement si, $u = {}^t(u_o, u_1, \cdots, u_n) = 0$.

4. (a) Par hypothèse ${}^tAAv = 0$ et $u = Av$, donc ${}^tuu = {}^tv({}^tAAv) = {}^tv.0 = 0$. D'après la question 3) de la même partie, $u = 0$ c'est-à-dire $Av = 0$. Et, en tenant compte de la question b-2) de cette partie, $v = 0$.

(b) Comme ${}^tAA$ est une matrice carrée réelle d'ordre $m+1$ et vérifie l'implication suivante : pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $({}^tAA)v = 0$ implique $v = 0$, on déduit que $rg({}^tAA) = m+1$ et ${}^tAA$ est inversible.

(c) ${}^tAA = [c_{ij}]_{1\leq i,j\leq m+1}$, où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i-1}x_{k-1}^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i+j-2}$, pour tout $(i,j) \in \{0, \cdots, m+1\}^2$.

5. Puisque $M = {}^tAA$ est inversible, $MZ = c$ est un système de Cramer. Donc, il admet une unique solution $Z = M^{-1}c$.

6. (a) $*$ Soit $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

$g(v) = {}^t(b - Av)(b - Av) = ({}^tb - {}^tv\,{}^tA)(b - Av) = {}^tbb - {}^tbAv - {}^tv\,{}^tAb + {}^tv\,{}^tAAv.$

$*$ On a $Aw = \begin{pmatrix} P_w(x_o) \\ \cdots \\ \cdots \\ P_w(x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_o \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = b$, donc ${}^tAAw = {}^tAb$.

$g(w) = {}^tbb - {}^tbAw - {}^tw\,{}^tAb + {}^tw\,{}^tAAw = {}^tbb - {}^tbAw - {}^tw({}^tAb - {}^tAAw) = {}^tbb - {}^tbAw.$

(b) $$\begin{aligned} {}^t(w - v)\,{}^tAA(w - v) &= ({}^tw\,{}^tA - {}^tv\,{}^tA)\,(Aw - Av) \\ &= {}^tw\,{}^tAAw - {}^tw\,{}^tAAv + {}^tv\,{}^tAAw - {}^tv\,{}^tAAv \\ &= {}^tw({}^tAb) - {}^tbAv + {}^tv\,{}^tAb - {}^tv\,{}^tAAv \\ &= g(v) - g(w). \end{aligned}$$

(c) $*$ D'après les questions b-2) et 3) de cette partie, $g(v) - g(w) = {}^t(Aw - Av)(Aw - Av) \geq 0$; et, $g(v) = g(w)$ si, et seulement si, $A(w - v) = 0$ si, et seulement si, $w = v$.

7. Soit $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} < Av\ ,\ b - Aw > &= {}^t(Av)(b - Aw) = {}^tv\,{}^tA(b - Aw) = {}^tv\,{}^tAb - {}^tv\,{}^tAAw = {}^tv({}^tAb - {}^tAAw) \\ &= {}^tv.0 = 0. \end{aligned}$$

Donc, $b - Aw \in F^{\perp}$. Ce qui justifie que Aw est la projection orthogonale de b sur $F = Im(A)$.

$g(w) = \|b - Aw\|^2 = min(\{\|b - Av\|^2\ ,\ v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}.$

8 - (a) $b - AV_P = {}^t(y_o - P(x_o), y_1 - P(x_1), \cdots, y_n - P(x_n)).$

$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2 = \|b - AV_p\|^2 = g(V_p).$

9. (a) D'après la question c-6) de cette partie, pour tout $P \in \mathcal{P}_m$,

$\Phi_m(P) = g(V_p) \geq g(w) = \Phi_m(P_w).$

Et, $\Phi_m(P) = \Phi_m(P_w)$ si, et seulement si, $g(V_p) = g(w)$ si, et seulement si, $V_p = w$ si, et seulement si, $P = P_w$.

(b) $\lambda_m = \|b - Aw\|^2$.

10. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ et ${}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}$.

(b) $^{t}Ab = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) On pose $Z = {}^{t}(x, y, z, t)$.

Le système $^{t}AAZ = {}^{t}Ab$ èquivaut à $(S)\ \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \ \ (L_1) \\ x + 3y + 4z + 9s = 0 \ \ (L_2) \\ 3x + 4y + 9z + 16s = 1 \ \ (L_3) \\ 4x + 9y + 16z + 33s = 0 \ \ (L_4) \end{cases}$

On effectue les opérations suivantes : $2L_2 - L_1 \to L_2$, $2L_3 - 3L_1 \to L_3$ et $L_4 - 2L_1 \to L_4$, on obtient $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 5y + 9z + 20s = -4 \\ 7y + 10z + 25s = -4 \end{cases}$.

On effectue les opérations suivantes : $L_3 - L_2 \to L_3$ et $5L_4 - 7L_2 \to L_4$, on obtient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 4z + 6s = -2 \\ 15z + 27s = -6 \end{cases}$$

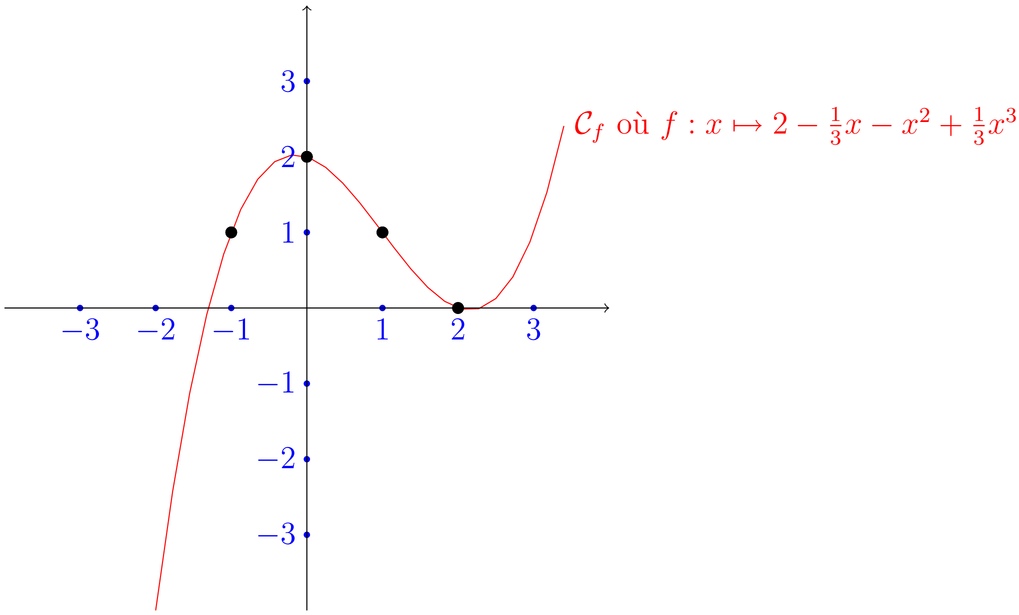
On effectue l'opérations suivante : $4L_4 - 15L_3 \to L_4$, on obtient $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 4z + 6s = -2 \\ 18s = 6 \end{cases}$.

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (2, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3})$.

(d) On a $V_{P_o} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $P_o = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3$ et

$\lambda_3 = (1 - P_o(-1))^2 + (2 - P_o(0))^2 + (1 - P_o(1))^2 + (0 - P_o(2))^2 = 0$.

La représentation graphique de la courbe de la fonction $t \mapsto P_0(t)$ et les points (x_i, y_i) est :



$\mathcal{C}_f$ où $f : x \mapsto 2 - \frac{1}{3}x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$