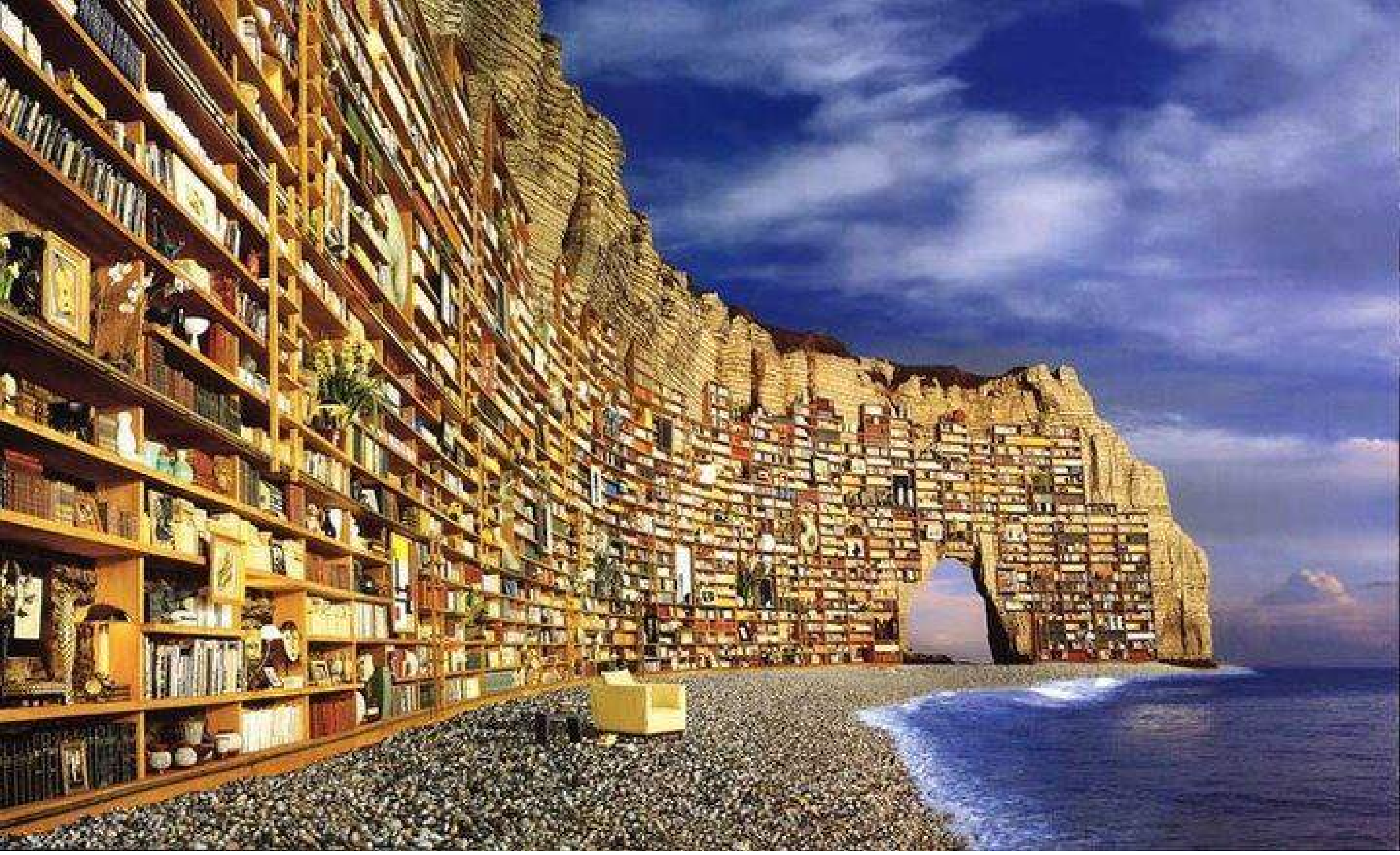
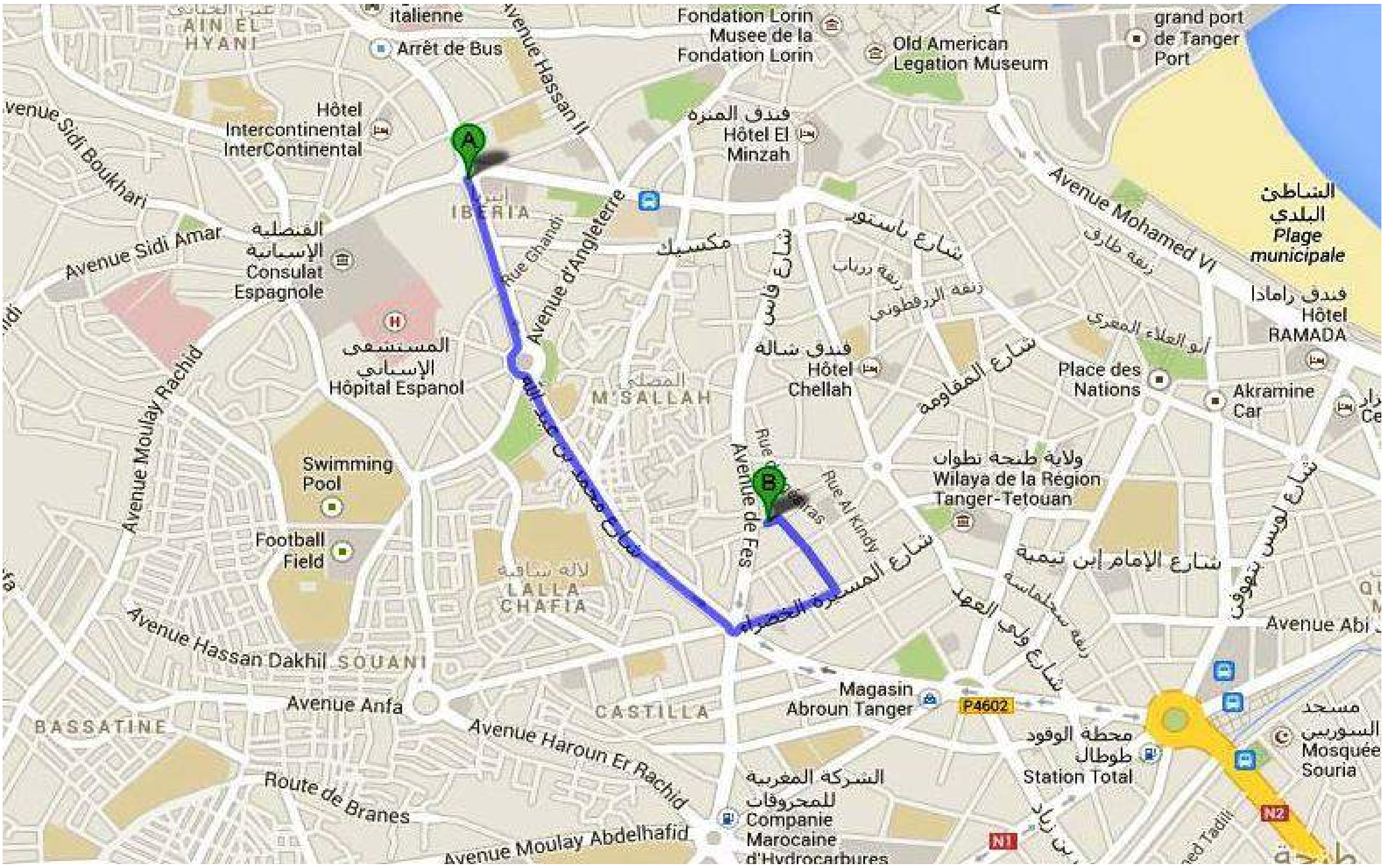


http://al9ahira.com/



Itinéraire d'accès à Al9ahira (point B sur la carte) en partant de la Place Ibéria

Concours commun marocain 2013 *

Filière PSI-math I

Ce corrigé détaillé vise à donner une approche pédagogique qui ne se contente pas seulement de résoudre les questions du sujet, mais essaye de mettre le point sur les parties de cours utilisées et les astuces classiques que le candidat doit retenir en travaillant cette épreuve. Aussi, comme on dit le diable est dans les détailles, les élèves doivent savoir détailler les étapes des problèmes qu'ils entament parce que c'est là la compréhension vraie et correcte des mathématiques.
Pour toute remarque, suggestion ou erreur veuillez me contacter sur mon email. Merci.

Quelques aspects de la transformée de Laplace

Notations et rappels

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, $p \geqslant 1$.
Si $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{K})$, on rappelle que l'integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est dite convergente lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$ possède une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$; on note alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ sa limite.
On rappelle aussi que l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ peut converger sans que la fonction lorsque la fonction φ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Tout fois pour les fonctions positives il y a équivalence entre l'intégralité de la fonction sur un intervalle et la convergence de son intégral sur cet intervalle.
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$, pou tout $z \in C$ tel que l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ converge, on note $L(f)(z)$ la valeur de cette intégrale. La fonction $L(f)$ ainsi définie est appelée la transformée de Laplace de f.
Pour mener à bien cette épreuve, les candidats sont invités à manipuler les inégalités avec la plus grande vigilance surtout quand les objets concernés sont des nombres complexes.

*Auteur du corrigé : Ratbi My Lhassan, CPGE My Youssef Rabat- email : mylhassan@yahoo.fr

Partie 1

Résultats préliminaires

1.1. Soit $z \in \mathbb{C}$; on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire : $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$.

Rappel :
• $\int_I f(t)\,dt$ converge avec par exemple $I = [a,b[\Leftrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et finie
• f intégrable sur $I \Leftrightarrow \int_I |f(t)|\,dt$ converge.
• on a équivalence entre les deux notions ssi $f \geqslant 0$.
Rmq : dans la question 1.1.1 et 1.1.3 on a les deux notions qu'elles ne faut pas confondre : f intégrable sur I et $\int_I f(t)\,dt$ converge.

1.1.1. **Question :** *Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $Re(z) > 0$.*
Réponse :
On a : $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} \left|e^{-zt}\right|\,dt$ converge.
Or $\forall t \in \mathbb{R}^+, \left|e^{-zt}\right| = \left|e^{-(x+iy)t}\right| = \left|e^{-xt}e^{-iyt}\right| = e^{-xt}$.
car $\left|e^{iy}\right| = 1, y \in \mathbb{R}$ et $\left|e^{-xt}\right| = e^{-xt}$ car $e^{-xt} \in \mathbb{R}^+$.
On a les deux cas :
cas 1 : $Re(z) = 0$ donc $\left|e^{-zt}\right| = e^{-Re(z)t} = 1$, et la fonction constante 1 n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$
cas 2 : $Re(z) = x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
& t \mapsto e^{-zt} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+ \\
& \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt \text{ converge} \\
& \Leftrightarrow t \mapsto \int_0^t e^{-xu}\,du \text{ admet un limite finie qd } t \text{ tend vers } +\infty \\
& \Leftrightarrow \left[\frac{-e^{-xu}}{x}\right]_0^t = \frac{1-e^{-xt}}{x} \text{ a une limite finie qd } t \text{ tend vers } +\infty \\
& \Leftrightarrow e^{-xt} \text{ admet un limite finie qd } t \text{ tend vers } +\infty \\
& \Leftrightarrow x > 0.
\end{aligned}
$$

conclusion : $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $x = Re(z) > 0$.
1.1.2. **Question :** *Montrer que si γ est un réel non nul, alors la fonction $t \mapsto \cos(\gamma t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En déduire que la fonction $t \mapsto e^{-iyt}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque t tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $y = 0$.*
Réponse : Supposons $\cos(\gamma t) \underset{t+\infty}{\longrightarrow} l$ alors
d'une part $\cos(2\gamma t) = 2\cos^2(\gamma t) - 1 \underset{t+\infty}{\longrightarrow} 2l^2 - 1$
et d'autre part par composition $\cos(2\gamma t) \underset{t+\infty}{\longrightarrow} l$
l'unicité de la limite donne $2l^2 - 1 = l$
ce qui donne $l = 1$ ou $l = -\dfrac{1}{2}$
et on a $\cos^2(\gamma t) + \sin^2(\gamma t) = 1$ donc $\sin^2(\gamma t)$ tend vers $1 - l^2$
donc

Si $l = 1$ alors $\cos(\gamma t)$ tend vers 1 et $|\sin(\gamma t)|$ tend vers 0.
Or $|\cos(\gamma t)| = \left|\sin(\gamma t - \frac{\pi}{2})\right|$ et quand t tend vers $+\infty$ on aura 1=0 absurde.
Si $l = \frac{-1}{2}$ alors quand t tend vers $+\infty$
la relation $|\cos(\gamma t)| = \left|\sin(\gamma t - \frac{\pi}{2})\right|$ donne $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
On en tire que $t \mapsto \cos(\gamma t)$ admet une limite en $+\infty$ que si $\gamma = 0$ c-à-d $\cos(\gamma t) = 1$
Déduction : Si $y = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}^+, e^{-iyt} = 1$ et alors $e^{-iyt} \underset{t+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Réciproquement si $t \mapsto e^{-iyt}$ possède une limite quand t tend vers $+\infty$ alors sa partie réelle $t \mapsto \cos(yt)$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $y = 0$ (par contraposition).

1.1.3. **Question :** *En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt$ converge si, et seulement si, $Re(z) > 0$.*

Réponse : Si $z = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}^+, e^{-zt} = 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt$ diverge.
Si $z \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow t \mapsto \int_0^t e^{-zu}\,du \text{ admet un limite finie qd } t \text{ tend vers } +\infty$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-e^{-zu}}{z}\right]_0^t = \frac{1 - e^{-zt}}{z} \text{ admet un limite finie qd } t \text{ tend vers } +\infty$$

$$\Leftrightarrow e^{-zt} \text{ admet un limite finie qd } t \text{ tend vers } +\infty$$

On étudie les cas où e^{-zt} a une limite finie qd t tend vers $+\infty$
Deux cas se presente :
cas 1 : $Re(z) = x > 0$ alors $\left|e^{-zt}\right| = e^{-xt} \underset{t+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui est équivalent à $e^{-zt} \underset{t+\infty}{\longrightarrow} 0$.
cas 2 : $x = 0$ alors puisque $z = x + iy \neq 0$ on a $y \neq 0$ alors $e^{-zt} = e^{-iyt}$ n'admet pas de limite quand t tend vers $+\infty$ d'apres .
cas 3 : $Re(z) = x < 0$ on a $\left|e^{-zt}\right| = \left|e^{-xt}e^{-iyt}\right| = e^{-xt} \underset{t+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $t \mapsto \left|e^{-zt}\right|$ n'admet pas de limite finie.
donc : $t \mapsto e^{-tz}$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, $Re(z) > 0$.
on conclut : $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt$ converge si, et seulement si, $Re(z) > 0$.

1.2. **Question :** *Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t)\,dt$ soit convergente, et soit z un complexe tel que $R(z) > Re(z_0)$; on désigne F par la* *fonction définie par*

$$F(x)=\int_0^x e^{-z_0t}f(t)\,dt, x\geqslant 0.$$

La primitive d'une fonction continue est une fonction de $\mathcal{C}^1$. Si une fonction admet une limite finie en un point alors elle est bornée au voisinage de ce point.

1.2.1. **Question :** *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$.*
Réponse : On a F est une primitive de la fonction $t\mapsto e^{-z_0t}f(t)$ qui continue sur $\mathbb{R}^+$ donc F est une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
Et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z_0t}f(t)\,dt$ est convergente on a F admet une limite finie en $+\infty$,
D'après ce qui précède on a alors F est continue sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc F est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Si $|f|\leqslant|g|$ et g est intégrables sur I alors f l'est aussi

1.2.2. **Question :** *Montrer que la fonction $t\mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.*
Réponse : On a $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\left|e^{-(z-z_0)t}F(t)\right|\leqslant M\left|e^{-(z-z_0)t}\right|$ avec $M=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}|F(t)|$,
et comme $R(z-z_0)=Re(z)-Re(z_0)>0$ on a d'après 1.1.3. $t\mapsto e^{-(z-z_0)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc par comparaison $t\mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.3. **Question :** *À l'aide d'une intégration par partie montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)\,dt$ converge et que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)\,dt=(z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)\,dt$$

Intégration par partie des intégrales généralisée :
(i) $\displaystyle\int_I u'v$ converge
(ii) $\displaystyle\int_I uv'$ converge
(iii) uv admet des limites finies aux bornes de I.
Si deux des trois conditions précédentes sont réalisées alors la troisième l'est et on a : $\displaystyle\int_I u'v=[uv]-\int_I uv'$

Réponse : On pose

$$u'=t\mapsto e^{-z_0t}f(t), v=t\mapsto e^{-(z-z_0)}$$

on a alors

$$u=F, v'=t\mapsto-(z-z_0)e^{-(z-z_0)t}$$

et on a
$\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'=-(z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)\,dt$ converge
et $uv=e^{-(z-z_0)t}F(t)\underset{t+\infty}{\longrightarrow}0$
donc d'après le théorème d'intégration par partie des intégrales généralisées
on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v=\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)=[uv]_0^{+\infty}+(z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)$$

1.3. **Question :** *Ici $f_\lambda\in(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ désigne la fonction $t\mapsto e^{\lambda t}, \lambda\in\mathbb{C}$. Précis le domaine de définition de $L(f_\lambda)$ et donner l'expression de $L(f)(z)$ lorsque cette quantité est définie.*

Réponse :
On a $\int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t}\,dt$ converge si, et seulement si, $Re(z-\lambda) > 0$.
donc $L(f_\lambda)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t}\,dt$ est définie ssi, $Re(z) > Re(\lambda)$, et dans ce cas on a $L(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t}\,dt = \dfrac{1}{z-\lambda}$
1.4. Abscisse de convergence

1.4.1. **Question :** *Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, il existe un unique $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. tel que $L(f)(z)$ soit défini si $Re(z) > \sigma$ et ne le soit pas si $Re(z) < \sigma$. Si le domaine de définition de $L(f)$ n'est pas vide, on pourra considérer la borne inférieur dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de $\{Re(z); L(f)(z)$ existe $\}$.*
σ est appelé l'abscisse de convergence de $L(f)$ et est noté $\sigma(f)$.
Réponse :
On note D le domaine de définition de $L(f)$: $D = \{z \in \mathbb{C}, L(f)(z)$ existe$\}$, et on distingue les deux cas :
Cas 1 : D est vide, alors $\sigma = +\infty$ convient car $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > +\infty\}$ est vide aussi donc $D = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > \sigma\}$.
Cas 2 : D est non vide, on considère $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que
$\sigma = \inf \{Re(z), L(f)(z)$ existe$\}$
• si $\sigma = -\infty$ alors $L(f)(z)$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.
• si $\sigma \in \mathbb{R}$, soit $z \in \mathbb{C}$, deux cas se présente alors
- si $Re(z) < \sigma$ alors $z \notin D$.
- si $Re(z) > \sigma$ comme $\sigma = \inf \{Re(z), L(f)(z)$ existe$\}$ alors

Caractérisation de la borne inférieur

$\forall \varepsilon > 0, \exists z_0 \in \{Re(z), L(f)(z)$ existe$\}, Re(z_0) < \sigma + \varepsilon$
On prend $\varepsilon = Re(z) - \sigma > 0$ donc
$\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $L(f)(z_0)$ existe et $Re(z_0) < Re(z)$ c-a-d $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t)$ converge ceci implique $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)$ converge, , d'après la question 1.2,

1.4.2. **Question :** *Préciser l'abscisse de convergence de $L(f_\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$.*
Réponse : On a d'apres la question 1.3. $\forall z \in \mathbb{C}, L(f_\lambda)(z)$ existe si, et seulement si, $Re(z) > Re(\lambda)$, donc $\sigma = Re(\lambda)$.

Partie 2

Propriétés de la transformée de Laplace

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ est une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$, alors d'après ce qui précède, la transformée de Laplace $L(f)$ est définie sur le demi plan ouvert $\prod(\sigma(f)) = \{z \in \mathbb{C}; Re(z) > \sigma(f)\}$ du plan complexe, donc aussi sur l'intervalle ouvert $]\sigma(f), +\infty[$.

Si $\sigma(f)$ est fini alors $\prod(\sigma(f))$ est un demi plan délimité par la droite d'equation $x = \sigma(f)$

Dans la suite du problème, on note aussi $L(f)$ la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f.
Dans les questions qui suivent, on pourra utiliser avec profit le résultat de la question 1.2.3. ci-dessus et exploiter au mieux les propriétés de la fonction F définie en 1.2.

2.1. Propriétés fondamentales
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ est une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$.

2.1.1. **Question :** *Montrer que l'application $L(f)$ est continue sur le demi plan $\prod(\sigma(f))$. On pourra exploiter le fait que la fonction F, définie en 1.2., est bornée et utiliser la question 1.2.3.*

$z \in \prod(Re(z_0)) \Leftrightarrow Re(z) > Re(z_0)$

Réponse : Soit $z_0 \in \prod(\sigma(f))$, d'après la question 1.2.3.
$\forall z \in \prod(Re(z_0)), L(f)(z) = (z - z_0)\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t)\, dt$, c'est alors une fonction définie par une intégrale dépendante d'un paramètre, on utilise alors le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$ à savoir :
-$\forall t \in \mathbb{R}^+, z \mapsto (z - z_0)e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est continue sur $\prod(Re(z_0))$.
-$\forall z \in \prod(Re(z_0)), t \mapsto (z - z_0)e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
-Pour tout disque fermé $\overline{D}(a, r) \subset \prod(Re(z_0))$ avec $r > 0$
,$\forall z \in \overline{D}(a, r), \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|(z - z_0)e^{-(z-z_0)t} F(t)\right| \leqslant M\alpha e^{-Re(a-r-z_0)t}$
et la fonction $t \mapsto M\alpha e^{-Re(a-z_0)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ avec $\alpha = |a| + r + |z_0|$ et $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |F(t)|$;
car $\overline{D}(a, r) \subset \prod(Re(z_0))$ donne $Re(a) - r > Re(z_0)$ et donc $Re(a - r - z_0) > 0$.
On conclut que $L(f)$ est continue sur $\prod(Re(z_0))$ et ceci pour tout z_0 de l'ouvert $\prod(\sigma(f))$ donc $L(f)$ est continue sur $\prod(\sigma(f))$.
2.1.2. **Question :** *Montrer que la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et donner une expression intégrale de sa dérivée seconde notée $L(f)''$*
Réponse : Soit $x_0 \in]\sigma(f), +\infty[$, la restriction de $L(f)$ à $]x_0, +\infty[$ s'écrit

$$\forall x \in]x_0, +\infty[, L(f)(x) = (x - x_0)\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t)\, dt$$

c'est une fonction définie par une intégrale dépendante d'un paramètre, on utilise alors le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ à savoir :
-$\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto (x - x_0)e^{-(x-x_0)t} F(t)$ est classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}((x - x_0)e^{-(x-x_0)t} F(t)) = (1 - (x - x_0)t)e^{-(x-x_0)t} F(t)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^2}{dx^2}((x - x_0)e^{-(x-x_0)t} F(t)) = -t(2 - (x - x_0)t)e^{-(x-x_0)t} F(t)$$

-$\forall x \in]\sigma(f), +\infty[, t \mapsto \dfrac{d}{dx}((x - x_0)e^{-(x-x_0)t} F(t))$
et $t \mapsto \dfrac{d^2}{dx^2}((x - x_0)e^{-(x-x_0)t} F(t))$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et on a .
-$\forall [a - r, a + r] \subset]x_0, +\infty[, \forall x \in [a - r, a + r], \forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$\left|\frac{d}{dx}((x - x_0)e^{-(x-x_0)t} F(t))\right| \leqslant M(1 + \alpha t)e^{-Re(a-r-x_0)t} = \varphi_1(t)$$

$$\forall x \in \left|\frac{d^2}{dx^2}((x-x_0)e^{-(x-x_0)t}F(t))\right| \leqslant M(2+\alpha t)e^{-Re(a-r-x_0)t} = \varphi_2(t)$$

et les fonctions φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
On conclut que $L(f)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]x_0,+\infty[$ ceci $\forall x_0 \in]\sigma(f),+\infty[$ donc $L(f)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]\sigma(f),+\infty[$.

$$\forall x \in]\sigma(f),+\infty[, (L(f)(x))'' = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t)\, dt$$

2.1.3. **Question :** *Montrer que l'application $x \mapsto L(f)(x)$, définie sur l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$, admet une limite nulle en $+\infty$. On pourra exploiter la continuité en 0 de la fonction bornée F.*
Réponse : Pour tout x_0 de $]\sigma(f),+\infty[$, la restriction de $L(f)$ à $]x_0,+\infty[$ s'écrit

$$\forall x \in]x_0,+\infty[, L(f)(x) = (x-x_0)\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}F(t)\, dt$$

définition de la continuité par les ε

Soit $\varepsilon > 0$, assez petit, on a F est continue en 0 donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [0,\eta], |F(t)| \leqslant \varepsilon$ et d'autre part $\forall x \in \mathbb{R}^+, |F(t)| \leqslant M$ avec $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |F(t)|$.

$$\begin{aligned}
&|L(f)(x)| \\
&= \left|(x-x_0)\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}F(t)\, dt\right| \\
&= \left|(x-x_0)\int_0^{\eta} e^{-(x-x_0)t}F(t)\, dt + (x-x_0)\int_\eta^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}F(t)\, dt\right| \\
&\leqslant (x-x_0)\int_0^{\eta} e^{-(x-x_0)t}\underbrace{|F(t)|}_{\leqslant\varepsilon}\, dt + (x-x_0)\int_\eta^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}\underbrace{|F(t)|}_{M}\, dt \\
&\leqslant (x-x_0)\varepsilon\left[-\frac{e^{-(x-x_0)t}}{x-x_0}\right]_0^{\eta} + (x-x_0)M\left[-\frac{e^{-(x-x_0)t}}{x-x_0}\right]_\eta^{+\infty} \\
&\leqslant (x-x_0)\left[\varepsilon\frac{e^{-(x-x_0)\eta}-1}{x-x_0} + M\frac{e^{-(x-x_0)\eta}}{x-x_0}\right] \\
&= \varepsilon\underbrace{\left(1-e^{-(x-x_0)\eta}\right)}_{\leqslant 1} + Me^{-(x-x_0)\eta} \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

car on a $\forall t > 0, \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{-(x-x_0)t} = 0$
donc il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in [A,+\infty[, e^{-(x-x_0)\eta} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$
Conclusion la limite de $L(f)$ en $+\infty$ égal à 0.

2.2. Exemple

Soit ω la fonction définie par : $\omega(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}, t > 0$; on la prolonge par continuité en 0.

Lorsque elle existe $L(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ et si $L(f)(x_0)$ existe alors d'après sa définition $\sigma(f) \geqslant x_0$ ici $x_0 = 0$

2.2.1. **Question :** *Préciser la valeur en 0 de la fonction et montrer que $\sigma(\omega) \leqslant 0$.*

Réponse : On a $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $w(0) = \dfrac{1}{2}$.

Ona w est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \underset{t+\infty}{O}(\dfrac{1}{t^2})$ donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ converge, donc $L(f)(0)$ existe donc $\sigma(w) \leqslant 0$

2.2.2. **Question :** *Pour tout $x > 0$, calculer la dérivée seconde de l'application $t \mapsto L(\omega)(t)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, en x.*

Réponse :

$$\begin{aligned}
(L(w))''(x) &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos(t))\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(t))\,dt \\
&= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

2.2.3. **Question :** *En déduire, pour tout $x > 0$, l'expression de $(L(w)'(x))$ puis celle de $L(w)(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On pourra utiliser la question 2.1.3 pour calculer les constantes d'intégration.*

Réponse : On faisant un calcul simple de primitives on a $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
(L(w))''(x) &= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \\
(L(w))'(x) &= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \\
(L(w))(x) &= x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \arctan(x) + c_1 x + c_2
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
L(w)(x) &= x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2})) - \arctan(x) + c_1 x + c_2 \\
&= x\ln(x) - \frac{1}{2}x\left(\ln(x^2) + \ln(1+\frac{1}{x^2}))\right) - \arctan(x) + c_1 x + c_2 \\
&= x\ln(x) - \frac{1}{2}x\left(2\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x^2}))\right) - \arctan(x) + c_1 x + c_2 \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2})) - \arctan(x) + c_1 x + c_2
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x+\infty} L(w)(x) = 0$ et $\lim\limits_{x+\infty} \ln(1+\dfrac{1}{x^2}) = 0$ et $\lim\limits_{x+\infty} \arctan(x) = 1$ On a $c_1 = 0$ et $c_2 = \dfrac{\pi}{2}$

2.3. **Un théorème de Césaro**
Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ une fonction à **valeurs positives** telle que $\sigma(g) \leqslant 0$; on suppose que la fonction $x \mapsto xL(g)(x)$ admet 1 comme limite en 0^+.

2.3.1. **Question :** *Montrer que pour tout $x > 0$ et toute fonction h continue par morceaux sur $[0,1]$ et a valeurs réelles, la fonction $t \mapsto e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on pose alors*

$$\Delta_x(h) = x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})\,dt$$

Réponse : On a $\forall t \in [0,+\infty[, \left|e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})\right| \leqslant Me^{-xt}g(t)$ avec $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|h(e^{-xt})\right|$; le sup existe car l'application $t \mapsto h(e^{-xt})$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$.
et on a $\sigma(g) \leqslant 0$ donc $\forall x > 0$, $L(f)(x)$ converge ce qui signifie que l'application $t \mapsto e^{-xt}g(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $t \mapsto e^{-xt}g(t)$ est à valeurs positives.
Et par comparaison la fonction $t \mapsto e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2.3.2. **Question :** *Si P est un polynôme a coefficient réelles, on désigne également par P la restriction au segment $[0,1]$ de la fonction polynomiale associée. Montrer $\Delta_x(P)$ tend vers $\int_0^1 P(t)\,dt$ quand x tend vers 0^+. On pourra exploiter la linéarité de Δ_x.*

Réponse : On $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ on alors

$$\begin{aligned}
\Delta_x P &= x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)P(e^{-xt})\,dt = x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kxt})\,dt \\
&= x\sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)e^{-kxt}\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k x\int_0^{+\infty} e^{-x(k+1)t}g(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(k+1)x\int_0^{+\infty} e^{-x(k+1)t}g(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\underbrace{(k+1)xL(g)((k+1)x)}_{\text{tend vers 1 qd } x \text{ tend vers } 0^+}
\end{aligned}$$

Or $\int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 \sum\limits_{0}^{n} a_k t^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^k\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$
donc $\Delta_x(P)$ tend vers $\int_0^1 P(t)\,dt$ qand x tend vers 0.
2.3.3. **Question :** *En donnant un énoncé précis du théorème utilisé, établir que la propriété précédente s'étend aux fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.*
Réponse : : d'après le théorème d'approximation de Weierstrass on a toute application continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de

fonctions polynômes.
Soit alors f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|\Delta_x(P_n) - \Delta_x(f)| &= x\left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)P_n(e^{-xt})\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)f(e^{-xt})\,dt\right| \\
&\leqslant x\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-xt}g(t)}_{\geqslant 0}\left|P_n(e^{-xt}) - f(e^{-xt})\right|\,dt \\
&\leqslant \sup_{[0,1]}|P_n - f|\,\underbrace{x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)\,dt}_{xL(f)(x)} \\
&\leqslant \alpha.\sup_{[0,1]}|P_n - f|
\end{aligned}$$

avec α un majorant sur $[0,1]$ de $xL(f)(x)$ car cette quantité admet une limite fine en 0.

On alors vérifier les conditions du théorème d'interversion de limites des suites de fonctions.

On en tire que $\Delta_x(P_n)$ converge uniformément sur [0,1] vers $\Delta_x(f)$.
et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \Delta_x(P_n) = \int_0^1 P_n(t)\,dt$ d'après la question précédente.
donc $(\int_0^1 P_n(t)\,dt)_n$ converge et $\Delta_x(f)$ admet une limite en 0^+
et comme $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur le segment $[0,1]$
on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 P_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$.

ce qui donne $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \Delta_x(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$

2.3.4. **Question :** *On admet ici que le résultat de la question précédente s'étend aux fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ et à valeurs réelles, et on considère la fonction h_1 définie sur $[0,1]$ par :*

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{1}{t} & si \quad \dfrac{1}{e} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Pour $x > 0$, exprimer l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{x}} g(t)\,dt$, en fonction de x et de $\Delta_x(h_1)$ puis en déduire que la fonction $a \mapsto \dfrac{1}{a}\int_0^a g(t)\,dt$, définie sur $]0,+\infty[$, tend vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$.

Réponse : : On a $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta_x(h_1) &= x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)h_1(e^{-xt})\,dt = x\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-xt}g(t)h_1(e^{-xt})\,dt \\
&= x\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-xt}g(t)\frac{1}{e^{-xt}}\,dt = x\int_0^{\frac{1}{x}} g(t)\,dt
\end{aligned}$$

car $t \in [0, \frac{1}{x}] \implies -xt \in [-1, 0] \implies e^{-xt} \in [e^{-1}, 1]$

$\implies h_1(e^{-xt}) = \frac{1}{e^{-xt}}$

et $t \geqslant \frac{1}{x} \implies -xt \leqslant -1 \implies e^{-xt} \leqslant \frac{1}{e}$

donc : $x \int_0^{\frac{1}{x}} g(t)\, dt = \Delta_x(h_1) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 h_1(t)\, dt = 1$

d'où en posant $a = \frac{1}{x}$ on a $\frac{1}{a} \int_0^a g(t)\, dt \underset{a \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$

Partie 3

Comportement au voisinage de l'origine

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$; on s'intéresse dans cette partie à l'étude du comportement au voisinage de 0^+ de la transformée de Laplace $L(f)$ en rapport avec l'existence de $L(f)(0)$.

3.1. **Question :** *Dans cette question on suppose que $L(f)(0)$ existe, ce qui est équivalent à la convergence de l'intégral $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$; on en déduit que $\sigma(f) \leqslant 0$.*

3.1.1. **Question :** *Montrer que, pour tout $x > 0$,*

$$L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0)) e^{-xt}\, dt,$$

où F désigne la primitive de f qui s'annule en 0.

Réponse : Soit $x > 0$,

D'après la question 1.2.3 on a $L(f)(x) = x \int_0^{+\infty} F(t) e^{-xt}\, dt$, (ici $z_0 = 0$) et aussi on a $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$ donc $x \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = 1$ on multiplie alors les deux membre de cette dernière égalité par $L(f)(0)$ on aura

$L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} L(f)(0) e^{-xt}$ et donc on aura

$L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0)) e^{-xt}\, dt,$

3.1.2. **Question :** *En déduire que $L(f)(x)$ admet $L(f)(0)$ comme limite lorsque x tend vers 0^+. On pourra exploiter le fait que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t) = L(f)(0)$ puis découper l'intégrale précédente en deux.*

Réponse : Soient $\varepsilon > 0, x > 0$

On a $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t) = L(f)(0)$ donc $\exists A > 0, \forall t \geqslant A$ on a $|F(t) - L(f)(0)| \leqslant \varepsilon$ donc

$|L(f)(x) - L(f)(0)|$

$= x \int_0^A |F(t) - L(f)(0)|\, e^{-xt}\, dt + x \int_A^{+\infty} |F(t) - L(f)(0)|\, e^{-xt}\, dt$

comme $\forall t > 0, |F(t) - L(f)(0)|\, e^{-xt} \leqslant |F(t) - L(f)(0)|$

et $\forall t \geqslant A, |F(t) - L(f)(0)|\, e^{-xt} \leqslant \varepsilon e^{-xt}$

on a alors $x\int_0^A |F(t)-L(f)(0)|\, e^{-xt}\, dt \leqslant x\int_0^A |F(t)-L(f)(0)|\ dt \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$

donc $\exists \eta > 0, \forall x \in]0,\eta], x\int_0^A |F(t)-L(f)(0)|\, e^{-xt}\, dt \leqslant \varepsilon$

et $x\int_A^{+\infty} |F(t)-L(f)(0)|\, e^{-xt}\, dt \leqslant x\varepsilon\dfrac{e^{-Ax}}{x} = \varepsilon e^{-xA} \leqslant \varepsilon$

d'où : $\forall x \in]0,\eta], x\int_0^{+\infty} |F(t)-L(f)(0)|\, e^{-xt}\, dt \leqslant 2\varepsilon$

d'où le résultat.

3.2. **Question :** *Montrer que la transformée de Laplace de la fonction cosinus est définie sur $]0,+\infty[$ et admet une limite finie sur 0^+, à préciser, sans être définie en 0.*

Ici $f = \cos$, on a pour $x > 0$,

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-xt}\, dt = \underbrace{\left[\cos(x)\frac{-e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}}_{=\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-xt}\, dt$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(\underbrace{\left[\sin(x)\frac{-e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-xt}\, dt\right)$$

donc $L(f)(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}L(f)(x)$ d'où $L(f)(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$

(Remarque : on a ici $L(f)(0) = \int_0^{+\infty} \cos(t)\, dt$ n'existe pas.)

le but de la suite du problème est d'étudier des conditions suffisantes d'existence de $L(f)(0)$ lorsque la fonction $L(f)$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ en 0^+ (théorème de Thauber).

3.3. **Theoreme de Thauber**

Dans cette question, on suppose que la fonction $t \longrightarrow tf(t)$ tend vers 0 en $+\infty$.

3.3.1. **Question :** *Justifier que $\sigma(f) \leqslant 0$.*

Réponse : Soit $x > 0$, on a $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$

et en $+\infty$ on a $f(t)e^{-xt} = tf(t)\dfrac{e^{-xt}}{t} = o\left(\dfrac{e^{-xt}}{t}\right)$ et comme $t \longrightarrow \dfrac{e^{-xt}}{t}$ est intégrable en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\, dt$ converge

d'où $L(f)(x)$ existe et par suite $\sigma(f) \leqslant 0$.

3.3.2. **Question :** *Montrer que la fonction $a \mapsto \dfrac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\ dt$, définie sur $]0,+\infty[$, tend vers 0 en $+\infty$.*

Réponse : Soit $\varepsilon > 0$,

On a $t \longrightarrow tf(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ donc $\exists A > 0, \forall t > A, |tf(t)| \leqslant \varepsilon$;

On a alors $\forall a \geqslant A, \dfrac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\ dt = \dfrac{1}{a}\underbrace{\int_0^A |tf(t)|\ dt}_{\text{ne dépend pas de a}} + \dfrac{1}{a}\int_A^a \underbrace{|tf(t)|}_{\leqslant\varepsilon}\ dt$

et donc $\dfrac{\int_0^A |tf(t)|\ dt}{a} \underset{a\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists A' \geqslant A, \forall a > A', \dfrac{\int_0^A |tf(t)|\ dt}{a} \leqslant \varepsilon$

et $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_A^a |tf(t)|\ dt \leqslant \varepsilon \underbrace{\frac{a-A}{a}}_{\leqslant 1} \leqslant \varepsilon$

d'où $\forall a > A', \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a |tf(t)|\ dt \leqslant 2\varepsilon$. D'où le résultat.

3.3.3. **Question :** *Montrer que, pour tout réel $u, 1 - e^{-u} \leqslant u$.*

Réponse : Il suffit d'étudier la fonction $u \mapsto 1 - e^{-u} - u$ sur $\mathbb{R}$ et de dresser le tableau de variation.

3.3.4. **Question :** *Montrer que, pour tous x et a réels strictement positifs, on a*

$$\left|L(f)(x) - \int_0^a f(t)\ dt\right| \leqslant \int_0^a (1 - e^{-xt})\,|f(t)|\ dt + \int_a^{+\infty} e^{-xt}\,|f(t)|\ dt$$

puis en déduire que

$$\left|L(f)(x) - \int_0^a f(t)\ dt\right| \leqslant x\int_0^a |tf(t)|\ dt + \frac{1}{ax}\sup_{t\geqslant a}|tf(t)|$$

Réponse : On a

$\left|L(f)(x) - \displaystyle\int_0^a f(t)\ dt\right| = \left|\displaystyle\int_0^a f(t)e^{-xt}\ dt + \int_a^{+\infty} f(t)e^{-xt}\ dt - \int_0^a f(t)\ dt\right|$

et par l'inégalité triangulaire appliqué sur des intégrales convergentes on a le résultat.

et comme $\left|(1-e^{-xt})f(t)\right| \leqslant xt\,|f(t)|$

et $e^{-xt}\,|f(t)| = \dfrac{e^{-xt}}{t}t\,|f(t)| \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{a}t\,|f(t)| \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{a}\displaystyle\sup_{t\geqslant a}|tf(t)|, \forall a \geqslant t$

En passant au intégrales on obtient le résultat.

3.3.5. **Question :** *On suppose de plus que la fonction $L(f)$ possède une limite $\mu \in \mathbb{C}$ en 0^+. En choisissant convenablement x en fonction de a, déduire de ce qui précède que $L(f)(0)$ existe et vaut μ.*

Réponse : On pose $a = \dfrac{1}{x}$ on a tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 et d'après ce qui précède le second membre de la dernière inégalité tend vers 0 donc $\left|L(f)(x) - \displaystyle\int_0^a f(t)\ dt\right|$ tend vers 0 aussi par suite $\displaystyle\int_0^a f(t)\ dt$ converge quand a tend vers $+\infty$ c-a-d $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = L(f)(0)$ existe par suite $\left|L(f)(x) - \displaystyle\int_0^a f(t)\ dt\right|$ tend vers $|\mu - L(f)(0)|$ et l'unicité de la limite donne $|\mu - L(f)(0)| = 0$ d'où $L(f)(0) = \mu$.

♦