অধ্যায়–9(A)

আদি মান সমস্যা

Initial Value Problem

9–A.1. আদিশর্ত এবং আদিমান সমস্যা ঃ

যদি স্বাধীন চলকের এক বিন্দুতে অধীন চলকের শর্ত আরোপ করিয়া ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করা হয় তবে

(i). ঐ আরোপিত শর্তের সেটকে আদি শর্ত বলা হয়।

(ii). আদি শর্তসহ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে আদি মান সমস্যা বলা হয়।

গাণিতিকভাবে–

(i). $x = x_0$ বিন্দুতে y এর মানকে $y(x_0)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $y(x_0) = y_0$ কে আদি শর্ত বলা হয়।

(ii). $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ কে প্রথম ক্রমের আদিমান সমস্যা বলা হয়। ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের সাধারন সমাধানে আদি শর্ত প্রয়োগ করিয়া আদিমান সমস্যা সমধান করিতে হয়।

[If by applying the condition of dependent variable in one point of independent variable, to find the particular solution of differential equation then

(i). the given conditions are called initial conditions.

(ii). the differential equation with initial condition is called initial value problem.

Mathematically–

(i). $y(x_0)$ denotes the value of y at $x = x_0$; $y(x_0) = y_0$ is called initial condition.

(ii). $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ is called first order initial value problem. Initial value problems are solved by applying the initial conditions to the general solution of the differential equation.

9–A.2. সীমামান সমস্যা [Boundary value problem]

যদি নিশ্চিত সীমা শর্তসহ আংশিক অন্তরক সমীকরণ প্রদত্ত হয় এবং ইহার নির্ণেয় সমাধান নির্দিষ্ট শর্তগুলি সিদ্ধ করে, তবে এই ধরণের সমস্যাকে সীমা মান সমস্যা বলা হয়।

Partial differential equations are always accompained by certain boundary conditions and it is required to find the solution ... Such problems are said

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1. নিম্নে উল্লেখিত আদি মান সমস্যাগুলো সমাধান কর। [Solve following initial value problems]

(i). $2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2),\ y(1) = 1$

(ii). $x\,dy - y\,dx - (1 - x^2)dx = 0,\ y(1) = 1$

(iii). $y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0,\ x(2) = 1$

সমাধান-(i). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2) \cdots\cdots (1),\quad y(1) = 1 \cdots\cdots (2)$$

বা $2x^3 \dfrac{dy}{dx} = y^3 + 3x^2y$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 3x^2y}{2x^3}$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{2x^3} + \dfrac{3y}{2x}$

বা $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{2x} = \dfrac{y^3}{2x^3}$

বা $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y^{-2}}{2x} = \dfrac{1}{2x^3} \cdots\cdots (3)$

ধরি $y^{-2} = v$ তবে $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

বা $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx}$

[we put $y^{-2} = v$ then $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

or $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx}$]

$\therefore (3) \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{3v}{2x} = \dfrac{1}{2x^3}$

বা $\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{3v}{x} = -\dfrac{1}{x^3} \cdots\cdots (4)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$

(4) নং এর উভয় পক্ষকে x^3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (4) by x^3 we get]

$$\frac{d}{dx}[vx^3] = -1$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides w. r. to x we get]

$$vx^3 = -x + A$$

বা $v = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$

বা $y^{-2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$

বা $\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$

বা $\frac{1}{\{y(x)\}^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$ ...... (5)

(5) নং এ $x = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 1$ in (5) we get]

$$\frac{1}{\{y(1)\}^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{A}{1^3}$$

বা $\frac{1}{1^2} = -1 + A$ [(2) দ্বারা]

বা $A = 2$

এখন A এর মান (5) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the value of A in (5) we get]

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

সমাধান-1(ii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$x\,dy - y\,dx - (1 - x^2)dx = 0 \text{ ...... (1)}$$

$$y(1) = 1 \text{ ...... (2)}$$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sides of (1) by x^2 we get]

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$$

বা $d\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this, we get]

$$\frac{y}{x} - \left(-\frac{1}{x} - x\right) = A\Big).$$

বা $\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = A$

বা $y + 1 + x^2 = Ax$

বা $y(x) = Ax - 1 - x^2$ ...... (3)

(3) নং এ $x = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 1$ in (3) we get]

$$y(1) = A - 1 - 1$$

বা $1 = A - 2$ [(2) দ্বারা]

বা $A = 3$

$\therefore (3) \Rightarrow y(x) = 3x - 1 - x^2,$

সমাধান-1(iii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem

$$y\ln y \, dx + (x - \ln y)dy = 0 \cdots\cdots (1)$$

$$x(2) = 1 \cdots\cdots (2)$$

$(1) \Rightarrow y\ln y \, dx = (\ln y - x)dy$

বা $\frac{dx}{dy} = \frac{\ln y - x}{y \ln y}$

বা $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y \ln y}$

বা $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y \ln y} = \frac{1}{y} \cdots\cdots (3)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int \frac{dy}{y \ln y}} = e^{\int \frac{d(\ln y)}{\ln y}} = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $\ln y$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (3) by $\ln y$ we get]

$$\frac{d}{dy}(x\ln y) = \frac{\ln y}{y}$$

ইহাকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to y we get]

$$x\ln y = \int \frac{\ln y \, dy}{y} + A$$

বা $x\ln y = \int \ln y \, d(\ln y) + A$

বা $x\ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + A \cdots\cdots (4)$

বা $x = \frac{\ln y}{2} + \frac{A}{\ln y}$

বা $x(y) = \frac{\ln y}{2} + \frac{A}{\ln y} \cdots\cdots (5)$

(5) নং এ $y = 2$ বসাইয়া পাই [Putting $y = 2$ in (5) we get]

$$x(2) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{A}{\ln 2}$$

বা $1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{A}{\ln 2}$ [(2) দ্বারা]

বা $1-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{A}{\ln 2}$

বা $\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2=A$

$\therefore (4)\Rightarrow x\ln y=\frac{1}{2}(\ln y)^2+\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2.$

উদাহরণ-2. নিম্নে উল্লেখিত আদি মান সমস্যা গুলো সমাধান কর। [Solve the following initial value problems]

(i) $2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-3y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=\frac{-7}{2}$

(ii) $y''+4y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=2\sqrt{2}$

(iii) $9y''-3y'-2y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=1$

(iv) $y''-2\sqrt{5}\,y'+5y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$

(v) $y''-\sqrt{2}\,y'+y=0,\ y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=0.$

সমাধান-2(i). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-3y=0 \text{ ...... } (1)$$

$$y(0)=2,\ y'(0)=\frac{-7}{2} \text{ ...... } (2)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y=e^{mx}$ তবে [Let $y=e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$(1)\Rightarrow(2m^2-m-3)e^{mx}=0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $2m^2-m-3=0$ যেহেতু [since] $e^{mx}\neq 0$

বা $2m^2-3m+2m-3=0$

বা $m(2m-3)+1(2m-3)=0$

বা $(2m-3)(m+1)=0$

$\therefore m=\frac{3}{2},-1$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y(x)=c_1e^{3x/2}+c_2e^{-x} \text{ ...... } (3)$

$\therefore y'(x)=\frac{3c_1}{2}e^{3x/2}-c_2e^{-x} \text{ ...... } (4)$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x=0$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting successively $x=0$ in (3) and (4) we get]

$y(0)=c_1+c_2$

বা $2=c_1+c_2$ [(2) দ্বারা]

বা $c_1=2-c_2 \text{ ...... } (5)$

এবং $y'(0) = \frac{-c_1}{3} + \frac{2c_2}{3}$

বা $1 = \frac{-c_1}{3} + \frac{2c_2}{3}$ [(2) দ্বারা]

বা $3 = -c_1 + 2c_2$

বা $3 = -3 + c_2 + 2c_2$ [(5) দ্বারা]

বা $6 = 3c_2$

বা $c_2 = 2$

$\therefore (5) \Rightarrow c_1 = 3 - 2$

বা $c_1 = 1$

c_1 এবং c_2 এর মান (3) নং বসাইয়া পাই [Putting the values of c_1 a in (3) we get]

$$y(x) = e^{-x/3} + 2e^{2x/3}.$$

সমাধান-2(iv). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem

$$y'' - 2\sqrt{5}\,y' + 5y = 0 \;\cdots\cdots\; (1)$$

$$\text{এবং } y(0) = 0,\; y'(0) = 3 \;\cdots\cdots\; (2)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a solution of (1) then]

$$(1) \Rightarrow (m^2 - 2\sqrt{5}m + 5)e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2\sqrt{5}m + 5 = 0$ যেহেতু [since] e

বা $(m - \sqrt{5})^2 = 0$

বা $m = \sqrt{5}, \sqrt{5}$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{\sqrt{5}x}$$

বা $y(x) = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2x\, e^{\sqrt{5}x} \;\cdots\cdots\; (3)$

$\therefore y'(x) = c_1\sqrt{5}\, e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{\sqrt{5}x} + c_2\sqrt{5}\, x e^{\sqrt{5}x} \;\cdots\cdots\; (4)$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (3) (4) successively we get]

$y(0) = c_1 + 0$

বা $0 = c_1$ [(2) দ্বারা]

এবং $y'(0) = c_1\sqrt{5} + c_2 + 0$

বা $3 = 0 + c_2$; (2) নং দ্বারা। যেহেতু $c_1 = 0$

বা $c_2 = 3$

c_1 এবং c_2 এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Putting the values of c_1 and c_2 (3) we get]

$$y(x) = 3x\, e^{x\sqrt{5}}.$$

সমাধান-2(v). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$y'' - \sqrt{2}\,y' + y = 0 \text{ ...... (1)}$$

এবং [and] $y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = 0$ ...... (2)

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$(1) \Rightarrow (m^2 - \sqrt{2}m + 1)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - \sqrt{2}m + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } m = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{বা } m = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore y(x) = e^{x/\sqrt{2}}\left[c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \text{ ...... (3)}$$

$$\therefore y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{x/\sqrt{2}}\left[c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

$$+ e^{x/\sqrt{2}}\left[-\frac{c_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \text{ ...... (4)}$$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (3) and (4) successively we get]

$y(0) = e^0\,[c_1 + 0]$

বা $\sqrt{2} = c_1$ [(2) দ্বারা]

এবং $y'(0) = \dfrac{e^0}{\sqrt{2}}[c_1 + 0] + e^0\left[0 + \dfrac{c_2}{\sqrt{2}}\right]$

বা $0 = \dfrac{c_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{c_2}{\sqrt{2}}$ [(2) দ্বারা]

বা $c_1 + c_2 = 0$

বা $\sqrt{2} + c_2 = 0$

বা $c_2 = -\sqrt{2}$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(x) = e^{x/\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right].$$

উদাহরণ-3. নিম্নের আদি মান সমস্যাগুলোর সমাধান কর। [Solve following initial value problems]

(i). $y'' - y' - 2y = e^{3x}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$

(ii). $y'' - y' - 6y = 8e^{2x} - 5e^{3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ [DUH-1

(iii). $y'' + 5y' + 6y = e^{x} + e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

সমাধান-3(i). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem

$$y'' - y' - 2y = e^{3x} \;\cdots\cdots (1)$$

এবং [and] $y(1) = 2, y'(1) = 1 \;\cdots\cdots (2)$

মনেকরি $y'' - y' - 2y = 0 \;\cdots\cdots (3)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $y'' - y' - 2y = 0 \;\cdots\cdots (3)$ then]

$(3) \Rightarrow (m^2 - m - 2)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - m - 2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m + 1)(m - 2) = 0$

বা $m = -1, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

(1) নং সমীকরণকে লিখা যায় [Equation (1) can be written as]

$$(D^2 - D - 2)y = e^{3x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - D - 2}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{3^2 - 3 - 2}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \dfrac{e^{3x}}{4} \;\cdots\cdots (4)$

$\therefore y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} + \dfrac{3e^{3x}}{4} \;\cdots\cdots (5)$

(4) নং এবং (5) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 1$ in (4) and (5) successively we get]

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^2 + \frac{e^3}{4}$$

বা $2 = c_1 e^{-1} + c_2 e^2 + \frac{e^3}{4}$ [(2) দ্বারা]

বা $c_1 e^{-1} + c_2 e^2 = 2 - \frac{e^3}{4}$ ...... (6)

এবং $y'(1) = -c_1 e^{-1} + 2c_2 e^2 + \frac{3e^3}{4}$

বা $1 = -c_1 e^{-1} + 2c_2 e^2 + \frac{3e^3}{4}$ [(2) দ্বারা]

বা $-c_1 e^{-1} + 2c_2 e^2 = 1 - \frac{3e^3}{4}$ ...... (7)

(6) এবং (7) নং কে যোগ করিয়া পাই [Adding (6) and (7) we get]

$$3c_2 e^2 = 3 - e^3$$

বা $c_2 e^2 = 1 - \frac{1}{3} e^3$

বা $c_2 = \left(1 - \frac{1}{3} e^3\right) e^{-2}$

c_2 এর মান (6) নং এ বসাইয়া পাই [Putting the value of c_2 in (6) we get]

$$c_1 e^{-1} + \left(1 - \frac{e^3}{3}\right) e^{-2} e^2 = 2 - \frac{e^3}{4}$$

বা $c_1 e^{-1} + 1 - \frac{e^3}{3} = 2 - \frac{e^3}{4}$

বা $c_1 e^{-1} = 1 + \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{4}$

বা $c_1 e^{-1} = 1 + \frac{e^3}{12}$

বা $c_1 = \left(1 + \frac{e^3}{12}\right) e$

$\therefore (4) \Rightarrow y(x) = \left(1 + \frac{e^3}{12}\right) e e^{-x} + \left(1 - \frac{e^3}{3}\right) e^{-2} e^{2x} + \frac{e^{3x}}{4}$

বা $y(x) = \left(1 + \frac{e^3}{12}\right) e^{-(x-1)} + \left(1 - \frac{e^3}{3}\right) e^{2(x-1)} + \frac{e^{3x}}{4}$.

সমাধান-3(ii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$y'' - y' - 6y = 8e^{2x} - 5e^{3x} \text{ ...... (1)}$$

এবং [and] $y(0) = 3,\ y'(0) = 5$ ...... (2)

মনেকরি $y'' - y' - 6y = 0$ ...... (3) [Let $y'' - y' - 6y = 0$ ...... (3) then]

$y = e^{mx}$ be a trial solution of $y'' - y' - 6y = 0$

$(3) \Rightarrow (m^2 - m - 6)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - m - 6 = 0$ যেহেতু [Since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-3)(m+2) = 0$

বা $m = 3, -2$

$\therefore y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$

(1) নং সমীকরণকে লিখা যায় [Equation (1) can be written as]

$$(D^2 - D - 6)y = 8e^{2x} - 5e^{3x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - D - 6}(8e^{2x} - 5e^{3x})$$

$$= \frac{1}{D^2 - D - 6} 8e^{2x} - \frac{1}{D^2 - D - 6} 5e^{3x}$$

$$= \frac{1}{2^2 - 2 - 6} 8e^{2x} - x\frac{1}{2D - 1} 5e^{3x}$$

$$= -2e^{2x} - x.\frac{1}{2.3 - 1} 5e^{3x}$$

$$= -2e^{2x} - xe^{3x}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - 2e^{2x} - xe^{3x}$ ...... (4)

$\therefore y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x} - 4e^{2x} - e^{3x} - 3x e^{3x}$ ...... (5)

(4) নং এবং (5) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (4) (5) successively we get]

$y(0) = c_1 + c_2 - 2 - 0$

বা $3 = c_1 + c_2 - 2$ [(2) দ্বারা]

বা $c_1 + c_2 = 5$

বা $c_1 = 5 - c_2$ ...... (6)

এবং $y'(0) = 3c_1 - 2c_2 - 4 - 1 - 0$

বা $5 = 3c_1 - 2c_2 - 5$ [(2) দ্বারা]

বা $5 + 5 = 3(5 - c_2) - 2c_2$ [(6) দ্বারা]

বা $10 = 15 - 5c_2$

বা $5c_2 = 5$

বা $c_2 = 1$

(6) $\Rightarrow c_1 = 5 - 1$

বা $c_1 = 4$

$\therefore$ (4) $\Rightarrow y(x) = 4e^{3x} + e^{-2x} - 2e^{2x} - xe^{3x}$.

সমাধান-3(iii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$y'' + 5y' + 6y = e^x + e^{-x} \text{ ...... (1)}$$

এবং [and] $y(0) = 0, y'(0) = 0$ ...... (2)

মনেকরি $y'' + 5y' + 6y = 0$ ...... (3) এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $y'' + 5y' + 6y = 0$ ...... (3) then]

(3) $\Rightarrow (m^2 + 5m + 6)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 5m + 6 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } (m + 3)(m + 2) = 0$$

$$\text{বা } m = -3, -2$$

$$\therefore y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

(1) নং সমীকরণকে লিখা যায় [Equation (1) can be written as]

$$(D^2 + 5D + 6)y = e^x + e^{-x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 5D + 6}(e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{D^2 + 5D + 6}e^x + \frac{1}{D^2 + 5D + 6}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{1^2 + 5.1 + 6}e^x + \frac{1}{(-1)^2 + 5(-1) + 6}e^{-x}$$

$$= \frac{e^x}{12} + \frac{e^{-x}}{2}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\text{বা } y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{12} + \frac{e^{-x}}{2} \text{ ...... (4)}$$

$$\therefore y'(x) = -3c_1 e^{-3x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{12} - \frac{e^{-x}}{2} \text{ ...... (5)}$$

(4) নং এবং (5) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (4) and (5) successively we get]

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$$

$$\text{বা } 0 = c_1 + c_2 + \frac{1 + 6}{12} \quad \text{[(2) দ্বারা]}$$

$$\text{বা } c_1 = -c_2 - \frac{7}{12} \text{ ...... (6)}$$

এবং $y'(0) = -3c_1 - 2c_2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}$

বা $0 = -3c_1 - 2c_2 + \frac{1-6}{12}$ [(2) দ্বারা]

বা $0 = -3\left(-c_2 - \frac{7}{12}\right) - 2c_2 - \frac{5}{12}$

বা $c_2 + \frac{21}{12} - \frac{5}{12} = 0$

বা $c_2 = \frac{5}{12} - \frac{21}{12}$

বা $c_2 = -\frac{4}{3}$

$\therefore$ (6) $\Rightarrow c_1 = \frac{4}{3} - \frac{7}{12}$

বা $c_1 = \frac{16-7}{12}$

বা $c_1 = \frac{3}{4}$

$\therefore$ (4) $\Rightarrow y(x) = \frac{3}{4}e^{-3x} - \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{e^x}{12} + \frac{e^{-x}}{2}$.

উদাহরণ–4. নিম্নের আদি মানি সমস্যার সমাধান কর [Solve the following initial value problem]

$$y'' + 4y = \sin^2 2x,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$y'' + 4y = \sin^2 2x \cdots\cdots (1)$$

এবং [and] ...

অধ্যায়–2(H)

প্রথম ক্রমের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের মডেলিং

Modeling with first order differential equation

2–H.1. এই অধ্যায়ে আমরা প্রথম ক্রমের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের মডেলিং এর সাধারণ ধারণা সম্পর্কে আলোচনা করিব এবং কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ মডেলিং এর অনুসন্ধান করিব যাহা জনসংখ্যার বৃদ্ধি বা হ্রাসে প্রয়োগ করা হইবে। [বেকটেরিয়া, মেডিসিন এবং বাস্তববিদ্যার ক্ষেত্রেও অনুরূপ নিয়ম।]

এই তত্ত্বকে গাণিতিক মডেলে অনুবাদ করিতে হইবে। মনেকরি t সময়ে $y = y(t)$ দ্বারা জনসমষ্ঠি নির্দেশ করে, তবে সময়ের সাপেক্ষে জনসমষ্টির বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$. ধরি জনসমষ্টির বৃদ্ধিহার সমানুপাতিক হয় জনসমষ্টির সাথে,

অর্থাৎ $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky$ যখন $k > 0$, যেহেতু জনসংখ্যা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

যদি কোন নির্দিষ্ট সময়ে জনসমষ্টি জানা থাকে, ধরি $t = 0$ সময়ে জনসমষ্টি $y = y_0$, অর্থাৎ $y(0) = y_0$.

$\therefore$ আদিমান সমস্যা $\frac{dy}{dt} = ky$, $y(0) = y_0$ কে সমাধান করিয়অ $y(t)$ এর জন্য একটি সাধারণ সূত্র পাওয়া যায়।

[In this section, we will discuss the general idea of modeling with first order differential equation and we will investigate some important models, that can be applied to population growth and decay. [same as bacteria, medicine and ecology.]

To translate this principle into mathematical model, let $y = y(t)$ denotes the population at time t, then the rate of increase of the population with respect to time is $\frac{dy}{dt}$, so the assumption the rate of growth is proportional to the population

that is $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky$, where k is a positive constant.

Thus if the population is known at definite time, say $y = y_0$ at time $t = 0$.

Then the general formula for y(t) can be obtained by solving the initial value problem $\frac{dy}{dt} = ky$, $y(0) = y_0$.]

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1. কোন নির্দিষ্ট সময়ে জনসংখ্যার বৃদ্ধিহার ঐ সময়ের জনসমষ্টির সহিত সমানুপাতিক। জনসংখ্যা 50 বছরে দ্বিগুন হইলে, কত বছরে উহা তিনগুন হইবে? [The population of a community is known to increase at a rate proportional to the number of people present at time t. If the population has doubled in 50 years, how long will it take to triple?] **[NUH–05, 08, 10, NUH(NM)–08, BSc(Pass)–12]**

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে জনসংখ্যা y, তাহা হইলে জনসংখ্যার বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$. [Let at time t, the number of people is y, then the rate of increase of people is $\frac{dy}{dt}$.]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky, \text{ যেখানে } k > 0, \text{ যেহেতু জনসংখ্যা বৃদ্ধি প্রাপ্ত।}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{y} = k\,dt \;\cdots\cdots (1)$$

মনেকরি যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$ [Let when $t = 0$ then $y = y_0$]

দেওয়া আছে যখন $t = 50$ তখন $y = 2y_0$ [Given that when $t = 50$ then $y = 2y_0$]

এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating (1) by taking limits of t and y]

$$\text{i, e. } \int_{y_0}^{2y_0} \frac{dy}{y} = k\int_0^{50} dt$$

$$\text{বা } [\ln y]_{y_0}^{2y_0} = k\,[t]_0^{50}$$

$$\text{বা } \ln 2y_0 - \ln y_0 = k(50 - 0)$$

$$\text{বা } \ln \frac{2y_0}{y_0} = 50k$$

$$\text{বা } 50k = \ln 2$$

$$\therefore k = \frac{\ln 2}{50} \;\cdots\cdots (4)$$

মনেকরি $t = t_1$ সময়ে জনসংখ্যা $y = 3y_0$ হইবে [Let at time $t = t_1$ the population will be $y = 3y_0$]

আবার যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$ [Again when $t = 0$ then $y = y_0$]

আবার t এবং y এর সীমা লাইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Again integrating (1) by taking limits of t and y]

i. e. $\int_{y_0}^{3y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{t_1} dt$

বা $[\ln y]_{y_0}^{3y_0} = k[t]_0^{t_1}$

বা $\ln 3y_0 - \ln y_0 = k(t_1 - 0)$

বা $\ln \frac{3y_0}{y_0} = kt_1$, বা $kt_1 = \ln 3$

বা $t_1 = \frac{\ln 3}{k} = \frac{\ln 3}{(\ln 2)/50}$

বা $t_1 = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \approx 79$ বছর প্রায়।

প্রায় 79 বছর পর জনসংখ্যা তিনগুন হইবে।

উদাহরণ–2. একটি জনসংখ্যা N, $\frac{dN}{dt} = KN$ নিয়মে বৃদ্ধি পায় যেখানে K একটি ধনাত্মক ধ্রুবক। সময় t বছরে পরিমাপ করা হইল, জনসংখ্যা তিনগুন হওয়ার সময় নির্ণয় কর। $\lim_{t\to\infty} N(t)$ নির্ণয় কর। [A population N grows according to the law $\frac{dN}{dt} = KN$, where K is a positive constant. Determine how long it takes the population to triple in size, where the time t is measured in years. Find $\lim_{t\to\infty} N(t)$.]

[NUH–06, 09, NUH(NM)–09, BSc(Pass)–13, 16]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

বা $\frac{dN}{N} = K\,dt$ ...... (1)

মনেকরি t = 0 সময়ে জনসংখ্যা $N = N_0$ ছিল; ধরি t = T সময়ে জনসংখ্যা $N = 3N_0$ হইবে এবং T = ? [Let at time t = 0, the population was $N = N_0$ and at time t = T, the population will be $N = 3N_0$ and T = ?]

(1) নং কে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating (1) we get]

$$\int_{N_0}^{3N_0} \frac{dN}{N} = K \int_0^T dt$$

বা $[\ln N]_{N_0}^{3N_0} = K[t]_0^T$

বা $\ln 3N_0 - \ln N_0 = K(T - 0)$

বা $\ln \frac{3N_0}{N_0} = KT$, বা $KT = \ln 3$

$\Rightarrow T = \frac{\ln 3}{K}$ বছর পর জনসংখ্যা তিনগুণ হইবে।

দ্বিতীয় অংশ ঃ (1) নং কে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating (1) we get]

$\ln N = Kt + \ln c$

বা $\ln \frac{N}{c} = Kt$

বা $\frac{N}{c} = e^{Kt}$

বা $N = ce^{Kt}$ ...... (2)

মনেকরি $t = 0$ সময়ে জনসংখ্যা ছিল $N = N_0$ [Let at time $t = 0$ the population was $N = N_0$]

এখন (2) নং এ $t = 0$ এবং $N = N_0$ বসাইয়া পাই [Now putting $t = 0$ and $N = N_0$ in (2) we get]

$$N_0 = ce^0 \Rightarrow c = N_0.$$

$\therefore (2) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{Kt}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} N(t) = N_0 \lim_{t\to\infty} e^{Kt} = N_0 e^{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$$

সুতরাং অনন্ত সময় পরে জনসংখ্যা অসীম হইবে।

উদাহরণ–3. কোন স্থানের জীবানুর বৃদ্ধিহার ঐ সময়ে জীবানুর সংখ্যার সহিত সমানুপাতিক। প্রাথমিক অবস্থায় জীবানুর সংখ্যা x এবং একঘন্টা পরে উহার সংখ্যা $\frac{3x}{2}$ হইলে কত সময়ে উহা তিনগুন হইবে? [In a certain bacteria culture the rate of increase in the number of bacteria is proportional to the number present. If initial number of bacteria is x and the number is $\frac{3x}{2}$ after one hour, how long will it take to triple?]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে জীবানুর সংখ্যা y, তাহা হইলে জীবানুর বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$.

[Let at time t, the number of bacteria is y then the rate of increase of bacteria is $\frac{dy}{dt}$]

Since $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ky$ যখন $K > 0$ যেহেতু জীবানু বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt$ ...... (1)

দেওয়া আছে $t = 0$ সময়ে জীবানুর সংখ্যা x এবং $t = 1$ সময়ে জীবানুর সংখ্যা $\frac{3x}{2}$.
[Given that number of bacteria is x at time $t = 0$ and the number is $\frac{3x}{2}$ at time $t = 1$.]

এখন t এবং y এর সীমা লাইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating (1) by taking limits of t and y]

$$\text{i. e. } \int_{x}^{3x/2} \frac{dy}{y} = K \int_{0}^{1} dt$$

$$\text{বা } [\ln y]_{x}^{3x/2} = K[t]_{0}^{1}$$

$$\text{বা } \ln \frac{3x}{2} - \ln x = K(1 - 0)$$

$$\text{বা } \ln\left(\frac{3x/2}{x}\right) = K \Rightarrow K = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cdots\cdots (2)$$

মনেকরি $t = T$ সময়ে জীবানুর সংখ্যা $y = 3x$ হইবে [Let at time $t = T$ the number of bacteria will be $y = 3x$]

আবার t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Again integrating (1) by taking limits of t and y]

$$\int_{x}^{3x} \frac{dy}{y} = K \int_{0}^{T} dt$$

$$\text{বা } [\ln y]_{x}^{3x} = K(T - 0), \text{ বা } \ln 3x - \ln x = KT$$

$$\text{বা } KT = \ln \frac{3x}{x}, \text{ বা } T = \frac{\ln 3}{K},$$

$$\text{বা } T = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)} = 2.71 \text{ ঘন্টা। by (2)}$$

উদাহরণ-4. কোন জীবানু চাষে জীবানুর বৃদ্ধির হার ঐ সময়ের জীবানু সংখ্যার সমানুপাতিক। যদি 3 ঘন্টা পরে উহার সংখ্যা 400 এবং 10 ঘন্টা পরে 2000 হয়, তাহা হইলে প্রাথমিক অবস্থায় উহার সংখ্যা কত ছিল? [In a certain bacteria culture the rate of increase in the number of bacteria is proportional to the number present. If that number is 400 after 3 hour and 2000 after 10 hour, then find the number initially present?]

[NUH(NM)–2006, BSc(Pass)–2011, 2014]

সমাধান ঃ মনেকরি t ঘন্টা পরে জীবানুর সংখ্যা y, তবে জীবানুর বৃদ্ধির হার $= \frac{dy}{dt}$

[Let y be the number of bacteria after t hour, then the rate of increase of bacteria $= \frac{dy}{dt}$]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ky, \text{ যখন } K \text{ ধ্রুবক।}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt \cdots\cdots (1)$$

যখন $t = 3$ তখন $y = 400$ [when $t = 3$ then $y = 400$]

যখন $t = 10$ তখন $y = 2000$ [when $t = 10$ then $y = 2000$]

এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating (1) by taking limits of t and y]

i, e. $\int_{400}^{2000} \frac{dy}{y} = K \int_{3}^{10} dt$

বা $[\ln y]_{400}^{2000} = K\,[t]_3^{10}$

বা $\ln 2000 - \ln 400 = K(10-3)$

বা $7K = \ln \frac{2000}{400}$, বা $7K = \ln 5 \cdots\cdots (2)$

মনেকরি যখন $t = 0$ তখন জীবানুর সংখ্যা $y = x$ এবং যখন $t = 3$ তখন $y = 400$

[Let when $t = 0$ then number of bacteria $y = x$ and when $t = 3$ then $y = 400$]

আবার t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি

$$\int_{x}^{400} \frac{dy}{y} = K \int_{0}^{3} dt$$

বা $[\ln y]_{x}^{400} = K\,[t]_0^{3}$

বা $\ln \frac{400}{x} = 3K$, বা $\frac{400}{x} = e^{3K}$

বা $\frac{x}{400} = e^{-3K}$, বা $x = 400e^{-3K} = 400(e^{7k})^{-3/7}$

বা $x = 400(e^{\ln 5})^{-3/7}$ (2) নং দ্বারা।

বা $x = 400(5)^{-3/7} = \frac{400}{5^{3/7}} = \frac{400}{(5)^{.43}}$;

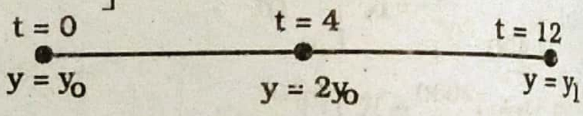
বা $x = \frac{400}{1.997} \approx \frac{400}{2} = 200$

প্রথামিক অবস্থায় জীবানুর সংখ্যা ছিল 200.

উদাহরণ-5. কোন জীবানু চাষে জীবানুর বৃদ্ধিহার ঐ সময়ের জীবানুর সং সমানুপাতিক। 4 ঘন্টায় উহার সংখ্যা দ্বিগুণ হইলে 12 ঘন্টা পর উহার সংখ্যা কত হইবে? 3 ঘন্টা পরে উহার সংখ্যা 10^4 এবং 5 ঘন্টা পরে উহার সংখ্যা 4×10^4 হয়, তাহা হ প্রাথমিক অবস্থায় উহার সংখ্যা কত ছিল? [In a certain bacteria culture, t rate of increase in the number of bacteria is proportional to t number present. If the number double in 4 hour, how many w be present in 12 hour? If the number 10^4 in 3 hour and 4×10^4 ir hour, then find the number initially present?]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ মনেকরি t ঘন্টা পরে জীবানুর সংখ্যা y, তাহা হইলে জীবা বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$. [Let y be the number of bacteria after t hour, then t rate of increase of bacteria is $\frac{dy}{dt}$.]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$



$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ky, \text{ যখন } K > 0 \text{ এবং যেহেতু জীবানু বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt \;\cdots\cdots (1)$$

(1) নং কে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating (1) we get]

$$\ln y = Kt + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{c} = Kt$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = e^{Kt}$$

$$\Rightarrow y = ce^{Kt} \;\cdots\cdots (2)$$

মনেকরি যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$; এখন (2) নং এ $t = 0$ এবং $y = y_0$ বসাইয়া প [Let when $t = 0$ then $y = y_0$; Now putting $t = 0$ and $y = y_0$ in (2) we get

$$y_0 = ce^0 \Rightarrow c = y_0$$

$$\therefore (2) \Rightarrow y = y_0\, e^{Kt} \;\cdots\cdots (3)$$

যখন $t = 4$ তখন $y = 2y_0$, এখন t এবং y এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [When $t = 4$ then $y = 2y_0$; Now putting the values of t and y in (3) we get]

$$2y_0 = y_0\, e^{4K} \Rightarrow e^{4K} = 2 \;\cdots\cdots (4)$$

মনেকরি যখন $t = 12$ তখন জীবানুর সংখ্যা $y = y_1$ [Let when $t = 12$ then th number of bacteria $y = y_1$]

$$\therefore (3) \Rightarrow y_1 = y_0\, e^{12K}$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0\,(e^{4K})^3 = y_0\,(2)^3; \quad \text{(4) নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow y_1 = 8y_0$$

সুতরাং 12 ঘন্টা পর জীবানুর সংখ্যা 8 গুণ হইবে।

দ্বিতীয় অংশ ঃ যখন $t = 3$ তখন $y = 10^4$ [when $t = 3$ then $y = 10^4$]

যখন $t = 5$ তখন $y = 4 \times 10^4$ [when $t = 5$ then $y = 4 \times 10^4$]

এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Integrating (1) by taking the limits of t and y]

$$\int_{10^4}^{4\times10^4} \frac{dy}{y} = K \int_3^5 dt$$

$$\Rightarrow [\ln y]_{10^4}^{4\times10^4} = K[t]_3^5$$

$$\Rightarrow \ln 4 \times 10^4 - \ln 10^4 = K(5-3)$$

$$\Rightarrow 2K = \ln \frac{4 \times 10^4}{10^4} \Rightarrow 2K = \ln 4 = \ln 2^2$$

$$\Rightarrow 2K = 2\ln 2 \Rightarrow K = \ln 2 \cdots\cdots (5)$$

প্রাথমিক অবস্থায় অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন জীবানুর সংখ্যা $y = y_0$ এবং $y_0 = ?$

আবার যখন $t = 3$ তখন $y = 10^4$; এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি

$$\int_{y_0}^{10^4} \frac{dy}{y} = K \int_0^3 dt \quad \text{বা } [\ln y]_{y_4}^{10^4} = K[t]_0^3$$

বা $\ln 10^4 - \ln y_0 = 3K$, বা $\ln \frac{10^4}{y_0} = 3K$

বা $\frac{10^4}{y_0} = e^{3K}$, বা $\frac{y_0}{10^4} = e^{-3K}$

বা $y_0 = 10^4 (e^K)^{-3} = 10^4 (e^{\ln 2})^{-3}$; by (5)

বা $y_0 = 10^4 (2)^{-3} = \frac{100 \times 100}{2^2 \times 2} = 25 \times 50$

$\Rightarrow y_0 = 1250$

প্রাথমিক অবস্থায় জীবানুর সংখ্যা ছিল 1250 [Initially the number of bacteria was 1250.

উদাহরণ–6. তেজস্ক্রিয় কণার একটি প্রদত্ত নমুনায় তেজস্ক্রিয় কণার পরিক্ষয়ের হার উক্ত সময়ে কণা সংখ্যার সমানুপাতিক। 1500 বৎসর পর নমুনাটির তেজস্ক্রিয় কণার পরিমান আদি সংখ্যায় অর্ধেক লোপ পায়। 4500 বৎসর পর তেজস্ক্রিয় কণার শতকরা কত অংশ অবশিষ্ট থাকিবে? কত বৎসর পর কণার সংখ্যা এক দশমাংশ হইবে। [The rate at which radioactive nuclei decay is proportional to the number of such nuclei that are present in a given sample. Half of the original ... disintegration in a

অধ্যায়–9(B)

বিদ্যমান এবং অনন্য সমাধান

Existence and Uniqueness of Solutions

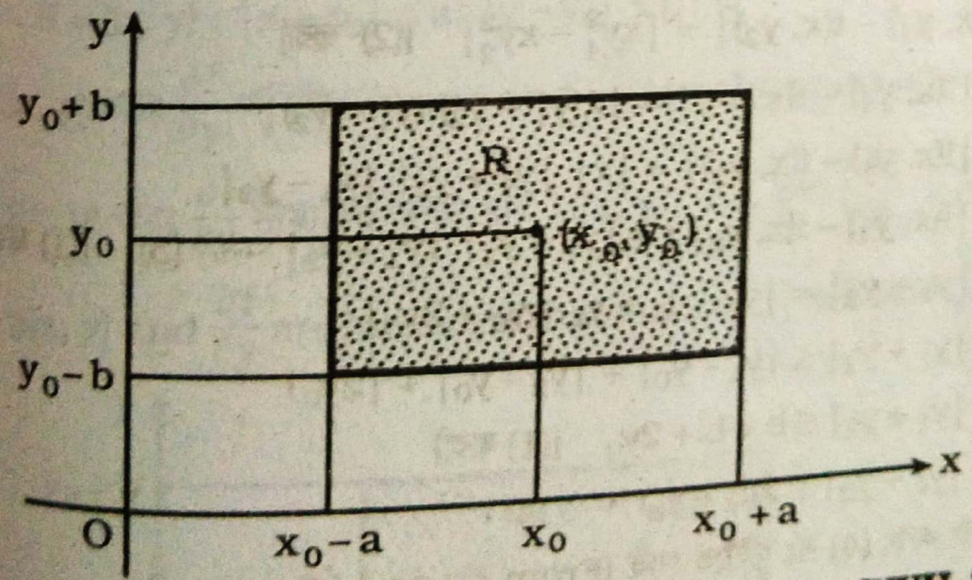
9–B.1. প্রথম ক্রমের অন্তরক সমীকরণ সম্বলিত আদিমান সমস্যা [Initial **value problem involving a first order differential equation]**

$x = x_0$ বিন্দুতে y এর মানকে $y(x_0)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, $y(x_0) = y_0$ কে আদি শর্ত বলা হয়। $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ কে প্রথম ক্রমের অন্তরক সমীকরণ সম্বলিত আদি মান সমস্যা বলা হয়।

[$y(x_0)$ denotes the value of y at $x = x_0$; $y(x_0) = y_0$ is called initial condition. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ is called initial value problem involving a first order differential equation]

9–B.2. যদি xy সমতলে আয়তাকার এলাকা R হয় তবে [If R be the rectangular region in the xy plane then]

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$



9–B.3. লিপচিটয়ের শর্ত [Lipschitz condition] **[NUH–2011]**

$f(x, y)$ ফাংশন xy সমতলে আয়তার এলাকা $R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ এ লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে বলা হয় যদি এমন একটি ধ্রুবক $A > 0$ বিদ্যমান থাকে যেজন্য $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A |y_1 - y_2|$ হয়, যখন $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$. এখানে ... জন্য A কে লিপচিটয়ের ধ্রুবক বলা হয়।

[A function f(x, y) is said to satisfy a Lipschitz condition in rectangular region $R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ in the plane if there exists a constant $A > 0$ such that

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2|$$

where $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$. Here the constant A is called Lipschitz constant for the function f(x, y).

উদাহরণ–1. দেখাও যে আয়ত $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, |y - y_0| \le b\}$ $f(x, y) = xy^2$ ফাংশনটি xy ক্ষেত্রের উপর লিপচিট এর শর্ত সিদ্ধ করে।

[Show that if $f(x, y) = xy^2$, for all (x, y) satisfying Lipschitz condition with respect to the region $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, |y - y_0| \le b\}$ of the xy-plane]. **[NUH-20**

সমাধান ঃ xy সমতলে সীমায়িত এলকায় f(x, y) লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে [f(x, y) is said to satisfy Lipschitz condition in a bounded region the xy plane if]

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2|$ যখন A ধ্রুবক [Where A is constant]

মনেকরি [Let] $R = \{(x, y) : |x| \le a, |y - y_0| \le b\}$ ...... (1) হইল সীমিত এলাকা [be a bounded region] এবং [and]

$$f(x, y) = xy^2 \text{ ...... (2)}$$

$\therefore |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |xy_1^2 - xy_2^2|$ [(2) দ্বারা]

বা $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)|$

বা $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x|\ |y_1 + y_2|\ |y_1 - y_2|$

বা $|f(x, y_1) - f(x, y_2| \le a|y_1 + y_2|\ |y_1 - y_2|$ ...... (3) [(1) দ্বারা]

এখন $|y_1 + y_2| = |y_1 - y_0 + y_2 - y_0 + 2y_0|$

বা $|y_1 + y_2| \le |y_1 - y_0| + |y_2 - y_0| + |2y_0|$

বা $|y_1 + y_2| \le b + b + 2y_0$ [(1) দ্বারা]

বা $|y_1 + y_2| \le 2(b + y_0)$ ...... (4)

(3) নং এবং (4) নং হইতে পাই [From (3) and (4) we get]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le a.2(b + y_0)\ |y_1 - y_2|$$

বা $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le 2a(b + y_0)\ |y_1 - y_2|$

বা $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2|$, যেখানে [where] $A = 2a(b + y_0)$

সুতরাং $f(x, y) = xy^2$ ফাংশনটি লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে [Hence the function $f(x, y) = xy^2$ satisfies Lipschitz condition].

9–B.4. যে সকল শর্তে $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ আদি মান সমস্যার একক সমাধান থাকিবে বর্ণনা কর। [State the conditions for which the initial value problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ will have a unique solution].

[NUH–2011, DUH–1988, 1990, 1992]

সমাধান ঃ প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \cdots\cdots (1)$$

(1) নং আদি মান সমস্যার একক সমাধান বিদ্যমান থাকার শর্তগুলো হইল [The conditions for existence of a unique solution of initial value problem (1) are]

(i). আয়তাকার এলাকা [In rectangular region]

$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$ এ $f(x, y)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং সীমায়িত। অর্থাৎ $|f(x, y)| \le M$ যখন M ধ্রুবক।

[$f(x, y)$ is continuous and bounded, i. e. $|f(x, y)| \le M$ wher M is constant]

(ii). $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2|$ যখন A ধ্রুবক এবং $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$.

অন্যভাবে [Othewise] :

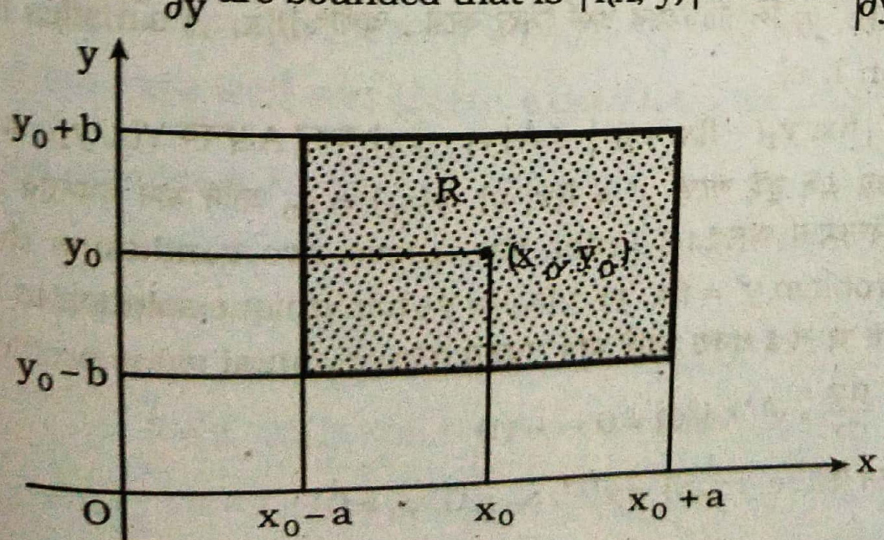
আয়তাকার এলাকা [In rectangular region]

$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b|$ এ

(i). $f(x, y)$ এবং $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ অবিচ্ছিন্ন [$f(x, y)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ are continuous].

(ii). $f(x, y)$ এবং $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ সীমায়িত অর্থাৎ যদি $|f(x, y)| \le L$ এবং $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$.

[$f(x, y)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ are bounded that is $|f(x, y)| \le L$ and $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$].



উদাহরণমালা [EXAMPLES]

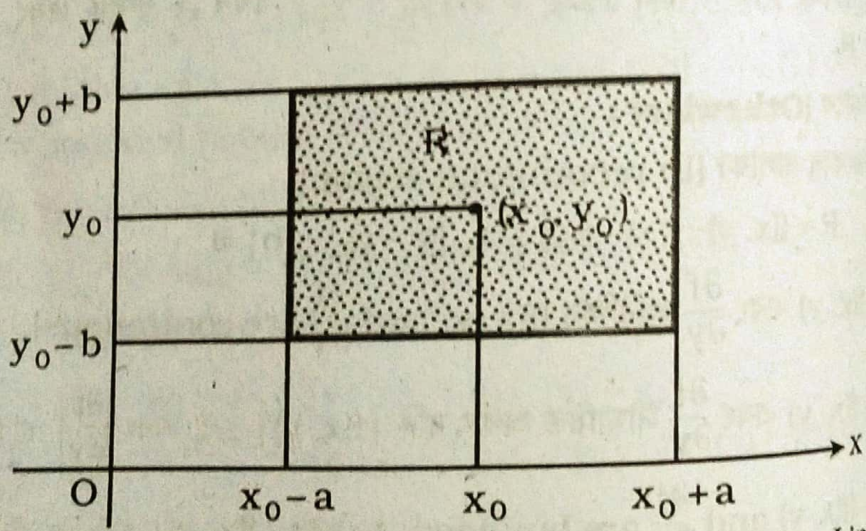
উদাহরণ–1(i). একটি আদিমান সমস্যার অনন্য সমাধান বিদ্যমানের জন্য উপপাদ্যটি বর্ণ কর বং ইহার আলোকে $\frac{dy}{dx} = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ আদিমান সমস্যার সমাধান সম্বে া কর।

[Sta orem for the existence of a unique solution of initial oblem and discuss the solutions of the initial value proble $\frac{dy}{dx} = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ in the light of this theorem].

[NUH–2008, NUH(NM)–2003, DUH–1

বর্ণনা (i). আয়তাকার এলাকা [In rectangular region]

$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b|$ এ $f(x, y)$ অবিচ্ছিন্ন এবং সীমা অর্থাৎ $|f(x, y)| \le M$ যখন M ধ্রুবক [f(x, y) is continuous and bound i. e. $|f(x, y)| \le M$ where M is constant].



(ii). $f(x, y)$ লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে। অর্থাৎ [f(x, y) satisfies Lipsch condition i. e]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2| \text{ যখন A ধ্রুবক } \forall (x, y_1), (x, y_2) \in$$

উপরের এই দুই শর্তে $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ আদি মান সমস্যার R এ অ সমাধান বিদ্যমান আছে। [Under the above two conditions the initial value problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ has unique solution in R].

দ্বিতীয় অংশ ঃ প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3}, \; y(0) = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

এখানে [Here] $f(x, y) = y^{1/3}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

ধরি $a = 1, b = 1$ তবে আয়তাকার এলাকা [we put $a = 1, b = 1$ then the rectangular region be]

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$
$$= \{(x, y) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$$
$$= \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$$

ইহা স্পষ্টতঃ যে R এ $f(x, y) = y^{1/3}$ অবিচ্ছিন্ন [It is evident that $f(x, y) = y^{1/3}$ is continuous in R.]

মনে করি [Let] $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ তবে [then]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|y_1^{1/3} - y_2^{1/3}\right|$$

বা $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \frac{\left|(y_1^{1/3} - y_2^{1/3})\,(y_1^{2/3} + y_1^{1/3}\,y_2^{1/3} + y_2^{2/3})\right|}{\left|y_1^{2/3} + y_1^{1/3}\,y_2^{1/3} + y_2^{2/3}\right|}.$$

বা $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \frac{|y_1 - y_2|}{\left|y_1^{2/3} + y_1^{1/3}y_2^{1/3} + y_2^{2/3}\right|} \quad \text{......}\ (2)$$

যদি R এ $y_1 \to 0,\ y_2 \to 0$ হয় তবে [If $y_1 \to 0,\ y_2 \to 0$ in R then]

$$\frac{1}{\left|y_1^{2/3} + y_1^{1/3}y_2^{1/3} + y_2^{2/3}\right|} \not\leq A$$ যখন A ধ্রুবক [when A is constant]

$$\therefore (2) \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \not\leq A|y_1 - y_2|$$

যেহেতু f(x, y) ফাংশন লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে না কাজেই (1) নং আদি মান সমস্যার একক সমাধান বিদ্যমান নাই। [Since f(x, y) does not satisfy Lipschitz condition, so initial value problem (1) has no unique solution].

উদাহরণ–1(ii). বিদ্যমান অস্তিত্ব ও অনন্য উপপাদ্যটি বর্ণনা কর এবং $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x}}{t}$, $x(1) = 0$ এর জন্য ইহাকে যাচাই কর। [State existence and uniqueness theorem and examine it for $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x}}{t}$, $x(1) = 0$]

[NUH–06, 08, BSc(Pass)–13, 16, DU(AC)–17, 18]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ

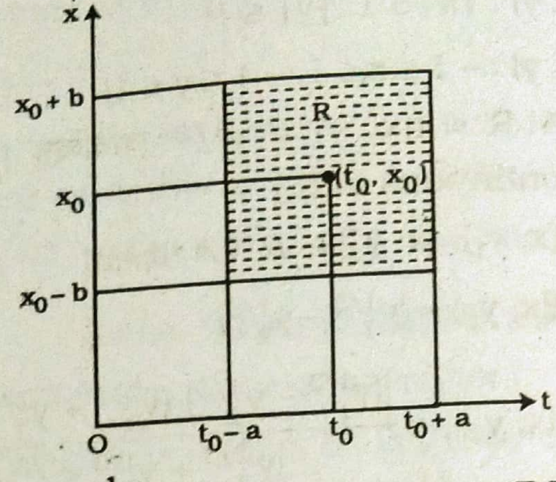
বর্ণনা ঃ যদি আয়তাকার এলাকা [If in rectangular region]

$$R = (t, x) : |t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b\}$$ এ

(i) $f(t, x)$ এবং $\frac{\partial f}{\partial x}$ অবিচ্ছিন্ন [$f(t, x)$ and $\frac{\partial f}{\partial x}$ are continuous]

(ii) $f(t, x)$ এবং $\frac{\partial f}{\partial x}$ সীমায়িত [$f(t, x)$ and $\frac{\partial f}{\partial x}$ are bounded]

i. e. $|f(t, x)| \leq L$ এবং $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M$



তবে R এ আদিমান সমস্যা $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ এর সমাধান বিদ্যমান এ অনন্য হইবে। [then the solution of initial value problem $\frac{dx}{dt} = f(t,$ $x(t_0) = x_0$ exists and is unique in R]

দ্বিতীয় অংশ ঃ প্রদত্ত আদিমান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x}}{t}, \; x(1) = 0 \;\cdots\cdots (1)$$

এখানে [Here] $f(t, x) = \frac{\sqrt{x}}{t}$, $x_0 = 0$, $t_0 = 1$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2t\sqrt{x}}.$$

ধরি $a = 1$, $b = 1$ তবে আয়তাকার এলাকা [We put $a = 1$, $b = 1$ then t rectangular region be]

$$\begin{aligned} R &= \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \; |x - x_0| \leq b\} \\ &= \{(t, x) : |t - 1| \leq 1, \; |x - 0| \leq 1\} \\ &= \{(t, x) : -1 \leq t - 1 \leq 1, \; -1 \leq x \leq 1\} \\ &= \{(t, x) : 0 \leq t \leq 2, \; -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

ইহা স্পষ্টতঃ যে R এ $f(t, x)$ এবং $\frac{\partial f}{\partial x}$ অবিচ্ছিন্ন নয়। সুতরাং (1) নং আদিমান সম অনন্য সমাধান নাই। [It is evident that $f(t, x)$ and $\frac{\partial f}{\partial x}$ are not continuo in R. Hence the initial value problem (1) has no unique soluti in R.]

উদাহরণ–1(iii). দেখাও যে আদিমান সমস্যা $y' = y^2$, $y(0) = 1$ এর অনন্য সমাধান বিদ্যমান এবং ব্যবধিসহ সমাধান কর। [Show that there exist uniqueness solution of the initial value problem $y' = y^2$, $y(0) = 1$ and solve it with interval.]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ প্রদত্ত আদিমান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \; y(0) = 1 \;\cdots\cdots (1)$$

এখানে [Here] $f(x, y) = y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

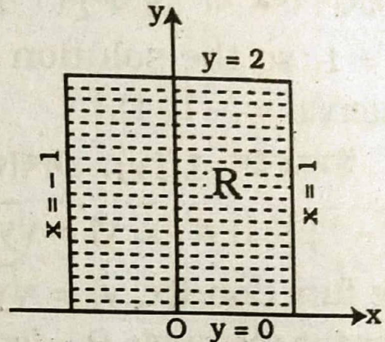
ধরি $a = 1$, $b = 1$ তবে আয়তাকার এলাকা [We put $a = 1$, $b = 1$ then the rectangular region is]

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, \; |y - y_0| \le b\}$$

$$= \{(x, y) : |x - 0| \le 1, \; |y - 1| \le 1\}$$

$$= \{(x, y) : -1 \le x \le 1, \; -1 \le y - 1 \le 1\}$$

$$= \{(x, y) : -1 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 2\}$$



ইহা স্পষ্টতঃ যে R এ $f(x, y) = y^2$ অবিচ্ছিন্ন। [If is evident that $f(x, y) = y^2$ is continuous in R.]

মনেকরি [Let] $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ তবে [then]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)|$$

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 + y_2| \; |y_1 - y_2| \le |2 + 2| \; |y_1 - y_2|;$$

যেহেতু $0 \le y \le 2$.

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le 4|y_1 - y_2|$$

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2|,$$ যেখানে [where] $A = 4$.

সুতরাং $f(x, y) = y^2$ ফাংশনটি লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে। [Hence the function $f(x, y) = y^2$ satisfies Lipschitz condition.]

যেহেতু $f(x, y) = y^2$ অবিচ্ছিন্ন এবং লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে, কাজেই (1) নং আদিমান সমস্যার R এ অনন্য সমাধান বিদ্যমান। [Since $f(x, y) = y^2$ is continuous and satisfies Lipschitz condition, so the initial value problem (1) has unique solution in R.]

দ্বিতীয় অংশ ঃ প্রদত্ত আদিমান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \; y(0) = 1 \;\cdots\cdots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx$$

ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating we get] : $-\frac{1}{y} = x + c$ ...... (2)

এখন (2) নং এ y(0) = 1 আদিশর্ত প্রয়োগ করিয়া পাই, অর্থাৎ (2) নং এ x = 0, y = 1 বসাইয়া পাই [Applying initial condition y(0) = 1 in (2) i, e. putting x = 0, y = 1 in (2) we get]

$$-1 = 0 + c \Rightarrow c = -1.$$

$$\therefore (2) \Rightarrow -\frac{1}{y} = x - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x}$$

তৃতীয় অংশ ঃ যেহেতু x = 1 এ y অসংজ্ঞায়িত, কাজেই $-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে সমাধান বৈধ বা সুযুক্তিপূর্ণ। সুতরাং ব্যবধি [– 1, 1). [Since y is undefined at x = 1, so the solution is valid in the interval $-1 \le x < 1$. Hence interval = [– 1, 1).]

উদাহরণ–1(iv). দেখাও যে আয়তাকার এলাকা $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, |y-1| \le 1\}$ এ $f(x, y) = \sqrt{y}$ ফাংশনটি লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে না। [Show that the function $f(x, y) = \sqrt{y}$ does not satisfy the Lipschitz condition over the rectangle $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, |y-1| \le 1\}$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন [Given function is]

$$f(x, y) = \sqrt{y} \text{ ......} (1)$$

এখানে [Here] $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, -1 \le y - 1 \le 1\}$

$$= \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le 2\}$$

মনেকরি [Let] $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ তবে [then],

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_1})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}\right|$$

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}\right| = \frac{|y_1 - y_2|}{|\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}|} \text{ ...... (2)}$$

যদি R এ $y_1 \to 0, y_2 \to 0$ হয় তবে [If $y_1 \to 0, y_2 \to 0$ in R then]

$$\frac{1}{|\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}|} \ne A$$ যখন A ধ্রুবক। [When A is constant].

$$\therefore (2) \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \ne A|y_1 - y_2|.$$

সুতরাং $f(x, y) = \sqrt{y}$ ফাংশন লিপচিটয়ের শর্ত সিদ্ধ করে না।

[Hence the function $f(x, y) = \sqrt{y}$ does not satisfy the Lipschitz condition.]

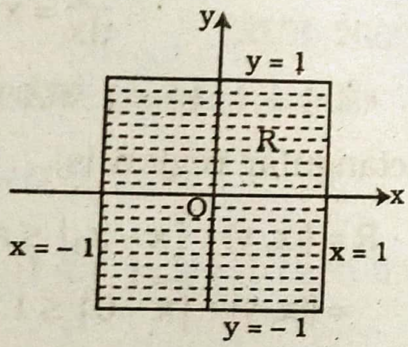
উদাহরণ–1(v). দেখাও যে $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$ আদিমান সমস্যার যেকোন আয়তাকার এলাকায় অনন্য সমাধান বিদ্যমান নাই এবং ইহার দুইটি বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর। [Show that there does not exist uniqueness solution of the initial value problem $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$ over any rectangle and find two particular solutions of it.]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ প্রদত্ত আদিমান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3},\ y(0) = 0,\ \text{এখানে } x_0 = 0,\ y_0 = 0.$$

ধরি $a = 1$, $b = 1$ তবে আয়তাকার এলাকা [We put $a = 1$, $b = 1$ then rectangular region is]

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$
$$= \{(x, y) : |x - 0| \le 1,\ |y - 0| \le 1\}$$
$$= \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$$



এখানে [Here] $f(x, y) = y^{2/3}$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{3y^{1/3}}$$

যেহেতু আয়তাকার এলাকা R এ (0, 0) বিন্দুতে $f(x, y) = y^{2/3}$ অবিচ্ছিন্ন হইলেও $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3y^{1/3}}$ অবিচ্ছিন্ন নয়, কাজেই প্রদত্ত আদিমান সমস্যার অনন্য সমাধান বিদ্যমান নাই। [Since $f(x, y) = y^{2/3}$ is continuous at (0, 0) in R but $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3y^{1/3}}$ is not continuous at (0, 0) in R, so the given initial value problem has no unique solution.]

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমাদের আছে [We have]

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3},\ y(0) = 0$$

বা $y^{-2/3}\, dy = dx$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$\frac{y^{1/3}}{1/3} = x + c \cdots\cdots (1)$$

এখন (1) নং এ $y(0) = 0$ আদিশর্ত প্রয়োগ করিয়া পাই অর্থাৎ (1) নং এ $x = 0$, $y = 0$ স্থাপন করিয়া পাই [Applying initial condition $y(0) = 0$, in (1), i.e. putting $x = 0$, $y = 0$ in (2) we get]

$$3(0) = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore (1) \Rightarrow 3y^{1/3} = x,\ \text{বা } y^{1/3} = \frac{x}{3} \Rightarrow y = \frac{x^3}{27}\ \text{একটি সমাধান।}$$

অধ্যায়–9(A)

আদি মান সমস্যা

Initial Value Problem

9–A.1. আদিশর্ত এবং আদিমান সমস্যা ঃ

যদি স্বাধীন চলকের এক বিন্দুতে অধীন চলকের শর্ত আরোপ করিয়া ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করা হয় তবে

(i). ঐ আরোপিত শর্তের সেটকে আদি শর্ত বলা হয়।

(ii). আদি শর্তসহ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে আদি মান সমস্যা বলা হয়।

গাণিতিকভাবে–

(i). $x = x_0$ বিন্দুতে y এর মানকে $y(x_0)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $y(x_0) = y_0$ কে আদি শর্ত বলা হয়।

(ii). $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ কে প্রথম ক্রমের আদিমান সমস্যা বলা হয়। ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের সাধারন সমাধানে আদি শর্ত প্রয়োগ করিয়া আদিমান সমস্যা সমধান করিতে হয়।

[If by applying the condition of dependent variable in one point of independent variable, to find the particular solution of differential equation then

(i). the given conditions are called initial conditions.

(ii). the differential equation with initial condition is called initial value problem.

Mathematically–

(i). $y(x_0)$ denotes the value of y at $x = x_0$; $y(x_0) = y_0$ is called initial condition.

(ii). $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ is called first order initial value problem. Initial value problems are solved by applying the initial conditions to the general solution of the differential equation.

9–A.2. সীমামান সমস্যা [Boundary value problem]

যদি নিশ্চিত সীমা শর্তসহ আংশিক অন্তরক সমীকরণ প্রদত্ত হয় এবং ইহার নির্ণেয় সমাধান ঐ শর্তগুলি সিদ্ধ করে, তবে এই ধরণের সমস্যাকে সীমা মান সমস্যা বলা হয়।

Partial differential equations are always accompained by certain boundary conditions and it is required to find the solution satisfying the given conditions. Such problems are said to be Boundary value problem.]

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1. নিম্নে উল্লেখিত আদি মান সমস্যাগুলো সমাধান কর। [Sol
following initial value problems]

(i). $2x^3y' = y(y^2+3x^2),\ y(1) = 1$

(ii). $x\,dy - y\,dx - (1-x^2)dx = 0,\ y(1) = 1$

(iii). $y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0,\ x(2) = 1$

সমাধান-(i). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value proble

$$2x^3y' = y(y^2+3x^2) \;\cdots\cdots (1),\quad y(1) = 1 \cdots\cdots (2)$$

$$\text{বা } 2x^3\frac{dy}{dx} = y^3 + 3x^2y$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{y^3+3x^2y}{2x^3}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2x^3} + \frac{3y}{2x}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} - \frac{3y}{2x} = \frac{y^3}{2x^3}$$

$$\text{বা } y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{3y^{-2}}{2x} = \frac{1}{2x^3} \cdots\cdots (3)$$

ধরি $y^{-2} = v$ তবে $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

$$\text{বা } y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$$

[we put $y^{-2} = v$ then $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

or $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx}$]

$$\therefore (3) \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{3v}{2x} = \frac{1}{2x^3}$$

$$\text{বা } \frac{dv}{dx} + \frac{3v}{x} = -\frac{1}{x^3} \cdots\cdots (4)$$

$$\therefore \text{I. F.} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

(4) নং এর উভয় পক্ষকে x^3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both s
(4) by x^3 we get]

$$\frac{d}{dx}[vx^3] = -1$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides w. r. to x we get]

$$vx^3 = -x + A$$

বা $v = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$

বা $y^{-2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$

বা $\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$

বা $\frac{1}{\{y(x)\}^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^3}$ ...... (5)

(5) নং এ x = 1 বসাইয়া পাই [Putting x = 1 in (5) we get]

$$\frac{1}{\{y(1)\}^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{A}{1^3}$$

বা $\frac{1}{1^2} = -1 + A$ [(2) দ্বারা]

বা $A = 2$

এখন A এর মান (5) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the value of A in (5) we get]

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

সমাধান-1(ii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$x\,dy - y\,dx - (1 - x^2)dx = 0 \text{ ...... (1)}$$

$$y(1) = 1 \text{ ...... (2)}$$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sides of (1) by x^2 we get]

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$$

বা $d\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this, we get]

$$\frac{y}{x} - \left(-\frac{1}{x} - x\right) = A.$$

বা $\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = A$

বা $y + 1 + x^2 = Ax$

বা $y(x) = Ax - 1 - x^2$ ...... (3)

(3) নং এ $x = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 1$ in (3) we get]

$$y(1) = A - 1 - 1$$

বা $1 = A - 2$ [(2) দ্বারা]

বা $A = 3$

$\therefore$ (3) $\Rightarrow y(x) = 3x - 1 - x^2$.

সমাধান-1(iii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem]

$$y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0 \;\cdots\cdots\; (1)$$

$$x(2) = 1 \;\cdots\cdots\; (2)$$

$(1) \Rightarrow y\ln y\, dx = (\ln y - x)dy$

বা $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\ln y - x}{y\ln y}$

বা $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y\ln y}$

বা $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x}{y\ln y} = \dfrac{1}{y} \;\cdots\cdots\; (3)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int \frac{dy}{y\ln y}} = e^{\int \frac{d(\ln y)}{\ln y}} = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $\ln y$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (3) by $\ln y$ we get]

$$\frac{d}{dy}(x\ln y) = \frac{\ln y}{y}$$

ইহাকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to y we get]

$$x\ln y = \int \frac{\ln y\, dy}{y} + A$$

বা $x\ln y = \int \ln y\, d(\ln y) + A$

বা $x\ln y = \dfrac{(\ln y)^2}{2} + A \;\cdots\cdots\; (4)$

বা $x = \dfrac{\ln y}{2} + \dfrac{A}{\ln y}$

বা $x(y) = \dfrac{\ln y}{2} + \dfrac{A}{\ln y} \;\cdots\cdots\; (5)$

(5) নং এ $y = 2$ বসাইয়া পাই [Putting $y = 2$ in (5) we get]

$$x(2) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{A}{\ln 2}$$

বা $1 = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{A}{\ln 2}$ [(2) দ্বারা]

বা $1-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{A}{\ln 2}$

বা $\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2=A$

$\therefore (4)\Rightarrow x\ln y=\frac{1}{2}(\ln y)^2+\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2.$

উদাহরণ–2. নিম্নে উল্লেখিত আদি মান সমস্যা গুলো সমাধান কর। [Solve the following initial value problems]

(i) $2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-3y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=\frac{-7}{2}$

(ii) $y''+4y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=2\sqrt{2}$

(iii) $9y''-3y'-2y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=1$

(iv) $y''-2\sqrt{5}\,y'+5y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$

(v) $y''-\sqrt{2}\,y'+y=0,\ y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=0.$

সমাধান-2(i). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-3y=0 \;\cdots\cdots (1)$$

$$y(0)=2,\ y'(0)=\frac{-7}{2} \;\cdots\cdots (2)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y=e^{mx}$ তবে [Let $y=e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$(1)\Rightarrow (2m^2-m-3)e^{mx}=0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $2m^2-m-3=0$ যেহেতু [since] $e^{mx}\neq 0$

বা $2m^2-3m+2m-3=0$

বা $m(2m-3)+1(2m-3)=0$

বা $(2m-3)(m+1)=0$

$\therefore m=\frac{3}{2},-1$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y(x)=c_1e^{3x/2}+c_2e^{-x} \;\cdots\cdots (3)$

$\therefore y'(x)=\frac{3c_1}{2}e^{3x/2}-c_2e^{-x} \;\cdots\cdots (4)$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x=0$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting successively $x=0$ in (3) and (4) we get]

$y(0)=c_1+c_2$

বা $2=c_1+c_2$ [(2) দ্বারা]

বা $c_1=2-c_2 \;\cdots\cdots (5)$

এবং [and] $y'(0) = \frac{3c_1}{2} - c_2$

$$\text{বা } -\frac{7}{2} = \frac{3c_1}{2} - c_2 \quad [(2) \text{ দ্বারা}]$$

$$\text{বা } -\frac{7}{2} = \frac{3}{2}(2 - c_2) - c_2 \quad [(2) \text{ দ্বারা}]$$

$$\text{বা } -\frac{7}{2} = 3 - \frac{3c_2}{2} - c_2$$

$$\text{বা } -\frac{7}{2} - 3 = -\frac{5c_2}{2}$$

$$\text{বা } -\frac{13}{2} = -\frac{5c_2}{2}$$

$$\text{বা } 5c_2 = 13$$

$$\text{বা } c_2 = \frac{13}{5}$$

c_2 এর মান (5) নং এ বসাইয়া পাই [Putting the value of c_2 in (5) we

$$c_1 = 2 - \frac{13}{5}$$

$$\text{বা } c_1 = -\frac{3}{5}$$

এখন c_1 এবং c_2 এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the value c_1 and c_2 in (3) we get]

$$\therefore y(x) = -\frac{3}{5}e^{3x/2} + \frac{13}{5}e^{-x}$$

$$\text{বা } y(x) = \frac{1}{5}[13e^{-x} - 3e^{3x/2}].$$

সমাধান-2(ii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem

$$y'' + 4y = 0 \text{ ...... } (1)$$

$$y(0) = 2, \; y'(0) = 2\sqrt{2} \text{ ...... } (2)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a solution of (1) then]

$$(1) \Rightarrow (m^2 + 4)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 4 = 0$ যেহেতু [Since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } m^2 = -4$$

$$\text{বা } m^2 = 4i^2$$

$$\text{বা } m = \pm 2i$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \;\cdots\cdots\; (3)$$

$$\therefore y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x \;\cdots\cdots\; (4)$$

এখন (3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Now putting $x = 0$ in (3) and (4) successively we get]

$$y(0) = c_1 + 0$$

বা $2 = c_1$ [(2) দ্বারা]

এবং [and] $y'(0) = 0 + 2c_2$

বা $2\sqrt{2} = 2c_2$ [(2) দ্বারা]

$$\therefore c_2 = \sqrt{2}$$

c_1 এবং c_2 এর মান (3) নং বসাইয়া পাই [Putting the values of c_1 and c_2 in (3) we get]

$$y(x) = 2\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x$$

সমাধান-2(iii). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem is]

$$9y'' - 3y' - 2y = 0 \;\cdots\cdots\; (1)$$

এবং $y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \;\cdots\cdots\; (2)$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$(1) \Rightarrow (9m^2 - 3m - 2)e^{mx} = 0$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $9m^2 - 3m - 2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $9m^2 - 6m + 3m - 2 = 0$

বা $3m(3m - 2) + 1(3m - 2) = 0$

বা $(3m + 1)(3m - 2) = 0$

$$\therefore m = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y(x) = c_1 e^{-x/3} + c_2 e^{2x/3} \;\cdots\cdots\; (3)$$

$$\therefore y'(x) = -\frac{c_1}{3} e^{-x/3} + \frac{2c_2}{3} e^{2x/3} \;\cdots\cdots\; (4)$$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (3) and (4) successively we get]

$$y(0) = c_1 + c_2$$

বা $3 = c_1 + c_2$ [(2) দ্বারা]

বা $c_1 = 3 - c_2 \;\cdots\cdots\; (5)$

এবং $y'(0) = \frac{-c_1}{3} + \frac{2c_2}{3}$

বা $1 = \frac{-c_1}{3} + \frac{2c_2}{3}$ [(2) দ্বারা]

বা $3 = -c_1 + 2c_2$

বা $3 = -3 + c_2 + 2c_2$ [(5) দ্বারা]

বা $6 = 3c_2$

বা $c_2 = 2$

$\therefore (5) \Rightarrow c_1 = 3 - 2$

বা $c_1 = 1$

c_1 এবং c_2 এর মান (3) নং বসাইয়া পাই [Putting the values of c_1 and c_2 in (3) we get]

$$y(x) = e^{-x/3} + 2e^{2x/3}.$$

সমাধান-2(iv). প্রদত্ত আদি মান সমস্যা [Given initial value problem]

$$y'' - 2\sqrt{5}\,y' + 5y = 0 \text{ ...... (1)}$$

$$\text{এবং } y(0) = 0,\ y'(0) = 3 \text{ ...... (2)}$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$(1) \Rightarrow (m^2 - 2\sqrt{5}m + 5)e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2\sqrt{5}m + 5 = 0$ যেহেতু [since $e^{mx} \neq 0$]

বা $(m - \sqrt{5})^2 = 0$

বা $m = \sqrt{5}, \sqrt{5}$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{\sqrt{5}x}$$

বা $y(x) = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 x e^{\sqrt{5}x}$ ...... (3)

$\therefore y'(x) = c_1\sqrt{5}\, e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{\sqrt{5}x} + c_2\sqrt{5}\, xe^{\sqrt{5}x}$ ...... (4)

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (3) and (4) successively we get]

$y(0) = c_1 + 0$

বা $0 = c_1$ [(2) দ্বারা]

অধ্যায়–15

অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি

The method of Undetermined Coefficient

15.1. এই অধ্যায়ে অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p নির্ণয় করা হইবে। নিম্নের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি বিবেচনা করি। [In this chapter, particular integral y_p of differential equation will be determined by the method of undetermined coefficient. We consider the following differential equation]

$$(D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \cdots + P_{n-1}D + P_n)y = R(x)$$

বা $F(D)y = R(x)$ ...... (1)

যখন [when] $F(D) = D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \cdots + P_{n-1}D + P_n$

$\therefore$ (1) নং এর সাধারন সমাধান [General solution of (1) is]

$$y = y_c + y_p$$

যখন $y_c =$ সম্পূরক ফাংশন [When y_c = complementary function]

এবং $y_p =$ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [and y_p = Particular integral]

নোট ঃ যেহেতু (1) নং এর একটি সমাধান y_p কাজেই y_p দ্বারা (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ y এর স্থলে y_p স্থাপন করা যায়।

15.2. অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Undetermined Coefficient function]

$F(D)y = R(x)$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের $R(x)$ কে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন বলা হয়। [R(x) of differential equation $F(D)y = R(x)$ is called undetermined coefficient function]

15.3. অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined Coefficient set]

অনির্ণেয় সহগ ফাংশন $R(x)$ এবং $R(x)$ এর পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক গুলো দ্বারা গঠিত সেটকে অনির্ণেয় সহগ সেট বলা হয়। অনির্ণেয় সহগ সেটকে S দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অনির্ণেয় সহগ সেট দ্বারা বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p গঠন করা হয়। [The set consisting of undetermined coefficient function R(x) and constant multiples of successive derivatives of R(x) is called undetermined coefficient set. It is denoted by S. Particular integral y_p is formed by the undetermined coefficient set.]

উদাহরণ–1. মনে করি [Let] $F(D)y = x^3$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetemined coefficient function is]

$$R(x) = x^3$$

$\therefore R'(x) = 3x^2$

$R''(x) = 6x$

$R'''(x) = 6$

x^3 এবং ইহার পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক [x^3 and its successive derivatives are constant multiples]

$$x^3, x^2, x, 1$$

x^3 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^3 is]

$$S = \{x^3, x^2, x, 1\}.$$

অনুরূপভাবে x^2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Similarly undetermined coefficient set of x^2 is]

$$S = \{x^2, x, 1\}$$

এবং x^n এর অনির্ণেয় সহগ সেট [and undetermined coefficient set of x^n is]

$$S = \{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x^2, x, 1\}.$$

উদাহরণ–2. $F(D)y = \sin ax$

এখানে [Here] $R(x) = \sin ax$

$R'(x) = a\cos ax$

$R''(x) = -a^2 \sin ax$

$\therefore$ $\sin ax$ এবং ইহার পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক [sin ax and its successive derivatives are constant multiples]

$$\sin ax, \cos ax$$

$\therefore$ $\sin ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of sin ax is]

$$S = \{\sin ax, \cos ax\}.$$

অনুরূপভাবে $\cos ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Similarly undetermined coefficient set of cos ax is]

$$S = \{\sin ax, \cos ax\}.$$

উদাহরণ–3. $F(D)y = x^2 \cos ax$

এখানে [Here] $R(x) = x^2 \cos ax$

$\therefore R'(x) = -ax^2 \sin ax + 2x \cos ax$

$R''(x) = -a(ax^2 \cos ax + 2x \sin ax) + 2(-ax \sin ax + \cos ax)$

বা $R''(x) = -a^2 x^2 \cos ax - 4ax \sin ax + 2 \cos ax$

$R'''(x) = -a^2(-ax^2 \sin ax + 2x \cos ax) - 4a(ax \cos ax + \sin ax) - 2a \sin$

বা $R'''(x) = a^3x^2 \sin ax - 6a^2 x\cos x - 6a \sin ax$

$\therefore x^2 \cos ax$ এবং ইহার পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক
[$\cos ax$ and its successive derivatives are constant multiples]
$x^2 \cos ax, x^2 \sin ax, x \cos ax, x \sin ax, \cos ax, \sin ax$
$\therefore x^2 \cos ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\cos ax$ is]
$S = \{x^2 \cos ax, x^2 \sin ax, x \cos ax, x \sin ax, \cos ax, \sin ax\}$

নোট : $F(D)y = \sec ax$

যেহেতু $\sec ax$ কে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করিলে ইহার পদের সংখ্যা সীমাহীন-ভাবে বাড়তে থাকে, অর্থাৎ ইহার সংখ্যা অসীম। এইক্ষেত্রে অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি প্রযোজ্য নহে।

15.4. নিম্নে কতক গুলো প্রয়োজনীয় সহগ সেট উল্লেখ করা হইল। শিক্ষার্থীদেরকে এইগুলো স্মরণ রাখার জন্য উপদেশ দেওয়া হইল–

1. x^n এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^n is]
   $S = \{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x^2, x, 1\}$.
2. e^{ax} এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^{ax} is]
   $S = \{e^{ax}\}$.
3. $x^n e^{ax}$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^n e^{ax}$ is]
   $S = \{x^n e^{ax}, x^{n-1} e^{ax}, x^{n-2} e^{ax}, \cdots, xe^{ax}, e^{ax}\}$.
4. $x^n \sin ax$ অথবা $x^n \cos ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^n \sin ax$, or $x^n \cos ax$ is]
   $S = \{x^n \sin ax, x^n \cos ax, x^{n-1} \sin ax, x^{n-1} \cos ax, \cdots, x \sin ax, x \cos ax, \sin ax, \cos ax\}$.
5. $e^{ax} \sin bx$ অথবা $e^{ax} \cos bx$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $e^{ax} \sin bx$ or $e^{ax} \cos bx$ is]
   $S = \{e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx\}$.
6. $x^n e^{ax} \sin bx$ অথবা $x^n e^{ax} \cos bx$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^n e^{ax} \sin bx$ or $x^n e^{ax} \cos bx$ is]
   $S = \{x^n e^{ax} \sin bx, x^n e^{ax} \cos bx, x^{n-1} e^{ax} \sin bx, x^{n-1} e^{ax} \cos bx, \cdots, xe^{ax} \sin bx, xe^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx\}$.

কার্য পদ্ধতি–1. প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $F(D)y = R(x)$ ...... (1)
এখানে $R(x)$ = অনির্ণেয় সহগ ফাংশন।
যদি $R(x)$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট S হয় এবং S এর কোন উপাদান y_c তে না থাকে, তবে S এর উপাদান দ্বারা (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্রাল y_p গঠন করিতে হয়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1(i). অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient] : $(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x$.

[NUH–94, 05, 10, 18, NUH(NM)–06, 09, NU(Pass)–08]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Given differential equation is]

$$(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x \;\cdots\cdots\; (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \;\cdots\cdots\; (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \;\cdots\cdots\; (2)$ then]

$(2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m - 1)(m - 1) = 0$

বা $m = 1, 1$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)e^x$. যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [where c_1, c_2 are arbitrary constants].

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function]

$$R(x) = x \sin x$$

$x \sin x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x \sin x$ is]

$$S = \{x \sin x,\ x \cos x,\ \sin x,\ \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ax \sin x + Bx \cos x + C \sin x + E \cos x \;\cdots\cdots\; (3)$$

$$\therefore y_p' = A \sin x + Ax \cos x + B \cos x - Bx \sin x + C \cos x - E \sin x$$

$$y_p'' = A\cos x + A\cos x - Ax \sin x - B\sin x - B\sin x - Bx \cos x - C \sin x - E \cos x$$

এখন (1) নং এ y, Dy, D^2y এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of y, Dy, D^2y respectively we get]

$$2A \cos x - Ax \sin x - 2B \sin x - Bx \cos x - C \cos x - E \cos x$$
$$- 2A \sin x - 2Ax \cos x - 2B \cos x + 2Bx \sin x - 2C \cos x$$
$$+ 2E \sin x + Ax \sin x + Bx \cos x + C \sin x$$
$$+ E \cos x = x \sin x$$

বা $(2A-2B-2C)\cos x+(-2B-2A+2E)\sin x$

$+ 2Bx\sin x - 2Ax\cos x = x$

উভয় পক্ষ হইতে এক জাতীয় পদ গুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating terms from both sides we get]

$$A=0,\quad 2B=1,\quad \text{বা } B=\frac{1}{2}$$

$$2A-2B-2C=0$$

$$\text{বা } 0-1-2C=0$$

$$\text{বা } C=-\frac{1}{2}.$$

$$-2B-2A+2E=0$$

$$\text{বা } -1-0+2E=0$$

$$\text{বা } E=\frac{1}{2}$$

এখন A, B, C, E এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of A, B, C, E in (3) we get]

$$y_p=0+\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

$$\text{বা } y_p=\frac{1}{2}(1+x)\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y=y_c+y_p$$

$$\text{বা } y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}(1+x)\cos x-\frac{1}{2}\sin x.$$

উদাহরণ–1(ii). অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর [Solve by method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Given differential equation]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$ …… (2) এর সম্ভাব্য সমাধান $y=e^{mx}$ তবে

[Let $y=e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$ …… (2) then]

$$(2)\Rightarrow(m^2-3m+2)e^{mx}=0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 3m + 2 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-1)(m-2) = 0$

বা $m = 1, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [Where c_1, c_2 are arbitrary constants]

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 4x^2$$

x^2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^2 is]

$$S = \{x^2, x, 1\}.$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$y_p = Ax^2 + Bx + C \cdots\cdots (3)$

$\therefore y_p' = 2Ax + B$ এবং [and] $y_p'' = 2A$

এখানে (1) নং এ $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$

বা $2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2C = 4x^2$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$2A = 4,$ বা $A = 2.$

$2B - 6A = 0,$ বা $2B = 6.2,$ বা $B = 6$

এবং $2A - 3B + 2C = 0$

বা $2.2 - 3.6 + 2C = 0$

বা $C = 7$

$\therefore$ এখন A, B, C এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A, B, C in (3) we get]

$y_p = 2x^2 + 6x + 7$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7.$

উদাহরণ–1(iii). অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর [Solve by method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$$

[NUH-2

সমাধান ঃ প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Given differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x \;\cdots\cdots\; (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0 \;\cdots\cdots\; (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0 \;\cdots\cdots\; (2)$ then]

$(2) \Rightarrow (m^2 - 2m)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m(m-2) = 0$

বা $m = 0, 2$

$\therefore y_c = c_1 + c_2 e^{2x}$ যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [when c_1, c_2 are arbitrary constants]

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন $R(x) = e^x \sin x$

$\therefore$ অনির্ণেয় সহগ সেট [$\therefore$ Undetermined coefficient set is]

$$S = \{e^x \sin x,\ e^x \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ae^x \sin x + Be^x \cos x \;\cdots\cdots\; (3)$$

$$\therefore y_p' = A(e^x \sin x + e^x \cos x) + B(e^x \cos x - e^x \sin x)$$

বা $y_p' = (A-B)e^x \sin x + (A+B)e^x \cos x$

$$\therefore y_p'' = (A-B)\,[e^x \sin x + e^x \cos x) + (A+B)\,(e^x \cos x - e^x \sin x)$$

$$= (A - B - A - B)e^x \sin x + (A - B + A + B)e^x \cos x$$

$$= -2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x$$

এখন (1) নং এ $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া

[Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$$-2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x - 2(A-B)e^x \sin x - 2(A+B)e^x \cos x = e^x \sin x$$

বা $(-2B - 2A + 2B)e^x \sin x + (2A - 2A - 2B)e^x \cos x = e^x \sin x$

বা $-2Ae^x \sin x - 2Be^x \cos x = e^x \sin x$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$-2A = 1$, বা $A = -\frac{1}{2}$

এবং $-2B = 0$, বা $B = 0$

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A and B in (3) we get]

$$y_p = -\frac{1}{2} e^x \sin x$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [$\therefore$ General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x.$

উদাহরণ–2(i). অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 6 \sin 2x + 7 \cos 2x$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 6 \sin 2x + 7 \cos 2x \cdots\cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \cdots\cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \cdots\cdots (2)$ then]

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 2m + 5)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 2m + 5 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

$= -1 \pm 2i$

$\therefore y_c = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 6 \sin 2x + 7 \cos 2x$$

$\sin 2x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\sin 2x$ is]

$$S_1 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

$\cos 2x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coeffici... $\cos 2x$ is]

$$S_2 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

যেহেতু S_1, S_2 অভেদ কাজেই একটি সেট নিলেই হইবে [Since S_1... identical so we take one]

$$S_1 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

$\therefore$ (1) এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x \text{ ...... (3)}$$

$$\therefore y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$\therefore y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

এখন (1) নং এ $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন ক...

[Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ respe... we get]

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2(2A \cos 2x - 2B \sin 2x)$$
$$+ 5(A \sin 2x + B \cos 2x) = 6 \sin 2x + 7...$$

বা $(-4A - 4B + 5A)\sin 2x + (-4B + 4A + 5B)\cos 2x = 6\sin 2x + 7...$

বা $(A - 4B)\sin 2x + (4A + B)\cos 2x = 6 \sin 2x + 7 \cos 2x$

উভয় পক্ষ হইতে এক জাতীয় পদ গুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equatin... terms from both sides we get]

$$A - 4B = 6 \text{ ...... (4) এবং } 4A + B = 7 \text{ ...... (5)}$$

$$(4) \Rightarrow A = 4B + 6 \text{ ...... (6)}$$

এখন (5) নং এবং (6) নং হইতে পাই [Now from (5) and (6) we get]

$$4(4B + 6) + B = 7$$

বা $17B = -17$

বা $B = -1$

$\therefore (6) \Rightarrow A = 4(-1) + 6$

বা $A = 2$

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now puttin... values of A and B in (3) we get]

$$y_p = 2\sin 2x - \cos 2x$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 2\sin 2x - \cos 2x.$$

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-2(ii). অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10 \sin x.$$

[NUH-1997, 2007, NUH(NM)-2007, NU(Pass)-2007]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10 \sin x \text{ ...... (1)}$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ ...... (2) এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ ...... (2) then]

$\therefore$ (2) $\Rightarrow (m^2 - 2m - 3)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m - 3 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 - 3m + m - 3 = 0$

বা $m(m - 3) + 1(m - 3) = 0$

বা $(m + 1)(m - 3) = 0 \Rightarrow m = -1, 3$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 2e^x - 10 \sin x$$

e^x এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^x is]

$$S_1 = \{e^x\}$$

sin x এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of sin x is]

$$S_2 = \{\sin x, \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$y_p = Ae^x + B\sin x + C\cos x$ ...... (3)

$\therefore y_p' = Ae^x + B\cos x - C\sin x$

$y_p'' = Ae^x - B\sin x - C\cos x$

এখন (1) নং এ $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$$Ae^x - B\sin x - C\cos x - 2(Ae^x + B\cos x - C\sin x)$$
$$-3(Ae^x + B\sin x + C\cos x) = 2e^x - 10 \sin x$$

বা $(A - 2A - 3A)e^x + (-B + 2C - 3B)\sin x + (-C - 2B - 3C)\cos x$
$= 2e^x - 10 \sin x$

বা $-4Ae^x - (4B - 2C)\sin x - (2B + 4C)\cos x = 2e^x - 10 \sin x$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদ গুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$-4A = 2$, বা $A = -\frac{1}{2}$

$4B - 2C = 10 \cdots\cdots (4)$ এবং $2B + 4C = 0 \cdots\cdots (5)$

এখন [Now] $(4) - (5) \times 2 \Rightarrow 4B - 2C - 4B - 8C = 10$

বা $-10C = 10$

বা $C = -1$

$\therefore (5) \Rightarrow 2B = -4(-1)$, বা $B = 2$

এখন A, B এবং C এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A, B and C in (3) we get]

$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x.$

উদাহরণ–2(iii). অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতিতে সমাধান কর [Solve by the method undetermined coefficient] :

$$(D^2 - 2D - 3)y = 2e^x + 20 \sin x.$$ **[NUH–2012]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 2D - 3)y = 2e^x + 20 \sin x \cdots\cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D - 3)y = 0 \cdots\cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$, তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D - 3)y = 0 \cdots\cdots (2)$ then]

$$(2) \Rightarrow (m^2 - 2m - 3)\, e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m - 3 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

বা $m^2 - 3m + m - 3 = 0$

বা $m(m - 3) + 1(m - 3) = 0$

বা $(m + 1)(m - 3) = 0 \Rightarrow m = -1, 3$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 2e^x + 20 \sin x$$

e^x এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^x is]

$$s_1 = \{e^x\}$$

$\sin x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\sin x$ is]

$$s_2 = \{\sin x, \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ae^x + B \sin x + C \cos x \text{ ...... (3)}$$

$$\therefore y_p' = Ae^x + B \cos x - C \sin x$$

$$y_p'' = Ae^x - B \sin x - C \cos x$$

এখন (1) নং এ y, Dy, D^2y এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of y, Dy, D^2y respectively we get]

$$Ae^x - B \sin x - C \cos x - 2(Ae^x + B \cos x - C \sin x) - 3(Ae^x + B \sin x + C \cos x) = 2e^x + 20 \sin x.$$

বা $(A - 2A - 3A)\, e^x + (-B + 2C - 3B) \sin x + (-C - 2B - 3C) \cos x = 2e^x + 20 \sin x$

বা $-4Ae^x + (2C - 4B) \sin x - (2B + 4C) \cos x = 2e^x + 20 \sin x.$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$$-4A = 2 \Rightarrow A = -1/2.$$

$-4B + 2C = 20$, বা $-2B + C = 10$ ...... (4) এবং $2B + 4C = 0$ ...... (5)

এখন (4) + (5) $\Rightarrow 5C = 10$ বা $C = 2$

(5) $\Rightarrow 2B + 4(2) = 0$, বা $B = -4$

এখন A, B, C এর মান (3) নং এ বসাই [Now putting the values of A, B, C in (3)]

$$y_p = -\frac{1}{2} e^x - 4 \sin x + 2 \cos x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^x - 4 \sin x + 2 \cos x.$$