অধ্যায়–12

ডেল, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল

DEL, GRADIENT, DIVERGENCE AND CURL

12.0. শিখনফল :

- স্কেলার ও ভেক্টর ফিল্ড ব্যাখ্যা করিতে পারিবে।
- ভেক্টর অপারেটর, স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট, ভেক্টর ফাংশনের ডাইভার জেন্স ও কার্ল এবং ইহাদের ধর্মাবলি বর্ণনা ও প্রয়োগ করিতে পারিবে।
- স্কেলার ফিল্ডে গ্রেডিয়েন্ট এর তাৎপর্য এবং ভেক্টর ফিল্ডে ডাইভার জেন্স ও কার্ল এর তাৎপর্য ব্যাখ্যা করিতে পারিবে।
- দিক অন্তরক এবং ইহার গরিষ্ঠমান নির্ণয় করিতে পারিবে।
- বক্রতলের স্পর্শক সমতল ও অভিলম্ব নির্ণয় করিতে পারিবে।
- দুইটি বক্রতলের অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় করিতে পারিবে।
- সলিনয়ডাল ভেক্টর, ঘূর্ণনশীল ও অঘূর্ণনশীল ভেক্টর,সোর্স ও সিঙ্ক ফিল্ড এবং ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর ও সমীকরণ বর্ণনা ও প্রয়োগ করিতে পারিবে।
- নিচের সূত্রগুলি প্রতিপাদন ও প্রয়োগ করিতে পারিবে :

(i) $\underline{\nabla}(\phi_1 \pm \phi_2) = \underline{\nabla}\phi_1 \pm \underline{\nabla}\phi_2$

(ii) $\underline{\nabla}(\phi_1 \phi_2) = \phi_1\underline{\nabla}\phi_2 + \phi_2\underline{\nabla}\phi_1$

(iii) $\underline{\nabla}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right) = \frac{\phi_2\,\underline{\nabla}\phi_1 - \phi_1\underline{\nabla}\phi_2}{(\phi_2)^2}$

(iv) $\underline{\nabla}\cdot(\underline{A} \pm \underline{B}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{A} \pm \underline{\nabla}.\underline{B}$

(v) $\underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{A}) = (\underline{\nabla}\phi)\cdot\underline{A} + \phi(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})$

(vi) $\underline{\nabla}\times(\underline{A} \pm \underline{B}) = \underline{\nabla}\times\underline{A} \pm \underline{\nabla}\times\underline{B}$

(vii) $\underline{\nabla}\times(\phi\underline{A}) = (\underline{\nabla}\phi)\times\underline{A} + \phi\,(\underline{\nabla}\times\underline{A})$

(viii) $\text{Curl}(\text{grad}\ \phi) = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi = \underline{O}$

(ix) $\text{div}(\text{curl}\ \underline{A}) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = O$

(x) $\text{div}(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{B}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) - \underline{A}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{B})$

(xi) $\underline{\nabla}(\underline{A}\cdot\underline{B}) = (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{A} + (\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\underline{B} + \underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) + \underline{A}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B})$

(xii) $\underline{\nabla}\times(\underline{A}\times\underline{B}) = A(\underline{\nabla}\cdot\underline{B}) - (\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\underline{B} + (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{A} - \underline{B}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})$

(xiii) $\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}^2\underline{A}$

(xiv) $\phi(x,y,z) = c$ বক্রতলের (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শক সমতলের সমীকরণ, $(\underline{r} - \underline{r}_o)\cdot(\underline{\nabla}\phi)_{\underline{r}o} = 0$ যেখানে $\underline{r} = (x, y, z)$ এবং $\underline{r}_o = (x_1, y_1, z_1)$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ $(\underline{r} - \underline{r}_o)\times(\underline{\nabla}\phi)_{\underline{r}o} = \underline{0}$

(xv) $\phi(x, y, z) = c_1$ এবং $\psi(x,y,z) = c_2$ বক্রতলের অন্তঃস্থ কোণ

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\nabla\phi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}\right).$$

12.1. স্কেলার ফিল্ড [Scalar field] : শূন্যে কোনো রিজিওনের প্রত্যেক (x, y, z) বিন্দুতে যদি সংজ্ঞায়িত স্কেলার ফাংশন $\phi(x, y, z)$ পাওয়া যায়, তবে $\phi(x, y, z)$ স্কেলার ফিল্ড প্রকাশ করে। [If $\phi(x, y, z)$ is a scalar function which is defined at each point (x, y, z) of a region in space, then $\phi(x, y, z)$ represent a scalar field.]

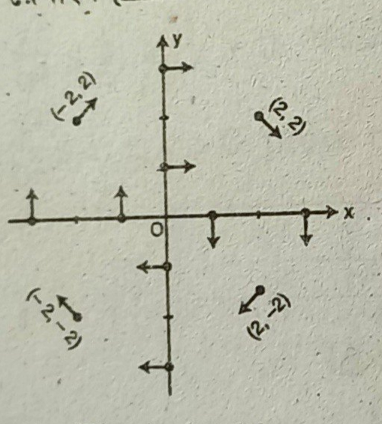
যেমন, $\phi(x, y, z) = xy - z^2$ একটি স্কেলার ফিল্ড সূচিত করে।

12.2. ভেক্টর ফিল্ড [Vector field] : শূন্যে কোনো রিজিওনের প্রত্যেক (x, y, z) বিন্দুতে যদি সংজ্ঞায়িত ভেক্টর মান ফাংশন $\mathbf{F}(x, y, z)$ পাওয়া যায়, তবে $\mathbf{F}(x, y, z)$ ভেক্টর ফিল্ড প্রকাশ করে। [If $\mathbf{F}(x, y, z)$ is a vector valued function which is defined at each point (x, y, z) of a region in space then $\mathbf{F}(x, y, z)$ represents a vector field.]

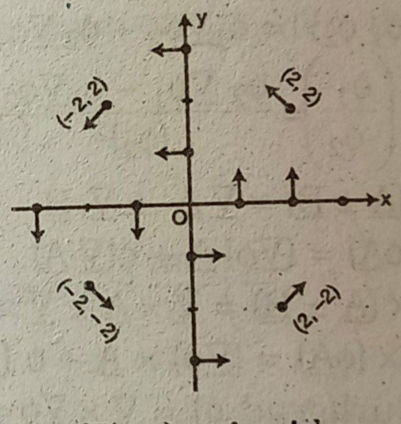
যেমন, $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}x^2y + \mathbf{j}yz^2 + \mathbf{k}xyz$ একটি ভেক্টর ফিল্ড সূচিত করে।

12.3. লেখচিত্ররূপে ভেক্টর ফিল্ডের প্রকাশ [Graphical representations of vector fields] : ভেক্টর ফিল্ডের প্রত্যেক বিন্দুতে রেখাংশ (Line element) অংকন করে উহাকে লৈখিকভাবে উপস্থাপন করা হয়।

নিম্নে $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}y - \mathbf{j}x$ এবং $\mathbf{F}(x, y) = -\mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ ভেক্টর ফিল্ডের (1, 0), (0, 1), (– 1, 0), (0, – 1), (3, 0), (2, 2), (0, 3), (–2, 2), (– 3, 0), (– 2, – 2), (0, – 3), (2, – 2) বিন্দুতে রেখাংশ (line element) দিকসহ অংকন করা হইল ঃ

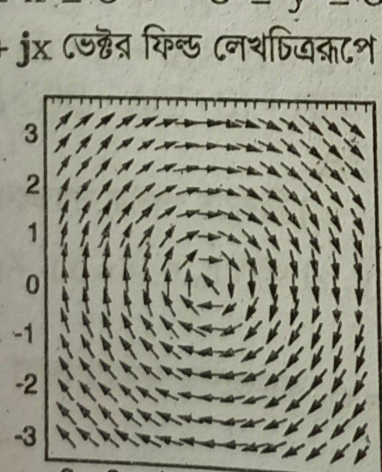


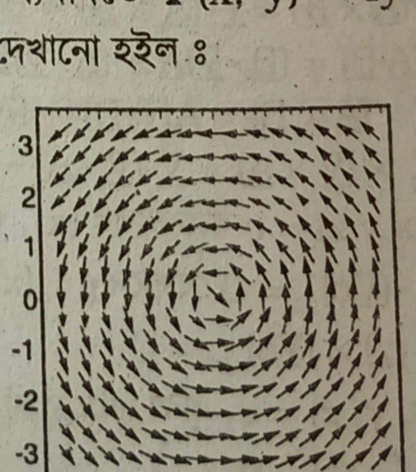
[$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}y - \mathbf{j}x$]



[$\mathbf{F}(x, y) = -\mathbf{i}y + \mathbf{j}x$]

নিম্নে $-3 \le x \le 3$ ও $-3 \le y \le 3$ ব্যবধিতে $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}y - \mathbf{j}x$ এবং $\mathbf{F}(x, y) = -\mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ ভেক্টর ফিল্ড লেখচিত্ররূপে দেখানো হইল ঃ





12.4. ভেক্টর অপারেটর ∇ [Vector operator ∇] : অপারেটর ∇ কে ডেল (del) বলে। ইহাকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \sum \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\equiv \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

∇ কে ন্যাবলা **(nabla)** বা অ্যাটলেড **(atled)** বলে। ইহা একত্রে ভেক্টর ও ডিফারেন্টসিয়াল এই দুই অপারেটর হিসাবেই কাজ করে।

N. B. Δ কে ডেল্টা **(delta)** বলে। ডেল্টার উল্টা হইল ডেল (∇).

12.5. স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট বা গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর [Gradient of scalar function or gradient vectors] :

[NUH–2004, NUH(NM)–2005, 2010, CUH–2011]

যদি কোনো রিজিওন এর প্রত্যেক বিন্দুতে স্কেলার ফাংশন $\phi(x, y, z)$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণ যোগ্য হয়, তবে ϕ এর gradient কে grad ϕ অথবা $\nabla\phi$ লিখা হয় এবং ইহাকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় [Let $\phi(x, y, z)$ be a differentiable scalar function at all point in a region then the gradient of ϕ, written grad ϕ or $\nabla\phi$ is defined by]

$$\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

$\nabla\phi$ একটি ভেক্টর ফাংশন বা ভেক্টর ফিল্ড।

$\nabla\phi$ এর অন্য আকার ঃ

(i) $\nabla\phi = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} = \sum \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi$

(ii) $\nabla\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\phi$

12.6. ভেক্টর ফাংশনের ডাইভারজেন্স [Divergence of vector function] : [NUH–2004, 2007, 2010, NUH(NM)–2005, CUH–2011]

যদি কোনো রিজিওন এর প্রত্যেক বিন্দুতে ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণ যোগ্য হয়, তবে $\mathbf{V} = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ এর divergence কে (সংক্ষেপে) div $\mathbf{V}$ অথবা $\nabla\cdot\mathbf{V}$ লিখা হয় এবং ইহাকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় [Let $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ be differentiable vector valued function at all points in a region, then divergence of $\mathbf{V}$ is denoted by div $\mathbf{V}$ or $\nabla\cdot\mathbf{V}$ is defined by]

$$\text{div}\,\mathbf{V} = \nabla\cdot\mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

$\nabla\cdot\mathbf{V}$ একটি স্কেলার রাশি এবং V_1, V_2, V_3 ফাংশনগুলি x, y এবং z এর স্কেলার ফাংশন।

$\nabla\cdot\mathbf{V}$ এর অন্য আকার ঃ

(i) $\nabla\cdot\mathbf{V} = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$.

(ii) $\nabla\cdot\mathbf{V} = \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\sum V_1\,\mathbf{i}\right)$

(iii) $\nabla\cdot\mathbf{V} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[V_1, V_2, V_3]$

12.7. ভেক্টর ফাংশনের কার্ল [Curl of vector function] :

[NUH–2004, 2007, NUH(NM)–2005, 2010, CUH–2011 DUH(Affi. Coll.)–2017]

যদি কোন রিজিওন (Region) এর প্রত্যেক বিন্দুতে ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে $\mathbf{V} = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ এর curl কে curl $\mathbf{V}$ অথবা $\nabla\times\mathbf{V}$ লিখা হয় এবং ইহাকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় [$\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ be differentiable vector valued function at all points in a region, then curl of $\mathbf{V}$ is denoted by curl $\mathbf{V}$ or $\nabla\times\mathbf{V}$ is defined by]

$$\text{curl}\,\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

$\nabla\times\mathbf{V}$ একটি ভেক্টর ফাংশন বা ভেক্টর ফিল্ড এবং V_1, V_2, V_3 ফাংশনগুলি x, y এবং z এর স্কেলার ফাংশন।

curl $\mathbf{V}$ কে অনেক সময় rot $\mathbf{V}$ ও লিখা হয় যেখানে rot $\mathbf{V}$ বলিতে $\mathbf{V}$ এর rotation (ঘূর্ণন) কে বুঝানো হইয়াছে।

$\nabla\times\mathbf{V}$ এর অন্য আকার ঃ

(i) $$\nabla\times\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_1 & V_2 & V_3\end{vmatrix}$$

(ii) $$\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}=\sum\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}$$

(iii) $$\nabla\times\mathbf{V}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\times[V_1, V_2, V_3]$$

12.8. গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল এর গুণাবলী [Properties of gradient, divergence and curl] :

(i) স্কেলার ফাংশনের যোগ ও বিয়োগের Gradient ঃ

উপপাদ্য–1. দেখাও যে $\nabla(\phi_1\pm\phi_2)=\nabla\phi_1\pm\nabla\phi_2$.

যেখানে $\phi_1(x, y, z)$ এবং $\phi_2(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে, $$\nabla(\phi_1\pm\phi_2)=\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1\pm\phi_2)$$
$$=\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\pm\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$$
$$=\nabla\phi_1\pm\nabla\phi_2.$$

(ii) স্কেলার ফাংশনের গুণনের Gradient ঃ

উপপাদ্য–2. দেখাও যে $\nabla(\phi_1\phi_2)=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1$

যেখানে $\phi_1(x, y, z)$ এবং $\phi_2(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $$\nabla(\phi_1\phi_2)=\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1\phi_2)$$
$$=\sum\mathbf{i}\left(\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)$$
$$=\phi_1\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+\phi_2\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}.$$
$$=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1.$$

(iii) স্কেলার ফাংশনের ভাগের Gradient ঃ

উপপাদ্য–3. দেখাও যে $\nabla\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)=\frac{\phi_2\nabla\phi_1-\phi_1\nabla\phi_2}{(\phi_2)^2}$ যেখানে $\phi_1(x, y, z)$ এবং $\phi_2(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার ফাংশন এবং $\phi_2\neq 0$.

প্রমাণ ঃ $\nabla\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)=\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$

$$=\sum \mathbf{i}\left\{\frac{\phi_2\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x}-\phi_1\dfrac{\partial \phi_2}{\partial x}}{(\phi_2)^2}\right\}$$

$$=\frac{\phi_2\sum \mathbf{i}\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x}-\phi_1\sum \mathbf{i}\dfrac{\partial \phi_2}{\partial x}}{(\phi_2)^2}$$

$$=\frac{\phi_2\,\nabla\phi_1-\phi_1\,\nabla\phi_2}{(\phi_2)^2}$$

(iv) ভেক্টর ফাংশনের যোগ ও বিয়োগের Divergence ঃ

উপপাদ্য–4. দেখাও যে $\nabla\cdot(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}\pm\nabla\cdot\mathbf{B}$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla\cdot(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})$

$$=\sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\pm\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$=\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\pm\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$$

$$=\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{A}\pm\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{B}$$

$$=\nabla\cdot\mathbf{A}\pm\nabla\cdot\mathbf{B}.$$

(v) স্কেলার গুণনের Divergence ঃ

উপপাদ্য–5. দেখাও যে $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A})=(\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}+\phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$, যেখানে $\phi(x, y, z)$ এবং $\mathbf{A}(x, y, z)$ যথাক্রমে অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার এবং ভেক্টর ফাংশন।

[NUH–2015, NUH(NM)–2009, 2015, CUH–2006]

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A})=\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\phi\mathbf{A})$

$$=\sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{A}+\phi\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$=\left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathbf{A}+\phi\left(\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$=(\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}+\phi(\nabla\cdot\mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$

$$\therefore \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}\phi A_1 + \mathbf{j}\phi A_2 + \mathbf{k}\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3)$$

$$+ \phi\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3)$$

$$= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

(vi) ভেক্টর ফাংশন যোগ এবং বিয়োগের Curl ঃ

উপপাদ্য–6. দেখাও যে $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \pm \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \pm \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}.$$

(vii) স্কেলার গুণনের Curl ঃ

উপপাদ্য–7. দেখাও যে $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$,

[NUH–1995, 1998]

যেখানে $\phi(x, y, z)$ এবং $\mathbf{A}(x, y, z)$ যথাক্রমে অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার এবং ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\phi\mathbf{A})$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{A} + \phi\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \times \mathbf{A} + \phi\left(\sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$

$$\therefore \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{i}\phi A_1 + \mathbf{j}\phi A_2 + \mathbf{k}\phi A_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)\right\}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_2 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_3 - \phi\frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_1 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_2\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}A_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_3\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_1\right) + \phi\left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} + \phi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A}).$$

(viii) Gradient এর Curl ঃ

উপপাদ্য–৪. দেখাও যে curl grad $\phi = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}$

যেখানে $\phi(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার ফাংশন।

প্রমাণ ঃ curl grad $\phi = \nabla \times \nabla \phi$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \sum \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right\}\mathbf{i}$$

$$= \sum\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

যেহেতু $\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}$.

(ix) Curl এর Divergence ঃ

উপপাদ্য–9. দেখাও যে div curl $\mathbf{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

[NUH–04, 10, 15, 18, NUH(NM)–04, 06(Old), 10, 15]

প্রমাণ ঃ ধরি $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$. তাহা হইলে

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \sum\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}$$

সুতরাং $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \left(\sum\mathbf{i}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\sum\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}$

$$= \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)$$

$$= \sum\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}$$

$$= 0$$

যেহেতু $\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}, \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}$.

(x) ভেক্টর গুণনের Divergence ঃ

উপপাদ্য–10. দেখাও যে div $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$= \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}).$$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

[NUH–2001, 2005, 2010, NUH(NM)–2005]

প্রমাণ ঃ $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \sum\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$= \sum\mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \times \mathbf{B}\right) + \sum \mathbf{i} \cdot \left(\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{B} - \sum \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \times \mathbf{A}\right)$$

$$= \left(\sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{B} - \left(\sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{A}$$

$$= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি, $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ এবং $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$

$$\therefore \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{j}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{k}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

$$\therefore \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(A_2B_3 - A_3B_2) + \frac{\partial}{\partial y}(A_3B_1 - A_1B_3) + \frac{\partial}{\partial z}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$= B_3 \frac{\partial A_2}{\partial x} + A_2 \frac{\partial B_3}{\partial x} - B_2 \frac{\partial A_3}{\partial x} - A_3 \frac{\partial B_2}{\partial x} + B_1 \frac{\partial A_3}{\partial y} + A_3 \frac{\partial B_1}{\partial y}$$
$$- B_3 \frac{\partial A_1}{\partial y} - A_1 \frac{\partial B_3}{\partial y} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial z} + A_1 \frac{\partial B_2}{\partial z} - B_1 \frac{\partial A_2}{\partial z} - A_2 \frac{\partial B_1}{\partial z}$$

$$= B_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + B_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + B_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$
$$- A_1 \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) - A_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right) - A_3 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{B} \cdot \left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$
$$- \mathbf{A} \cdot \left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \mathbf{B} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

(xi) ভেক্টর ফাংশনের স্কেলার গুণনের Gradient ঃ

উপপাদ্য–11. দেখাও যে

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\,\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \sum \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{i}$

$$= \sum\left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \sum\left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$

$$= \sum\left\{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} - \mathbf{A}\times\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\times\mathbf{i}\right)\right\} + \sum\left\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \mathbf{B}\times\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{i}\right)\right\}$$

[$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ সূত্র ব্যবহার করিয়া]

$$= \left(\mathbf{A}\cdot\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\left(\sum\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\mathbf{B}\cdot\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{A} + \mathbf{B}\times\left(\sum\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ এবং $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$

$$\therefore \mathbf{A}\cdot\nabla = A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3)$$

$$= \mathbf{i}A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + \mathbf{j}A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + \mathbf{k}_1A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} + \mathbf{i}A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + \mathbf{j}A_2\frac{\partial B_2}{\partial y}$$

$$+ \mathbf{k}A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + \mathbf{i}A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} + \mathbf{j}A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} + \mathbf{k}A_3\frac{\partial B_3}{\partial z} \;\ldots\ldots\; (1)$$

(1) এ **A** ও **B** বিনিময় করিয়া পাই,

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} = \mathbf{i}B_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + \mathbf{j}B_1\frac{\partial A_2}{\partial x} + \mathbf{k}B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} + \mathbf{i}B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + \mathbf{j}B_2\frac{\partial A_2}{\partial y}$$

$$+ \mathbf{k}B_2\frac{\partial A_3}{\partial y} + \mathbf{i}B_3\frac{\partial A_1}{\partial z} + \mathbf{j}B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} + \mathbf{k}B_3\frac{\partial A_3}{\partial z} \;\ldots\ldots\; (2)$$

আবার, $\nabla\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} & \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} & \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}A_2\frac{\partial B_2}{\partial x} - \mathbf{i}A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - \mathbf{i}A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} + \mathbf{i}A_3\frac{\partial B_3}{\partial x} + \mathbf{j}A_3\frac{\partial B_3}{\partial y}$$
$$- \mathbf{j}A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - \mathbf{j}A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + \mathbf{j}A_1\frac{\partial B_1}{\partial y} + \mathbf{k}A_1\frac{\partial B_1}{\partial z}$$
$$- \mathbf{k}A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} - \mathbf{k}A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + \mathbf{k}A_2\frac{\partial B_2}{\partial z} \quad \cdots\cdots (3)$$

(3) এ **A** ও **B** বিনিময় করিয়া পাই,

$$\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{i}B_2\frac{\partial A_2}{\partial x} - \mathbf{i}B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} - \mathbf{i}B_3\frac{\partial A_1}{\partial z} + \mathbf{i}B_3\frac{\partial A_3}{\partial x} + \mathbf{j}B_3\frac{\partial A_3}{\partial y}$$
$$- \mathbf{j}B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} - \mathbf{j}B_1\frac{\partial A_2}{\partial x} + \mathbf{j}B_1\frac{\partial A_1}{\partial y} + \mathbf{k}B_1\frac{\partial A_1}{\partial z} - \mathbf{k}B_1\frac{\partial A_3}{\partial x}$$
$$- \mathbf{k}B_2\frac{\partial A_3}{\partial y} + \mathbf{k}B_2\frac{\partial A_2}{\partial z} \quad \cdots\cdots (4)$$

(1), (2), (3) এবং (4) যোগ করি,

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$= \mathbf{i}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_2}{\partial x} + B_2\frac{\partial A_2}{\partial x} + A_3\frac{\partial B_3}{\partial x} + B_3\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$
$$+ \mathbf{j}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial y} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial y} + A_2\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_3}{\partial y} + B_3\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)$$
$$+ \mathbf{k}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial z} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + A_2\frac{\partial B_2}{\partial z} + B_2\frac{\partial A_2}{\partial z} + A_3\frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$
$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$
$$+ \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$
$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$
$$= \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$\Rightarrow \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

(xii) ভেক্টর গুণনের Curl ঃ

উপপাদ্য–12. যদি **A**(x, y, z) এবং **B**(x, y, z) অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

[NUH–2001, NUH(NM)–2006]

প্রমাণ ঃ $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \sum \mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$= \sum \mathbf{i}\times\left(\mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}\right)$$
$$= \sum \mathbf{i}\times\left(\mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right) + \sum \mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}\right)$$

$$= \sum\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{A} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{A})\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right\} + \sum\left\{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{B}\right\}$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{A} - \sum(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \sum(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \left(\sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{B}$$

$$= \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \sum\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{B} + \sum\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

$$= \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ এবং $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$

এখানে $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$\therefore \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_2B_3 - A_3B_2 & A_3B_1 - A_1B_3 & A_1B_2 - A_2B_1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial y} - A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} - B_1\frac{\partial A_3}{\partial z} + A_1\frac{\partial B_3}{\partial z}\right.$$
$$\left. + B_3\frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(A_2\frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - B_2\frac{\partial A_3}{\partial z} - A_1\frac{\partial B_2}{\partial x}\right.$$
$$\left. - B_2\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(A_3\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} - A_1\frac{\partial B_3}{\partial x}\right.$$
$$\left. - B_3\frac{\partial A_1}{\partial x} - A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} - B_3\frac{\partial A_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial y} + A_1\frac{\partial B_3}{\partial z} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - A_3\frac{\partial B_1}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(A_2\frac{\partial B_3}{\partial z} + \right.$$
$$\left. A_2\frac{\partial B_1}{\partial x} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - A_1\frac{\partial B_2}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(A_3\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial y} - A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} - A_2\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)$$
$$+ \mathbf{i}\left(B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + B_3\frac{\partial A_1}{\partial z} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial y} - B_1\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial x}\right.$$
$$\left. - B_2\frac{\partial A_3}{\partial z} - B_2\frac{\partial A_1}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} + B_2\frac{\partial B_3}{\partial y} - B_3\frac{\partial A_1}{\partial x} - B_3\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}A_1\left(\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)+\mathbf{j}A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)+\mathbf{k}A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}\right)$$

$$-\left(A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}B_1-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}B_2-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{k}B_3$$

$$+\left(B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}A_1+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}A_2+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{k}A_3$$

$$-\mathbf{i}B_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)-\mathbf{j}B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)-\mathbf{k}B_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}A_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)+\mathbf{j}A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{k}A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}B_1$$

$$-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}B_2-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}B_3$$

$$+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}A_1+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_2\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}A_2$$

$$+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}A_3-\mathbf{i}B_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$-\mathbf{j}B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)-\mathbf{k}B_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=(\mathbf{i}A_1+\mathbf{j}A_2+\mathbf{k}A_3)\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)$$

$$-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}B_1+\mathbf{j}B_2+\mathbf{k}B_3)$$

$$+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}A_1+\mathbf{j}A_2+\mathbf{k}A_3)$$

$$-(\mathbf{i}B_1+\mathbf{j}B_2+\mathbf{k}B_3)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

(xiii) Curl এর Curl ঃ

উপপাদ্য–13. দেখাও যে $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$

[NUH–04, 07, 09, 10 , 11, NUH(NM)–04, 06(Old), 08, 11, 16, 18 CUH–10, DUH(Affi. Coll.)–2017]

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ ধরি $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$. তাহা হইলে

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} & \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} & \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\, \partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x\, \partial y}\right)$$

$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\, \partial z}\right)$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\mathbf{i}\, A_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}A_2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{k}A_3$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$+ \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{i}A_1$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}A_2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}A_3$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3)$$

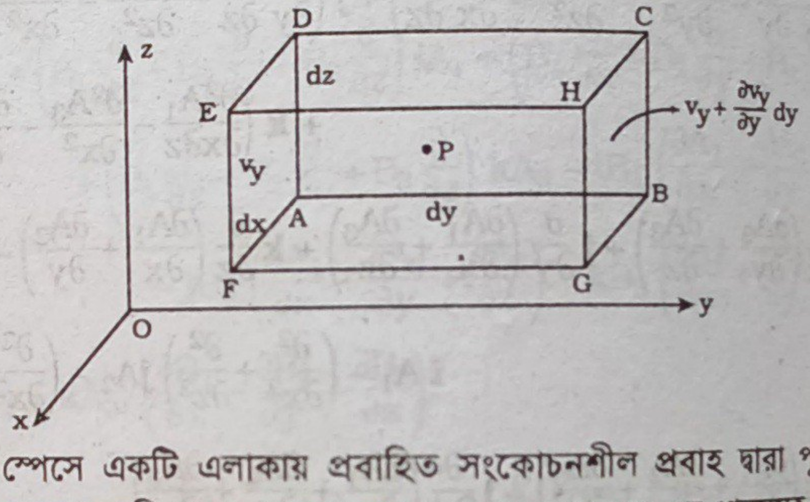
$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

12.9. স্কেলার ফিল্ডে গ্রেডিয়েন্ট এর তাৎপর্য [Significance of the gradient of scalar field] ঃ

[NUH–2008]

ধরি $\phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার ফিল্ড, তবে $\nabla\phi$ ভেক্টর ফিল্ড হইবে যাহা একটি বিন্দুতে ভেক্টর নির্দেশ করে। যাহার দিকে স্কেলার ফিল্ড দ্রুত পরিবর্তন এবং পরিবর্তন হারের মান দ্বারা উহার মান নির্ধারিত হয়। $\nabla\phi$ এর উপাদান দ্বারা যে কোন দিকে ϕ এর স্থানান্তরে পরিবর্তন হার নির্দেশ করে। অর্থাৎ গ্রেডিয়েন্ট স্কেলার ফিল্ডের পরিবর্তন হার নির্দেশ করে। [Let $\phi(x, y, z)$ be a scalar field, then $\nabla\phi$ is a vector field which at a given point defines a vector whose direction is that in which the scalar field changes most rapidly and whose magnitude is the magnitude of that rate of change. The component of $\nabla\phi$ in any direction is the rate of change of ϕ with respect to displacement in that direction. i. e. gradient represents the rate of change of scalar field?

12.10. ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স এর তাৎপর্য [Significance of the divergence of vector field] ঃ



মনে করি স্পেসে একটি এলাকায় প্রবাহিত সংকোচনশীল প্রবাহ দ্বারা পূর্ণ আছে। P কেন্দ্র বিশিষ্ট ক্ষুদ্র সামন্তরিক আকারের ঘনবস্তু ABCDEFGH এর ধারসমূহ অক্ষত্রয়ের সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য dx, dy, dz. $\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$ বিন্দু ভেক্টর ফাংশন P বিন্দুতে বেগ নির্দেশ করে।

টেলর উপপাদ্য হইতে জানি, $v_y(y + dy) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \cdots \approx v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$

সুতরাং y অক্ষ বরাবর ADEF ও BCHG তলে প্রবাহ হইবে $v_y\ dz\ dx$ ও $\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) dz\ dx$.

$\therefore$ y ও y + dy দূরত্বে dz dx ক্ষেত্র দিয়া নীট প্রবাহ ঃ

$$= \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy - v_y\right) dz\ dx = \frac{\partial v_y}{\partial y} dx\ dy\ dz$$

অনুরূপে dx dy এবং dy dz ক্ষেত্রগুলি দিয়া নীট প্রবাহ হইবে, $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ dx dy dz এবং $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ dx dy dz.

$$\therefore dv = dx\,dy\,dz \text{ আয়তন দিয়া মোট প্রবাহ} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \text{div}\,\mathbf{v}\,dv \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

সুতরাং প্রতি একক ঘন আয়তনে প্রবাহের মাত্রাকে ভেক্টর **v** এর ডাইভারজেন্স বলা হয়।

[Let a region in space be filled up with a moving compresible fluid. P be the centre of a small parallelopiped ABCDEFGH with edges parallel to co-ordinate axes having length dx, dy, dz. The vector point function $\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$ represent the velocity at the point P.

From Taylor's theorem, we know

$$v_y(y+dy) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \cdots \approx v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy$$

So the flow on the faces ADEF and BCHG paralled to y-axis will be v_y dz dx and $\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)$ dz dx.

$\therefore$ The net flow on the area dz dx at distance y and y + dy

$$= \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy - v_y\right) dz\,dx = \frac{\partial v_y}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

Similarly the net flow of fluid on the area dx dy and dy dz are $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ dx dy dz and $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ dx dy dz

Hence the total flux out of the volume dv = dx dy dz is

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \text{div}\,\mathbf{v}\,dv$$

$$\Rightarrow \text{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

So the divergence of **v** is the net outward volume flow rate per unit volume.]

12.11. ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল এর তাৎপর্য [Significance of the curl of vector field] ঃ [NUH–2015, NUH(NM)–2007, 2015]

মনে করি মূলবিন্দুর সাপেক্ষে একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = (x, y, z)$ এবং $\mathbf{r}$ এ বেগ $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. যদি মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ কৌণিক বেগ হয় তবে আমরা পাই,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_y z - w_z y, w_z x - w_x z, w_x y - w_y x)$$

$$\text{এখন } \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_y z - w_z y & w_z x - w_x z & w_x y - w_y x \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_z x - w_x z)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(w_y z - w_z y) - \frac{\partial}{\partial x}(w_x y - w_y x)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(w_z x - w_x z) - \frac{\partial}{\partial y}(w_y z - w_z y)\right\}$$

$= \mathbf{i}(w_x + w_x) + \mathbf{j}(w_y + w_y) + \mathbf{k}(w_z + w_z)$ যেখানে $\mathbf{w} = (w_x, w_y, x_z)$ ধ্রুবক কৌণিক বেগ।

$$= 2\{\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y + \mathbf{k}w_z\} = 2\mathbf{w} \Rightarrow \text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$$

সুতরাং কোনো দৃঢ় বস্তুর বেগ ভেক্টরের কার্ল উহার সমকৌণিক বেগের দ্বিগুণ।

[Let $\mathbf{r} = (x, y, z)$ be the position vector of a moving particle with respect to origin and $\mathbf{v} = (v_x, v_y, w_z)$ be the velocity at $\mathbf{r}$. If $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ be the angular velocity about origin then we have $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_y z - w_z y, w_z x - w_x z, w_x y - w_y x)$$

$$\text{Now, } \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_y z - w_z y & w_z x - w_x z & w_x y - w_y x \end{vmatrix}$$

$= \mathbf{i}(w_x + w_x) + \mathbf{j}(w_y + w_y) + \mathbf{k}(w_z + w_z)$ where $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ is constant angular velocity.

$$= 2(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y + \mathbf{k}w_z) = 2\mathbf{w} \Rightarrow \text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$$

Thus the curl of the velocity vector of a rigid body is twice its angular velocity vector.]

12.12. দিক অন্তরক [Directional derivatives] [NUH(NM)–06]

ধরি x, y, z এর ফাংশন $\phi(x, y, z)$ যাহা শূন্যে c রেখার (x, y, z) বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত। c রেখার উপর (x, y, z) বিন্দুর কাছাকাছি বিন্দু $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ এ ϕ বিদ্যমান এবং বিন্দুদ্বয়ের চাপদৈর্ঘ্য Δs হইলে

$\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s} = \dfrac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ দ্বারা চাপ দৈর্ঘ্য বরাবর ϕ এর গড় পরিবর্তন হার নির্দেশিত হয়।

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$$

বিদ্যমান হইলে ইহাকে (x, y, z) বিন্দুতে c রেখা বারবর ϕ এর দিক অন্তরক বলে যাহা নিম্নরূপে লেখা হয় ঃ $\dfrac{d\phi}{ds} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{ds}$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi.\,\mathbf{T}$$

যেখানে $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ অবস্থান ভেক্টর এবং $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, ঐ বিন্দুতে স্পর্শ ভেক্টর।

সুতরাং c রেখার (x, y, z) বিন্দুতে স্পর্শকের দিকে $\nabla\phi$ এর উপাদান দ্বারা দিক অন্তরক সূচিত হয়। আবার **a** যে কোন ভেক্টর বরাবর (x, y, z) বিন্দুতে $\phi(x, y, z)$ এর দিক অন্তরক

$$\nabla\phi\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

বি. দ্র ঃ $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ এর দিকে $\nabla\phi$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $\dfrac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$.

[Let $\phi(x, y, z)$ be a function of x, y, z which is defined at a point (x, y, z) on a space curve c. Let $\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ be the value of the function at a neighboring point on c and suppose Δs denote the arc length of the curve between these two points.

Then $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s} = \dfrac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ represents the average rate of change of ϕ with respect to the arc length.

If $\displaystyle\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ exists, then it is called the directional derivative of ϕ at the point (x, y, z) along the curve c and it is given by

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi.\,\mathbf{T}$$

Where $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ is the position vector and $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ is the tangent vector at the point. So the directional derivative is given by the component of $\nabla\phi$ in the direction of the tangent to the curve at the point (x, y, z). Again the direction derivative of $\phi(x, y, z)$ of an arbitrary point (x, y, z) in the direction **a** is

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

[**N. B.** Here $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ is the projection of $\nabla\phi$ in the direction $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$.]

12.13. দিক অন্তরকের গরিষ্ঠমান [The maximum value of the directional derivative] ঃ আমরা জানি, c রেখা বরাবর $\phi(x, y, z)$ ফাংশনের (x, y, z) বিন্দুতে দিক অন্তরক

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T},\ \mathbf{T} = \text{স্পর্শ একক ভেক্টর।}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = |\nabla\phi \cdot \mathbf{T}|$$

$$= |\nabla\phi| \cos\theta \text{ যেখানে } \nabla\phi \text{ ও } \mathbf{T} \text{ এর মধ্যবর্তী কোণ } \theta.$$

এখন $\cos\theta$ এর গরিষ্ঠমান = 1, সুতরাং সর্বোচ্চ দিক অন্তরক $|\nabla\phi|$

[We know, the directional derivative of the function $\phi(x, y, z)$ at the point (x, y, z) along the curve c is

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T},\ \mathbf{T} = \text{unit tangent vector.}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = |\nabla\phi| \cos\theta \text{ when } \theta \text{ be the angle betwean } \nabla\phi \text{ and } \mathbf{T}.$$

Now the maximum value of $\cos\theta$ is 1. So the required maximum value $|\nabla\phi|$]

12.14. বক্রতলের স্পর্শক সমতল ও অভিলম্ব [Tangent plane and normal line to a surface] ঃ ধরি s বক্রতলের সমীকরণ $\phi(x, y, z) = c$ এবং বক্রতলে $\mathbf{r}_0 = (x_1, y_1, z_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $\mathbf{r}_0$ বিন্দুতে বক্রতলের একক অভিলম্ব ভেক্টর $\mathbf{n}_0 = \nabla\phi(r_0)$ যেখানে $\phi(\mathbf{r}_0) = \phi(x_1, y_1, z_1)$.

সুতরাং $\mathbf{r}_0$ বিন্দুতে স্পর্শক তলের সমীকরণ

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \quad \text{বা } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0$$

এবং অভিলম্ব রেখার সমীকরণ

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{n}_0=\mathbf{0} \text{ বা } (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\nabla\phi(\mathbf{r}_0)=\mathbf{0}$$

[Let $\phi(x, y, z) = c$ be the equation of the surface s and $\mathbf{r}_0 = (x_1, y_1, z_1)$ be a fixed point on the surface s, then $\nabla\phi(\mathbf{r}_0) = \mathbf{n}_0$ be the unit normal to the surface at the point $\mathbf{r}_0$. Now the equation of tangent plane at the point $\mathbf{r}_0$ in the vector form is

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0 = 0 \text{ or } (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Where $\mathbf{r} = (x, y, z)$ is any arbitrary point on the surface and $\phi(\mathbf{r}_0) = \phi(x_1, y_1, z_1)$ and the equation of normal line at the point $\mathbf{r}_0$ in vector form is

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{n}_0=\mathbf{0} \text{ or } (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\nabla\phi(\mathbf{r}_0)=\mathbf{0}$$

12.15. বক্রতলের অন্তঃস্থ কোণ [Angle between two surfaces] ঃ

মনে করি $\phi(x, y, z) = c_1$ এবং $\psi(x, y, z) = c_2$ দুইটি বক্রতল যেখানে c_1 ও c_2 যে কোন ধ্রুবক।

অতএব $\nabla\phi$ এবং $\nabla\psi$ যথাক্রমে বক্রতলদ্বয়ের অভিলম্ব ভেক্টর হইবে। এখন $\nabla\phi$ ও $\nabla\psi$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে $\nabla\phi\cdot\nabla\psi = |\nabla\phi|\,|\nabla\psi|\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\phi|\,|\nabla\psi|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\nabla\phi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\phi|\,|\nabla\psi|}\right)$$

[Let $\phi(x, y, z) = c_1$ and $\psi(x, y, z) = c_2$ be two surfaces where c_1 and c_2 are two arbitrary constants. So $\nabla\phi$ and $\nabla\psi$ are the normal vectors to the surfaces respectively. Now the angle between the two given surfaces is the angle between their normals. If θ be the angle between $\nabla\phi$ and $\nabla\psi$

$$\nabla\phi\cdot\nabla\psi = |\nabla\phi|\,|\nabla\psi|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\nabla\phi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\phi|\,|\nabla\psi|}\right)]$$

প্রয়োজনীয় কতিপয় সংজ্ঞা ঃ

(i) div $\mathbf{V} = 0$ হইলে $\mathbf{V}$ কে সলিনয়ডাল ভেক্টর বলে। [A vector is called solenoidal if div $\mathbf{V} = 0$]

(ii) div $\mathbf{V} > 0$ হইলে ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{V}$ কে সোর্স ফিল্ড বলা হয় [A vetor field $\mathbf{V}$ is called a source field if div $\mathbf{V} > 0$]

(iii) div $\mathbf{V} < 0$ হইলে ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{V}$ কে সিঙ্ক ফিল্ড বলা হয় [A vector field $\mathbf{V}$ is called a sink field if div $\mathbf{V} < 0$]

(iv) Curl $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ হইলে $\mathbf{V}$ কে ঘূর্ণনশীল বা ভর্টিসিটি ভেক্টর বলে। [A vector is called rotational or vorticity if curl $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$]

(v) Curl $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ হইলে $\mathbf{V}$ কে অঘূর্ণনশীল ভেক্টর বলে। [A vector $\mathbf{V}$ is called irrotational if curl $\mathbf{V} = \mathbf{0}$]

(vi) $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ কে ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর এবং $\nabla^2\phi = 0$ কে ল্যাপলাসের সমীকরণ বলা হয়। [$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ is called the Laplacian operator and $\nabla^2\phi = 0$ is called Laplace's equation].

সমাধানকৃত উদাহরণমালা
[Solved Examples]

উদাহরণ–1. $\phi = 3xyz - x^2y^2z^2$ হইলে (1, 1, 1) বিন্দুতে $\nabla\phi$ এবং $|\nabla\phi|$ নির্ণয় কর। [If $\phi = 3xyz - x^2y^2z^2$ then find $\nabla\phi$ and $|\nabla\phi|$ at the point (1, 1, 1).]

সমাধান ঃ এখানে $\phi = 3xyz - x^2y^2z^2$

$$\therefore \nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(3xyz - x^2y^2z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(3xyz - x^2y^2z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(3xyz - x^2y^2z^2)$$

$$= \mathbf{i}(3yz - 2xy^2z^2) + \mathbf{j}(3xz - 2x^2yz^2) + \mathbf{k}(3xy - 2x^2y^2z)$$

$\therefore$ (1, 1, 1) বিন্দুতে $\nabla\phi = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $|\nabla\phi| = \sqrt{(1+1+1)} = \sqrt{3}$

উদাহরণ–2. দেখাও যে $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ যেখানে $\phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার ফাংশন। [Show that $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ where $\phi(x, y, z)$ is a scaler function.]

সমাধান ঃ $d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}dz$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \nabla\phi . d\mathbf{r} \quad [\because \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$$

উদাহরণ–3. দেখাও যে $\nabla\phi$ ভেক্টরটি $\phi(x, y, z) = c$ তলের উপর লম্ব, যেখানে c একটি ধ্রুবক। [Show that $\nabla\phi$ is a vector perpendicular to the surface $\phi(x, y, z) = c$, where c is a constant.] **[NUH(NM)–2009]**

সমাধান ঃ এখানে, $\phi(x, y, z) = c$

$$\Rightarrow d\phi(x, y, z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

যেহেতু প্রদত্ত তল $\phi(x, y, z) = c$ এর উপরস্থ যে কোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = (x, y, z)$, সুতরাং (1) সম্পর্কটি নির্দেশ করে $\nabla\phi$ ভেক্টরটি $\phi(x, y, z) = c$ তলের উপর লম্ব।

উদাহরণ–4. দেখাও যে $\nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

এবং $r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}.\mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2 \;\ldots\ldots\; (1)$

এখন (1) $\Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x,\quad 2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y,\quad 2r\frac{\partial r}{\partial z} = 2z$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \text{ এবং } \sum\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x} = \sum\mathbf{i}\frac{x}{r} = \frac{\sum x\mathbf{i}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

L. H. S. $= \nabla r^n$

$$= \sum\mathbf{i}\frac{\partial r^n}{\partial x}$$

$$= \sum\mathbf{i}\, nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= nr^{n-1}\sum\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-2}\mathbf{r} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–5. দেখাও যে $\nabla u = \frac{2\mathbf{r}}{r^2}$ যেখানে $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং $r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$

দেওয়া আছে $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow u = \ln r^2 = 2\ln r$

$$\Rightarrow \nabla u = 2\nabla \ln r = \frac{2}{r}\nabla r = \frac{2\mathbf{r}}{r^2} \qquad [\because \nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}]$$

উদাহরণ–6. দেখাও যে $\nabla f(r) = f'(r)\, r^{-1}\mathbf{r}$. [NUH–1997]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং $r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$

ইহা হইতে পাই $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ যথাক্রমে।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\nabla f(r) = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} f(r)$

$$= \sum \mathbf{i} f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\sum \mathbf{i}\frac{x}{r}$$

$$= \frac{1}{r} f'(r) \sum x\mathbf{i}$$

$$= r^{-1} f'(r)\, \mathbf{r}$$

উদাহরণ–7. যদি $\mathbf{A}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর হয়, তবে দেখাও যে [If $\mathbf{A}$ is a constant vector then show that]

(i) $\nabla(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{r}) = \mathbf{A}$ (ii) $(\mathbf{A}\,.\,\nabla)\,\mathbf{r} = \mathbf{A}$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = [x, y, z]$. ধরি $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$

(i) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}) = \nabla(A_1x + A_2y + A_3z)$

$$= \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(A_1x + A_2y + A_3z)$$

$$= \sum \mathbf{i}A_1 = \mathbf{A}$$

(ii) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{r}$

$$= A_1\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + A_2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + A_3\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$$

$$= A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \qquad \left[\because \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}\right]$$

$$= \mathbf{A}$$

উদাহরণ–8. দেখাও যে $\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$ যেখানে $\mathbf{a} = \alpha x\mathbf{i} + \beta y\mathbf{j} + \gamma z\mathbf{k}$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = [x, y, z]$. তাহা হইলে $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) = 2\sum \alpha x\mathbf{i} = 2\mathbf{a}$$

উদাহরণ– 9. দেখাও যে

(i) $\nabla\cdot\mathbf{A} = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}$ (ii) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3.$

সমাধান ঃ (i) ধরি $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

তাহা হইলে $\mathbf{i}\cdot\mathbf{A} = A_1,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} = A_2,\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{A} = A_3$ ...... (1)

আবার সংজ্ঞানুসারে $\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ ...... (2)

এখন (1) এবং (2) হইতে পাই

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})$$

$$= \mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}$$

(ii) এখানে $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. তাহা হইলে

$$\nabla\cdot\mathbf{r} = \left(\frac{\mathbf{i}\,\partial}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}\partial}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}\partial}{\partial z}\right)\cdot(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

উদাহরণ–10. দেখাও যে

(i) $\nabla\cdot(r^n\,\mathbf{r}) = (n+3)r^n$ [NUH–2005]

(ii) $\nabla\cdot(\mathbf{r}r^{-3}) = 0$

(iii) $\nabla\cdot(r^3\,\mathbf{r}) = 6r^3$

(iv) $\nabla\cdot(\mathbf{r}\,r^{-1}) = 2r^{-1}$

সমাধান ঃ (i) $\nabla\cdot(r^n\mathbf{r}) = (\nabla r^n)\cdot\mathbf{r} + r^n(\nabla\cdot\mathbf{r})$

$= (nr^{n-2}\,\mathbf{r})\cdot\mathbf{r} + 3r^n$ [$\because\ \nabla.r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$ এবং $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$]

$= nr^{n-2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) + 3r^n$

$= nr^{n-2}(r^2) + 3r^n$

$= nr^n + 3r^n$

$= (n+3)\,r^n$

(ii) $n = -3$ (iii) $n = 3$ (iv) $n = -1$ বসিয়ে প্রমাণ করিতে হইবে।

উদাহরণ–11. দেখাও যে $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ অর্থাৎ $\mathbf{r}$ একটি অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

সমাধান ঃ এখানে $\nabla \times \mathbf{r} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times [x, y, z]$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right]$$

$$= [0, 0, 0] = \mathbf{0}$$

উদাহরণ–12. [y, z, x], [z, x, y], [x, z, y], [y, x, z] এবং [z, y, x] ভেক্টর গুলির কোনটি কোনটি ভর্টিসিটি ভেক্টর তাহা বাহির কর।

সমাধান ঃ যে ভেক্টরের curl শূন্য নয় অর্থাৎ যে ভেক্টর ঘূর্ণনশীল তাহাকে ভর্টিসিটি ভেক্টর বলে।

এখানে $\nabla \times [y, z, x] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right]$$

$$= [-1, -1, -1] \neq \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ [y, z, x] একটি ভর্টিসিটি ভেক্টর।

$\nabla \times [z, x, y] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$= [1, 1, 1] \neq \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ [z, x, y] একটি ভর্টিসিটি ভেক্টর।

$$\nabla\times[x, z, y]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial y}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right]$$

$$=[1-1, 0, 0]=[0, 0, 0]=\mathbf{0}$$

$\Rightarrow [x, z, y]$ ভর্টিসিটি ভেক্টর নয় অর্থাৎ ইহা অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

একইভাবে $\nabla\times[y, x, z]=\mathbf{0}$ এবং $\nabla\times[z, y, x]=\mathbf{0}$

অর্থাৎ $[y, x, z]$ এবং $[z, y, x]$ ভেক্টর দুইটি ভর্টিসিটি ভেক্টর নয়।

উদাহরণ–13. যদি $\mathbf{A}=[axy-z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2]$ অঘূর্ণনশীল হয়, তবে দেখাও যে $a=4$.

সমাধান ঃ যেহেতু $\mathbf{A}$ অঘূর্ণনশীল সেহেতু $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ axy-z^3 & (a-2)x^2 & (1-a)xz^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\partial}{\partial y}\{(1-a)xz^2\}-\frac{\partial}{\partial z}\{(a-2)x^2\}, \frac{\partial}{\partial z}(axy-z^3)-\frac{\partial}{\partial x}\{(1-a)xz^2\}, \frac{\partial}{\partial x}\{(a-2)x^2\}-\frac{\partial}{\partial y}(axy-z^3)\right]=[0, 0, 0]$$

$$\Rightarrow [0, -3z^2-(1-a)z^2, 2(a-2)x-ax]=[0, 0, 0]$$

$\Rightarrow -3z^2-(1-a)z^2=0$ এবং $2(a-2)x-ax=0$

$\Rightarrow 3+1-a=0$ এবং $2a-4-a=0\Rightarrow a=4.$

উদাহরণ–14. দেখাও যে

(i) $\nabla\times(r^n\mathbf{r})=\mathbf{0}$ (ii) $\nabla\times(\mathbf{r}\,r^{-2})=\mathbf{0}$ (iii) $\nabla\times\{f(r)\,\mathbf{r}\}=\mathbf{0}$

সমাধান ঃ (i) $\nabla\times(r^n\mathbf{r})=(\nabla r^n)\times\mathbf{r}+r^n(\nabla\times\mathbf{r})$

$=(nr^{n-2}\,\mathbf{r})\times\mathbf{r}+\mathbf{0}$ $[\because \nabla r^n=nr^{n-2}\,\mathbf{r}$ এবং $\nabla\times\mathbf{r}=\mathbf{0}]$

$=nr^{n-2}(\mathbf{r}\times\mathbf{r})=\mathbf{0}$ $[\because \mathbf{r}\times\mathbf{r}=\mathbf{0}]$

(ii) $n = -2$ বসিয়ে পাই $\nabla \times (\mathbf{r}r^{-2}) = 0$

(iii) $\nabla \times \{f(r)\,\mathbf{r}\} = \{\nabla f(r)\} \times \mathbf{r} + f(r)\,(\nabla \times \mathbf{r})$

$= \{f'(r)\,\nabla r\} \times \mathbf{r} + \mathbf{0}$ $[\because \nabla f(r) = f'(r)\,\nabla r$ এবং $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

$= \{f'(r)\,r^{-1}\,\mathbf{r}\} \times \mathbf{r}$ $[\because \nabla r = r^{-1}\,\mathbf{r}]$

$= f'(r)\,r^{-1}\,(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}.$ $[\because \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

উদাহরণ–15. দেখাও যে $\nabla \times \nabla r^n = \mathbf{0}.$ **[NUH–2005]**

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$

$$\therefore \nabla \times \nabla r^n = \nabla \times (nr^{n-2}\,\mathbf{r}) = n\,[(\nabla r^{n-2}) \times \mathbf{r} + r^{n-2}\,\nabla \times \mathbf{r}]$$

$$= n[\{(n-2)\,r^{n-4}\,\mathbf{r}\} \times \mathbf{r} + \mathbf{0}\,] \quad [\because \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$$

$$= n(n-2)\,r^{n-4}\,(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad [\because \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$$

উদাহরণ–16. দেখাও যে $\nabla\cdot(\phi\,\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$ …… (1)

এখন (1) এ $\mathbf{A} = \nabla\psi$ বসাইয়া পাই

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \phi(\nabla\cdot\nabla\psi)$$

$$= \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$$

উদাহরণ–17. দেখাও যে $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$

[NUH(NM)–2007, DUH–1968]

সমাধান ঃ আমরা জানি

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \text{ …… (1)}$$

এখন (1) এ $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{V}$ বসাইয়া পাই

$$\nabla(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

$$\Rightarrow \nabla V^2 = 2(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + 2\{\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})\}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

উদাহরণ–18. যদি **a** এবং **b** ধ্রুব ভেক্টর হয় তবে দেখাও যে

$$\nabla \times [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$

$$= \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x} [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \mathbf{a}\right) \times \mathbf{b}\right]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [(\mathbf{i} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}] \qquad \left[\because \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} = \mathbf{0} \text{ এবং } \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} = \mathbf{0}\right]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{i}]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times (b_1 \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \sum \mathbf{i} \times \mathbf{i} \qquad [\text{ধরি } \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}]$$

$$= \sum \mathbf{i} b_1 \times \mathbf{a} \quad [\because \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}]$$

$$= \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

উদাহরণ–19. যদি **a** এবং **b** ধ্রুব ভেক্টর হয় তবে দেখাও যে

$$\nabla \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$

$$= \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\right] \qquad \left[\because \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} = \mathbf{0} \text{ এবং } \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} = \mathbf{0}\right]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [\mathbf{i} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [b_1 \mathbf{a} - a_1 \mathbf{b}]$$

$$= \sum \mathbf{i} b_1 \times \mathbf{a} - \sum \mathbf{i} a_1 \times \mathbf{b}$$

$$= \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$= \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$= 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

উদাহরণ–20. যদি **a** একটি ধ্রুবক ভেক্টর তবে দেখাও যে

(i) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$ (ii) $\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = 0$

সমাধান ঃ (i) এখানে $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{r})$

$= 0 - 0 = 0$ যেহেতু $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ এবং $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(ii) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$

$\Rightarrow -\nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = 0$

উদাহরণ–21. যদি $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ অঘূর্ণনশীল ভেক্টর হয়, তবে দেখাও যে $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ একটি সলিনোয়িডাল ভেক্টর।

সমাধান ঃ যেহেতু $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ অঘূর্ণনশীল ভেক্টর সেহেতু সংজ্ঞানুসারে

$\nabla\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ ...... (1) এবং $\nabla\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ...... (2). কিন্তু আমরা জানি

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$$

$$=\mathbf{b}\cdot\mathbf{0}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{0}\qquad[(1) \text{ এবং } (2) \text{ হইতে}]$$

$$=0-0=0$$

$\Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ একটি সলিনোয়িডাল ভেক্টর।

উদাহরণ–22. দেখাও যে $\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)=0$, যেখানে f এবং g, x, y এবং z এর স্কেলার ফাংশন।

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$ ...... (1)

ধরি $\mathbf{a}=\nabla f$ এবং $\mathbf{b}=\nabla g$ ...... (3). এখন (1), (2) এবং (3) হইতে পাই

$$\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)=\nabla g\cdot(\nabla\times\nabla f)-\nabla f\cdot(\nabla\times\nabla g)$$

$$=\nabla g\cdot\mathbf{0}-\nabla f\cdot\mathbf{0}\quad[\because \text{curl grad }\phi=\mathbf{0}]$$

$$=0$$

উদাহরণ–23. দেখাও যে $\nabla f(r)\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$

সমাধান ঃ $\nabla f(r)\times\mathbf{r}=\{r^{-1}f'(r)\,\mathbf{r}\}\times\mathbf{r}\quad[\because\nabla f(r)=r^{-1}f'(r)\,\mathbf{r}]$

$=r^{-1}f'(r)\,(\mathbf{r}\times\mathbf{r})=0$ যেহেতু $\mathbf{r}\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$

উদাহরণ–24. দেখাও যে $[(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\nabla]\,\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$

সমাধান ঃ $\text{L. H. S.}=[(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\nabla]\phi=\left[(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\left(\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–25. দেখাও যে $[(x\mathbf{i}-y\mathbf{j})\cdot\nabla]\,(x^2\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})=2x^2\mathbf{i}+2y^2\mathbf{j}$.

সমাধান ঃ $\text{L. H. S.}=[(x\mathbf{i}-y\mathbf{j}).\ \nabla]\,(x^2\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})$

$$=x\frac{\partial}{\partial x}(x^2\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})-y\frac{\partial}{\partial y}(x^2\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})$$

$$=x(2x\mathbf{i})-y\,(-2y\mathbf{j})=2\,x^2\mathrm{i}+2y^2\mathbf{j}=\text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–26. যদি $\phi(x, y, z)$ ল্যাপলাসের সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে দেখাও যে $\nabla\phi$ সলিনোয়িডাল এবং অঘূর্ণনশীল এই দুই শ্রেণীরই ভেক্টর হইবে।

সমাধান ঃ যেহেতু ϕ ল্যাপলাসের সমীকরণকে সিদ্ধ করে সেহেতু $\nabla^2\phi = 0$
$\Rightarrow \nabla\cdot\nabla\phi = 0 \Rightarrow \nabla\phi$ একটি সলিনোয়িডাল ভেক্টর।

আবার $\nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla\phi$ একটি অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

উদাহরণ–27. দেখাও যে $\nabla \times (\phi\nabla\phi) = \mathbf{0}$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi\,(\nabla \times \mathbf{A})$

এখন $\nabla \times (\phi\ \nabla\phi) = \nabla\phi \times \nabla\phi + \phi(\nabla\times \nabla\phi) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ যেহেতু $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
এবং curl grad $\phi = \mathbf{0}$

উদাহরণ–28. দেখাও যে $\nabla\cdot\,(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = -\,\mathbf{a}\cdot(\nabla \times \mathbf{u})$, যেখানে $\mathbf{a}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর।

সমাধান ঃ এখানে
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\,(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) &= \mathbf{u}\cdot(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla \times \mathbf{u})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{0} - \mathbf{a}\cdot(\nabla \times \mathbf{u})\\ &= -\,\mathbf{a}\cdot(\nabla \times \mathbf{u})\end{aligned}$$

যেহেতু $\mathbf{a}$ ধ্রুবক সেহেতু $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

উদাহরণ–29. দেখাও যে $\nabla\cdot\,(\nabla r^m) = m(m + 1)r^{m-2}$ **[NUH–2017]**

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla r^m = mr^{m-2}\,\mathbf{r}$ এবং $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$

$$\begin{aligned}\therefore \nabla\cdot\,(\nabla r^m) &= \nabla\cdot\,(mr^{m-2}\mathbf{r})\\ &= (m\ \nabla r^{m-2})\cdot\mathbf{r} + mr^{m-2}\,(\nabla\cdot\mathbf{r})\\ &= \{m\,(m-2)\,r^{m-4}\,\mathbf{r}\}\cdot\mathbf{r} + 3mr^{m-2}\\ &= m(m-2)r^{m-4}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) + 3mr^{m-2}\\ &= m(m-2)r^{m-4}(r^2) + 3mr^{m-2}\\ &= m(m-2)r^{m-2} + 3mr^{m-2}\\ &= m(m-2+3)\,r^{m-2}\\ &= m(m+1)r^{m-2}\end{aligned}$$

উদাহরণ–30. দেখাও যে, $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$. **[NUH–2009, 2014, NUH(NM)–2014, 2017]**

সমাধান ঃ
$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi\\ &= \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\phi) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{dz}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

$$= \nabla^2\phi$$

সুতরাং $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$.

উদাহরণ–31. দেখাও যে (i) $\nabla^2 r^{-1} = 0$ [NUH-2007]

(ii) $\nabla^2 r^3 = 12r.$

সমাধান ঃ (i) $\nabla^2 r^{-1} = \nabla\cdot\nabla r^{-1}$

$$= \nabla\cdot(-r^{-3}\mathbf{r})$$

$$= -\{(\nabla r^{-3})\cdot\mathbf{r} + r^{-3}(\nabla\cdot\mathbf{r})\}$$

$$= -(-3r^{-5}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-3})$$

$$= -(-r^{-5}r^2 + 3r^{-3})$$

$$= -(-3r^{-3} + 3r^{-3}) = 0$$

(ii) $\nabla^2(r^3) = \nabla\cdot\nabla(r^3)$

$$= \nabla\cdot(3r\mathbf{r})$$

$$= \nabla(3r)\cdot\mathbf{r} + 3r(\nabla\cdot\mathbf{r})$$

$$= \frac{3\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} + 9r$$

$$= 12r.$$

উদাহরণ–32. দেখাও যে

(i) $\nabla^2 \ln r = r^{-2}$

(ii) $\nabla^2 f(r) = 2r^{-1}f'(r) + f''(r)$

[NUH–2006, 2013, 2016, NUH(NM)-2016]

যদি $\nabla^2 f(r) = 0$ হয় তবে f(r) বাহির কর। [NUH(NM)-2005, 2013]

(iii) $\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{r}r^{-2}) = 2r^{-4}$

(iv) $\nabla^2\{\nabla\cdot(\mathbf{r}r^n)\} = n(n+1)(n+3)r^{n-2}$

সমাধান ঃ (i) আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং
$r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$. ইহা হইতে পাই
$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ যথাক্রমে। এখন ইহাদেরকে ব্যবহার করিয়া পাই

$$\nabla \ln r = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\ln r) = \sum \mathbf{i}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\sum x\mathbf{i} = \mathbf{r}r^{-2}$$

$$\therefore \nabla^2(\ln r) = \nabla\cdot(\nabla \ln r)$$
$$= \nabla\cdot(\mathbf{r}r^{-2})$$
$$= (\nabla r^{-2})\cdot\mathbf{r} + r^{-2}(\nabla\cdot\mathbf{r})$$
$$= -2r^{-4}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-2}$$
$$= -2r^{-2} + 3r^{-2}$$
$$= r^{-2} \quad [\because \nabla\cdot\mathbf{r} = 3]$$
$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

(ii) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \nabla f(r) = \mathbf{i}f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\frac{f'(r)}{r} = \mathbf{r}\frac{f'(r)}{r}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(r) = \nabla\cdot\left(\mathbf{r}\frac{f'(r)}{r}\right) = \frac{f'(r)}{r}(\nabla\cdot\mathbf{r}) + \nabla\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}\cdot\mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \left[f'(r)\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\nabla f'(r)\right]\cdot\mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \left[f'(r)\cdot\frac{-\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}f''(r)\right]\cdot\mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \frac{f''(r)}{r^2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r} + f''(r)$$

$$= 2r^{-1}f'(r) + f''(r).$$

২য় অংশ ঃ $\nabla^2 f(r) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{r} f'(r) + f''(r) = 0$

$$\Rightarrow r^2 f''(r) + 2r f'(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\{r^2 f'(r)\} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 f'(r) = -A \ \text{(সমাকলন করিয়া)}$$

$$\Rightarrow f'(r) = -\frac{A}{r^2}$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{A}{r} + B \ \text{(আবার সমাকলন করিয়া)}$$

(iii) $\nabla \cdot (\mathbf{r}r^{-2}) = \nabla(r^{-2}) \cdot \mathbf{r} + r^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{r})$

$$= -\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^4} + \frac{1}{r^2} \cdot 3$$

$$= -\frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2}) = \nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2\mathbf{r}}{r^4}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2}) = \nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2})$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{2\mathbf{r}}{r^4}\right)$$

$$= -\nabla\left(\frac{2}{r^4}\right) \cdot \mathbf{r} - \frac{2}{r^4}(\nabla \cdot \mathbf{r})$$

$$= \frac{8}{r^6}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{6}{r^4} = \frac{8}{r^4} - \frac{6}{r^4} = 2r^{-4}$$

(iv) $\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n) = \nabla(r^n) \cdot \mathbf{r} + r^n(\nabla \cdot \mathbf{r})$

$$= nr^{n-2}\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + r^n \cdot 3$$

$$= nr^n + 3r^n$$

$$= (n+3)\,r^n$$

$$\Rightarrow \nabla\{\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n)\} = (n+3)\,\nabla(r^n)$$

$$= n(n+3)r^{n-2}\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\{\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n)\} = n(n+3)\,\nabla \cdot (r^{n-2}\mathbf{r})$$

$$= n(n+3)\,[\nabla(r^{n-2}) \cdot \mathbf{r} + r^{n-2}(\nabla \cdot \mathbf{r})]$$

$$= n(n+3)\,[(n-2)\,r^{n-4}\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{n-2}]$$

$$= n(n+3)\,[(n-2)\,r^{n-2} + 3r^{n-2}]$$

$$= n(n+1)(n+3)r^{n-2}.$$

উদাহরণ–33. যদি $\mathbf{V} = [x + 3y, y - 2z, x + az]$ ভেক্টরটি সলিনোয়িডাল হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ **V** ভেক্টরটি সলিনোয়িডাল ভেক্টর হইবে যদি $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ হয়।

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + az) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -2.$$

উদাহরণ–34. $\mathbf{A} = 2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}$ এবং $\phi = 2x^2yz^3$ হইলে (i) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\phi$ এবং (ii) $(\mathbf{A} \times \nabla)\,\phi$ নির্ণয় কর। [if $\mathbf{A} = 2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}$ and $\phi = 2x^2\,yz^3$, then find (i) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\phi$ and (ii) $(\mathbf{A} \times \nabla)\,\phi$.] **[NUH–2016]**

সমাধান ঃ **(i)** $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\phi$

$$= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)2x^2yz^3$$

$$= 2yz\,(4xyz^3) - x^2y\,(2x^2z^3) + xz^2\,(6x^2\,yz^2)$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

$$= 2xyz^3\,(4yz - x^3 + 3x^2z)$$

(ii) $(A \times \nabla)\,\phi$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}\phi$$

$$= \left[\mathbf{i}\left(-x^2\,y\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}\right) + \mathbf{j}\left(xz^2\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]2x^2\,yz^3$$

$$= \mathbf{i}\,\{-x^2y\,(6x^2\,yz^2) - xz^2\,(2x^2\,z^3)\} + \mathbf{j}\,\{xz^2\,(4x\,yz^3) - 2yz\,(6x^2\,yz^2)\} + \mathbf{k}\,\{2yz\,(2x^2\,z^3) + x^2y\,(4xyz^3)\}$$

$$= -2\,\mathbf{i}\,x^3\,z^2\,(3xy^2 + z^3) + 4\,\mathbf{j}\,x^2\,y\,z^3\,(z^2 - 3y) + 4\,\mathbf{k}\,x^2yz^3)\,(z + xy)$$

উদাহরণ–35. $x = t^2 + 1, y = 4t - 3, z = 2t^2 - 6t$ বক্ররেখার একক স্পর্শক ভেক্টর নির্ণয় কর। আরও $t = 2$ বিন্দুতে একক স্পর্শক ভেক্টর নির্ণয় কর। [Find the unit tangent vector to any point on the curve $x = t^2 + 1, y = 4t - 3, z = 2t^2 - 6t$ and determine the unit tangent at the point $t = 2$]

সমাধান ঃ অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = [x, y, z] = [t^2 + 1, 4t - 3, 2t^2 - 6t]$

যে কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর ঃ $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [2t, 4, 4t-6]$

এখন, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2 + 16 + (4t-6)^2}$

$$= \sqrt{(20t^2 - 48t + 52)}$$

সুতরাং নির্ণেয় একক স্পর্শক ভেক্টর $\mathbf{t} = \frac{[2t, 4, 4t-6]}{\sqrt{20t^2 - 48t + 52}}$

$$= \frac{[t, 2, 2t-3]}{\sqrt{5t^2 - 12t + 13}}$$

আবার, $t = 2$ বিন্দুতে একক স্পর্শক ভেক্টর $\mathbf{t}_0 = \frac{[2, 2, 1]}{\sqrt{9}}$

$$= \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

উদাহরণ–36. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ফাংশনের $P(-2, 2)$ বিন্দুতে $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ভেক্টরের দিকে দিক বিভেদক সহগ নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ at $P(-2, 2)$ in the direction of $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$]

[NUH(NM)–2004, 2007]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\therefore \nabla f = \mathbf{i}\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \mathbf{j}\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\mathbf{i}y}{x^2 + y^2} + \frac{\mathbf{j}x}{x^2 + y^2}$$

$P(-2, 2)$ বিন্দুতে $\nabla f = -\frac{\mathbf{i}}{4} - \frac{\mathbf{j}}{4}$

এখন প্রদত্ত ফাংশনের $P(-2, 2)$ বিন্দুতে $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ভেক্টরের দিকে দিক বিভেদক সহগ $= \nabla f \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

$$= \left(-\frac{\mathbf{i}}{4} - \frac{\mathbf{j}}{4}\right) \cdot \frac{-\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

উদাহরণ–37. $f(x, y) = x^2 + xy$ ফাংশনের $P_0(1, 2)$ বিন্দুতে একক ভেক্টর $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ এর দিকে দিক অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $f(x, y) = x^2 + xy$ at the point $P_0(1, 2)$ in the direction of unit vector $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.]

[NUH(NM)–2006]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x^2 + xy$

$\therefore \nabla f = \mathbf{i}(2x + y) + \mathbf{j}x$

$P_0(1, 2)$ বিন্দুতে $\nabla f = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

এখন প্রদত্ত ফাংশনের $P_0(1, 2)$ বিন্দুতে $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ একক ভেক্টর বরাবর দিক অন্তরক সহগ $= \nabla f \cdot \mathbf{u}$

$$= (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

উদাহরণ–38. $f(x, y) = xe^y - ye^x$ ফাংশনের $(0, 0)$ বিন্দুতে $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ভেক্টর বরাবর দিক অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $f(x, y) = xe^y - ye^x$ at the point $(0, 0)$ in the direction of the vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.]

[NUH–2006, DUH(Affi. Coll.)–2017]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x, y) = xe^y - ye^x$

$$\Rightarrow \nabla f = \mathbf{i}(e^y - ye^x) + \mathbf{j}\,(xe^y - e^x)$$

$\therefore (0, 0)$ বিন্দুতে $\nabla f = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

এখন প্রদত্ত ফাংশনের $(0, 0)$ বিন্দুতে $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ভেক্টর বরাবর দিক অন্তরক সহগ

$$= \nabla f \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

$$= (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot \frac{5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}{\sqrt{29}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

উদাহরণ–39. $f(x, y, z) = x^3z - yz^2 + z^2$ ফাংশনের $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরের দিকে দিক অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $f(x, y, z) = x^3z - yz^2 + z^2$ at the point $(2, -1, 1)$ in the direction of the vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.] [NUH–2004]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x, y, z) = x^3z - yz^2 + z^2$

$$\Rightarrow \nabla f = 3\mathbf{i}x^2z - \mathbf{j}z^2 + \mathbf{k}(x^3 - 2yz + 2z)$$

$(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $\nabla f = 12\mathbf{i} - \mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

এখন, প্রদত্ত ভেক্টর ফাংশনের (2, – 1, 1) বিন্দুতে $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর দিক অন্তরক সহগ $= \nabla f \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

$$= (12\mathbf{i} - \mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \cdot \frac{3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{36}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{24}{\sqrt{14}} = \frac{61}{\sqrt{14}}.$$

উদাহরণ-40. $\phi(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ এর (2, –1, 2) বিন্দুতে $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর দিক অন্তরক নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $\phi(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ at the point (2, –1, 2) in the direction $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$

$\therefore \nabla\phi = \mathbf{i}(4z^3 - 6xy^2z) + \mathbf{j}(-6x^2yz) + \mathbf{k}(12xz^2 - 3x^2y^2)$

(2, –1, 2) বিন্দুতে $\nabla\phi = 8\mathbf{i} + 48\mathbf{j} + 84\mathbf{k}$.

ধরি $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

$\Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{49} = 7$

সুতরাং $\mathbf{a}$ বরাবর ϕ এর দিক অন্তরক $= \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

$$= \frac{1}{7}(16 - 144 + 504) = \frac{376}{7}.$$

উদাহরণ-41. (1, 1, 1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ তলের একক অভিলম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [Find the unit normal vector to the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ at the point (1, 1, 1)] [NUH-2018]

সমাধান ঃ ধরি $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$

$$\Rightarrow \nabla\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

(1, 1, 1) বিন্দুতে $(\nabla\phi)_0 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

সুতরাং প্রদত্ত তলের উপর নির্ণেয় একক অভিলম্ব ভেক্টর

$$\mathbf{n} = \frac{(\nabla\phi)_0}{|(\nabla\phi)_0|}$$

$$= \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

উদাহরণ–42. $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ তলের $P(3, -1, 2)$ বিন্দুতে একটি একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [Find a unit normal vector to the surface $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ at the point $P(3, -1, 2)$.] **[NUH(NM)–2009]**

সমাধান ঃ ধরি, $\phi = 2x^2 + 4yz - 5z^2 + 10$

$$\Rightarrow \nabla\phi = 4\mathbf{i}x + 4\mathbf{j}z + 2\mathbf{k}(2y - 5z)$$

$P(3, -1, 2)$ বিন্দুতে $\nabla\phi = 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

$$= 4(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$$

এখানে, $|\nabla\phi| = 4\sqrt{(9 + 4 + 36)} = 28$

সূতরাং প্রদত্ত তলের $P(3, -1, 2)$ বিন্দুতে একক লম্ব ভেক্টর

$$= \frac{4(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})}{28} = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$$

উদাহরণ–43. $(1, -2, 1)$ বিন্দুতে $xy^2z = 3x + z^2$ এবং $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ তলদ্বয়ের অন্তস্থ কোণ নির্ণয় কর। [Find the angle between the surfaces $xy^2z = 3x + z^2$ and $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ at the point $(1, -2, 1)$] **[NUH–2008]**

সমাধান ঃ ধরি $\phi = xy^2z - 3x - z^2$ এবং $\psi = 3x^2 - y^2 + 2z$

$\therefore \nabla\phi = \mathbf{i}(y^2z - 3) + \mathbf{j}(2xyz) + \mathbf{k}(xy^2 - 2z)$

এবং $\nabla\psi = \mathbf{i}(6x) + \mathbf{j}(-2y) + \mathbf{k}(2)$

$(1, -2, 1)$ বিন্দুতে,

$\nabla\phi = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $\nabla\psi = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\Rightarrow |\nabla\phi| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$

এবং $|\nabla\psi| = \sqrt{(36 + 16 + 4)} = 2\sqrt{14}$

তলদ্বয়ের অন্তঃস্থ কোণ θ হইলে $\cos\theta = \dfrac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}$

$$= \frac{6 - 16 + 4}{\sqrt{21}\,.\,2\sqrt{14}} = -\frac{3}{7\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7\sqrt{6}}\right).$$

উদাহরণ–44. $x^2y + z = 3$ এবং $x\ln z + y^2 = 4$ তলদ্বয়ের $(-1, 2, 1)$ বিন্দুতে তলের অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর। [Find the angle between the surfaces $x^2y + z = 3$ and $x\ln z + y^2 = 4$ at the point $(-1, 2, 1)$.]

[NUH–2009, NUH(NM)–2008]

সমাধান ঃ ধরি $\phi = x^2y + z - 3$ এবং $\psi = x\ln z + y^2 - 4$

$$\Rightarrow \nabla\phi = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

এবং $\nabla\psi = \mathbf{i}\ln z + 2\mathbf{j}y + \dfrac{x}{z}\mathbf{k}$

$\therefore$ $(-1, 2, 1)$ বিন্দুতে, $\nabla\phi = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\nabla\psi = 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$$\Rightarrow |\nabla\phi| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ এবং } |\nabla\psi| = \sqrt{17}$$

এখন প্রদত্ত তলদ্বয়ের মধ্যবর্তী নির্ণেয় কোণ θ হইলে পাই,

$$\cos\theta = \frac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}$$

$$= \frac{4-1}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{34}}\right).$$

উদাহরণ-45. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ বক্রতলের $P(-3, 0, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ এবং অভিলম্ব রেখার পরামিতিক সমীকরণ নির্ণয় কর। [Find an equation for the tangent plane and parametric equation for the normal line to the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ at $P(-3, 0, 4)$.] **[NUH(NM)–2004]**

সমাধান ঃ ধরি $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 25$

$$\Rightarrow \nabla\phi = 2\mathbf{i}x + 2\mathbf{j}y + 2\mathbf{k}z$$

$(-3, 0, 4)$ বিন্দুতে $\nabla\phi = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$

এখন $(-3, 0, 4)$ বিন্দুতে প্রদত্ত বক্রতলের স্পর্শক সমতলের সমীকরণ

$$[(x, y, z) - (-3, 0, 4)] \cdot \nabla\phi = 0$$

$$\Rightarrow -6(x+3) + 8(z-4) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 4z + 25 = 0$$

আবার, $(-3, 0, 4)$ বিন্দুতে প্রদত্ত বক্রতলের অভিলম্ব রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$$[(x, y, z) - (-3, 0, 4)] \times \nabla\phi = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x+3 & y & z-4 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow 8\mathbf{i}y - (6z - 24 + 8x + 24)\,\mathbf{j} + 6\mathbf{k}y = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow 4\mathbf{i}y - (3z + 4x)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}y = \mathbf{0}$$

যেহেতু $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ভেক্টরত্রয় অনির্ভরশীল, সুতরাং উহাদের সহগ পৃথকভাবে শূন্য হইবে।

$$\therefore 4y = 0,\ 3z + 4x = 0,\ 3y = 0$$

ধরি $z = -4t$ $\therefore y = 0, x = 3t$

সুতরাং প্রদত্ত বক্রতলের $(-3, 0, 4)$ বিন্দুতে অভিলম্ব রেখার পরামিতিক সমীকরণ

$$x = 3t,\ y = 0,\ z = -4t.$$

উদাহরণ–46. $x^2 + y^2 = z$ তলের $(2, -1, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শক তল এবং অভিলম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Find the equation of the tangent plane and normal line to the surface $x^2 + y^2 = z$ at the point $(2, -1, 5)$]

[NUH(NM)–2005, 2006, 2010, NUH–2017]

সমাধান ঃ ধরি $\phi = x^2 + y^2 - z$ এবং $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

$\therefore \nabla\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$, এখন, $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

$\Rightarrow \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

স্পর্শক তলের সমীকরণ, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0$

$\Rightarrow \{\mathbf{i}(x-2) + \mathbf{j}(y+1) + \mathbf{k}(z-5)\} \cdot (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y - z = 5.$

২য় অংশ ঃ অভিলম্ব রেখার ভেক্টর সমীকরণ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow [\mathbf{i}(x-2) + \mathbf{j}(y+1) + \mathbf{k}(z-5)] \times (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-2 & y+1 & z-5 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow \mathbf{i}\{-(y+1) + 2(z-5)\} + \mathbf{j}\{4(z-5) + (x-2)\}$

$\qquad + \mathbf{k}\{-2(x-2) - 4(y+1)\} = \mathbf{0}$

যেহেতু $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ অনির্ভরশীল ভেক্টর, সুতরাং $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ এর সহগ পৃথকভাবে শূন্য হইবে।

$\therefore -(y+1) + 2(z-5) = 0 \;\cdots\cdots\; (1)$

$4(z-5) + (x-2) = 0 \;\cdots\cdots\; (2)$

$-2(x-2) - 4(y+1) = 0 \;\cdots\cdots\; (3)$

$(1) \Rightarrow y + 1 = 2(z-5)$

$\Rightarrow \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{-1} \;\cdots\cdots\; (4)$

$(2) \Rightarrow 4(z-5) = -(x-2)$

$\Rightarrow \dfrac{z-5}{-1} = \dfrac{x-2}{4} \;\cdots\cdots\; (5)$

(4) ও (5) হইতে পাই, $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{-1}$.

উদাহরণ-47. $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 - z = 3$ তলদ্বয়ের অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর। [Find the angle between the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $x^2 + y^2 - z = 3$, at the point $(2, -1, 2)$.]

[NUH-2006, NUH(NM)-2006(অd)]

সমাধান ঃ ধরি, $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ এবং $\psi = x^2 + y^2 - z - 3$.

$$\therefore \nabla\phi = \nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 2\mathbf{i}x + 2\mathbf{j}y + 2\mathbf{k}z$$

এবং $\nabla\psi = \nabla(x^2 + y^2 - z - 3) = 2\mathbf{i}x + 2\mathbf{j}y - \mathbf{k}$

$(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $\nabla\phi = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\nabla\psi = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

এখন $|\nabla\phi| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$ এবং $|\nabla\psi| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$

প্রদত্ত তলদ্বয়ের অন্তঃস্থকোণ θ হইলে আমরা পাই,

$$\cos\theta = \frac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}$$

$$= \frac{16 + 4 - 4}{6\sqrt{21}} = \frac{16}{6\sqrt{21}}.$$

সুতরাং নির্ণেয় অন্তঃস্থ কোণ, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)$.

উদাহরণ-48. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ তলের $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শক তল এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Find the equation of tangent plane and normal of the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ at the point $(2, -1, 2)$.]

[NUH-2010]

সমাধান ঃ ধরি $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 9$

$$\therefore \nabla\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$(2, -1, 2)$ বিন্দুতে, $(\nabla\phi)_0 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

আবার, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ এবং $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

এখন, স্পর্শক তলের সমীকরণ, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\nabla\phi)_0=0$

$$\Rightarrow 4(x-2)-2(y+1)+4(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 2x-y+2z=9$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times(\nabla\phi)_0=\mathbf{0}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-2 & y+1 & z-2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}(4y+4+2z-4)+\mathbf{j}(4z-8-4x+8)+\mathbf{k}(-2x+4-4y-4)=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow 4(y+1)+2(z-2)=0,\ 4(z-2)-4(x-2)=0,$$

$$-2(x-2)-4(y+1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{2}.$$

উদাহরণ-49. যদি ভেক্টর $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+2y+az)\,\mathbf{i} + (bx-3y-z)\mathbf{j} + (4x+cy+2z)\mathbf{k}$ অঘূর্ণায়মান হয় তবে a, b, c এর মান নির্ণয় কর। [If the vector $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+2y+az)\,\mathbf{i} + (bx-3y-z)\mathbf{j} + (4x+cy+2z)\mathbf{k}$ is irrotational then find the value of a, b, c.]

[NUH-2012, NUH(NM)-2012, 2016]

সমাধান ঃ যদি $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+2y+az)\mathbf{i} + (bx-3y-z)\mathbf{j} + (4x+cy+2z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণায়মান হয় তবে আমরা পাই,

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (c+1)\mathbf{i}+(a-4)\mathbf{j}+(b-2)\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c+1=0,\ a-4=0,\ b-2=0$$

$$\Rightarrow a=4,\ b=2,\ c=-1.$$

EXERCISE–12

Part–A : Brief / Quiz Questions with Answers
[উত্তরসহ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি]

12.1. স্কেলার ফিল্ড বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by scalar field?]

Ans : যদি কোনো এলাকার প্রত্যেক (x, y, z) বিন্দুর জন্য একটি স্কেলার ফাংশন $\phi(x, y, z)$ পাওয়া যায়, তবে $\phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার ফিল্ড সূচিত করে। [If $\phi(x, y, z)$ is a scalar function which is defined at each point (x, y, z) of a region in space, then $\phi(x, y, z)$ represent a scalar field.]

12.2. একটি স্কেলার ফিল্ড এর উদাহরণ দাও। [Give an example of a scalar field.]

Ans : $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ একটি স্কেলার ফিল্ড।

12.3. ভেক্টর ফিল্ড কী ? [What is vector field?]

Ans : যদি কোনো এলাকার প্রত্যেক (x, y, z) বিন্দুর জন্য একটি ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{F}(x, y, z)$ পাওয়া যায়, তবে $\mathbf{F}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর ফিল্ড সূচিত করে। [If $\mathbf{F}(x, y, z)$ is a vector valued function which is defined at each point (x, y, z) of a region in space then $\mathbf{F}(x, y, z)$ represents a vector field.]

12.4. একটি ভেক্টর ফিল্ডের উদাহরণ দাও। [Give an example of a vector field.]

Ans : $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}zx$ একটি ভেক্টর ফিল্ড।

12.5. ∇ কি? [What is ∇?]

Ans : ∇ হইল ভেক্টর অপারেটর বা ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর। ইহাকে ডেল বা ন্যাবলা বা অ্যাটলেড পড়া হয়।

12.6. আয়তাকার স্থানাংকে ∇ কে সংজ্ঞায়িত কর। [Define ∇ in rectangular coordinates.]

Ans : আয়তাকার স্থানাংকে ভেক্টর অপারেটর ∇ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়ঃ

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

12.7. স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট বলিতে কী বুঝ? [What do you mean by gradient of scalar function?]

Ans : যদি কোনো এলাকার প্রত্যেক বিন্দুতে $\phi(x, y, z)$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে $\nabla\phi$ কে স্কেলার ফাংশন ϕ এর গ্রেডিয়েন্ট বলে। [If $\phi(x, y, z)$ is defined and differentiable function at all points in a region then $\nabla\phi$ is called gradient of scalar function ϕ.]

12.8. $\nabla\phi$ কি? [What is $\nabla\phi$?] **[NUH(NM)–2016, 2018]**

Ans : $\nabla\phi$ একটি গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর বা ভেক্টর ফাংশন বা ভেক্টর ফিল্ড। [$\nabla\phi$ is a gradient vector or vector function or vector field.]

12.9. আয়তাকার স্থানাংকে $\nabla\phi$ এর সংজ্ঞা দাও। [Define $\nabla\phi$ in rectangular coordinates.]

Ans : আয়তকার স্থানাংকে $\nabla\phi$ বা grad ϕ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \sum \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

12.10. গ্রেডিয়েন্ট এর তাৎপর্য কি? [What is the significance of the gradient?] **[DUH(Affi. Coll.)–2017]**

Ans : কোনো স্কেলার ফিল্ডের গ্রেডিয়েন্ট উহাকে ভেক্টর ফিল্ডে রূপান্তর করে।

12.11. কোনো তলের গ্রেডিয়েন্ট এর দিক কোন দিকে হয়? [What is the direction of gradient of a surface?]

Ans : কোনো স্কেলার ক্ষেত্রস্থিত তলের কোনো বিন্দুতে ঐ তলের গ্রেডিয়েন্ট এর দিক হইবে ঐ বিন্দুতে তলটির লম্ব দিকে।

12.12. ভেক্টর ফাংশনের ডাইভারজেন্স বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by divergence of a vector function?]

Ans : যদি কোনো এলাকায় প্রত্যেক বিন্দুতে $\mathbf{A}(x, y, z)$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ কে ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{A}(x, y, z)$ এর ডাইভারজেন্স বলে। [If $\mathbf{A}(x, y, z)$ is defined and differentiable at all points in a region then $\nabla \cdot \mathbf{A}$ is called divergence of a vector function $\mathbf{A}(x, y, z)$.]

12.13. $\nabla \cdot \mathbf{A}$ কি? [What is $\nabla \cdot \mathbf{A}$?]

Ans : $\nabla \cdot \mathbf{A}$ একটি স্কেলার ফাংশন বা স্কেলার ফিল্ড।

12.14. আয়তাকার স্থানাংকে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ এর সংজ্ঞা দাও। [Define $\nabla \cdot \mathbf{A}$ in rectangular coordinates.] **[NUH–2014, NUH(NM)–2014]**

Ans : আয়তাকার স্থানাংকে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ বা div $\mathbf{A}$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i}A_1(x, y, z) + \mathbf{j}A_2(x, y, z) + \mathbf{k}A_3(x, y, z)$.

12.15. ডাইভারজেন্স এর ভৌত তাৎপর্য লিখ। [Write down the phisical significance of divergence.]

Ans : কোনো ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার ফিল্ড হয় যাহা মাধ্যমের ঘনত্বের পরিবর্তনের পরিমাপ নির্দেশ করে।

12.16. সলিনয়ডাল ভেক্টর কাকে বলে? [What is called solenoidal vector?]

Ans : কোনো ভেক্টরের ডাইভারজেন্স শূন্য হইলে ভেক্টরটিকে সলিনয়ডাল ভেক্টর বলে। [If the divergence of any vector is zero then the vector is called solenoidal vector.] **[NUH–2017]**

12.17. সোর্স ফিল্ড কাকে বলে? [What is source field?] **[NUH–2018]**

Ans : যদি কোনো ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স ধনাত্মক হয়, তবে ভেক্টর ফিল্ডটিকে সোর্স ফিল্ড বলা হয়। [If the divergence of any vector is positive then the vector field is called source field.]

12.18. সিঙ্ক ফিল্ড কি? [What is sink field?]

Ans : যদি কোনো ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স ঋণাত্মক হয় তবে ঐ ফিল্ডকে সিঙ্ক ফিল্ড বলা হয়। [If the divergence of any vector is negative then the vector is called sink field.]

12.19. যদি A একটি সলিনয়ডাল ভেক্টর হয় তবে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ কত? [If $\mathbf{A}$ ia a solenoidal vector then what is $\nabla \cdot \mathbf{A}$?]

Ans : যদি $\mathbf{A}$ একটি সলিনয়ডাল ভেক্টর হয় তবে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ বা div $\mathbf{A}$ এর মান শূন্য অর্থাৎ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

12.20. যদি $\mathbf{A}$ একটি সোর্স ফিল্ড হয় তবে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ কত? [If $\mathbf{A}$ is a source field then what is $\nabla \cdot \mathbf{A}$?]

Ans : যদি $\mathbf{A}$ একটি সোর্স ফিল্ড হয় তবে $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$.

12.21. যদি **A** একটি সিঙ্ক ফিল্ড হয় তবে $\nabla \cdot \mathbf{A}$ কত? [If **A** is a sink field, then what is $\nabla \cdot \mathbf{A}$?]

Ans : **A** একটি সিঙ্ক ফিল্ড হইলে $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$

12.22. ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর কি? [What is the Laplacian operator?]

Ans : ∇ একটি ভেক্টর অপারেটর হইলে ∇^2 বা $\nabla \cdot \nabla$ কে ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর বলা হয়।

12.23. আয়তাকার স্থানাংকে ল্যাপলাসিয়ান অপারেটরের সংজ্ঞা দাও। [Define Laplacian operator in rectangular coordinates.]

[NUH–2015, NUH(NM)–2015]

Ans : আয়তাকার স্থানাংকে ল্যাপলাসিয়ান অপারেটরকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

12.24. ল্যাপলাসের সমীরকণ কি? [What is Laplace's equation?]

[NUH–2018]
(NM)

Ans : $\nabla^2 \phi = 0$ কে ল্যাপলাসের সমীকরণ বলা হয়।

12.25. ভেক্টর ফাংশনের কার্ল বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by curl of a vector function?] **[NUH–2012, NUH(NM)–2012]**

Ans : যদি কোন এলাকার প্রত্যেক বিন্দুতে **A**(x, y, z) সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে $\nabla \times \mathbf{A}$ কে ভেক্টর ফাংশন **A**(x, y, z) এর কার্ল বলে। [If **A**(x, y, z) is defined and differentiable at all points in a region then $\nabla \times \mathbf{A}$ is called curl of a vector function **A**(x, y, z).]

12.26. $\nabla \times \mathbf{A}$ কি? [What is $\nabla \times \mathbf{A}$?]

Ans : $\nabla \times \mathbf{A}$ একটি ভেক্টর ফাংশন বা ভেক্টর ফিল্ড।