数学实验课程第四次实验报告

PB21010479　王曹励文

2023 年 10 月 10 日

1　分形树的生成

1.1　实验题目

切换三种不同的规则生成分形树，并观察不同迭代次数下的分形树.

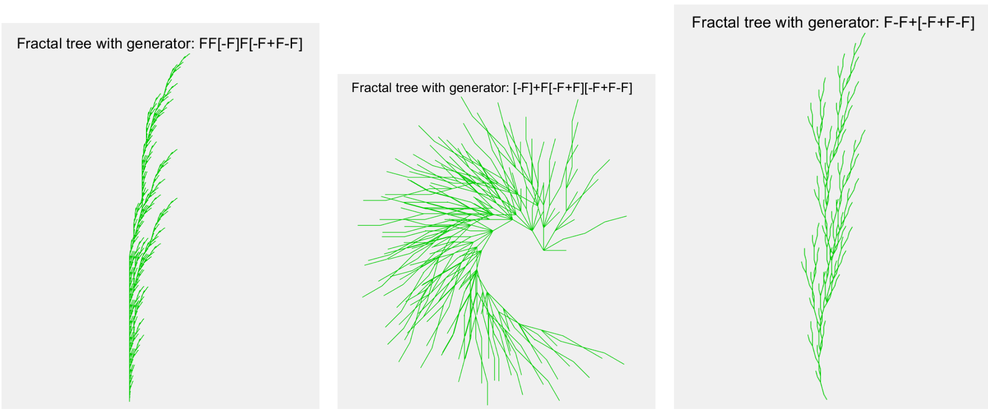
1.2　解决思路

分形树的生成方式为用生成方式对应的字符串替换原先字符串中的’F’，因此我们考虑先利用迭代改变字符串，字符串代表分形树的具体生成方式，之后写出字符串每一个符号代表的图形变换即可，为了更像“树”，采用颜色为绿色. 控制生成方式的参数有初始角度，控制大体的生长方向；每次旋转的角度，控制分支的生长方向；步长控制树的生长速度. 源代码见 9.1 所示.

1.3　实验结果

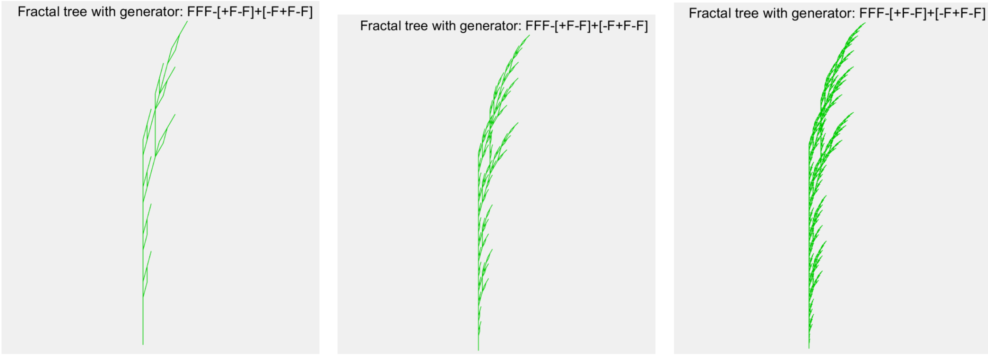
图 1 分别为带入不同生成方式得到的树的结果，其生成方式见图中，迭代次数均为 4. 图 2 分别表示对于一个字符串迭代次数为 2、3、4 的结果.

可以看出结果具有某一种自相似性，对于特定的生成方式和现实中的树很相似；而该迭代的数目是巨大的，因此在 n=4 的时候即需要一定的计算量，花费一定的时间.



(a) 生成方式 1　　(b) 生成方式 2　　(c) 生成方式 3

图 1: 不同生成方式迭代 4 次



(a) 迭代 2 次 (b) 迭代 3 次 (c) 迭代 4 次

图 2: 相同生成方式迭代不同次数

2 Julia 集的绘制

2.1 实验题目

通过以下方法绘制 Julia 集：

1. 设定初值 p、q 分别表示 μ 的实部和虚部，最大迭代次数为 N，图片的分辨率大小为 a×b，使用的颜色数 K（如 K=16）；
2. 设定一个上界值：$M \geq \max(2, \sqrt{p^2+q^2})$
3. 将矩形区域 [-M,M]×[-M,M] 分成 a×b 的网格，分别以每个网格点为初值 (x_0, y_0)，完成以下 N 次迭代：

$$x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p\,;$$

$$y_{k+1} = 2x_k y_k + q\,;$$

如果对 $k \in \{1, 2, \cdots N\}$，都有 $x_k^2 + y_k^2 \leq M^2$，则将初值 (x_0, y_0) 处的像素设置为深色；如果从某一步 n 开始，$x_n^2 + y_n^2 \geq M^2$，则将初值 (x_0, y_0) 处的像素用 n mod K 处理.

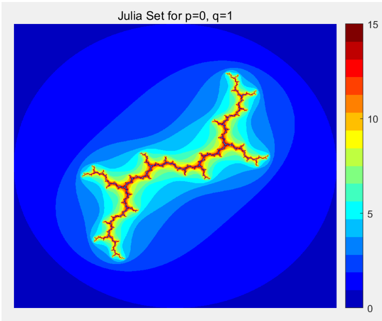
2.2 解决思路

为了方便一次绘制出对于多个 p,q 成立的图像，我们定义 p,q 的数组，对于数组直接调用绘制 Julia 集的函数即可. 对于着色，使用 jet 函数，根据数值将其映射为彩虹色；对于颜色数值我们考虑在循环中加入一个计数器，记录第一个不满足条件的 k 值，对其 mod K（颜色数）处理得到每个点处的颜色数值，即 img，找到第一个不满足的数值后即跳出循环，以减少计算量.

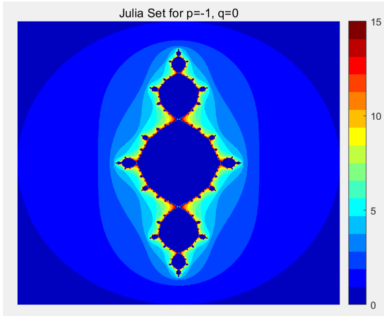
2.3 实验结果

源代码见文件 9.2，图 3 表示了不同 p,q 值下的结果，p 与 q 的值在图中显现.

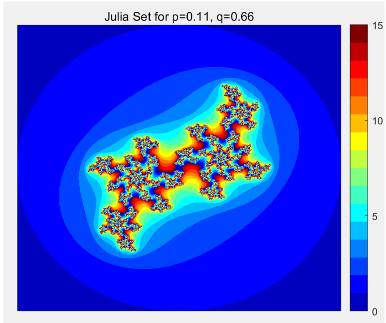
选取其中一个图放大，如图 4 所示，可以看到明显的自相似现象.



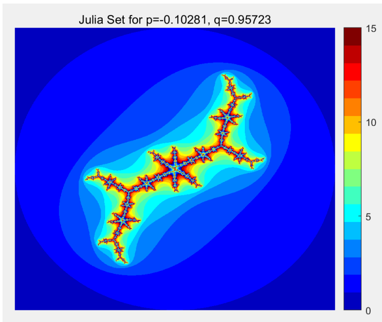
(a) p=0,q=1



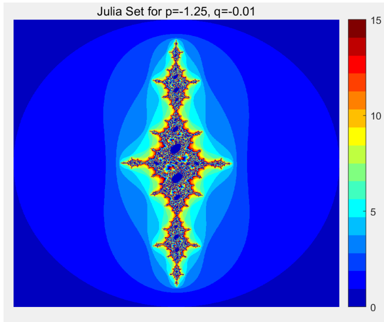
(b) p=-1,q=0



(c) p=0.11,q=0.66



(d) p=-0.10281,q=0.95723



(e) p=-1.25,q=-0.01

图 3: Julia 集绘制的实验结果

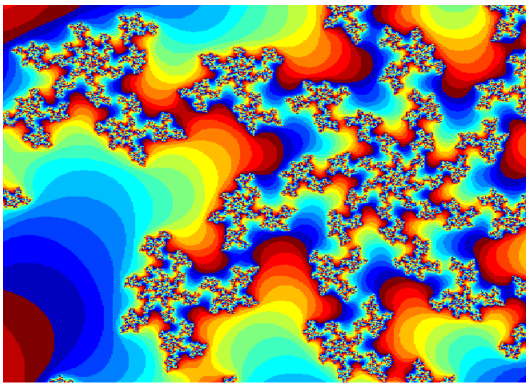


图 4: Julia 集的局部

3 IFS 吸引子图像的绘制

3.1 实验题目

给定仿射变换 $\omega_1(z) = sz + 1$，$\omega_2(z) = sz - 1$，以及相应的概率 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$，其中 s，z 均为复数. 取 $s = 0.5 + 0.5i$，绘制相应 IFS 吸引子的图形. 再取不同的 s，观察图像的变化.

3.2 解决思路

本题的难点在于概率如何控制，我们使用 rand() 函数生成一个 0,1 之间的随机数，如果该数小于概率 p_1 对应的数，则执行 1 的仿射变换；反之执行 2 的仿射变换. 取定初值为 z，定义变换的结果数组为 points，绘图时取 x 为该数组每个数的实部，y 为该数组中每个数的虚部即可，利用 scatter 函数绘制散点图.

3.3 实验结果

源代码见文件 9.3，对于 $s = 0.5 + 0.5i$ 的图像如图 5 所示，确实具有分形的性质.

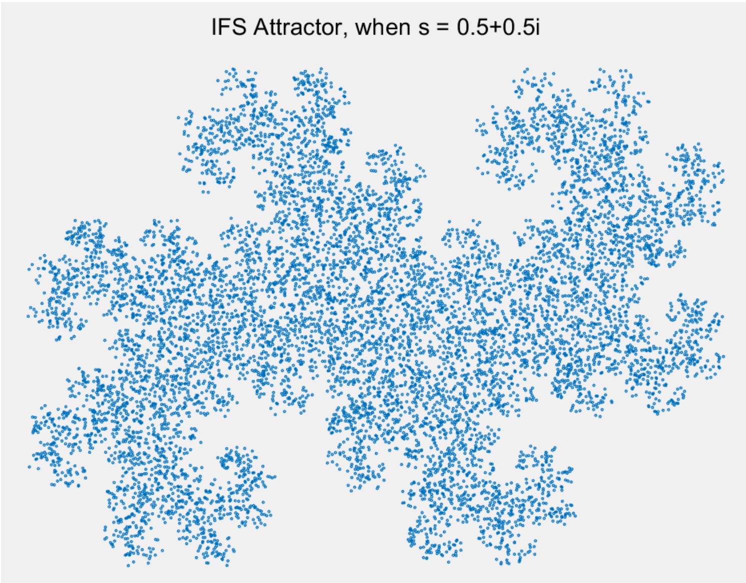
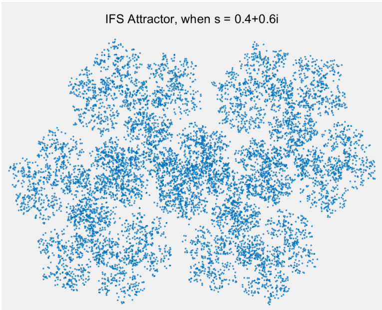
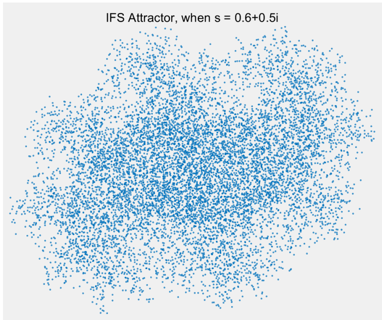


图 5: $s = 0.5 + 0.5i$ 的 IFS 吸引子图像

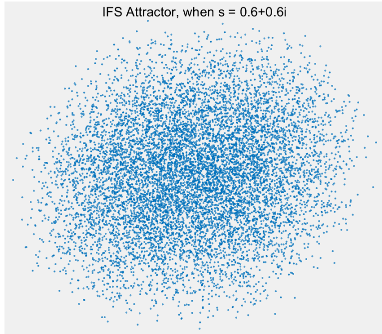
改变附近的 p,q 值，得到的图像如图 6 所示. 由于迭代次数较高，因此初值不能过大；且注意到初值过小时图像较小，不够明显；部分情形下呈现弥散状态，分形的结构亦不明显.



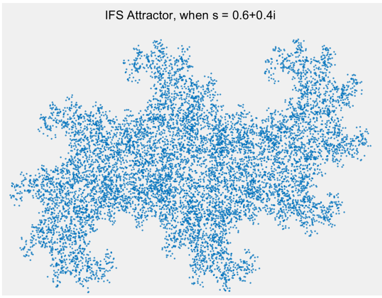
(a) $s = 0.4 + 0.6i$



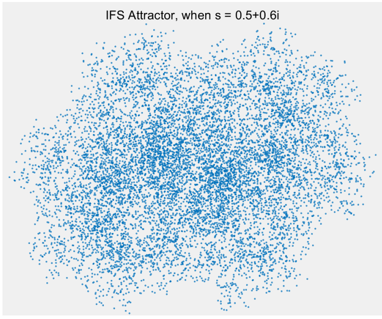
(b) $s = 0.6 + 0.5i$



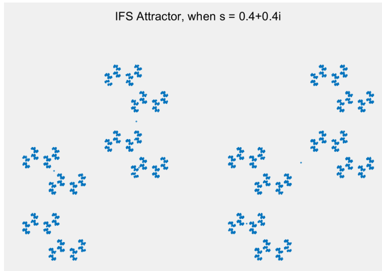
(c) $s = 0.6 + 0.6i$



(d) $s = 0.6 + 0.4i$



(e) $s = 0.5 + 0.6i$



(f) $s = 0.4 + 0.4i$

图 6: 改变 s 的实验结果

4 Feigenbaum 图像的绘制

4.1 实验题目

利用函数

$$f(x) = ax(1 - x)$$

进行如下操作:

1. 将区间 (0,4] 以某个步长 Δ a=0.4 离散化，对每个离散的 a 值，随机选定 (0,1) 中一个数值作为迭代初值，利用函数 $f(x)$ 进行迭代，迭代 100 次;
2. 忽略前 50 个迭代值，将后 50 个点显示在坐标平面上;
3. 根据步长逐渐增大 a 的值，重复前面的步骤，直到 a 为 4.

4.2 解决思路

本题首先建立对 a 的循环，将 a 储存在 a_values 数组中；之后对于给定的 a 操作，先生成 (0,1) 中的随机数为初值，对该初值利用函数进行迭代，只记录需要显示的点的数值，并作图即可.

4.3 实验结果

源代码见文件 10.1，实验结果如图 7 所示.

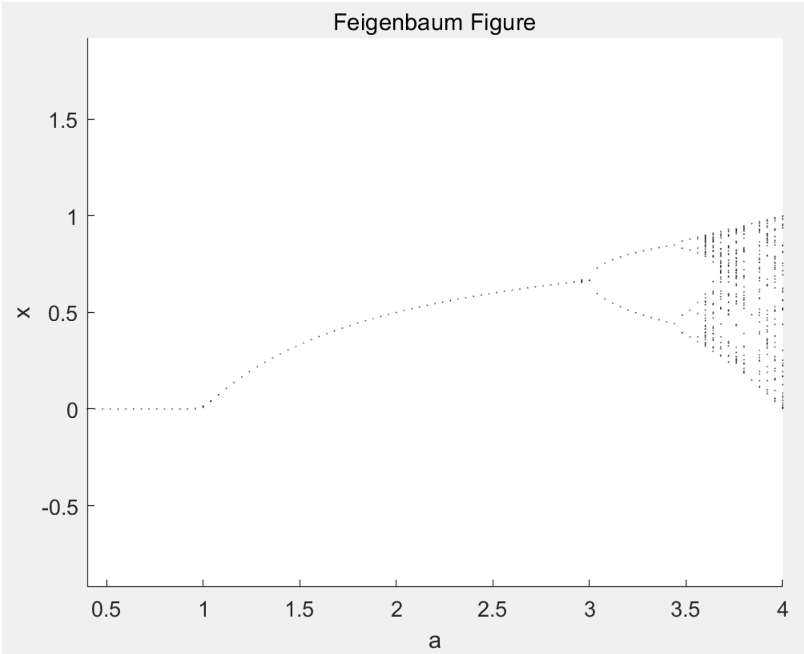


图 7: Feigenbaum 图像

注意到:

1. 左部的曲线:左部的曲线表示在参数 a 较小的范围内,系统的迭代结果趋向于一个稳定的状态或周期。这意味着在这些参数值下,系统不表现出混沌行为,而是趋向于收敛到一个有序的状态。
2. 曲线分成两支:在费根鲍姆图上,曲线分成两支通常表示周期倍增的现象。从某一点开始,系统的周期会翻倍。这意味着在这些参数值附近,系统经历周期性的变化,而且这些周期会以两倍的频率出现。迭代的点在这些情况下会在两个周期之间来回振荡。
3. 曲线分成几支:在下一个分支点,曲线通常会再次分成两支,每支代表了更高阶的周期倍增。这些分支点表示系统的周期性变化变得更加复杂。迭代的点在这些情况下会在多个周期之间来回振荡。
4. 分支过程是否一直进行下去:费根鲍姆图展示了周期倍增的连续过程,但这个过程不会一直无限地进行下去。在某个极限分支点附近,系统进入了混沌状态,周期性行为失去了稳定性。在混沌状态下,迭代的点不再显示出周期性,而是呈现出高度不规则的运动。