Project1 实验报告

PB21010479　王曹励文

2023 年 11 月 25 日

目录

1 问题重述 **1**

2 提出算法 **2**

2.1 问题一 2

2.2 问题二 3

2.2.1 三角剖分 3

2.2.2 多边形剖分 8

2.2.3 改变填充率的范围 10

2.2.4 改变材料与液体的相对密度 11

2.3 问题三 12

3 总结与改善 **12**

4 实验的完善与改进 **13**

1 问题重述

Project1 要求研究天鹅的浮力平衡问题。给定液体和材料的密度，以天鹅在水下的面积代替水下的体积，假定天鹅的 2D 平面图案通过一定的厚度挤出成 3D 结构，天鹅的图案如图 1 所示. 要求完成以下项目内容：

1. 在水的密度是 $1\mathrm{g/cm^3}$，天鹅的 1/5 在水下，(笔者根据题目误认为给定的 1/5 为在水中体积的占比，后来发现图中的意思应该是高度的占比，但已经来不及修改，最后在第四部分中进行了修改)，通过密度为 $1.25\mathrm{g/cm^3}$ 的 PLA 材料，以 50% 的填充率进行 3D 打印的条件下，天鹅是否可以在图中漂浮；若不然，通过均匀改变天鹅的填充比例，可否按照图中姿势漂浮；并进行物理验证.

2. 对天鹅分别实现三角形剖分与 Voronoi 多边形剖分，仍然使用 PLA 对天鹅进行 3D 打印，每个三角形/多边形有一个单独的填充百分比，范围为 0 -100%，求解三角形的具体百分比是多少能使形状以最稳定的方式漂浮，以及优化形状的新质心. 另一方面，由于当填充比例非常低时，机械性能可能太弱，因此还需求解填充比例在 10%-90% 的优化结果吗. 最后，考虑用其他材料打印和液体密度对优化结果的影响.

3. 考虑能否让形状沿着指定方向进行漂浮的过程，分析与前面已给出模型的差异.

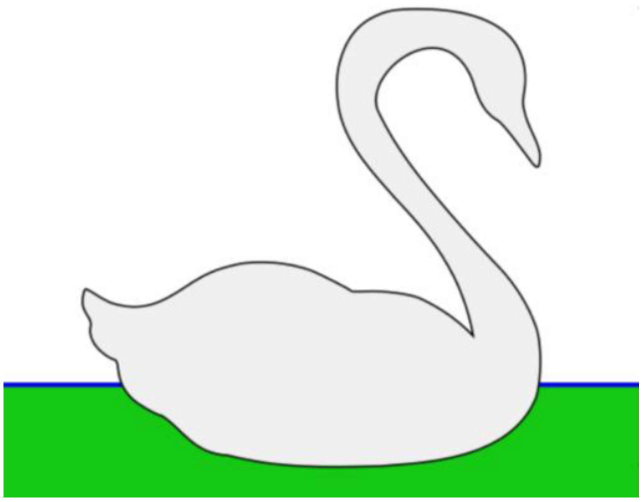


图 1: 给定天鹅的图案

2 提出算法

算法的核心如下:

1. 第一问的条件是填充率处处相等，即天鹅的密度均匀分布，因此此时的重心等于浮心，由于浮力与体积的关系，浮心即用形心替代，因此只需考虑浮力大小和重力大小的关系，建立对应的物理模型即可.
2. 第二问首先如何对天鹅进行良好的剖分，在三角剖分时，笔者给出了两种剖分方式，一种为在天鹅内部创造均匀分布的点，之后进行剖分；另一种剖分更好的实现了天鹅的几何，称为良好的剖分.Voronoi 多边形剖分笔者直接调用了现有的函数，并利用了良好的三角剖分. 其次考虑对每个多边形给出优化后的填充率的值，根据模型背景，填充率有范围限制，浮心应等于重心，浮力应等于重力，在该三者的条件下，对填充率数组进行优化，使得重心的纵坐标达到最小值. 最后再考虑将填充的结果可视化.
3. 第三问为开放式问题，天鹅开始移动的物理背景复杂度明显提升.
4. 请从 main 函数中运行.

2.1 问题一

根据分析，填充率处处相等，即天鹅的密度均匀分布，因此此时的重心等于浮心，由于浮力与体积的关系，浮心即用形心替代，因此只需考虑浮力大小和重力大小的关系，建立对应的物理模型即可.
浮力的表达式为

$$F = \rho_0 g S_0; \tag{2.1}$$

重力的表达式为

$$G = k\rho g S; \tag{2.2}$$

其中 ρ_0 表示液体的密度，S_0 表示在水下的面积，ρ 表示材料的密度，k 表示填充率，S 表示物体的面积.

根据题干描述，

$$S_0 = \frac{1}{5}S; \tag{2.3}$$

可以求解得

$$k = \frac{\rho_0}{5\rho} = \frac{1}{6.25} = 16\%. \tag{2.4}$$

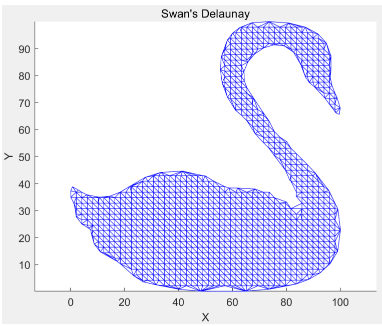
因此只有 16% 的填充率时可以达到平衡的要求.

2.2 问题二

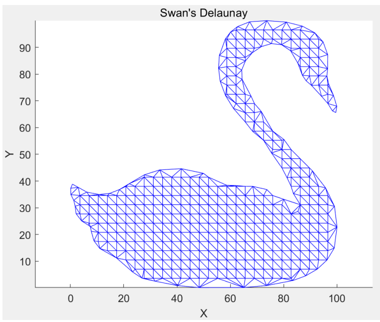
2.2.1 三角剖分

对于三角剖分，笔者给出了两种方式，第一种方式为生成天鹅内部均匀的点，之后进行三角剖分，使用函数 Boundary_Points_Generate(boundary,x,y)，boundary 为存储边界的值，x 和 y 参数分别表示 x 和 y 方向分割的长度，该函数返回需要剖分的点，使用函数 Boundary_Points_Delaunay(boundary,points) 对生成的点集进行三角剖分，返回剖分的生成关系，函数 Delaunay_Depict 可以对该方式生成对应的图像；第二种方式存储在文件夹 First_way 中，核心思路为更加具备几何性质的 ode 三角剖分，gen_mesh 函数对给定的边界实现内部剖分，通过控制方片的半径大小实现分割的精细程度，返回剖分的顶点和生成关系，Directly_Depict 函数可以针对其绘制剖分图像.

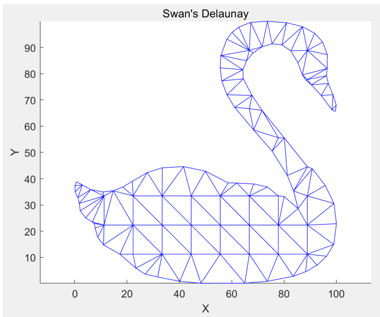
不同数目均匀分割的三角剖分如图 2 所示，不同精细程度的好的剖分如图 3 所示，可以看到图 3 所示的剖分更具有好的几何性质.



(a) 50×50 分割

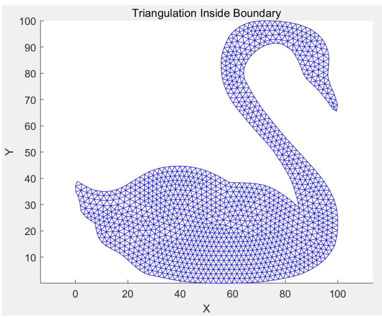


(b) 30×30 分割

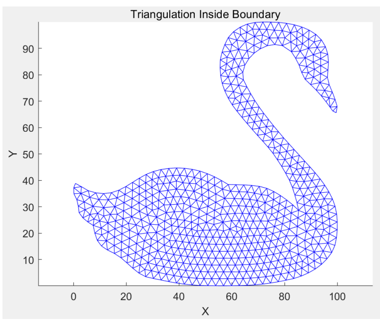


(c) 10×10 分割

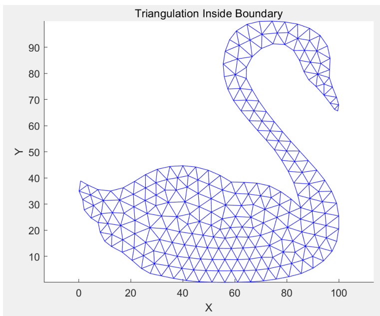
图 2: 均匀分割的三角剖分



(a) 方片半径为 2



(b) 方片半径为 3



(c) 方片半径为 5

图 3: 好的三角剖分

之后考虑模型的优化，根据模型背景，填充率有范围限制，浮心应等于重心，浮力应等于重力，在该三者的条件下，对填充率数组进行优化，使得重心的纵坐标达到最小值.

由于每一个小分割形状均为均匀填充的，因此其重心与浮心相同，坐标均为

$$x\_average = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{2.5}$$

其中 n 表示该图形的边数.
浮心的计算公式为

$$shape\_center = \frac{\sum Area(i)x(i)}{\sum Area(i)}; \tag{2.6}$$

其中 $x(i)$ 表示第 i 个面积元的重心与浮心值，$Area(i)$ 表示第 i 个面积元的面积. 重心的计算公式为

$$gravity\_center = \frac{\sum Area(i)k(i)x(i)}{\sum Area(i)k(i)}; \tag{2.7}$$

其中 $k(i)$ 表示第 i 个面积元的填充率. 重力的表达公式为

$$gravity = \rho g \sum Area(i)k(i); \tag{2.8}$$

浮力的表达公式为

$$floatage = \rho_0 g \cdot \frac{1}{5} \sum Area(i); \tag{2.9}$$

根据以上关系，对于三角剖分，编写了函数 Gravity(k, points, insideTriangles) 用来计算填充率数组为 k，剖分点集 point，剖分关系 insideTriangles 对应的重力，Gravity_Center(k, points, insideTriangles) 用以计算相同参数的重心，Shape_Center(points, insideTriangles) 用以计算浮心，Floatage(points, insideTriangles) 用以计算浮力. 采用非线性规划的方式，利用函数 NonlinearOptimization(points, insideTriangles) 进行求解，返回数组 k_opt 的值，存储每一个剖分的填充率.

最后考虑将问题进行可视化处理，ColorAndPlotTriangles(k_opt, insideTriangles, points,64) 函数可以绘制染色后的天鹅图像，64 表示所需要的颜色数.

对于不同类型的三角剖分，我们的实验结果如下：

1. 50×50 的均匀三角剖分，优化的填充率数组见 50×50 均匀分布 _ 三角剖分文件所示. 由于分割是较为细致的，计算量也较大，最终达到的重心结果见图 5.

2. 30×30 的均匀三角剖分，优化的填充率数组见 30×30 均匀分布 _ 三角剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 7.

3. 10×10 的均匀三角剖分，优化的填充率数组见 10×10 均匀分布 _ 三角剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 9.

4. 方块半径为 2 的好的剖分，优化的填充率数组见方片范围为 2 方程分布 _ 三角剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 11.

5. 方块半径为 3 的好的剖分，优化的填充率数组见方片范围为 3 方程分布 _ 三角剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 13.

6. 方块半径为 5 的好的剖分，优化的填充率数组见方片范围为 5 方程分布 _ 三角剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 15.

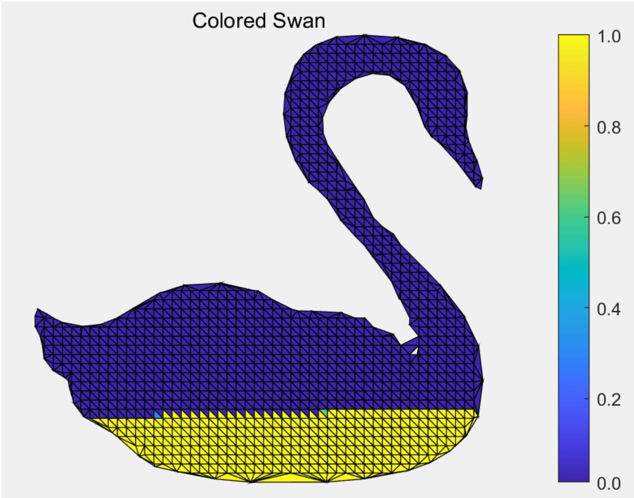


图 4: 50×50 的均匀三角剖分

g_center_x	58.0205
g_center_y	8.9379

图 5: 50×50 的均匀三角剖分重心结果

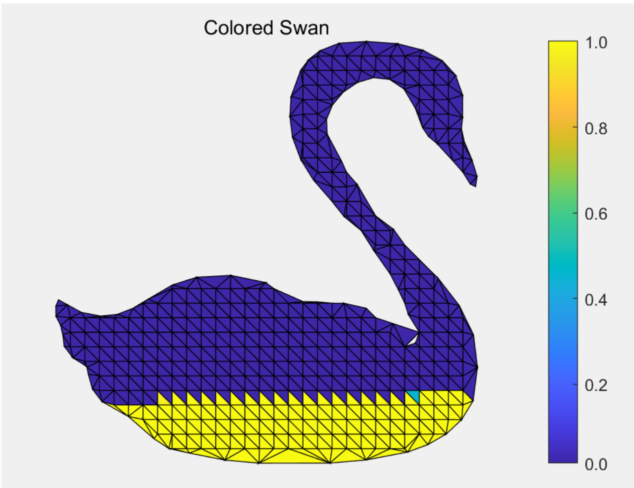


图 6: 30×30 的均匀三角剖分

g_center_x	58.0217
g_center_y	8.9761

图 7: 30×30 的均匀三角剖分重心结果

可以注意到，对于越精细的分割，效果总是更好的，但是需要很多倍数的运算量，50×50 的运算量达到了惊人的 90w 次，且对于达到 30×30 的效果需要 40w 的计算量，而 30×30 效果的计算量只有 13w 次，因此并不意味着越来越精细的分割是有利于问题的计算的. 另一方面，由于此处对填充率没有限制，从计算结果的分布可以看出，均为在较高的三角剖分形状中取填充率约为 0，而较低的三角剖分中填充率约为

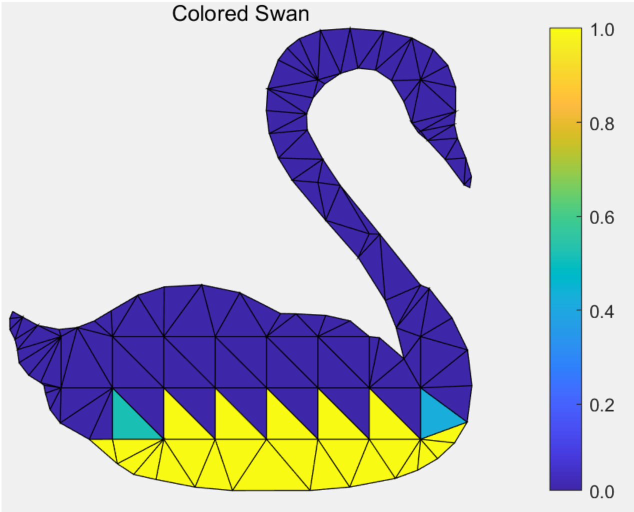


图 8: 10×10 的均匀三角剖分

g_center_x	58.0741
g_center_y	9.4425

图 9: 10×10 的均匀三角剖分重心结果

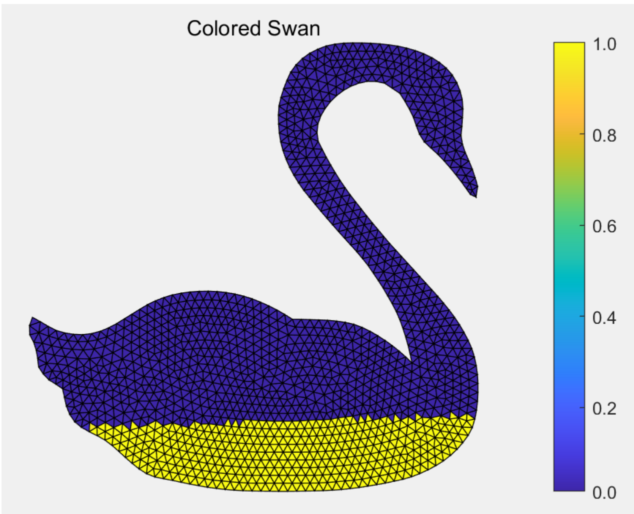


图 10: 方片范围为 2 方程分布

g_center_x	58.1860
g_center_y	8.9599

图 11: 方片范围为 2 方程分布重心结果

1, 这显然是不合乎事实的, 但确实符合直观感受. 而利用良好的三角剖分的计算量是更大的, 对于半径为 2 方片的情形计算量已经达到 108w 次，最终的结果也并不一定比非常精细的均匀分割优，但是好处在于均匀分割的内部可能存在瑕点，且边界处可能分布过于不均匀，整体的观感较差，好的剖分由于利用了天鹅的几何性状，观感非常的好. 对于两个代码，如果想要改变运算时间，可以在 NonlinearOptimization

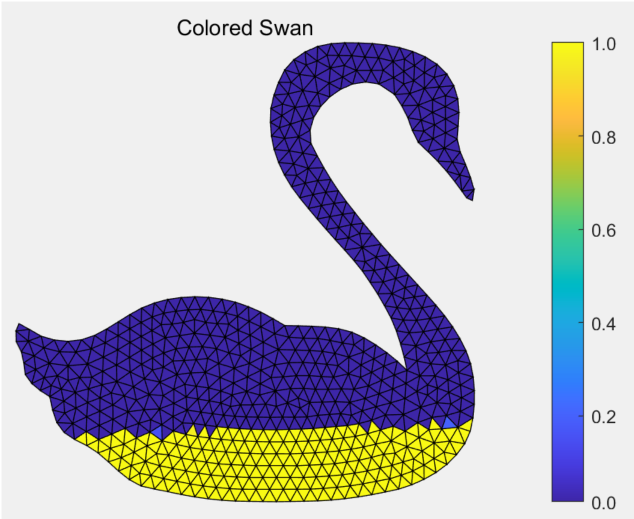


图 12: 方片范围为 3 方程分布

g_center_x	58.1732
g_center_y	8.9700

图 13: 方片范围为 3 方程分布重心结果

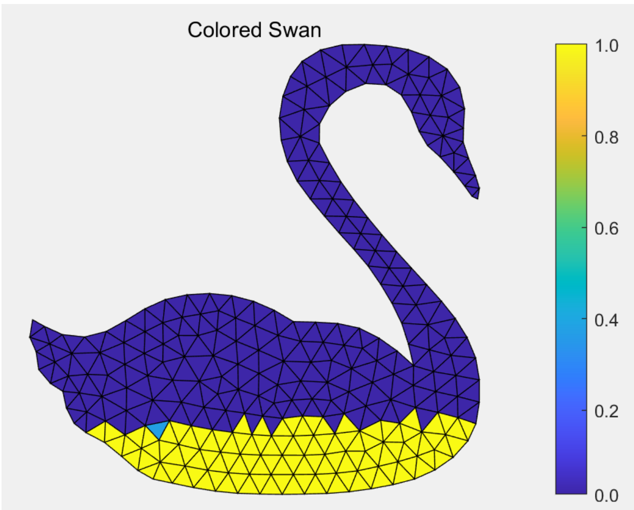


图 14: 方片范围为 5 方程分布

g_center_x	58.1502
g_center_y	9.0207

图 15: 方片范围为 5 方程分布重心结果

函数中修改最大计算量，由于达到一定程度的计算后，规划函数再优化的效率很低.

2.2.2 多边形剖分

对于多边形剖分，笔者发现均匀分布做出来的多边形剖分效果不好，完全没有用到所谓的几何性质，由于过度对称导致中间的几何形状均为正方形，如图 16 所示. 因此笔者只给出了基于好的三角剖分的多变形剖分，先利用 gen_mesh(boundary) 函数生成好的点集，再利用函数 [v,c] = voronoin(points) 直接生成多边形剖分，v 表示点集合，c 蕴含了生成关系. 需要注意的是 v 中含有 inf 点，因此我们将 c 中能索引到 inf 的多边形，删掉 inf，否则无法利用 polyshape 函数确定多边形.Voronoi_inter(v,c, boundary) 函数的目的是确定天鹅边界与多边形剖分的交集，并返回在天鹅内部的多边形剖分，这些多边形才是有效的，需要计算的.Voronoi_Depict(v,c,boundary) 函数用来绘制多边形剖分的图像. 但是由于 v 存在 inf，函数的局限性导致天鹅可能存在边界的坏点，导致边界的多边形剖分并不如想象的自然. 越精细的分割边界处是越自然的. 如图 17 所示，相比之下均匀剖分的边界效果是更美观的，但是对于分割不细的均匀分割，边界还可能出现大面积的坏点，如图 18 所示. 根据已经推导的重力浮力等关系，对于多边

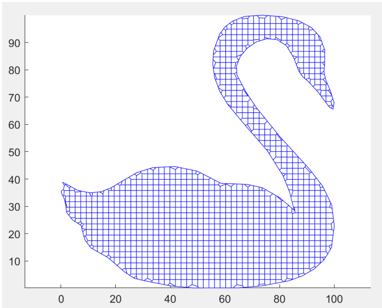
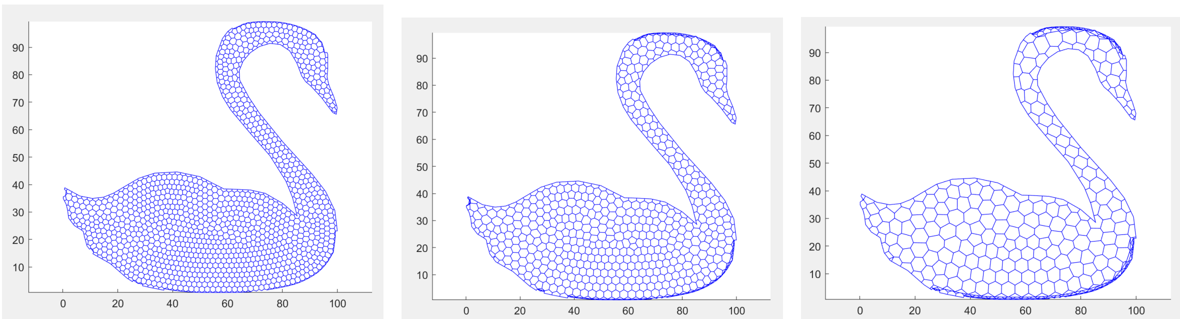


图 16: 均匀分割多边形剖分绘制结果



(a) 方片半径为 2　(b) 方片半径为 3　(c) 方片半径为 5

图 17: 多边形剖分

形剖分，编写了函数 Voronoi_Gravity(k, inter) 用来计算填充率数组为 k，剖分点集 inter 对应的重力，Voronoi_Gravity_Center(k,inter) 用以计算相同参数的重心，Voronoi_Shape_Center(inter) 用以计算浮心，Voronoi_Floatage(inter) 用以计算浮力. 采用非线性规划的方式，利用函数 Voronoi_NonlinearOpitimization(inter) 进行求解，返回数组 k_opt 的值，存储每一个剖分的填充率.

最后考虑将问题进行可视化处理，Voronoi_Color(k_opt, inter, 64) 函数可以绘制染色后的天鹅图像，64 表示所需要的颜色数.

我们的实验结果如下：

1. 方块半径为 3 的好的剖分，优化的填充率数组见方片范围为 3 方程分布 _ 三角剖分文件所示. 最

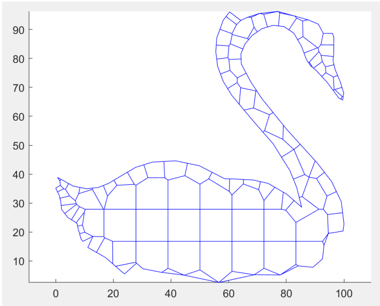


图 18: 均匀分割多边形剖分可能出现的坏点

终达到的重心结果见图 20，事实上这里采用了限制最大计算量，因此可以通过计算使得数据更加优化.

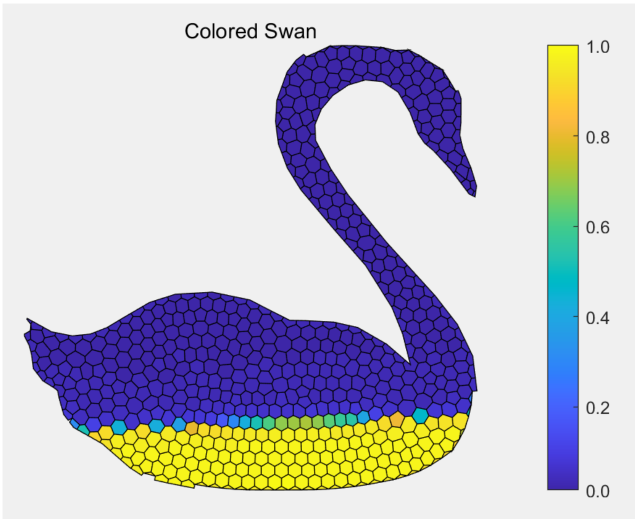


图 19: 方片范围为 3 多边形剖分

g_center_x	57.7590
g_center_y	10.0737

图 20: 方片范围为 3 多边形剖分重心结果

2. 方块半径为 5 的好的剖分，优化的填充率数组见方片范围为 5 方程分布 _ 三角剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 22.

3. 50×50 均匀分割的多边形剖分，优化的填充率数组见 50×50 均匀分割的多边形剖分文件所示. 最终达到的重心结果见图 24.

可以发现剖分更细致时，结果明显是更好的；提前终止导致的结果可能是处于中间值的方块数较多.

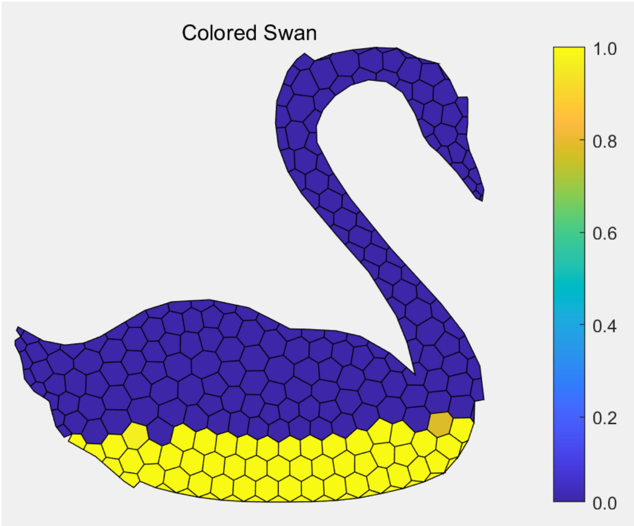


图 21: 方片范围为 5 多边形剖分

g_center_x	57.4565
g_center_y	10.1864

图 22: 方片范围为 5 多边形剖分重心结果

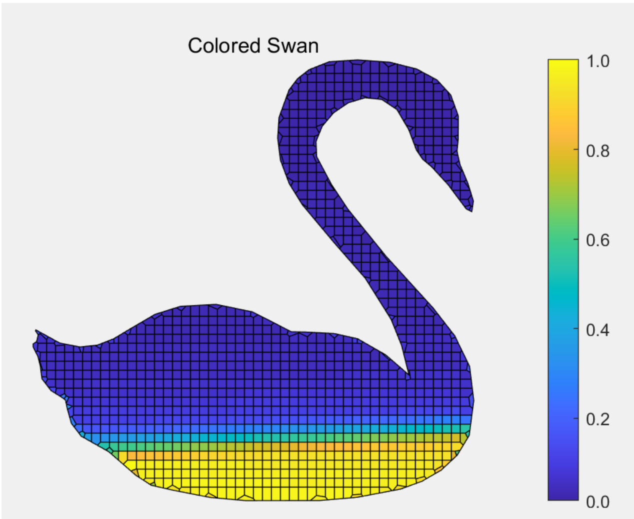


图 23: 50×50 均匀分割的多边形剖分

g_center_x	58.1643
g_center_y	10.9111

图 24: 50×50 均匀分割的多边形剖分

2.2.3 改变填充率的范围

考虑到 0 填充率与满填充率可能导致物理机能的下降，我们对填充率加上范围的约束，约束为 0.1-0.9，采用方片范围为 3 的三角剖分，实验结果如图 26，优化的填充率数组见对应文件所示.

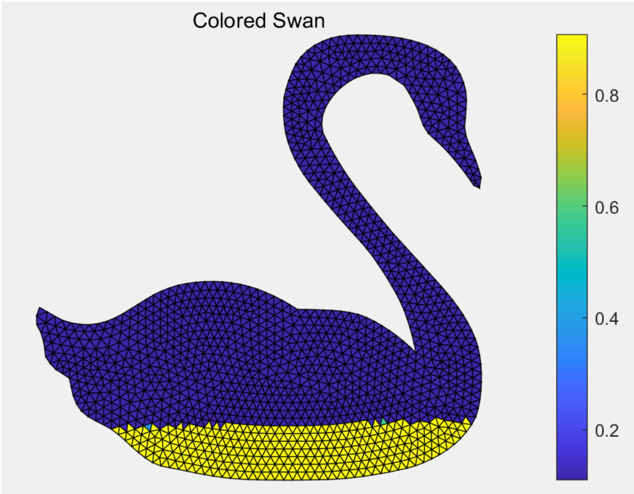


图 25: 方片范围为 3，约束为 0.1-0.9

g_center_x	58.1860
g_center_y	18.0592

图 26: 方片范围为 3，约束为 0.1-0.9 重心结果

可以注意到改变填充率后，仍然以下方取到较大值为核心，不过此时较大值为 0.9，而上方的较小值取为接近 0.1，因此重心的高度显著上升，但是分布几乎不发生改变.

另一方面，如果范围收缩到足够的小，如 0.4-0.6 之间，那么优化结果实际为均匀分布，如图 27 所示.

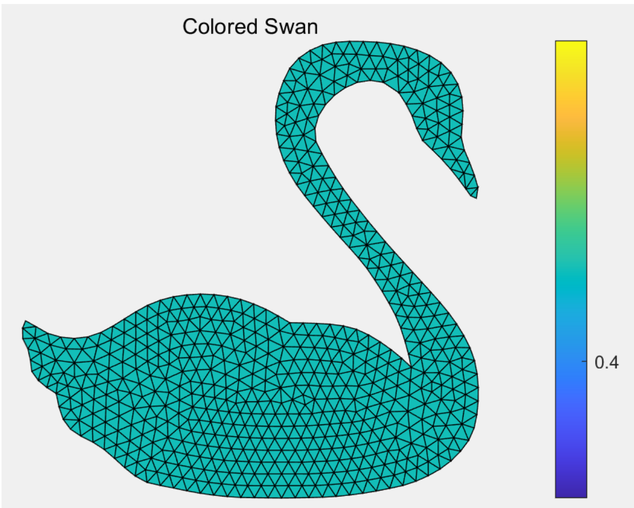


图 27: 方片范围为 3，约束为 0.4-0.6

2.2.4 改变材料与液体的相对密度

本问题本身的目的是改变填充材料或者液体，根据算法的分析，本质是改变了填充材料与液体的相对密度，在实现的过程中只需要改变优化函数 NonlinearOptimization 中等式的系数，已经在注释中说

明，下面的举例是对于方片范围为 3 的方程分布三角剖分，且液体改变为酒精而言的，其具体数据见对应的 excel 表格，结果如图 29 所示.

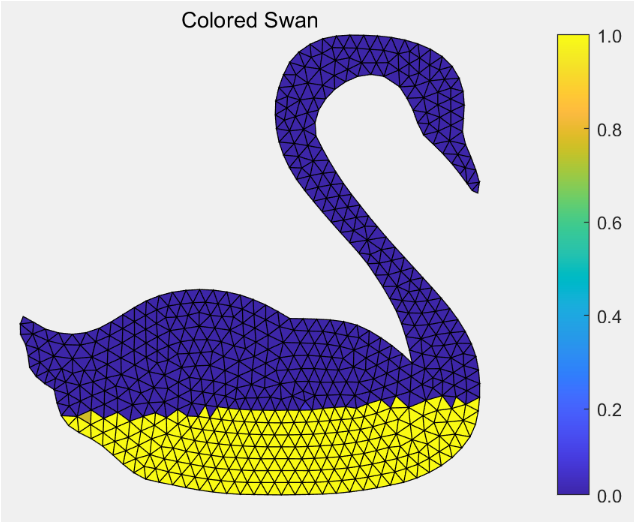


图 28: 方片范围为 3，液体为酒精

g_center_x	58.1732
g_center_y	10.6400

图 29: 方片范围为 3，液体为酒精重心结果

2.3 问题三

该问题为开放性的问题，对于二维平面内的天鹅，倘若天鹅进行水平方向的运动，在水中的深度不发生变化，因此所受到的浮力不发生改变，等于竖直方向所受到的重力，模型不发生改变. 但是若天鹅在竖直方向存在运动，情况会变得非常复杂，竖直方向的运动一方面会改变天鹅在水中的体积大小，从而改变浮力大小，为了平衡浮力的改变，天鹅应当受到自身的牵引力等；另一方面，运动会带来摩擦力，为了维持平衡，还应该考虑刚体运动的相关问题，需求为外力不允许给予多余的角动量，问题的求解变得困难.

3 总结与改善

本 project 有一些部分需要改进.

1. 首先误解了 “天鹅水中部分 “为 1/5，误以为为体积，因此对于问题的处理有结果方向的偏差. 如果仅为高度占 1/5，应该首先对其做均匀的三角剖分，大致求出在水中的体积后利用给出的算法进行计算.
2. 对于多边形剖分，边界处的情况并不是很自然，想要得到自然的边界需要利用 mpt 工具箱中的函数，可以让结果更加美观，否则坏点可能会影响多边形的面积计算.
3. 对于边界，还可以先对其用曲线拟合，达到更好的天鹅效果.

4 实验的完善与改进

笔者对该实验提出的不足进行了完善. 首先关于最大的误解问题，笔者完成了 proportion 函数，逻辑为对天鹅进行均匀的剖分，所有顶点均在天鹅高度的 1/5 一下的点被认为是处于水中的点，由于均匀剖分自身拥有良好的性质，在较大时与打网格的结果类似，随着阶的不断上升，所求的比例越来越大，也越来越接近准确的值，对于 1000×1000 的分割，我们得到的实验结果为 0.3402，即水中的体积估计值，实验结果如图 30 所示.

prop	0.3402

图 30: 比例的准确结果

那么在之后的运算中我们将原先的 5 应该替换为 $\frac{1}{0.3402}$. 因此问题一所求的结果应修正为:

$$k = \frac{0.3042 \times \rho_0}{\rho} = 24.34\%. \tag{4.1}$$

之后再对我们的结果进行修正. 修正如下，并修改了对应的表格，列举了一部分修正，其余方法相同，只需要执行程序即可:

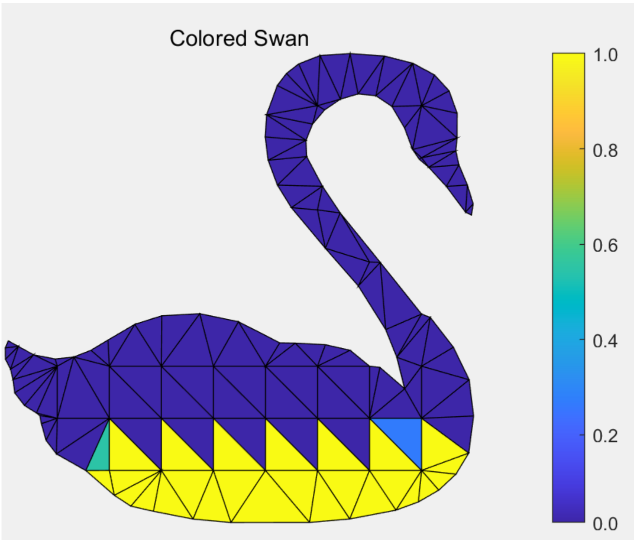


图 31: 10×10 的均匀三角剖分

g_center_x	58.0741
g_center_y	9.9750

图 32: 10×10 的均匀三角剖分重心结果

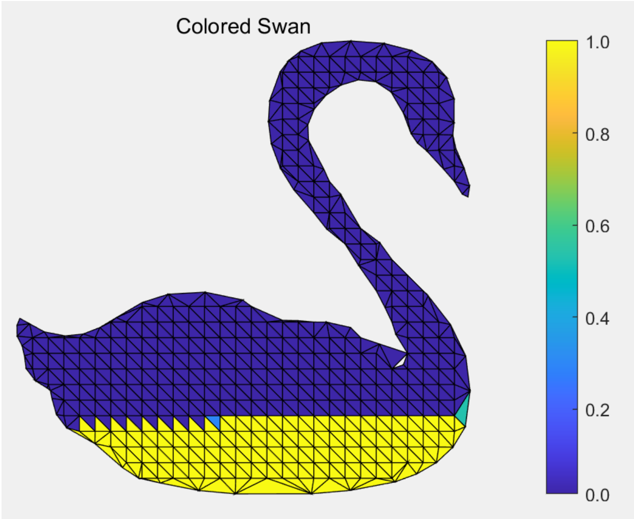


图 33: 30×30 的均匀三角剖分

g_center_x	58.0217
g_center_y	9.5579

图 34: 30×30 的均匀三角剖分重心结果

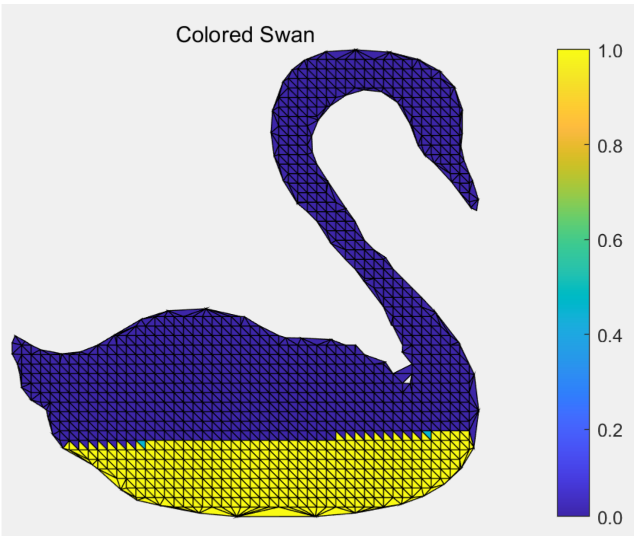


图 35: 50×50 的均匀三角剖分

g_center_x	58.0205
g_center_y	9.5354

图 36: 50×50 的均匀三角剖分重心结果

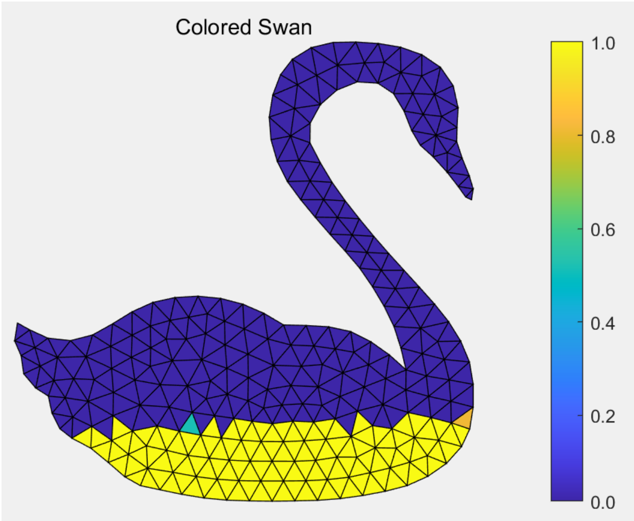


图 37: 方片范围为 5 方程剖分

g_center_x	58.1502
g_center_y	9.6126

图 38: 方片范围为 5 方程剖分重心结果

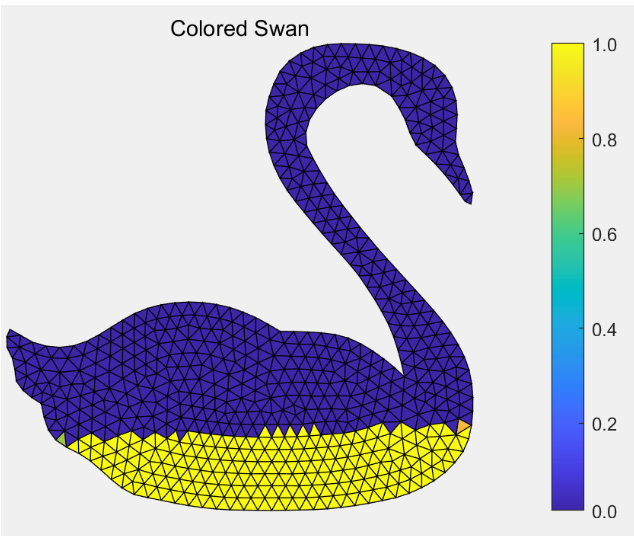


图 39: 方片范围为 3 方程剖分

g_center_x	58.1732
g_center_y	9.5759

图 40: 方片范围为 3 方程剖分重心结果

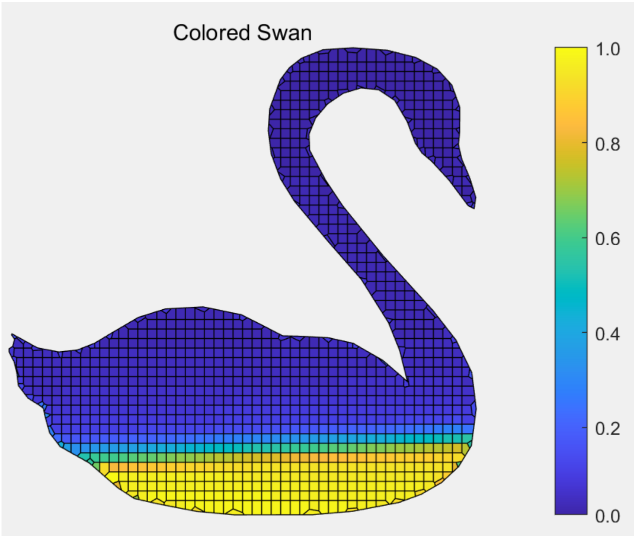


图 41: 50×50 均匀分割的多边形剖分

g_center_x	58.1643
g_center_y	10.9111

图 42: 50×50 均匀分割的多边形剖分重心结果

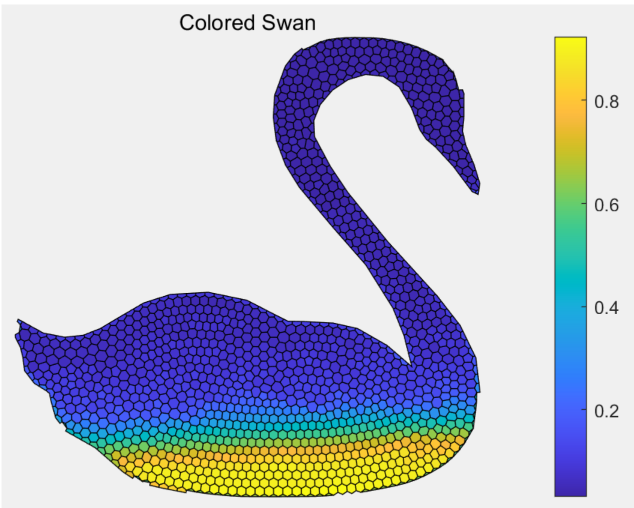


图 43: 方片范围为 2 的多边形剖分

g_center_x	57.9099
g_center_y	13.8129

图 44: 方片范围为 2 的多边形剖分重心结果，这里做不到最好是由于控制了最大计算次数

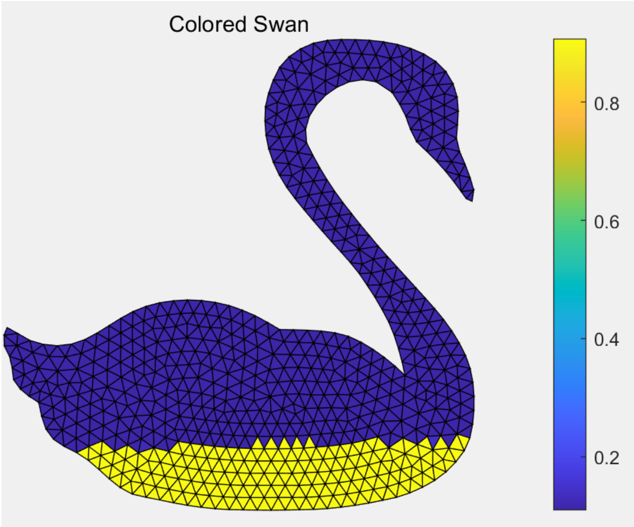


图 45: 方片范围为 3 的三角剖分，范围为 0.1-0.9

g_center_x	58.1732
g_center_y	17.6852

图 46: 方片范围为 3 的三角剖分，范围为 0.1-0.9 重心结果

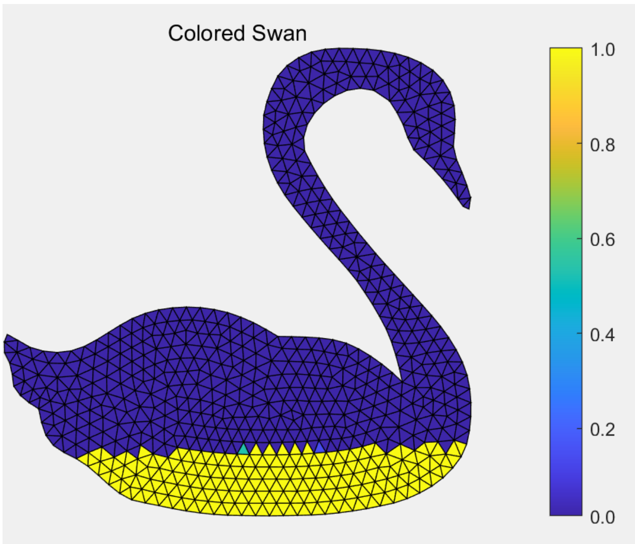


图 47: 方片范围为 3 的三角剖分，酒精

g_center_x	58.1732
g_center_y	8.0817

图 48: 方片范围为 3 的三角剖分，酒精结果