数学实验课程第三次实验报告

PB21010479　王曹励文

2023 年 9 月 26 日

1　莫比乌斯环带动画

1.1　实验题目

在空间直角坐标系 O-xyz 中，一段线段平行于 z 轴且其中点位于 XOY 平面以原点为圆心的圆周上，该线段沿圆周移动的同时也绕 z 轴旋转，当回到出发位置时，线段正好改变上下端的位置，称该运动生成的环带图像为 Mobius 环，要求给出生成该环带的 gif 图像.

1.2　解决思路

首先考虑生成一个圆心位于原点，位于 XOY 平面，半径为 R 的圆，生成环带的短线的中点位于其上. 其次考虑环带上表面的参数方程，该参数方程是经典的:

$$
\begin{aligned}
x_{\text{up}} &= (R + r\cos\frac{1}{2}\theta)\cdot\cos\theta \\
y_{\text{up}} &= (R + r\cos\frac{1}{2}\theta)\cdot\sin\theta \\
z_{\text{up}} &= r\sin\frac{1}{2}\theta
\end{aligned}
$$

上述方程表示环带上表面的参数方程，其中 R 表示莫比乌斯带的主半径，r 表示莫比乌斯带的半带宽，θ 表示转角. 由于生成线段的中点位于圆环上，可以给出另一端的参数方程:

$$
\begin{aligned}
x_{\text{low}} &= (R - r\cos\frac{1}{2}\theta)\cdot\cos\theta \\
y_{\text{low}} &= (R - r\cos\frac{1}{2}\theta)\cdot\sin\theta \\
z_{\text{low}} &= -r\sin\frac{1}{2}\theta
\end{aligned}
$$

分别用两个数组来存储得到的上表面点集和下表面点集，用 plot 函数进行连线，即可得到任意时刻的线段. 为了绘制 gif 图像，给出参数 frames 表示动画帧数，与 θ 的关系为

$$\theta = 2\pi\cdot\frac{frame}{frames}.$$

因此每一帧对应一个线段的时刻，利用对 frame 的循环画出了 gif 图像. 源代码见文件 6.1，实验结果如图 1 所示，这里只插入了截图，gif 文件见 6.1.

1.3 实验结果

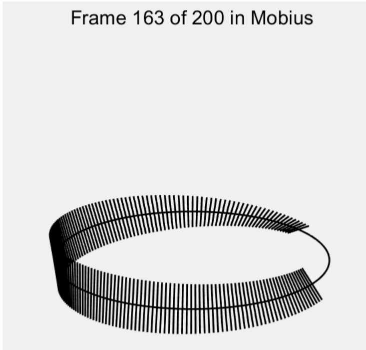


图 1: 6.1 实验结果

2 正方形滚动生成动画

2.1 实验题目

分别在正方形内，边框线上和正方形外取一相对于正方形位置固定的点，当正方形沿着直线，圆周滚动时，定点会生成什么样的曲线？分别建立定点轨迹对应的参数方程和通过 Matlab 模拟其形成过程并观察最终的曲线形状与特征，要求生成 gif 动画.

2.2 解决思路

2.2.1 正方形在直线上的滚动

我们首先考虑生成正方形滚动的动画，我给出了如下具体的参数方程，$(x_i(t), y_i(t))$ 表示顶点 i 的坐标.

$$x_1(t) = \begin{cases} a - a\cos(\omega t), 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega}. \\ 2a - a\cos(\omega t) - a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{2\omega} < t \le \dfrac{\pi}{\omega}. \\ 3a - a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{\omega} < t \le \dfrac{3\pi}{2\omega}. \\ 4a, \dfrac{3\pi}{2\omega} < t \le \dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

$$y_1(t) = \begin{cases} a\sin(\omega t), 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega}. \\ -a\cos(\omega t) + a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{2\omega} < t \le \dfrac{\pi}{\omega}. \\ -a\cos(\omega t), \dfrac{\pi}{\omega} < t \le \dfrac{3\pi}{2\omega}. \\ 0, \dfrac{3\pi}{2\omega} < t \le \dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}a-a\cos(\omega t)+a\sin(\omega t), 0\le t\le \dfrac{\pi}{2\omega}.\\ 2a-a\cos(\omega t), \dfrac{\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{\pi}{\omega}.\\ 3a, \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{3\pi}{2\omega}.\\ 4a+a\sin(\omega t), \dfrac{3\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

$$y_2(t)=\begin{cases}a\cos(\omega t)+a\sin(\omega t), 0\le t\le \dfrac{\pi}{2\omega}.\\ a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{\pi}{\omega}.\\ 0, \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{3\pi}{2\omega}.\\ a\cos(\omega t), \dfrac{3\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

$$x_3(t)=\begin{cases}a+a\sin(\omega t), 0\le t\le \dfrac{\pi}{2\omega}.\\ 2a, \dfrac{\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{\pi}{\omega}.\\ 3a+a\cos(\omega t), \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{3\pi}{2\omega}.\\ 4a+a\sin(\omega t)+a\cos(\omega t), \dfrac{3\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

$$y_3(t)=\begin{cases}a\cos(\omega t), 0\le t\le \dfrac{\pi}{2\omega}.\\ 0, \dfrac{\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{\pi}{\omega}.\\ -a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{3\pi}{2\omega}.\\ a\cos(\omega t)-a\sin(\omega t), \dfrac{3\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

$$x_4(t)=\begin{cases}a, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2\omega}.\\ 2a-a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{\pi}{\omega}.\\ 3a+a\cos(\omega t)-a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{3\pi}{2\omega}.\\ 4a+a\cos(\omega t), \dfrac{3\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

$$y_4(t)=\begin{cases}0, \cos(\omega t), 0\le t\le \dfrac{\pi}{2\omega}.\\ -a\cos(\omega t), \dfrac{\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{\pi}{\omega}.\\ -a\cos(\omega t)-a\sin(\omega t), \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{3\pi}{2\omega}.\\ -a\sin(\omega t), \dfrac{3\pi}{2\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

以上表达式完全给出了正方形顶点的运动，连接相邻两顶点可以给出正方形的滚动图像，源代码见 7.1.1 所示.

注意到，正方形的位置实际由三个点所确定，而三个点可以构成两个相互正交的向量，构成平面的一组基，导致任何一个点都可以被唯一表示；换而言之，只要明确了其中三个点的运动轨迹，理论上可以给出任意一个点的运动轨迹. 分别选取正方形边上，正方形内，正方形外的点，用 plot 函数与对 frame

的循环，可以画出点的轨迹，具体代码见 7.1.1 所示，他们被注释，如果需要验证请取消注释，分别的实验结果截图如图 2、3、4 所示，给出了一个周期的形状，对应的 gif 文件为 7.1.1.1、7.1.1.2、7.1.1.3.

从图中观察可以发现，曲线均是周期的，由于正方形做的均为周期运动；而曲线界的大小取决于固定点的位置，取决于固定点到正方形各个点的距离.

2.2.2 正方形在圆周内的滚动

由于正方形滚动的复杂性，该类滚动的普遍方程更难求解，因此我给予了一种较为特殊的情形，规定了正方形的边长与圆的半径的相对大小关系. 我定义了函数 rotate_vector，目的在于更加方便地求出点绕着固定点旋转某一度数后的新坐标. 该函数也在附件中.

对于我给定的特殊关系，拥有较好的几何性质. 为了画出 gif 图像，仍然利用 frame 进行循环，并与时间呈正相关关系，我同样给出了此种情况下四个顶点的运动参数方程，此时的讨论相对于上一部分更为复杂，具体参数方程见代码，在该方程中我调用了已经写好的 rotate_vector 函数，由于该种情形有较为优良的几何关系，在参数方程解析式变化的起点，我们可以直接利用几何关系求出坐标，恰好为转点向量，在每一部分中我们利用对于转点向量的旋转，给出了点具体的坐标.

同样地，正方形的位置实际由三个点所确定，而三个点可以构成两个相互正交的向量，构成平面的一组基，导致任何一个点都可以被唯一表示；换而言之，只要明确了其中三个点的运动轨迹，理论上可以给出任意一个点的运动轨迹. 分别选取正方形边上，正方形内，正方形外的点，可以生成点的轨迹，具体代码见 7.1.2 所示，他们被注释，如果需要验证请取消注释，分别的实验结果截图如图 5、6、7 所示，给出了一个周期的形状，对应的 gif 文件为 7.1.2.1、7.1.2.2、7.1.2.3.

同样地，从图中观察可以发现，曲线均是周期的，由于正方形做的均为周期运动；而曲线界的大小取决于固定点的位置，取决于固定点到正方形各个点的距离.

2.3 实验结果

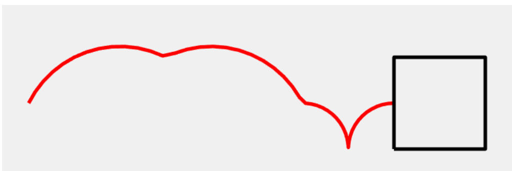


图 2: 7.1.1.1 实验结果

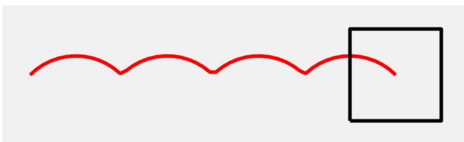


图 3: 7.1.1.2 实验结果

图 4: 7.1.1.3 实验结果

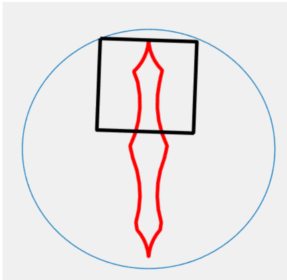


图 5: 7.1.2.1 实验结果

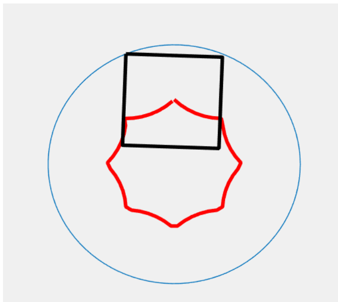


图 6: 7.1.2.2 实验结果

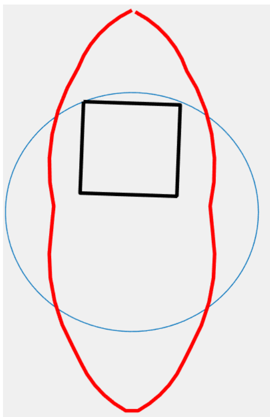


图 7: 7.1.2.3 实验结果

3 绘制对数螺线

3.1 实验题目

绘制正八边形，正十二边形，正二十边形的对数螺线，并按照两种不同地方式进行填充.

3.2 解决思路

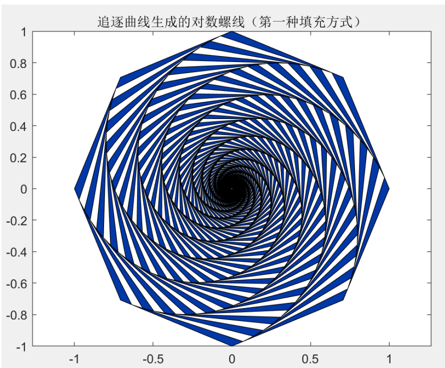
首先我希望用一个代码可以实现对正 n 变形对数螺线地绘制，因此我首先定义了边数常量 n，并用 vertices 数组存储了 n 边形的顶点坐标，方便绘制首尾相接的图像，考虑其为 n+1 维数组（可以保证首位相接）. 我们采用迭代的方式来绘制图像，不难注意到新生成的顶点与原顶点具有大小关系，可以根据点 i 与 $i-1$ 的坐标求得迭代后的点 i 坐标：

$$new\_vertices(i,:) = (9/10) * vertices(i,:) + (1/10) * vertices(j,:);$$

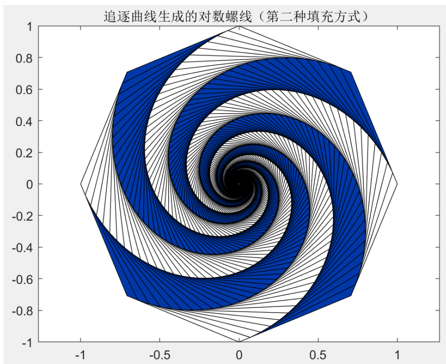
而对于第 n+1 元素，只需要把第一个元素的值赋予即可. 为了保证迭代结果中间不要过空或者过密，给出了迭代次数参数 iteration.

对于第一种填充方式，可以注意到为第偶数次与奇数次迭代间进行填充，第奇数次与偶数次迭代间不进行填充，因此考虑 mod 2，判断该条件的真假来控制是否进行填充；对于第二种填充方式，是相邻边进行填充，因此对边采用步长为 2 的循环. 对于正八边形，正十二边形，正二十边形，两种不同的实现效果恰好如图 8、9、10 所示. 为了使得不出现明显的白点，作图时我已经修改过了参数. 实验的源代码如 7.2 所示.

3.3 实验结果

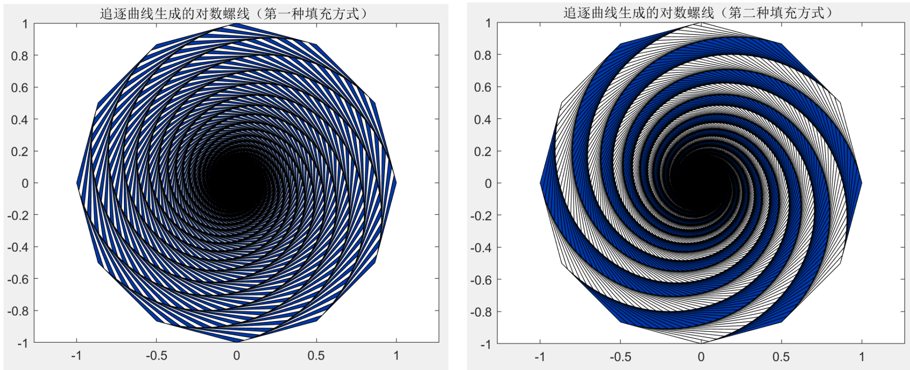


(a) 正八边形第一种填充方式



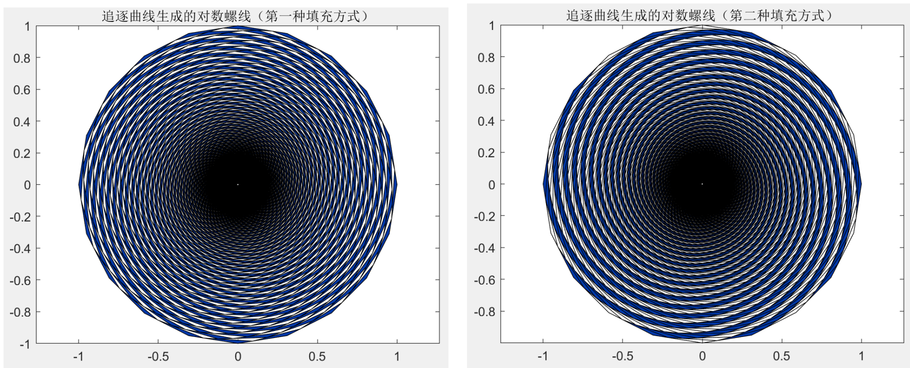
(b) 正八边形第二种填充方式

图 8: 正八边形



(a) 正十二边形第一种填充方式 (b) 正十二边形第二种填充方式

图 9: 正十二边形



(a) 正二十边形第一种填充方式 (b) 正二十边形第二种填充方式

图 10: 正二十边形

4 截取谷脊面

4.1 实验题目

函数 $z = |xy|$ 的图形宛如坐落在水平面上的四座山，两山相交形成骨线，其脊线为抛物线，它在水平面上的投影为 $y = \acute{s}x$ ，将该曲面称为谷脊面. 完成以下练习：

1. 绘制谷脊面图形，谷线及脊线位置.
2. 用平行于坐标平面的平面（XOY,YOZ,XOZ）截取谷脊面，绘制截线情况；总结截线特征.
3. 判断谷脊面是否为直纹面.

4.2 解决思路

本题首先要求作出 $z = |xy|$ 的图像，可以定义 X-Y 网格，计算 z 的函数值，再用 surface 函数绘制图像即可. 谷线和脊线的绘制利用 plot 函数即可，实验结果如图 11 所示.

考虑绘制与平面 x=1，y=1，z=1 的交线，需要规定对应变量的值，改变其中一个变量的值，求出剩下变量的值，再利用 plot 函数绘制即可；对于 z=1 的情形，可以考虑利用 contour 绘制等高线，可以更

明确且简洁地看出曲线的形态. 对于三个平面的交线如图 12、13、14 所示. 该两部分的源代码见文件 8.1 所示.

通过观察图像，发现 YOZ 与 XOZ 平行的平面与谷脊面的交线为直线，与 XOY 平行的平面与谷脊面的交线为双曲线；每个卦限上的谷脊面均为部分直纹面.

4.3 实验结果

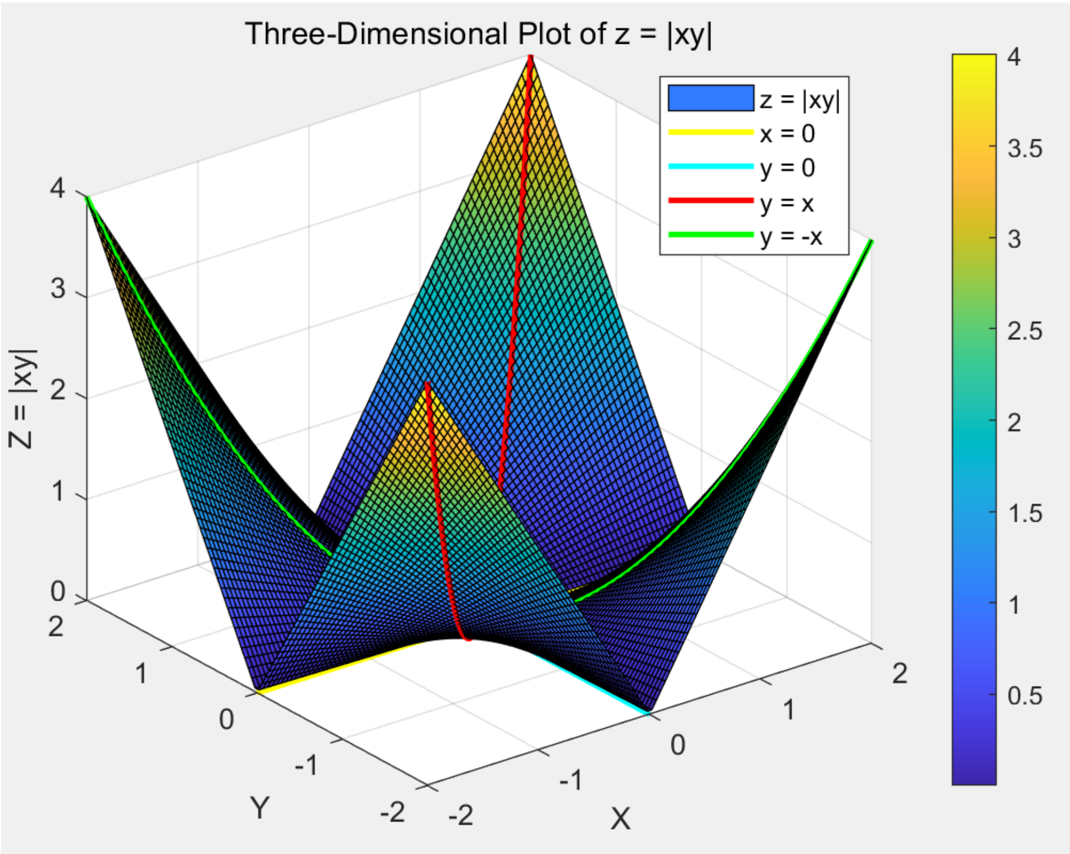


图 11: 8.1.1 实验结果

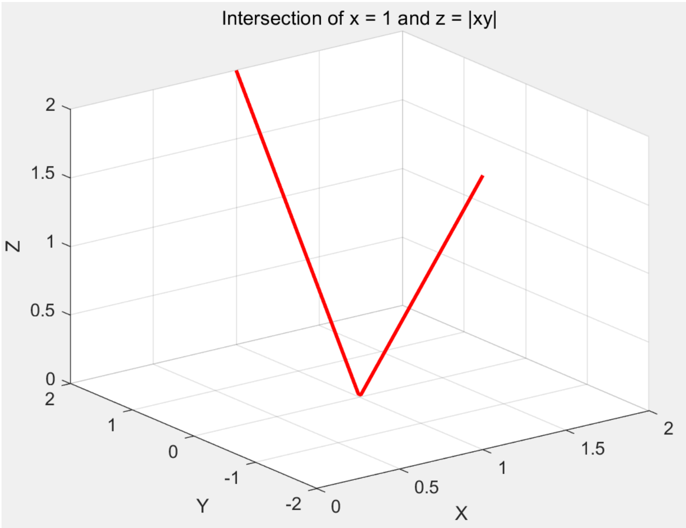


图 12: x=1 交线

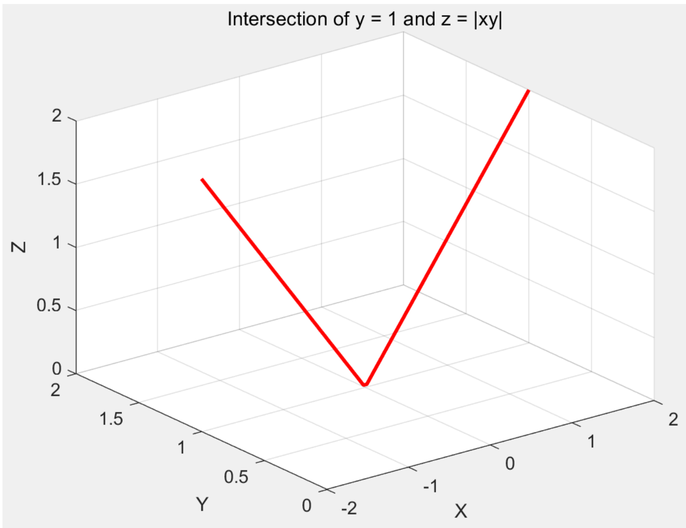


图 13: y=1 交线

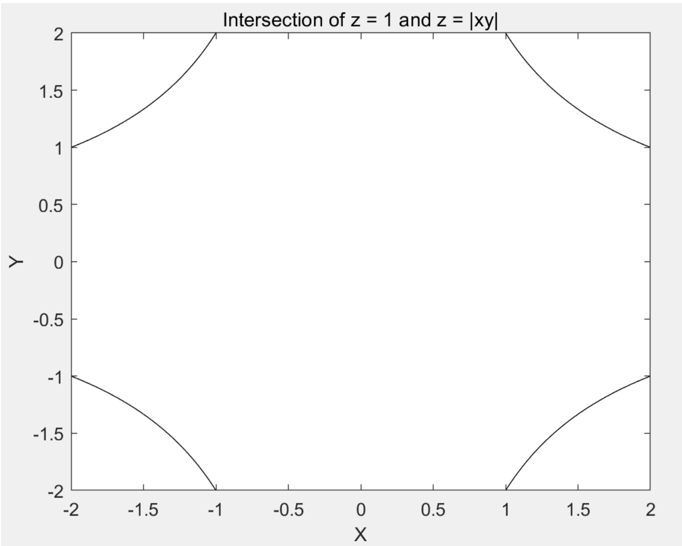

Intersection of z = 1 and z = |xy|
Y
X
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

图 14: z=1 交线