Analysis I

Pascal Weinmueller

November 27, 2017

1 Blatt 4

1.1 Quotientenkriterium

Gegeben sei eine Reihe $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit reellen oder komplexen Summanden, $a_n \neq 0$ fuer fast alle $n \in \mathbb{N}$.

- Gibt es ein $q < 1$, so dass fuer fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

  $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

  dann ist die Reihe absolut konvergent.

- Gild dagegen fuer fast alle $n \in \mathbb{N}$

  $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$$

  so ist die Reihe divergent.

Im Fall der Konvergenz muss q von n unabhaengig sein und echt kleiner als 1 sein.

1.2 Wurzelkriterium

Gegeben sei eine Reihe $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit reellen oder komplexen Summanden, $a_n \neq 0$ fuer fast alle $n \in \mathbb{N}$.

- Falls man nun

  $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

  nachweisen kann, so ist die Reihe S absolut konvergent. D.h. sogar die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

- Falls man nun

  $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

  so divergiert die Reihe, da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden.

1.3 Wichtige Grenzwerte

- $\lim_{n\to\infty} c = c$ fuer alle $c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ fuer alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ fuer alle $c > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| > 1$
- $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{z^k}{n!} = 0$ fuer alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| > 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

1.4 Wichtige Formeln

- Binomialkoeffizient:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(k-1)}{k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}\end{aligned}$$

  Handelt es sich bei n um eine *nichtnegative* ganze Zahl mit $n \geq k$, so kann man folgende Formel hernehmen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

2 Blatt 5

2.1 Häufige Fehler

- Notation:

$$\begin{array}{llll} (1) & A \subset \mathbb{R}; & (2) \quad a \in \mathbb{R}; & (3) \quad B := \{a \in \mathbb{R} | a > 0\} \\ (4) & C := (0, \infty); & (5) \quad D := [0, 1]; & (6) \quad a \in \{1, 2, 3, ..., n\} \end{array}$$

- ... genau dann, wenn ... $\leftrightarrow$ "$\Leftrightarrow$" $\leftrightarrow$ Beide Richtungen zeigen!!!
- "0"$\cdot$"∞"$= 0$

2.2 Tipps

- (P1): (Bernoullische Ungleichung) Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jede nicht negative ganze Zahl $n \geq 0$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

- (P3): (Cauchysches Verdichtungskriterium)

$$\sum_n b_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_n 2^n b_{2^n} < +\infty$$

- (P4): Wurzelkriterium

3 Blatt 6

3.1 Leibniz Kriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe

$$s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\,.$$

Über den Grenzwert der Reihe macht das Kriterium jedoch keine Aussage. Das Kriterium gilt auch für monoton wachsende Nullfolgen.

3.2 Tipps

- (P1): Abschätzen und Leipniz Kriterium anwenden
- (P2): Summe aufteilen in gerade Index und ungerade Index
- (P3): Trivial, eine Zeile (Achtung: Letzte Hausaufgabe war die Reihe noch zusaetzlich positiv!)
- (P4): Für $\alpha \in (0, \pi/2)$ haben wir

  $$\sin(\alpha) \leq \alpha \leq \tan(\alpha)$$

  + Sandwichlemma