



ECOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE RECHERCHE EN  
MATÉRIAUX ET EN INFOTRONIQUE

ITC311

---

## Rapport de fin de projet de Mathématiques: Affichage de la courbe d'une fonction rationnelle à l'aide de courbes de Bézier rationnelles.

---

*Soumis à :*

Lionel Garnier

Maître de conférences

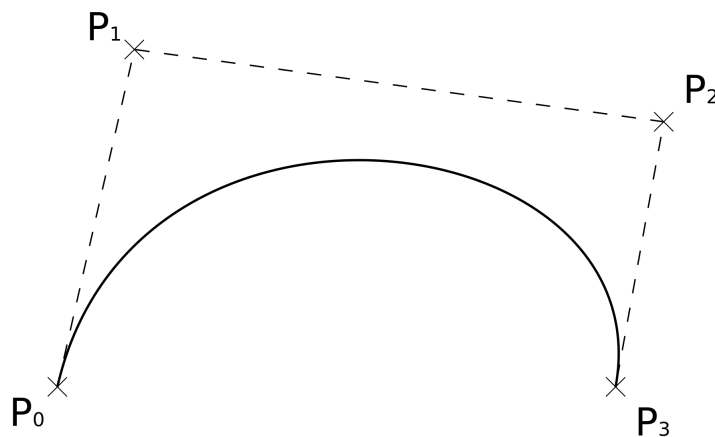
Aile de l'ingénieur, Laboratoire Le2i

*Par :*

Wilfried L. Bounsi

& Ulrich Fonkoue

IT3A TD2 TP3



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fondamentaux théoriques</b>	<b>2</b>
1.1	Polynômes de Bernstein . . . . .	2
1.2	Courbes polynômiales . . . . .	2
1.3	Courbes rationnelles . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Résolution du problème</b>	<b>4</b>
2.1	Détermination des asymptotes à $\mathcal{C}_f$ . . . . .	4
2.1.1	Cas (0,0) . . . . .	4
2.1.2	Cas (0,1) . . . . .	4
2.1.3	Cas (0,2) . . . . .	4
2.1.4	Cas (1,0) . . . . .	5
2.1.5	Cas (1,1) . . . . .	5
2.1.6	Cas (1,2) . . . . .	5
2.1.7	Cas (2,0) . . . . .	5
2.1.8	Cas (2,1) . . . . .	5
2.1.9	Cas (2,2) . . . . .	5
2.1.10	Cas (3,0) . . . . .	6
2.1.11	Cas (3,1) . . . . .	6
2.1.12	Cas (3,2) . . . . .	6
2.2	Détermination d'une équation paramétrique de $\mathcal{C}_f$ . . . . .	8
2.3	Représentation de l'arc de $\mathcal{C}_f$ sur $[0;1]$ par une courbe de Bézier de degré idoine . . . . .	8
2.3.1	Choix du degré de la base de Bernstein . . . . .	8
2.3.2	Changement de base Canonique - Bernstein (de degré n) . . . . .	8
2.3.3	Détermination des poids et points de contrôle de $\mathcal{C}_f$ . . . . .	9
2.4	Représentation de chaque arc connexe de $\mathcal{C}_f$ , par une courbe de Bézier rationnelle de degré idoine via un changement de paramètre homographique . . . . .	15
2.4.1	Définition des nouveaux paramètres de la courbe . . . . .	15
2.4.2	Les changements de paramètre à utiliser . . . . .	17
	<b>Table des figures</b>	<b>22</b>

# Chapitre 1

## Fondamentaux théoriques

*Ce chapitre est essentiellement une synthèse d'une partie du document [1].*

Dans tout le document,  $\mathcal{P}$  désigne le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  et d'espace vectoriel attaché  $\vec{\mathcal{P}}$ .

### 1.1 Polynômes de Bernstein

**Notation 1 : Combinaison**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , nous posons

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

**Définition 1 : Polynômes de Bernstein de degré  $n$**

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ . Pour  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , le  $i$ -ème polynôme de Bernstein de degré  $n$  est :

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

Pour les courbes quadratiques (i.e. de degré 2), ou pour les courbes cubiques (i.e. de degré 3), nous emploierons respectivement les **polynômes de Bernstein de degré 2** :

$$B_{0,2}(t) = B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_{1,2}(t) = B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_{2,2}(t) = B_2(t) = t^2$$

et **degré 3** :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

### 1.2 Courbes polynômiales

**Définition 2 : Courbe de Bézier de degré  $n$**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $(M_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  et  $O$ ,  $n+2$  points de  $\mathcal{P}$ .

La courbe de Bézier de degré  $n$  de points de contrôle  $(M_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est l'ensemble des points  $M(t)$ ,  $t \in [0; 1]$  vérifiant la formule :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM_i}$$

et les points  $(M_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  définissent un polygone appelé **polygone de contrôle** de la courbe de Bézier.

### 1.3 Courbes rationnelles

**Définition 3 : Courbe de bézier rationnelle**

Soit  $n+1$  points de contrôle  $(M_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  de  $\mathcal{P}$ .

Soit  $n+1$  scalaires non nuls  $(\omega_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ , appelés **poids**, vérifiant :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t) \neq 0$$

Une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n$ , dans l'espace affine  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des points  $M(t)$ ,  $t \in [0; 1]$ , vérifiant :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} \quad (1.1)$$

---

Cette définition se généralise au cas où pour certaines valeurs  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\omega_i = 0$ .

Les points de la courbe de bézier sont alors définies par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I} \omega_i B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM_i} + \sum_{i \in J} B_{i,n}(t) \overrightarrow{V_i} \right] \quad (1.2)$$

où  $I = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \omega_i \neq 0\}$  et  $J = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \omega_i = 0\}$

# Chapitre 2

## Résolution du problème

*Dans ce chapitre nous allons aborder point par point, la résolution du problème posé par chaque phase du projet.*

### Rappel de l'objectif

Le but du projet est l'affichage de la courbe représentative d'une fraction rationnelle à l'aide de courbes de Bézier rationnelle dont le numérateur est de degré au plus 3 et le dénominateur est de degré au plus 2.

Les fonctions sont donc de la forme

$$f(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

### Réécriture de l'expression de $f$

Concrètement nous traitons des fonctions  $f$  telles que  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  où  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ ,  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$

### 2.1 Détermination des asymptotes à $\mathcal{C}_f$

Considérons le couple  $(d^\circ P, d^\circ Q)$  où  $P$  et  $Q$  les polynômes précédents. Ce couple peut prendre 12 valeurs pour les quels nous pouvons (pour chacune d'entre elles) déterminer les différentes asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

#### 2.1.1 Cas (0,0)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_0}{b_0}$ , fonction constante. Remarquons d'ailleurs que  $f$  n'existe que si  $b_0 \neq 0$

Conclusion : Pas d'asymptotes

#### 2.1.2 Cas (0,1)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_0}{b_1x + b_0}$ ,  $Q$  s'annule en  $x_0 = -\frac{b_0}{b_1}$

Conclusion : La droite  $(\mathcal{D}_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$

#### 2.1.3 Cas (0,2)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$ , considérons  $\Delta$ , discriminant de l'équation quadratique  $Q(x) = 0$ .

— Si  $\Delta > 0$  alors  $Q$  admet deux racines réelles  $x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{b_2}$  et  $x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{b_2}$

— Si  $\Delta = 0$  alors  $Q$  admet une racine réelle double  $x_0 = \frac{-b_1}{b_2}$

— Si  $\Delta < 0$  alors  $Q$  n'admet aucune solution.

Conclusion :

— Si  $\Delta > 0$  alors les droites  $(\mathcal{D}_1) : x = x_1$  et  $(\mathcal{D}_2) : x = x_2$  sont asymptotes verticales à  $\mathcal{C}_f$

— Si  $\Delta = 0$  alors la droite  $(\mathcal{D}_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$

- Si  $\Delta < 0$  alors  $\mathcal{C}_f$  n'admet pas d'asymptote verticale.
- La droite  $(D') : y = 0$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$

### 2.1.4 Cas (1,0)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_1x + a_0}{b_0}$ . Remarquons d'ailleurs que  $f$  n'existe que si  $b_0 \neq 0$

Conclusion : Pas d'asymptotes

### 2.1.5 Cas (1,1)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_1x + a_0}{b_1x + b_0}$ ,  $Q$  s'annule en  $x_0 = -\frac{b_0}{b_1}$

Conclusion :

- La droite  $(D_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$
- La droite  $(D') : y = \frac{a_1}{b_1}$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$

### 2.1.6 Cas (1,2)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$ , considérons  $\Delta$ , discriminant de l'équation quadratique  $Q(x) = 0$ .

- Si  $\Delta > 0$  alors  $Q$  admet deux racines réelles  $x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{b_2}$  et  $x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{b_2}$
- Si  $\Delta = 0$  alors  $Q$  admet une racine réelle double  $x_0 = \frac{-b_1}{b_2}$
- Si  $\Delta < 0$  alors  $Q$  n'admet aucune solution.

Conclusion :

- Si  $\Delta > 0$  alors les droites  $(\mathcal{D}_1) : x = x_1$  et  $(\mathcal{D}_2) : x = x_2$  sont asymptotes verticales à  $\mathcal{C}_f$
- Si  $\Delta = 0$  alors la droite  $(\mathcal{D}_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$
- Si  $\Delta < 0$  alors  $\mathcal{C}_f$  n'admet pas d'asymptote verticale.
- La droite  $(D') : y = 0$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$

### 2.1.7 Cas (2,0)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_0}$ . Remarquons d'ailleurs que  $f$  n'existe que si  $b_0 \neq 0$

Conclusion : Pas d'asymptotes

### 2.1.8 Cas (2,1)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_1x + b_0}$ ,  $Q$  s'annule en  $x_0 = -\frac{b_0}{b_1}$ . De plus :

En posant  $\alpha = \frac{a_2}{b_1}$  et  $\beta = \frac{a_1b_1 - a_2b_0}{b_1^2}$ , on montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$

Conclusion :

- La droite  $(D_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$
- La droite  $(D') : y = \alpha x + \beta$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$

### 2.1.9 Cas (2,2)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$ , considérons  $\Delta$ , discriminant de l'équation quadratique  $Q(x) = 0$ .

- Si  $\Delta > 0$  alors  $Q$  admet deux racines réelles  $x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{b_2}$  et  $x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{b_2}$
- Si  $\Delta = 0$  alors  $Q$  admet une racine réelle double  $x_0 = \frac{-b_1}{b_2}$
- Si  $\Delta < 0$  alors  $Q$  n'admet aucune solution.

Conclusion :

- Si  $\Delta > 0$  alors les droites  $(\mathcal{D}_1) : x = x_1$  et  $(\mathcal{D}_2) : x = x_2$  sont asymptotes verticales à  $\mathcal{C}_f$
- Si  $\Delta = 0$  alors la droite  $(\mathcal{D}_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$
- Si  $\Delta < 0$  alors  $\mathcal{C}_f$  n'admet pas d'asymptote verticale.

- La droite  $(D') : y = \frac{a_2}{b_2}$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$

### 2.1.10 Cas (3,0)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_0}$ . Remarquons d'ailleurs que  $f$  n'existe que si  $b_0 \neq 0$

Conclusion : Pas d'asymptotes

### 2.1.11 Cas (3,1)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_1x + b_0}$ ,  $Q$  s'annule en  $x_0 = -\frac{b_0}{b_1}$ .

Conclusion : La droite  $(D_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$

### 2.1.12 Cas (3,2)

Dans ce cas,  $f(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$ , considérons  $\Delta$ , discriminant de l'équation quadratique  $Q(x) = 0$ .

- Si  $\Delta > 0$  alors  $Q$  admet deux racines réelles  $x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{b_2}$  et  $x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{b_2}$
- Si  $\Delta = 0$  alors  $Q$  admet une racine réelle double  $x_0 = \frac{-b_1}{b_2}$
- Si  $\Delta < 0$  alors  $Q$  n'admet aucune solution.

De plus :

En posant  $\alpha = \frac{a_3}{b_2}$  et  $\beta = \frac{a_2b_2 - a_3b_1}{b_2^2}$ , on montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$

Conclusion :

- Si  $\Delta > 0$  alors les droites  $(\mathcal{D}_1) : x = x_1$  et  $(\mathcal{D}_2) : x = x_2$  sont asymptotes verticales à  $\mathcal{C}_f$
- Si  $\Delta = 0$  alors la droite  $(\mathcal{D}_0) : x = x_0$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$
- Si  $\Delta < 0$  alors  $\mathcal{C}_f$  n'admet pas d'asymptote verticale.
- La droite  $(D') : y = \alpha x + \beta$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$

Asymptotes à  $\mathcal{C}_f$  telle que  $f(x) = \frac{x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x}{x^2 + x}$

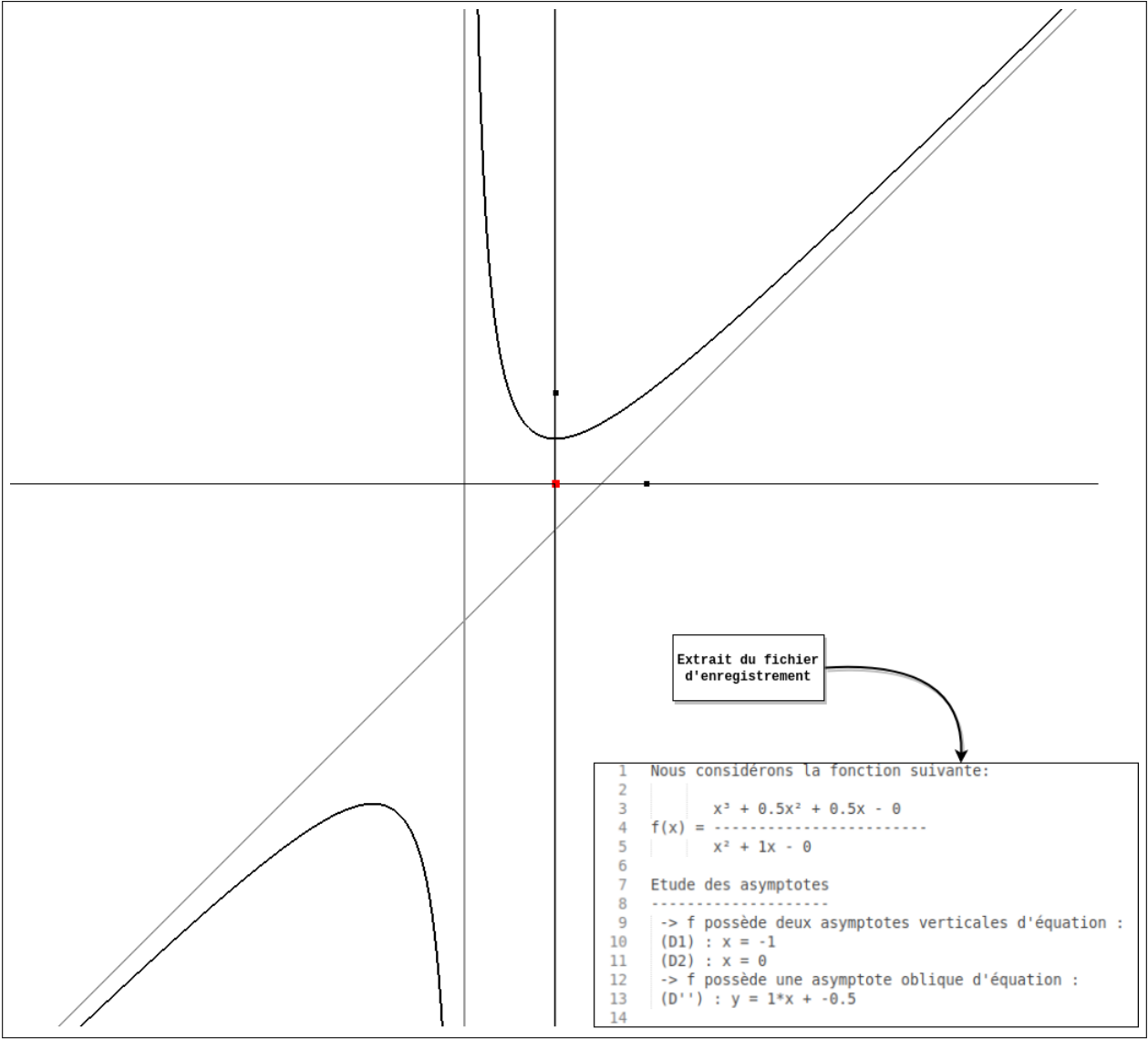


FIGURE 2.1 – Démo Asymptotes



## 2.2 Détermination d'une équation paramétrique de $\mathcal{C}_f$

Nous optons pour la paramétrisation suivante :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

Toutefois pour des raisons de compatibilité, notamment au niveau du dénominateur de chaque composante du vecteur  $\overrightarrow{OM(t)}$ , avec les expressions (1.1) et (1.2) de la **Définition 3**, nous devons en modifier légèrement l'écriture de la manière suivante :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{cases} x(t) = \frac{tQ(t)}{Q(t)} \\ y(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \end{cases} \quad (2.1)$$

## 2.3 Représentation de l'arc de $\mathcal{C}_f$ sur $[0;1]$ par une courbe de Bézier de degré idoine

### 2.3.1 Choix du degré de la base de Bernstein

Ayant reçu l'expression de notre fonction  $f$  de l'utilisateur, l'une des première à faire est de déterminer le degré de la base de Bernstein avec laquelle nous allons travailler. Pour cela il faut garder à l'esprit deux expressions du vecteur  $\overrightarrow{OM(t)}$ , celle de l'expression (1.2) ainsi que celle de l'expression (2.1). On doit choisir le plus petit degré permettant de représenter les polynômes  $P$ ,  $Q$  et  $tQ$  dans la base de Bernstein. Il devient ainsi clair que nous devons travailler avec la base de Bernstein de degré  $n$  tel que :

$$n = \max(d^\circ P, d^\circ Q + 1) \quad (2.2)$$

### 2.3.2 Changement de base Canonique - Bernstein (de degré $n$ )

**Définition 4 :** *Matrice de changement de base Canonique - Bernstein*

Notons  $M_{\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{B}_n}$  la matrice définie par :

$$M_{\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ telle que } \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, t^j = \sum_{i=0}^n a_{i,j} B_{i,n}(t)$$

**Notation 2** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Notons :

- $(P)_{\mathcal{C}_n}$ ,  $P$  écrit comme vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique
- $(P)_{\mathcal{B}_n}$ ,  $P$  écrit comme vecteur colonne de ses coordonnées dans la base de Bernstein.

**Propriété 1** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a :

$$(P)_{\mathcal{B}_n} = M_{\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{B}_n} \times (P)_{\mathcal{C}_n} \quad (2.3)$$

---

En pratique, dans ce projet, puisqu'on aura toujours  $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , nous n'aurons besoin que des matrices :

$$M_{\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{C}_3 \rightarrow \mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.3.3 Détermination des poids et points de contrôle de $\mathcal{C}_f$

Rappels :

$$\dagger f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ où } P \in \mathbb{R}_3[X], Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

$\dagger \mathcal{C}_f$  est paramétrée telle que définie dans l'expression (2.1)

- Pour  $n = \max(d^\circ P, d^\circ Q + 1)$ , nous déterminons à l'aide de la **Propriété 1**, les familles de réels  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ ,  $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ , et  $(\gamma_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  tels que :

$$(P)_{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}; (Q)_{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}; (tQ)_{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

- Dès lors, l'équation paramétrique (2.1) devient :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{cases} x(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \end{cases} \quad (2.5)$$

- Nous pouvons encore la réécrire comme suit :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I} \left( \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right) \beta_i B_{i,n}(t) + \sum_{i \in J} \gamma_i B_{i,n}(t) \right] \\ y(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I} \left( \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \beta_i B_{i,n}(t) + \sum_{i \in J} \alpha_i B_{i,n}(t) \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $I = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \beta_i \neq 0\}$  et  $J = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \beta_i = 0\}$

- Posons maintenant  $\forall i \in I, x_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i}$  et  $y_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$  (1)

- L'équation (2.6) devient donc :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I} \beta_i B_{i,n}(t) x_i + \sum_{i \in J} B_{i,n}(t) \gamma_i \right] \\ y(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I} \beta_i B_{i,n}(t) y_i + \sum_{i \in J} B_{i,n}(t) \alpha_i \right] \end{cases}$$

- Nous pouvons ainsi définir :

— La famille des points  $(M_i)_{i \in I}$  telle que  $\forall i \in I, M_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$  (2)

— La famille des vecteurs  $(\vec{V}_i)_{i \in J}$  telle que  $\forall i \in J, \vec{V}_i \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$  (3)

- On aboutit donc finalement à l'équation :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I} \beta_i B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM_i} + \sum_{i \in J} B_{i,n}(t) \vec{V}_i \right] \quad (2.7)$$

où  $I = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \beta_i \neq 0\}$  et  $J = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \beta_i = 0\}$

**Conclusion :**

Ans les points de  $\mathcal{C}_f$  vérifient l'équation (2.7), qui correspond au cas général de la définition des points d'une courbe de Bézier de degré  $n$  caractérisée par :

† Les points de contrôle  $(M_i)_{i \in I}$  et les  $(\vec{V}_i)_{i \in J}$ , définis en (1), (2) & (3)

† Les poids  $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  de ces points, définis en (2.4) i.e simplement, les coordonnées de  $(Q)_{\mathcal{B}_n}$

Représentation sur  $[0;1]$  de l'arc de  $\mathcal{C}_{f_1}$  telle que  $f_1(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$  par une courbe de bézier de degré  $n = 3$ .

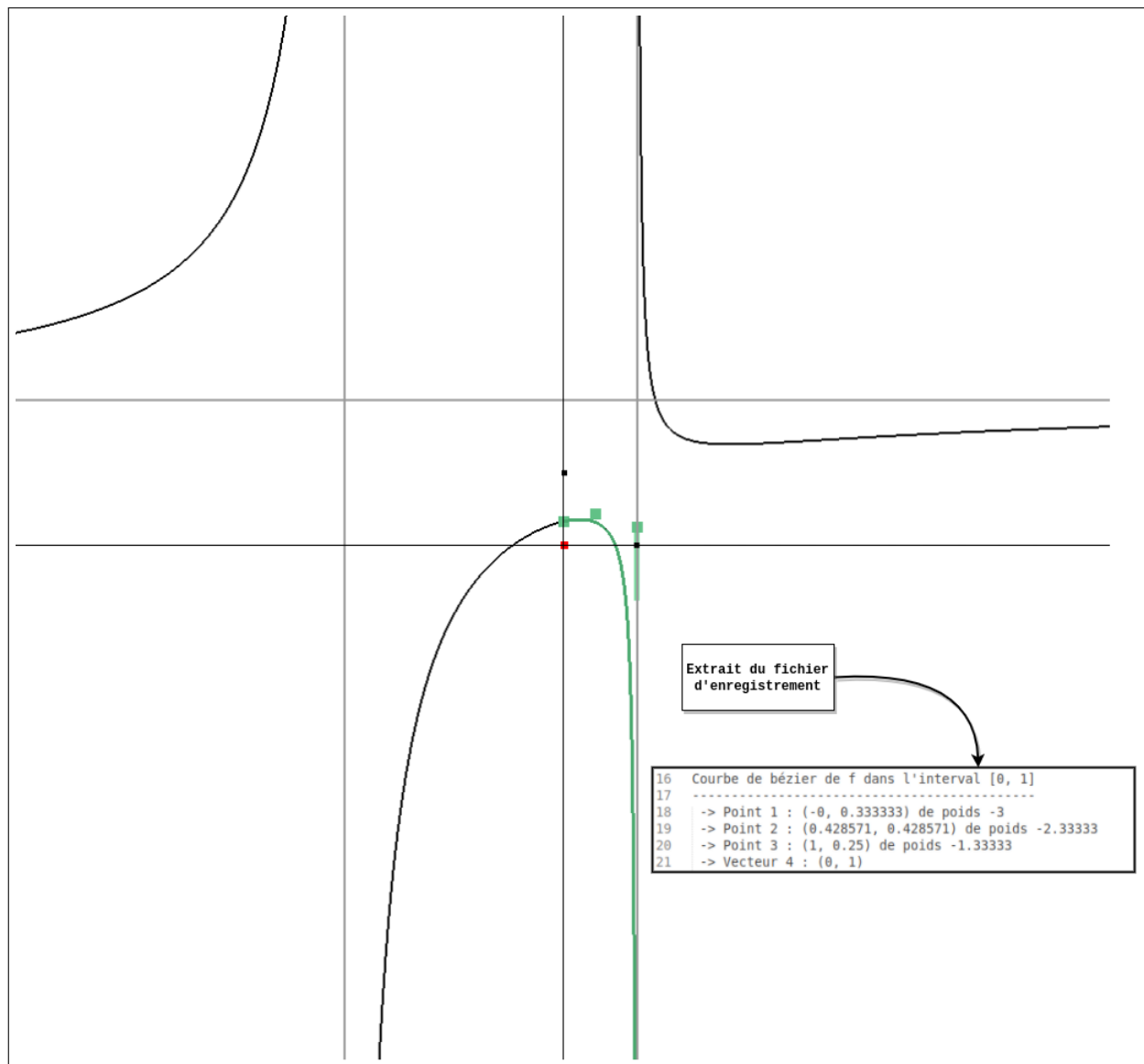


FIGURE 2.2 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_1}$  de bézier sur  $[0;1]$

Représentation sur  $[0;1]$  de l'arc de  $\mathcal{C}_{f_2}$  telle que  $f_2(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 11x + 16}{x^2 + 2x - 3}$  par une courbe de bézier de degré  $n = 3$ .

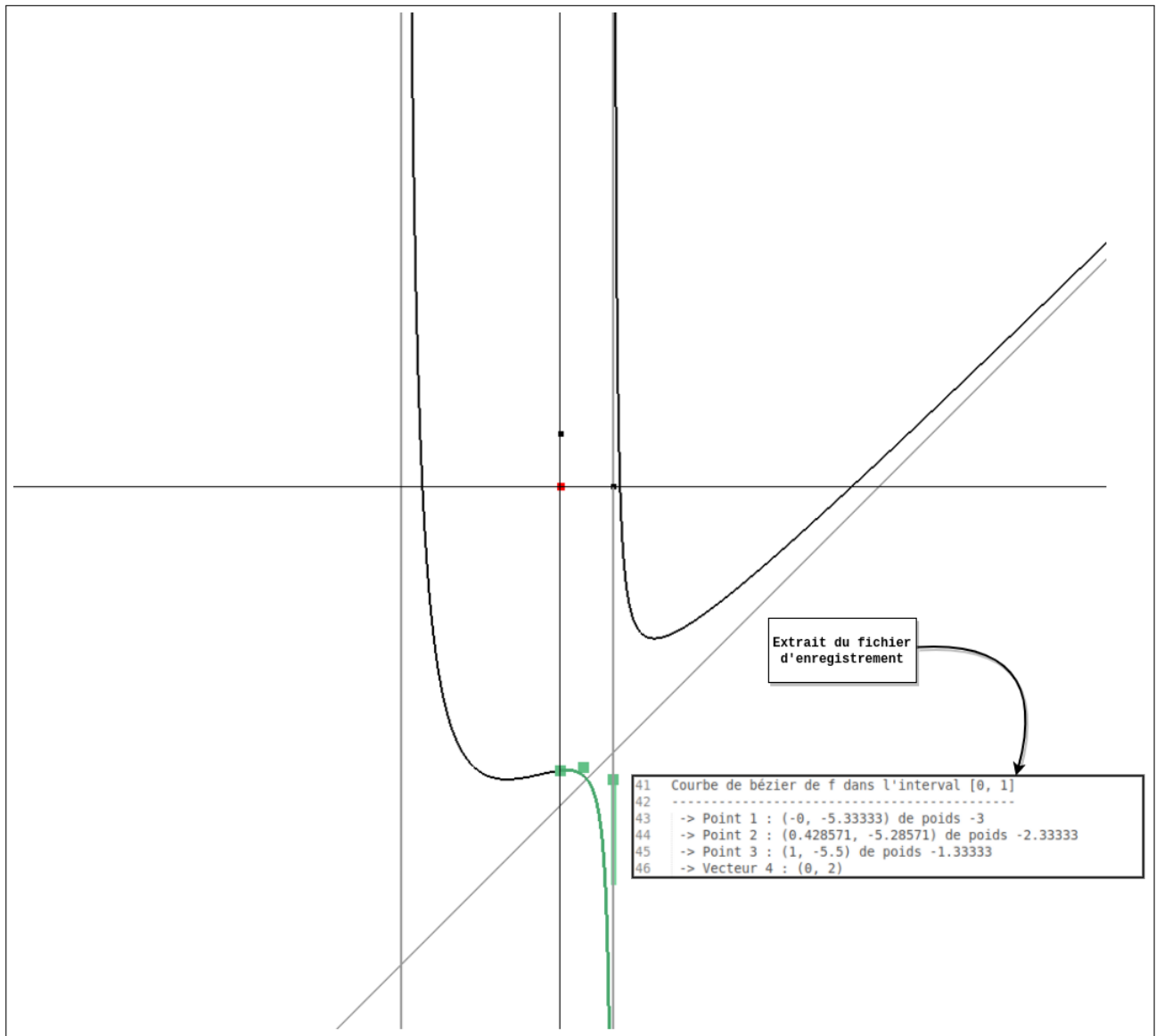


FIGURE 2.3 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_2}$  de bézier sur  $[0;1]$

Représentation sur  $[0;1]$  de l'arc de  $\mathcal{C}_{f_3}$  telle que  $f_3(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2x - 3}$  par une courbe de bézier de degré  $n = 2$ .

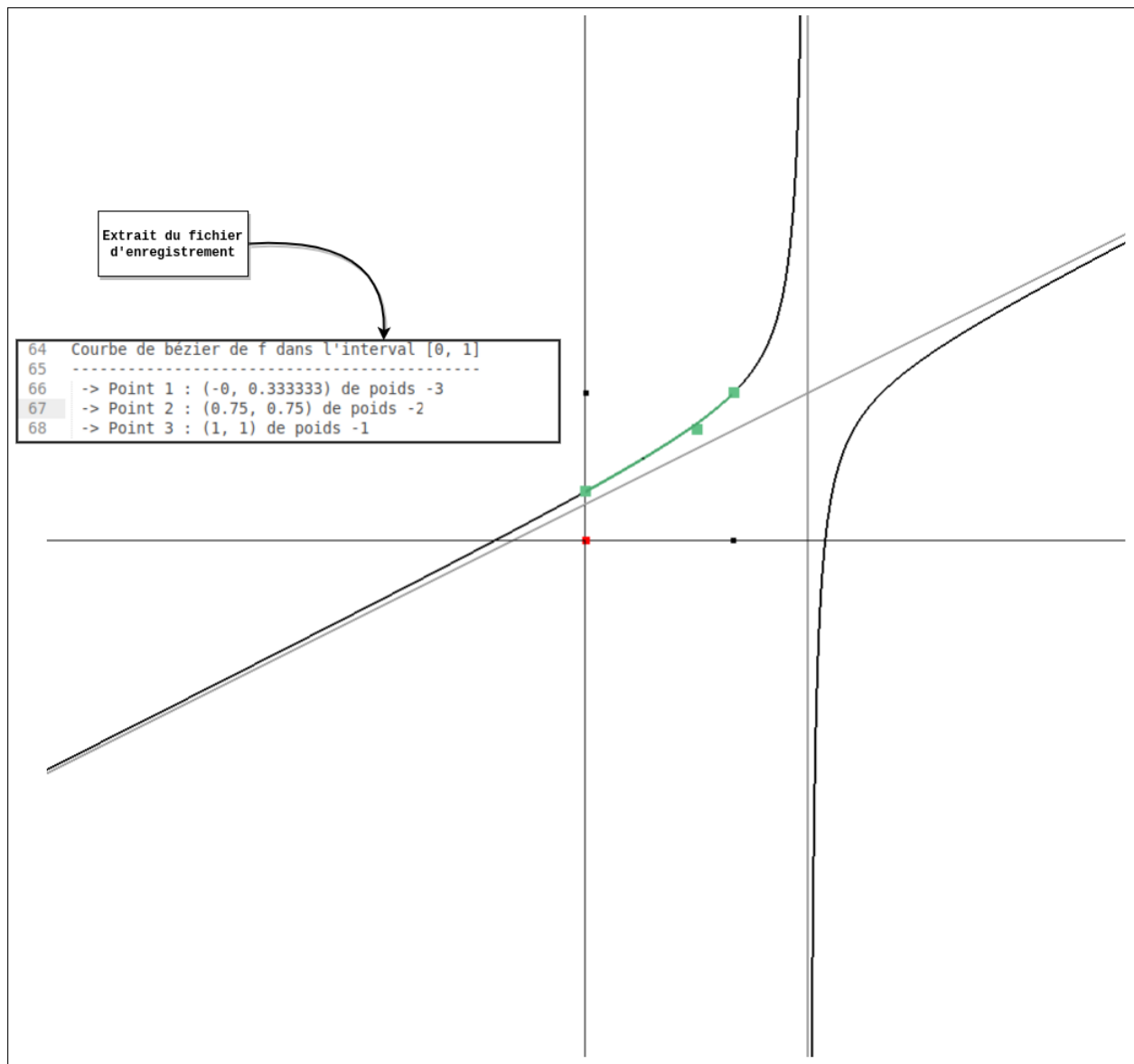


FIGURE 2.4 – Démonstration de la courbe  $\mathcal{C}_{f_3}$  de Bézier sur  $[0;1]$

Représentation sur  $[0;1]$  de l'arc de  $\mathcal{C}_{f_4}$  telle que  $f_4(x) = x^2$  par une courbe de bézier de degré  $n = 2$ .

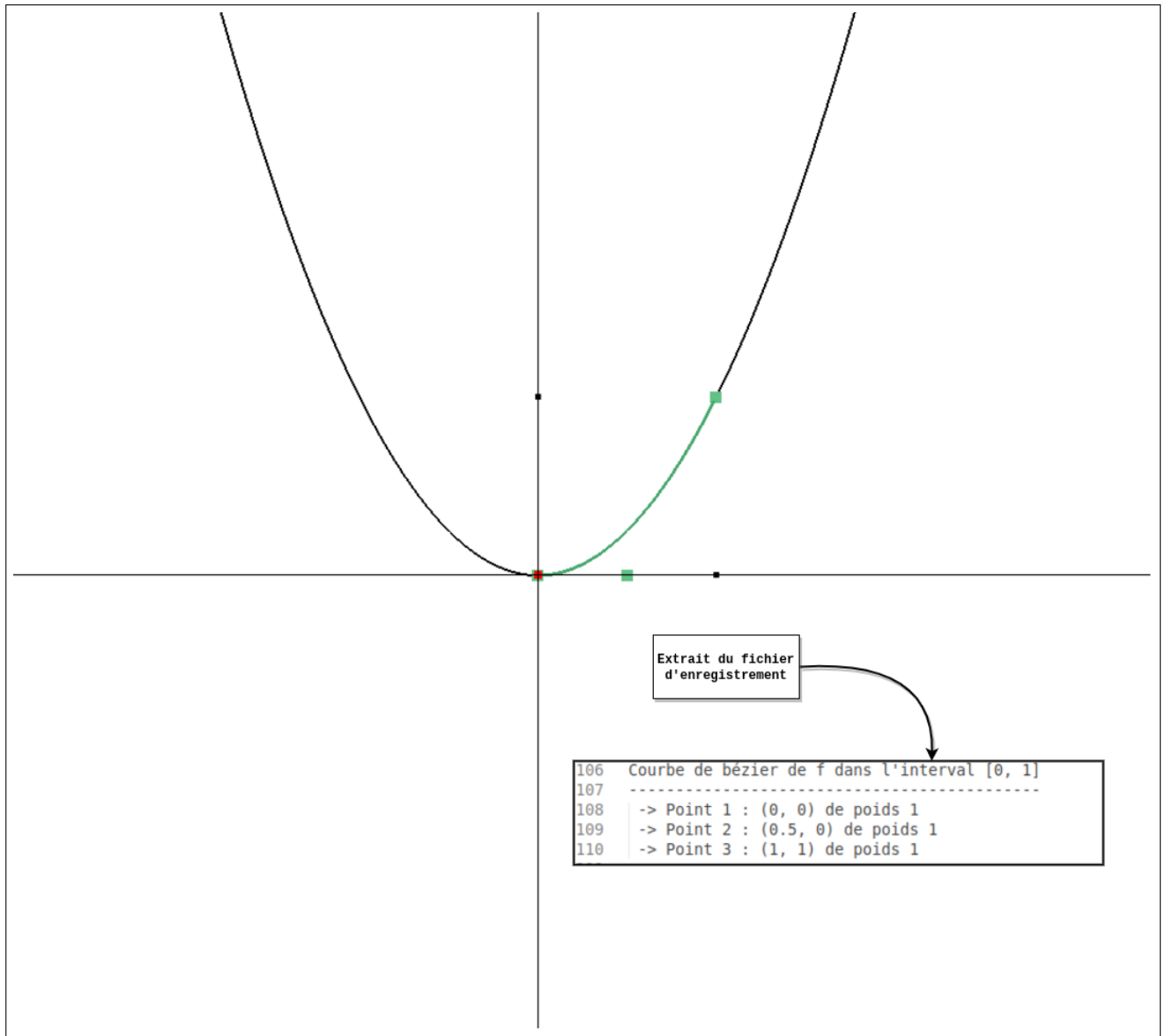


FIGURE 2.5 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_4}$  de bézier sur  $[0;1]$

## 2.4 Représentation de chaque arc connexe de $\mathcal{C}_f$ , par une courbe de Bézier rationnelle de degré idoine via un changement de paramètre homographique

### 2.4.1 Définition des nouveaux paramètres de la courbe

Soit  $a, b, c$  et  $d$ , quatre réels vérifiant la condition :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Considérons la fonction homographique suivante :

$$h : \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d} \end{cases}$$

Nous allons à présent déterminer les poids et les points de contrôle de la courbe de Bézier rationnelle de la fonction  $f \circ h$ .

- Rappelons tout d'abord l'équation paramétrique (2.5) de  $f$  dans la base de Bernstein de degré  $n$ ,

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{cases} x(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}(t)} \end{cases}$$

Où évidemment,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T = (P)_{\mathcal{B}_n}$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T = (Q)_{\mathcal{B}_n}$  et  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T = (tQ)_{\mathcal{B}_n}$

- Effectuons y le changement de paramètre  $t$  par  $h(t)$  :

$$\overrightarrow{OM(h(t))} = \begin{cases} x(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma_i B_{i,n}\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)} \\ y(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i B_{i,n}\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_{i,n}\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)} \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{OM(h(t))} = \begin{cases} x(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma_i C_n^i \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^i \left(1 - \frac{at+b}{ct+d}\right)^{n-i}}{\sum_{i=0}^n \beta_i C_n^i \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^i \left(1 - \frac{at+b}{ct+d}\right)^{n-i}} \\ y(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i C_n^i \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^i \left(1 - \frac{at+b}{ct+d}\right)^{n-i}}{\sum_{i=0}^n \beta_i C_n^i \left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^i \left(1 - \frac{at+b}{ct+d}\right)^{n-i}} \end{cases}$$



$$\overleftrightarrow{OM(h(t))} = \begin{cases} x(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma_i C_n^i (at+b)^i ((c-a)t+d-b)^{n-i}}{\sum_{i=0}^n \beta_i C_n^i (at+b)^i ((c-a)t+d-b)^{n-i}} = \frac{R(t)}{S(t)} \\ y(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i C_n^i (at+b)^i ((c-a)t+d-b)^{n-i}}{\sum_{i=0}^n \beta_i C_n^i (at+b)^i ((c-a)t+d-b)^{n-i}} = \frac{U(t)}{S(t)} \end{cases}$$

- Réécrivons sous une forme plus utile les polynômes R, S et U ainsi définis

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{p=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{i+p} \gamma_i C_n^i C_n^{k-p} C_{n-i}^p a^{k-p} b^{i-k+p} (c-a)^p (d-b)^{n-i-p} \times t^k \\ S(t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{p=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{i+p} \alpha_i C_n^i C_n^{k-p} C_{n-i}^p a^{k-p} b^{i-k+p} (c-a)^p (d-b)^{n-i-p} \times t^k \\ U(t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{p=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{i+p} \beta_i C_n^i C_n^{k-p} C_{n-i}^p a^{k-p} b^{i-k+p} (c-a)^p (d-b)^{n-i-p} \times t^k \end{aligned}$$

Ces écritures nous donnent de manière itérative les coefficients des polynômes R, S et U dans la **base Canonique** de degré  $n$  i.e  $(R)_{C_n}, (S)_{C_n}$  et  $(U)_{C_n}$ .

- Maintenant nous multiplions chacun de ces polynômes par la matrice  $M_{C_n \rightarrow \mathcal{B}_n}$  pour revenir à la **base de Bernstein** de degré  $n$ .

$$\begin{aligned} (R)_{\mathcal{B}_n} &= M_{C_n \rightarrow \mathcal{B}_n} \times (R)_{C_n} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \\ (S)_{\mathcal{B}_n} &= M_{C_n \rightarrow \mathcal{B}_n} \times (S)_{C_n} = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix} \\ (U)_{\mathcal{B}_n} &= M_{C_n \rightarrow \mathcal{B}_n} \times (U)_{C_n} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- L'équation paramétrique de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec le changement de paramètre devient donc :

$$\overleftrightarrow{OM'(t)} = \overleftrightarrow{OM(h(t))} = \begin{cases} x'(t) = x(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma'_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \beta'_i B_{i,n}(t)} \\ y'(t) = y(h(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha'_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \beta'_i B_{i,n}(t)} \end{cases}$$

Il ne reste plus alors qu'à redéterminer les points et les poids de la courbe  $\mathcal{C}_f$  selon la même démarche qu'à la section 2.3.3

• On définit ainsi :

- La nouvelle famille des points  $(M'_i)_{i \in I'}$  telle que  $\forall i \in I', M'_i \begin{pmatrix} \gamma'_i \\ \beta'_i \\ \alpha_i \\ \beta'_i \end{pmatrix}$
- La nouvelle famille des vecteurs  $(\vec{V}'_i)_{i \in J'}$  telle que  $\forall i \in J', \vec{V}'_i \begin{pmatrix} \gamma'_i \\ \alpha'_i \end{pmatrix}$

Et on écrit l'expression finale :

$$\overrightarrow{OM'(t)} = \overrightarrow{OM(h(t))} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \beta'_i B_{i,n}(t)} \left[ \sum_{i \in I'} \beta'_i B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM'_i} + \sum_{i \in J'} B_{i,n}(t) \vec{V}'_i \right] \quad (2.8)$$

où  $I' = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \beta'_i \neq 0\}$  et  $J' = \{i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \beta'_i = 0\}$

### 2.4.2 Les changements de paramètre à utiliser

Les arcs connexes de  $\mathcal{C}_f$  peuvent exister sur trois types d'intervalles :

- De la forme  $] -\infty; \alpha]$  (1)
- De la forme  $[\alpha; \beta]$  (2)
- Ou encore, de la forme  $[\beta; +\infty[$  (3)

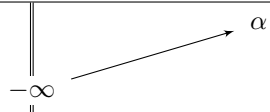
Pour chacun des ces intervalles, il est question pour nous de déterminer la fonction homographique  $h$  telle que :

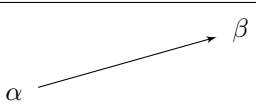
$$h([0; 1]) = I$$

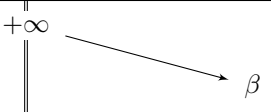
$I$  étant l'intervalle considéré.

On montre par étude des limites et variations que les fonctions suivantes conviennent :

$$\begin{array}{lll} h_1 : \left| \begin{array}{ll} [0; 1] & \longrightarrow ] -\infty; \alpha] \\ t & \longmapsto \frac{(\alpha+1)t-1}{t} \end{array} \right. & h_2 : \left| \begin{array}{ll} [0; 1] & \longrightarrow [\alpha; \beta] \\ t & \longmapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \end{array} \right. & h_3 : \left| \begin{array}{ll} [0; 1] & \longrightarrow [\beta; +\infty[ \\ t & \longmapsto \frac{(\beta-1)t+1}{t} \end{array} \right. \\ h'_1(t) = \frac{1}{t^2} > 0 \ \forall t \in ]0; 1] & h'_2(t) = \beta - \alpha \geq 0 \ \forall t \in [0; 1] & h'_3(t) = -\frac{1}{t^2} < 0 \ \forall t \in ]0; 1] \end{array}$$

$t$	0	1
$h'_1(t)$	+	
$h_1(t)$		

$t$	0	1
$h'_2(t)$	+	
$h_2(t)$		

$t$	0	1
$h'_3(t)$	-	
$h_3(t)$		

Représentation de chaque arc connexe de  $\mathcal{C}_{f_1}$  telle que  $f_1(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$  par une courbe de bézier de degré  $n = 3$ .

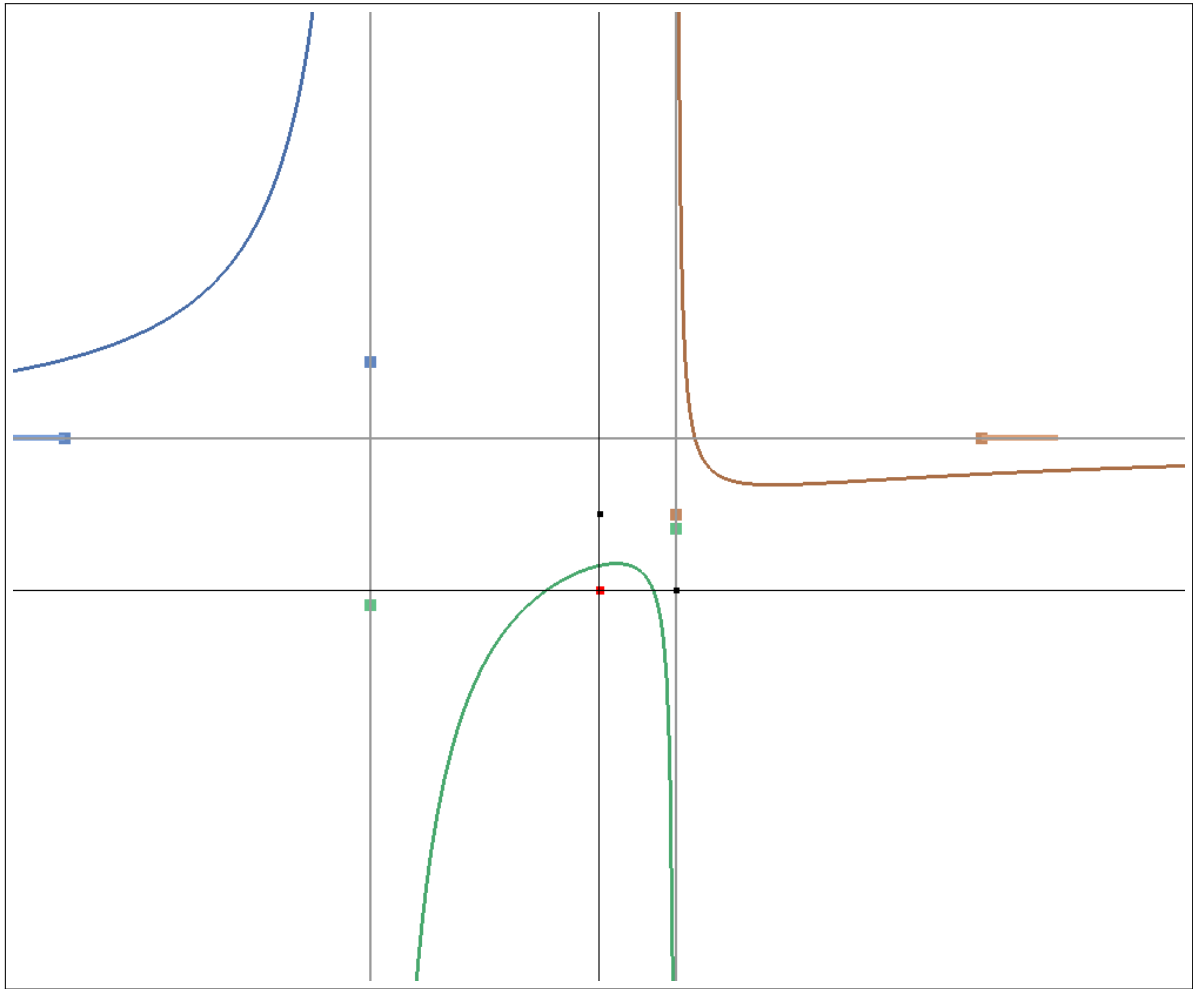


FIGURE 2.6 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_1}$  de bézier

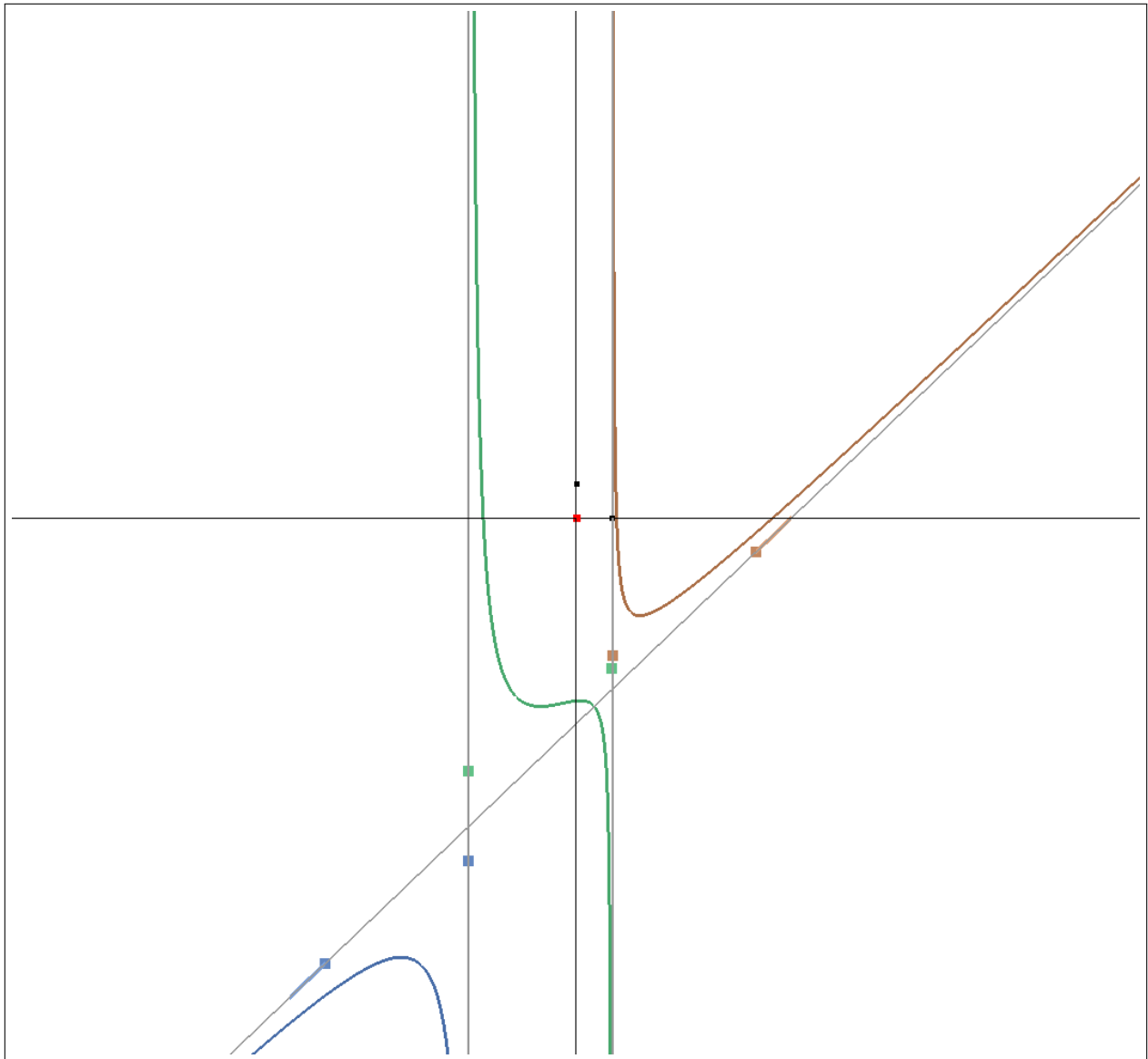
```

1 Courbe de Bezier de f dans l'intervat ]-inf, -3]
2
3 -> Vecteur 1 : (-1, 0)
4 -> Point 2 : (-7, 2) de poids 0.333333
5 -> Point 3 : (-3, 3) de poids 1.33333
6 -> Point 4 : (9, -9.57015e+15) de poids -1.77636e-15
7
8 Courbe de Bezier de f dans l'intervat [-3, 1]
9
10 -> Point 1 : (1, -5.98134e+14) de poids -2.84217e-14
11 -> Point 2 : (-3, -0.1875) de poids -5.33333
12 -> Point 3 : (1, 0.8125) de poids -5.33333
13 -> Vecteur 4 : (0, 1)
14
15 Courbe de Bezier de f dans l'intervat [1, +inf[
16
17 -> Vecteur 1 : (1, 0)
18 -> Point 2 : (5, 2) de poids 0.333333
19 -> Point 3 : (1, 1) de poids 1.33333
20 -> Vecteur 4 : (0, 1)

```

Listing 2.1 – Extrait du fichier enregistrement fonction  $f_1$

Représentation de chaque arc connexe de  $\mathcal{C}_{f_2}$  telle que  $f_2(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 11x + 16}{x^2 + 2x - 3}$  par une courbe de bézier de degré  $n = 3$ .

FIGURE 2.7 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_2}$  de bézier

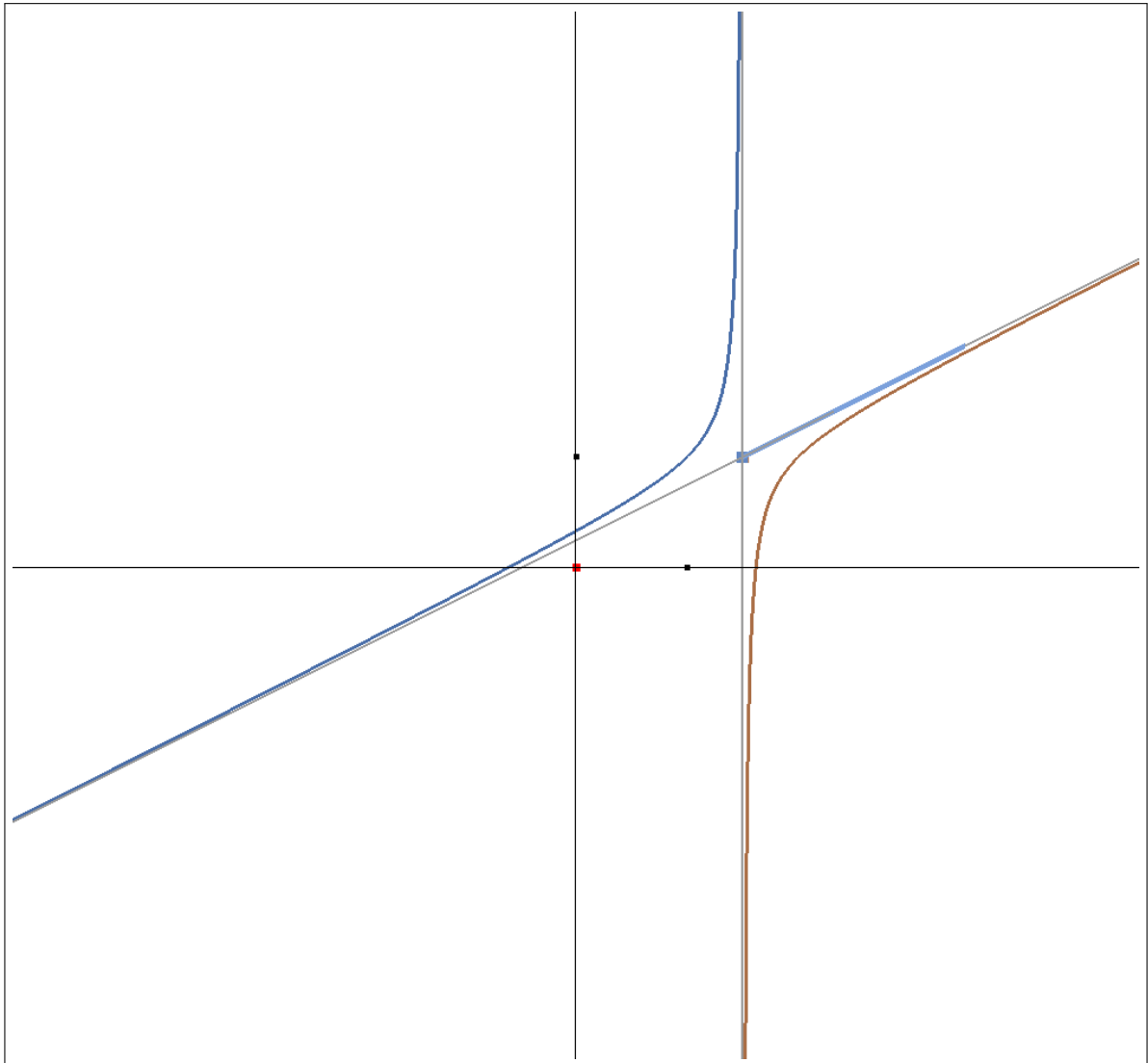
```

1 Courbe de Bezier de f dans l'intervall ]-inf, -3]
2
3 -> Vecteur 1 : (-1, -1)
4 -> Point 2 : (-7, -13) de poids 0.333333
5 -> Point 3 : (-3, -10) de poids 1.33333
6 -> Point 4 : (9, 7.8813e+15) de poids -1.77636e-15
7
8 Courbe de Bezier de f dans l'intervall [-3, 1]
9
10 -> Point 1 : (1, 4.92581e+14) de poids -2.84217e-14
11 -> Point 2 : (-3, -7.375) de poids -5.33333
12 -> Point 3 : (1, -4.375) de poids -5.33333
13 -> Vecteur 4 : (0, 2)
14
15 Courbe de Bezier de f dans l'intervall [1, +inf[
16
17 -> Vecteur 1 : (1, 1)
18 -> Point 2 : (5, -1) de poids 0.333333
19 -> Point 3 : (1, -4) de poids 1.33333
20 -> Vecteur 4 : (0, 2)

```

Listing 2.2 – Extrait du fichier enregistrement fonction  $f_2$

Représentation de chaque arc connexe de  $\mathcal{C}_{f_3}$  telle que  $f_3(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2x - 3}$  par une courbe de bézier de degré  $n = 2$ .

FIGURE 2.8 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_3}$  de bézier

```

1 Courbe de Bezier de f dans l'intervall ]-inf, 1.5]
2
3 -> Vecteur 1 : (2, 1)
4 -> Point 2 : (1.5, 1) de poids -1
5 -> Vecteur 3 : (0, -0.25)
6
7 Courbe de Bezier de f dans l'intervall [1.5, +inf[
8
9 -> Vecteur 1 : (2, 1)
10 -> Point 2 : (1.5, 1) de poids 1
11 -> Vecteur 3 : (0, -0.25)

```

Listing 2.3 – Extrait du fichier enregistrement fonction  $f_3$

Représentation de chaque arc connexe de l'arc de  $\mathcal{C}_{f_4}$  telle que  $f_4(x) = x^2$  par une courbe de bézier de degré  $n = 2$ .

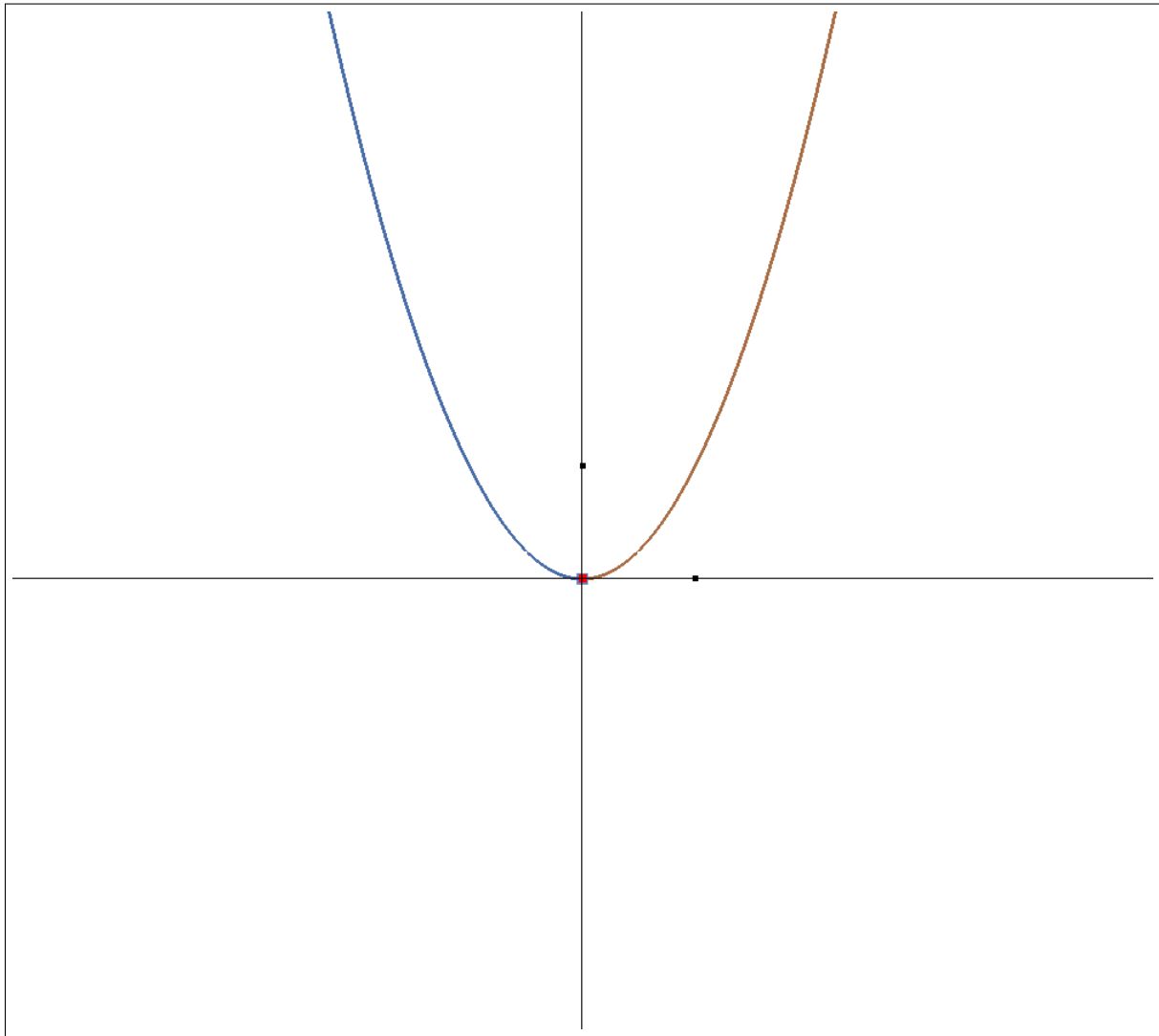


FIGURE 2.9 – Démo courbe  $\mathcal{C}_{f_4}$  de bézier

```

1 Courbe de Bezier de f dans l'intervall ]-inf, 0]
2
3 -> Vecteur 1 : (0, 1)
4 -> Vecteur 2 : (-0.5, 0)
5 -> Point 3 : (0, 0) de poids 1
6
7 Courbe de Bezier de f dans l'intervall [0, +inf[
8
9 -> Vecteur 1 : (0, 1)
10 -> Vecteur 2 : (0.5, 0)
11 -> Point 3 : (0, 0) de poids 1

```

Listing 2.4 – Extrait du fichier enregistrement fonction  $f_4$

# Table des figures

2.1	Démo Asymptotes . . . . .	7
2.2	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_1}$ de bézier sur $[0;1]$ . . . . .	11
2.3	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_2}$ de bézier sur $[0;1]$ . . . . .	12
2.4	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_3}$ de bézier sur $[0;1]$ . . . . .	13
2.5	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_4}$ de bézier sur $[0;1]$ . . . . .	14
2.6	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_1}$ de bézier . . . . .	18
2.7	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_2}$ de bézier . . . . .	19
2.8	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_3}$ de bézier . . . . .	20
2.9	Démo courbe $\mathcal{C}_{f_4}$ de bézier . . . . .	21

# Listings

2.1	Extrait du fichier enregistrement fonction $f_1$ . . . . .	18
2.2	Extrait du fichier enregistrement fonction $f_2$ . . . . .	19
2.3	Extrait du fichier enregistrement fonction $f_3$ . . . . .	20
2.4	Extrait du fichier enregistrement fonction $f_4$ . . . . .	21



# Bibliographie

- [1] L. GARNIER. *Courbes de Bézier et coniques*. Master MIGS, seconde année, Université de Bourgogne.