벡터 부분 공간 조건

1. $x \in W$ 이고 $y \in W$ 이면 $x+y \in W$ 이다

2. $x \in W$ 이고 $\alpha \in R$ 이면, $\alpha x \in W$ 이다.

ex) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$ 일때 W는 R^2의 부분공간임을 보여라

$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$ $\quad x_1 + x_2 = 0$, $x_1' + x_2' = 0$ $\quad \therefore (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') = 0$

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \end{bmatrix} \in W$

ex) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$

$x_3 = x_1 - x_2$ $\quad u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ $\quad V = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1' - x_2' \end{bmatrix}$

$u + v = \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ (x_1 - x_2) + (x_1' - x_2') \end{bmatrix} \in W$ (조건 1)

$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_1 - \alpha x_2 \end{bmatrix} \in W$ (조건 2)

ex) W가 $\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}$ 의 해답 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 일때 부분공간 증명

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_3 = t \quad x_2 = t \quad x_1 = -\frac{7}{2}t$

$x = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} \in W$

행렬 A의 행에 의해 생성하는 공간은 A의 행공간 이라고 부름

ex) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ A의 행들은 R^3에서 vector 벡터 $[41, -1, 2]$는 A의 행공간인가?

$x_1(1\ 2\ 7) + x_2(2\ 5\ 2) + x_3(-1\ 3\ 3)$

$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{matrix}$ $\Rightarrow x_3 = -\frac{41}{70} \cdots$ $\quad \therefore$ 행공간

ex) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ A의 열에 의해 생성한 부분 공간 R(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 은 R(A)에 속하는가?

$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$2x_1 + x_4 = 2$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ => 무수히 많은 해. ∴ 속한다.
$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 1$

연습문제

5. [1,1,1]이 [1,3,4], [4,0,1], [3,1,2] 행공간인가?

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$
$3x_1 + \quad + x_3 = 1$
$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 10 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 8 & 2 \\ 0 & 15 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

∴ 해 없음. 행공간X $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1. W가 R^3 부분공간임을 증명 or 반례

1-1 $W = \{[a\ b\ 0] \mid a, b \in R\}$ 부분공간. ∵ $a+b \in W$ $ka \in W$

1-2 $W = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a+b+c=0\right\}$ $c = -a-b$ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix}$

$u+v = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ -a_1 - a_2 - b_1 - b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ -(a_1+a_2) - (b_1+b_2) \end{bmatrix}$ 성립

$ku = \begin{bmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ -ka-kb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \\ -k(a+b) \end{bmatrix}$ 이므로 성립

1-3. $W = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_3 = -2x_1 - x_2\right\}$

$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ -2x_1' - x_2' \end{bmatrix}$ $u+v = \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ -2(x_1 + x_1') - (x_2 + x_2') \end{bmatrix}$

$ku \begin{bmatrix} ku \\ kx_2 \\ -2kx_1 - kx_2 \end{bmatrix}$ ∴ 부분공간

1-4 $A = 3\times3$ 행렬 $W = \{x \in R^3 \mid Ax = 0\}$

$A(x+y) = Ax + Ay = 0$ $x+y \in W$ $kAx = 0$ 부분공간

6. $[2\ 0\ 4\ {-2}]$ 가 $[0\ 2\ 1\ {-1}]$ $[1\ {-1}\ 1\ 0]$ 그리고 $[2\ 1\ 0\ {-2}]$ 에 의해 생성된 부분공간인가?

$\alpha[0\ 2\ 1\ {-1}] + \beta[1\ {-1}\ 1\ 0] + \gamma[2\ 1\ 0\ {-2}] = [2\ 0\ 4\ {-2}]$

$\beta + 2\gamma = 2$
$-\alpha - 2\gamma = -2$
$2\alpha - \beta + \gamma = 0$
$\alpha + \beta = 4$

$\alpha - \beta = 0$

$2\alpha = 4$
$\alpha = 2$
$\beta = 2$
$\gamma = 0$

$\therefore$ 생성된다

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

7-1 $[-1\ 1\ 0\ 1]$ A의 행에 의해 생성되는가?

$\alpha[1\ 1\ 3\ 1] + \beta[2\ 1\ 5\ 4] + \gamma[1\ 2\ 4\ {-1}] = [-1\ 1\ 0\ 1]$

$\alpha + 2\beta + \gamma = -1$
$\alpha + \beta + 2\gamma = 1$
$3\alpha + 5\beta + 4\gamma = 0$
$\alpha + 4\beta - \gamma = 1$

$3\beta - 3\gamma = 0$
$\beta = \gamma$
$\alpha + 3\beta = 1$
$3\alpha + 9\beta = 0$
$\alpha = -3\beta$

$\beta = t$
$\alpha = -3t$
$\beta = t$
$\gamma = t$

$t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ 아니다

7-2 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이 열에 의해 생성?

$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0$

7-3 $[1\ 0\ 0\ 0]$ A^T의 행에 의해 생성?

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $x_1[1\ 2\ 1] + x_2[1\ 1\ 2] + x_3[3\ 5\ 4] + x_4[1\ 4\ {-1}] = [1\ 0\ 0\ 0]$

$2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$

$\rightarrow$ 생성 X