벡터공간

- 다음 성질을 만족하면 벡터공간임

1) 닫힘성질

1. $u+v$ 는 R^n의 원이다. 2. au는 R^n의 원이다.

2) 가법에 관한 성질

1. $u+v=v+u$ 2. $u+(v+w)=(u+v)+w$ 3. R^n은 영벡터를 포함하고 R^n의 임의의원 u에대해 $u+0=u$ 이다.

4. R^n의모든 벡터 u에대해 $u+(-u)=0$ 인벡터 $-u$가 존재한다.

3) 스칼라곱에 관한 성질

1. $a(bu)=(ab)u$ 2. $a(u+v)=au+av$ 3. $(a+b)u=au+bu$ 4. R^n의 모든 u에대해서 $1u=u$ 이다.

이거 2개면 검사해도 확인 가능

(ex) 연산을 만족하는 모든 순서쌍 (x,y) 집합에서

$(x,y)+(x'+y')=(x+x'+1, y+y'+1)$, $a(x,y)=(ax,ay)$ 이 벡터 공간인가?

$a(u+v)=au+av \Rightarrow a(x+x'+1, y+y'+1) = a(x,y)+a(x',y')$

$= (ax+ax', ay+ay')$ 성립 X

연습문제

1. 벡터 공간인지 판단 하여라

2. 벡터공간 판단

2-1 $(x_1, y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$, $a(x,y)=(ax,y)$

$a(u+v)=au+av \Rightarrow a(x_1+x_2, y_1+y_2) = a(x_1,y_1)+a(x_2,y_2)$

$(a(x_1+x_2), y_1+y_2)$ $=(ax_1,y_1)+(ax_2,y_2)$

$=(a(x_1+x_2), y_1+y_2)$

$(a+b)u = au+bu \Rightarrow (a+b)(x_1, y_1) = a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)$

$((a+b)x_1, y_1) = (ax_1, y_1) + (bx_1 + y_1)$

$= ((a+b)x_1, y_1+y_1)$

벡터 공간 X

2-2 $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1, 0)$, $c(x, y) = (cx, cy)$

$a(v+u) = av+au \Rightarrow a(x_1, 0) = (ax_1, \cancel{ay_1}) + (ax_2, \cancel{ay_2})$

$= (ax_1, 0) = (ax_1, 0)$

$(a+b)u = au+bu \Rightarrow (a+b)(x_1, y_1) = a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)$

$((a+b)x_1, (a+b)y_1) = (ax_1 + bx_1, 0)$

벡터 공간 X

2-3 $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, $a(x, y) = (\sqrt{a}x, \sqrt{a}y)$

$a(u+v) = au+av \quad a(x_1+x_2, y_1+y_2) = (\sqrt{a}x_1, \sqrt{a}y_1) + (\sqrt{a}x_2, \sqrt{a}y_2)$

$(\sqrt{a}(x_1+x_2), \sqrt{a}(y_1+y_2)) = (\sqrt{a}(x_1+x_2), \sqrt{a}(y_1+y_2))$

$(a+b)u = au+bu \quad (a+b)(x, y) = a(x, y) + b(x, y)$

$(\sqrt{a+b}\,x, \sqrt{a+b}\,y) = (\sqrt{a}x, \sqrt{a}y) + (\sqrt{b}x, \sqrt{b}y)$

$\neq ((\sqrt{a}+\sqrt{b})x, (\sqrt{a}+\sqrt{b})y)$

벡터 공간 X

2-4 $(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$, $a(x, y, z) = (ax, y, z)$

$a(u+v) = au+av \quad a(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (ax_1, y_1, z_1) + (ax_2, y_2, z_2)$

$= (a(x_1+x_2), y_1+y_2, z_1+z_2) = (a(x_1+x_2), y_1+y_2, z_1+z_2)$

$(a+b)u = au+bu \quad (a+b)(x, y, z) = a(x, y, z) + b(x, y, z)$

$((a+b)x, y, z) = ((a+b)x, y, z)$

벡터공간 !

2-5 $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, $a(x, y) = (2ax, 2ay)$

$a(u+v) = au+av \quad a(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2ax_1, 2ay_1) + (2ax_2, 2ay_2)$

$(2a(x_1+x_2), 2a(y_1+y_2)) = (2a(x_1+x_2), 2a(y_1+y_2))$

$(a+b)(u) = au+bu$ $\quad (2(a+b)x, 2(a+b)y) = (2ax, 2ay) + (2bx, 2by)$

$\qquad\qquad \neq \quad 2(a+b)x, 2(a+b)y)$

벡터공간!

3. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$, $a(x,y) = (ax_1, ay_1)$

$a(u+v) = au+av$ $\quad a(x_1x_2, y_1y_2) = (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2)$

$\qquad (ax_1x_2, ay_1y_2) \neq (a^2x_1x_2, a^2y_1y_2)$

벡터 공간 X

4. 추후

5. $(1,x)$ 형식인 실수의 모든 순서쌍 집합 $(1,y)+(1,y') = (1, y+y')$, $k(1,y) = (1,ky)$

$a(u+v) = au+av$ $\quad a(1, y+y') = (1, ay) + (1, ay')$

$\qquad (1, a(y+y')) = (1, a(y+y'))$

$(a+b)u = au+bu$ $\quad (1, (a+b)y) = (1, ay) + (1, by)$

$\qquad \neq \quad (1, (a+b)y)$