$A = PBP^{-1}$ 를 만족하는 정칙 행렬 P가 존재할때

A와 B는 닮음.

ex) $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

A: $(\lambda-4)(\lambda+1)+6$
$= \lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$

B: $(\lambda-5)(\lambda+2)+12$
$\lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$

∴ 닮음

서로 닮은 행렬들의 고유방정식은 같다

ex) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$(\lambda-1)(\lambda-3)-8$
$= \lambda^2-4\lambda-5$

$(\lambda-1)(\lambda-2)-12$
$\lambda^2-3\lambda-10=0$

∴ 닮지 X

대각행렬과 닮은 정방행렬은 대각화 가능행렬

If A 대각화 가능 행렬 $D=P^{-1}AP$ or $A=PDP^{-1}$

n차 정방 행렬이 대각화 가능 충분조건은 n개의 1차독립인 고유벡터 가짐

ex) A와 B 대각화 가능행렬. 닮음?

$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$(\lambda-4)(\lambda+1)+6 = \lambda^2-3\lambda+2$
$(\lambda-5)(\lambda+2)+12 = \lambda^2-3\lambda+2$

닮음

연습문제

1. 닮음 아님 증명 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

A: $(\lambda-3)^2$ B: $(\lambda-3)^2-1$ ∴ 닮음 X

2. 닮았는지 비교

1) $A=\begin{bmatrix}3&5\\3&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&4\\4&2\end{bmatrix}$

A: $(\lambda-3)(\lambda-1)-15=\lambda^2-4\lambda-12$ B: $\lambda^2-4\lambda+4-16=\lambda^2-4\lambda-12$ ∴ 닮음

2) $\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}6&3\\1&4\end{bmatrix}$

A: $(\lambda-3)^2=\lambda^2-6\lambda+9$ B: $(\lambda-6)(\lambda-4)-3=\lambda^2-10\lambda+21$ ∴ 닮음 X

3) $A=\begin{bmatrix}1&1\\4&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&4\end{bmatrix}$

A: $(\lambda-1)(\lambda-2)-4=\lambda^2-3\lambda-2$ B: $(\lambda-1)(\lambda-4)-2=\lambda^2-5\lambda+2$ ∴ 닮음 X

4) $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3&1&0\\4&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$

A: $\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-2\\-1&\lambda+2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$ B: $\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\-4&\lambda-1&0\\-2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda^2-4-1)$ $=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3-4)$ ∴ 닮음 X

4. $P^{-1}AP$ 계산 후 A가 대각 가능인지 보여라

1) $A=\begin{bmatrix}-11&36\\-3&10\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}-3&-4\\-1&-1\end{bmatrix}$

$P^{-1}=\frac{1}{3-4}\begin{bmatrix}-1&4\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\-1&3\end{bmatrix}$ $(\lambda+11)(\lambda-10)+108=\lambda^2+\lambda-2=0$
$\lambda=1$ or -2 ∴ $D=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-4\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11&36\\-3&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-4\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}$

2) $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&3&0\\4&-2&5\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}0&1&-3\\0&4&0\\1&2&2\end{bmatrix}$

A: $(\lambda-5)((\lambda+1)(\lambda-3))$ ∴ $D=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&1\\0&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{12}&0\end{bmatrix}$ ∴ $P^{-1}AP=D$

5. A에 대해서 $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되는 정칙행렬 P 구하라

5-1 $A=\begin{bmatrix}1&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}$ $(\lambda-1)(\lambda+1)+\frac{3}{4}=\lambda^2-\frac{1}{4}=0$ $\lambda=\pm\frac{1}{2}$

$\begin{vmatrix} \lambda-1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda+1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda=\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda=-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

5-3 $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda & 3 & -5 \\ 4 & \lambda+4 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} \Rightarrow (\lambda-4)(\lambda(\lambda+4)-12) = (\lambda-4)(\lambda^2+4\lambda-12) = (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+6) \quad \lambda = 2, 4, -6$

$\lambda=2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = t,\ x_3 = 0 \quad x_1 = -\frac{3}{2}t \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda=4 \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 4 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = t \quad 4x_1+3t+15t \quad x_3 = -3t \quad x_1 = -\frac{18}{4}t = -\frac{9}{2}t \quad \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

$\lambda=-6 \begin{bmatrix} -6 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = 0,\ x_2 = t \quad x_1 = \frac{t}{2} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$