단위행렬 I_n 에 단 한번의 기본행 연산을 통해
얻어지는 행렬을 기본행렬 E_n 이라고함

Q1) $R_1 \leftrightarrow R_2$, $2R_2$, $R_3 + cR_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$2R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $R_3 + cR_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+c & 8+2c & 9+3c \end{bmatrix}$

기본행 역연산

$I \rightarrow E$	$E \rightarrow I$
① i 번째와 j번째 교환	i 번째와 j번째 교환
② i 번째 행에 c를 곱함	i 번째 행에 $\frac{1}{c}$를 곱함
③ i 번째 행에 c곱하여 j번째더함	i 번째 행에 $-c$곱하여 j번째더함

$\rightarrow$ I를 기준으로

Q2) $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R_1 \leftrightarrow R_2$ $\rightarrow$ I를 기준으로!!

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E^{-1} \Rightarrow R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↳ $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$ $E^{-1} = 2R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

연습문제

1. 1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ 기초행렬 E^{-1} : $\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ $3R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ ⇒ 기초행렬 E^{-1}: $-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ $R_2 \leftrightarrow R_1$ ⇒ 기초행렬 E^{-1} : $R_2 \leftrightarrow R_1$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ $-3R_3 + R_2 \rightarrow R_2$ ⇒ 기초행렬 E^{-1} : $3R_3 + R_2 \rightarrow R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_2 + R_3 \to R_3$ $\quad E^{-1}: -2R_2 + R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $EA = B$ 가 되는 E?

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$-2R_1 \to R_1$ $\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$R_2 \leftrightarrow R_3$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$2R_2 + R_3 \to R_3$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $AE = B$ 가 되는 기초 행렬 E 구하라

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ E가 오른쪽에 있으면 열 기준 변환

$R_1 \leftrightarrow R_3$ $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{2} R_2 \to R_2$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2} R_1 \to R_1$ $\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

4-1 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ 역 행렬은? $\quad \frac{1}{\lambda_1} R_1, \frac{R_2}{\lambda_2}, \frac{R_3}{\lambda_3}, \frac{R_4}{\lambda_4}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_4} \end{bmatrix}$

4-2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 역행렬 $\quad R_1 \leftrightarrow R_4 \quad R_2 \leftrightarrow R_3$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda_4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$