

$$|u - \text{proj}_W u| < |u - h|$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

ex) $2x_1 - x_2 = 1$ 최소 제곱 해 구하고 A 의 열공간으로의 b 의 정사영 구하라
 $x_1 + 3x_2 = -1$
 $3x_1 - 4x_2 = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{243} \begin{bmatrix} 26 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \therefore \hat{x}_1 = \frac{50}{243}, \hat{x}_2 = -\frac{91}{243}$$

$$A \hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{50}{243} \\ -\frac{91}{243} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 191/243 \\ -223/243 \\ 514/243 \end{bmatrix}$$

ex) $-3x_1 + x_2 = 2$ 최소 제곱 해, A 열공간, b 정사영
 $x_1 - 2x_2 = 2$
 $4x_1 - x_2 = -4$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 69 & 9 \\ 9 & 26 \end{bmatrix} \quad A^T b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \hat{x}_1 = \frac{22}{75} \quad \hat{x}_2 = \frac{124}{75}$$

$$\text{proj}_W b = A \hat{x} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 58 \\ -182 \\ 140 \end{bmatrix}$$

연습문제

$$2.2 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. $2x_1 - x_2 = 4$ $Ax = b$ 의 최소 제곱해와 b 에서 A 의 열공간 구하라
 $3x_1 + 2x_2 = 1$
 $-2x_1 + 4x_2 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{17}{95} \quad x_2 = \frac{143}{285}$$

$$\text{proj}_W b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{94}{57} \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$2-2 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

3. $Ax=b$ 의 제곱해 구하고 A 리 열공간의 정사영 구하라

$$3-1 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = 5 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$A \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

4. $(0,0) (1,2) (2,5)$ 근사한 직선 구하라

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$