첨가행렬

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \qquad [A \mid b]$$

기본행연산

1. 한 행에 0이 아닌 상수 α를 곱한다. 이를 αR_i로 나타낸다.
2. 두 행의 순서를 바꾼다. 이를 $R_i \longleftrightarrow R_j$로 나타낸다.
3. 한 i행을 상수 α배 하여 다른행 j에 더한다. 이를 $R_j + \alpha R_i$로 나타낸다.

ex)
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

① $R_2 + R_1 \to R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

② $R_3 - 2R_1 \to R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

③ $R_2 + R_3 \to R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

④ $\frac{1}{2}R_3 \to R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{z = 2}$

$y + 3z = 5$
$\underline{y = -1}$

$x - 2y + 3z = 9$
$x + 2 + 6 = 9$
$\underline{x = 1}$

Gauss & Gauss-Jordan 소거법

1. 전부는 0이 아닌 행에서 0 아닌 첫번째 숫자는 1이다(이는 선도 1)
2. 전부 0인 행들이 있다면 이러한 행들은 행렬의 맨 아래에 모여 있다.
3. 전부는 0이 아닌 연속되는 두 행에서, 아랫행의 선도 1은 윗행의 선도 1보다 오른쪽에 나타난다.
4. 선도 1을 포함하는 각 열에서 선도 1을 제외한 나머지 원드른 모두 0이다.

1~3 이면 Gauss 1~4 이면 Gauss-Jordan

ex) $2x_1+4x_2-2x_3=0 \quad 3x_1+5x_2=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{2}R_1 \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3R_1 - R_2 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{x_3=t} \quad \underline{x_2=3t-1}$

$x_1+6t-2-t=0 \quad \underline{x_1=-5t+2}$

연습문제

1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\underline{(0,2)}$

1.2 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $x_3=-1 \quad x_2+2=1 \quad x_2=-1$

$x_1+1=3 \quad x_1=2 \quad \underline{(2,-1,-1)}$

1.3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $x_4=4 \quad x_3+8=1 \quad x_3=-7$

$x_2-14+4=3 \quad x_2=13 \quad x_1+26+4=4 \quad x_1=-26$

$\underline{(-26,\ 13,\ -7,\ 4)}$

2.1 $x+2y=7$

$2x+y=8$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad 2R_1 - R_2 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{3}R_2 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$x=3 \quad y=2$

2-2 $x_1 - 3x_3 = 2$

$3x_1+x_2-2x_3=5$

$2x_1+2x_2+x_3=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 3R_1 - R_2 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -11 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2R_1 - R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -11 \\ 0 & -2 & -7 & -8 \end{bmatrix} \quad 2R_2 - R_3 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{bmatrix}$$

$-R_2 \to R_2$

$\tfrac{1}{7}R_3 \to R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$x_3=2 \quad x_1-6=-2$

$x_2+14=11 \quad x_1=4$

$x_2=-3$

$x_1=4,\ x_2=-3,\ x_3=2$

2-3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 &= 8 \\ x_1 \quad - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 \quad - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2R_1 - R_3 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-3R_2 + R_3 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

∴ 해가 없다

2-4

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 12z &= 6 \\ x + y + 4z &= 2 \\ -x + 2y + 8z &= 4 \\ 2x + 5y + 20z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 20 & 10 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{3}R_1 \to R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 20 & 10 \end{bmatrix} \qquad R_1 + R_3 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 6 \\ 2 & 5 & 20 & 10 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{3}R_3 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2R_1 - R_4 \to R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -6 \end{bmatrix} \qquad 3R_3 + R_4 \to R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z = t \quad y = 2 - 4t \quad x = 0$

3-1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_3 = t \quad x_2 = -t \quad x_1 = 0$

$(0, -t, t)$

3-2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_2 = t \quad x_4 = s$

$x_3 = 0 \quad x_1 = -s$

$(-s, t, 0, s)$

4. $A=\begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

4-1 A 가 첨가 행렬 일때, 해 갖는 k는?

$3R_1+R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 3k-4 & 5 \end{bmatrix}$ $3k-4 \neq 0$ $k \neq \frac{4}{3}$

4-2 A가 계수행렬 일때, 해 갖는 k는?

$3R_1+R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 3k-4 & 5 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 모든 실수 가능

5. $x+y=2$
$y+z=2$
$x+z=2$
$ax+by+cz=0$

유일한 해, 해 없음, 무수히 많은 해 갖는 경우 의 a, b, c 값을 찾아라

sol $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$ $R_1-R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$ $R_2-R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$

$\frac{R_3}{2} \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$ $R_2-R_3 \to R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$ $R_1-R_2 \to R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$

aR_1-R_4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & c & a \end{bmatrix}$ $\cdots >$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{bmatrix}$

$\therefore x=y=z=1$ 1) $a+b+c=0$ 일때 유일한 해
2) $a+b+c \neq 0$ 일때 해 없음
3) 무수히 많은 해 가질수 없음

6-1 $x+y+2z=0$
$2x+y+z=0$
$3x-y+z=0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ 계수행렬 $2R_1-R_2 \to R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$3R_1-R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $4R_2-R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $z=0$ $y=0$ $x=0$
$(0, 0, 0)$

6-2 $x-y+z=0$
$2x+y=0$
$2x-2y+2z=0$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ $2R_1-R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $2R_1-R_2 \to R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $z=t$ $x=-\frac{2}{3}t$
$y=\frac{t}{3}$

$\therefore \left(-\frac{2}{3}t, \frac{t}{3}, t\right)$

6-3 $\quad \begin{aligned} 2x-y+5z&=0 \\ 3x+2y-3z&=0 \\ x-y+4z&=0 \end{aligned}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_3\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_1-R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z=t$
$y=3t$
$x=-t$

$\therefore (-t, 3t, t)$