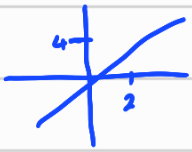
$n\times 1$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ⇒ 열벡터 , $1\times n$ $[a_1, a_2 \cdots a_n]$ → 행벡터

$[V_1, V_2 \cdots V_n]$ 이 R^n 에서의 벡터의 집합 일때

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots \alpha_n V_n$ 은 $[V_1, V_2 \cdots V_n]$ 의 일차결합 이라 함

ex) 1) $V=[1,2]$ 와 같은 방향을 나타내고 그려라

$\alpha V = [\alpha, 2\alpha]$



2) $V_1=[1,0]$, $V_2=[0,1]$, $\alpha_1[1,0]+\alpha_2[0,1]=[\alpha_1,\alpha_2]$

V_1 과 V_2 의 일차결합 으로 나타내는 수 형은?

모든벡터

3) 스코 1 : $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ 스코 2 : $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ 스코 3: $\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$ 스코 1과 스코 2의 결합으로 스코 3을 만들라

$a\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$ $10a=5$ $a=\frac{1}{2}$

$10\times\frac{1}{2}+6b=11$ $6b=6$ $b=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}, b=1$

4) 행렬 A에서 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 처음 두 행의 일차결합이 세번째 행과 같지 않다는 것보여라

$a[1\ 1\ 0\ 6]+b[2\ 3\ 5\ 0] \neq [6\ 0\ 1\ 1]$

$a=\frac{1}{6}$ $b=\frac{1}{5}$ $a+3b=0$ $\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\neq 0$ ∴ 일차결합 X

연습문제

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 8 & -6 & -10 & -13 \end{bmatrix}$

1) 마지막 행이 두 행의 일차결합임을 보여라

$a[-1\ 2\ 3\ 4]+b[5\ 0\ -1\ -1]=[8\ -6\ -10\ -13]$

$2a=-6$ $a=-3$, $-a+5b=8$ $b=1$ ∴ 일차결합

2) $A^{(k)}$ = A의 k번째열. $x_1 A^{(1)}+x_2 A^{(2)}+x_4 A^{(4)} = A^{(3)}$, x_1 x_2 x_4 ?

$x_1[-1\ 5\ 8]+x_2[2\ 0\ 6]+x_4[4\ -1\ 13]=[3\ -1\ 10]$

$5x_1-x_4=-1$ $-x_1+2x_2+4x_4=3$ $8x_1+6x_2+13x_4=10$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 13 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2R_2-R_3 \\ \to R_3}]{-R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -5 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow[\to R_2]{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 11 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 7 & -11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & \frac{23}{2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 = \frac{-1}{19} \quad x_2 = 0 \quad x_4 = \frac{14}{19}$$

3) $\alpha_2 A^{(2)} + \alpha_3 A^{(1)} + \alpha_4 A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$?

$\alpha_2 [2\ 0\ 6]^T + \alpha_3 [3\ -1\ -10]^T + \alpha_4 [4\ -1\ -13]^T = 0$

$-3\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \quad \alpha_3 = -\frac{\alpha_4}{3}$

$2\alpha_2 - \alpha_4 + 4\alpha_4 = 0 \quad 3\alpha_4 = 2\alpha_2 \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}\alpha_4$

$6\alpha_2 - 10\alpha_3 - 13\alpha_4 = 0$

$= 9\alpha_4 + \frac{10}{3}\alpha_4 - 13\alpha_4 = \frac{1}{3}\alpha_4$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2-1 A의 행이 다른 두 행의 일차결합 아님 증명

$\alpha [1\ 0\ 0] + \beta [0\ 0\ 3] = [0\ 2\ 0]$ $\alpha = 0, \beta = 0$ ∴ 일차 결합X

2 나타낼수 X

열

2-2 $\alpha [1\ 0\ 0] + \beta [0\ 2\ 0] = [0\ 0\ 3]$ 일 차 결합X

2-3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 에서도 성립?

$\alpha [1\ 0\ 0] + \beta [0\ 2\ 0] = [0\ 0\ 0]$ 성립 O

$\alpha [1\ 0\ 0] + \beta [0\ 0\ 0] = [0\ 2\ 0]$ $\rightsquigarrow$ 성립 X ← 반례

열 도 동일

∴ 대각행렬 모두 일차결합 X

3. $Ax = b$ $\quad b = \alpha A^{(1)} + \beta A^{(2)} \ldots$

3-1) $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_4 = t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -7 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$5x_3 + 13t =$ $\quad x_3 = -\frac{13}{5}t \quad x_2 - \frac{26}{5}t + 10t = 0 \quad x_2 = -\frac{24}{5}t$

$x_1 = 1 + 6t$

3-2) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 22 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 15 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1\ x_3 = -1,\ x_4 = 3$

가우스 소거법 이용