특수 행렬

행렬 A의 주 대각성분을 제외한 모든 성분이 0 일때 A를 대각행렬 이라함

ex) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

n차 정방 행렬이 대각성분 모두 1 이면 n차 대각행렬 이라 함

ex) $I_1 = [1]$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$m \times n$ 행렬 A에 대하여 $I_m A = A I_n = A$

$AB = BA = I$ $B = A^{-1}$ ⇐ 역행렬

Q₁) $A = [1\ 2\ 3]$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ A^T, B^T ?

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$(A+B)^T = A^T + B^T$ $(AB)^T = B^T A^T$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$ $(A^T)^T = A$

$A = A^T$ ⇒ 대칭행렬

Q₁) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ $(AB)^T = B^T A^T$ 증명

$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A^T + B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Q₂) A가 대각행렬 $A^T = A$ 증명

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

Q3) $A = A^T$ 대각행렬이 아닌 A? 3x3 matrix

$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & c & e \\ a & 1 & f \\ b & d & 1 \end{bmatrix}$ $a = c$, $e = b$, $d = f$

ex) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Q4) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $x^T A x = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ A?

$[x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + dx_2^2 + (b+c)x_1x_2$

$\therefore a = -1$ $d = 1$ $b+c = 2$ $b=1, c=1$

$[ax_1 + cx_2 \quad bx_1 + dx_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Q5) $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $x^T A x = 5x^2 + 6xy + y^2$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a=5$ $d=1$ $b=3$ $c=3$ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Q6) $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ $x^T A x = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

Q7) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ 이 합이 대칭임을 보여라

$A+B = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ b+y & a+x \end{bmatrix}$ $(A+B)^T = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ b+y & a+x \end{bmatrix}$

AB 가 대칭행렬이 아닐때 대칭행렬 A와 B는?

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} ad+be & ae+bf \\ bd+ce & be+cf \end{bmatrix}$

$bd + ce \neq ae + bf$

ex) $a=1$ $c=1$ $b=1$ $d + \cancel{e} \neq \cancel{e} + f$ $d \neq f$

ex) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$