선 형 대 수(야간) (1～20)
출제교수 : 인천대 민만식

1. 다음 중 R^2 벡터공간의 원소 (1, 2)를 일차결합에 의해 나타낼 수 있는 벡터집합은?
① {(1, 0), (2, 0)} ② {(1, 3), (2, 6)}
③ {(1, 0), (1, 1)} ④ {(1, 1), (0, 0)}

2. 다음 중 S가 주어진 벡터공간의 부분공간이 되는 것은?
① R^2 벡터공간의 부분집합 $S=\{\ (x+1,1)\mid\ x\in R\ \}$
② R^2 벡터공간의 부분집합 $S=\{\ (x+1,y)\mid\ x,y\in R\ \}$
③ R^3 벡터공간의 부분집합 $S=\{\ (x+1,y,x-1)\mid\ x,y\in R\ \}$
④ R^3 벡터공간의 부분집합 $S=\{\ (x,x+1,x+2)\mid\ x\in R\ \}$

3. 다음 글에서 괄호 안에 들어갈 용어로 옳은 것은?

벡터공간 V의 원소 $A_1,A_2,\ldots,A_n$과 체 F의 원소 $k_1,k_2,\ldots,k_n$에 대해서 $k_1A_1+k_2A_2+\ldots+k_nA_n=O$이 성립하도록 하는 계수들의 값이 오직 $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$일 때 벡터 $A_1,A_2,\ldots,A_n$을 (　　)이라고 한다.

① 일차결합 ② 기저
③ 일차종속 ④ 일차독립

4. 벡터공간 V의 기저와 차원에 관련된 성질로서 <u>부적절한</u> 것은?
① V의 기저는 유일하게 존재한다.
② V = R^n 이면 dim V = n 이다.
③ V의 차원은 V의 기저의 원소 개수이다.
④ 벡터집합 β가 V의 기저이려면 β는 일차독립인 벡터들의 집합이고 동시에 V의 생성원(generator)이어야 한다.

5. 선형변환 $T:\ V\to\ W$에 관련된 서술로서 <u>부적절한</u> 것은?
① $T(A+B)=T(A)+T(B)$
② $T(kA)=kT(A)$
③ $T(O)=O$
④ $T(-A)=T(A)$

6. 선형변환 $T:\ V\to\ W$에 관련된 서술로서 옳지 <u>못한</u> 것은?
① V'를 V의 부분공간이라 하면 $T(V')$도 W의 부분공간이다.
② V의 벡터들 $A_1,A_2,\ldots,A_n$이 V에서 일차독립이면, 각 벡터의 상(image)들인 $T(A_1),T(A_2),\ldots,T(A_n)$는 W에서 일차독립이다.
③ R(T)는 W의 부분공간이고 $Ker(T)$는 V의 부분공간이다.
④ dim V = dim $Ker(T)$ + dim R(T)를 만족한다.

※ (7-9) 선형변환 $T:\ R^3\to\ R^2$가 $T(x,y,z)=(x+2y,\ y+2z)$로 주어졌을 때 다음 물음에 답하라.

7. R^3와 R^2의 표준기저를 이용한 T의 행렬은?
① $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&2\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&4\end{pmatrix}$

8. $Ker(T)$를 구하면?
① $\{\ (x,y,z)\mid\ x,y,z\in R\ \}$ ② $\{\ (0,2y,4z)\mid\ y,z\in R\ \}$
③ $\{\ (4z,-2z,z)\mid\ z\in R\ \}$ ④ $\{\ (0,0,0)\}$

9. dim $Ker(T)$와 dim R(T)를 순서대로 구한 것은?
① 0, 3 ② 3, 0
③ 2, 1 ④ 1, 2

10. 다음중 대각화가 가능하지 <u>않은</u> 행렬은?
① $\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix}4&0\\2&3\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

11. R^2 벡터공간에서 $A_1=(2,0)$, $A_2=(1,2)$이라 할 때 그램-슈미트 방법을 이용하면 기저 $\{A_1,A_2\}$를 직교기저 $\{B_1,B_2\}$로 바꿀 수 있다. 이때 B_1과 B_2를 차례로 나열한 것은?
① $(2,0)$, $(0,2)$ ② $(1,2)$, $(-4,2)$
③ $(2,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ④ $(1,2)$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

12. 벡터공간의 기저와 차원에 관련된 서술로서 <u>부적절한</u> 것은?
① 주어진 벡터공간의 기저는 유일하다.
② 기저의 원소인 벡터들은 일차독립이다.
③ 임의의 벡터는 기저의 원소들의 일차결합으로 나타낼 수 있다.
④ S가 벡터공간 V의 부분공간이면 dim S ≤ dim V 이다.

13. 다음 주어진 자료에 가장 적합한 일차곡선 $y=ax+b$를 찾으려고 한다. 이 문제를 풀기 위해서는 정규방정식 $M^TMB=M^TA$를 풀어야 한다. 여기서 M, A, B 등에 대해 서술한 것으로 적절한 것은?

x	1	2	3	4
y	2	3	3	6

① $M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&3&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

② $M=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&3&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

③ $M=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\\4&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

14. 벡터공간 V의 기저와 차원에 관련된 성질로서 옳은 것은?

① V의 기저는 유일하다.

② V의 차원은 V의 기저의 원소 개수이다.

③ V = R^n이면 dim V = n+1이다.

④ V = {O}이면 dim V = 1이다.

15. 다음 벡터들의 집합 중 R^3의 기저가 되는 것은?

① {(1, 0, 0), (0, 1, 0)}

② {(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)}

③ {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)}

④ {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)}

16. 다음 중 $T : R^2 \to R^2$ 가 선형변환인 것은?

① $T(x, y) = (0, 0)$ ② $T(x, y) = (x, 1)$

③ $T(x, y) = (x, y+1)$ ④ $T(x, y) = (x^2, y^2)$

17. 다음 벡터집합들 중 내적공간 { R^2, · }에서 직교기저가 되는 것들을 모두 고르면?

A = {(1, 0), (1, 1)}	B = {(1, 0), (0, 2)}
C = {(1, 1), (-1, -1)}	D = {(1, 2), (4, -2)}

① A, C ② B, C

③ B, D ④ B, C, D

※ (68~70) 다음 행렬 M에 대해 물음에 답하라.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

18. M의 고유값은?

① 1, -1 ② 1, 0

③ -1 ④ 1

19. M의 고유벡터가 아닌 것은?

① (1, 0) ② (1, -2)

③ (-1, 2) ④ (1, 1)

20. M에 관한 설명으로 옳지 못한 것은?

① M은 2차 정방행렬이고, 서로 다른 고유값이 2개 존재하므로, M은 대각화 가능하다.

② M은 2차 정방행렬이고, 서로 일차독립인 고유벡터가 2개 존재하므로, M은 대각화 가능하다.

③ M을 대각화하기 위해 필요한 대각행렬 D는 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 이다.

④ 정칙행렬 P와 대각행렬 D가 존재하여 $M = PDP^{-1}$를 만족한다.

주관식1

필요에 따라 좌표축을 이동하여 혼합항소거하여 최종좌표계에 있어서 그 방정식을 구하여라

$4x^2 + 25y^2 - 20xy - 15x - 6y = 0$

주관식2

동차 연립 1차방정식의 해 공간에 대한 정규직교기저를 구하라.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$