A의 계수 + A의 영차원 = n

ex) $x_1+x_2+x_3=0$ 에 의해 주어진 방정식들의 영공간의 차원 구해라

$\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$ $x_2=t$, $x_3=s$ ∴ 영차원 = 2 Rank(A) = 1

ex) $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\5&6&7\end{bmatrix}$ 영공간의 기저 ?

$\begin{bmatrix}2&3&1\\5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{3}{2}&\frac{9}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-3\end{bmatrix}$

$x_3=t$ $x_2-3t=0$ $x_2=3t$ $x_1+\frac{9}{2}t+\frac{1}{2}t=0$ $x_1=-5t$

∴ $t\begin{bmatrix}-5\\3\\1\end{bmatrix}$ 영공간의 기저 $\begin{bmatrix}-5\\3\\1\end{bmatrix}$ 영차원 = 1

ex) $x_1+x_2-x_3+x_4=0$ 차원 ?
$x_2-2x_3-x_4=0$

$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ ∴ ②

ex) $x_1+2x_2+x_3+3x_4=0$
$2x_1+5x_2+2x_3+x_4=0$
$x_1+3x_2+x_3-2x_4=0$ 기저는 ?

$\begin{bmatrix}1&2&1&3\\2&5&2&1\\1&3&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$

$\begin{bmatrix}1&2&1&3\\0&1&0&5\\1&3&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&3\\0&1&0&5\\0&1&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&3\\0&1&0&-5\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $x_3=t$ $x_4=0$
$x_2=0$ $x_1+t=0$ $x_1=-t$

∴ $t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ ∴ 기저 $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

연습문제

1-4 영공간의 차원과 기저 구하라 $\begin{bmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&5\\1&1\\4&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&5\\1&1\\0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&3\\1&1\\0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1\\0&3\\0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1\\0&3\\0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $x_2=0$ $x_1=0$

∴ 영차원 = 0
기저 ∅

3.1 $2x_1+x_2-3x_3+x_4=0$
$3x_1-x_2+x_3-x_4=0$
$5x_1+x_2+x_3+9x_4=0$
$10x_1+x_2-x_3+9x_4=0$

4-3 기저구하라

$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\1&1&1&1&2\\2&3&4&5&4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&4&5&1\\0&1&2&3&3\\2&3&4&5&4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&2&3&3\\2&3&4&5&1\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}$ $x_4=t$ $x_5=0$

$\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-1\\0&1&2&3&3\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&0&0&0&-1\\0&1&2&3&3\\0&0&0&0&3\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&2&3&-3\\0&1&2&3&3\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}$

$x_4=t$ $x_3=s$ $x_5=0$ $x_2+2s+3t=0$ $x_2=-2s-3t$ $x_1-s-2t=0$ $x_1=2t+s$

$\begin{bmatrix}2t+s\\-2s-3t\\s\\t\\0\end{bmatrix}$

1. 영공간 과 차원의 기저를 구하라

1-1 $\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=s,\ x_3=t$ $\begin{bmatrix}-s-t\\s\\t\end{bmatrix} \to \left\{s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

1-2 $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ $x_1=x_2=0$ $\therefore$ $\varnothing$ 영차원 : 0

1-3 $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ $x_3=t$ $x_2=-t$ $x_1=0$ $t\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ $\therefore \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

1-5 $\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&1&2\\3&0&-1\end{bmatrix} \overset{r}{\to} \begin{bmatrix}0&2&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&0\\0&2&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&-1\\0&2&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-4\\0&3&-1\\0&2&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&-4\\0&2&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&-4\\0&0&-11\end{bmatrix}$

$\therefore x_1=x_2=x_3=0$ $\to \begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\varnothing$

2. $x_1+x_2-2x_3+x_4=0$
$2x_1-x_2+x_4=0$

$\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\2&-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$

$\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&3&-2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$ $x_4=t$ $x_3=\frac{2}{3}s$ $x_2=s$ $x_1=-t+\frac{4}{3}s$

$x_1+\frac{2}{3}s-2s+t=0$
$x_1-\frac{4}{3}s+t=0$

$s\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore \left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

3. 자명하지 않은 해가 있는지 판단

3-2 $x+y+z=0$, $2y-z=0$, $2x+4y+z=0$

$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\2&4&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\0&2&-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ 자명한 해 있다.

3-3 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 자명한 해 없다.

4-1 $\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\2&1&3&7\\1&-1&3&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&3&-3&3\\1&-1&3&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-1&1\\1&-1&3&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$

$x_4=t$ $x_2+2t+t=0$

$x_3=-2t$ $x_2=-3t$

$x_1+3t-4t=0$ $x_1=t$

$\therefore t\begin{bmatrix}1\\-3\\-2\\1\end{bmatrix} \to \left\{\begin{bmatrix}1\\-3\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$

4-2 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&1&2&1\\1&3&3&1&1\\1&4&4&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&0&2&-2&0\\0&1&2&-1&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$x_4=s$ $x_5=t$

$x_3=s$ $x_2=-s$

$x_1=-s-t$

$\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \leftarrow s\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$