일차 종속

$\alpha i + \beta j \neq 0$ 이면 일차 종속 이다.

일차 독립

일차적으로 종속하지않으면 일차독립이다. ⇒ $\alpha i + \beta j = 0$

ex) [1,1,0], [1,2,3], [0,0,1] → 일차독립?

$\alpha[1,1,0] + \beta[1,2,3] + \gamma[0,0,1]$

$\alpha+\beta=0$
$\alpha+2\beta=0$ $\beta=0$ $\alpha=0$ $\gamma=0$ ∴ 일차독립

ex) [1,2,3]과 [2,4,6] 일차 종속?

$k[1,2,3]=[2,4,6]$ $k=2$ ∴ 일차종속

ex) 0이아닌 행벡터들의 일차독립 증명

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1[1,-2,3,4,-6] + x_2[0,2,0,6,1] + x_3[0\ 0\ 5\ -1\ 3] = 0$

$-6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1=0$ $3x_1 + 5x_3 = 0$ ∴ 일차독립
$x_3=0$
$x_2=0$

W가 R^n의 부분 공간

1) $W = \langle v_1, v_2 \cdots v_n \rangle$, W는 벡터들 $v_1, v_2 \cdots v_n$에 의해 생성되었고

2) $\{v_1, v_2, v_3 \cdots v_n\}$은 일차독립이면 W의 기저 라고부름

부분공간의 어떤 기저에서 벡터들의 수를 부분공간의 차원(=기저의 개수)라고 함

ex) $v_1 = [1\ 2\ 3]$, $v_2 = [1\ 2\ -1]$, $v_3 = [3\ -1\ 0]$ $v_4 = [2.1.2]$ R^3의 기저 생성?

$\alpha_1[1\ 2\ 3] + \alpha_2[1\ 2\ -1] + \alpha_3[3\ -1\ 0] + \alpha_4[2.1.2] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$4\alpha_2 + 9\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$ $\alpha_4 = t$ $\alpha_3 = -\frac{3}{7}t$

$7\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{9}{7}t + 2t = 0$ $4\alpha_2 - \frac{27}{7}t + 4t = 0$ $4\alpha_2 = -\frac{1}{7}t$ $\alpha_2 = -\frac{1}{28}t$

$\alpha_1 - \frac{1}{28}t + \frac{5}{7}t = 0$ $\alpha_1 = \frac{-19}{28}t$

ex) 각 부분 공간의 차원

1) $W = \{(d, c-d, c)\}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} d \\ c-d \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\therefore$ 2차원

2) $W = \{(2b, b, 0)\}$ $\Rightarrow b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\therefore$ 1차원

연습문제

3. $[2,1,1,1]$, $[3,-2,1,0]$, $[a,-1,2,0]$ 일차독립인 a?

$x_1 = 0$ $\cancel{x_1} + x_2 + 2x_3 = 0$ $\Rightarrow$ $3x_2 + 6x_3 = 0$

$-2x_2 - x_1 = 0$ $3x_2 + ax_3 = 0$

$3x_2 + ax_3 = 0$ $(6-a)x_3 = 0$ $\therefore$ a는 모든 실수

11.4 차원 찾아라

$\left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mid z = x+y \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x \\ y \\ x+y \end{vmatrix} \Rightarrow x\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\therefore$ 2차원

12-6 $Ax=0$ 을 구성하는 차원

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $x_1 = t$, $x_2 = s$ $x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

12-7 $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$x_2-x_3=0$ $\quad x_2=x_3$ $\quad x_3=t$
$x_1+x_3=0$ $\quad x_1=-x_3$ $\quad x_2=t$
$2x_1+x_2+x_3=0$ $\quad x_1=-t$

$\therefore t\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$ 1 차원

1. $\left\{\begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\16\\-3\end{bmatrix}\right\}$ 일차독립인가?

$\alpha_1\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}8\\16\\-3\end{bmatrix}=0$

$2\alpha_1+3\alpha_2+8\alpha_3=0$
$6\alpha_1+\alpha_2+16\alpha_3=0$
$2\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3=0$

$\begin{bmatrix}2&3&8\\6&1&16\\2&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&8\\0&8&8\\2&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&8\\0&1&1\\0&1&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&8\\0&1&1\\0&0&-10\end{bmatrix}$

$\therefore \alpha_3=0 \quad \alpha_2=0 \quad \alpha_1=0$

일차독립

2. $\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\10\\9\end{bmatrix}$ 일차종속인 a의 값은?

$\begin{bmatrix}4&3&a\\5&0&10\\1&2&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&a\\1&0&2\\1&2&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&a\\0&2&7\\1&2&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&a\\0&2&7\\1&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&3&a-8\\0&2&7\\1&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&7\\0&3&a-8\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&a-15\\0&3&a-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&a-15\\0&0&2a-37\end{bmatrix}$

$\therefore a=\frac{37}{2}$ 일때
비자명해 가짐

4. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\b\\1\end{bmatrix}$ 이 일차독립인 a, b 구하라

$x_1+ax_2=0$ $\quad 6x_1+3bx_3=0$ $\quad (3b-2)x_3=0$
$2x_1+bx_3=0$ $\quad 6x_1+2x_3=0$
$3x_1+x_3=0$

$b=\frac{2}{3}$ 이면 무수히많은 해를가짐

$\therefore b\neq\frac{2}{3}$ a는 모든실수

5. $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 이 R^2의 기저인지 구하라

아니다. $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$는 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$의 선형결합으로 이뤄질 수 없다.

6. $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 와 $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 이 R^2의 기저 형성 하는가?

$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}\alpha+2\beta=0\\ \alpha+3\beta=0\end{matrix}$ $\beta=0, \alpha=0$ 일차 독립! 기저 형성

7. $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ R^2 기저 생성?

$\begin{matrix}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha+3\beta=0\end{matrix}$ $\gamma=t$ $\alpha=-3\beta$ $-\beta+t=0$ $\beta=t$, $\alpha=-3t$

$t\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ ∴ 일차종속, 기저 생성 X

8. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ R^2 기저 형성?

$\begin{matrix}\alpha+2\gamma=0\\ \beta+4\gamma=0\end{matrix}$ $\gamma=t$ $\beta=-4t$ $\alpha=-2t$ ∴ $t\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$ 기저 형성 X

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 이 기저형성 (단위 벡터)

9. $[1,1,1], [1,2,3], [2,-1,1]$ 기저 형성?

$\begin{matrix}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ \alpha+2\beta-\gamma=0\\ \alpha+3\beta+\gamma=0\end{matrix}$

$2\alpha+5\beta=0$

$\beta+2\gamma=0$
$-\ \beta-3\gamma=0$
$\gamma=0$, $\beta=0$ $\alpha=0$

∴ 기저형성

10. $[1,4,-1,3], [2,1,-3,1], [0,2,1,-5]$ 에 의해 발생한 R^4의 부분공간 W의 기저찾아라

$\begin{matrix}x_1+2x_2=0\\ 4x_1+x_2+x_3=0\\ -x_1-3x_2+x_3=0\\ 3x_1+x_2-5x_3=0\end{matrix}$

$x_1=-2x_2$
$5x_1+4x_3=0$ $2x_3=0$ $x_3=0$
$5x_2+x_3=0$ $x_1=0$
$x_3=0$

모두 기저 형성

11. 차원을 찾아라

11-1 R 1 11-2 $\left\{\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \mid y=x\right\}$ $\begin{vmatrix}x\\x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ 1

11-3 $\left\{\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \mid y=3x\right\}$ $x\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix} \Rightarrow 1$ 11-4 $\left\{\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \mid z=x+y\right\}$ $\begin{vmatrix}x\\y\\x+y\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$ ∴ 2

12. $Ax=0$ 답들을 구성하는 부분공간의 차원은?

12-1 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}x_1+2x_2=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2x_1+4x_2=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{matrix}$ $x_2=0$ $x_1=0$ 따라서 1차독립 0

12-2 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}x_1+2x_2=0\\ x_2=0\end{matrix}$ $x_1=0$ ∴ 0

12-3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $x_3 = 0$ $x_2 = 0$ $x_1 = 0$ $\therefore$ 차원 0

12-4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $A: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_1 + 2x_2 = 0$ $x_1 = t$ $t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\therefore$ 차원 1

12-5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{t}{2}$ $x_1 - t + 3t = 0$, $x_1 = -2t$ $t\begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ 차원 1

13. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 차원 찾아라

13-1 행에 의해 발생한 R^3 차원

$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore \langle [1\ 1\ 1], [0\ 1\ 2] \rangle$ 차원 2

13-2 열에 의해 발생한 R^3의 부분공간 차원

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 차원 2