

Поиск в глубину

Минский ШАД. Осень

16 апреля 2015 г.

1 Тематические задачи

1. [1 балл] У малыша Пабло есть n красок (пронумерованных от единицы до n) и большое желание раскрасить квадратный холст $n \times n$ клеток с помощью этих красок. Изначально холст пустой (все клетки имеют цвет ноль). На i -й день малыш выбирает краску под номером c_i , которую ещё не выбирал раньше, и закрашивает прямоугольник состоящий из клеток (x, y) , где $l_i \leq x \leq r_i$, $d_i \leq y \leq u_i$. По полученному холсту восстановите любой возможный набор $(c_i, l_i, r_i, d_i, u_i)$, который порождает данный холст, за $\mathcal{O}(n^2)$.

Например, для следующего холста ответ может быть таким: $((3, 1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 1, 2), (2, 2, 3, 2, 3))$:

1	1	0
1	2	2
0	2	2

2. [1 балл] Рассмотрим следующий параметризованный вариант сортировки массива из n чисел. Параметрами сортировки является k упорядоченных пар (a_i, b_i) .

Algorithm 1 SuperSort

```
1: function SUPERSORT(A, params)
2:   finished  $\leftarrow$  1
3:   for  $i = 1, k$  do
4:     if  $A[\text{params}[i].a] > A[\text{params}[i].b]$  then
5:       finished  $\leftarrow$  0
6:       swap( $A[\text{params}[i].a], A[\text{params}[i].b]$ )
7:     end if
8:   end for
9:   if finished = 0 then
10:    return SuperSort(A, params)
11:  else
12:    return A
13:  end if
14: end function
```

Ваша задача по числу n и упорядоченному массиву params ответить, правда ли что данная сортировка правильно будет работать для любого массива длины n . Сложность алгоритма должна быть линейной от размера входа.

К примеру, если $n = 3$, то, очевидно, сортировка с $\text{params} = \{(1, 2), (2, 3)\}$ правильно отсортирует любой массив. Но при $n = 5$, например, массив $A = (1, 2, 3, 5, 4)$ будет отсортирован неверно с помощью данных параметров.

3. [1 ½ балла] В одной стране есть n министров и m проектных документов, каждый из которых может быть либо принят, либо нет. Каждый министр обладает своим очень важным мнением по k_i из этих документов, т.е. утверждает, что он должен быть либо принят, либо не принят. Знания министров достаточно ограничены, поэтому $1 \leq k_i \leq 4$ для любого i .

Зачастую случается спорная ситуация, к примеру один министр хочет, чтоб проект X был принят, а другой совершенно против этого. В таких случаях происходят споры, которые значительно затягивают работу правительства. А именно, эти m проектных документов находятся на рассмотрении уже $10^{18}!$ триллионов лет.

Но наконец сегодня настал день дедлайна, в который вам надо решить, какие проекты будут приняты, а какие нет. Но не все варианты удовлетворяют министров. А именно, пусть l_i — количество проектных документов, которые решились так, как хочет того i -й министр. Тогда вариант признаётся удовлетворительным, если $l_i > \frac{k_i}{2}$ для любого i . Ваша задача за время $\mathcal{O}(n + m)$ определить, существует ли вообще план, который удовлетворит всех министров.

4. [1 балл] Дан ориентированный (n, m) -граф. Одна из его вершин выделена. Необходимо определить минимальное количество дуг, которое нужно добавить в граф, чтоб все вершины стали достижимы из помеченной за $\mathcal{O}(n + m)$.

2 Задачи на повторение

5. [1 балл] Дан массив a , причём $|a| = n$ и $a_i = \pm 1$. Массив называется хорошим, если любая его префиксная и суффиксная сумма неотрицательна. Надо найти самый длинный непрерывный подотрезок массива, который является хорошим.

6. [1 ½ балла] Из-за того, что $n \times m$ студентов минского ШАДа неважно написали контрольную случился апокалипсис. Судить студентов будет малыш Голод, а умеет он либо подвергнуть голодной пытке, либо не подвергать голодной пытке. Студентов выстроили в n рядов по m человек в каждом. Голод знает, что некоторые из студентов минчане, а значит их дома всё равно накормят, и, чтоб не тратить силы, подвергать их голодной пытке не стоит, ведь голодать они всё равно не будут. Также Голод знает, что некоторые другие студенты живут в общежитии, а значит они точно будут голодны, вне зависимости от исхода. А вот про остальных студентов Голод волен решить, будут они голодны или нет. Чтoб не показаться несправедливым, Голод хочет, чтоб в любом подквадрате 2×2 было поровну голодных и неголодных студентов. Подскажите малышу как много способов назначить вердикт студентам так, что выполнилось условие справедливости. Можно считать, что ответ влезает в машинное слово. Сложность алгоритма должна составлять $\mathcal{O}(nm)$.

К примеру, пусть $n = 3$, $m = 2$ и человек в правом верхнем углу из Минска, а человек в левом нижнем — из общежития:

М	
	О

Тогда всего есть два способа удовлетворить ограничение:

Таблица 1: Возможные варианты

М	О
О	М
М	О

М	О
М	О
М	О

3 Практические задачи

Ссылка на контеcт: <https://contest.yandex.ru/contest/1080/problems/>

7. [1 балл] Реализовать задачу 1.
8. [1 балл] Дан алфавит Σ , причём $|\Sigma| = n$. Дано число k . Надо выдать такую строку S минимальной длины, что любой упорядоченный набор из k символов алфавита встречается в S как подстрока.
9. [1 балл] Реализовать задачу 4.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сумма
Баллы	1	1	1½	1	1	1½	1	1	1	10