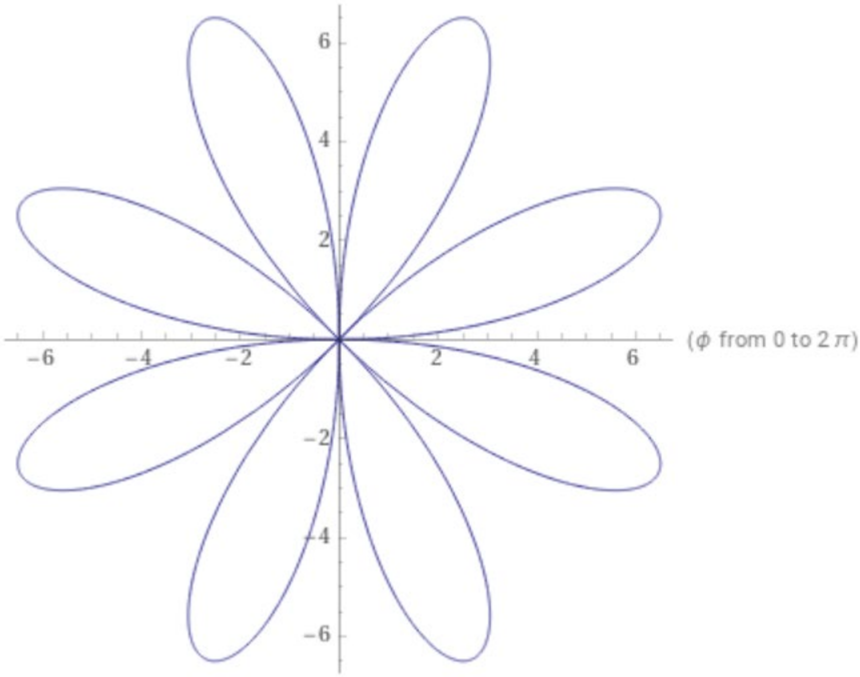
Задание 2. Площадь плоской фигуры

Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = 7\sin(4\varphi)$

1. Изобразим кривую и ограниченную ей область на графике (угол φ возьмем от 0 до 2π)



2. Формула для нахождения площади этой фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \rho^2(\varphi)d\varphi$$

3. Вычислим значение этого интеграла. Из-за симметрии графика нам достаточно найти площадь одного лепестка и умножить ее на количество лепестков (в данном случае 8).

Когда кривая пересекает полюс ($p = 0$), $\sin(4\phi) = 0$. Таким образом, $\phi = \frac{\pi}{4}k$, где $k \in Z$. В этом случае, $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = \frac{\pi}{8}$.

Теперь вычислим интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (7\sin(4\phi))^2 d\phi = \frac{49}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2(4\phi)d\phi$$

Используем тригонометрическое тождество $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$:

$$S = \frac{49}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2}(1 - \cos(8\phi))d\phi = \frac{49}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 - \cos(8\phi))d\phi$$

Интегрируем каждый член отдельно:

$$S = \frac{49}{4}\left[\phi - \frac{1}{8}\sin(8\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{49}{4}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\sin(2\pi) - 0 - \frac{1}{8}\sin(0)\right) = \frac{49\pi}{32}$$

Таким образом, площадь одного лепестка равна:

$$S_{\text{лепестка}} = \frac{49\pi}{32}$$

Учитывая, что у нас есть 8 лепестков, общая площадь фигуры равна:

$$S_{\text{общая}} = 8 \times S_{\text{лепестка}} = 8 \times \frac{49\pi}{32} = \frac{49\pi}{4}$$

Для оценки полученного значения площади в задаче с полярной кривой $p = 7\sin(4\phi)$, можно сравнить полученную площадь с площадью круга.

Теперь найдем площадь круга с радиусом $r = 7$, так как это максимальное значение функции $p(\phi)$:

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2 = \pi(7^2) = 49\pi$$

Поскольку $S_{\text{общая}} = \frac{49\pi}{4}$ меньше площади круга, $S_{\text{круга}} = 49\pi$, это значит, что фигура, ограниченная кривой, занимает меньше пространства, чем круг радиусом 7. Фактически, фигура занимает примерно $\frac{1}{4}$ площади круга с радиусом 7.