

Задание 5.

Условие задачи:

В цилиндре диаметром 1 м и высотой 2 м и закрытом поршнем содержится газ при нормальном атмосферном давлении. Найти работу, которую необходимо затратить на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на 1,5 м внутрь цилиндра. (Указание: для расчета давления воспользоваться законом Бойля-Мариотта).

1)

Дано:

$D = 1$ м – диаметр цилиндра

$H = 2$ м – высота цилиндра

$P = 10\,330$ кг/м³ – нормальное атмосферное давление

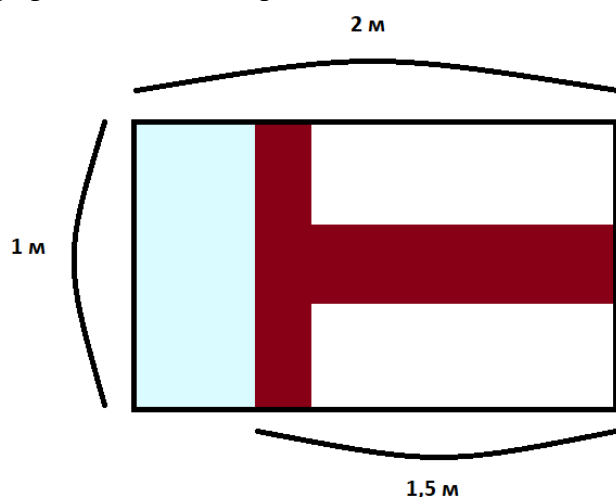
$T = \text{const}$ – температура

$h = 1,5$ м – расстояние, на которое перемещается поршень

Найти: Q – работа, необходимая для сжатия

2)

Графическая иллюстрация:



$S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}$ – площадь поперечного сечения цилиндра.

$V(x) = S * (H - x)$ – объем, занимаемый газом в зависимости от степени продвижения поршня, где x – расстояние, пройденное поршнем.

$V_0 = S * H = \frac{\pi}{2}$ – объем всего цилиндра => объем, занимаемый газом в начальный момент.

Так как сжатие газа изотермическое, согласно закону Бойля-Мариотта, зависимость между давлением P и объемом V выражается так:

$$PV = \text{const}$$

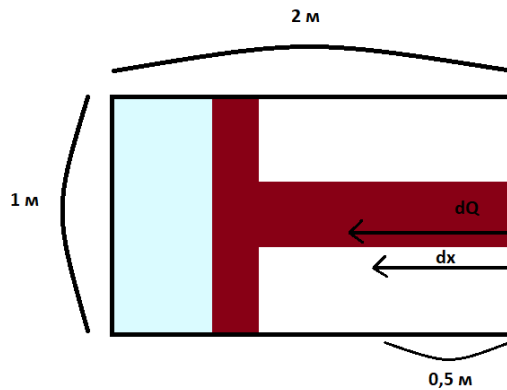
$$P(x) * V(x) = P_0 * V_0$$

$$P(x) = \frac{P_0 * V_0}{V(x)}$$
 – давление газа в зависимости от перемещения поршня.

3.a)

Промежуток изменения аргумента – $[0; 1,5]$. Разобьем этот промежуток на элементарные участки dx длиной 0,5: $[0; 0,5]$, $[0,5; 1]$ и $[1; 1,5]$.

3.б)



Малое приращение искомой величины Q на элементарных участках dx :

$$\delta Q(x) \approx dQ = P(x) * Sdx = \frac{P_0 * V_0 * S}{S * (H - x)} dx = \frac{P_0 * V_0}{H - x} dx$$

Вычислим приближенное значение для точек 0; 0,5; 1 (границы элементарных участков)

$$P(0) * Sdx = 8109,05$$

$$P(0,5) * Sdx = 10812,0(6)$$

$$P(1) * Sdx = 16\,218,1$$

3.в)

Вычислим интегральную сумму методом прямоугольников:

$$0,5 (Q(0) + Q(0,5) + Q(1)) = 17569,6$$

3.г и 3.д)

Получим определённый интеграл для вычисления искомой величины:

$$\int_0^{1,5} \frac{P_0 V_0}{H - x} dx = \int_0^{1,5} \frac{10330 * 3,14 / 2}{2 - x} dx = \int_0^{1,5} \frac{16218,1}{2 - x} dx = -16218,1 * \ln(|2 - x|) \Big|_0^{1,5} = -16218,1 * \ln(|2 - 1,5|) + 16218,1 * \ln(|2 - 0|) = 16218,1 * 2 \ln(|2|) = 22483 \text{ кг} * \text{м} = 22483 * 9,81 \text{ (кг} * \text{м)} * (\text{м} / \text{с}^2) = 220\,558,23 \text{ Дж}$$

Ответ: 220 558,23 Дж.