Линейные операторы и их матричная запись

Оператором $\mathcal{A}: X \to Y$ (X, Y – л.п. над K)

/* Оператором $\mathcal{A}$ наз. отображение, отображающее ЛП X в л.п. Y (над одним полем) */

Оператор наз. линейным, если обладает <u>св-вами линейности:</u>

1) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)$ $\quad \forall x_1, x_2 \in X$
2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x)$ $\quad \forall x \in X, \forall \alpha \in K$ (гомоморфизм)

Если $\mathcal{A}: X \to X$, то он наз. эндоморфизмом /* Част. случай гомоморфизма */

/* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ - операторы
A, B, C, D - матрицы */ $\quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x$

$\mathcal{A}x = \mathcal{B}x \quad \forall x \in X \iff \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Ex: 1) $\Theta: X \to Y$ по ф-ле: $\Theta x = 0_Y$ $\forall x \in X$, $0_Y \in Y$ нулевой оператор

2) $\mathcal{I}: X \to X$ по ф-ле $\mathcal{I}x = x$ $\quad \forall x \in X$ единичный/тождеств. оператор (линейный)

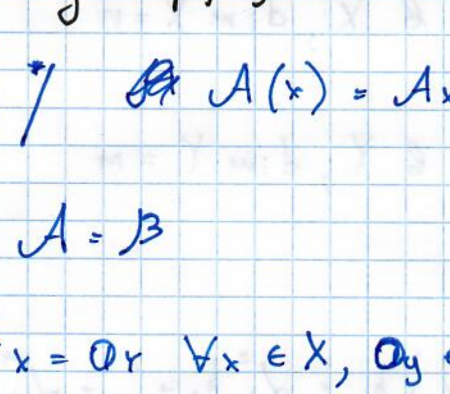
3) $X = L_1 \oplus L_2$, т.е. $\underset{\in X}{x} \doteq \underset{\in L_1}{x_1} + \underset{\in L_2}{x_2}$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1 \quad \forall x \in X$

$\mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} x = x_2$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x_1 = x_1$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x_2 = 0_X$



$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}$ – оператор проецирования (проектор) на подпростр. L_1 // подпростр. L_2 (линейный)

4) P^n – л.п. многочленов степени не выше n, $p(t) = a_n + a_{n-1}t + a_{n-2}t^2 + \dots + a_0 t^n$
$p(t) \in P^n$

$\mathcal{D}: P^n \to P^n$ по ф-ле $(\mathcal{D}p)(t) = \dfrac{dp(t)}{dt}$ $\quad p(t) \in P^n$

$\mathcal{D}(p(t))$ – оператор дифференцирования $\boxed{\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}}$

5) $X = C(-1;1)$ - л.п. непр. функций на $(-1;1)$

$\mathcal{A}_K : X \to X$ по ф-ле: $(\mathcal{A}_K f)(t) = \int_{-1}^{1} K(t;s) f(s) ds$

- интегральный оператор
- ядро инт. оператора

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{-s} ds \qquad \mathcal{A}_K = \int_0^{+\infty} k(t;s) f(s) ds$$

$$k(t;s) = s^{t-1}$$

$$\mathcal{A}_K e^{-t} \qquad f(t) = e^{-t}$$

Выберем базисы в X и Y:

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - базис в X, $\dim X = n$

$\{h_k\}_{k=1}^{m}$ - базис в Y, $\dim Y = m$

$\mathcal{A} : X \to Y$

$$\forall \mathcal{A} e_i : \mathcal{A} e_1 = \alpha_1^1 h_1 + \alpha_1^2 h_2 + \dots + \alpha_1^m h_m$$

$$\mathcal{A} e_2 = \alpha_2^1 h_1 + \alpha_2^2 h_2 + \dots + \alpha_2^m h_m$$

$$\dots$$

$$\mathcal{A} e_n = \alpha_n^1 h_1 + \alpha_n^2 h_2 + \dots + \alpha_n^m h_m$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}_{[m \times n]} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}e_1 & \mathcal{A}e_2 & & \mathcal{A}e_n \end{matrix} \end{array}$$

$\leftarrow$ матрица лин. оператора в данной паре базисов

Ex: 1) $\Theta : X \to Y$

$\forall x \in X \ \Theta x = 0_Y$

$\Theta e_1 = 0_Y$

$\Theta e_1 = 0_Y$

$\dots$

$\Theta e_n = 0_Y$

$$0_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

нулевая матрица

2) $\mathcal{I} : X \to X$

$\forall x \in X \ \mathcal{I} x = x$

$\mathcal{I} e_1 = e_1$

$\mathcal{I} e_2 = e_2$

$\vdots$

$\mathcal{I} e_n = e_n$

единичн. матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3) $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} : X \to X$, $X = L_1 \oplus L_2$ $\{\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{L_1}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{L_2}\}$

$\dim L_1 = k$

$\operatorname{co}\dim L_1 = \dim L_2 = n - k$

коразмерность пр-ва

$\forall x \in X$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_1 = e_1$
$\vdots$
$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_k = e_k$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_{k+1} = \mathbb{O}_X$
$\vdots$
$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_n = \mathbb{O}_X$

$$P_{L_1}^{\parallel L_2} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \mathbb{O} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & \mathbb{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\0\\0\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} n-k \end{array}$$

$\underbrace{\qquad}_{k} \quad \underbrace{\qquad}_{n-k}$

4) $\mathcal{D} = \frac{d}{dt} : P^n \to P^n$ базис: $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ $\dim P^n = n+1$

$\mathcal{D}_1 = \frac{d1}{dt} = \mathbb{O}$

$\mathcal{D}_t = \frac{dt}{dt} = 1$

$\mathcal{D}_{t^2} = 2t$

$\mathcal{D}_{t^3} = 3t^2$

$\dots$

$\mathcal{D}_{t^n} = n t^{n-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} [(n+1) \times (n+1)]$$

$\mathcal{D}_1 \; \mathcal{D}_t \; \dots \; \mathcal{D}_{t^n}$

$* \; P^n \to P^{n-1} \; *$

Th | Задание линейного оператора $\Leftrightarrow$ задан. его матрицы в фикс. паре базисов

$\Rightarrow$ из $\mathcal{A}$ в A – очевидно

$\Leftarrow$ покажем, что задание матрицы л.о. и пары базисов однозначно определяет результат действия л.о. на любой элемент:

$$x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$$

$$\mathcal{A}x = y = \eta^1 h_1 + \eta^2 h_2 + \dots + \eta^m h_m = \sum_{k=1}^{m} \eta^k h_k$$

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathcal{A} e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k h_k\right) = \sum_{i,k=1}^{n,m} (\alpha_i^k, \xi^i) h_k$$

η^k – однозначно

17.02.2023 | Линал - лекция 2 | Линейное пространство операторов

• Суммой л.о. $\mathcal{A}: X \to Y$ и $\mathcal{B}: X \to Y$ ≚ о. $\mathcal{C}: X \to Y$, $(\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{C})$
если $\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x \quad \forall x \in X$

• Произведение л.о. $\mathcal{A}: X \to Y$ на скаляр λ из поля K
≚ о. $\mathcal{D}: X \to Y$ $(\lambda\mathcal{A} = \mathcal{D})$, если $\mathcal{D}x = \lambda\mathcal{A}x \quad \forall x \in X$

Лемма: о. $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ и $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$ - линейные

Д-ть дома

Th: Мн-во лин. операторов с заданными законами сложения и умножение на скаляр (см. выше) и нулевым элементом - нулевым оператором имеет структуру лин. пространства

□ упр.

• Лин. пространство операторов $(A: X \to Y)$ ≚ прямым произв-ем л.п. X и Y.
$X * Y \ (X \times Y)$; $Hom(X, Y)$ /* Hom = homogeneity <=> однородность */

Построим базис и определим размерность в лин. пр-ве ~~векторов~~ операторов:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \dots & \alpha^1_n \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \dots & \alpha^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^m_1 & \alpha^m_2 & \dots & \alpha^m_n \end{pmatrix} = \alpha^1_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^1_1} + \alpha^1_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^2_1} + \dots + \alpha^1_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^n_1} +$$

$$+ \alpha^2_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^1_2} + \alpha^2_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^2_2} + \dots + \alpha^2_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^n_2} +$$

$$\dots$$

$$+ \alpha^m_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^1_m} + \alpha^m_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E^2_m} + \dots + \alpha^m_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{E^n_m} =$$

$\dim X = n$

$\dim Y = m$

$X: \{e_i\}_{i=1}^{n}$

$Y: \{h_k\}_{k=1}^{m}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha^k_i E^i_k \qquad \sum_{i,k=1}^{n,m}$$

$$A \leftrightarrow \mathcal{A} \Rightarrow E^i_k \leftrightarrow \mathcal{E}^i_k : \ \mathcal{E}^i_k e_j = \begin{cases} h_k, & j = i \\ 0_Y, & j \neq i \end{cases} \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

дельта-символ Кронекера

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$E_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h_1$$

$$E_1^3 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi^3 \cdot h_1$$

$$\mathcal{E}_k^i X = \mathcal{E}_k^i \left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \xi^j \mathcal{E}_k^i e_j = \left| j = i : \text{не } \Theta_Y \right| = \xi^i h_k$$

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_i^k E_k^i$$

$$\Updownarrow$$

$$A \overset{?}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_i^k \mathcal{E}_k^i$$

Th: Линейные операторы $\{\mathcal{E}_k^i\}_{i,k=1}^{n,m}$ образуют базис в л.п.о. $X * Y$

д-во от противного:

1) $\exists$ набор – ЛЗ

$$\exists \{\beta_i^k\}_{i,k=1}^{n,m} \quad \sum\sum (\beta_i^k)^2 \neq 0 : \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_i^k \mathcal{E}_k^i = \Theta, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_i^k \mathcal{E}_k^i X = \Theta \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_i^k \mathcal{E}_k^i e_j = \Theta_Y \quad \forall e_j \in X$$

$$\sum_{k=1}^m \beta_j^k h_k = \Theta_Y \Rightarrow \{h_k\} \text{ л.з.}$$

?! противоречие

т.к. $\{h_k\}$ базис

г) Покажем полноту набора

$\forall x \in X \quad \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i (\mathcal{A} e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k h_k\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \underbrace{\xi^i h_k}_{\mathcal{E}_k^i \cancel{x}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \mathcal{E}_k^i x$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \mathcal{E}_k^i \quad \boxtimes$$

<u>Сл-е</u>: 1) $\dim (X * Y) = \dim X \cdot \dim Y$

2) α_i^k - координаты оператора $\mathcal{A}$ в базисе $A = \|\alpha_i^k\|$

3) л.п. $X * Y$ изоморфно K_n^m = л.п. матриц. размера $[m \times n]$

4) $\{E_k^i\}$ - базис в K_n^m

Алгебра операторов и матриц

Мн-во X $\pm$ алгебрей над полем K, если X - л.п. над полем K, в котором задана вторая бинарная операция (умножение эл-в):

$\forall x, y \in X \quad x \cdot y = z \in X$ и:

1) $x(y + z) = xy + xz$
2) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x(\alpha y) \qquad \forall x, y, z \in X$
3) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z \qquad \forall \alpha \in K$
4) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in X$, то абелева (коммутативн.) алгебра

<u>Ex</u>: Кватернионы $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$

$x = (x_0; x_1; x_2; x_3) = x_0 \cdot 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1