

Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

«Интеграл функции одной переменной»

Описание работы

Расчётно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

Требования

К выполнению заданий – в работе должны быть:

- 1) поставлены требуемые задачи;
- 2) представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
- 3) указаны используемые теоретические положения и методы;
- 4) получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

К содержанию отчета – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ → полезные ссылки → корпоративная стилистика → презентации (внизу страницы)). должен содержать:

- 1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, номер варианта, ФИ исполнителей, номера групп и потоков, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
- 2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
- 3) основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
- 4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: <https://www.desmos.com/>, Geogebra: <https://www.geogebra.org/> или других);
- 5) выводы;
- 6) оценочный лист
(вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

К оформлению отчета:

- 1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
- 2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
- 3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например, $f(x)=3*x^2$), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
 - a. в MS Office есть встроенный редактор формул;
 - b. в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
 - c. Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
 - d. в LaTeX встроен набор формул;
 - e. можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул <https://editor.codecogs.com/> и скачать формулу в виде изображения;
 - f. или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

Защита работ

Порядок защиты РГР определяется преподавателем практики.

Задание 1. Интегральная сумма

Исследуйте интегральную сумму функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$:

№ команды	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	$\sin x$	e^x	x^3	$\sqrt[3]{x}$	$1/x^2$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[a, b]$	$[0; 3\pi/2]$	$[-2; 2]$	$[-1; 1,5]$	$[-1; 0,5]$	$[0,5; 2]$	$[-1; \sqrt{3}]$	$[-\pi/4; \pi/4]$	$[-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2]$

План

Интегральная сумма

- Составьте и изобразите интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры:
 - Изобразите график функции.
 - Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции, вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, и осью Ox .
 - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков, точками отметьте их концы на рисунке.
 - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметьте их на рисунке.
 - Вычислите значения функции в выбранных точках, отметьте их на рисунке.
 - Изобразите ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точек внутри элементарных отрезков.
- Исследуйте ступенчатую фигуру. Для этого выберите количество ступеней n_1 (от 3 до 5) и посмотрите, как изменяется фигура при смещении точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения точек: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор). Затем выберите другое количество ступеней n_2 (от 6 до 10), а затем n_3 (от 11 и больше) и повторите процедуру.
- Сделайте заключение.

Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:

<https://www.desmos.com/calculator/xnmv3bzc3c>

Последовательность интегральных сумм

- Постройте интегральную сумму функции на заданном отрезке:
 - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков.
 - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка.
 - Запишите интегральную сумму.
- Исследуйте её значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
- Вычислите интеграл от данной функции по отрезку аналитически и сравните значения интегральных сумм с его величиной.
- Постройте последовательность интегральных сумм, изобразите её на графике. Изобразите точное значение интеграла горизонтальной прямой. Продемонстрируйте сходимость построенной последовательности к точному значению интеграла с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
- Сделайте заключение.

Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:

<https://www.desmos.com/calculator/wpygz4vral>

Задание 2. Площадь плоской фигуры

Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной:

№ команды	Кривые
1	кривыми $\rho = 6 \sin 3\varphi$ и $\rho = 3$ ($\rho \geq 3$)
2	кривой $x = \frac{t}{3}(3-t)$, $y = \frac{t^2}{8}(3-t)$
3	кривой $\rho = 7 \sin 4\varphi$
4	верзьерой $x = t$, $y = \frac{8}{4+t^2}$ и осью абсцисс
5	кривыми $\rho = 2 \cos \varphi$ и $\rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)
6	кривой Лиссажу $x = 2 \sin t$, $y = 2 \sin 2t$
7	лемнискатой Бернулли $\rho^2 = 8 \cos 2\varphi$
8	петлёй кривой $x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$

План

1. Изобразите на графике кривую (-ые) и область, которую она (они) ограничивает.
2. Запишите формулу для нахождения площади при помощи определённого интеграла.
3. Вычислите интеграл и запишите ответ.
4. Оцените правдоподобность полученного ответа, приближая данную фигуру другими простыми фигурами с известными площадями (треугольники, прямоугольники, круги, ...).

Задание 3. Объём тела вращения

Найдите объём тела T , полученного вращением фигуры Φ вокруг указанной оси. Фигура Φ ограничена следующими кривыми:

№ команды	Φ
1	$y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2, \text{ ось } Oy$
2	$y = x - x^2, y = 0, \text{ ось } Oy$
3	$2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, \text{ ось } Ox$
4	$y = 8 - x^2, y = x^2, \text{ ось } Ox$
5	$xy = 4, 2x + y - 6 = 0, \text{ ось } Ox$
6	$x^3 = (y - 1)^2, x = 0, y = 2, \text{ ось } Oy$
7	$y = x^2, 8x = y^2, \text{ ось } Oy$
8	$x = \sqrt{1 - y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x, y = 0, \text{ ось } Oy$

План

1. Изобразите на графике фигуру Φ и тело вращения T .
2. Запишите формулу для нахождения объёма тела вращения T при помощи определённого интеграла.
3. Вычислите интеграл и запишите ответ.
4. Оцените правдоподобность полученного ответа, приближая тело вращения T другими простыми телами с известными объёмами (шары, диски, кольца, ...).

Задание 4. Несобственный интеграл

Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α .

№ команды	1	2	3	4
Интеграл	$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$	$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha \ln(1/x)}$
№ команды	5	6	7	8
Интеграл	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^\alpha + 1} dx$	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha + 1) \arctg x}$	$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha \arctg x}$

План

1. Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?
2. Постройте графики подынтегральной функции *на промежутке интегрирования* при нескольких значениях параметра α .
3. Есть ли значение параметра α , при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и на основе неё сделайте вывод о сходимости интеграла для выбранного значения параметра α .
4. Сформулируйте признаки для определения сходимости несобственных интегралов (того рода, которым является исходный интеграл, и для соответствующего промежутка интегрирования):
 - признак сравнения с неравенствами;
 - предельный признак сравнения;
 - абсолютный признак.
5. Исследуйте, при каких значениях параметра β эталонный несобственный интеграл $\int_a^b \frac{1}{x^\beta} dx$ сходится, а при каких – расходится (промежуток от a до b подбирается в соответствии с исходным несобственным интегралом).
6. Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию в исходном интеграле (логарифм или арктангенс) и сравните его с эталонным интегралом. Установите, при каких значениях параметра β это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости исходного интеграла.
7. Также вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра α , при котором легко находится первообразная (см. п. 3). Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при других значениях параметра α .
8. Запишите ответ – промежутки значений параметра α , при которых исходный несобственный интеграл сходится и расходится.

Задание 5. Приложения определенного интеграла

Решите задачу.

№ команды	Задача
1	Найти силу давления воды на поверхность цилиндра диаметром 4 м и высотой 6 м, если его верхнее основание находится на уровне свободной поверхности воды.
2	Вычислить работу, необходимую для выкачивания бензина из вертикального цилиндрического резервуара высотой 6 м и радиусом основания 2 м. (Указание: величина работы, затрачиваемой на поднятие веса, равна произведению веса на высоту подъема).
3	В цилиндре диаметром 1 м и высотой 2 м и закрытом поршнем содержится газ при нормальном атмосферном давлении. Найти работу, которую необходимо затратить на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на 1,5 м внутрь цилиндра. (Указание: для расчета давления воспользоваться законом Бойля-Мариотта).
4	Прямой круглый конус с радиусом основания и высотой 1 м вертикально погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Найти работу, необходимую для извлечения цилиндра из воды, если его удельный вес равен 3. (Указание: сила, совершающая работу по подъему тела, равна разности веса тела и веса воды, вытесняемой подводной частью тела).
5	Найти силу давления воды на вертикальную пластину в форме равнобедренной трапеции с основаниями 2 м и 6 м и высотой 3 м, погруженную так, что верхнее (большее) основание находится на 2 м ниже уровня поверхности воды.
6	Вычислить работу, необходимую для извлечения деревянной прямоугольной балки, плавающей в воде, если длина балки 5 м, ширина 40 см, высота 20 см, а ее удельный вес равен 0,8 (Указание: сила, совершающая работу по подъему балки, равна разности веса балки и веса воды, вытесняемой подводной частью балки).
7	Определить массу круглого конуса высотой 4 м и диаметром основания 6 м, если плотность конуса в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки от плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно его основанию.
8	Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из котла, имеющего форму полусферы радиуса 2 м. Удельный вес масла равен 0,9. (Указание: величина работы, затрачиваемой на поднятие веса, равна произведению веса на высоту подъема).

План

1. Запишите условие задачи.
2. Составьте математическую модель задачи, сделайте графическую иллюстрацию к условию.
3. Решите задачу, применяя схему для построения определённого интеграла:
 - а) Разбейте промежуток изменения аргумента на элементарные участки dx .
 - б) Изобразите на рисунке малое приращение искомой величины Q на элементарном участке dx . Вычислите его приближенно (приращение заменяется дифференциалом по известной формуле: $\Delta Q(x) \approx dQ$).
 - в) Получите интегральную сумму.
 - г) Получите определённый интеграл для вычисления искомой величины: $Q = \int_{x_1}^{x_2} dQ$.
 - д) Вычислите его при помощи поиска первообразной от подынтегральной функции и применения формулы Ньютона-Лейбница.
4. Запишите ответ.