Интеграл ф-ции одной переменной

Первообразная и неопределённый интеграл

- $F(x)$ первообразной для $f(x)$ на (a,b), если

  1) $F(x)$ - дифф. на (a,b)
  2) $F'(x) = f(x)$, т.е. $d(F(x)) = f(x)dx$

- $\exists F(x)$ - первообразная для $f(x)$, тогда ~~$F(x)+C$, где~~ все первообразные $= F(x)+C$, где $C = const$

д-во: ①
$\exists F_1(x)$: $F_1'(x) = f(x)$

$F_2(x) = F_1(x) + C$

$F_2'(x) = (F_1(x) + c)' = F_1'(x) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{c'}} = F_1'(x) = f(x)$

т.е. $F_2(x)$ - тоже первообр. для $f(x)$

② Покажем, что все первообр. отличаются на константу:

$\exists \varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, $F_1(x), F_2(x)$ - первообр. для $f(x)$

$\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Покажем, что если производная $=0$, то функция постоянна

(a,x) $\qquad \varphi(x) - \varphi(a) = \underbrace{\varphi'(c)}_{=0}(x-a)$, $c \in (a,x)$

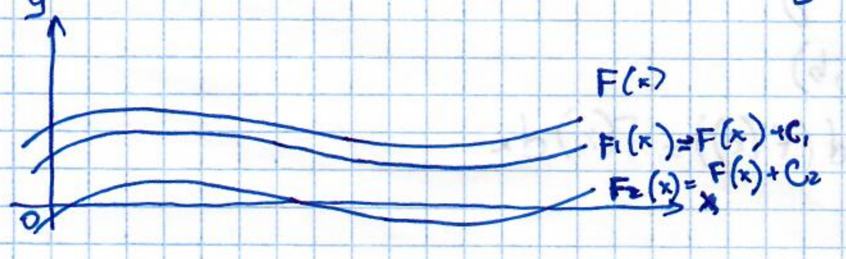
$\Rightarrow \varphi(x) \equiv \varphi(a) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi(x) = C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C \quad \forall F_1, F_2$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — первообр. для $f(x)$

○ Интегральная кривая — график первообразной.



~ Если $F(x)$ непр. на (a, b), то для неё существует первообразная (a, b).

Неберущиеся интегралы:

$Si(x) = \int \frac{\sin x}{x}\, dx$

$Ci(x) = \int \frac{\cos x}{x}\, dx$

14.02.2023 | Матан - лекция 2 | Основные методы интегрирования

Th: об инвариантности ф-лы интегрирования

$f(x)$ - непр., $F(x)$ - первообр. $f(x)$, $u = \varphi(x)$ - непр. дифф. ($\varphi'(x)$ непр.)

Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$

д-во: $f(u)\,du = f(u)\,d(\varphi(x)) = f(u)\,\varphi'(x)dx = F'(u)\varphi'(x)\,dx =$

$= F'(\varphi(x))dx = d(F(\varphi(x))) = dF(u)$

Таким образом,

$$\int f(u)\,du = \int dF(u) = F_u + C \quad ⊠$$

Ex: $\int \sin x\, d(\sin x) = |u = \sin x| = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

$\int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = |t = x^2| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\, t + C = \text{arctg}(x^2) + C$

- Внесение под дифференциал:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{d(\varphi(x))} = |t = \varphi(x)| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Ex: $\int \sin x \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{\sin x dx = d(\sin x)} = \int \sin x\, d(\sin x) = |u = \sin x| = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

$\int \frac{2x\,dx}{1+x^4} = \int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \ldots = \text{arctg}(x^2) + C$

NB! $d(x+b) = dx,\ b \in \mathbb{R}$ $\qquad dx = d(x+b)$

$d(ax) = a\,dx,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ $\qquad dx = \frac{d(ax)}{a}$ $\qquad \Rightarrow dx = \frac{1}{a} \cdot d(ax+b)$

Ex: $\int (2-3x)^{100} dx = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{100} d(2-3x) = |t = 2-3x| = -\frac{1}{3}\int t^{100}\,dt =$

$= -\frac{1}{3}\frac{t^{101}}{101} + C = \boxed{-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{101}(2-3x)^{101} + C}$

• Замена переменной:

• $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{1+x} \\ x=t^2-1 \\ dx=2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$

$= 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2t - \int \frac{d(1+t)}{1+t} = 2t - \ln|1+t| + C =$

$= 2\sqrt{1+x} - 2\ln\left|1+\sqrt{1+x}\right| + C$

• $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt[4]{5-x} \\ x=5-t^4 \\ dx=-4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{-4t^3 tt}{t+t^2} = -4\int \frac{t^2dt}{1+t} =$

$= -4\int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}\,dt = -4\int(t-1)\,dt - 4\int\frac{dt}{1+t} =$

$= -2t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + C =$

$= -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\ln\left(1+\sqrt[4]{5-x}\right) + C.$

• $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \overset{\text{не получится}}{\cancel{=}} \int \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x^2+x+1} \\ x^2+x+1-t^2=0 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1-t^2}}{2} \end{array} \right|$

$\ominus$

$\ominus \left| \begin{array}{l} t=\frac{1}{x} \\ x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = -\int \cancel{t}\cdot\frac{dt}{t^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+t+t^2}{t^2}}} =$

$= -\int \frac{dt}{\frac{\cancel{t}\sqrt{1+t+t^2}}{\cancel{t}}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = \left| \begin{array}{l} u=t+\frac{1}{2} \\ t=u-\frac{1}{2} \\ dt=du \end{array} \right| =$

$= -\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,d\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \left| \begin{array}{l} v=\frac{2u}{\sqrt{3}} \\ u=\frac{\sqrt{3}}{2}v \\ du=\frac{\sqrt{3}}{2}dv \end{array} \right| = -\int\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = -\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)+C =$

$$= -\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \sqrt{1+\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) + C = -\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\sqrt{\frac{3}{4}+u^2}\right)\right) + C \ominus$$

$^{*}\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$

$$\ominus -\ln\frac{2}{\sqrt{3}} - \ln\left(u+\sqrt{\frac{3}{4}+u^2}\right) + C = -\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\right) + C =$$

$$= -\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right) + C =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right) + C$$

- Подстановка:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \\ = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = \\ = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2|\cos t| = 2\cos t \\ t = \arcsin\frac{x}{2};\ dx = 2\cos t\,dt \end{array} \right| = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int 4\cos^2 t\,dt = \int 2(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2\int dt + \int \cos 2t \cdot d(2t) = 2t + \underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + \cancel{2}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C = \boxed{2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} + C}$$

- Интегрирование по частям:

$u = u(x)$, $v = v(x)$ – непр. дифф. $\quad \Big| \quad \int d(u\cdot v) = \int v\cdot du + \int u \cdot dv$

$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv \qquad u\cdot v = \int v\,du + \int u\,dv$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$