№1 Являются ли операторы линейными? Линал | Дз от 10.02.2023

а) $\tilde{C}(x) = \{x_3^3,\ 2x_1 - x_2 - 2x_3,\ 3x_2 + x_3\}$

$\tilde{C}(y) = \{y_3^3,\ 2y_1 - y_2 - 2y_3,\ 3y_2 + y_3\}$

$\tilde{C}(x+y) = \{(x_3+y_3)^3,\ 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2) - 2(x_3+y_3),\ 3(x_2+y_2) + (x_3+y_3)\}$

$\tilde{C}(x+y) \neq \tilde{C}(x) + \tilde{C}(y)$, т.к. $(x_3+y_3)^3 \neq x_3^3 + y_3^3$

Сл-но, не выполняется 1 св-во линейности => $\tilde{C}$ - не линейный

б) $\tilde{A}(x) = \{2x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 3x_2,\ 2x_2 + 3\}$

$\tilde{A}(y) = \{2y_1 - 3y_2 - 2y_3,\ 2y_1 - 3y_2,\ 2y_2 + 3\}$

$\tilde{A}(x+y) = \{2(y_1+x_1) - 3(x_2+y_2) - 2(x_3+y_3),\ 2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2),\ 2(x_2+y_2) + 3\}$

$\tilde{A}(x) + \tilde{A}(y) \neq \tilde{A}(x+y)$, т.к. $2x_2 + 3 + 2y_2 + 3 = 2(x_2+y_2) + 6 \neq 2(x_2+y_2) + 3$

Сл-но, не выполняется 1 св-во линейности => $\tilde{A}$ - не линейный

в) $\tilde{B}(x) = \{4x_1 - 3x_2 - x_3,\ 0,\ x_2^2 + x_3\}$

$\tilde{B}(y) = \{4y_1 - 3y_2 - y_3,\ 0,\ y_2^2 + y_3\}$

$\tilde{B}(x+y) = \{4(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) - (x_3+y_3),\ 0,\ (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)\}$

$\tilde{B}(x+y) \neq \tilde{B}(x) + \tilde{B}(y)$, т.к. $(x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3) = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2 + (x_3+y_3) \neq x_2^2 + y_2^2 + (x_3+y_3)$

Сл-но, не выполняется 1 св-во линейности => $\tilde{B}$ - не линейный

г) $\tilde{C}(x) = \{x_1 - 2x_2 - x_3,\ 3x_1 - 2x_2,\ 3x_2 + x_3\}$

$\tilde{C}(y) = \{y_1 - 2y_2 - y_3,\ 3y_1 - 2y_2,\ 3y_2 + y_3\}$

$\tilde{C}(x+y) = \{(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3),\ 3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2),\ 3(x_2+y_2) + (x_3+y_3)\}$

$\tilde{C}(x+y) = \tilde{C}(x) + \tilde{C}(y)$ => вып. 1 св-во линейности

$\tilde{C}(\alpha x) = \{\alpha x_1 - \alpha 2x_2 - \alpha x_3,\ \alpha 3x_1 - \alpha 2x_2,\ \alpha 3x_2 + \alpha x_3\} =$

$= \alpha\{x_1 - 2x_2 - x_3,\ 3x_1 - 2x_2,\ 3x_2 + x_3\} = \alpha \cdot \tilde{C}(x)$ => вып. 2 св-во лин-ти

Тогда, т.к. выполняются оба св-ва линейности оператора,

$\tilde{C}$ - линейный!

(12) (a)

$\exists\ \tilde{P}$ - оператор проецирования пр-ва геометрических векторов V_3 на пл-ть X_0Y.

Д-ть: линейность $\tilde{P}$; найти: $M_E(\tilde{P})$ в базисе $(i; j, k)$.

Д-во: $\tilde{P}$ - линейный, если:

1) $\tilde{P}_{X_0Y}(u+v) = \tilde{P}_{X_0Y}(u) + \tilde{P}_{X_0Y}(v)$

2) $\tilde{P}_{X_0Y}(\alpha u) = \alpha \cdot \tilde{P}_{X_0Y}(u)$

Докажем 1):

$*\ \forall \vec{u}, \vec{v}$ из V_3: $\tilde{P}(u+v)$ - проекция $\vec{u}+\vec{v}$ на X_0Y

Теорема: проекция $(\vec{u}+\vec{v})$ на X_0Y = проекция$(\vec{u})$ + проекция$(\vec{v})$ на X_0Y

Дано: $\exists\ \vec{u}, \vec{v}$ - лежат в пл-ти P; $\vec{u}', \vec{v}'$ - проекции

$\exists\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{p}$

$\exists\ \vec{n}$ - единичный вектор; нормаль к P.

Д-ть: $\vec{p}' = \vec{u}' + \vec{v}'$

расписал проекцию вектора

Д-во: $\vec{u}' = \vec{u} - (|\vec{u}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \vec{u}\hat{}\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{u} - (\vec{u}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$

$\vec{v}' = \vec{v} - (|\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \vec{v}\hat{}\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{v} - (\vec{v}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$

$\cancel{\vec{p}' = \vec{p} - (|\vec{p}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \vec{p}\hat{}\vec{n}) \cdot \vec{n} = (\vec{u}+\vec{v}) - \vec{n}(|\vec{n}|(|\vec{u}}$

$\vec{p}' = \vec{p} - (\vec{p}, \vec{n}) \cdot \vec{n} = (\vec{u}+\vec{v}) - (\vec{u}+\vec{v}, \vec{n})\vec{n} = (\vec{u}+\vec{v}) - (\vec{u}, \vec{n})\vec{n} - (\vec{v}, \vec{n}) \cdot \vec{n} =$

$= \boxed{\vec{u}' + \vec{v}'}$, ч.т.д!

Сл-но, по теореме о проекциях:

$\tilde{P}_{X_0Y}(u+v) = \tilde{P}_{X_0Y}(u) + \tilde{P}_{X_0Y}(v)$

Докажем 2): $*\ \forall \vec{u}$ из V_3: $\tilde{P}(u)$ - проекция $\vec{u}$ на X_0Y

Теорема: проекция$(\vec{a}) \cdot \alpha$ = проекция$(\alpha \cdot \vec{a})$

Д-во: сами докажете.

Сл-но, $\tilde{P}_{X_0Y}(\alpha u) = \alpha \cdot \tilde{P}_{X_0Y}(u)$

Тогда, т.к. доказаны 1) и 2)

$\Rightarrow \tilde{P}$ - линейный!

базис: $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$\vec{i}\{1; 0; 0\}$

$\vec{j}\{0; 1; 0\}$ $\quad \vec{k}\{0; 0; 0\}$

$$M_E(\tilde{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8) $\alpha = \frac{pi}{6}$; $\exists\ \tilde{P}$ - оператор поворота отн. OZ на $\angle\alpha$.

1) Проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций этих векторов на эту ось (Теорема. Д-во: google.com && chat.openai.com)

2) Проекция (вектора на число) на любую ось равна произведению этого числа на проекцию данного вектора на эту ось (Теорем. Д-во: аналогично)

$\Rightarrow \tilde{P}$ - линейный

Матрица оператора:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ в } XYZ \text{ (базис } i, j, k) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{i,j,k} = M_E(\tilde{P})$$

№2 (в)] $\tilde{P}$ - оператор проецирования на $x-2=0$

] $\vec{u} \in (XYZ)$

$\vec{u}\{u_1, u_2, u_3\}$

$\tilde{P}(u) = (u1, 0, u3)$

] $\vec{v} \in (XYZ)$

$\vec{v}\{v_1, v_2, v_3\}$

$\tilde{P}(v) = (v1, 0, v3)$

1) $\tilde{P}(u+v) = \tilde{P}(u1+v1, u2+v2, u3+v3) =$

$= (u1+v1, 0, u3+v3)$

$= (u1, 0, u3) + (v1, 0, v3) = \tilde{P}(u) + \tilde{P}(v)$

2) $\tilde{P}(\alpha \cdot u) = (\alpha u1, 0, \alpha u3) =$

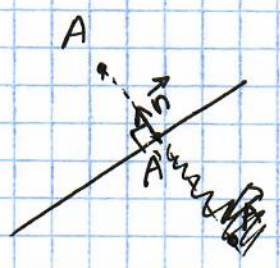
$= \alpha \cdot (u1, 0, u3) = \alpha \cdot \tilde{P}(u)$

Сл-но, $\tilde{P}$ - линейный.

Т.к. при проецировании $x=2$, то $y=0$, тогда $M_E(\tilde{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(*При проецировании $y=const$, поменяются только x и z. По чертежу очевидно *)

(*)] $\tilde{O}$ - оператор ~~отражения~~ проектирования относительно пл-ти $y-z=0$



] $A(x, y, z) \in P$

$\Rightarrow A'(x', y', z')$ - образ A

$\vec{n}\{0, 1, -1\}$ - нормаль к P, очевидно

$\frac{x-x'}{0} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z-z'}{-1} \underset{z=y}{\overset{\text{т.к.}}{=}} \frac{z-y'}{-1}$: Каконич. ур-е прямой

$\Rightarrow y - y' = y' - z \Leftrightarrow 2y' = y + z \Leftrightarrow \boxed{y' = \frac{y+z}{2}}$

Тогда, $A'\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$ - проекция на P

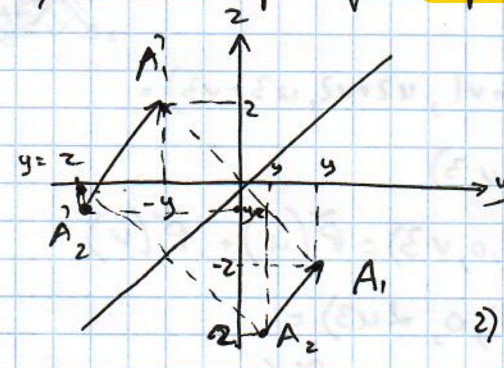
1) $\tilde{O}(x+y) = \left(x_1+y_1; \frac{(x_2+y_2)+(y_3+x_3)}{2}; \frac{(x_2+y_2)+(y_3+x_3)}{2}\right) = \tilde{O}(x) + \tilde{O}(y)$

2) $\tilde{O}(\alpha x) = \left\{\alpha x_1; \frac{\alpha x_2 + \alpha x_3}{2}; \frac{\alpha x_2 + \alpha x_3}{2}\right\} = \alpha \tilde{O}(x)$

$\Rightarrow \tilde{O}$ - линейный

$M_E(\tilde{O}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \tilde{O} = \{0; x_2; -x_2\}$

2) ∃ $\tilde{O}$ – оператор отражение отн. пл-ти $y = z$



$$\tilde{O}(A(x,y,z)) = A'(x, z, y)$$

1) $\tilde{O}(\alpha A) = \{\alpha x; \alpha z; \alpha y\} = \alpha\{x, z, y) = \alpha \tilde{O}(A)$

2) $\tilde{O}(A_1 + A_2) = \{x_1 + x_2; z_1 + z_2; y_1 + y_2\} = \tilde{O}(A_1) + \tilde{O}(A_2)$

=> $\tilde{O}$ – линейный

$M(\tilde{O}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Ker(\tilde{O}) = \{(0;0;0)\}$