Линейные операторы и их матричная запись

Оператором $\mathcal{A}: X \to Y$ (X, Y – л.п. над K)

/* Оператором $\mathcal{A}$ ≝ отображение, отображающее ЛП X в л.п. Y (над одним полем) */

Оператор ≝ линейным, если обладает <u>св-вами линейности:</u>

1) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$

2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in K$

(гомоморфизм)

Если $\mathcal{A}: X \to X$, то он ≝ эндоморфизмом /* Част. случай гомоморфизма */

/* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ - операторы
A, B, C, D - матрицы */ $\quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x$

$\mathcal{A}x = \mathcal{B}x \quad \forall x \in X \iff \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Ex: 1) $\Theta: X \to Y$ по ф-ле: $\Theta x = 0_Y \quad \forall x \in X, 0_Y \in Y$ нулевой оператор

2) $\mathcal{I}: X \to X$ по ф-ле $\mathcal{I}x = x \quad \forall x \in X$ единичный/тождеств. оператор (линейный)

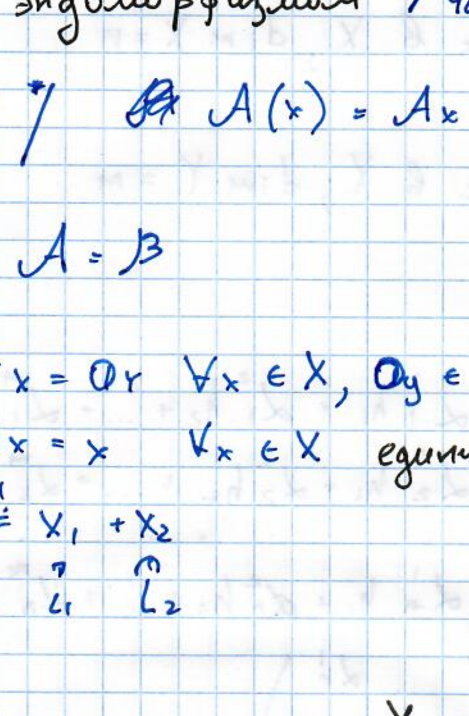
3) $X = L_1 \oplus L_2$, т.е. $\underset{X}{x} \overset{!}{=} \underset{L_1}{x_1} + \underset{L_2}{x_2}$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1 \quad \forall x \in X$

$\mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} x = x_2$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x_1 = x_1$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x_2 = 0_X$



$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}$ – <u>оператор проецирования</u> (проектор) на подпростр. L_1 // подпростр. L_2 (линейный)

4) P^n – л.п. многочленов степени не <u>выше</u> n, $p(t) = a_n + a_{n-1}t + a_{n-2}t^2 + \dots + a_0 t^n$

$p(t) \in P^n$

$\mathcal{D}: P^n \to P^n$ по ф-ле $(\mathcal{D}p)(t) = \frac{dp(t)}{dt} \quad p(t) \in P^n$

$\mathcal{D}(p(t))$ – оператор дифференцирования $\boxed{\mathcal{D} = \frac{d}{dt}}$

5) $X = C(-1;1)$ - л.п. непр. функций на $(-1;1)$

$\mathcal{A}_K : X \to X$ по ф-ле: $(\mathcal{A}_K f)(t) = \int_{-1}^{1} K(t;s) f(s) ds$

└ интегральный оператор — ядро инт. оператора

$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{-s} ds$ $\quad \mathcal{A}_K = \int_0^{+\infty} k(t;s) f(s) ds$

$k(t;s) = s^{t-1}$

$\mathcal{A}_K e^{-t}$ $\quad f(t) = e^{-t}$

Выберем базисы в X и Y:

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - базис в X, $\dim X = n$

$\{h_k\}_{k=1}^{m}$ - базис в Y, $\dim Y = m$

$\mathcal{A} : X \to Y$

$\mathcal{A} e_i$: $\mathcal{A} e_1 = \alpha_1^1 h_1 + \alpha_1^2 h_2 + \ldots + \alpha_1^m h_m$

$\mathcal{A} e_2 = \alpha_2^1 h_1 + \alpha_2^2 h_2 + \ldots + \alpha_2^m h_m$

$\ldots$

$\mathcal{A} e_n = \alpha_n^1 h_1 + \alpha_n^2 h_2 + \ldots + \alpha_n^m h_m$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \ldots & \alpha_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix}_{[m \times n]}$$
$\quad\uparrow \mathcal{A}e_1 \quad \uparrow \mathcal{A}e_2 \quad \uparrow \mathcal{A}e_n$

← матрица лин. оператора в данной паре базисов

Ex: 1) $\Theta : X \to Y$ $\quad \Theta e_1 = 0_Y$

$\forall x \in X \; \Theta x = 0_Y$ $\quad \Theta e_2 = 0_Y$

$\ldots$

$\Theta e_n = 0_Y$

$0_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ нулевая матрица $\quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

2) $\mathcal{I} : X \to X$ $\quad \mathcal{I} e_1 = e_1$

$\forall x \in X \; \mathcal{I} x = x$ $\quad \mathcal{I} e_2 = e_2$

$\vdots$

$\mathcal{I} e_n = e_n$

единичн. матрица

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$, $X = L_1 \oplus L_2$ $\{\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{L_1}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{L_2}\}$

$\dim L_1 = k$

$\operatorname{co}\dim L_1 = \dim L_2 = n-k$

корaзмерность пр-ва

$\forall x \in X$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_1 = e_1$

$\vdots$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_k = e_k$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_{k+1} = 0_X$

$\vdots$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} e_n = 0_X$

$$P_{L_1}^{\parallel L_2} = \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \Theta \\ \Theta & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \}\,k \\ \}\,n-k \end{matrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad k \qquad\qquad n-k$$

4) $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}: P^n \to P^n$ базис: $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ $\dim P^n = n+1$

$\mathcal{D}_1 = \frac{d1}{dt} = 0$

$\mathcal{D}_t = \frac{dt}{dt} = 1$

$\mathcal{D}_{t^2} = 2t$

$\mathcal{D}_{t^3} = 3t^2$

$\dots$

$\mathcal{D}_{t^n} = nt^{n-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} [(n+1) \times (n+1)]$$

$\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_t\ \dots\ \mathcal{D}_{t^n}$

$P^n \to P^{n-1}$

Th | Задание линейного оператора $\Leftrightarrow$ задан. его матрицы в фикс. паре базисов

$\Rightarrow$ из $\mathcal{A}$ в A – очевидно

$\Leftarrow$ покажем, что задание матрицы л.о. и пары базисов однозначно определяет результат действия л.о. на любой элемент:

$$x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$$

$$\mathcal{A}x = y = \eta^1 h_1 + \eta^2 h_2 + \dots + \eta^m h_m = \sum_{k=1}^m \eta^k h_k$$

$$\mathcal{A}\Big(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n \xi^i \mathcal{A} e_i = \sum_{i=1}^n \xi^i \Big(\sum_{k=1}^m \alpha^k_i h_k\Big) = \sum_{i,k=1}^{n,m} (\alpha^k_i, \xi^i) h_k$$

η^k – однозначно

17.02.2023 | Линал - лекция 2 | Линейное пространство операторов

• Суммой л.о. $\mathcal{A}: X \to Y$ и $\mathcal{B}: X \to Y$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ о. $\mathcal{C}: X \to Y$, $(\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{C})$
если $\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x \quad \forall x \in X$

• Произведение л.о. $\mathcal{A}: X \to Y$ на скаляр λ из поля K
$\stackrel{\text{def}}{=}$ о. $\mathcal{D}: X \to Y$ $(\lambda\mathcal{A} = \mathcal{D})$, если $\mathcal{D}x = \lambda\mathcal{A}x \quad \forall x \in X$

Лемма: о. $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ и $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$ - линейные

□ д-ть дома

Th: Мн-во лин. операторов с заданными законами сложения и умножения на скаляр (см. выше) и нулевым элементом - нулевым оператором имеет структуру лин. пространства

□ упр.

• Лин. пространство операторов $(\mathcal{A}: X \to Y)$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ прямым произв-ем л.п. X и Y.
$X * Y$ $(X \times Y)$; $\mathrm{Hom}(X, Y)$ /*Hom = homogeneity <=> однородность*/

Построим базис и определим размерность в лин. пр-ве ~~векторов~~ операторов:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix} = \alpha_1^1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_1^1} + \alpha_2^1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_1^2} + \dots + \alpha_n^1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_1^n} +$$

$$+ \alpha_1^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_2^1} + \alpha_2^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_2^2} + \dots + \alpha_n^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_1^2} +$$

$$+ \alpha_1^m \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_m} + \alpha_2^m \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{E_m^2} + \dots + \alpha_n^m \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{E_m^n} =$$

$\dim X = n$

$\dim Y = m$

$X: \{e_i\}_{i=1}^n$

$Y: \{h_k\}_{k=1}^m$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_i^k E_k^i \qquad \sum_{i,k=1}^{n,m}$$

$$A \leftrightarrow \mathcal{A} \Rightarrow E_k^i \leftrightarrow \mathcal{E}_k^i : \mathcal{E}_k e_j = \begin{cases} h_k, & j = i \\ 0_Y, & j \neq i \end{cases} \qquad \delta_j^i = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

дельта-символ Кронекера

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$E_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h_1$$

$$E_1^3 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi^3 \cdot h_1$$

$$\mathcal{E}_k^i X = \mathcal{E}_k^i \left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \xi^j \mathcal{E}_k^i e_j = \left| j = i : \text{не } \mathbb{O}_Y \right| = \xi^i h_k$$

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_i^k E_k^i$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{A} \overset{?}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_i^k \mathcal{E}_k^i$$

Th: Линейные операторы $\{\mathcal{E}_k^i\}_{i,k=1}^{n,m}$ образуют базис в л.п.о. $X*Y$

Д-во от противного:

1) $\exists$ набор – ЛЗ

$$\exists \{\beta_i^k\}_{i,k=1}^{n,m} \quad \sum\sum (\beta_i^k)^2 \neq 0 : \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_i^k \mathcal{E}_k^i = \mathbb{O}, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_i^k \mathcal{E}_k^i X = \mathbb{O} \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_i^k \mathcal{E}_k^i e_j = \mathbb{O}_Y \quad \forall e_j \in X$$

$$\sum_{k=1}^m \beta_j^k h_k = \mathbb{O}_Y \Rightarrow \{h_k\} \text{ л.з.}$$

?! противоречие

т.к. $\{h_k\}$ базис

г) Покажем полноту набора

$\forall x \in X \quad \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i (\mathcal{A} e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k h_k\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \underbrace{\xi^i h_k}_{\mathcal{E}_k^i \cancel{x}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \mathcal{E}_k^i x$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \mathcal{E}_k^i$ ⊠

<u>Сл-е</u>: 1) $\dim (X * Y) = \dim X \cdot \dim Y$

2) α_i^k - координаты оператора $\mathcal{A}$ в базисе $A = \|\alpha_i^k\|$

3) л.п. $X * Y$ изоморфно K_n^m = л.п. матриц. размера $[m \times n]$

4) $\{E_k^i\}$ - базис в K_n^m

Алгебра операторов и матриц

Мн-во X - алгеброй над полем K, если X - л.п. над полем K, в котором задана вторая бинарная операция (умножение эл-в):

$\forall x, y \in X \quad x \cdot y = z \in X$ и:

1) $x(y+z) = xy + xz$

2) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x(\alpha y) \qquad \forall x, y, z \in X$

3) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z \qquad \forall \alpha \in K$

4) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in X$, то абелева (коммутативн.) алгебра

<u>Ex</u>: Кватернионы $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$

$x = (x_0; x_1; x_2; x_3) = x_0 \cdot 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

03.03.2023 | Линал - лекция 3 | Алгебра операторов и матриц

$\circledast \mathcal{C}$ - красивая

· Определим операцию умножение операторов

$X \xrightarrow{\mathcal{A}} Y \xrightarrow{\mathcal{B}} Z$ $\dim X = n$; $\dim Y = m$; $\dim Z = p$

$\{e_i\}$ $\{h_k\}$ $\{\ell_j\}$

Произведением операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ $\overset{V}{=}$ o. $\mathcal{C}: X \to Z$:

$$\forall x \in X \quad \mathcal{C}x \overset{def}{=} \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \qquad (\mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A})$$

лемма: $\mathcal{C}$ - лин.о, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - л.о.

□ $\mathcal{C}(x_1 + x_2) \overset{?}{=} \mathcal{C}x_1 + \mathcal{C}x_2$

упр. дома

□ $\mathcal{C}(\lambda x) \overset{?}{=} \lambda \mathcal{C}x$

> $\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \overset{?}{\longleftrightarrow} B \cdot A$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \|\alpha_i^k\|: \mathcal{A}e_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k h_k$

$\mathcal{B} \leftrightarrow B = \|\beta_k^j\|: \mathcal{B}h_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_k^j \ell_j$ ~~$\mathcal{C} = B \cdot A$~~

$\mathcal{C} \leftrightarrow C = \|\gamma_i^j\|: \mathcal{C}e_i = \sum_{j=1}^{p} \gamma_i^j \ell_j$

$\ast\ \tilde{C} = B \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \beta_1^j \ \beta_2^j \ \cdots \ \beta_m^j \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i^1 \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \ \tilde{\gamma}_i^j \ \cdots \end{pmatrix} j$$

$[p \times m]$ $[m \times n]$ $[p \times n]$

$$\tilde{\gamma}_i^j = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^j \alpha_i^k \qquad \circledast\ C \overset{?}{=} \tilde{C} \Rightarrow \text{теорема}$$

Th: $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \leftrightarrow C = B \cdot A$

□ $\mathcal{C}e_i = \sum_{j=1}^{p} \gamma_i^j \ell_j$ $\quad \gamma_i^j \overset{?}{=} \tilde{\gamma}_i^j$

$$\overset{def\ \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}}{=} \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) \overset{def\ \mathcal{A}}{=} \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k h_k\right) \overset{лин.}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k (\mathcal{B}h_k) \overset{def\ \mathcal{B}}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \left(\sum_{j=1}^{p} \beta_k^j \ell_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k^j \alpha_i^k\right) \ell_j = \sum_{j=1}^{p} \tilde{\gamma}_i^j \ell_i \Rightarrow \gamma_i^j = \tilde{\gamma}_i^j \quad ■$$

NB: $X * X$ над K

Th 1: $X * X$ – алгебра над K $\quad X * X = \{\mathcal{A} : X \to X\}$

Th 2: K_n^n – тоже алгебра над K $\quad$; K_n^n – лин. пр-во матриц $n \times n$

$$K_n^n = \{A = \|\alpha_i^k\|,\ i,k = 1 \ldots n\}$$

> Алгебры $\overset{X*X}{X}$ и Y над полем K $\overset{\text{def}}{=}$ изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее линейную и мультипликативную структуру алгебры, т.е.:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \\ \forall \lambda \in K \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 \\ \lambda x_1 \leftrightarrow \lambda y_1 \\ x_1 \cdot x_2 \leftrightarrow y_1 \cdot y_2 \end{cases}$$

Th 3: Алгебра $X * X$ изоморфна алгебре K_n^n

Обратный оператор

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det A}$$

Th: $\det A \neq 0 \overset{?}{\Leftarrow} \exists A^{-1}$ $\quad \underset{\text{очевидно}}{}$

□ $A \cdot A^{-1} = I$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1 \neq 0$

$\det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0$ ■

* $X * X = \{\mathcal{A} : X \to X\}$ – алгебра л.о. над K

$\mathcal{A}^{-1} : X \to X$ – обратный оператор к л.о. $\mathcal{A}$, если $\underline{\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}}$

Th: условие сущ-ния обратного оператора в паре выбранных базисов

$\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ в каком-то базисе

□ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^{-1}A = AA^{-1} = \underset{[n \times n]}{I} \overset{\text{изоморф.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I} \overset{\det \mathcal{A}^{-1}}{\Leftrightarrow} \exists \mathcal{A}^{-1}$ ■

> Ядром л.о. $\mathcal{A} : X \to Y$ $\overset{\text{def}}{=}$ мн-во $\boxed{\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{x \in X \mid \mathcal{A}x = 0_Y\}}$

$\operatorname{Ker} \subset X$

Лемма: $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ – п.л.п. X (подпрост-во лин. пр-ва) □ упр.

Образом л.о. $\mathcal{A}: X \to Y$ - мн-во $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{y \in Y \mid \exists x \in X : \mathcal{A}x = y\}$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} \subset Y$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$

Лемма: $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ - п.п. л.п. Y □ упр. ■

<u>Th:</u> О ядре и образе, $\mathcal{A}: X \to X$

$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim X$

□ $\rceil \dim X = n$

$\rceil \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = k \quad k \leq n \quad (k = n \Rightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} = X \Rightarrow \mathcal{A} = \Theta)$

$\rceil \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ - базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, дополним его до базиса X

$\{\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_k}_{\operatorname{Ker}\mathcal{A}}, e_{k+1}, \dots, e_n\}$

$\{\mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n\}$ покажем $\operatorname{Im} \mathcal{A} =$ л.об. $\{\mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n\}$

$\forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$

$$y = \mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathcal{A}e_i = \xi^1 \underbrace{\mathcal{A}e_1}_{0} + \xi^2 \underbrace{\mathcal{A}e_2}_{0} + \dots + \xi^k \underbrace{\mathcal{A}e_k}_{0} + \underbrace{\xi^{k+1}\mathcal{A}e_{k+1} + \dots + \xi^n \mathcal{A}e_n}_{\{\mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n\} \text{ - полный}}$$

Покажем, что л.н.з.

<u>от противного</u>: (от Кёшника)

$$\exists \text{ л.з.} : \exists \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n : \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \neq 0 : \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}e_i = 0$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}e_i = \mathcal{A}\Big(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i}_{= \tilde{x} \neq 0}\Big)$$

$\Rightarrow \tilde{x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, но $\tilde{x} \notin \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ $\times$

$\Rightarrow$ л.н.з. $\Rightarrow \{\mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n\}$ - базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$

$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n - k$ ■