Задание №3. Объём тела вращения.

Найдите объём тела T, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси. Фигура Ф ограничена следующими кривыми:

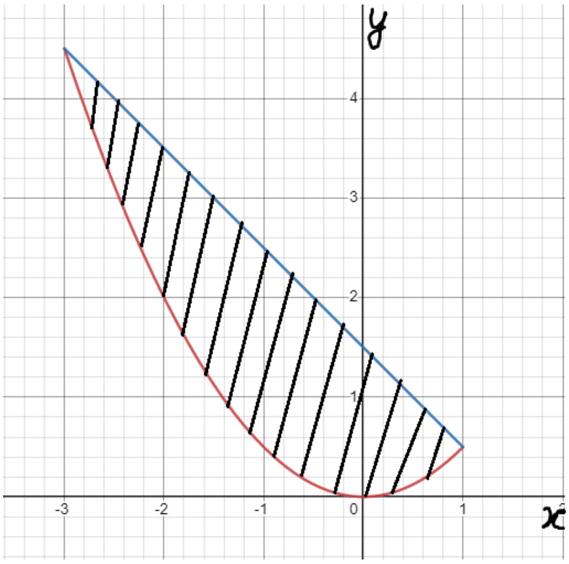
$2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$, ось Ox

Выполнение:

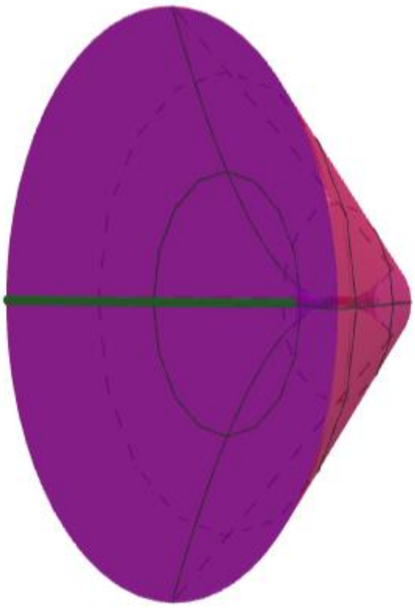
Синяя функция: $2x + 2y - 3 = 0$

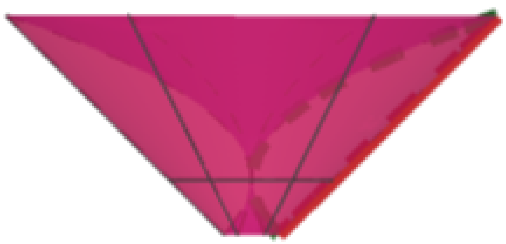
Красная функция: $2y = x^2$

Фигура вращения Ф:



Тело T:





Формула для нахождения объема тела Т:

$V = \pi \int_A^B y^2 dx$, где y – график функции. А и В – точки пересечения графиков.

Грубо оценим нашу функцию:

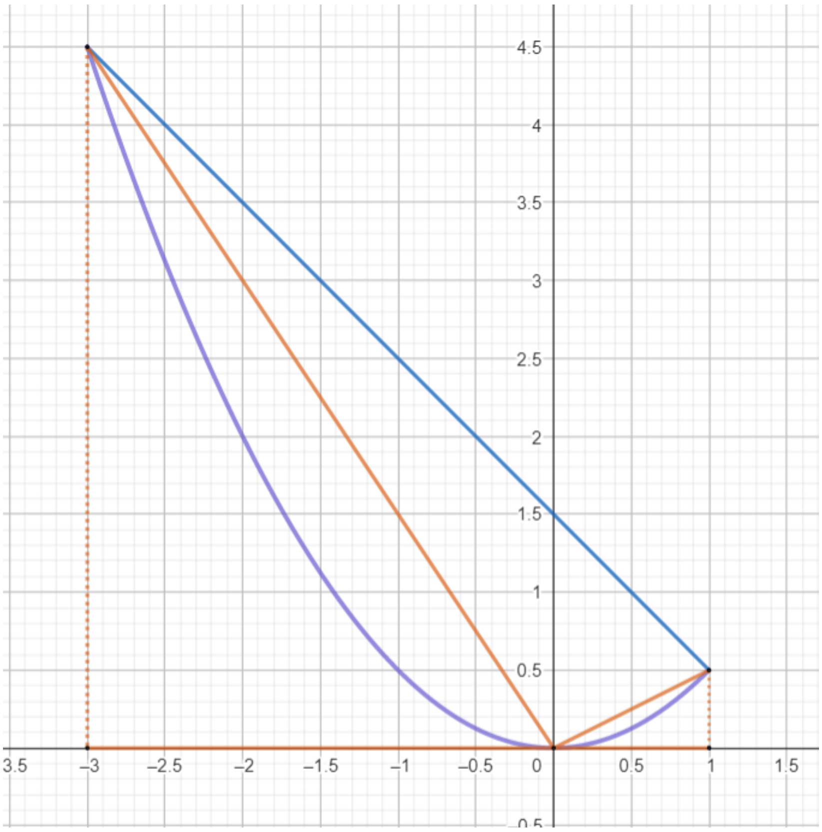
В нашем случае надо целесообразно воспользоваться методов разности объемов, т.е. из объема большего тела вычесть меньшее. (синее минус красное)

$V_1 = \pi \int_{-3}^{1} (-x+1.5)^2 dx = -\pi \int_{-3}^{1} (-x+1.5)^2 d(-x+1.5) = -\pi * \left(\frac{(-x+1.5)^3}{3}\Big|_{-3}^{1}\right) = -\pi * \left(\frac{1}{24} - \frac{729}{24}\right) = \frac{91\pi}{3}$

$V_2 = \pi \int_{-3}^{1} (x^2 \times 0.5)^2 dx = \pi * \left(\frac{x^5}{20}\Big|_{-3}^{1}\right) = \frac{61}{5}\pi$

$V_T = V_1 - V_2 = \frac{91\pi}{3} - \frac{61}{5}\pi = \frac{272\pi}{15}$

Для оценки правдоподобности результата целесообразно найти площадь данной фигуры, ограниченной синей и оранжевыми линиями. В этой фигуре разность 1-го усечённого конуса и 2 обычных конусов.



Объем усечённого конуса будет равен $V_1 = \frac{91\pi}{3}$

Объём меньших конусов равен:

$V_2 = \pi \int_0^1 (x \times 0.5)^2 dx = \pi * \left(\frac{x^3}{12}\right)\Big| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{1}{12}\pi$

$V_3 = \pi \int_{-3}^0 (x \times -1.5)^2 dx = \pi * \left(\frac{3x^3}{4}\right)\Big| \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix} = \frac{81}{4}\pi$

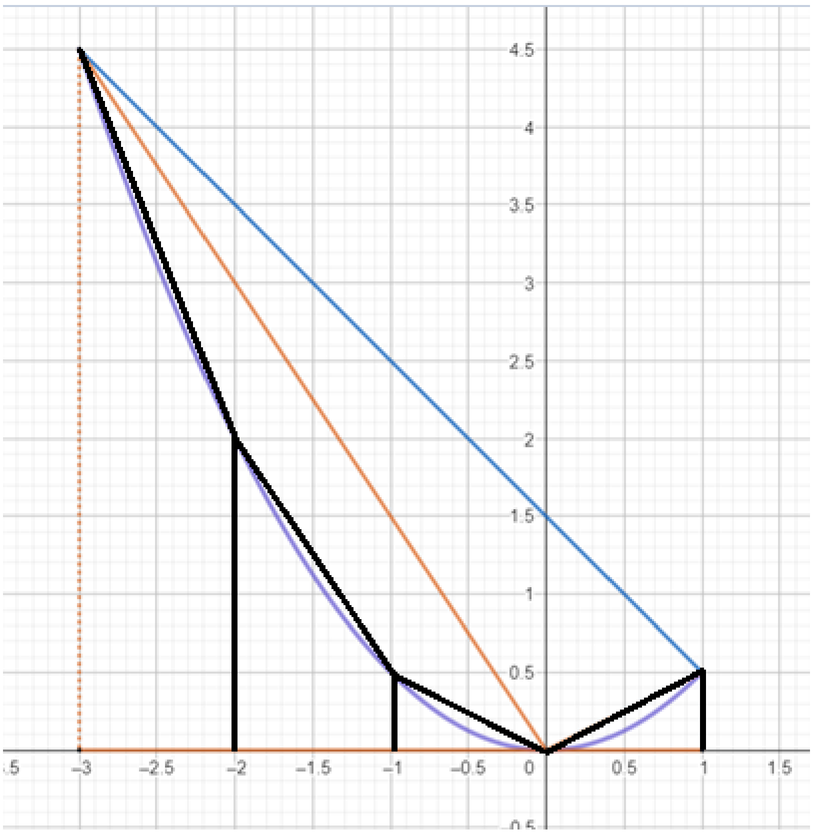
Итоговый объём равен:

$V_1 - V_2 - V_3 = \frac{91\pi}{3} - \frac{1}{12}\pi - \frac{81}{4}\pi = 10\pi$

Получаются соотношения:

$10\pi < \frac{272\pi}{15} < \frac{91\pi}{3}$, что соответствует действительности ведь, объем фигуры вращения пропорционально зависит от поперечного сечения данной фигуры. А их поперечные сечения, поделённые на 2 части можно увидеть на последнем графике.

Более точные вычисления:



Объем большего усечённого конуса будет равен $V_0 = \frac{91\pi}{3}$

Объём меньших конусов равен:

$V_1 = V_2 = \pi \int_0^1 (-x \times 0.5)^2 dx = \pi * \left(\frac{x^3}{12}\right)\Big| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{1}{12}\pi$

$V_3 = \pi \int_{-2}^{-1} (x \times -1.5 - 1)^2 dx = \pi * \left(\frac{3x^3}{4} + \frac{3x^2}{2} + x\right)\Big| \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} = \frac{7}{4}\pi$

$$V_4 = \pi \int_{-3}^{-2} (x \times -2.5 - 3)^2 dx = \pi * \left(\frac{25x^3}{12} + \frac{15x^2}{2} + 9x \right) \Big| \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix} = \frac{133}{12}\pi$$

Итоговый объём равен:

$V_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = \frac{91\pi}{3} - \frac{1}{12}\pi - \frac{1}{12}\pi - \frac{7}{4}\pi - \frac{133}{12}\pi = \frac{52}{3}\pi$

Получаются соотношения:

$\frac{52}{3}\pi < \frac{272\pi}{15} < \frac{91\pi}{3}$, что соответствует действительности ведь, а $\frac{52}{3}\pi \sim \frac{272\pi}{15}$ ($54.45427 \sim 56.96755$ если взять приближённые значения)

Значит объём фигуры был найден верно.