Линейные операторы и их матричная запись
векторы, а не пр-во

Линал
практика 1

$\exists\, V$ - векторное пр-во: $\tilde{A} : V \to V$, тогда

преобразование $\tilde{A}$ ≚ линейным оператором, если:

1) $\tilde{A}(u+v) = \tilde{A}(u) + \tilde{A}(v)$

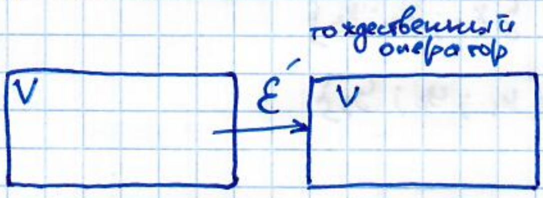
2) $\tilde{A}(\alpha u) = \alpha \tilde{A}(u)$, $\forall u \in V$, $\alpha \in R$

!Замеч: линейный оператор = функция, действующая на вектор, а не число.

Тривиальные примеры:

1) 

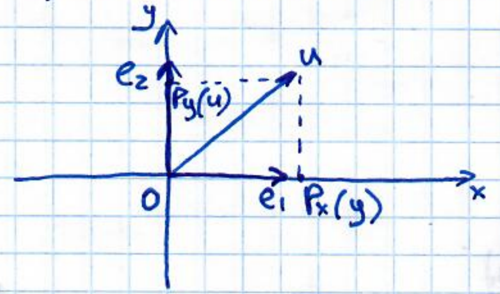
$\Theta(u) = 0$, $\forall u \in V$

2) 

$\mathcal{E}(u) = u$, $\forall u \in V$

Нетривиальные примеры:

3) P - плоскость; e_1, e_2 - ортонормир. базис на xOy.

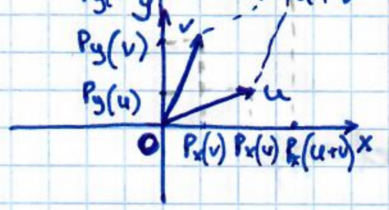


$P_x : P \to P$ - __гориз. проектор__

$P_y : P \to P$ - __верт. проектор__

4) __Д-ть__: оператор P_x - линейный, т.е. 1) $P_x(u+v) = P_x(u) + P_x(v)$

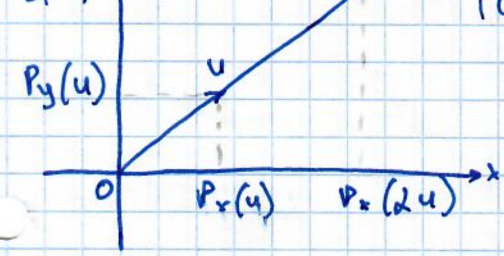
$P_y(u+v) = P_y(u) + P_y(v)$



По графику очевидна тождественность.

Сл-но, первое св-во д-но

2) $P_x(\alpha u) = \alpha P_x(u)$

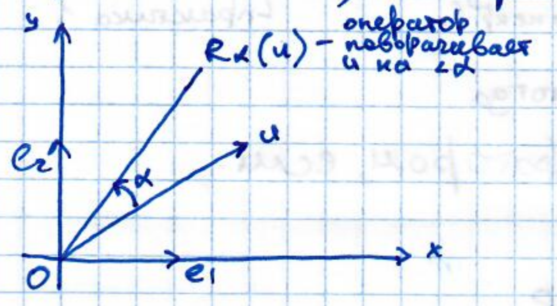


Подобие => тождественность очев.

$P_y(\alpha u) = \alpha P_y(u)$

Сл-но, операторы P_x и P_y - ЛИНЕЙНЫЕ

5) P - пл-ть : e_1, e_2 - ортонормир. базис х.Оу.



на дом + 6,7,8

6) X_3 - линейное пр-во. $x = \{x_1, x_2, x_3\}$

В его базисе задан произв. вектор.

$\tilde{A} : X_3 \to X_3 : \tilde{A}(x) = \{x_1 - x_2 ; 2x_1 + x_3 ; 3x_1\}$

Д-ть: $\tilde{A}$ - линейный оператор

Д-во: 1) возьмём из X_3 векторы: $x\{x_1 ; x_2 ; x_3\}$

$y\{y_1 ; y_2 ; y_3\}$

2) $\tilde{A}(x+y) = \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y)$

$(x+y) = \{x_1 + y_1 ; y_2 + x_2 ; x_3 + y_3\}$

$(\alpha x) = \{\alpha x_1 ; \alpha x_2 ; \alpha x_3\}$

$(\alpha y) = \{\alpha y_1 ; \alpha y_2 ; \alpha y_3\}$

3) $\tilde{A}(x_1 + y_1 - y_2 - x_2 ; 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3 ; 3x_1 + 3y_1) =$

$= \tilde{A}(x_1 - x_2 ; 2x_1 + x_3 ; 3x_1) + \tilde{A}(y_1 - y_2 ; 2y_1 + y_3 ; 3y_1)$

$\tilde{A}(\alpha x) = \tilde{A}(\alpha x_1 - \alpha x_2 ; 2\alpha x_1 + \alpha x_3 ; \alpha 3x_1) =$

$= \alpha \cdot \tilde{A}\{x_1 - x_2 ; 2x_1 + x_3 ; 3x_1\}$

Сл-но, доказали 1 и 2 св-во, тогда $\tilde{A}$ - линейный оператор

⑦ $\tilde{B}(x) = \{x_1 - 2x_2 - 4x_3;\ x_1 - x_2 - 3x_3;\ 2x_2 + 3\}$; $\begin{cases} x = \{x_1; x_2; x_3\} \\ y = \{y_1; y_2; y_3\} \end{cases}$

$\tilde{B}(x+y) = \{x_1 - 2x_2 - 4x_3 + y_1 - 2y_2 - 4y_3;\ x_1 - x_2 - 3x_3 + y_1 - y_2 - 3y_2;\ 2x_2 + 2y_2 + 3\}$

$\tilde{B}(x+y) = \{x_1 - 2x_2 - 4x_3 + y_1 - 2y_2 - 4y_3;\ x_1 - x_2 - 3x_3 + y_1 - y_2 - 3y_3;\ 2x_2 + 2y_2 + 6\}$

$\tilde{B}(\alpha x) = \{\alpha x_1 - \alpha 2x_2 - 4\alpha x_3;\ \alpha x_1 - \alpha x_2 - \alpha 3x_3;\ \alpha 2x_2 + 3\}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \Downarrow \neq$

$\alpha(x_1 - 2x_2 - 4x_3) \quad \alpha(x_1 - x_2 - 3x_2) \quad \alpha(2x_2 + \alpha 3)$

Сл-но, $\tilde{B}$ - не линейный оператор!

Матрица линейного оператора

$\exists V$ - лин. пр-во | $\exists \tilde{A} : V \to V$ (векторы)

базис: $e_1, e_2, \ldots, e_n$

$\tilde{A}(e_1) = e_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n$

$\tilde{A}(e_2) = e_2 = a_{21}e_2 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n$

....

$\tilde{A}(e_n) = e_n = a_{n1}e_n + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n$

Матрицей л.о. $\forall$ коэф. a по столбцам:

$$M_E(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тривиальные примеры:

1) $\theta(u) = 0 \qquad e_1, e_2, \ldots, e_n$

$\theta(e_1) = 0 \qquad M_E(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\theta(e_2) = 0$

2) $\mathcal{E}(u) = \qquad e_1, \ldots, e_n$

$\mathcal{E}(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0_2 + \ldots +$

$$M_E(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

e_1, e_2 – ортонорм. ~~вектор~~ базис.

③ $P_x(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2$

$P_x(e_2) = e_2 = 0e_1 + 0e_2$

$M_E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

$M_{E'} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\tilde{A} \leftrightarrow M(\tilde{A})$

$\tilde{B} \leftrightarrow M(\tilde{B})$

Свойства:

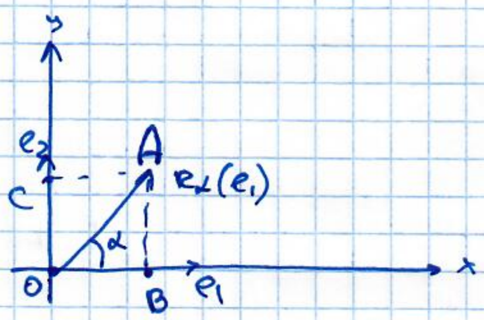
1) $(\tilde{A} + \tilde{B}) \leftrightarrow M(\tilde{A}) + M(\tilde{B})$

2) $\alpha\tilde{A} \leftrightarrow \alpha M(\tilde{A})$

3) $\tilde{A}\cdot\tilde{B} \leftrightarrow M(\tilde{A})\cdot M(\tilde{B})$

4) $\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow M(\tilde{A})^{-2}$

④



ΔAOB: $|OB| = |\overset{1}{\cancel{OA}}|\cdot\cos\alpha = 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$

ΔAOC: $|OC| = |\overset{1}{\cancel{OA}}|\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$

$\Rightarrow M(P_x) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ ← вывести матрицу!

$R_\alpha(e_1) = \cos\alpha\, e_1 \ldots$

$R_\alpha(P_2) =$

17.02.2023 | Линал - практика 2

Базис трёх-мерного л.п. X_3: заданы операторы

$$x \to \tilde{A}x = \{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3;\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3;\ a_{31}x_1 + \dots + a_{33}x_3\}$$

$$x \to \tilde{B}x = \{b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3;\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3;\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3\}$$

$x = \{x_1, x_2, x_3\}$ - пр. векторов в X_3

Найти: $y = P(\tilde{A}, \tilde{B})_x$ в том же базисе

вектор — y; многочлен относит. $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — P

$$P(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(A, B)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Ex:

$$x \to \tilde{A}x = \{x_1 + x_2 - x_3;\ x_2 + x_3;\ x_3\}$$

$$x \to \tilde{B}x = \{x_2 + 2x_3;\ -x_1;\ x_2\}$$

$$P(\tilde{A}, \tilde{B}) = 2\tilde{A} + \tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

Найти: $y = P(\tilde{A}, \tilde{B})_x$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = P$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \{2x_1 - x_2;\ 3x_1 + x_2 + x_3;\ x_1 + 3x_2 + 3x_3\}$$

$x \to \tilde{A}x = \{x_1 - 2x_3;\ x_2;\ x_2 - x_3\}$

$x \to \tilde{B}x = \{2x_3;\ x_1;\ -x_2\}$

$P(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{A}^2 + 2\tilde{B}$

$y = P(\tilde{A}, \tilde{B})x$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

↖ вектор y

Ядро и образ л.о.

Def: Ядро $\Leftrightarrow$ $Ker(\tilde{A}) = \{u \in V \mid \tilde{A}(u) = 0\}$

образ $\Leftrightarrow$ $Im(\tilde{A}) = \{u \in V \mid \exists u' \in V \mid \tilde{A}(u') = u\}$

Лин.оператор $\tilde{}$ вырожденным, если $Ker(\tilde{A}) \neq 0$

Th: $Ker(\tilde{A}) + Im(\tilde{A}) = V,\ \forall \tilde{A}$

$\tilde{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Найти: $Ker(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{A}(x) = 0\}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$rang(\tilde{A}) = 2 = rang(\tilde{A}) \to$ совместная

$n = k - p = 3 - 2 = 1 \Rightarrow 1$ реш-е ФСР

	x_2	x_1
x_3: 0	0	0
1	-2	2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ФСР}$$

$> Ker(\tilde{A}) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\} \neq 0 \Rightarrow$ вырожд.

$> \dim Ker(\tilde{A}) = 1$

• образ: тут та же $\tilde{A}$, что сверху

(e_1, e_2, e_3) - базис

$Im(\tilde{A}) = L(\tilde{A}(e_1); \tilde{A}(e_2); \tilde{A}(e_3)) =$

$\tilde{A}(e_1) = \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\tilde{A}(e_2) = \tilde{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\tilde{A}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =$ - не факт, что это базис! Надо проверить ЛНЗ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad rank = \mathbf{2}$$

$\Rightarrow$ тут строки зависимы, тогда получается, что это не базис

Тогда, $= L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$; $\dim L = 2$.