Задание 4. Несобственный интеграл

Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра a.

$$\textbf{Интеграл:} \quad \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^a}\,dx$$

План

1. Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?

2. Постройте графики подынтегральной функции на промежутке интегрирования при нескольких значениях параметра a.

3. Есть ли значение параметра , при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и на основе неё сделайте вывод о сходимости интеграла для выбранного значения параметра a.

4. Сформулируйте признаки для определения сходимости несобственных интегралов (того рода, которым является исходный интеграл, и для соответствующего промежутка интегрирования):

   - признак сравнения с неравенствами;
   - предельный признак сравнения;
   - абсолютный признак.

5. Исследуйте, при каких значениях параметра β эталонный несобственный интеграл

   $$\int\limits_a^b \frac{1}{x^\beta}dx$$

   сходится, а при каких – расходится (промежуток от a до b подбирается в соответствии с исходным несобственным интегралом).

6. Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию в исходном интеграле (логарифм или арктангенс) и сравните его с эталонным интегралом. Установите, при каких значениях параметра β это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости исходного интеграла.

7. Также вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра a, при котором легко находится первообразная (см. п. 3). Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при других значениях параметра a.

8. Запишите ответ – промежутки значений параметра a, при которых исходный несобственный интеграл сходится и расходится.

1. Особая точка несобственного интеграла здесь находится в $x = 0$. Таким образом, интеграл является несобственным интегралом первого рода. На промежутке интегрирования $(0, 1)$ подынтегральная функция является неотрицательной.

2. Графики подынтегральной функции при разных значениях параметра a:

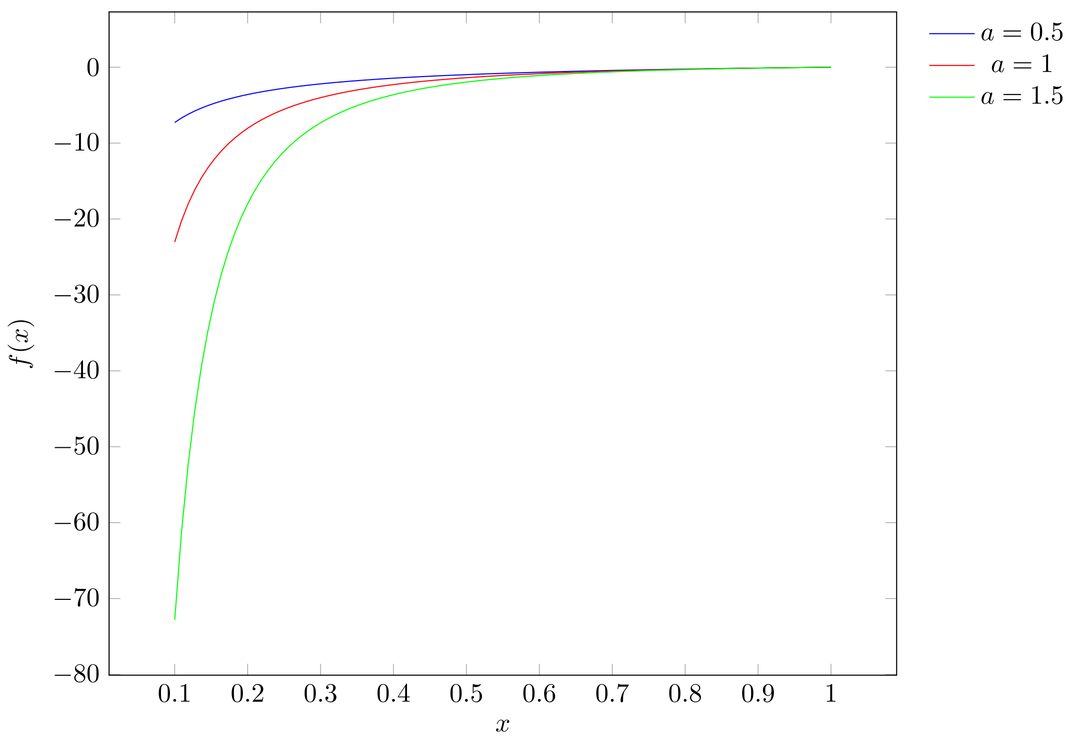

Рис. 1: Графики подынтегральной функции $\frac{\ln(x)}{x^a}$ при разных значениях параметра a.

3. Если $a = 1$, то подынтегральная функция преобразуется в $\frac{\ln x}{x}$. В этом случае первообразная легко находится с помощью интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \tag{1}$$

Пусть $u = \ln x$ и $dv = \frac{1}{x} dx$. Тогда $du = \frac{1}{x} dx$ и $v = \ln x$. Теперь применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = uv - \int v\, du = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \tag{2}$$

Теперь упростим выражение:

$$2 \cdot \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x + C \iff \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C \tag{3}$$

Рассмотрим поведение первообразной функции при x стремящемся к 0 и 1.

При $x \to 0^+$:

Мы знаем, что логарифмическая функция $\ln x$ стремится к $-\infty$ при $x \to 0^+$. Поскольку $\ln^2 x$ является квадратом логарифма, его значение стремится к $+\infty$. Следовательно, первообразная функция стремится к $+\infty$.

При $x \to 1$:

Логарифмическая функция $\ln x$ стремится к 0 при $x \to 1$. Поскольку $\ln^2 x$ является квадратом логарифма, его значение стремится к 0. Таким образом, первообразная функция стремится к константе C.

Вывод:

Теперь, когда мы знаем поведение первообразной функции на границах промежутка интегрирования, мы можем сделать вывод о сходимости интеграла. Поскольку первообразная функция стремится к $+\infty$ при $x \to 0^+$ и стремится к константе C при $x \to 1$, интеграл **сходится** на данном промежутке интегрирования.

4. Признаки сходимости несобственных интегралов:

   - Признак сравнения с неравенствами: Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на промежутке интегрирования и интеграл от $g(x)$ сходится, то и интеграл от $f(x)$ сходится. Если интеграл от $f(x)$ расходится, то и интеграл от $g(x)$ расходится.
   - Предельный признак сравнения: Если $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, где c - особая точка, то оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.
   - Абсолютный признак: Если интеграл от $|f(x)|$ сходится, то и интеграл от $f(x)$ сходится.

5. Рассмотрим эталонный несобственный интеграл и подберем промежуток интегрирования в соответствии с исходным интегралом:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} \mathrm{d}x, \quad \text{где} \quad \beta \text{ - произвольный параметр} \tag{4}$$

Определим, при каких значениях параметра β интеграл сходится, а при каких расходится.

Вычислим интеграл (4):

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^\beta} \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} \right)\Bigg|_a^1 = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1-a^{1-\beta}}{1-\beta} \right) \tag{5}$$

Если $\beta > 1$, то $(1-\beta) < 0$, и $a^{1-\beta} \to +\infty$ при $a \to 0^+$. В этом случае интеграл расходится:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} \mathrm{d}x = +\infty, \quad \text{если} \quad \beta > 1 \tag{6}$$

Если $\beta = 1$, то $(1-\beta) = 0$, и $a^{1-\beta} = 1$ при $a \to 0^+$. В этом случае интеграл расходится:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} \mathrm{d}x = +\infty, \quad \text{если} \quad \beta = 1 \tag{7}$$

Если $\beta < 1$, то $(1-\beta) > 0$, и $a^{1-\beta} \to 0^+$ при $a \to 0^+$. В этом случае интеграл сходится:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} \mathrm{d}x = \frac{1-a^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad \text{если} \quad \beta < 1 \tag{8}$$

Итак, интеграл (4) рассходится при $\beta \geq 1$ и сходится при $\beta < 1$.

6. Теперь оценим сверху и снизу трансцендентную функцию $\ln x$ в исходном интеграле и сравним его с эталонным интегралом:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^a}, dx \tag{9}$$

где a - произвольный параметр.

Для $0 < x \leq 1$, справедливо неравенство

$$-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq 0. \tag{10}$$

Используя неравенство (10), оценим интеграл (9) сверху и снизу:

$$-\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{a+1}}, dx \leq \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^a}, dx \leq 0. \tag{11}$$

7. Исследование интеграла при разных значениях параметра a:

При $a = 1$, исходный интеграл становится:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x}, dx$$

Этот интеграл является известным и сходится. Значение интеграла равно -2.

При $a = 0$:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^0}, dx = \int\limits_0^1 \ln x, dx$$

Этот интеграл сходится, и его значение равно -1.

При $0 < a < 1$:

Как было упомянуто ранее, интеграл сходится при $0 < a < 1$. Это объясняется тем, что на промежутке $(0, 1)$ функция $\frac{\ln x}{x^a}$ является монотонно возрастающей, и её интеграл на $(0, 1)$ ограничен сверху интегралом $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^a}, dx$, который сходится при $0 < a < 1$.

При $a > 1$, мы можем использовать интегральное сравнение, сравнивая исходный интеграл с интегралом $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^a}, dx$.

Для $x \in (0, 1)$ и $a > 1$, имеем $\frac{\ln x}{x^a} \leq 0$. Теперь возьмем $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, и заметим, что $\ln x \geq \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$. Следовательно, для $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ и $a > 1$, имеем:

$$-\frac{\ln 2}{x^a} \leq \frac{\ln x}{x^a} \leq 0$$

Теперь интегрируем по x на промежутке $(\frac{1}{2}, 1)$:

$$-\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2}{x^a}, dx \leq \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x^a}, dx \leq 0$$

Поскольку интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2}{x^a}, dx$ сходится при $a > 1$ (так как это просто интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^a}, dx$ с константой $\ln 2$), то часть интеграла $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{x^a}, dx$ сходится при $a > 1$.

Теперь рассмотрим интеграл на промежутке $(0, \frac{1}{2})$:

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^a}, dx$$

Обратите внимание, что на промежутке $(0, \frac{1}{2})$, $\ln x \leq \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$. Следовательно, для $x \in (0, \frac{1}{2})$ и $a > 1$, имеем:

$$\frac{\ln x}{x^a} \leq \frac{-\ln 2}{x^a}$$

Интегрируя по x на промежутке $(0, \frac{1}{2})$, получим:

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^a}, dx \leq -\ln 2 \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^a}, dx$$

Интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^a}, dx$ сходится при $a > 1$, так как это просто интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^a}, dx$ с константой $-\ln 2$. Это означает, что часть интеграла $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^a}, dx$ сходится при $a > 1$.

Таким образом, исходный интеграл сходится как на промежутке $(0, \frac{1}{2})$, так и на промежутке $(\frac{1}{2}, 1)$ при $a > 1$. Так как обе части сходятся, то и весь интеграл сходится при $a > 1$.

8. В итоге, исходный несобственный интеграл расходится при $a \geq 1$ и сходится при $0 < a < 1$.