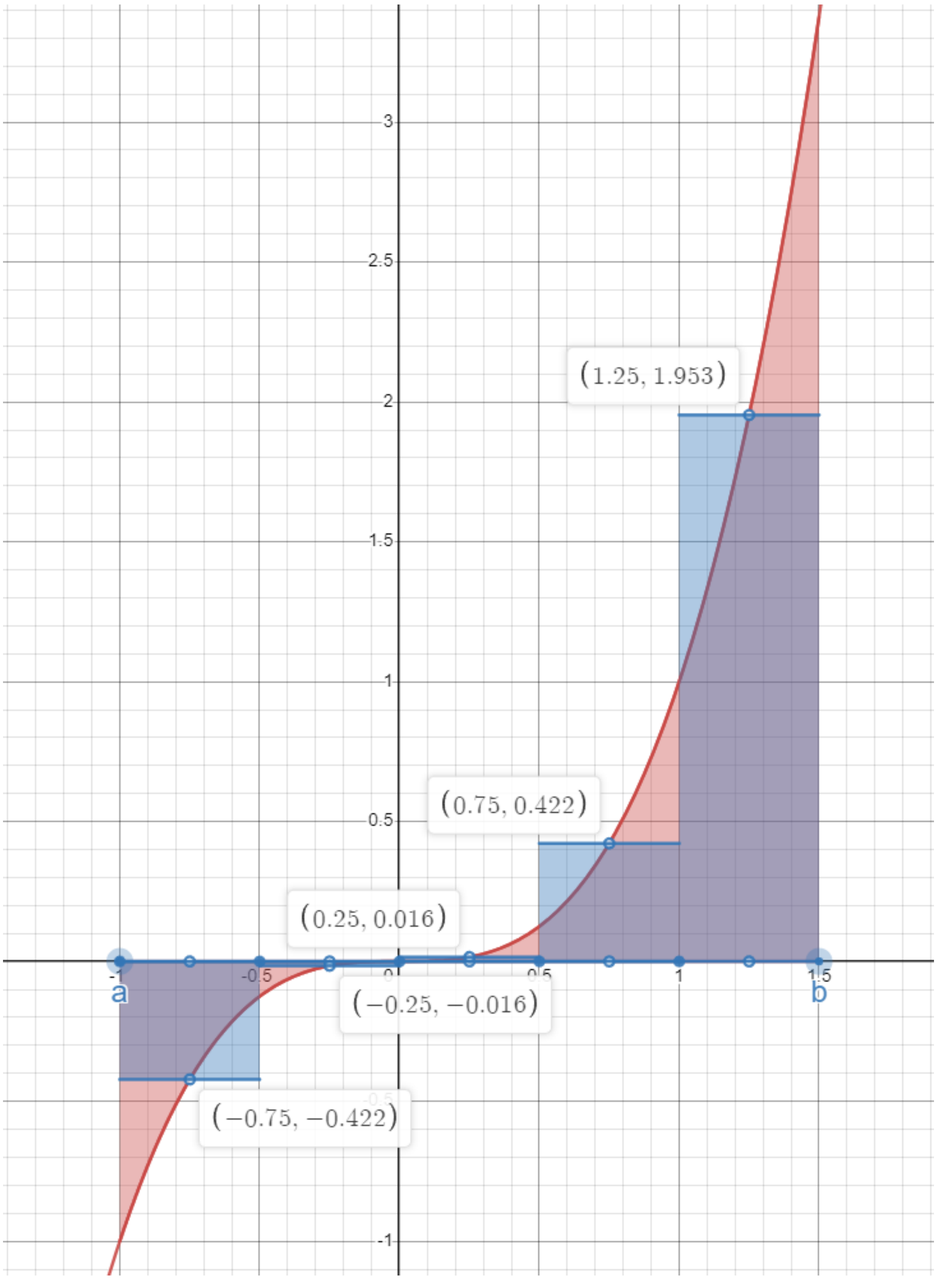
Задание 1. Интегральная сумма

Исследуйте интегральную сумму функции x^3*, заданной на отрезке* $[-1;1{,}5]$*:*

1. $f(x)=x^3 \qquad a=-1; b=1{,}5$

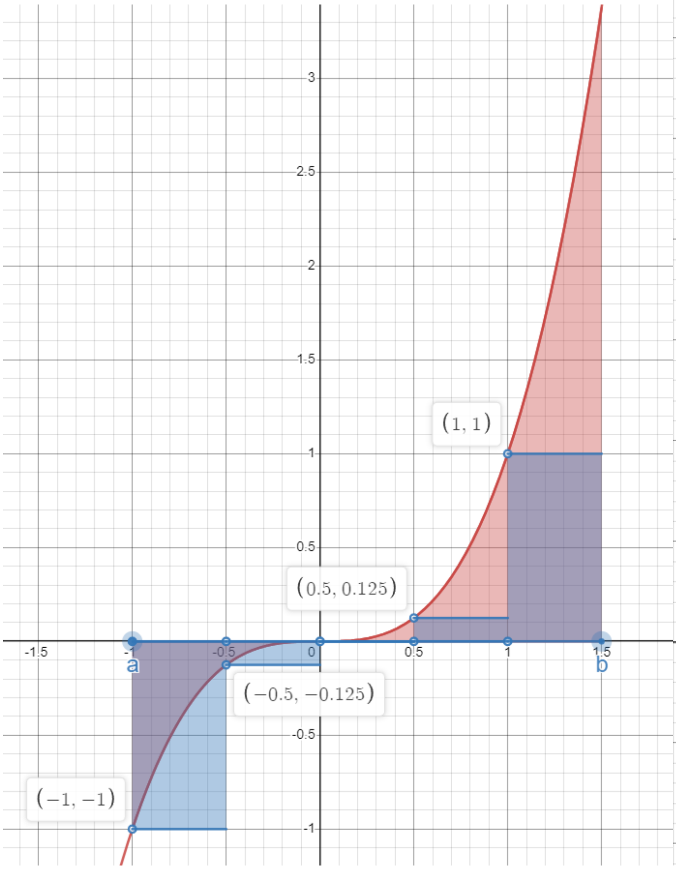
Возьмем $n=5$ - кол-во элементарных отрезков

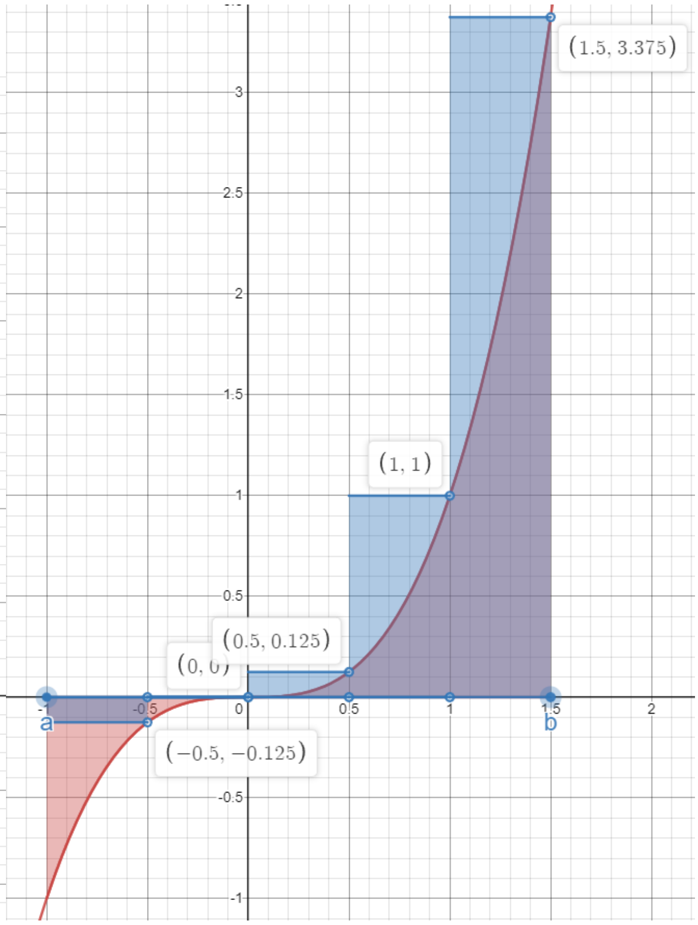
$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{2}$ - шаг разбиения



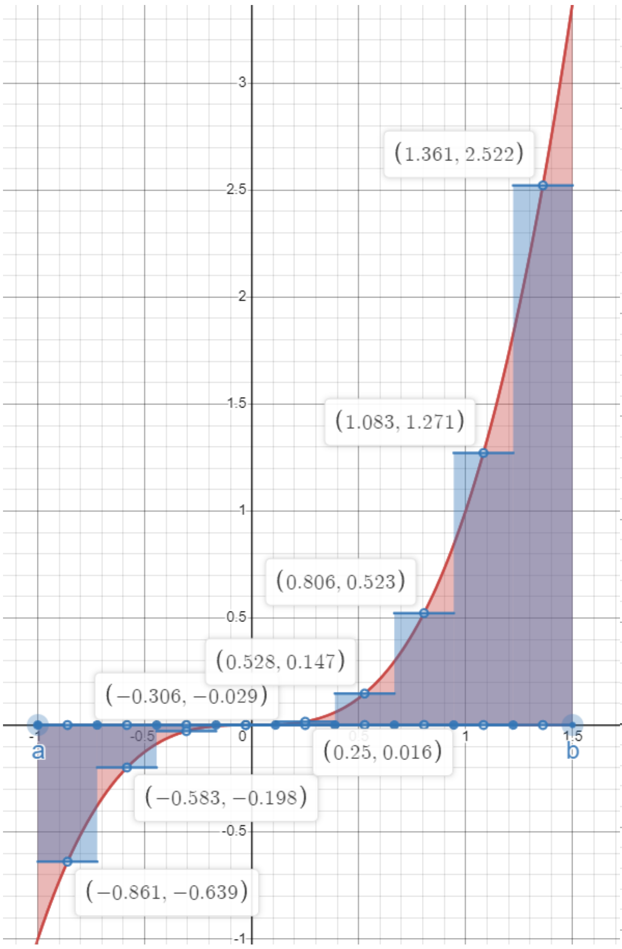
2. Посмотрим, как изменяется фигура при смещении точек внутри элементарных отрезков в крайнее левое, крайнее правое и промежуточное положение.

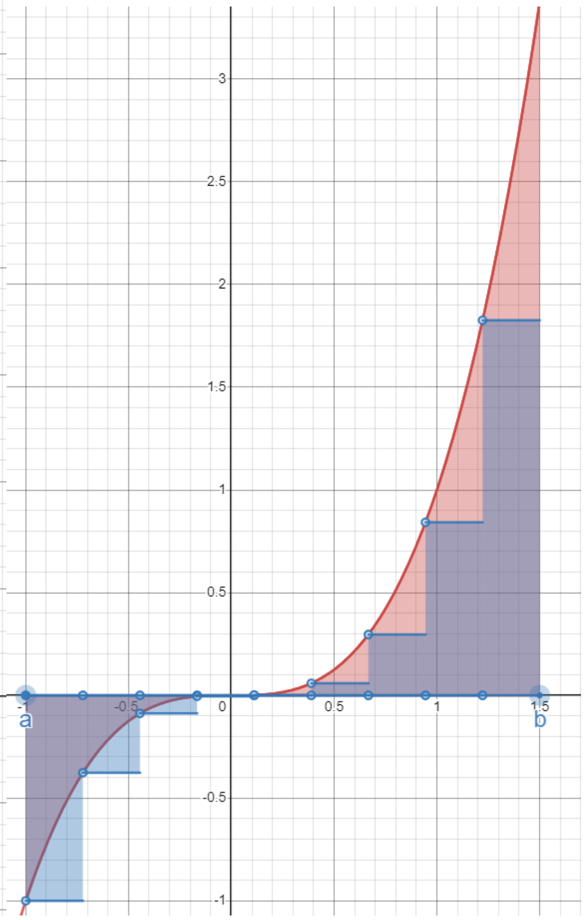
при n=5:

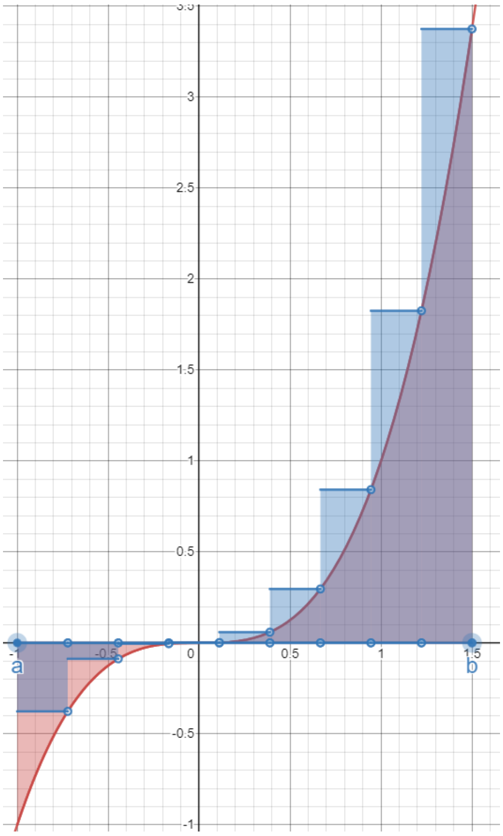

(1, 1)
(0.5, 0.125)
(−0.5, −0.125)
(−1, −1)
a
b


(1.5, 3.375)
(1, 1)
(0.5, 0.125)
(−0.5, −0.125)
a
b

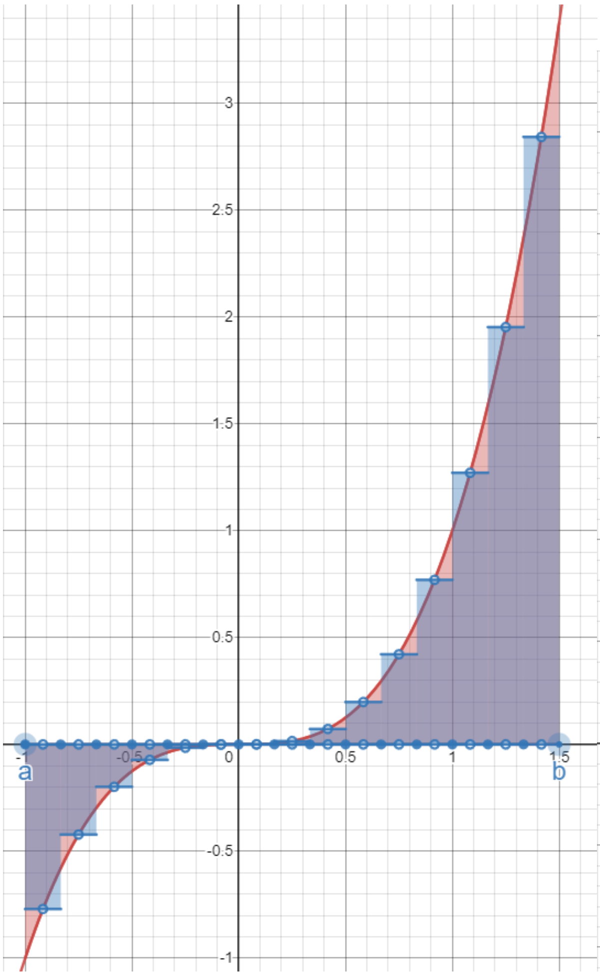
при n=9:

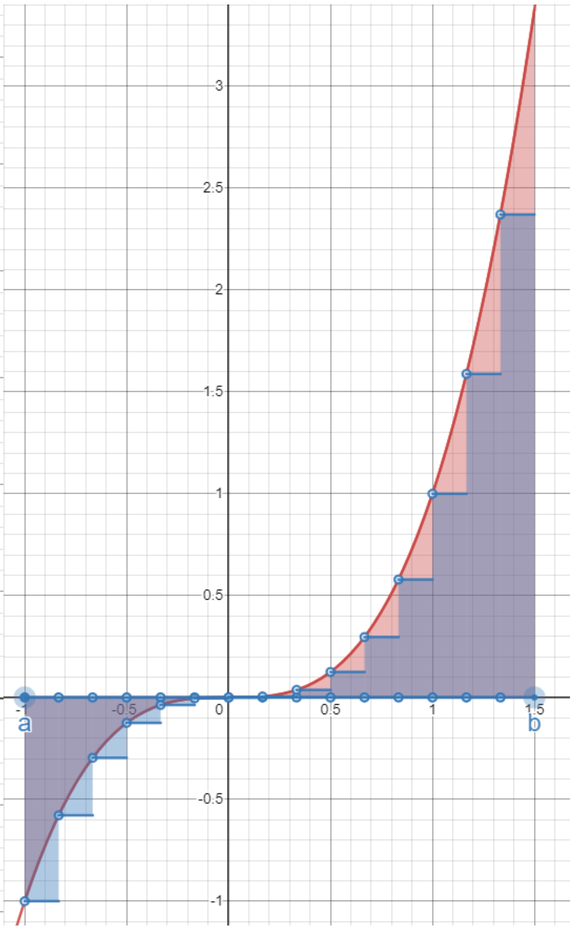

(1.361, 2.522)
(1.083, 1.271)
(0.806, 0.523)
(0.528, 0.147)
(−0.306, −0.029)
(0.25, 0.016)
(−0.583, −0.198)
(−0.861, −0.639)
a
b

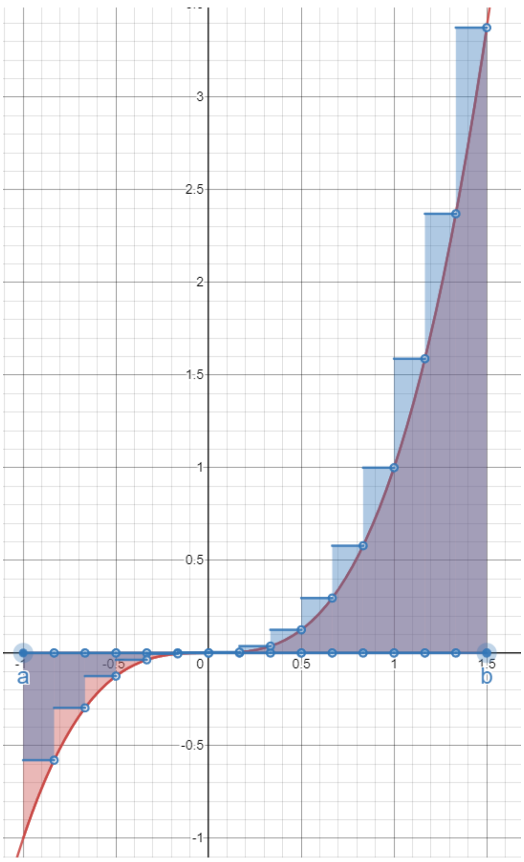

a
b



при n=15:





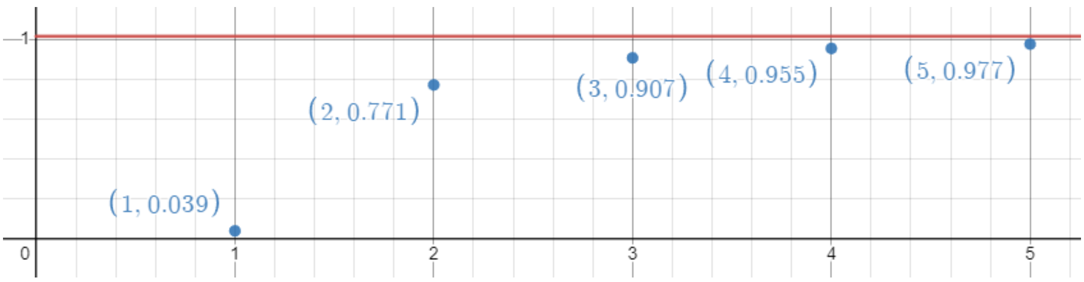


3. Таким образом, можно заметить, что чем больше n, тем менее площадь покрытия ступенчатой фигурой графика зависит от выбора точек внутри элементарных отрезков, и при $n \to \infty$ эта разница исчезает.

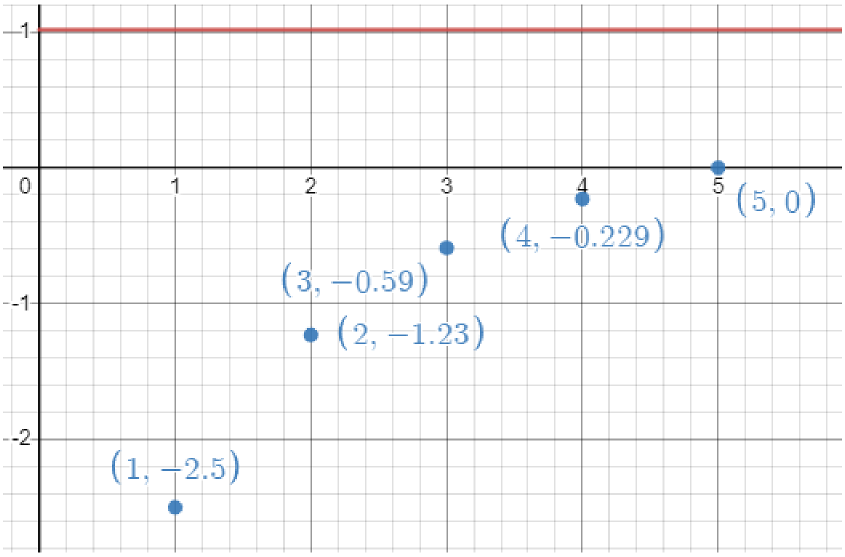
4,5,7. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$

n=5:

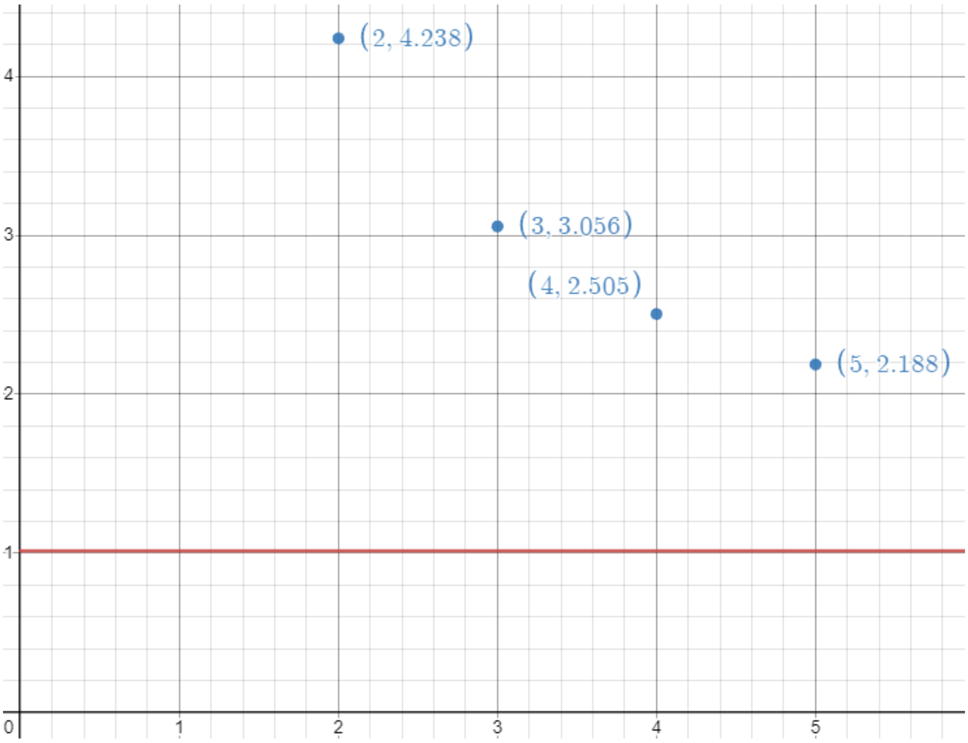
точка в середине отрезка: $S_5 = 0.5\left(\frac{-27}{64} - \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64}\right) = \frac{125}{128} \approx 0{,}97656$



левая крайняя: $S_5 = 0.5\left(-1 - \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{8}\right) = 0$

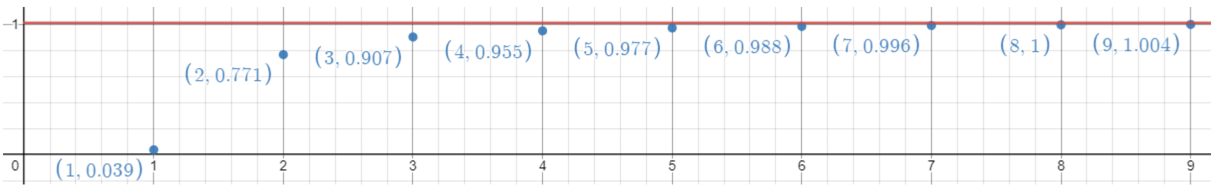


правая крайняя: $S_5 = 0.5\left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{8} + 1 + 1{,}5^3\right) = \frac{35}{16} = 2{,}1875$

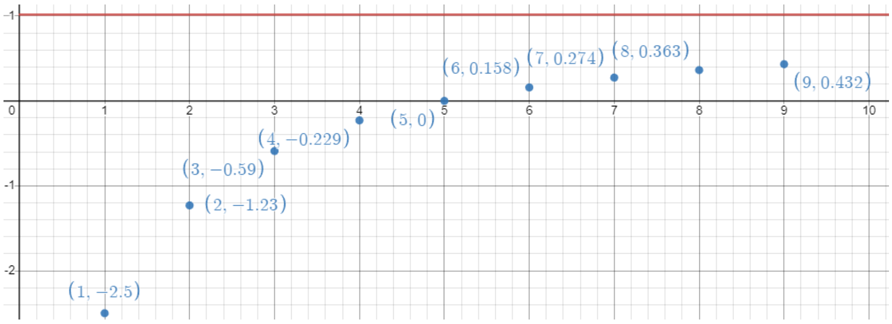


n=9:

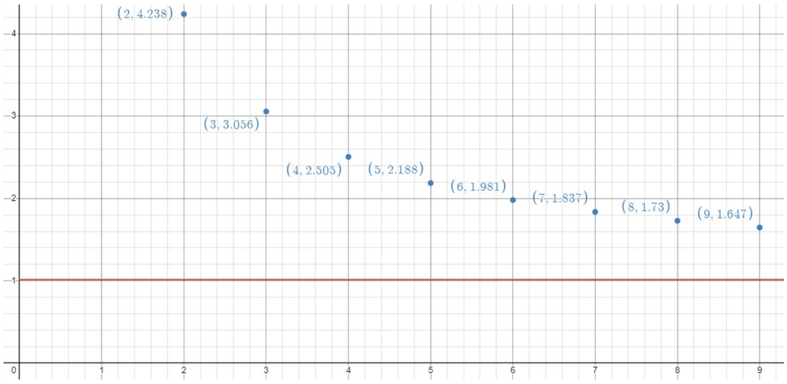
точка в середине отрезка: $S_9 = \frac{5}{18}(\ldots) \approx 1{,}00357$



левая крайняя: $S_9 \approx 0{,}4321$

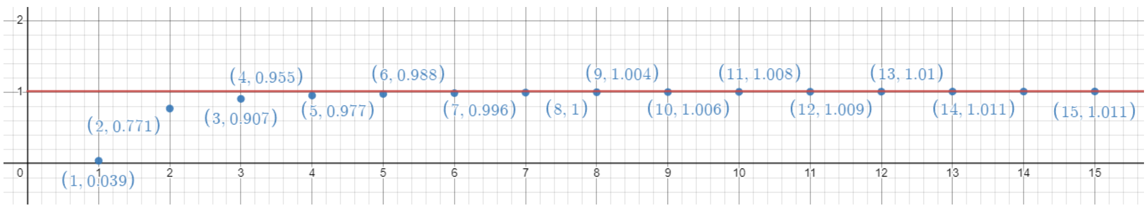


правая крайняя: $S_9 \approx 1{,}6474$

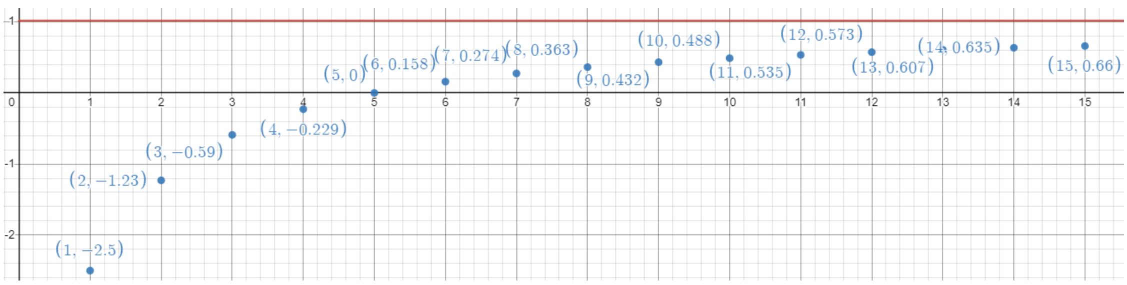


n=15:

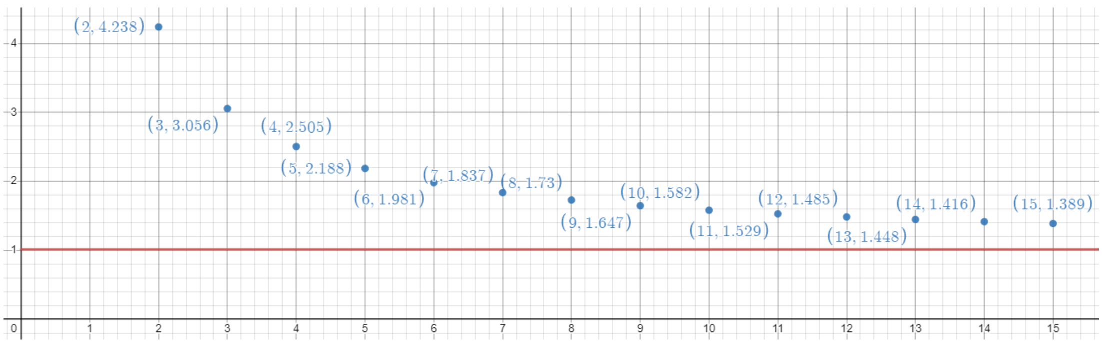
точка в середине отрезка: $S_{15} = \frac{1}{6}(\ldots) \approx 1{,}0113$



левая крайняя: $S_{15} \approx 0{,}66$



правая крайняя: $S_{15} \approx 1{,}389$



6. $\int_{-1}^{1,5} x^3 = \frac{x^4}{4}\Big|_{1}^{1,5} = \frac{1,5^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{65}{64} = 1,015625$

8. Таким образом, можно заметить, что чем ближе точка разбиения к середине элементарного отрезка, тем ближе значение интегральной суммы к значению интеграла. При этом, чем левее точка разбиения, тем меньше интегральная сумма, и чем правее, тем она больше значения интеграла. При этом, при n, стремящемся к бесконечности, эта разница исчезает (что логично, т.к. определенный интеграл - это предел от интегральной суммы).