

# 方法精讲-数量 3

主讲教师：唐宋

授课时间：2018.09.20



粉笔公考·官方微信

## 方法精讲-数量3（笔记）

学习任务：

1. 授课内容：经济利润问题、高频几何问题。
2. 时长：2.5小时。
3. 对应讲义：165页～172页。
4. 重点内容：
  - （1）进价、利润、折扣相关的公式，能准确地计算分段计费问题。
  - （2）常用的几何公式、常用三角函数以及勾股定理。
  - （3）常考的几何结论，以及相似三角形和最短路径的解题技巧。

### 第六节 经济利润问题

**【知识点】经济利润问题：**

1. 利润=售价-进价。利润在考试中的概念是售价与进价的差值。
2. 利润率=利润/进价。

例如：开店卖足球，进价100元，售价250元，利润为150元。利润中的百分数是利润率。利润率=150/100=150%，卖足球相对进价赚了150%。

- （1）数量关系中，利润率=利润/进价。
- （2）资料分析中，利润率=利润/收入。
- （3）相同的词，公式不同。资料分析研究国家、地区等宏观的利润率，对于企业、地区来说成本难以衡量，但收入是可以衡量的，故而将收入当做一个整体来计算，宏观情况研究收入利润率。数学运算的情况比较简单、清晰、微观，利润、售价均是在进价的基础上思考。

- （4）结论：数量中以进价为分母，资料中以收入为分母。

3. 售价=进价\*（1+利润率）。

（1）证明（过程无需理解，大致了解即可）：售价=进价+利润=进价+进价\*利润率=进价\*（1+利润率）。250元的商品， $250=100*(1+150\%)$ 。

- （2）前两个公式是定义，第三个公式要理解，并记清楚。

(3) 拓展：经济利润的公式类似资料中的现期、基期，资料分析中的基期，加上增长量变为现期，经济利润问题中，进价是基础，在进价的基础上添加利润为售价，进价和基期类似，利润与增长量类似，售价与现期类似， $\text{增长率} = \text{增长量} / \text{基期}$ ， $\text{利润率} = \text{利润} / \text{进价}$ ，数学中的利润率类似增长率。不止词汇对应，公式也与资料分析对应，对于公式(3)， $\text{售价} = \text{进价} * (1 + \text{利润率}) \rightarrow \text{现期} = \text{基期} * (1 + r)$ ，若觉得公式不好记，可以将两个公式糅合起来理解。



4. 折扣 =  $\text{售价} / \text{原价} = \text{折后价} / \text{折前价}$ 。

(1) 商品有原价，卖不出去会打折，折后的价格称为折后价。如原价250元的商品，现在卖50元，折扣 =  $50 / 250 = 20\% = 2$ 折。若打8折，现价 =  $250 * 80\%$ 。

(2) 折上折：100元的商品，先打九折变为90元，在此基础上再打8折（注意不是在100的基础上打8折，即并非80），为  $90 * 80\% = 72$ 元。

(3) 100元的商品打八八折，即  $100 * 88\% = 88$ 元，八五折为85元。

5. 总价 =  $\text{单价} * \text{数量}$ ；总进价 =  $\text{单个进价} * \text{数量}$ ；总利润 =  $\text{单个利润} * \text{数量} = \text{总售价} - \text{总进价}$ 。

(1) 总价指总售价。前面研究的均是单独的概念，实际生活中会涉及总价格、总利润，与单件价格、单件利润、单件进价产生联系。如单件利润80元，卖出10件，总利润为800元。

(2) 计算商品的总利润时，有两种算法，一是用单件利润\*数量；二是用总售价-总进价，一进一出差的钱数便是利润。

6. 共5个公式，前3个公式是重中之重；公式4中，要知道100元的商品卖80元是打8折而非打2折；公式5需要知道总利润的两种算法。

例 1（2018 江西）某品牌的葛粉进价为 20 元，现降价 20% 卖出，结果还获得进价 52% 的利润。那么，该葛粉的定价是多少元？（ ）

- A. 36
- B. 37
- C. 38
- D. 39

【解析】例 1. “葛粉”是一种商品，无需知道是什么。20 元是进价，即成本，降价是在定价的基础上降价 20%，是打折的考法，如原来是 100 元，降价 20% 是 80 元，即扣掉 20%，是在定价的基础上打 8 折。在 20 元的基础上，额外获得了进价 52% 的利润，降价后实际售价=定价\*(1-20%)，进价为 20 元，利润为 20\*52%，实际售价=进价+利润→定价\*(1-20%)=20+20\*52%，第一句话比较绕，理解清楚是在定价的基础上降价即可（不是在成本的基础上降价），定价=(20+10.4)/0.8=30.4/0.8=38。【选 C】

【注意】“20+20\*52%”可以写为“20 元\*(1+52%)”。

例 2（2018 山东）商店购入一批某种水果，如按定价销售，每千克盈利 23 元。销售总量的 5/9 后，每千克降价 8 元卖出剩余部分，销售这批水果共盈利 2275 元。问按原定售价卖出了多少千克水果？（ ）

- A. 60
- B. 65
- C. 75
- D. 80

【解析】例 2. 80% 的经济利润问题是简单题。盈利是利润，经济利润中有很多近义词、同义词，如成本即进价。前面卖出 5/9，降价卖出剩余的 4/9，总共盈利即总利润，总利润有两种算法，总利润=单个利润\*数量①=总售价-总进价②，题目中没有给出进价、售价，有单件利润，优先用公式①，单件利润=23，问重量，通过总利润 2275 元建立等量关系，单件利润是一公斤的利润 23 元，重量未知，当出现总量的几分之几时，通过倍数特性设未知数，设总重量为 9x，卖出

5/9 即卖出  $5x$ ，降价 8 元卖出剩余的量，即  $9x \times 4/9$ ，成本不变，售价降 8 元，这 8 元是少赚的钱数，说明利润少 8 元，列方程： $2275 = 23 \times 9x \times 5/9 + (23 - 8) \times 9x \times 4/9$ ， $2275 = 115x + 60x$ ， $x = 2275/175 = 13$  公斤，注意设的是总重量，问的是按原定售价卖出的量，即  $5x = 65$  公斤。【选 B】

例 3（2018 北京）某水果批发商从果农那里以 10 元/公斤的价格购买了一批芒果，运送到某地区售出。在长途运输过程中有 5% 的芒果磕碰受损和另外 5% 的芒果过度成熟，因此无法卖出，其余部分以 25 元/公斤的价格售出后，如果不计运输等其他费用，这批芒果赚得利润 12000 元。则该批发商从果农那里购买了多少公斤芒果？（ ）

- A. 480  
B. 800  
C. 960  
D. 1000

【解析】例 3. 过度成熟即熟烂了，两个 5% 卖不掉，其余 90% 按照 25 元/公斤的价格售出，总利润是 12000 元，总利润 = 单个利润 \* 数量 = 总售价 - 总成本，两种思路均可用，此处均讲解。

方法一：总利润 = 单个利润 \* 数量，10% = 1/10 卖不掉，设总重量为  $10x$ ，卖掉  $10x$  中的 90%，即  $10x \times 90\%$ ，单个利润 =  $25 - 10 = 15$  元，无法卖出的部分相当于售价为 0 元，每公斤亏 10 元，注意中间是加号，列式： $12000 = (25 - 10) \times 10x \times 90\% + (0 - 10) \times 10x \times 10\%$ ， $12000 = 15 \times 9x + (-10)x$ ， $125x = 12000$ ， $x = 12000/125$ ，答案首位 4、8、9、10，首位不同，大致估算即可，首位商 9，对应 C 项。类似资料分析，算式正确，计算首位区分选项即可。计算赚的钱后，容易忘记亏的钱，这是易错点。遇到“无法卖出”，一定要注意卖不掉的部分要计算亏了多少钱。

方法二：设总重量为  $10x$ ，卖出 90%，总售价 = 单个售价 \* 总重量 =  $25 \times 10x \times 90\%$ ，只要进货，便要计算钱数，总进价 =  $10 \times 10x$ ，列式： $12000 = 25 \times 10x \times 90\% - 10 \times 10x$ ，不需要考虑亏的部分，总售价对应 90% 的卖出部分，总进价包含了全部商品，算法中已经考虑了亏损部分，建议用本方法，列方程更简单， $12000 = 9x \times 25 - 100x$ ， $x = 9^+$ ，对应 C 项。【选 C】

例 4（2015 江苏）某商品今年的进价比去年减少 15%，由于售价不变，利润

率比去年增加了 24 个百分点，则该商品去年的利润率为（ ）。

- A. 24%                      B. 30%
- C. 36%                      D. 42%

【解析】例 4. 经典考法，2017 年及以前考得较多，近两年考得较少，技巧性强。售价不变，利润率比去年增加 24 个百分点，问去年的利润率，有今年、去年两个时间（前面题目仅有一个时间点），价钱、利润率有变化，时间点复杂的题目倾向于使用列表法，上面写去年（基期），下面写今年（现期），成本是进价，利润可不写，横着写成本、售价、（利润）、利润率，没有给出具体的钱数，均是百分数、百分点，可以考虑赋值法，均是在成本的基础上研究售价、利润，赋值去年的成本为 100 元，无论减少多少都可以直接算出价格（百分数的基数是 100），今年成本为 85 元，不能再给售价赋值，可以设未知数，注意设售价为  $x$  可做，但并非最好的设法，售价不变，计算的利润率是变量比较麻烦， $\text{利润率} = \text{利润} / \text{成本}$ ，设去年利润为  $x$ ，则去年利润率为  $x/100$ ，售价不变，今年售价 = 去年售价 = 成本 + 利润 =  $100 + x$ ，今年利润为  $x + 15$ ，今年利润率 =  $(x + 15) / 85$ 。“利润率比去年增加了 24 个百分点”  $\rightarrow x/100 + 24/100 = (x + 15) / 85 \rightarrow (x + 24) / 100 = (x + 15) / 85 \rightarrow (x + 24) / 20 = (x + 15) / 17$ 。

方法一：交叉相乘， $20*(x+15)=17*(x+24)$ ， $3x=17*24-300=108$ ，解得  $x=36$ ，问去年的利润率，加上百分号即为答案，利润率= $36/100=36\%$ 。列表是必须的，可以让条件更清晰，让思维更清楚。

	成本	售價	利潤	利潤率
去年	100	100 + x	x	$\frac{x}{100}$
今年	85	100 + x	x + 15	$\frac{x+15}{85}$

方法二： $(x+24)/100=(x+15)/85$ ，分子、分母同时加减得到新分数，分子、分母同时做差： $(x+24)/100=(x+15)/85=(24-15)/(100-85)=3/5 \rightarrow (x+24)/100=3/5$ ，100 是 5 的 20 倍，故而  $(x+24)$  是 3 的 20 倍， $x+24=60$ ， $x=36$ ，计算量减少，添加百分号即为答案。约分后操作更简单， $(x+24)/100=(x+15)/85$

→  $(x+24)/20 = (x+15)/17 = (24-15)/(20-17) = 3 \rightarrow (x+24)/20 = 3 \rightarrow x = 36$ 。

【选 C】

【注意】小技巧：如果  $A/B = B/C$ ，那么  $A/B = C/D = (A \pm C)/(B \pm D)$ 。例：  
 $10/30 = 1/3 = (10+1)/(30+3) = 11/33$ ， $10/30 = 1/3 = (10-1)/(30-3) = 9/27$ 。

【知识点】分段计费：前四题考公式，后两题考分段计算。经济利润中还有部分打折题，近两三年很少考。分段计费是近几年的热门考法。

1. 在生活中，水电费、出租车计费等，每段计费标准不等，用得少便会便宜。  
 问：在不同收费标准下，一共需要的费用？

2. 计算方法：

(1) 按标准，分开。

(2) 计算后，汇总。

3. 例：某地出租车收费标准为：3 公里内起步价 8 元；超出 3 公里的部分，每公里 2 元。小明打车坐了 12 公里，共花费多少钱？

答：3 公里是分段点，3 公里内起步价 8 元，3 公里以上 2 元/公里，对应 3~12 公里，共  $12-3=9$  公里，总价格  $= 8 + 2 \times 9 = 26$  元。注意超过 3 公里的部分是 2 元，需要分别计算前面 3 公里和后面 9 公里。



例 5（2016 河南）贾某在停车场停车，每个月前几个小时内收费的基础价格为 5 元/小时，之后按照基础价格的 90% 收费，某月贾某的停车时间为 120 小时，共交了 545 元，则按照基础价格停车的时间为多少小时？（ ）

A. 8

B. 10

C. 15

D. 20

【解析】例 5。“之后按照基础价格的 90% 收费”，即之后收费  $= 5 \times 90\% = 4.5$  元/小时，给了总时间 120 小时和总钱数 545 元，前几个小时未知，假设基础时间

为  $x$  小时，则基础部分的钱数为  $5x$ ，超标部分的钱数为  $4.5 \times (120 - x)$ 。列式：  
 $5x + 4.5 \times (120 - x) = 545$ ，整理得： $0.5x = 545 - 540$ ，解得  $x = 10$  小时，对应 B 项。

【选 B】

【注意】注意设的  $x$  是什么，本题求谁设谁，可以直接选。

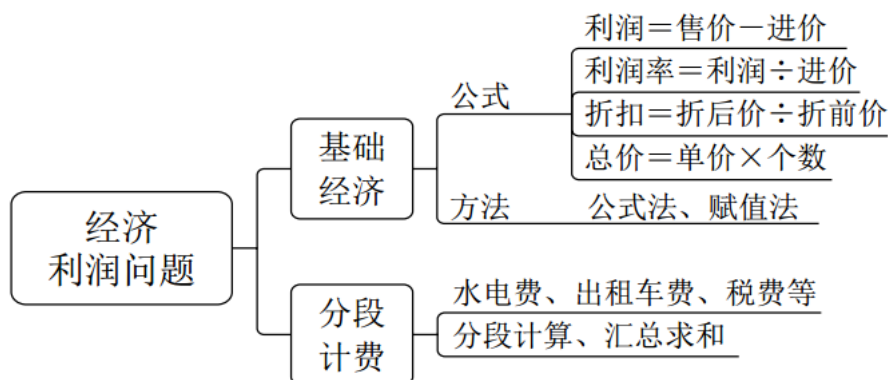
例 6（2018 江西）为了节约水资源，某城市规定每人每月不超过 5 吨，则按 2.5 元/吨收费；超出 5 吨的，超出部分按 4 元/吨收费，每次收费时用水量都按整数计算，已知胡家 3 口人，熊家 4 口人。某月月底结算时，胡家收费 69.5 元，比熊家多交了 15.5 元。那么，熊家该月用了多少吨水？（ ）

- A. 20
- B. 21
- C. 22
- D. 23

【解析】例 6. 分段计费问题在近几年考的都相对简单。本题跟上一题的区别是标准不仅与时间有关，而且跟人口有关。假如 3 个人标准为 15 吨，用了 18 吨水，则 15 吨按照 2.5 元/吨去收费，超标的  $18 - 15 = 3$  吨按照 4 元/吨去收费。问题问熊家，则胡家的情况不用考虑，熊家交了  $69.5 - 15.5 = 54$  元水费，熊家有 4 口人，则标准为  $4 \times 5 = 20$  吨。设超标  $x$  吨，可列式  $20 \times 2.5 + x \times 4 = 54$ ，整理得： $50 + 4x = 54$ ， $x = 1$ ，则熊家用了  $20 + 1 = 21$  吨水，对应 B 项。【选 B】

【注意】分段计费问题一般设分段标准为  $x$ ，如果知道分段标准，则一般设超标的为  $x$ 。

【答案汇总】1-5：CBCCB；6：B



【小结】经济利润：



1. 基础经济:

(1) 公式:

① 利润=售价-进价, 售价=进价 $\times$ (1+r)。

② 利润率=利润/进价。

③ 折扣=折后价/折前价, 降价 20%对应打 8 折。

④ 总价=单价 $\times$ 个数。

(2) 方法:

① 公式法。

② 赋值法, 不知道钱数, 也不求具体的钱数时。

2. 分段计费:

(1) 水电费、出租车费、税费等。

(2) 分段计算、汇总求和。

## 第七节 高频几何问题

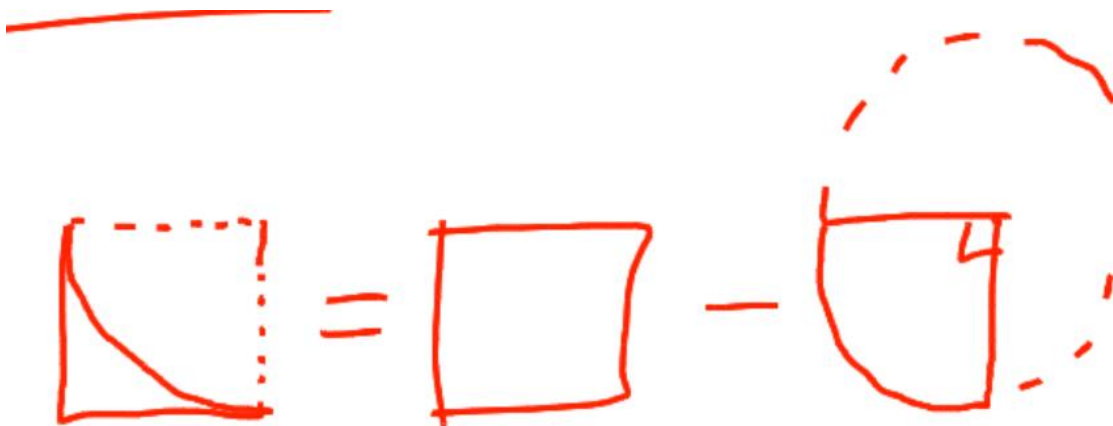
**【知识点】**高频几何问题: 几何问题太多太杂, 中学学了多年的几何问题, 几何出题方式有很多种, 经常出现中考的原题, 通过总结真题, 只讲考的比较多的、高频的几何问题, 即使学完方法精讲课, 碰到不会做的几何问题也很正常。

1. 公式类: 有公式就能做。

(1) 规则图形。直接可用公式, 正方形、长方形、圆形……

(2) 不规则图形: 转化为规则图形的和或者差, 再去求解。

① 下图, 可以看作: 正方形-1/4 圆形。因此, 不规则图形转化为规则图形的和或差来计算。



② “L 形”图形可以转化为两个长方形去解题。



2. 结论类：侧重于中学所学到的小结论、小技巧。

3. 技巧类：相似三角形、直角三角形勾股定理、最短路径等。

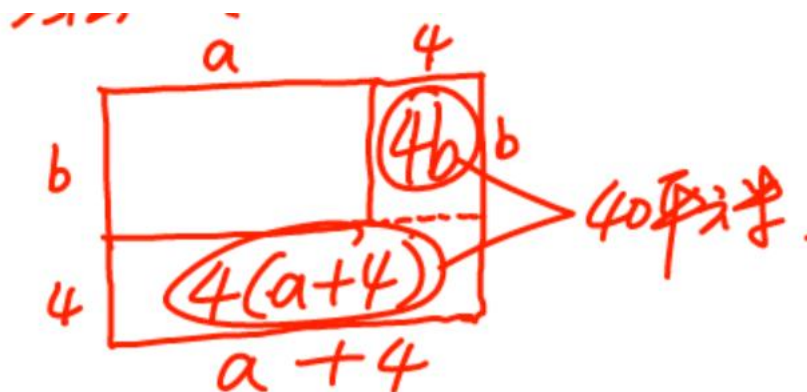
### 一、公式类

例 1（2017 联考）某单位准备扩建一矩形花圃，若将矩形花圃的长和宽各增加 4 米，则新矩形花圃的面积比原来的面积增加了 40 平方米。那么，原矩形花圃的周长是多少？（ ）

- A. 12 米
- B. 24 米
- C. 32 米
- D. 40 米

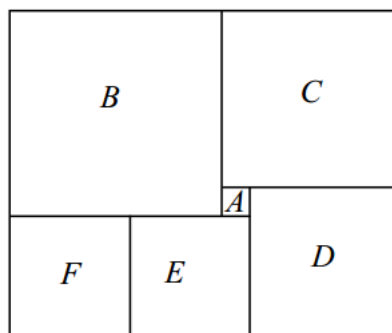
【解析】例 1. 方法一：矩形包括正方形，但是本题不能当做正方形去解题。已知矩形的长宽各加 4 米，长宽具体值并不知道，无论求面积还是周长，都需要原来的长和宽，设长为  $a$ ，宽为  $b$ 。则新的矩形：长= $a+4$ ，宽= $b+4$ 。则  $(a+4) * (b+4) - a * b = 40$ ，整理得  $a * b + 4b + 4a + 4 * 4 - a * b = 40$ ， $a + b = (40 - 4 * 4) / 4 = 6$ 。求周长，周长= $2 * (长 + 宽) = 2 * (a + b) = 6 * 2 = 12$ 。

方法二：画图法。原来长宽各增加 4 米，增加了 40 平方米，增加的面积是右下角 L 形状的部分，延长长边，形成  $4b$  和  $4 * (a+4)$  两部分。则  $4a + 4b + 16 = 40$ ，同样可以求出  $a + b = 6$ ，再求周长。【选 A】



【注意】长方形包括正方形，正方形是长宽相等的长方形。

例 2（2018 四川）如图所示长方形恰好分成六个正方形，其中最小的正方形面积是  $1\text{cm}^2$ ，则这个长方形的面积是（ ）。



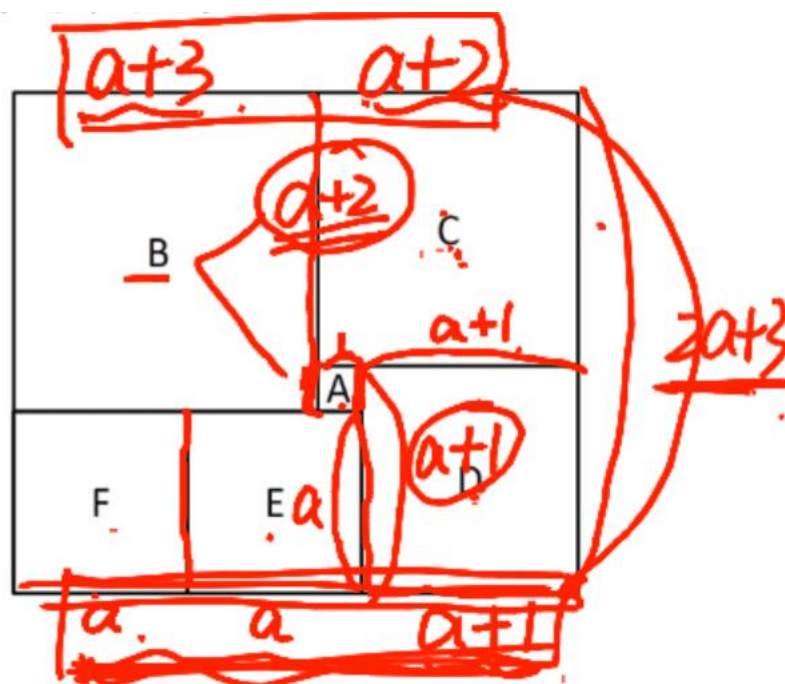
A.  $143\text{cm}^2$

B.  $132\text{cm}^2$

C.  $110\text{cm}^2$

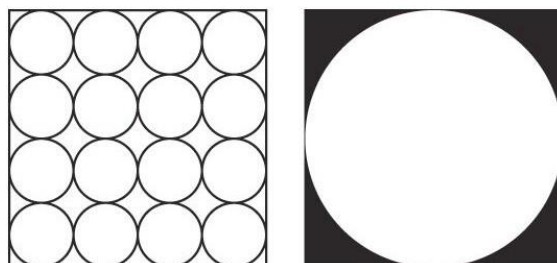
D.  $90\text{cm}^2$

【解析】例 2. 已知最小的正方形 A 的面积为  $1\text{cm}^2$ ，则其边长为  $1\text{cm}$ ，设 E 的边长为  $a$ ，E 和 F 有一条边紧紧贴着，则 F 的边长也为  $a$ ，观察 D 的边长，左侧竖着的边长为  $a+1$ ，则大长方形下边长已知，观察 C 的边长，为  $a+1+1$ ，B 的边长为  $a+2+1$ ，此时上下边长已知，图形为长方形则上下边长相等，可列式： $a+3+a+2=3a+1$ ，得  $a=4$ ， $S=(3a+1)*(a+1+a+2)$ ，代入  $a$ ，可得原式= $13*11=143$ ，对应 A 项。【选 A】



【注意】易错点：标数的时候不要把长方形上下边长的  $a$  的个数标成相等，否则会得到一个恒等式  $0=0$ ，求不出  $a$  的具体值。

例 3（2018 北京）本题图中，左边的图形每个小圆的面积为  $\pi$ ，那么右边图形中阴影部分面积为（ ）。



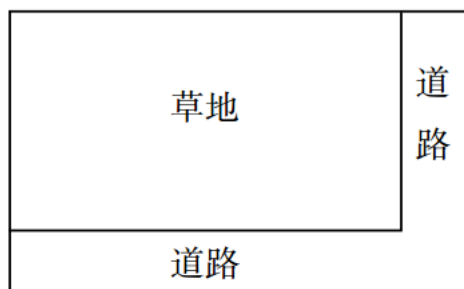
- A.  $8\pi$                       B.  $64-16\pi$   
C.  $4\pi+8$                       D. 20

【解析】例 3. 方法一：通过观察图形可知， $S_{\text{阴}}=S_{\text{正}}-S_{\text{大圆}}$ 。正方形-圆形，正方形面积不带  $\pi$ ，圆形面积带  $\pi$ ，则答案=不带  $\pi$ -带  $\pi$ ，只有 B 项符合。这个方法叫做选项的形状，在几何题中可以根据选项特征去选择。

方法二： $S_{\text{小圆}}=\pi r_{\text{小}}^2=\pi$ ，则  $r_{\text{小}}=1$ 。 $S_{\text{阴}}=S_{\text{大正}}-S_{\text{大圆}}$ 。大正方形边长与左侧四个圆的半径加和相同，小圆半径为 1，则大正方形是八个半径，边长为 8， $S_{\text{正}}=8*8$ 。大圆半径是正方形边长的一半，则  $r_{\text{大}}=4$ ， $S_{\text{大圆}}=\pi r_{\text{大}}^2$ 。则  $S_{\text{阴}}=8*8-\pi r_{\text{大}}^2=64-$

$16\pi$ ，对应 B 项。【选 B】

例 4（2018 广州）如图所示，市政部门在一块周长为 260 米的长方形草地旁边铺设宽为 10 米的 L 形道路。已知铺好道路后，道路和草地面积之和为草地面积的 1.5 倍，则草地的面积为（ ）平方米



- A. 4200                      B. 4000  
C. 3000                      D. 2800

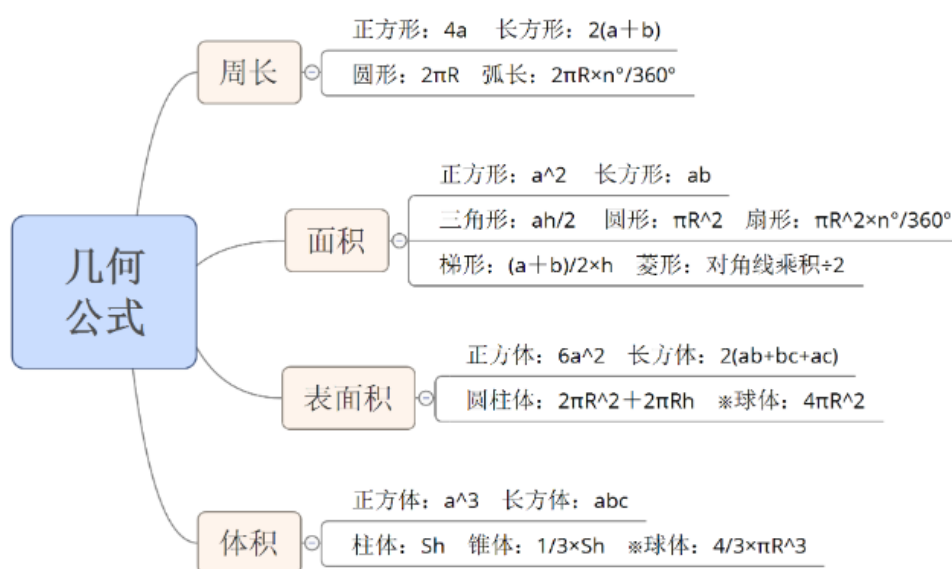
【解析】例 4. 方法一：“L 形”几何题经常会考到。把草地的面积看为  $S$ ，则道路+草地的面积为  $1.5S$ ，道路的面积则为  $0.5S$ 。道路宽为 10m，草地面积为  $2(a+b)=260 \rightarrow a+b=130$  米。把道路切分开，如图所示。上面部分面积为  $10b$ ，下面部分的面积为  $10a$ ，而中间的小块为  $10 \times 10$ ，此时  $S_{\text{道}}=10 \times a+10 \times b+10 \times 10$ ，整理得  $S_{\text{道}}=10(a+b)+100=1400\text{m}^2$ ， $S_{\text{草}}=2 \times S_{\text{道}}=2800\text{m}^2$ ，对应 D 项。

方法二：纯代数方法解题， $S_{\text{草地}}=(a+10)(b+10)=1.5ab \rightarrow ab+10b+10a+100=1.5ab$ ，根据周长可知  $a+b=130$ ，则  $10a+10b=1300$ ，一样可以推出，草地面积为 2800，对应 D 项。

方法三（猜答案）：整个面积与草地面积的比例关系为 3：2，观察选项，A 项：D 项=3：2，A 项为坑，引那些没有看清问题的同学入坑，而符合倍数关系的 D 项为正确答案。【选 D】



【答案汇总】1-4: AABD



【知识点】几何公式:

1. 周长:

(1) 正方形:  $4a$ 。

(2) 长方形:  $2 \times (a+b)$ 。

(3) 圆形:  $2\pi \times R$ 。

(4) 弧长:  $2\pi R \times n^\circ / 360^\circ$ 。如: 求弧长 AB, 用  $n^\circ$  (弧长所对圆心角) /  $360^\circ$  作为比重, 求出  $n^\circ$  在  $360^\circ$  中所占的比例, 圆周长 \* 占圆的比重 = 弧长。

2. 面积:

(1) 正方形:  $a^2$ 。

(2) 长方形:  $a*b$ 。

(3) 三角形:  $a*h/2$ 。

(4) 圆形:  $\pi R^2$ 。

(5) 扇形:  $\pi R^2 * n^\circ / 360^\circ$ 。和弧长求法相同, 用圆的面积乘以扇形所占的比例。

(6) 梯形:  $(a+b) * h/2$ 。梯形上、下两条边平行,  $a$  是上底,  $b$  是下底, 高是  $h$ 。找一个与这个梯形一样的梯形, 倒过来拼在一起, 变成底边为  $(a+b)$ , 高为  $h$  的平行四边形, 平行四边形面积  $= (a+b) * h$ 。所以一个梯形面积  $= (a+b) * h/2$ 。

(7) 菱形: 对角线乘积/2。菱形是四条边彼此平行且相等, 对角线垂直的图形。将竖着的对角线平移到两边, 横着的平移到两边, 得到长方形, 长方形面积  $= 2 * \text{菱形面积}$ , 长方形面积  $= a*b$ , 则菱形面积  $= \text{对角线乘积}/2$ 。

### 3. 表面积 (考查相对较少):

(1) 正方体:  $6*a^2$ 。

(2) 长方体:  $2*(ab+bc+ac)$ 。特殊考法: 无盖长方体 (游泳池), 刷防水漆, 地面与侧面需要刷, 但是盖子不会刷, 相当于少一个长\*宽的面。

(3) 圆柱体:  $2\pi * R^2 + 2\pi * R*h$ 。圆柱体表面积分为上下两个圆的面积 ( $2*\pi r^2$ ) 和展开的侧面积 ( $2\pi * R*h$ )。

(4) 球体 (考得最少):  $4\pi * R^2$ 。记不住的可以不记。

### 4. 体积:

(1) 正方体:  $a^3$ 。

(2) 长方体:  $a*b*c$ 。

(3) 柱体:  $S*h$ 。不强调圆柱体, 所有的柱体都可以这样计算。

(4) 锥体:  $1/3*S*h$ 。不强调圆锥体, 所有的椎体都是这样计算。

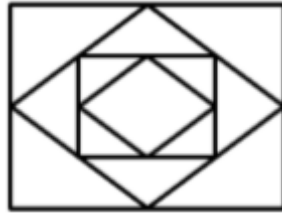
(5) 球体:  $4/3*\pi * R^3$ 。

5. 公式推导过程能够看懂再好不过, 考场上没有时间推导。

## 二、结论类

【知识点】结论类: 见招拆招, 逐步积累, 遇到结论时可以直接运用。

例 1（2016 北京）小王近期正在装修新房，他计划将长 8 米、宽 6 米的客厅按下图所示分别在各边中点连线形成的四边形内铺设不同花色的瓷砖，则需要为最里侧的四边形铺设多少平方米的瓷砖？（ ）



- A. 3                                      B. 6  
C. 12                                      D. 24

【解析】例 1. 经典题型：三角形、四边形不断连接各边中点，问最中间的面积是多少。本题问的是最里侧的四边形铺设多少平方米，与瓷砖没有关系，只需要求出面积即可。已知最外层面积 $=8 \times 6 = 48$  平方米。这种类型题都是有固定结论：各边中点连线，如果是三角形，面积 $\times 1/4$ ；如果是四边形，面积 $\times 1/2$ 。不会记反，比如长方形中点连线得到中间的图形，很明显与长方形差的不是很远，所以是面积 $\times 1/2$ 。因此本题答案就是不断减半，最外侧面积为  $6 \times 8 = 48$  平方米，总共连了 3 次中点，则  $48 \times (1/2)^3 = 48/8 = 6$  平方米，对应 B 项。【选 B】

【注意】1. 固定结论：各边中点连线，如果是三角形，面积 $\times 1/4$ ；如果是四边形，面积 $\times 1/2$ 。

2. 这种类型题目不需要证明，中学考查过。特定结论有固定技巧，考场直接使用。

例 2（2016 吉林）用直线切割一个有限平面，后一条直线与此前每条直线都要产生新的交点，第 1 条直线将平面分成 2 块，第 2 条直线将平面分成 4 块，第 3 条直线将平面分成 7 块，按此规律将平面分为 46 块需要（ ）。

- A. 7 条直线                                      B. 8 条直线  
C. 9 条直线                                      D. 10 条直线

【解析】例 2. 根据题意，第 1 条线将平面分成 2 块，第 2 条线将平面分成 4 块，第 3 条线将平面分成 7 块，已知“后一条直线与此前每条直线都要产生新的交点”，因此三条线不能交叉在同一点。问的是将平面分成 46 块需要多少条直

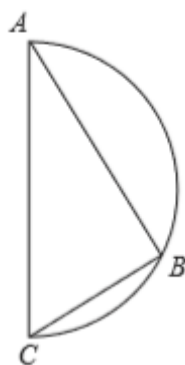


线。如果划线比较费时，考试时如果已知第 1、2、3……（ ）个，都属于枚举归纳，“按此规律”不是真正的去找规律，归纳找规律。比如已知 1、3、5、7，可以推出后面的数是 9；或者 1、2、4、8，可以推出后面的数是 16。根据题目已知 2、4、7 这三个数无法归纳出规律，数太少，不是等差，也不是等比，再找第 4 条线将平面分成 11 块，2、4、7、11，发现相邻两个数之间分别相差 2、3、4，相差的数是等差数列，则第 4 条直线与第 5 条相差 5 块，第 5 条直线将平面分成 16 块，按照规律依次得到：22、29、37、46，再将分成的块数与第几条线对应，由于 11 块对应第 4 条，则 16 块对应第 5 条，22 块对应第 6 条，29 块对应第 7 条，37 块对应第 8 条，46 块对应第 9 条。对应 C 项。【选 C】

【注意】1. 只要看到“第 1、2、3……”，利用枚举归纳，不需要深入研究，相当于找数字规律的题目。

2. 2017 年联考，考查过同样类型题目，给出 10 条线，每条线上标记白圆圈以及黑圆圈，不断地往下延伸，最后会像颗圣诞树，问第 10 条线上有多少白圆圈？解法就是看第 1、2、3 条线上分别有几个白圆圈，找规律，可能是等差、等比或者求和。一定是简单的加减算法。因此类似题目考虑枚举归纳法。

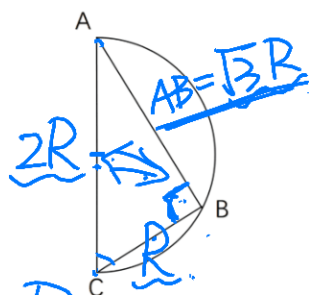
例 3（2017 联考）如图所示，甲和乙在面积为  $54\pi$  平方米的半圆形游泳池内游泳，他们分别从位置 A 和 B 同时出发，沿直线同时游到位置 C。若甲的速度为乙的 2 倍，则原来甲、乙两人相距（ ）。



- |         |         |
|---------|---------|
| A. 92 米 | B. 15 米 |
| C. 93 米 | D. 18 米 |

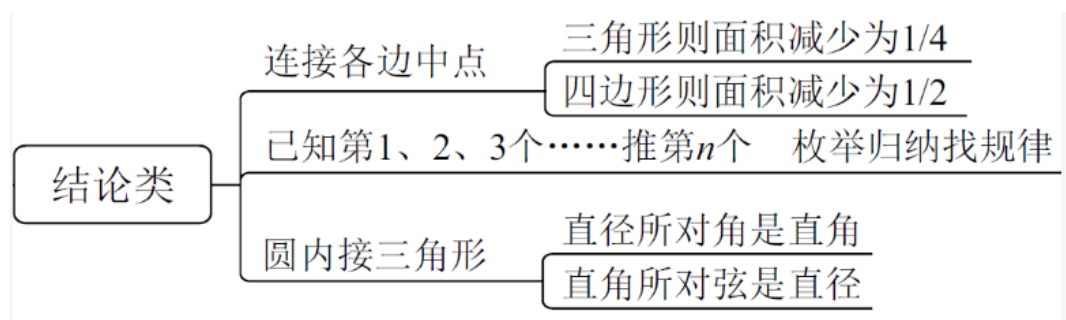
【解析】例 3. 根据题意，甲由 A 到 C，乙由 B 到 C，已知甲和乙分别从 A 和 B 同时出发，沿直线同时游到 C，说明时间相同，甲的速度是乙的 2 倍，则  $V_{甲}/$

$V_{\text{乙}} = S_{\text{甲}} / S_{\text{乙}} = 2/1$ ,  $AC = S_{\text{甲}}$ ,  $BC = S_{\text{乙}}$ , 因此  $AC = 2 \cdot BC$ 。已知半圆的面积为  $54\pi$ , 半圆面积  $= (1/2) \cdot \pi \cdot R^2 = 54\pi$ ,  $R = \sqrt{108}$ , 先不需要计算。求的是原来甲、乙相距多少米? 相当于求  $AB$  的长度。在  $\triangle ABC$  中,  $AC$  是直径,  $AC = 2 \cdot BC = 2 \cdot R = 2\sqrt{108}$ , 对于直角三角形才能使用勾股定理, 但没有告诉  $\angle ABC$  是直角, 但是一定是直角三角形, 原因有两点: (1)  $\angle ABC$  对着直径  $AC$ , 圆内接三角形直径所对一定是直角。(2) 几乎没有反例, 可以测量  $\angle ABC = 90^\circ$ , 本题不是填空题或者解答题, 不需要过程, 出题人一定是根据规则画图, 当做  $90^\circ$  用, 行测中考查“如图所示”对应的图一般是精确画出的。  $AC = 2R$ ,  $BC = R$ , 则  $AB = \sqrt{3} \cdot R = \sqrt{3} \cdot \sqrt{108}$ , 有些同学会发现结果出现  $\sqrt{3}$ , 选 C 项, 不正确, 因为  $\sqrt{108}$  不是整数, 所以 C 项不正确。  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{108} = \sqrt{324}$ , 观察选项, B 项:  $15^2$  尾数是 5, D 项:  $18^2 = 324$ , 对应 D 项。【选 D】



【注意】本题是结论类题型, 已知  $AC$  是半圆的直径可以推出  $\angle ABC$ , 直角所对角是直径, 直径所对角是直角, 可以互推。

【答案汇总】1-3: BCD



【小结】结论类:

1. 连接各边中点:

(1) 三角形则面积减少为  $1/4$ 。

(2) 四边形则面积减少为  $1/2$ 。

2. 已知第 1、2、3 个……推第  $n$  个：枚举归纳找规律（等差、等比、求和，规律免证，直接使用）

3. 圆内接三角形：

(1) 直径所对角是直角。

(2) 直角所对弦是直径。

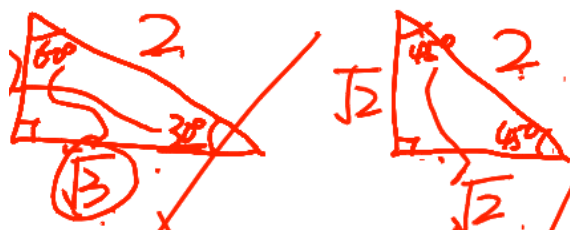
### 三、技巧类

【知识点】技巧类：

1. 直角三角形：

(1) 勾股定理：已知直角边  $a$ 、 $b$ ，斜边为  $c$ ，则  $a^2 + b^2 = c^2$ 。勾股数：刚好满足  $a^2 + b^2 = c^2$ ，且是整数。常考的有：3、4、5；5、12、13。也可以将勾股数放大/缩小同样的倍数，仍然符合勾股定理。

(2) 三角函数：常考  $30^\circ$ 、 $60^\circ$ ：斜边为 2 时， $30^\circ$  对应边长为 1，另一条边为  $\sqrt{3}$ ； $45^\circ$ 、 $45^\circ$ ：斜边为 2 时，直角边为  $\sqrt{2}$ 。考试的时候，可以利用三角板。



2. 相似三角形：

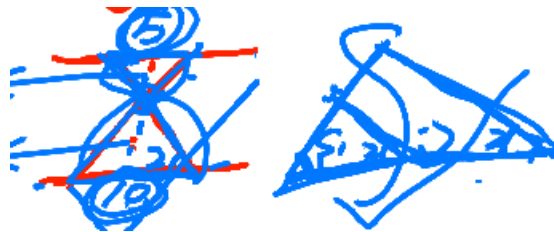
(1) 判定：两个角对应相等，考试一般不需要严格做，考场上最常见的考法：两条平行线中间有交叉，对应角相等，可以判定三角形相似。或者任意三角形中间平行线，则小三角形与大三角形相似。



(2) 性质（用法）：

①各个边长之比等于相似比，各组对应边/高之比=相似比。两个三角形相似，边长分别为 5 和 10，边的比例即为相似比=5/10，则各组对应边/高之比=相似比，只要找到一组边的比例即可。

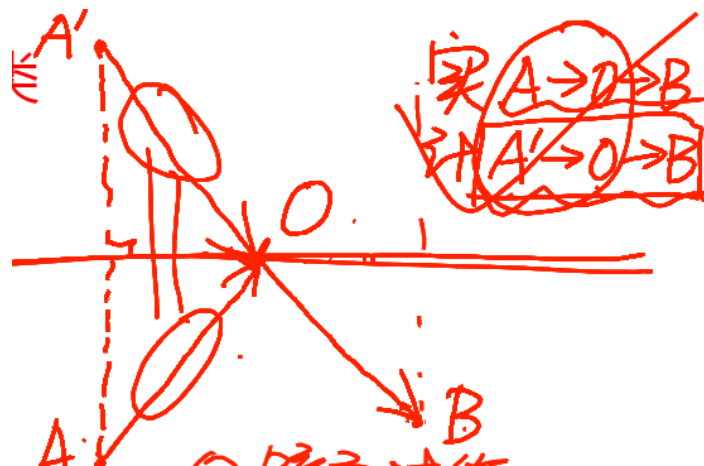
②面积比=相似比的平方。上面三角形和下面三角形的边长比为 5/10，如果上面三角形面积为 20， $1/4 = (5/10)^2$  则下面三角形面积为  $2^2 * 20 = 80$ 。



### 3. 最短路径:

(1) 从 A 点到 B 点最短就是直线，考法：从 A 点到 B 点不走直线，要求先到达一条线再到达 B 点，必须有折返点到达 B 点。将 A 点对称到 A' 点，对称点 A' 与 B 连线交于直线于 O 点，实际路径是 A→O→B，计算时 A'→O→B，计算的路程是直线，相当于最短路径。二者相等。考试中当题目已知 A 点到 B 点，要求去地面反弹下，再到达 B 点，去直线上跳一下，再到达 B。

(2) 方法：①镜面对称；②对称点与另一点连线。



例 1 (2016 联考) 老王围着边长为 50 米的正六边形的草地跑步，他从某个角点出发，跑了 500 米之后，与出发点相距有多远？ ( )

A.  $50(\sqrt{3}-1)$  米

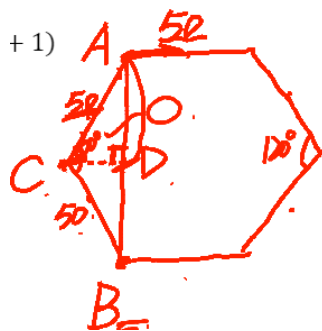
B.  $50\sqrt{3}$  米

C.  $50(\sqrt{2}-1)$

D.  $50\sqrt{2}$  米

【解析】例 1. 正六边形边长是 50 米，从某个角点出发随便找一个点 A 点，跑了 500 米，没有说方向，假设向右出发，相当于跑了 10 条边，正六边形跑 6 条边回到原点，再跑 4 条边，到达 B 点。求 AB 的长度即可。注意距离不是跑道上的距离，而是直线距离。连接 AB， $\triangle ABC$  不是直角三角形，是等腰三角形，要记住凡是考试考查等腰三角形，第一步就是作高，因为等腰三角形是三线合一：高、中线和角平分线。

方法一：作 AB 的高 CD，根据三线合一，则  $AB=2*AD$ ， $\triangle ACD$  为直角三角形，如果已知  $\angle ACD$  就可以求出 AD 的长度， $\angle ACD=1/2*\angle ACB$ 。正六边形每个角都是  $120^\circ$ ，因此  $\angle ACB=120^\circ$ 。 $\angle ACD=1/2*\angle ACB=120/2=60^\circ$ 。 $60^\circ$  所对的边是斜边的  $\sqrt{3}/2$  倍，则  $AD=50*\sqrt{3}/2=25\sqrt{3}$ ， $AB=2*AD=50\sqrt{3}$ ，对应 B 项。



方法二（猜题规律）：考场上  $120^\circ$  或  $60^\circ$  角所对的边长，通常含有  $\sqrt{3}$  的系数。这种方法正确率在 80% 以上，目前为止只有一个反例。 $60^\circ$  对应的边长含有  $\sqrt{3}/2$  的系数，而  $120^\circ=60^\circ+60^\circ$ ，相加会出现  $\sqrt{3}$  这个系数，因此选项可以排除 C、D 项。对于 A、B 项，一个边长为 50， $50(\sqrt{3}-1)<$  边长 50（大角对大边）， $\sqrt{3}-1=0.X$ ，A 项  $< 50$ ，排除 A 项。【选 B】

【注意】1. 遇到等腰三角形，高、角平分线、中线三线合一。

2. 正六边形边长  $120^\circ$ 。三角形内角和为  $180^\circ$ ，四边形内角和为  $360^\circ$ 。结论：n 边形的内角和  $= (n-2)*180^\circ$ 。正六边形  $= (6-2)*180^\circ / 6$  个角  $= 120^\circ$ 。

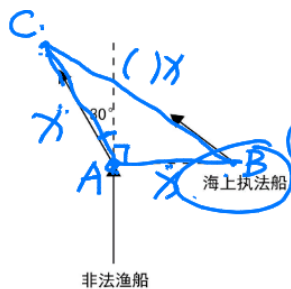
例 2（2018 国考）一艘非法渔船作业时发现其正右方有海上执法船，于是沿下图所示方向左转  $30^\circ$  后，立即以 15 节（1 节=1 海里/小时）的速度逃跑，同时执法船沿某一直线方向匀速追赶，并正好在某一点追上，已知渔船在被追上前

逃跑的距离刚好与其发现执法船时与执法船的距离相同，问执法船的速度为多少节？

- A. 20  
B. 30  
C.  $10\sqrt{3}$   
D.  $15\sqrt{3}$

【解析】例 2. 根据题意，15 节相当于速度，如图所示，前面的距离是逃跑的距离，被追上前逃跑的距离相当于 AC，发现执法船相当于 AB。根据题目要求  $AC=AB$ ，且  $\triangle ACB$  是等腰三角形。

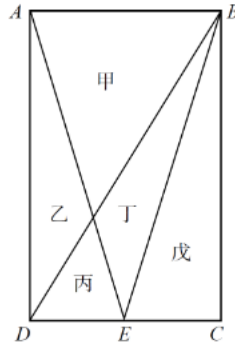
方法一：作垂线 AD 交于 BC 于 D 点，渔船是 AC 方向，执法船是 BC 方向，“同时执法船沿某一直线方向匀速追赶，并正好在某一点追上”说明两者时间一样，速度与路程成正比，则  $BC/V_{\text{执法}}=AC/V_{\text{渔船}}=BC/V_{\text{执法}}=AC/15$ ，只要求出 BC 与 AC 的比例关系即可。假设  $AC=x$ ，则  $AB=x$ ，此时是等腰三角形，求 BC 的长度。夹角  $=120^\circ$ ，对应的边应该有  $\sqrt{3}$ ， $\angle CAB=30^\circ+90^\circ=120^\circ$ 。所以  $BC=\sqrt{3}x$ ，于是  $\sqrt{3}x/V_{\text{执法}}=x/15$ ， $1 \times V_{\text{执法}}=15 \times \sqrt{3}$ ， $V_{\text{执法}}=15\sqrt{3}$ ，对应 D 项。



方法二：猜题技巧：只需要画出图，求的是执法船的路程，则执法船的速度与路程 BC 有关系，BC 对应的角度是  $120^\circ$ ，则 BC 一定含有  $\sqrt{3}$  的系数，排除 A、B 项。对于 C、D 项，题目中只有一个速度 15 节，要推出未知，而且未知数带有  $\sqrt{3}$ ，只有 D 项正确。【选 D】

例 3.（2017 国考）一块种植花卉的矩形土地如图所示，AD 边长是 AB 的 2 倍，E 是 CD 的中点，甲乙丙丁戊区域分别种植白花，红花，黄花，紫花，白花，则种植白花的面积占矩形土地面积的：

- A.  $3/4$   
B.  $2/3$   
C.  $7/12$   
D.  $1/2$



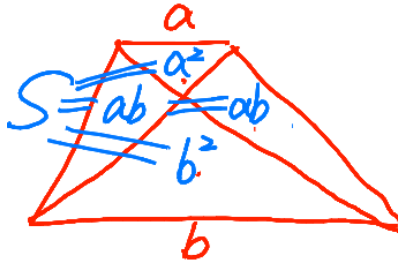
【解析】例 3. 方法一：根据题目要求，找到甲、戊面积与整个矩形的面积即可，戊比较好求，底边是长方形半个底，高度是长方形整个高，相当于  $1/4$  长方形面积。对于甲：理解成三角形，底边好找，但是高比长方形高少， $h_{\text{甲}} + h_{\text{丙}} = \text{长方形高}$ ，只需要找出甲与丙的关系即可，甲与丙是平行线之间有交叉，所以可以知道甲与丙相似，找高的关系， $h_{\text{甲}}/h_{\text{丙}} = \text{相似比}$ ，条件没有给出，已知底边比例  $AB/DE=2$ ，则  $h_{\text{甲}}/h_{\text{丙}} = AB/DE = 2/1$ ，则  $h_{\text{甲}} = 2/[(1+2) \cdot AD]$ ，AD 相当于 3 份， $h_{\text{甲}}$  相当于 2 份，计算面积即可，出题人给的是比例，没有具体数值，利用赋值，由于要平分，赋值  $AB=2$ ， $AD=4$ ，得到： $S_{\text{甲}} = 1/2 \cdot AB \cdot h_{\text{甲}} = 1/2 \cdot 2 \cdot (2/3) \cdot 4 = 8/3$ 。则  $S_{\text{戊}} = 1/2 \cdot 1 \cdot 4 = 2$ ，矩形面积  $= (S_{\text{甲}} + S_{\text{戊}}) / 8 = 7/12$ 。对应 C 项。

方法二：已知  $DE=1$ ， $AB=2$ 。根据蝴蝶定理，甲面积  $= 2^2$ ；乙面积  $= 1 \cdot 2$ ；丙面积  $= 1^2$ ；丁面积  $= 1 \cdot 2$ ，不是常规意义上的面积，是比例关系。则甲相当于  $2^2=4$  份，乙相当于  $1 \cdot 2=2$  份，丁相当于  $1 \cdot 2=2$  份，丙相当于  $1^2=1$  份。由于  $\triangle BDE$  与  $\triangle BCE$  等底同高，所以  $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BCE}$ ，戊  $= (2+1)$  份，则面积比  $( ) = (4+3) / 12 \text{ 份} = 7/12$ 。

【选 C】



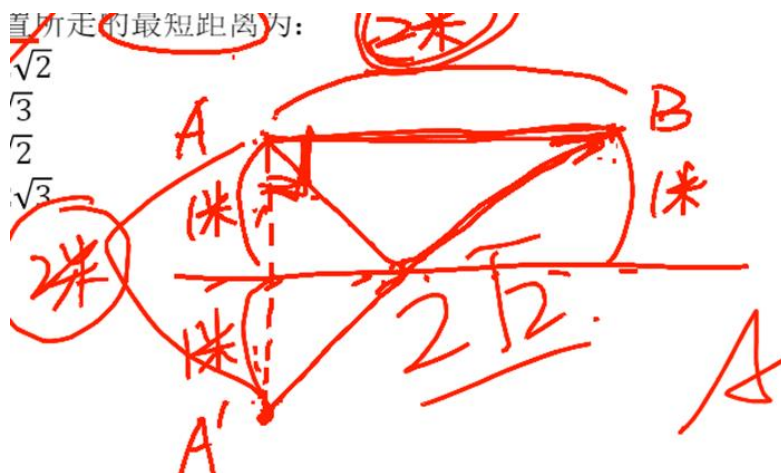
【注意】蝴蝶定理：已知梯形对角线相连，上底是  $a$ ，下底是  $b$ ，则四个三角形面积有必然关系，上面的面积是  $a^2$ ，左边面积是  $a \cdot b$ ，下面面积是  $b^2$ ，右边面积是  $a \cdot b$ 。



例 4（2017 吉林）悟空与二郎神在离地面 1 米的空中决斗，两人相距 2 米，悟空想用分身直接偷袭二郎神，为了不引起对方的警觉，分身必须在地面反弹一次再进行攻击，则分身到达二郎神的位置所走的最短距离为（ ）。

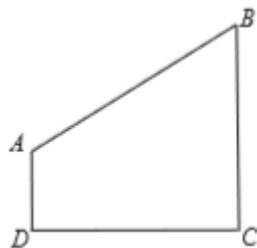
- A.  $2\sqrt{2}$ 米                      B.  $\sqrt{3}$ 米
- C.  $\sqrt{2}$ 米                        D.  $2\sqrt{3}$ 米

【解析】例 4. 根据题意画图，悟空是 A，二郎神是 B， $AB=2m$ ，A 到地面距离为 1 米，问的是在地面反弹一次再到达 B，作 A 点的对称点  $A'$ ，连接  $A'B$ ，求的就是  $A'$  到 B 的距离，显然  $A'B$  是斜线，放在直角三角形中，连接 AB，AB 为水平线， $A'A$  是竖直线， $A'A=1+1=2m$ 。根据勾股定理，斜边  $A'B=\sqrt{(2^2+2^2)}=2\sqrt{2}m$ 。对应 A 项。【选 A】



例 5（2017 江苏）某市规划建设的 4 个小区，分别位于直角梯形 ABCD 的 4 个顶点处（如图），AD=4 千米，CD=BC=12 千米。欲在 CD 上选一点 S 建幼儿园，使其与 4 个小区的直线距离之和为最小，则 S 与 C 的距离是（ ）。

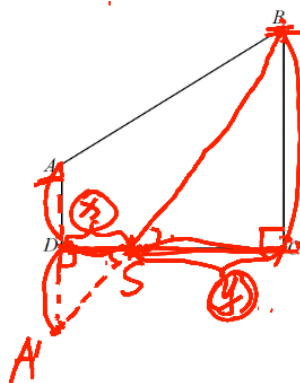




- A. 3 千米                      B. 4 千米  
C. 6 千米                      D. 9 千米

【解析】例 5. 根据题意：要求  $S$  与 4 个小区的直线距离之和为最小，即  $SA+SB+SD+SC$  最小。通常问  $A \rightarrow S \rightarrow B$  的距离最短，本题是四个点到达  $S$  点的距离最短。四个距离有两个相加是定值， $SD+SC=CD=12$  千米，所以只需要  $SA+SB$  最短即可。A 相当于悟空，B 相当于二郎神，作 A 点关于  $CD$  的对称点  $A'$ ，连接  $A'B$ ，交  $CD$  于  $S$  点，则  $A'B$  为最短路径，问的是  $S$  与  $C$  的距离，确定  $S$  的位置即可。

方法一：不知道  $SB$  的长度，无法使用勾股定理，设  $SD$  为  $x$ ， $SC$  为  $y$ ，观察  $\triangle DA'S$  与  $\triangle BCS$ ，相当于平行线之间有交叉的情况， $\angle A'DS = \angle BCS$ ， $\angle A'SD = \angle CSB$ ，所以  $\triangle DA'S \sim \triangle BCS$ 。因此  $A'D/x = BC/y$ ， $A'D = AD = 4$  千米， $4/x = 12/y$ ， $x:y = 1:3$ ，又知  $x+y=12$ ，则  $y=3 \times 3=9$  千米，对应 D 项。

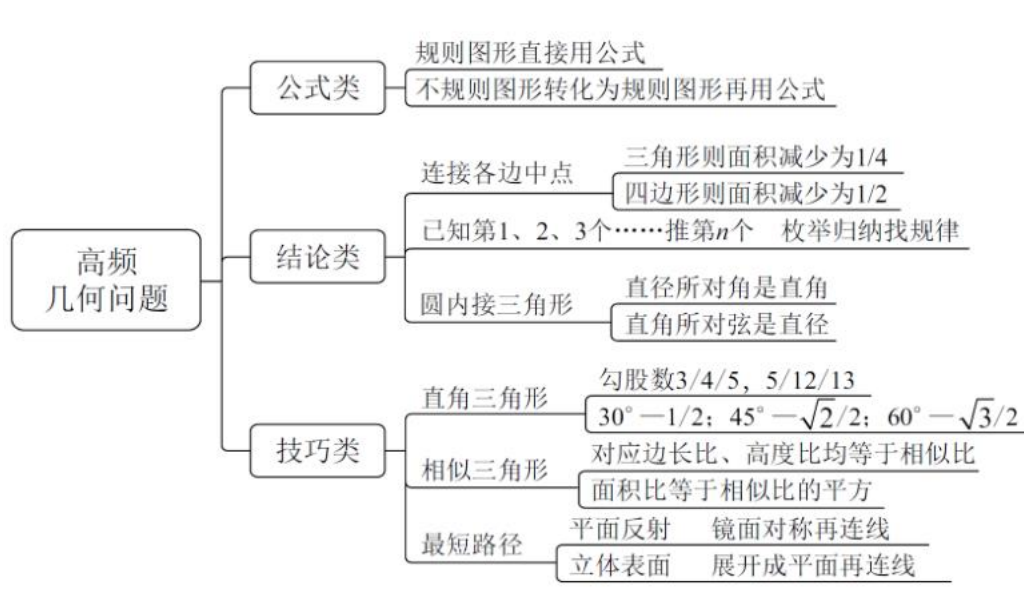


方法二：根据选项，确定到  $S$  点后，已知  $CD=12$  千米， $SC$  明显占了  $CD$  的一大半，所以  $SC > CD/2 = 12/2 = 6$ ，只有 D 项大于 6，对应 D 项。【选 D】



【注意】几何题相对来说做的比较快，要注意观察选项，比如有些选项有形状、 $\sqrt{3}$ 或者一半/小于一半，可以猜测，因为几何题在完全不会做的情况下，求长度或者度数，可以通过测量判断。

【答案汇总】1-5: BDCAD



【小结】高频几何：

1. 公式类：

- (1) 规则图形直接用公式。
- (2) 不规则图形转化为规则图形再用公式。

2. 结论类：

- (1) 连接各边中点：

①三角形则面积减少为  $1/4$ 。

②四边形则面积减少为  $1/2$ 。

(2) 已知第 1、2、3 个……推第  $n$  个：枚举归纳找规律。

(3) 圆内接三角形：

①直径所对是直角。

②直角所对弦是直径。

(4) 面积的比例：底相等则面积与高成正比。

3. 技巧类：

(1) 直角三角形：

①勾股数：3/4/5，5/12/13。

② $30^\circ$  —— $1/2$ ； $45^\circ$  —— $\sqrt{2}/2$ ； $60^\circ$  —— $\sqrt{3}/2$ 。考试不会考查  $75^\circ$ 、 $55^\circ$

等，最常见的是  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 。

(2) 相似三角形：

①对应边长比、高度比均等于相似比。

②面积比等于相似比的平方。

(3) 最短路径：

①平面反射（重点）：镜面对称再连线。

②立体表面（16 年之前考查过）：展开成平面再连线。

### 课后测验

1. (2018 陕西) 将棱长为 1 的正方体的六个面的中点相连接可以得到一个正八面体，则这个八面体的体积为 ( )。

A.  $1/6$

B.  $\sqrt{2}/6$

C.  $\sqrt{3}/6$

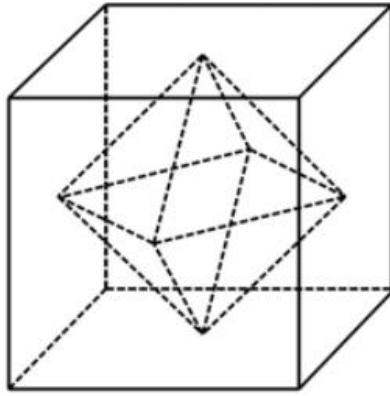
D.  $1/4$

E.  $1/3$

F.  $\sqrt{2}/3$

G.  $\sqrt{3}/3$

H.  $1/2$



【解析】1. 正确率 20%左右，中点连线是四边形，是平面，本题是六个面的中点连线，是立体，所以 D、H 项不正确。

方法一：结论： $V_{\text{八面体}} = 1/6 * a^3$ ， $a$  是八面体的对角线，所以本题对角线  $a = \text{棱长} = 1$ ， $V_{\text{八面体}} = 1/6 * a^3 = 1/6$ 。A 项正确。

方法二：八面体相当于两个三棱锥，只要求出一个三棱锥体积即可。八面体体积 = 2 \* 三棱锥体积，三棱锥的底面是各边中点连线，从上往下看，将正方形的四个中点连在一起，相当于  $S_{\text{锥体底面}} = 1/2 * S_{\text{正}} = 1/2 * 1 * 1 = 1/2$ ，锥体的高  $h = \text{半个正方形边长} = 1/2$ 。即  $A0 = 1/2$ ， $h = 1/2$ ，则  $V_{\text{棱锥}} = 1/3 * S * h = 1/3 * 1/2 * 1/2 = 1/12$ 。一个锥体体积 = 1/12，则  $V_{\text{八面体}} = 2 * 1/12 = 1/6$ 。对应 A 项。【选 A】

2. （2017 河南）某早餐店试营业主打套餐每份成本 8 元，售价 26 元。当天卖不完的主打套餐不再出售，在过去两天时间里，餐厅每天都会准备 200 份主打套餐，第一天剩余 20 份主打套餐，第二天全部卖光。问这两天该早餐店主打套餐共盈余多少元？

- A. 6680
- B. 6840
- C. 7000
- D. 7160

【解析】2. 不再出售：（1）单个利润 \* 个数（2）总价 - 成本。用第一个会忘记减去亏本容易错，优先用第二个，B 项是没有减去亏本，所以排除 B 项。总利润 = （），则（） = 总售价 - 总成本 =  $26 * (2 * 200 - 20) - 8 * 400$ ，观察选项，末位都有两个 0，去掉选项的后两位，倒数第三位不同，原式转化为  $26 * 380 - 8 * 400$ ， $(8 - 0) = 8$ ，即第三位是 8，对应 A 项。【选 A】

【答案汇总】经济利润：1-5：CBCCB；6B

高频几何问题：公式类：1-4：AABD；结论类：1-4：BCD；技巧类：1-5：BDCAD

【小结】1. 预习范围：第八节，容斥原理（重点掌握，18 年考查最多，易错点）；第九节，排列组合与概率（18 年容易考查）。

2. 预习要求：原则上要做完每个章节至少 50% 的题目，实在不会做的话，对每节前几题要有充分的思考，熟悉题型和题意。

3.  $1.01^{100}=2.70$ ； $0.99^{100}=0.37$ 。

4. 每天进步一点，就可以有很大进步，坚持就会达到很好。

遇见不一样的自己

Be your better self