

# 方法精讲-数量 1

主讲教师：唐宋

授课时间：2019.09.18



粉笔公考·官方微信

## 方法精讲-数量 1（笔记）

### 第一章 数学运算

学习任务：

1. 授课内容：代入排除法、数字特性法、方程法。
2. 时长：3 小时。
3. 对应讲义：152 页～158 页。
4. 重点内容：
  - （1）代入排除法的适用范围。
  - （2）奇偶特性的条件特征与使用方法。
  - （3）倍数特性的基础知识、判定法则，以及余数型和比例型的解题思路。
  - （4）设未知数的技巧，不定方程的三种特性分析方法，赋零法的运用前提和运用方法。

【注意】数学运算：

1. 三大方法（今晚讲 3 小时）：代入排除法、数字特性法、方程法。
2. 六大题型（后面三天讲，每天 2.5 小时）：工程问题、行程问题、经济利润、高频几何问题、容斥原理、排列组合与概率。
3. 学霸养成：周期、最值、线段法、数字推理（大部分省份不考，吉林可能考 2 题）等。

#### 第一节 代入排除法

【知识点】代入排除法（与常规做题思维相比切入点不同，常规思维是从题干入手，而代入排除是利用选项做，把选项代入条件解题）：

1. 什么时候用？

（1）特定题型：年龄（谁是谁年龄的多少倍、谁与谁年龄相差多少岁）、余数（除几余几、拿走一半东西再拿走 2 个、取完之后多一点或少一点）、不定方

程（如  $x+2y=10$ ，2 个未知数 1 个方程或 3 个未知数 2 个方程）、多位数（千位、百位、个位），前 3 种题型考得比较多，多位数问题考得比较少。

（2）选项信息充分：选项为一组数（问法：分别/各，如 A. 20, 30，问甲乙分别为多少）；选项可以转化为一组数（如 A. 甲=20，条件已知甲：乙=2：3，代入 A 项，能推出乙=30）。

（3）其他情况：条件特复杂（如题干超过 4 行或字数超过 100 字，要么放弃不做，行测做不完很正常，要么代入排除）；排除后只剩两项（如答案为奇数或偶数或某个数的倍数，可排除不符合选项，再剩二代一，正确则选，错误则选另一个）。

2. 怎么用？能排除的优先排除（如答案为奇数，先排除偶数选项。第二节数字特性应用得比较多，有的居中代入，有的从最大或最小的开始代），排除不了再进行代入。

例 1（2018 江西）一家三口，妈妈比儿子大 26 岁，爸爸比儿子大 33 岁。1995 年，一家三口的年龄之和为 62。那么，2018 年儿子、妈妈和爸爸的年龄分别是（ ）。

A. 23, 51, 57

B. 24, 50, 57

C. 25, 51, 57

D. 26, 52, 58

【解析】例 1. 年龄问题，有三人，出现“分别”，答案为一组数，考虑代入排除。

方法一：题干有年龄差，年龄差不变，已知妈妈比儿子大 26 岁，两人永远相差 26 岁， $51-23=28$  岁，排除 A 项；B、C、D 项均相差 26 岁，保留。已知爸爸比儿子大 33 岁，则： $57-24=33$  岁，保留 B 项； $57-25=32$  岁，排除 C 项； $58-26=32$  岁，排除 D 项。

方法二：已知妈妈比儿子大 26 岁，爸爸比儿子大 33 岁，推出爸爸-妈妈=33-26=7 岁，只有 B 项满足。【选 B】

【注意】不是一个选项把所有条件验证一遍，而是看一个简单的条件是否把四个选项都验证完。

例 2（2018 浙江）某电商网站推出**免息**分期购物活动，购买某件商品的消费者第一个月只用支付总金额的一半加 10 元，第二个月支付剩余金额的一半加 20 元，第三个月支付剩余金额的一半加 30 元，第四个月付清剩余未支付的 10 元。问这件商品的价格为多少元？（ ）

- A. 400  
C. 420  
B. 410  
D. 460

【解析】例 2. 问商品价格，整个过程经历了 4 个月，列方程做很复杂，属于题干复杂型，或每次都是剩余+零头，判定用代入排除法解题。

方法一：代入 A 项， $400 \rightarrow (-210) 190 \rightarrow (-115) 75 \rightarrow (-37.5-30)$  剩余整数为 10 块，75 的一半不可能为整数，排除；代入 B 项： $410 \rightarrow (-205-10) 195 \rightarrow (-\text{小数}-20)$  小数，排除；代入 C 项： $420 \rightarrow (-210-10) 200 \rightarrow (-100-20) 80 \rightarrow (-40-30) 10$ ，满足条件，当选。

方法二：考虑居中代入，先代 B、C 项，最多代 2 次，正确率很高。代入 B 项： $410 \rightarrow (-205-10) 195 \rightarrow (-97.5-20) 77.5 \rightarrow (-39^{+}-30) 8.5$ ，说明 B 项代小了，排除 A 项，再剩二代一即可。【选 C】

**【注意】** 1. 本题为热门考题，近几年考这种题型的概率越来越高。

2. 走流程的题，适合居中代入，正确率很高，验证最终结果即可。若代入 C 项最后剩 10 元，当选；若 C 项剩 12 块多，说明 C 项代大了，排除 D 项；若代入 C 项剩余 9 块多，说明代小了，排除 A、B 项。

例 3（2017 广东）在公司年会表演中，有甲、乙、丙、丁四个部门的员工参演。已知甲、乙两部门共有 16 名员工参演，乙、丙两部门共有 20 名员工参演，丙、丁两部门共有 34 名员工参演。且各部门参演人数从少到多的顺序为：甲<乙<丙<丁。由此可知，丁部门有多少人参演？（ ）

- A. 16  
C. 23  
B. 20  
D. 25

【解析】例 3. 方法一：已知两两之和，若已知丁，则推出甲、乙、丙，选项信息充分，考虑代入排除。再看能否先排除再代，丙+丁=34，丁偏大，则丁 $>34/2=17$ （大的大于平均值，小的小于平均值），排除 A 项。代入 B 项：丁=20，

已知丙+丁=34，乙+丙=20，甲+乙=16，则丙=14，乙=6，甲=10，乙<甲，排除；  
代入 C 项：丁=23，则丙=11，乙=9，甲=7，满足甲<乙<丙<丁，当选。

方法二：从最大开始代，已知丁最大，求的是丁，代入 D 项，丁=25，则丙=9，乙=11，丙<乙，排除；再代入 C 项验证，发现满足条件。【选 C】

【注意】求的是最大的或某数最多是多少，考虑从大往小代。

【答案汇总】1-3: BCC



【小结】代入排除法：

#### 1. 范围：

(1) 典型题：多位数、余数（如例 2）、年龄（如例 1）、不定方程（后面会讲）。

(2) 看选项：选项为一组数（如例 1）、可转化为一组数（如例 3）。

(3) 超复杂（如例 2）：题干长、主体多、关系乱。

(4) 剩两项：只剩两项时，代入一项即得答案。

#### 2. 方法：

(1) 优先排除（节省时间）：尾数、奇偶、倍数。

(2) 直接代入：最值（问最大，从最大开始代）、好算（优先代整十整百的数，如 400 和 470，代 400；470 和 469，代 470）。

## 第二节 数字特性法

【注意】本节为第一节服务，用于排除选项。

## 一、奇偶特性

【知识点】奇偶特性：

### 1. 加减法：

(1) 奇数+奇数=偶数；奇数-奇数=偶数；

偶数+偶数=偶数；偶数-偶数=偶数；

奇数+偶数=奇数；奇数-偶数=奇数；

偶数+奇数=奇数；偶数-奇数=奇数。

(2) 结论（每一行左右边奇偶性相同）： $a+b$ （和）与  $a-b$ （差）的奇偶性相同，即和差同性。如已知和为奇数，则差一定为奇数，可排除偶数选项，反之亦然。

(3) 引例：共 50 题，答对得 3 分，答错倒扣 1 分，共得 82 分，问答对的题和答错的题相差多少道？

A. 16

B. 17

C. 31

D. 33

【解析】引例. 常规思路是设未知数求解，本题可利用和差同性求解。已知对+错=50=偶数，则对-错=偶数，排除 B、C、D 项。【选 A】

(4) 拓展：某个年级有 4 个班，甲、丙班人数和与乙、丁班人数和差 1 人，问全年级共多少人？

答：差为奇数，则和为奇数，排除偶数选项，再代入验证剩余选项。

### 2. 乘法（考试应用得更广）：

(1) 奇数\*奇数=奇数；偶数\*偶数=偶数；奇数\*偶数=偶数；偶数\*奇数=偶数。

(2) 结论：在乘法中，一偶则偶，全奇为奇（偶数像病毒，只要有一个为偶数，则乘积为偶数）。

(3) ①引例 1：甲是乙的 2 倍，乙是丙的 3 倍，试判定甲、乙、丙的奇偶性。

答：甲=2\*乙，为偶数；乙=3\*丙，丙不确定，推出乙不确定。若丙为奇数，则乙为奇数；若丙为偶数，则乙为偶数。

②结论：整数范围内，偶数倍必为偶，奇数倍不确定。

(4) ①引例 2 (国考)：已知  $5x+6y=76$  ( $x$ 、 $y$  是质数)，求  $x$ 、 $y$ 。

答：质数为素数，是孤独的数，为 2、3、5、7、11……，因子只有 1 和自己，如 5 只能被 1 和 5 整除，11 只能被 1 和 11 整除。注意 1 不是质数，2 是唯一的偶质数，其余全是奇数。

方法一：5x 奇偶性不确定，6y 和 76 为偶数，偶数+偶数=偶数，推出 5x 为偶数，5 为奇数，则 x 为偶数，又因为 x 为质数， $x=2$ ，代入得： $y=11$ 。

方法二：逢质必 2，猜  $x=2$  或  $y=2$ 。代入验证得： $x=2$ ， $y=11$ 。

②结论：题目出现偶数倍，如谁是谁的 2 倍/4 倍，或出现  $2x$ 、 $4y$ 、 $6z$  等未知数带偶数的，均是考查偶数性质。

例 1 (2017 辽宁) 母亲现在的年龄个位数跟十位数对调再减 10 岁就是儿子的年龄，再过 3 年母亲的年龄就是儿子年龄的 2 倍，则母亲现在的年龄是( )。

A. 53

B. 52

C. 43

D. 42

【解析】例 1. 方法一：年龄问题，出现“个位和十位”，多位数问题，年龄+多位数，考虑代入排除。代入 A 项，验证正确。

方法二：已知再过 3 年母亲的年龄就是儿子年龄的 2 倍，则母亲+3=(儿子+3)\*2=偶数，母亲=偶数-3=奇数，排除 B、D 项。代入 A 项，母亲 53 岁，对调后是 35 岁，儿子=35-10=25 岁， $53+3=56=(25+3)*2=28*2$ ，满足条件，当选。

【选 A】

例 2 (2016 国考) 某出版社新招了 10 名英文、法文和日文方向的外文编辑，其中既会英文又会日文的小李是唯一掌握一种以上外语的人。在这 10 人中，会法文的比会英文的多 4 人，是会日文人数的两倍。问只会英文的有几人？( )

A. 2

B. 0

C. 3

D. 1

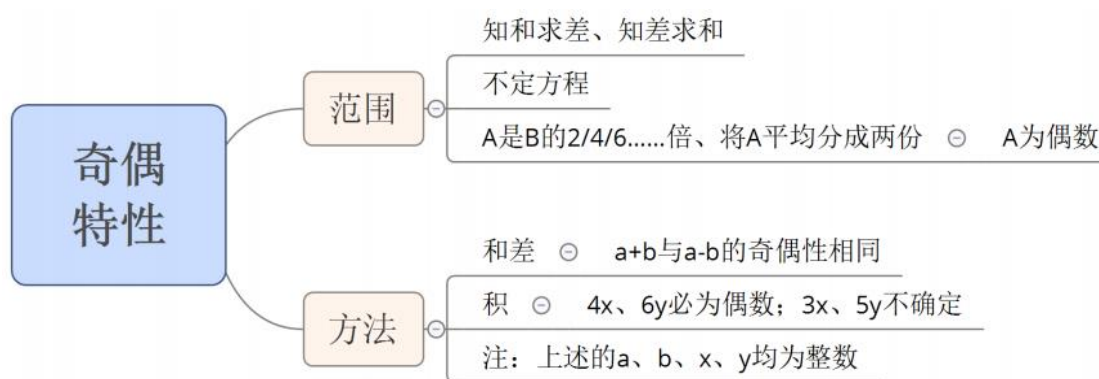
【解析】例 2. 本题可根据容斥原理做，也可根据奇偶特性做。会法文=会英文+4=会日文\*2=偶数，会英文=偶数-4=偶数，只会英文=会英文-也会其他(小李)

=偶数-1=奇数，排除 A、B 项。代入 C 项：只会英文=3 人，会英文=3+小李=4 人，会法文=4+4=8 人，会日文=8/2=4 人，4+8+4=16 人>10 人，排除。【选 D】

【注意】1. 本题问的是只会英文的人数，不是会英文的人数。

2. 会英文+会法文+会日文=11 人。

【答案汇总】1-2: AD



【小结】奇偶特性：

1. 范围：

(1) 知和求差、知差求和，考得较少，对应引例（山东、黑龙江的题目）。

(2) 不定方程（如  $ax+by=某数$ ），讲了国考的经典题目， $5x+6y=76$ 。

(3) A 是 B 的 2/4/6……（偶数）倍（对应例 1、例 2，是热门考法）、将 A 平均分成两份/偶数份（如将月饼平均分为相等的两份，只有偶数才能分为两份，考得较少）；A 为偶数。

(4) 不定方程、偶数倍考得最多。

2. 方法：

(1) 和差：(a+b) 与 (a-b) 的奇偶性相同。

(2) 积：4x、6y 必为偶数；3x、5y 不确定。

(3) 注：上述的 a、b、x、y 均为整数。

## 二、倍数特性

【知识点】倍数特性：

1. 整除基础知识：若  $A=B \times C$ （B、C 均为整数），则：



(1) A 能被 B 或 C 整除。乘积能被两个乘数整除。

(2) B 和 C 均是 A 的约数。国考中偶尔涉及，省考中极少考到。

2. 2014 年下半年联考：工程问题，甲、乙两个工程队做一项工程，甲每天做的零件比乙少，若甲、乙合作，需要 18 天完成这项工程，问工程的总量是多少个零件？

答：总量=（甲+乙）\*18 天， $A=B*C$ ，已知 B、C 中的一个，答案便是其倍数，说明总量是 18 的倍数，选项依次为 240、270、250、300， $18=2*9$ ，各位数之和能被 9 整除的数能被 9 整除，只有 B 项满足。

3. 求总价钱、总工程量、总路程，只要有俩个数相乘，知道其中一个，便可以考虑倍数特性，2014 年~2016 年考得较少，近两年又多了起来。

例 1（2018 吉林）一位女士为了寻找曾经帮助她的司机，向新闻媒体提供了她记得的车牌信息。女士看到的车牌号为“吉 AC\*\*\*\*”，最后一位是字母，其他三位全是奇数，且数字逐渐变大，那么符合要求的车牌有（ ）。

- A. 380 个
- B. 260 个
- C. 180 个
- D. 460 个

【解析】例 1. 车牌的后四位未知，最后一位是字母，其他三位全是奇数，题目对三个数字的要求很多，最后一位的字母有 26 种可能，不管前面如何，与字母均无关，最后都要乘以 26，结果为 26\*数的选法，即 26 的倍数，只有 B 项满足。【选 B】

【注意】看似考排列组合，实际上只要发现最后的字母有 26 种情况，便可以通过 26 的倍数锁定答案。AC135 或 AC137，若数字的排法有 n 种，字母有 26 种，数字的排法有很多类，字母仅一类，“先数字，再字母”，是乘法关系，所求为 26n，答案是 26 的倍数。

例 2（2017 江西）某公司研发出了一款新产品，当每件新产品的售价为 3000 元时，恰好能售出 15 万件。若新产品的售价每增加 200 元时，就要少售出 1 万件。如果该公司仅售出 12 万件新产品，那么该公司新产品的销售总额为（ ）。

- A. 4.72 亿元
- B. 4.46 亿元

C. 4.64 亿元

D. 4.32 亿元

【解析】例 2. 方法一：总价格=3000 元\*15 万件，常规思路很简单，无需排列组合的知识，本来是 3000 元，卖 15 万件，单价每增长 200 元，便少卖 1 万件，现在卖 12 万件，少卖 3 个 1 万件，存在对应关系，单价增加 3 个 200 元，单价为 3600 元，销售总额=3600\*12 万=432，仅 D 项满足，单位只改变小数点的位置，不改变数字，不用看。

方法二：问总额，与总工程量类似，18 天完成工程，工程量应是 18 的倍数，答案=12 万\*单价，卖 12 万件新产品的销售总额应是 12 的倍数，看到 18、12，因式分解为两个数相乘， $18=2*9$ ，2、9 的公倍数为 18， $12=2*6$ ，18 同时是 2、6 的倍数，但并非是 12 的倍数，分解出的 2 个数之间不能有倍数关系，故而 12 只能分解为  $3*4$ ，12 的倍数能够同时被 3、4 整除，若遇到 36、45，无法直接判断整除，则分解成 2 个数，看是否能够整除，分解出的两个数必须没有约数，注意不考虑约数 1。3 的整除看各位数字之和，四个选项的各位数字和依次是 13、14、14、9，仅 D 项能被 3 整除，当选。【选 D】

【注意】1. 3/9 的倍数，只看各位数字之和，遇到小数也成立，4.32 亿元=43200 万元，实际上依然是整数。

2. 一个数是 12 的倍数，12 不好判断，将 12 分解为 2 个互相之间无法约分的 3、4，即 3、4 之间无约数，是互质的，即是 3 和 4 的倍数； $18=2*9$ ，不能分解为  $3*6$ （3、6 之间有约数，不互质）。

3. 若答案是 36 的倍数，即答案能被 36 整除， $36=4*9$ ，同时能被 4、9 整除；45 不能分解为  $3*15$ （15、3 有约数），分解为  $5*9$ 。分出来的两个数一定要互质，确保两个乘数的最小公倍数是两者的乘积，保证倍数统一。

【知识点】余数型：

1. 若答案= $ax \pm b$ ，则答案 $\mp b$  能被 a 整除（a、x 均为整数）。

2. 例如：中秋节发月饼，每人发 10 个月饼，发完之后剩 8 个月饼，剩余 8 个月饼，说明月饼数= $10*人数+8$ ，月饼数-8= $10*人数$ ，因此（月饼数-8）能被 10 整除。若将“剩 8 个”改为“缺 8 个”，此时月饼数= $10*人数-8$ ，月饼数+8= $10*人数$ 。

3. 口诀：多退少补，“剩 8 个”是多 8 个，需要退掉剩下的 8 个，“缺 8 个”是少的，需要补上 8 个。类似资料中的高减低加。

例 3（2016 深圳）两箱同样多的蛋黄派分别分发给两队志愿者做早餐，分给甲队每人 6 块缺 8 块，分给乙队每人 7 块剩 6 块，已知甲队比乙队多 6 人，则一箱蛋黄派有（ ）块。

A. 120

B. 160

C. 180

D. 240

【解析】例 3. 第一箱分给甲队，第二箱分给乙队。“缺 8 块”是要补 8 块，“剩 6 块”是多出的，需要退掉 6 块。分析（ ）的倍数特性，“分给甲队每人 6 块缺 8 块” $\rightarrow$ （ ）+8 能被 6 整除，“分给乙队每人 7 块剩 6 块” $\rightarrow$ （ ）-6 能被 7 整除，与人数无关，是看倍数而非列方程，答案+8 能被 6 整除，四个选项+8 后依次为：128、168、188、248， $6=2\times 3$ ，找同时能被 2、3 整除的数，偶数均是 2 的倍数，一般优先看 3、9，四个选项+8 后各位数字和依次为：11、15、17、14，仅 B 项满足要求，当选。【选 B】

【注意】1. 通过第一句话做出了答案，便可以不看第二句话，且先看第二句话仅能排除 2 个答案，两句话理论上都能用，但并非均能得到唯一答案。

2. 出现 6、7 的倍数，优先看与 3、9 相关的 6 的倍数，验证更快，7 的倍数没有较快的验证方法。

3. 问的是一箱蛋黄派，若问两箱，答案可能会翻倍为 240、320、360、480，需要将选项除以 2 后再用之前的方法。

例 4（2017 联考）某地举办铁人三项比赛，全程为 51.5 千米，游泳、自行车、长跑的路程之比为 3：80：20。小陈在这三个项目花费的时间之比为 3：8：4，比赛中他长跑的平均速度是 15 千米/小时，且两次换项共耗时 4 分钟，那么他完成比赛共耗时多少？（ ）

A. 2 小时 14 分

B. 2 小时 24 分

C. 2 小时 34 分

D. 2 小时 44 分

【解析】例 4. 问完成比赛共耗时多久，即求  $t_{\text{总}}$ ，只问时间，用行程问题做

比较复杂，从问题出发， $t_{\text{总}}$  包含两个时间，一个是项目的时间，一个是换项的时间，前面的 3、8、4 并非具体的分钟数，设项目花费的时间分别为  $3x$ 、 $8x$ 、 $4x$ ， $t_{\text{总}}=3x+8x+4x+4=15x+4$ ，时间不一定是整数，分钟数虽然有可能是小数，为了让倍数特性使用得更广泛，默认分钟数是整数， $t_{\text{总}}-4=15x$ ，将选项转化为分钟，A. 134 分钟、B. 144 分钟、C. 154 分钟、D. 164 分钟，C 项 $-4=150$ ，是 15 的 10 倍，只有 C 项是 15 的倍数，当选。【选 C】

【注意】倍数特性中，当未知数  $x$  一定为整数时，必然正确，直接使用，若  $x$  是零件的个数（5 个、10 个）、人数、车的台数，不能有半个零件、半个人、半台车，可以直接用；若  $x$  有可能是整数但不一定是整数，本题中（ ） $-4=15x$ ，（ ） $-4$  很可能是 15 的倍数，只有 C 项满足，可以先圈出一个答案，正确率在 80% 以上，若有时间继续做题，则可以代入 C 项验证，或直接选。

【知识点】比例型：

1. 前面讲了两种，此处讲解第三种。

（1）基础型：（ ） $=18x$ 。

（2）余数型：（ ） $=15x+4$ ；（ ） $=6x-8$ ，反过来看。

（3）（ ）/已知数 $=?/?$ ，要求的答案与其他数有比例关系。

2.  $A/B=m/n$ （ $m$ 、 $n$  互质）。 $A$ 、 $B$  代表两个具体量，如零件个数、时间等， $m$ 、 $n$  代表具体数值，是分数的形式，必须是最简分数，即  $m$ 、 $n$  之间无约数，是互质的，如  $3/5$  是最简形式， $6/10$  不是最简，约掉 2 变为  $3/5$ 。

（1） $A$  是  $m$  的倍数。

（2） $B$  是  $n$  的倍数。

（3） $A+B$  是  $m+n$  的倍数。

（4） $A-B$  是  $m-n$  的倍数。

3. 分子对分子，分母对分母，和对和，差对差，有四种倍数关系，考试会考其中一种，找对应的一种即可。

4. 省考 1 班，男/女 $=3/7$ ，问班级中男生人数是几的倍数？男生少，对应分子，是 3 的倍数；女生对应分母，是 7 的倍数；全班 $=$ 男 $+$ 女是 10 的倍数；女 $-$ 男是 4 的倍数。男生是 3 份，女生是 7 份，男生是 3 的倍数，女生是 7 的倍数，

男+女是 10 份，对应 10 的倍数，女-男是 4 份，对应 4 的倍数。

5. 比例的常见形式：

- (1) 男生是女生的  $\frac{3}{5}$ （分数），男/女= $\frac{3}{5}$ 。
- (2) 男生与女生之比 3: 5（比例），男/女= $\frac{3}{5}$ 。
- (3) 男生是女生的 60%（百分数）， $60\% = 60/100 = \frac{3}{5}$ 。
- (4) 男生是女生的 0.6 倍， $0.6 = 6/10 = \frac{3}{5}$ 。

例 5(2016 北京)某单位原拥有中级及以上职称的职工占职工总数的 62.5%。现又有 2 名职工评上中级职称，之后该单位拥有中级及以上职称的人数占总人数的  $\frac{7}{11}$ 。则该单位原来有多少名职称在中级以下的职工？（ ）

- A. 68
- B. 66
- C. 64
- D. 60

【解析】例 5. 单位内部有 2 人评上中级职称，总人数不变，若是从外单位调入 2 名职工，则中级职称和总人数均多 2 人，原来中级及以上占职工总数的 62.5%，现在中级及以上多 2 人，总人数不变，比例变为  $\frac{7}{11}$ ， $62.5\% = 12.5\% + 50\% = \frac{5}{8}$ ，如  $87.5\% = 100\% - 12.5\%$ ， $37.5\% = 50\% - 12.5\% = \frac{3}{8}$ ，原比例是  $\frac{5}{8}$ ，现比例是  $\frac{7}{11}$ ，问的是中级以下，条件给的均是中级及以上，需要转化，原中级及以上占  $\frac{5}{8}$ ，则原中级以下占  $\frac{3}{8} \rightarrow$  原中下/总= $\frac{3}{8}$ ，现中下/总= $\frac{4}{11}$ ，指向分子，所求为 3 的倍数，A、C 项各位数字和为 14、10，并非 3 的倍数，排除 A、C 项。

方法一：总人数不变，2 名职工评上中级职称，说明中级以下少 2 人，（原中下-2）/总不变= $\frac{4}{11}$ ，原中下-2 是 4 的倍数，B 项： $66-2=64$ ，是 4 的倍数，满足；D 项： $64-2=62$ ，并非 4 的倍数，排除。

方法二：代入 D 项，原中下/总= $\frac{3}{8}=60$  人/160 人  $\rightarrow$  分子少 2 人变为 58 人，160 不是 11 的倍数， $58/160 \neq \frac{4}{11}$ ，排除，B 项当选。

方法三：方程可以结合倍数特性，找题目中前后均未变的中间量，即总人数，前面是  $\frac{5}{8}$ ，后面是  $\frac{7}{11}$ ，总人数是分母，根据倍数特性可知总人数是 8、11 的倍数，设总人数为  $8 \times 11x = 88x$ ，则原中下= $88x \times (1-62.5\%) = 88x \times (1-\frac{5}{8}) = 33x$  人，不管  $x$  是多少，结果一定是 33 的倍数，对应 B 项。【选 B】

【注意】方法三中，若求原来中级及以上，则为  $55x$ 。找变化中的不变量分

别是多少的倍数，发现是某两个数的倍数时，可以设为这两个数的乘积再乘以  $x$ ，其他量都可以通过不变量转化出来。

例 6（2017 新疆）甲乙两个班各有 30 多名学生，甲班男女生比为 5: 6，乙班男女生比为 5: 4，问甲、乙两班男生总数比女生总数（ ）。

A. 多 1 人

B. 少 1 人

C. 多 2 人

D. 少 2 人

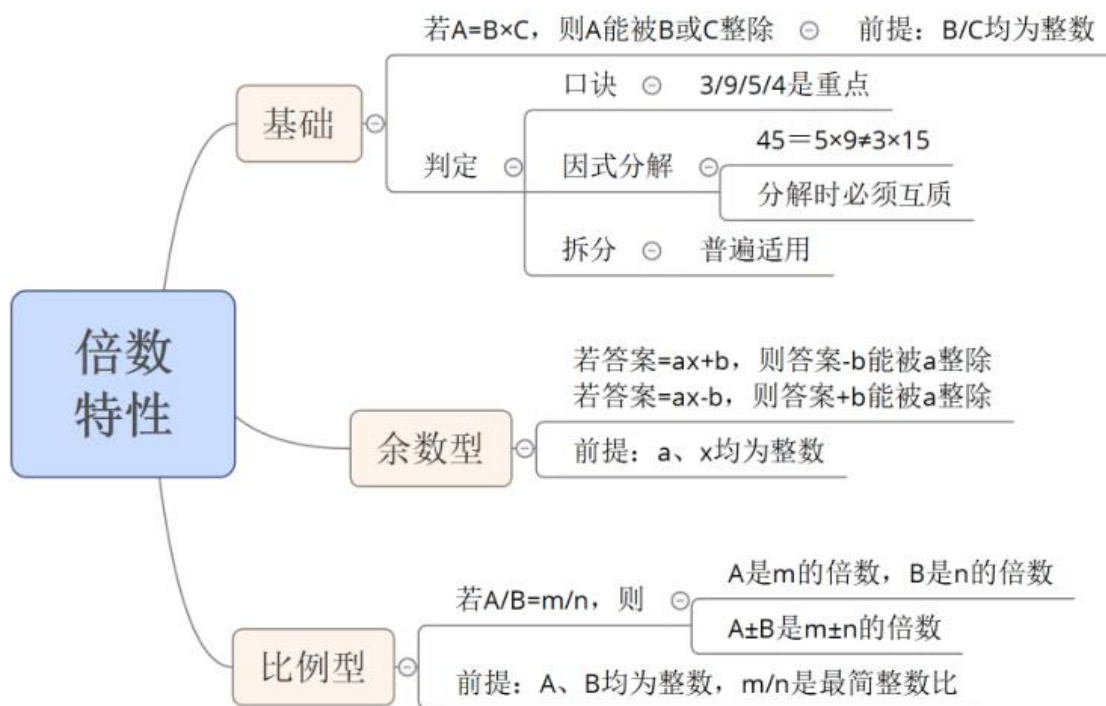
【解析】例 6. 注意是“各有”而非“共有”，“30 名学生”“40 及以上名学生”不算“30 多名学生”，30 多特指 31~39。甲男/甲女=5/6，可以看男、女生的人数和，甲班人数和是 5+6=11 的倍数，且是 30 多人，说明甲班人数和为 33 人，分开看，上面是 5 份，下面是 6 份，一共是 11 份，共 33 人，1 份为 3 人，甲男=5\*3=15 人，甲女=6\*3=18 人；同理可得，乙男/乙女=5/4，乙班人数和是 5+4=9 的倍数，且是 30 多人，9\*4=36，9\*3、9\*5 均不为 30 多，乙班人数和为 36 人，上面是 5 份，下面是 4 份，一共是 9 份，共 36 人，1 份为 4 人，乙男=20 人，乙女=16 人；男-女=35-34=1 人，说明男生比女生多 1 人。【选 A】

【注意】1. 想到关键点可以做，想不到可以放弃。

2. 命题逻辑：将总人数分为  $a$ 、 $b$  两部分，给出比例  $a:b$ 、总人数的范围，结合总人数的范围、 $(a+b)$  的倍数。男女关系、专家和非专家、科研和非科研人员均是如此，把人群分为两部分，给出范围结合倍数去做。



【答案汇总】1-5: BDBCB; 6: A



【小结】倍数特性：

1. 基础：有乘法时考虑。

(1) 若  $A=B \times C$ ，则  $A$  能被  $B$  或者  $C$  整除，前提： $B/C$  均为整数。

(2) 判定：与做题关系不大，目的是快速判定答案。

① 口诀：3/9/5/4 是重点，3/9→各位数字和，5→末位是 5 或 0；4→末两位除以 4（如 2018 年是否为闰年，闰年便是 4 的倍数，18/4 不能整除，2018 年不是闰年，闰年是奥运会的年份，比记 4 的倍数方便），其他口诀无需记。

② 因式分解：遇到无口诀的数时使用， $45=5 \times 9 \neq 3 \times 15$ ，需同时能被 5、9 整除。分解时必须互质，3、15 的最小公倍数不是 45，不能保证左右两边等价，只有两个数互质，他们公倍数才是他俩的乘积。

③ 拆分：普遍适用。如 7、13 是质数，不能分解。如四个选项依次为 602、623、628、631，答案是 7 的倍数，每个数都拆成 2 个部分，A 项： $602=630$ （7 的若干倍） $-28$ ；B 项： $623=630-7$ ；C 项： $628=630-2$ ；D 项： $631=630+1$ 。拆成的 2 个数均能被 7 整除时，该数能被 7 整除，A、B 项满足，排除 C、D 项。类似直除，四项接近时，可以使用，拆成若干倍+小数字，判断小数字即可。

④ 重点是口诀、因式分解，快速且好用。

## 2. 余数型：

(1) 若答案 $=ax+b$ ，则答案 $-b$ （退）能被  $a$  整除；若答案 $=ax-b$ ，则答案 $+b$ （补）能被  $a$  整除。多就退，少就补。如  $t=15x+4$ ， $t$  分给  $x$  个人，每人分 15 个，多了 4，需要退掉。

(2) 前提： $a$ 、 $x$  均为整数。

## 3. 比例型：

(1) 若  $A/B=m/n$ ，则：

①  $A$  是  $m$  的倍数， $B$  是  $n$  的倍数。

②  $A \pm B$  是  $m \pm n$  的倍数。

(2) 前提： $A$ 、 $B$  均为整数， $m/n$  是最简整数比。

## 第三节 方程法

**【知识点】**方程法：是从小到大最熟悉的方法，从初中开始学方程，学了至少六年。分为普通方程、不定方程、不定方程组。

1. 普通方程：未知数和方程个数一样，解出未知数的具体值。重点讲设未知数的技巧：

(1) 设小不设大（减少分数计算）。比如甲是乙的 3 倍，如果设甲为  $x$ ，乙为  $x/3$ ，容易出现分数；设乙为  $x$ ，甲为  $3x$ ，都为整数，方便计算。如甲比乙多 10，设小的为  $x$ ，即设乙为  $x$ ，甲为  $x+10$ ，因为加法不容易算错，而减法需要变号，容易失误。

(2) 设中间量（方便列式）。比如题目有好几句话，其中一个条件反复出现，即为中间量，可以优先设中间量。已知甲、乙的关系，乙、丙的关系，优先设乙（中间量）为未知数。设中间量时，常常可以结合倍数特性。比如甲：乙=3：5，乙：丙=2：3，设乙为  $10x$ ，则甲：乙：丙=6 $x$ ：10 $x$ ：15 $x$ ，总和=6 $x$ +10 $x$ +15 $x$ =31 $x$ ，这种方法在第二节的例 5 讲过。

(3) 问谁设谁（避免陷阱）：同学们常常掉入陷阱，比如问甲设乙，求出乙后就直接选乙，没有注意到问的是甲。为了避免陷阱，以后尽量问谁设谁；这种方法往往不快，是为了提高准确率。



2. 做题速度比较慢的同学优先选（1）或（2）；做题速度还可以，但容易掉坑的同学选（3）。

3. 不是三种方法都在同一题中使用，三种方法选其一即可，不用每种方法都算。

例 1（2018 广西）年终某大型企业的甲、乙、丙三个部门评选优秀员工，已知甲、乙部门优秀员工数分别占三个部门总优秀员工数的  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{2}{5}$ ，且甲部门优秀员工数比丙部门的多 12 人，问三个部门共评选出优秀员工多少人？（ ）

A. 120

B. 150

C. 160

D. 180

【解析】例 1. 如果只设一个未知数，甲部门占总人数的  $\frac{1}{3}$ ，乙部门占总人数的  $\frac{2}{5}$ ，甲部门和乙部门都和总人数有关系，求的是总人数，因此设总人数。总人数是中间量，和倍数特性结合，甲、乙部门优秀员工数分别占三个部门总优秀员工数的  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{2}{5}$ ，则设总人数为 3 和 5 的倍数  $15x$ ，则甲部门  $=15x \times (\frac{1}{3}) = 5x$ ，乙部门  $=15x \times (\frac{2}{5}) = 6x$ ，丙部门  $=15x - 5x - 6x = 4x$ ；已知甲部门比丙部门多 12 人，可列式： $5x - 4x = 12$ ，解得  $x = 12$ ，故总人数  $=15x = 15 \times 12 = 180$ ，对应 D 项。

【选 D】

【注意】本题属于和差倍比问题，是数学中考查最多的题型（甲、乙、丙合起来是总人数，甲和乙差多少，比例是多少，有时候还会结合倍数），考得是普通列方程。考试中一般占 20%~30% 的比例，每 10 道题中出现 2~3 个。

【知识点】不定方程：如  $ax + by = c$ ，两个未知数、一个方程、一个等号， $a$  和  $b$  为系数， $c$  为常数。

1. 方法：分析奇偶、倍数、尾数等数字特性，尝试代入排除。奇偶性前面已经见过，如  $5x + 6y = 76$ 。

2.  $ax + by = M$ ：

（1）奇偶： $a$ 、 $b$  恰好一奇一偶。如果两个系数都是偶数，如  $2x + 6y = XX$ ， $2x$  和  $6y$  都是偶数，无法分析；如果两个系数都是奇数，如  $1x + 3y = XX$ ，不能确定  $1x$  和  $3y$  是奇数还是偶数，无法分析。

(2) 例:  $6x+5y=37$ 。6x 是偶数, 37 是奇数, 则 5y 是奇数, 说明 y 是奇数, 则  $y=1、3、5\cdots$ ; 代入验证, 当  $y=1$  时, x 不是整数, 排除;  $y=3$  时, x 不是整数, 排除;  $y=5$  时, 解得  $x=2$ , 正确。发现验证 3 个数才验证出答案, 虽然有点慢, 但是如果不先排除, 可能会更慢。

(3) 倍数: a 或 b 与 M 有公因子。倍数特性是重中之重, 奇偶特性考查得多, 但是比较容易, 而倍数特性考得比较巧妙, 是热门考点。

(4) 例:  $6x+5y=42$ , 6x 和 42 都含有 6 这个因子, 则 5y 也含有 6 这个因子, 如  $6a+6*(b-a)=6b$  (一个式子中, 有 3 个部分, 只要有 2 个部分有同一个公因子, 那么第 3 个部分也有这个公因子); 而 5 没有 6 这个因子, y 肯定有 6 这个因子, 当  $y=6$  时,  $x=2$ 。

(5) 尾数 (重点): a 或 b 的尾数是 5 或 0, 即方程中有一个系数的尾数是 0 或者 5, 只有 5 或者 10 的倍数的尾数是唯一确定的 (如 3 的尾数有多种可能), 5 乘任何数尾数只能是 5 或 0, 0 乘任何数尾数只能是 0。

(6) 例:  $7x+5y=48$ , 48 的尾数是 8, 7x 的尾数不能确定, 5y 的尾数是 5 或者 0, 当 5y 的尾数为 5 时, 则 7x 的尾数是 3,  $7*9=63$ , 超过了 48,  $x=9$ , y 为负, 排除; 当 5y 的尾数是 0 时, 7x 的尾数为 8,  $7*4=28$ , 则  $x=4$ ,  $y=4$ 。

(7) 做题过程中不要投机取巧, 先把老师的方法学会, 之后无论做什么题都不怕。这 3 种方法中最重要的是倍数, 其次是奇偶, 最不重要的是尾数 (考得最少)。

例 2 (2017 山东) 小张的孩子出生的月份乘以 29, 出生的日期乘以 24, 所得的两个乘积加起来刚好等于 900。问孩子出生在哪一个季度? ( )

- A. 第一季度
- B. 第二季度
- C. 第三季度
- D. 第四季度

【解析】例 2. 问出生在哪一个季度, 实际上在问出生在几月份。设月份为 x, 日期为 y, 则  $29x+24y=900$ , 是一个不定方程。系数一奇一偶, 可以用奇偶特性, 但是不好用, 如果已知 x 是奇数, 有 1、3、5、7、9……, 计算很费时间, 如果 x 是偶数, 有 2、4、6、8……, 可能性太多, 奇偶性不好用。尾数法一般最后才想到, 先考虑倍数法, 找公因子, 29 和 900 没有公因子, 找 24 和 900 的公因子,

不要找小的公因子，找得越大越好，利用短除法，得出公因子为  $3 \times 2 \times 2 = 12$ 。24y、900 都含有 12 这个公因子，则  $29x$  也含有 12 这个公因子，则  $x$  是 12 的倍数，因为  $x$  是月份数，则  $x=12$ ，即第四季度。【选 D】

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 24} \\
 \underline{2} \phantom{0} \\
 0 \phantom{0} \\
 3 \overline{) 12} \\
 \underline{3} \phantom{0} \\
 0 \phantom{0} \\
 3 \overline{) 4} \\
 \underline{3} \phantom{0} \\
 1 \phantom{0} \\
 2 \overline{) 2} \\
 \underline{2} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \overline{) 900} \\
 \underline{0} \phantom{0} \\
 0 \phantom{0} \\
 3 \overline{) 450} \\
 \underline{3} \phantom{0} \\
 15 \phantom{0} \\
 3 \overline{) 150} \\
 \underline{3} \phantom{0} \\
 15 \phantom{0} \\
 3 \overline{) 75} \\
 \underline{3} \phantom{0} \\
 15 \phantom{0} \\
 3 \overline{) 5} \\
 \underline{3} \\
 2
 \end{array}$$

【知识点】不定方程组（是考试中拉开距离的关键地方）：

1. 第一类：未知数一定是整数的不定方程（组）。讲不定方程时， $n \cdot x + m \cdot y =$  常数，没有考虑  $x$  和  $y$  为负数或者小数，常规的不定方程多数是在解整数的不定方程，如未知数是人数、个数、月份数等，用消元法。

$$(1) a_1X + b_1Y + c_1Z = M,$$

$$(2) a_2X + b_2Y + c_2Z = N.$$

2. 方法：两个方程，三个未知数，先消元转化为不定方程，再按奇偶特性、倍数特性求解。

例 3（2017 江苏）小王打靶共用了 10 发子弹，全部命中，都在 10 环、8 环和 5 环上，总成绩为 75 环，则命中 10 环的子弹数是（ ）。

A. 1 发

B. 2 发

C. 3 发

D. 4 发

【解析】例 3. 已知子弹个数、成绩以及成绩的分布，设命中 10 环、8 环和 5 环的枪数分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，则  $x+y+z=10$ ①， $10x+8y+5z=75$ ②。消元，求的是命中 10 环的子弹数，即求  $x$ ，求谁尽量不消谁，看哪个未知数比较好配平就消哪个，因此消  $z$ ，① $\times 5$  与②做差得： $5x+3y=25$ 。 $5x$  和 25 有公因子 5，则  $3y$  有因子 5，说明  $y$  必须是 5 的倍数， $y=10$  时超标了，因此  $y=5$ ，解得  $x=2$ ，对应 B 项。【选 B】

【注意】算出  $5x+3y=25$  后，代入排除法也可以做； $x=1$  时， $y$  没有整数解， $x=2$  时， $y$  有整数解，满足要求。

【知识点】不定方程组：

1. 第二类（重点听）：前面学的东西在中学有学习过，但是本节知识点在中学没有学过。未知数不一定是整数的不定方程组。

2. 赋零法（配系数能做出来的，赋零法一定能做出来，且一定是对的）：对应未知数不一定是整数的不定方程组，如未知数是钱数，买钢笔、铅笔、圆珠笔各若干支，问花了多少钱；时间也不一定是整数，如木匠做桌子、椅子花了多少时间；时间和钱都不一定是整数，可以赋其中 1 个未知数为 0，从而快速计算出其他未知数。

3. 配系数（不推荐）：如有 2 个方程，第一个方程乘以 2，第 2 个方程乘以 3，两个方程相减就能得出最后的答案。但是不太好想，这是中学的解法。

例 4（2018 上海）现有甲、乙、丙三种货物，若购买甲 1 件、乙 3 件、丙 7 件共需 200 元；若购买甲 2 件、乙 5 件、丙 11 件共需 350 元。则购买甲、乙、丙各 1 件共需（ ）元。

A. 50

B. 100

C. 150

D. 200

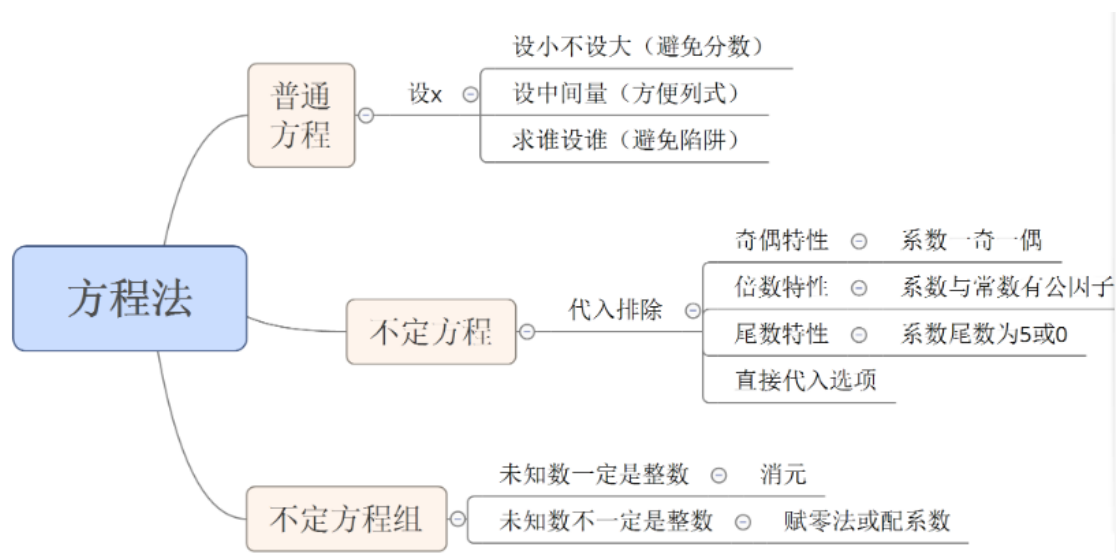
【解析】例 4. 常规方法是列方程，配系数做，这是中学思路。问共需多少元，钱数不一定是整数，考虑赋零法。谁的个数多赋值谁为 0，设丙为 0 元/件，“购买甲 1 件、乙 3 件、丙 7 件共需 200 元”，列式：甲+3\*乙=200，等式两边同乘以 2，得 2\*甲+6\*乙=400①；“购买甲 2 件、乙 5 件、丙 11 件共需 350 元”，列式：2\*甲+5\*乙=350②；①-②：解得甲=50，乙=50，丙=0，则甲、乙、丙各买 1 件共需要 0+50+50=100 元，对应 B 项。【选 B】

【注意】1. 赋零法的准确率是 100%。

2. 不管设甲为 0、乙为 0 还是丙为 0，或者设甲为 1，最后的结果都是一样的。因为未知数不一定为整数，意味着不定方程组有无穷解，但是题目的答案是唯一的，说明从中任取一个解，均能得到同样的答案，如令某个数为 1 元、0 元、

10 元都可以得出一样的结果，需要注意只能赋值一个未知数。赋 0 是因为计算量最小，赋零法严格来说叫做特值法。

【答案汇总】1-4: DDBB



【小结】方程法：

1. 普通方程：设  $x$ 。

- (1) 设小不设大（避免分数）。
- (2) 设中间量（方便列式）。
- (3) 求谁设谁（避免陷阱）。

2. 不定方程：代入排除。

- (1) 奇偶特性：系数一奇一偶。
- (2) 倍数特性：系数与常数有公因子（一定要找大的，找小的公约数没有意义，任意两个数的最小公因数为 1）。
- (3) 尾数特性：系数尾数为 5 或 0，用得最少，因为不好用，如  $7x=8$ ，要求谁乘以 7 等于 8，没有求 7 乘以 8 等于几来得方便。

(4) 直接代入选项。如  $3x+2y=12$ ， $x$ 、 $y$  必须是正整数，且大于 0，当系数特别小时，直接凑数字即可，数字大时就需要用特性。

3. 不定方程组：

- (1) 未知数一定是整数：如未知数是人数，可以消元。

(2) 未知数不一定是整数：如钱数，赋零法或配系数。

### 课后测验

1. (2015 联考) 每年三月某单位都要组织员工去 A、B 两地参加植树活动，已知去 A 地每人往返车费 20 元，人均植树 5 棵，去 B 地每人往返车费 30 元，人均植树 3 棵，设到 A 地有员工  $x$  人，A、B 两地共植树  $y$  棵， $y$  与  $x$  之间满足  $y=8x-15$ ，若往返车费总和不超过 3000 元时，那么，最多可植树多少棵？

- A. 498                                      B. 400  
C. 489                                      D. 500

【解析】1. 正确率为 73%。看起来很复杂，复杂题目要么放弃，要么代入。问最多植树多少棵，已知 A、B 两地共植树  $y$  棵， $y=8x-15$ ，一个方程，两个未知数，是不定方程，求  $y$ 。 $8x$  是偶数，则 ( ) = 偶数 - 15 = 奇数，只有 C 项满足。

【选 C】

2. (2018 北京) 老张购买学习和生活用品捐赠给山区贫困小学生。3 个笔盒、2 个皮球和 4 个杯子一共 89 元，4 个笔盒、3 个皮球和 6 个杯子一共 127 元。则一个笔盒多少元？

- A. 10                                      B. 11  
C. 12                                      D. 13

【解析】2. 正确率为 82%。和前面上海的那题很像，都是给三样东西的价格。本题给了三样东西（笔盒、皮球、杯子），只有两个等式，满足不定方程组；未知数是钱数，钱数不一定为整数，考虑赋零法。看谁最复杂就赋谁为 0，杯子有 6 个，皮球有 4 个，则赋杯子为 0。根据题意列式：3\*笔盒+2\*球=89①，4\*笔盒+3\*球=127②，①\*3-2\*②得：1\*笔盒=9\*3-7\*2，尾数 7-尾数 4=尾数 3，对应 D 项。【选 D】

【注意】1. 赋零法的运用前提：

(1) 不定方程组。

(2) 未知数不一定是整数。只要满足这两点，一定可以用赋零法。

2. 赋零的时候，不要和题干条件冲突，如出题老师说笔盒是十几元，你说笔盒是零元。如果出题老师问某个数是多少，那么这个数一定是确定的，另外两个数是不确定的（可以设一个为 0）。

【答案汇总】代入排除法：1-3：BCC

数字特性法：奇偶特性：1-2：AD；倍数特性：1-5：BDBCB；6：A

方程法：1-4：DDBB

【注意】1. 预习范围：

（1）第四节：工程问题。

（2）第五节：行程问题。下节课 18：45 开始答疑（问题一定要问得具体一些）。

2. 预习要求：

（1）原则上要做完每个章节至少 50% 的题目，如 6 个工程问题，至少要把前 3 题做一下。

（2）实在不会做的话，对每节前几题要有充分的思考，熟悉题型和题意。

3. 大多数人放弃的科目（国考 130~135 题，数量考 10~15 题，很多人都做不完，放弃数学可以原谅；而省考大多是 120 题，10~15 题所占的比例就会变大，很多人都能做完，如果数量全部放弃的话，就会吃亏，尤其像陕西、广东，数量都是必须要学的，因为广东数量题目很简单，且其他题目难度不大，很容易拉分，而陕西的数量题目的分数翻倍），我选择攻克。90%~95% 的人基础都不太好，每天提高一点点，风雨兼程，胜利必将属于我！现在离考试还有半年的时间，相信大家都来得及学习。

遇见不一样的自己

Be your better self