Apostila de Geometria Analítica

Notas de Aula com Exercícios Resolvidos

Diego Sebastián Ledesma

Atualizado 22/03 /2022

Conteúdo

II Vetores

III Objetos Geométricos

1. Apresentação

Este texto é uma apostila resultado do compilado das notas de aula que utilizei para ministrar a disciplina Geometria Analítica ao longo dos anos. Ela está escrita na forma mais simples e sintétizada que me foi possível. O objetivo da mesma é fornecer material teórico e prático aos estudantes que façam uso delas para seus estudos. É por isto que não há nada proposto para ser feito como exercicio e tudo está completamente resolvido na quantidade de detalhes que me foi possível. Com isto quero dizer que não pretende para nada ser um livro texto de disciplina mas sim um material de suporte para o estudo da mesma.

O material teórico que faz parte do texto está fortemente inspirado nos livros

- R. J. Santos, Matrizes, Vetores e Geometria Analítica, Imprensa Universitária da UFMG.
- K. Hoffman e R. Kunze, Álgebra Linear, Prentice Hall, Second edition, 1971.
- P. Boulos e I. C. Oliveira, Geometria Analítica-um tratamento vetorial, McGraw-Hill, São Paulo, 2a edição-2000 .
- L. Leithold, O Cálculo com geometria analítica, Vol. 1, Harbra, São Paulo, 2a edição – 1977.

Os exercícios resolvidos que aparecem massivamente no final do trabalho são parte das listas de exercícios e provas aplicadas na disciplina MA141 - Geometria Analítica da UNICAMP.

Finalmente faço o destaque de que grande parte da escrita do texto contou com apoio do Serviço de Apoio ao Estudante (SAE) da Pró-reitoria de Graduação (PRG) da UNICAMP e foi feita pela estudante - bolsista Ysabella Visinho dos Reis.

Esta apostila ainda contém muitos erros. Teria ainda mais se não fosse pelas correções aportadas por Daniel Paulo Garcia e Helena Pivoto Paiva enquanto cursaram Geometria Analítica comigo. A eles o meu agradecimento.

Álgebra Matricial

2. Matrizes

Neste capítulo começaremos estudando as noções básicas sobre matrizes. Começaremos com a definição e logo passaremos a estudar as propriedades destes objetos.

2.1 Matrizes

Definição 2.1 Uma matriz real de tamanho $m \times n$ é um arranjo bidimensional de números

$$\{a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n\},$$

que escrevemos na forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dada A uma matriz de tamanho $m \times n$ como acima, chamamos de entrada A_{ij} ao número a_{ij} que encontra-se na interseção da linha i com a coluna j (isto é na posição i, j da tabela) de A.

A matriz nula, que denotamos por 0, é a matriz cujas entradas são todas iguais a zero.

Denotamos por $\mathbb{M}(m \times n)$ ao conjunto de todas as matrizes de tamanho $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$.

Obs.

- Em particular uma matriz de tamanho $1 \times n$ é chamada de matriz linha e uma matriz $m \times 1$ é chamada de matriz coluna.
- No caso em que $m = n$ então dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n.
- As matrizes de tamanho 1×1 podem ser naturalmente identificadas com os números reais.

A $k-$ésima linha de A é a matriz linha $[A]_k$ dada por

$$[A]_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}).$$

A $j-$ésima coluna da matriz A é a matriz coluna $[A]^j$ dada por

$$[A]^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

A seguinte definição estabelece quando duas matrizes são iguais.

Definição 2.2 Duas matrizes $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ e $B \in \mathbb{M}(k \times l)$ são iguais se $m = k$, $n = l$ e

$$A_{ij} = B_{ij} \qquad\qquad \forall\, i = 1, \ldots, m,\; j = 1, \ldots, n.$$

A seguir vemos alguns exemplos de matrizes.

■ **Exemplo 2.1** 1. Seja $A \in \mathbb{M}(4 \times 3)$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 21 \\ 3 & -2 & \pi \\ -3 & 41 & 9 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

temos que

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 41 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(4 \times 1), \qquad \text{e} \qquad [A]_3 = \begin{pmatrix} -3 & 41 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(1 \times 3).$$

2. Seja $B \in (3 \times 6)$ dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$[B]^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3 \times 1), \qquad \text{e} \qquad [B]_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(1 \times 6).$$

■

Assim como acontece nos números reais, podemos definir as operações soma e produto por escalar no conjunto das matrizes, porém impondo algumas restrições.

Definição 2.3 • A soma de duas matrizes A e B em $\mathbb{M}(m \times n)$ é uma matriz em $\mathbb{M}(m \times n)$, que denotamos por $A + B$, cujas entradas são dadas por

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\; j = 1, \ldots, n,$$

isto é, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

então

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

A multiplicação de uma matriz A $\in \mathbb{M}(m\times n)$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma matriz em $\mathbb{M}(m\times n)$, que denotamos por $\lambda\cdot A$, cujas entradas são dadas por

$$(\lambda\cdot A)_{ij}=\lambda A_{ij} \quad \forall_i = 1\dots m, j=1\dots n,$$

isto é, se

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

então

$$\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.2

1. Seja

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

vemos que

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 1+7 \\ 0+0 & 1+1 & 3+1 \\ 3+0 & 2+2 & 2=4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

e

$$2\cdot A=\begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.1 \\ 2.0 & 2.1 & 2.3 \\ 2.3 & 2.2 & 2.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 2.1 O conjunto $\mathbb{M}(n\times m)$ com as operações soma e produto por escalar definidas acima é um espaço vetorial sobre os números reais, isto é, a soma e o produto por escalar satisfazem as seguintes propriedades:

i- Comutatividade da soma: $A+B=B+A$.

ii- Associatividade da soma: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

iii- Existe um único elemento 0 em $\mathbb{M}(m\times n)$ tal que $A+0=A$.

iv- Para cada elemento A existe um único elemento, que denotamos por $-A$, tal que $A+(-A)=0$.

v- $1\cdot A=A$.

vi- $(\lambda_1\lambda_2)\cdot A=\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot A)$.

vii- $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot A=\lambda_1\cdot A+\lambda_2\cdot A$.
viii- $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$.

Demonstração: Para demonstrar esses fatos vamos utilizar a definição 2.2, isto é, vamos mostrar que as entradas das matrizes de um e outro lado de cada identidade coincidem em cada caso.

i- Para cada $i=1\cdots m,\ j=1\ \cdots n$, temos
$$\begin{aligned}(A+B)_{ij} &= A_{ij}+B_{ij}\\ &= B_{ij}+A_{ij}\\ &= (B+A)_{ij}\end{aligned}$$

ii- Para cada $i=1\cdots m,\ j=1\ \cdots n$, temos
$$\begin{aligned}((A+B)+C)_{ij} &= (A+B)_{ij}+C_{ij}\\ &= (A_{ij}+B_{ij})+C_{ij}\\ &= A_{ij}+(B_{ij}+C_{ij})\\ &= A_{ij}+(B+C)_{ij}\\ &= (A+(B+C))_{ij}.\end{aligned}$$

iii- Sabemos que a matriz nula
$$0=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{M}(m\times n).$$
satisfaz $A+0=A$. Vamos mostrar que é a única matriz com esta propriedade, isto é, com a propriedade de que $A+B=A$ para todo $A\in\mathbb{M}(m\times n)$. Em particular, consideramos a matriz $A(i,j)$ cujas entradas são todas nulas exceto a entrada A_{ij} que é 1. Portanto, como $A(i,j)+B=A(i,j)$ temos que $1+B_{ij}=1$ donde $B_{ij}=0$. Da arbitrariedade na escolha de i,j segue que todas as entradas $B_{ij}=0$. De onde segue que $B=0$.

iv- Dada a matriz A considere a matriz $(-1)\cdot A$ então é facil ver que $A+(-1)\cdot A=0$. Defina $-A=(-1)\cdot A$. Vamos mostrar que se B é tal que $A+B=0$ então $B=-A$ e portanto $-A$ é única. Observamos que caso tal B exista, da identidade $A+B=0$ tiramos que para todo $i=1\cdots m,\ j=1,\cdots n$.
$$A_{ij}+B_{ij}=0\Rightarrow B_{ij}=-A_{ij}=(-1)A_{ij}=(-A)_{ij}.$$
Então $B=-A$.

v- Trivial.

vi- Para cada $i=1\cdots m,\ j=1\ \cdots n$, temos
$$\begin{aligned}((\lambda_1\lambda_2)\cdot A)_{ij} &= (\lambda_1\lambda_2)_{ij}\\ &= \lambda_1(\lambda_2\cdot A_{ij})\\ &= \lambda_1(\lambda_2\cdot A)_{ij}\\ &= (\lambda_1.(\lambda_2.A)_{ij}.\end{aligned}$$

vii- Para cada $i=1\cdots m,\ j=1\ \cdots n$, temos
$$\begin{aligned}((\lambda_1+\lambda_2)\cdot A)_{ij} &= (\lambda_1+\lambda_2)A_{ij}\\ &= \lambda_1 .A_{ij}+\lambda_2 .A_{ij}\\ &= (\lambda_1 .A)_{ij}+(\lambda_2 .A)_{ij}\\ &= (\lambda_1\cdot A+\lambda_2\cdot A)_{ij}.\end{aligned}$$

viii- Para cada $i=1\cdots m,\ j=1\ \cdots n$, temos
$$\begin{aligned}(\lambda\cdot(A+B))_{ij} &= \lambda(A+B)_{ij}\\ &= \lambda(A_{ij}+B_{ij})\\ &= \lambda A_{ij}+\lambda B_{ij}\\ &= (\lambda\cdot A+\lambda\cdot B)_{ij}.\end{aligned}$$

■

Obs.

i- Embora os símbolos sejam iguais, não devemos confundir o produto e a soma definidos acima com os canônicos de $\mathbb{R}$. Por exemplo a identidade

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A,$$

envolve duas operações soma: do lado esquerdo a soma canônica de $\mathbb{R}$ e do lado direito a soma definida para matrizes. Nesse sentido o que diz a propriedade é que existe uma relação entre as duas operações.

ii- A partir da definição de $-A$ podemos definir no conjunto das matrizes, e em forma análoga ao que acontece para os números reais, a operação diferença: Dadas A e B duas matrizes em $\mathbb{M}(m \times n)$ a diferença entre A e B é uma matriz $A - B \in \mathbb{M}(m \times n)$ dada por

$$A - B = A + (-B).$$

2.2 Produto de matrizes e transposta de uma matriz

Até aqui temos definido operações entre matrizes que preservam o tamanho. Nesta seção vamos a estudar outros tipos de operações sobre as matrizes onde esta propriedade já não é necessáriamente preservada.

Definição 2.4 O produto de uma matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ e uma matriz $B \in \mathbb{M}(n \times k)$ é uma matriz $AB \in \mathbb{M}(m \times k)$ cujas entradas são obtidas da seguinte forma

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \cdots + A_{in} B_{nj},$$

para todo $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, k$.

■ **Exemplo 2.3**

1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(1 \times 4) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(4 \times 1).$$

Então $A \cdot B \in \mathbb{M}(1 \times 1)$ e

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 + 3.2 + 4.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 + 6 - 4 \end{pmatrix} = (4).$$

2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3 \times 3) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3 \times 2).$$

Então $A \cdot B \in \mathbb{M}(3 \times 2)$ e

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2.1 + 2.1 + 1.1 & 1.0 + 1.1 + 1.1 \\ 1.2 + 2.2 + 3.1 & 1.0 + 2.1 + 3.1 \\ 1.2 + 1.2 + 0.1 & 1.0 + 1.1 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Obs.

i- A entrada i,j do produto de A com B é obtido ao multiplicar as entradas da linha i de A com as da coluna j de B em forma ordenada, isto é
$$(AB)_{ij} = [A]_i[B]^j.$$

ii- Se $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ e $B \in \mathbb{M}(n \times k)$ então AB está definida. Porém não necessáriamente ocorre o mesmo para o produto de B com A. De fato, só vai ser possivel fazer o produto de B com A quando $k = m$.

iii- Sobre o conjunto das matrizes quadradas $\mathbb{M}(n \times n)$ temos que AB e BA são definidas e dão como resultado matrizes em $\mathbb{M}(n \times n)$. No entanto temos que geralmente $AB \neq BA$. Por exemplo se
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
então $A \cdot B$ será
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Por outro lado $B \cdot A$ será
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Segue então que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

O produto de matrizes possui as seguintes propriedades.

Proposição 2.1 Sejam A, B, C matrizes de tamanhos apropriados e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

i- $A(B+C) = AB + AC$.

ii- $\lambda \cdot (AB) = (\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B)$.

iii- Se I_k é a matriz quadrada de tamanho $k \times k$ definida por
$$I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$
e chamada de matriz identidade em $\mathbb{M}(k \times k)$ então, para toda matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$, temos
$$I_m A = A = A I_n.$$

iv- $A(BC) = (AB)C$.

Demonstração: Para demonstrar as propriedades comparamos as entradas das matrizes aos dois lados da igualdade.

i-
$$\begin{aligned} [A(B+C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(B+C)_{kj} \\ &= \sum_k A_{ik}(B_{kj}+C)_{kj} \\ &= \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \qquad \forall_{ij}. \end{aligned}$$
Portanto $A(B+C) = AB + AC$.

ii-
$$\begin{aligned} [(\lambda(AB)]_{ij} &= \lambda(AB)_{ij} \\ &\Rightarrow \quad \lambda\left(\sum A_{ik}B_{kj}\right) \\ &= \sum(\lambda A_{ik})(B_{kj}) \\ &= ((\lambda A) \cdot B)_{ij} \qquad \forall_{ij}. \end{aligned}$$

O outro caso é análogo.

iii- Seja $A \in \mathbb{M}(k \times n)$ e I_r a matriz em $\mathbb{M}(r \times r)$ cujas entradas são definidas por

$$I_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad l \neq j \\ 1, & \text{se} \quad l = i \end{cases}$$

Então, temos que

$$(I_k \cdot A)_{li} = \sum (I_k)_{lj} \cdot A_{ji} = I_{ll} A_{li} = A_{li}.$$

Portanto $I_k \cdot A = A$ analogamente se prova $A \cdot I_n = A$.

iv-

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_l A_{il} (BC)_{lj} \\ &= \sum_l A_{il} \sum_k B_{lk} C_{kj} \\ &= \sum_l \sum_k A_{il} B_{lk} C_{kj} \\ &= \sum_k \left(\sum_l A_{il} B_{lk} \right) C_{kj} \\ &= \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} = ((AB) \cdot C)_{ij}. \end{aligned}$$

■

Definição 2.5 Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$. A transposta de A é uma matriz A^t de tamanho $n \times m$ cujas entradas são dadas por

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}.$$

Para todo $i = 1 \cdots n$ e $j = 1 \cdots m$.

■ **Exemplo 2.4**

1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

Proposição 2.2 Sejam A, B e C matrizes de tamanhos apropriados e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

i- $(A^t)^t = A$.

ii- $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$.

iii- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
iv- $(AB)^t = B^t A^t$.

Demonstração: Fazemos a demonstração comparando as entradas das matrizes de ambos os lados da igualdade.

i- Para todo $i,\ j$ temos
$$\begin{aligned}((A^t)^t)_{ij} &= (A^t)_{ji} \\ &= A_{ij}. \quad \forall ij.\end{aligned}$$
Portanto $(A^t)^t = A$.

ii- Para todo $i,\ j$ temos
$$\begin{aligned}[(\lambda A)^t]_{ij} &= (\lambda A)_{ji} \\ &= \lambda A_{ji} \\ &= \lambda (A^t)_{ij}. \quad \forall ij.\end{aligned}$$
Portando $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

iii- Para todo $i,\ j$ temos
$$\begin{aligned}[(A+B)^t]_{ij} &= (A+B)_{ji} \\ &= A_{ji} + B_{ji} \\ &= (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}. \quad \forall ij.\end{aligned}$$
Então $(A+B)^t = A^t + B^t$.

iv- Para todo $i,\ j$ temos
$$\begin{aligned}((AB)^t)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \sum_k A_{jk} B_{ki} \\ &= \sum_k B_{ki} A_{jk} \\ &= \sum_k (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} \\ &= (B^t A^t)_{ij}. \quad \forall ij.\end{aligned}$$
Então $(AB)^t = B^t A^t$.

■

Obs. O espaço das matrizes quadradas $\mathbb{M}(n\times n)$ com as operações soma, produto por escalar e produto formam uma estrutura conhecida com o nome de Álgebra Linear, isto é, é um espaço vetorial munido de um produto com as seguintes propriedades

i- $A(BC) = (AB)C$.
ii- $A(B+C) = AB + AC$.
iii- $\lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B)$.
iv- Existe o elemento $I_n \in \mathbb{M}(n\times m)$ tal que $I_n A = A = A I_n$.

Definição 2.6 Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}(n\times n)$ é dita

- simétrica se $A^t = A$,
- antissimétrica se $A^t = -A$.

Proposição 2.3 Seja $A \in \mathbb{M}(m\times n)$ então existe uma matriz simétrica A_1 e uma antissimétrica A_2 tais que $A = A_1 + A_2$.

Proof. Seja
$$A_1 = \frac{1}{2}(A+A^t) \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{2}(A-A^t).$$
Claramente
$$A_1^t = \frac{1}{2}(A+A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t+A) = A_1.$$

$$A_2^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -A_2.$$

e

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A.$$

3. Operações elementares

Dada uma matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ vamos considerar operações sobre as linhas desta de forma tal que a nova matriz obtida B esteja em $\mathbb{M}(m \times n)$. Em particular vamos nos concentrar em três tipos de operações:

1. Multiplicação de uma linha por um escalra $\lambda \neq 0$.
2. Substituir uma linha pela soma desta linha mais um multiplo de outra linha.
3. Troca de duas linhas de uma matriz.

Procedimentos análogos podem ser feitos com as colunas de uma matriz. Nestas notas não estudaremos esse caso.

3.1 Multiplicação de uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$.

Por exemplo, multiplicar a linha i da matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ por $\lambda \neq 0$ (que denotamos por $\lambda \ell_i \to \ell_i$) dá origem a uma nova matriz $B \in \mathbb{M}(m \times n)$ com a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\lambda \ell_i \to \ell_i} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Em particular, ao fazer esta operação elementar sobre a identidade obtemos:

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\lambda \ell_i \to \ell_i} \quad E_i^m(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \; i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Observamos que a operação $(\lambda\ell_i \to \ell_i)$ sobre a matriz A é igual a multiplicar A a esquerda por $E_i^m(\lambda)$, isto é:

$$\text{Se} \quad A \xrightarrow{\lambda\ell_i \to \ell_i} B \quad \text{então} \quad B = E_i^m(\lambda)\cdot A.$$

Esta operação elementar pode ser revertida. De fato, ao multiplicar a linha i de B por $\frac{1}{\lambda}$ temos novamente A. Isto garante que

$$E_i^m(\frac{1}{\lambda})E_i^m(\lambda) = I_m.$$

■ **Exemplo 3.1** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e considerere a operação elementar $2\ell_2 \to \ell_2$, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{2\ell_2 \to \ell_2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em particular sobre a identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{2\ell_2 \to \ell_2} \quad E_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $E_2(2)A = B$. Mais ainda

$$E_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$E_2(\frac{1}{2})E_2(2) = I \quad \text{e} \quad E_2(\frac{1}{2})B = A.$$

■

3.2 Substituir uma linha pela soma desta linha mais um multiplo escalar de outra linha

Por exemplo, substituir a linha i por multiplo escalar λ da linha j mais a linha i (que denotamos por $\ell_i + \lambda\ell_j \to \ell_i$) dá origem a uma nova matriz $B \in \mathbb{M}(m \times n)$ a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\ell_i + \lambda\ell_j \to \ell_i} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Em particular, ao fazer esta operação elementar sobre a identidade obtemos, por exemplo para o caso $i > j$:

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_i + \lambda \ell_j \to \ell_i} E^m_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \cdot & \vdots \\ \cdot & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 1 & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ i \\ \\ \leftarrow \ j \\ \\ \\ \end{array}$$

Fazer esta operação $\ell_i + \lambda \ell_j \to \ell_i$ sobre a matriz A é igual a multiplicar A a esquerda por $E^m_{ij}(\lambda)$, isto é:

Se $\quad A \to B \quad$ ao fazer a operação elementar $\quad \lambda \ell_j + \ell_i \to \ell_i \quad$ temos que $\quad B = E^m_{ij}(\lambda) \cdot A.$

Esta operação elementar pode ser revertida. De fato, ao substituir a linha i por um multiplo $(-\lambda)$ da linha j mais a linha i temos novamente A. Isto garante que

$$E^m_{ij}(-\lambda) E^m_{ij}(\lambda) = I_m.$$

■ **Exemplo 3.2** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e considerere a operação elementar $\ell_1 + 2\ell_2 \to \ell_1$, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 + 2\ell_2 \to \ell_1} B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em particular sobre a identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 + 2\ell_2 \to \ell_1} E_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $E_{12}(2)A = B$. Mais ainda

$$E_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$E_{12}(-2)E_{12}(2) = I \quad \text{e} \quad E_{12}(-2)B = A.$$

■

3.3 Troca de posição de duas linhas de uma matriz

Por exemplo, trocar a posição da linha i da matriz A com a posição da linha j (que denotamos por $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$) dá origem a uma nova matriz $B \in \mathbb{M}(m \times n)$ da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\ell_i \leftrightarrow \ell_j} \quad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ i \\ \\ \leftarrow \ j \\ \\ \\ \end{array}$$

Em particular ao fazer esta operação sobre a identidade obtemos:

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\ell_i \leftrightarrow \ell_j}$$

$$E_{ij}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\ \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & 0 & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \cdot & \ddots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \ i \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Fazer esta operação ($\ell_i \leftrightarrow \ell_j$) sobre a matriz A é igual a multiplicar A por E_{ij}^m, isto é:

$$\text{Se} \quad A \to B \quad \text{ao fazer a operação} \quad \ell_i \leftrightarrow \ell_j \text{ temos que} \quad B = E_{ij}A.$$

Esta operação elementar pode ser revertida. De fato ao trocar novamente a posição das linhas i e j da matriz B temos novamente A. Isto garante

$$E_{ij}^m E_{ij}^m = I_m.$$

■ **Exemplo 3.3** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e considerere a operação elementar $\ell_3 \leftrightarrow \ell_4$, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_4} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em particular sobre a identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_4} E_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $E_{34}A = B$. Mais ainda

$$E_{34}E_{34} = I \quad \text{e} \quad E_{34}B = A.$$

■

3.4 Matriz escalonada Reduzida

Na discussão das operações elementares temos provado o seguinte resultado.

Proposição 3.1 Fazer uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é equivalente a multiplicar A a esquerda por uma matriz quadrada E de tamanho $m \times m$ que é obtida ao se fazer a operação elementar sobre a identidade I_m. Isto é, a matriz obtida B de fazer a operação elementar sobre A é igual a $B = EA$.

As operações elementares permitem definir uma relação no matrizes de tamanho $m \times n$ da seguinte forma :

Dadas duas matrizes $A, B \in \mathbb{M}(m \times n)$ dizemos que A está relacionada com B (e o denotamos $A \sim B$) se B pode ser obtida de A ao fazer um número finito de operações elementares.

■ **Exemplo 3.4** Fazemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2 \to \ell_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + \ell_2 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_1 \to \ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_3 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Então $A \sim B$. ■

Vamos mostrar que esta é uma relação de equivalência, isto é, vamos mostrar que relação é

- reflexiva: $A \sim A$,
- simétrica: Se $A \sim B$ então $B \sim A$
- transitiva: Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$

Mostramos agora estas propriedades:

Demonstração.

$A \sim A$**:** Toda $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ está relacionada com ela propria, isto é $A \sim A$. De fato, por exemplo, fazendo duas vezes a operação elementar troca de uma linha por outra vemos que A é obtida de A por um número finito de operações elementares e, portanto, $A \sim A$.

Se $A \sim B$ então $B \sim A$: Sejam A, B duas matrizes em $\mathbb{M}(m \times n)$ tais que A está relacionada com B, isto é $A \sim B$. Então B é obtida de A por meio de um número finito de operações elementares. Então existem matrizes elementares $E_1, \cdots, E_k$ tais que

$$B = E_1 \cdots E_k \cdot A.$$

Como toda operação elementar pode ser revertida, para cada matriz E_j existe uma matriz elementar E'_j tal que $E'_j\, E_j = I_m$, de onde

$$E'_k \cdots E'_1 \cdot B = E'_k \cdots E'_1 \cdot E_1 \cdots E_k \cdot A = I_m A = A.$$

Dito de outra forma, A é obtida de B fazendo um número finito de operações elementares sobre suas linhas. De onde segue que $B \sim A$.

Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$: Sejam A, B e C matrizes em $\mathbb{M}(m \times n)$ tais que A está relacionada com B e B está relacionada com C então existem matrizes elementares $E_1 \cdots E_k$ e $D_1 \cdots D_k$ tais que $B = E_1 \cdots E_k \,.\, A$ e $C = D_1 \cdots D_k \,.\, B$ donde

$$C = D_1 \cdots D_k \cdot B = D_1 \cdots D_k \cdot E_1 \cdots E_k \cdot A.$$

Portanto C é obtida de A ao fazer um número finito de operações elementares sobre suas linhas, isto é, $A \sim C$. ■

Consideremos então uma matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ e todas as matrizes B que estão relacionadas com A. Estas matrizes estão contidas em um conjunto $[A] \subset \mathbb{M}(m \times n)$ que é o conjunto de sua classe de equivalencia, isto é, o conjunto

$$[A] = \{B \in \mathbb{M}(m \times n), B \sim A\}.$$

Se B é uma matriz contida em $[A]$ dizemos então que A e B são equivalentes por linhas. É facil mostrar as seguintes propriedades.

Proposição 3.2

a) $A \in [A]$,
b) $A \sim B$ se e somente se $[A] = [B]$,
c) $[A] \bigcap [B] \neq \emptyset$ então $[A] = [B]$,
d) $B \in [A]$ então $[A] = [B]$,
e) $\mathbb{M}(m \times n) = \bigcup_{A \in \mathbb{M}(m \times n)} [A]$.

Demonstração:

a) Utilizando que $A \sim A$ temos que $A \in [A] = \{B, B \sim A\} \subset \mathbb{M}(m \times n)$.
b) Assuma $A \sim B$. Como $\sim$ é de equivalência, se

$$C \sim A \Rightarrow C \sim B \Rightarrow C \in [B].$$

Portanto $[A] \subseteq [B]$. Similarmente se mostra que $[B] \subseteq [A]$ de onde $[A] = [B]$.
Por outro lado, se $[A] = [B] \Rightarrow B \in [A] \Rightarrow B \sim A$.
c) Se $C \in [A] \bigcap [B] \Rightarrow C \sim A$ e $C \sim B$ então $A \sim C$ e $C \sim B \Rightarrow A \sim B$, pois $\sim$ é de equivalência, assim $[A] = [B]$ pelo item b)
d) Segue do item b).
e) Se $M \in \mathbb{M}(m \times n)$ então $M \in [M]$ portanto

$$\mathbb{M}(m \times n) \subset \bigcup_{A \in \mathbb{M}(m \times n)} [A].$$

Como

$$\bigcup_{A \in \mathbb{M}(m \times n)} [A] \subset \mathbb{M}(m \times n), \quad \text{então} \quad \bigcup_{A \in \mathbb{M}(m \times n)} [A].$$

■

Obs. Observamos que em particular os itens b), c) e d) nos dizem que se duas matrizes A e B não são equivalentes então $[A]\bigcap[B]=\emptyset$.

Vemos então que **para descrever uma classe de equivalencia só precisamos de uma matriz na classe** pois todas as outras vão ser obtidas ao fazer operações elementares sobre esta. Assim dada uma classe, escolhemos um representante da classe que tenha a maior quantidade de 0 e 1 possíveis. Esse é motivo da seguinte definição.

Definição 3.1 Uma matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ é dita escalonada reduzida por linhas, ou simplesmente escalonada reduzida, se

1- O pivô de cada linha de A, isto é, a primeira entrada não nula de cada linha, é 1
2- Cada coluna que contém o pivô de alguma linha tem todas as outras entradas nulas.
3- O pivô de cada linha ocorre a direita do pivô da linha anterior.
4- As linhas nulas ocorrem abaixo de todas as linhas não nulas.

Obs. O item 3- nos diz que as matrizes escalonadas reduzidas tem zeros abaixo da diagonal, isto é, tem a forma

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

■ **Exemplo 3.5** 1. A matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

é escalonada reduzida.

2. A matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

não é escalonada reduzida. De fato, observamos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3-2\ell_2\to\ell_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_3\to\ell_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2-\ell_3\to\ell_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é escalonada reduzida.

3. A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

é escalonada reduzida.

4. A matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$
é escalonada reduzida.

■

Teorema 3.1 Toda matriz $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida.

Demonstração: Seja A $\in \mathbb{M}(m \times n)$ uma matriz. Considere o seguinte jogo.

1 - Começamos pela primeira linha.

2 - Se ela for nula, fazemos uma operação elementar que a coloque na parte de baixo da matriz. Se não for, procuramos a primeira entrada não nula e fazemos uma operação elementar para tornar esta entrada igual a 1. O mesmo fazemos com todas as linhas não nulas.

3 - Fazendo novamente operações elementares colocamos as linhas de forma tal que os pivôs apareçam conforme descemos nas linhas, a direita do pivô da linha anterior.

4 - Se na linha de baixo tivermos pivôs abaixo do pivô da primeira linha, fazemos operações elementares entre cada uma destas linhass e a primeira linha para trasladas estes pivôs para outra coluna.

5 - Fixamos a primeira linha e recomeçamos o processo a partir da segunda linha, e assim sucessivamente.

Por este método obtemos uma matriz onde todas as linhas nulas estão abaixo e, na parte de cima, os pivôs ocorrem de forma adequada. Agora, só resta zerar as entradas acima de cada pivõ, o que é feito novamente via operações elementares, obtendo uma matriz escalonada reduzida. Observamos que o processo é finito pois a matriz tem finitas entradas.

Para ver a unicidade, assuma que A é equivalente por linhas a duas matrizes escalonadas reduzidas B_1 e B_2. Então B_1 e B_2 são equivalentes por linhas e portanto B_2 é obtido de B_1 fazendo operações elementares. Mas estas operações devem ser identidade pois caso contrario B_2 não pode estar na sua forma escalonada reduzida. Donde $B_1 = B_2$.

■

O teorema anterior garante que toda matriz é equivalente por linhas a uma matriz escalonada reduzida. Por exemplo vemos que se A é uma matriz de 3×2 então ela é equivalente por linhas a alguma das matrizes abaixo:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
com $k \in \mathbb{R}$.

Obs. No caso das matrizes quadradas de tamanho $n \times n$, a matriz escalonada reduzida é a identidade I_n ou possui pelo menos uma linha nula. De fato se B é uma matriz escalonada reduzida quadrada que não é a identidade então temos que para alguma linha o pivô está a direita da diagonal. Por exemplo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & 0 & *\cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Segue disto que os pivõs correspondentes as linhas inferiores estão a direita da diagonal. Pelo fato da matriz ser quadrada temos que na linha n não haverá termos não nulos.

4. Matrizes Quadradas

Até agora introduzimos o conjunto das matrizes e estudamos as diferentes operações entre estes objetos. Nesta seção pretendemos focar no caso particular das matrizes quadradas.

4.1 Matrizes Quadradas

Considere o conjunto das matrizes quadradas de tamanho $n \times n$, isto é, $\mathbb{M}(n \times n)$. Observamos que $\mathbb{M}(n \times n)$ comporta-se um pouco como o conjunto de números racionais $\mathbb{Q}$ no sentido em que soma e produto de elementos do conjunto produzem elementos do conjunto, mais ainda, existe um elemento neutro para a soma, que é a matriz 0, e um elemento neutro para o produto que é a matriz I_n.

Vimos que, para o caso da soma, sempre podemos achar um inverso aditivo, isto é: dada uma matriz A existe uma matriz $-A$ tal que $A + (-A) = 0$. Será que o mesmo acontece com o produto?. Ou melhor, dada uma matriz $A \in \mathbb{M}(n \times n)$ existe uma matriz B tal que $BA = I_n$?

Não precisamos ir muito longe para ver que isto não é verdade. De fato no caso $n = 2$ considere, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

para qualquer matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos que o produto de B com A dá

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para qualquer matriz a, b, c, d escolhido.

No entanto, é interessante observar o seguinte:

Proposição 4.1 Seja $A \in \mathbb{M}(n \times n)$.

i- Se existe B tal que $BA = I_n$ então $AB = I_n$.
ii- Se existe B tal que $AB = I_n$ então $BA = I_n$.
iii- Se B e C são tais que $AB = I_n = AC$ ou $BA = I_n = CA$ então $B = C$.

Demonstração:

i- Seja B tal que $BA = I_n$. Sabemos que B é equivalente por linhas a uma matriz escalonada reduzida, isto é, existem matrizes elementares $E_1 \cdots E_k$ tais que $C = E_1 \cdots E_k B$ é uma matriz escalonada reduzida. Mais ainda C deve ser a identidade pois, caso contrario, teriamos que C possui uma linha nula de onde segue que CA tem uma linha nula e, como

$$CA = E_1 \cdots E_k BA = E_1 \cdots E_k I_n = E_1 \cdots E_k,$$

teriamos que a matriz $E_1 \cdots E_k$ tem uma linha nula, o que é impossível. De fato, se isso acontecese a classe de equivalência da matriz identidade teria interseção com a classe de equivalencia de uma matriz escalonada reduzida com linhas nulas o que é um absurdo. Portanto $C = I_n$.
Como

$$B(I_n - AB) = BI_n - \overbrace{BA}^{I_n} B = B - B = 0$$

temos que

$$\begin{aligned} I_n - AB &= \overbrace{(E_1 \cdots E_k B)}^{I_n}(I_n - AB) \\ &= E_1 \cdots E_k (B - BAB) \\ &= E_1 \cdots E_k (B - B) = 0, \end{aligned}$$

de onde $I_n = AB$.

ii- Se existe B tal que $AB = I_n$ então, pelas propriedades da transposta, temos que $B^t A^t = I_n$. O item anterior garante então que $A^t B^t = I_n$ ou, aplicando novamente as propriedades da transposta, $BA = I_n$.

iii- Sejam B e C tais que $AB = I_n = AC$ então

$$B = BI_n = BAC = I_n C = C.$$

Análogamente o outro caso.

■

Tudo isso motiva a seguinte definição.

Definição 4.1 Uma matriz quadrada A de tamanho $(n \times n)$ é dita invertível se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso, chamamos B de inversa de A e a denotamos por A^{-1}.

Corolário 4.1 Seja A uma matriz invertível. Então a inversa é única.

Demonstração: Seja A^{-1} a inversa de A e assuma que existe B tal que $AB = BA = I_n$. Então:

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

Tem-se ainda que $E_k \cdots E_1 = A^{-1}$, isto é, são as operações elementares feitas na identidade que dão A^{-1}. ■

■ **Exemplo 4.1** 1. Toda matriz elementar é invertível. De fato se E é a matriz associada a uma operação elementar e E' é a matriz elementar associada à operação elementar inversa temos que

$$E'E = I.$$

2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então $AB = I$. Portanto A é invertível.

■

Em particular, como consequência da demostração do item *i-* da Proposição 4.1 temos que A é uma matriz invertível então ela é equivalente por linhas a matriz identidade. Dito de outra forma, existem matrizes elementares $E_1 \cdots E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_1 A = I_n.$$

E se uma matriz é equivalente por linhas a matriz identidade então, $E_k \cdots E_1 A = I_n$ donde $E_k \cdots E_1 = A^{-1}$ e portanto A é invertível. Temos provado o seguinte resultado.

Corolário 4.2 Uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, é equivalente por linhas a matriz identidade. Mais ainda, uma matriz é invertível se ela for produto de matrizes elementares.

■ **Exemplo 4.2** Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos fazer operações elementares para levar a matriz para a forma escalonada reduzida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 - \ell_3 \to \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_3 - \ell_2 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Vamos fazer as mesmas operações elementares na identidade.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 - \ell_3 \to \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_3 - \ell_2 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

De fato

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poderiamos ter feito isto tudo de uma única vez e simultaneamente se colocassemos a identidade ao lado da matriz A e fizessemos as operações elementares nas duas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A} & & & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{I} & & \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 - \ell_3 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2 \to \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & & & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} & & \end{array}\right).$$

■

Isto fornece um método valiosíssimo para achar a inversa de uma matriz que é o método de Gauss-Jordan. A seguir o descrevemos: Seja A uma matriz invertível dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

i- Construa a matriz aumentada $[A|I_n]$ como segue

$$[A|I_n] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

ii- Faça operações elementares até levar $[A|I_n]$ na sua forma escalonada reduzida.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right).$$

iii- A matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

É a inversa de A.

Vamos brevemente justificar porque o método funciona. Assuma que A é invertível e sejam $E_1 \cdots E_k A = I_n$ e, claramente, $A^{-1} = E_1 \cdots E_k$. Se multiplicarmos

$$\begin{aligned} E_1 \cdots E_k [A|I_n] &= [E_1 \cdots E_k A | E_1 \cdots E_k I_n] \\ &= [I_n | E_1 \cdots E_k] \\ &= [I_n | A^{-1}]. \end{aligned}$$

Como $[I_n|E_1 \cdots E_k]$ é matriz escalonada reduzida associada a $[A|I_n]$ temos que A^{-1} está unívocamente determinada. Algumas propriedades da inversa são as seguintes:

Proposição 4.2

i- Se A é invertível então A^{-1} também o é. Mais ainda $(A^{-1})^{-1} = A$.
ii- Se A é invertível então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
iii- Se A e B são invertíveis então AB também o é. Mais ainda $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração: i- Se A é invertível então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

portanto A é a inversa de A^{-1}.

ii- Se A é invertível então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \Rightarrow (A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I^t = I$$

e portanto $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

iii- De fato

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

∎

5. Determinante de uma matriz quadrada

Neste capítulo vemos a definição de determinante de uma matriz quadrada. O determinante pode ser visto como uma função do espaçõ das matrizes nos reais que satisfaz uma serie de propriedades que a tornam única.

5.1 Determinantes

Definição 5.1 Uma função $D : \mathbb{M}(n \times n) \to \mathbb{R}$ é dita n-linear se, satisfaz

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+cb_{k1} & \cdots & a_{kn}+cb_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + cD\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

■ **Exemplo 5.1** Sejam $\ell_1, \ldots, \ell_n$ inteiros positivos e menores ou iguais do que n e $b \in \mathbb{R}$. A função $D : \mathbb{M}(n \times n) \to \mathbb{R}$ definida por

$$D(A) = b([A]_{1\ell_1} \cdots [A]_{n\ell_n}).$$

é n-linear. De fato, para todo $1 \leq k \leq n$, temos

$$
\begin{aligned}
D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+cb_{k1} & \cdots & a_{kn}+cb_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= b(a_{1\ell_1}\cdots(a_{k\ell_k}+cb_{k\ell_k})\cdots a_{n\ell_n}) \\
&= b(a_{1\ell_1}\cdots a_{k\ell_k}\cdots a_{n\ell_n}) + cb(a_{1\ell_1}\cdots cb_{k\ell_k}\cdots a_{n\ell_n}) \\
&= D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + cD\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 5.1 Dadas $D_1,\ldots,D_k$ funções $n-$lineares e $b_1,\ldots,b_k \in \mathbb{R}$. A função

$$D = b_1D_1+\cdots+b_kD_k,$$

é $n-$linear.

Demonstração: De fato,

$$
\begin{aligned}
D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+cb_{k1} & \cdots & a_{kn}+cb_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= b_1D_1\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+cb_{k1} & \cdots & a_{kn}+cb_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&\quad +\cdots+b_kD_k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+cb_{k1} & \cdots & a_{kn}+cb_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= b_1D_1\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +\cdots+cb_1D_1\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&\quad +\cdots+b_kD_k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + cb_kD_k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + cD\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

$\blacksquare$

Definição 5.2 Uma função n linear é alternada se $D(A) = 0$ sempre que duas lineas de A sejam iguais.

Corolário 5.1 Seja D alternada e assuma que A' é obtida de A de intercambiar duas lineas então $D(A') = -D(A)$.

Demonstração: Se D é alternada, então para quaisquer l e k temos

$$0 = D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+a_{l1} & \cdots & a_{kn}+a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+a_{l1} & \cdots & a_{kn}+a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+a_{l1} & \cdots & a_{kn}+a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+a_{l1} & \cdots & a_{kn}+a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= 0 + D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + 0.$$

Portanto

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = -D\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

Definição 5.3 Uma função $D : \mathbb{M}(n \times n) \to \mathbb{R}$ é chamada de função determinante se ela é uma função n-linear, alternada tal que $D(I) = 1$ para I matriz identidade.

■ **Exemplo 5.2** Seja D uma função $n-$linear alternada e A uma matriz em $\mathbb{M}(2\times 2)$ então

$$\begin{aligned}
D\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= D\begin{pmatrix} a+0 & 0+b \\ 0+c & d+0 \end{pmatrix} \\
&= D\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0+c & d+0 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0+c & d+0 \end{pmatrix} \\
&= D\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= adD\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + acD\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bdD\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + cdD\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= adD\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 + 0 + cdD\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (ad + (-cd))D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto existe uma única função determinante D para matrizes em $\mathbb{M}(2\times 2)$ e é dada por

$$D\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Isto provém do fato de que a função determinante satisfaz

$$D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

■

Definição 5.4 Se $n > 1$ e A é uma matriz em $\mathbb{M}(n\times n)$ denotamos por $A(i|j)$ a matriz em $\mathbb{M}((n-1)\times(n-1))$ que é obtida de A apagando-se a linha i e a coluna j. Isto é, se

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

então

$$A(i|j) = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}.$$

Se D é uma função $n-1$-linear denotamos

$$D_{ij}A = D(A(i|j)).$$

Teorema 5.1 Seja $n > 1$ e D uma $n-1$-função linear alternada em $\mathbb{M}((n-1)\times(n-1))$. Para todo j a função $E_j : \mathbb{M}(n\times n) \to \mathbb{R}$ definida por

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}(D_{ij}A),$$

é uma n-função linear alternada. Mais ainda se D é uma função determinante E_j também o é.

Demonstração: Seja A uma matriz de tamanho $n\times n$. Então, $D_{ij}(A)$ é independente da $i-$ésima fila de A e como D é $(n-1)$linear temos que D_{ij} é $(n-1)$ linear com respeito a qualquer linha de A diferente de i. Então $A_{ij}D_{ij}A$ é n linear por um resultado acima. Como a soma e produto por escalar de funções $n-$lineares é $n-$linear temos que E_j definida como acima é $n-$linear.

Assuma que A tem duas linhas iguais. Observamos que é suficiente supor que as linhas são adjacentes. Então assuma que a linha k é igual à linha $k+1$. Se $i \neq k,\ k+1$, a matriz $A(i|j)$ tem duas linhas iguais e $D_{ij}(A) = 0$. Portanto

$$E_j(A) = (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{k+1+j} A_{(k+1)j} D_{(k+1)j}(A).$$

Mas como $A_{kj} = A_{(k+1)j}$ e $A(k|j) = A(k+1|j)$ temos que $E_j(A) = 0$.

Se D é uma função determinante e I é a identidade de tamanho $n\times n$, então $I(j|j)$ é a identidade de tamanho $(n-1)\times(n-1)$ e como

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases},$$

segue que $E_j(I) = D(I(j|j)) = 1$. ■

Corolário 5.2 Existe uma função determinante em $\mathbb{M}(n\times n)$.

Demonstração: Sabemos que existe a função determinante em matrizes de 1×1 definida por

$$\det(a) = a$$

e para matrizes de tamanho 2×2, definida pelo exemplo 5.2, em que

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Utilizando o teorema anterior definimos a função determinante para matrizes de tamanho $n\times n$ por meio do seguinte esquema

i- Se $n = 1$ então $A = (a)$ donde $\det(A) = a$.

ii- Se $n > 1$ então

$$\det(A) = (-1)^{i+j} a_{i1} \det(A(i|1)) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A(i|n)),$$

ou equivalentemente

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A(1|j)) + \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A(n|j)).$$

Para qualquer $1 \leq i, j \leq n$ escolhidos (vamos ver na próxima seção que de fato é independente da escolha de i ou j). A primeira fórmula corresponde ao cálculo do determinante com respeito à coluna j e a segunda corresponde ao cálculo de determinante com respeito a linha i.

Observamos que a fórmula assim obtida dá uma função determinante, isto em virtude do teorema 5.1 De fato, vejamos que para $n = 2$ temos a função D obtida no exemplo 5.2. Para isto, seja $A \in \mathbb{M}(2\times 2)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

escolhemos calcular o determinante com respeito a linha 1. Então

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det((a_{22}))+(-1)^{1+2}a_{12}\det((a_{21}))\\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Mostramos agora como funciona a recursão fazendo as contas para $n=3$ seja $A\in\mathbb{M}(3\times 3)$ dada por

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Escolhemos calcular novamente o determinante com respeito a linha 1 e vamos utilizar a formula achada para o cálculo de determinantes de matrizes de tamanho 2×2. Assim

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{32}a_{22}\right).\end{aligned}$$

Portanto a função det assim definida é uma função determinante.

■

Obs. Para simplificar a notação é definido o cofator da entrada a_{ij} da matriz A de tamanho $n\times n$ como o número $\bar{a}_{ij}$ obtido por

$$\bar{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A(i|j)).$$

Com esta notação, a formula para o cálculo do determinante fica

$$\det(A)=a_{i1}\tilde{a}_{i1}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{in},$$

ou equivalentemente

$$\det(A)=a_{1j}\tilde{a}_{1j}+\cdots+a_{nj}\tilde{a}_{nj}.$$

■ **Exemplo 5.3** Vamos mostrar como calcular o determinante de uma matriz utilizando a fórmula acima. Calculamos o determinante da matriz abaixo a partir da terceira linha.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} &= (-1)^{(1+1)}(1)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\ &\quad +(-1)^{(1+2)}(0)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\ &\quad +(-1)^{(1+3)}(1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &\quad +(-1)^{(1+4)}(3)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Portanto, precisamos calcular os seguintes

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= 0+(-1)^{(1+2)}(1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+(-1)^{(1+3)}(1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 0+(-1\times 0)+(1\times -3)=-3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}(1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+0+(-1)^{1+3}(1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0+0+1=1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}(1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+0+(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1\times -3)+0+(1\times 1)=-2.\end{aligned}$$

Substituindo temos,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=(1\times -3)+0+(1\times 1)+(-3\times -2)=4.$$

■

5.2 Determinante via permutações

Nesta seção vamos mostrar que a função determinante definida na seção anterior é única e independente da escolha da coluna ou linha escolhida. Também vamos mostrar um método mais simples para o cálculo do mesmo.

Seja $e_j \in \mathbb{M}(1\times n)$ a matriz linha definida por

$$e_j=(0,\ldots,0,\overbrace{1}^{j},0,\ldots,0)$$

onde o número 1 está na posição j. Com esta notação temos que todam matriz linha $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)$ em $\mathbb{M}(1\times n)$ pode ser escrita da forma

$$(a_1,\ldots,a_n)=a_1(1,0,\ldots,0)+\cdots+a_n(0,\ldots,0,1)$$

ou, equivalentemente

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i.$$

Portanto, para toda função n-linear D em $\mathbb{M}(n\times n)$ temos

$$\begin{aligned} D(A) &= D\left(\sum_{i_1=1}^{n}[A]_{1i_1}e_{i_1},\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)\\ &= \sum_{i_1=1}^{n}[A]_{1i_1}*D\left(e_i,\sum_{i_2=1}^{n}[A]_{2i_2}e_{i_2},\ldots,\alpha_n\right)\\ &= \sum_{i_1,i_2=1}^{n}[A]_{1i_i}*[A]_{2i_2}D(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,\alpha_n)\\ &\vdots\\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n}([A]_{1i_i}*\ldots*[A]_{ni_n})D\begin{pmatrix}e_{i_1}\\ \vdots\\ e_{i_n}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se pedimos que D seja alternada temos que os termos dos produtos que involvem

$$D\begin{pmatrix}e_{i_1}\\ \vdots\\ e_{i_n}\end{pmatrix},$$

onde $e_{i_j}=e_{i_k}$ para algum k e j, são identicamente nulos.

Definição 5.5 Uma n-upla de inteiros positivos $(i_1,\ldots,i_n)$ tais que $1\le i_j\le n$ para todo $j=1\ldots n$ e $i_j\ne i_k$ para todos j e k é chamada uma permutaão de grau n do conjunto $(1,\ldots,n)$.

Assim, uma permtação é definida como uma função bijetora $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$. Uma tal função define uma n-upla $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ e é por tanto uma regra para reorganizar os elementos $1,2,\ldots,n$ de alguma forma definida. Em particular se

$$\sigma(1,\ldots,n)=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

então

$$\sigma(i)=\sigma_i \qquad \forall\, i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Um fato básico em permutações é o seguinte:

Toda permutação σ pode ser obtida de uma suceção de intercambio de pares.

Esta suceção pode ser de diferentes formas mas o número de intercambio de pares utilizados é sempre sempre par ou impar e isto depende somente da permutação.

Definição 5.6 Uma permutação $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ é dita
- par se o número de intercambios utilizado for par.
- impar se o número de intercámbios utilizados for impar.

O sinal da permutação sigma será

$$\operatorname{sinal}(\sigma)=\begin{cases}1 & \text{se } \sigma \text{ par}\\ -1 & \text{se } \sigma \text{ impar}\end{cases}.$$

■ **Exemplo 5.4** • A permutação $\sigma=(1,3,4,2,5)$ é par pois pode ser vista como composta dos seguintes intercâmbios de pares

$$\sigma_1:(1,2,3,4,5)\to(1,3,2,4,5), \qquad \sigma_2:(1,2,3,4,5)\to(1,2,4,3,5).$$

Então

$$\sigma=\sigma_2\circ\sigma_1(1,2,3,4,5)=\sigma_2(1,3,2,4,5)=(1,3,4,2,5).$$

- A permutação $\sigma = (3,2,1)$ é impar pois pode ser vista como composta dos seguintes intercâmbios de pares

$$\sigma_1 : (1,2,3) \to (2,1,3) \qquad \sigma_2 : (1,2,3) \to (1,3,2),$$

da seguinte forma,

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(1,2,3) = \sigma_1 \circ \sigma_2(2,1,3) = \sigma_1(2,3,1) = (3,2,1).$$

■

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} ([A]_{1i_i} * \dots * [A]_{ni_n}) D \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\text{diferentes permutações } \sigma} ([A]_{1\sigma(1)} * \dots * [A]_{n\sigma(n)}) D \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pois os termos com $e_{i_j} = e_{i_k}$ cancelam e só restam aqueles que são um reordenamento de $\{1,\dots,n\}$ isto é, as permutações.

Por otro lado, pelo fato de D ser alternada, temos que

$$D \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \text{sinal}(\sigma) D \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Portanto podemos escrever

$$D(A) = \sum_{\text{diferentes permutações } \sigma} (\text{sinal}(\sigma)([A]_{1\sigma(1)} * \dots * [A]_{n\sigma(n)}) D(e_1,\dots,e_n).$$

ou

$$D(A) = \left(\sum_{\text{diferentes permutações } \sigma} (\text{sinal}(\sigma) * [A]_{1\sigma(1)} * \dots * [A]_{n\sigma(n)}) \right) D(I).$$

Se denotamos por $\det(A)$ a

$$\det(A) = \sum_{\text{diferentes permutações } \sigma} (\text{sinal}(\sigma) * [A]_{1\sigma(1)} * \dots * [A]_{n\sigma(n)}).$$

temos mostrado o seguinte resultado.

Teorema 5.2 Existe uma unica função determinante em $\mathbb{M}(n \times n)$ definida por $\det(A)$. Mais ainda, toda função n-linear alternada D em $\mathbb{M}(n \times n)$ satisfaz

$$D(A) = \det(A) D(I).$$

Obs. Como consequência deste teorema temos que o determinante pode ser visto como um polinômio nas entradas da matriz.

■ **Exemplo 5.5** Vamos ver como obter a fórmula do determinante para uma matriz de tamanho 2×2 com este formalismo.

Primeiramente observamos que para $n = 2$ temos duas permutações

$$\sigma(1,2) = (1,2) \qquad \text{com sinal}(\sigma) = 1$$

$$\lambda(1,2) = (2,1) \qquad \text{com sinal}(\lambda) = -1$$

Então, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \text{sinal}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} + \text{sinal}(\lambda) a_{1\lambda(1)} a_{2\lambda(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

■

Corolário 5.3 Se D é uma função determinante as E_j são todas iguais. Dito de outra forma, o cálculo do determinante não depende da escolha da línea ou coluna.

Teorema 5.3 Sejam A e B matrizes em $\mathbb{M}(n \times n)$ então

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Demonstração: Fixamos B e definimos $D(A) = det(AB)$. É simples ver que D é n- linear e alternada. Portanto, por um resultado acima temos que

$$D(A) = det(A)D(I),$$

mas

$$D(I) = det(IB) = det(B).$$

■

Proposição 5.1

$$det(A^t) = det(A).$$

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} det(A(i|j)).$$

Demonstração: A primeira identidade segue de

$$\begin{aligned} det(A^t) &= \sum_{\sigma} (\text{sinal}(\sigma)) [A]_{\sigma_1,1} \dots [A]_{\sigma_n,n} \\ &= \sum_{\sigma} (\text{sinal}(\sigma^{-1})) [A]_{1,\sigma_1^{-1}} \dots [A]_{n,\sigma_n^{-1}}. \end{aligned}$$

A segunda provem do fato de que todas as funções alternadas E_j são funções determinante.

■

A fórmula vista para o determinante permite o cálculo do determinante de qualquer matriz de tamanho $n \times n$, porém tem um grande defeito que é o volume de contas a fazer. Já no caso 4×4 temos que calcular o determinante de 4 matrizes de tamanho 3×3 o que resulta em muito trabalho. A ideia então é obter, a partir da definição de determinante, um método mais simples para o cálculo.

■ **Exemplo 5.6**

1. Uma matriz A de tamanho $n \times n$ que possui uma linha ou uma coluna nula tem determinante igual a 0. De fato, se calculamos o determinante a partir desta linha ou coluna obtemos que cada término é 0.
2. Seja A uma matriz triangular superior, isto é uma matriz da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Então

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Provamos isso por indução. Claramente vale para matrizes de tamanho 2×2. Assuma como válido para matrizes de tamanho $n \times n$, vamos mostrar o caso $(n+1) \times (n+1)$. Para isto calculamos o determinante com respeito a primeira coluna e obtemos

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n+1} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} + 0.$$

Agora, utilizando a hipótese indutiva temos

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{n+1n+1}.$$

Como queriamos mostrar.

■

Teorema 5.4 Seja E uma matriz elementar.

i- Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha da I_n por um escalar $\lambda \neq 0$ então

$$\det(B) = \lambda.$$

ii- Se B é uma matriz obtida a partir de trocar duas linhas de I_n, então

$$\det(B) = -1.$$

iii- Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar a uma linha de I_n um multiplo escalar de outra linha de I_n então

$$\det(B) = 1.$$

Demonstração: Consequência direta do teorema anterior e do fato $\det(I_n) = 1$. ■

Portanto se B é obtida de A e de fazer uma operação elementar E então temos que

$$\det(B) = \det(E)\det(A).$$

Inductivamente podemos provar que se $B = E_1 \cdots E_k A$, para $E_1 \cdots , E_k$ matrizes elementares então

$$\det(B) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det(A).$$

Teorema 5.5 Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$.

i- Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha de A por um escalar $\lambda \neq 0$ então

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

ii- Se B é uma matriz obtida a partir da troca de duas linhas de A então

$$\det(B) = -\det(A).$$

iii- Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar uma linha de A um múltiplo escalar de outra linha de A, então

$$\det(B) = \det(A).$$

Demonstração: Segue do teorema anterior e de utilizar a propriedade $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ■

Juntando todo o visto até agora temos que para calcular determinates, podemos utilizar as seguintes propriedades:

1. $\det(I) = 1$.
2. $\det(A^t) = \det(A)$.
3. Se A é uma a matriz triangular superior de tamanho $n \times n$ então

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. Se A tem linha nula então $\det(A) = 0$.
5. Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha de A por um escalar $\lambda \neq 0$ então

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

6. Se B é uma matriz obtida a partir da troca de duas linhas de A então

$$\det(B) = -\det(A).$$

7. Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar uma linha de A um múltiplo escalar de outra linha de A, então

$$\det(B) = \det(A).$$

■ **Exemplo 5.7** Vamos ver como estas propriedades funcionam com um exemplo. Calculando $\det(A)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Começamos fazendo operações elementares sobre A até leva-lá numa matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 2\ell_2 \to \ell_3}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_4 - \frac{1}{2}\ell_3 \to \ell_4} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A_4) = 1 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e $\det(A) = \det(A_2) = \det(A_3) = \det(A_4)$ temos $\det(A) = 1$. ■

Corolário 5.4 Seja A uma matriz e B sua forma escalonada reduzida. Sejam $E_1 \cdots E_k$ as matrizes elementares tais que

$$B = E_1 \cdots E_k A.$$

Então $B \neq I$ se $\det(A) = 0$. Caso contrário

$$\det(A) = \frac{1}{\det(E_1) \cdots \det(E_k)}.$$

Demonstração: Se B não é a identidade então necessariamente tem uma linha nula. Portanto $\det(B) = 0$. Utilizando que

$$\det(B) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(A).$$

Temos que se $B \neq I$ então $\det(A) = 0$ e se $B = I$,

$$\det(A) = \frac{1}{\det(E_1) \cdots \det(E_k)}.$$

■

Corolário 5.5 Uma matriz quadrada A é invetível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Demonstração: Segue do resultado anterior e do fato que uma matriz é invertível se, e somente se é equivalente por linhas a identidade. ■

Finalizamos esta seção observando o seguinte diagrama de equivalências

$$\begin{tikzcd} A \text{ é invertível} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, equal] & A \sim I \\ \det(A) \neq 0 \arrow[ur, Leftrightarrow] & \end{tikzcd}$$

5.3 Adjunta de uma matriz quadrada

Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Lembramos que o cofator da entrada a_{ij} é o número

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A(i|j)) = (-1)^{i+j}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definição 5.7 A matriz adjunta de A, que denotamos por $adj(A)$, é a matriz

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}^t,$$

isto é, a transposta da matriz formada pelos cofatores.

■ **Exemplo 5.8** 1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} A\,adj(A) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando temos,

$$\begin{array}{lll} \tilde{a}_{11} = -1 & \tilde{a}_{12} = 1 & \tilde{a}_{13} = -1 \\ \tilde{a}_{21} = 1 & \tilde{a}_{22} = -1 & \tilde{a}_{23} = -1 \\ \tilde{a}_{31} = -1 & \tilde{a}_{32} = -1 & \tilde{a}_{33} = 1 \end{array}$$

Então,

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que,

$$adj(A)\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -0\\ 0 & -2 & -0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

E que

$$\det(A)=1\times(-1)^2\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0+1\times(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-1-1=-2.$$

■

A Propriedade fundamental da matriz adjunta é que fornece uma fórmula para a inversa de A. Isto é o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 5.6 Seja A uma matriz de $n\times n$. Então

$$A(adj(A))=\det(A)I_n.$$

Mais ainda, se A é invertível, então

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A).$$

Demonstração: A entrada ij do produto $A(adj(A))$ é dada por

$$a_{i1}\tilde{a}_{j1}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{jn}$$

Decorre da definição que se $i=j$ então

$$a_{i1}\tilde{a}_{j1}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{jn}=\det A$$

Se $i\neq j$ então

$$a_{i1}\tilde{a}_{j1}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{jn}=0$$

pois é o determinante da matriz obtida de A substituindo a linha j pela linha i. Isto é, o determinante da matriz:

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow\ i\\ \\ \leftarrow\ j\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

respeito da linha i. ■

6. Sistema de equações linerares

Neste capítulo consideramos o problema de achar n escalares $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes equações:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

onde os $a_{ij}'s$ e $b_j's$ são números em $\mathbb{R}$. Chamamos a este conjunto de equações de sistema linear de m equações com n incognitas.

Em particular, um sistema linear é dito **homogêneo** se

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases},$$

Definição 6.1 Uma n-upla $(c_1, \cdots, c_n)$ é dita uma solução do sistema se, ao substituir $x_i = c_i$ em cada uma das equações acima, são satisfeitas as identidades. O conjunto solução é o conjunto de todas as n-uplas que são solução do sistema.

Nem sempre é possível garantir a existência de solução. De fato vamos ver depois que alguns sistemas lineares não tem solução. Outros, no entanto, admitem infinitas soluções. Em particular:

Corolário 6.1 Todo sistema homogêneo admite pelos menos uma solução.

Demonstração: De fato, a solução $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$ resolve o sitema linear homogêneo. ■

Procuramos então um método prático para achar ou garantir a existência de soluções para sistemas lineares. Para isto, começamos observando que podemos reescrever o sistema (1) em notação matricial como

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nesta notação podemos dizer que uma n-upla $(c_1, \cdots, c_2)$ é solução do sistema linear (1) se

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

isto é, ao fazer o produto da matriz A com a matriz

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

obtemos B.

A dificuldade em resolver o sistema linear radica na complexidade da matriz A. Em principio, quanto menos entradas não nulas possua a matriz A mais difícil será resolver o sistema linear. Assim, para resolver o sistema, procuramos um método que me elimine o maior número possível de entradas não nulas. Este é o coração da técnica de eliminação de parámetros que ilustramos com o seguinte exemplo.

■ **Exemplo 6.1** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

ou, em notação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se fazemos a primeira equação menos a segunda temos que $x_2 = 0$. Substituindo agora na segunda equação, tiramos $x_1 + x_3 = 0$. Portanto, resolver este sistema torna-se equivalente a resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \end{cases},$$

ou, em notação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a diferença fundamental aqui é que, no segundo caso, estamos com uma matriz escalonada reduzida!.

■

■ **Exemplo 6.2** Vamos obter os coeficientes estequiométricos para o balanceamento da equação

$$xC_6H_6 + yO_2 \to zCO_2 + wH_2O.$$

Comparando a quantidade de átomos, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 6x & = & z \\ 6x & = & w \\ 2y & = & 2z+w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x & & -z & & = 0 \\ 6x & & & -w & = 0 \\ & 2y & -2z & -w & = 0 \end{cases}.$$

Escrito na linguagem de matrizes fica,

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O conjunto solução é $S = \{(x/3, 5x/2, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$ donde a solução para $x = 6$ é dada por $(2, 15, 12, 6)$. Portanto a equação balanceada é

$$2C_6H_6 + 15O_2 \to 12CO_2 + 2H_2O.$$

Podemos fazer o mesmo com $xH_2 + yO_2 \to zH_2O$ para obter que o balanceamento é dado por $2H_2 + O_2 \to 2H_2O$. ■

Seja então $AX = B$ um sistema linear e considere $E_1 \cdots E_k A = D$ as operações elementares que me levam A na sua forma escalonada reduzida D, isto é

$$E_1 \cdots E_k A = D.$$

Multiplicando aos dois lados da igualdade

$$AX = B,$$

por $E_1 \cdots E_k$ obtemos um novo sistema, isto é

$$E_1 \cdots E_k AX = E_1 \cdots E_k B \to DX = \tilde{B}, \text{ para } \tilde{B} = E_1 \cdots E_k B,$$

que é muito mais simples de resolver que o sistema original pois D tem uma quantidade maior de entradas nulas do que A. Mais ainda, temos o seguinte resultado.

Teorema 6.1 O sistema $AX = B$ e o sistema $DX = \tilde{B}$ tem o mesmo conjunto solução.

Demonstração: Lembramos que

$$E_1 \cdots E_k A = D \quad e \quad E_1 \cdots E_k B = \tilde{B},$$

para $E_1, \ldots, E_k$ matrizes elementares.

Seja S uma solução do sistema $AX = B$ então $AS = B$. Então

$$\begin{aligned} DS &= (E_1 \cdots E_k A)A \\ &= E_1 \cdots E_k (AS) \\ &= E_1 \cdots E_k (AS) \\ &= E_1 \cdots E_k B = \tilde{B} \end{aligned}$$

Por outro lado, assuma que $\tilde{S}$ é solução de $DX = \tilde{B}$ Sejam $E_1', \cdots, E_k'$ as matrizes elemetares inversas de $E_1 \cdots E_k$

$$\begin{aligned}
A\tilde{S} &= (E_k' \cdots E_1' E_1 \cdots E_k A)\tilde{S} \\
&= E_k' \cdots E_1'(E_1 \cdots E_k A)\tilde{S} \\
&= E_k' \cdots E_1' D\tilde{S} \\
&= E_k' \cdots E_1' \tilde{B} \\
&= E_k' \cdots E_1'(E_1 \cdots E_k B) \\
&= (E_k' \cdots E_1' E_1 \cdots E_k)B.
\end{aligned}$$

■

Assim temos construído um método para determinar soluções de sistemas lineares, **o método de Gauss-Jordan**, e que passamos a descrever:

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

i- Construa a matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}n & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

ii- Faça operações elementares na matriz até levar a parte correspondente a A na sua forma escalonada reduzida

$$\tilde{M} = [D|\tilde{B}].$$

iii- Resolva, se possível, $DX = \tilde{B}$

iv- O conjunto solução de $DX = \tilde{B}$ é igual ao conjunto solução de $AX = B$.

Explicamos brevemente por que o método funciona. Se $E_1 \cdots E_k$ são operações elementares que levam A na sua forma escalonada reduzida, tiramos que

$$E_1 \cdots E_k[A|B] = [E_1 \cdots E_k A|B] = [D|\tilde{B}],$$

está na forma escalonada reduzida (e que é unívocamente determinada).

Os conjuntos solução de $AX = B$ e de $DX = \tilde{B}$ coincidem como consequência do teorema anterior.

■ **Exemplo 6.3** Consideramos o sistema linear

$$\begin{cases} x & & + & (a-1)z & = & 2 \\ -2x & + \ (a^2-1)y & + & (1-a)z & = & -4 \\ 2x & & + & (3a-3)z & = & 4 \end{cases},$$

com 3 equações e 3 variáveis onde $a \in \mathbb{R}$ é um parámetro que podemos ajustar. Vamos estudar para que valores de a o sistema possui solução e como são essas soluções.

Construimos a matriz aumentada do sistema e fazemos operações elementares para levá-la na forma escalonada reduzida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 2 \\ -2 & a^2-1 & 1-a & -4 \\ 2 & 0 & 3a-3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_2 + 2\ell_1 \to \ell_2]{\ell_3 - 2\ell_1 \to \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_2-\ell_3\to\ell_2]{\ell_1-\ell_3\to\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right).$$

Portanto se $a \neq \pm 1$ então o sistema tem solução única igual a

$$S = \{(2,0,0)\}.$$

Se $a = 1$ então o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ 0y & = & 0 \\ -2z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

que tem infinitas soluções $S = \{(2,y,z), z,y \in \mathbb{R}^2\}$.
Se $a = -1$ então o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ 0y & = & 0 \\ -2z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

que tem infinitas soluções $S = \{(2,y,z), z,y \in \mathbb{R}^2\}$. Não há valores de a para os quais o sistema não tem solução.
■

Proposição 6.1 Considere um sistema de equações lineares da forma $AX = B$. Se $S_1 \neq S_2$ são duas soluções do sistema, então o sistema admite infinitas soluções.

Demonstração: Seja $S_\rho = \rho S_1 + (1-\rho)S_2$ com $\rho \in \mathbb{R}$ um número qualquer diferente de 0 ou 1. Observamos que $S_\rho \neq S_1$ e $S_\rho \neq S_2$. Vamos mostrar que S_ρ é solução do sistema. De fato

$$AS_\rho = \rho AS_1 + (1-\rho)AS_2 = \rho B + (1-\rho)B = B.$$

■

6.1 Estudo de sistemas lineares

Se temos um sistema linear da forma $AX = B$ e aplicamos o método de Gauss-Jordan para resolvé-lo, podemos chegar nos seguintes casos.

Caso 1. O sistema tem solução. Depois de aplicar as operações elementares sobre a matriz $[A|B]$ temos que a matriz resultante $[D|\tilde{B}]$ não admite linhas da forma $(0\cdots 0|k)$ com $k \neq 0$.

Neste caso o sistema pode ter uma única solução ou infinitas soluções dependendo da matriz escalonada reduzida D.

A-) Se a matriz escalonada reduzida não tem colunas sem pivôs então ela é da forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \tilde{b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \tilde{b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

O sistema, neste caso tem solução única, e igual a

$$S = \left(\begin{array}{c} \tilde{b_1} \\ \vdots \\ \tilde{b_n} \end{array}\right).$$

B-) Se a matriz D tem colunas sem pivôs então há mais variáveis do que equações e portanto existem variáveis que podem assumir valores arbitrários. Por exemplo fica uma matriz da forma

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \tilde{b_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \tilde{b_k} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

para $k < n$. Neste caso temos infinitas soluções.

Caso 2. O sistema não tem solução. Depois de aplicar as operações elementares sobre a matriz $[A|B]$ temos que a matriz resultante $[D|\tilde{B}]$ admite linhas da forma $(0,\cdots,0|k)$ com $k \neq 0$. Neste caso fica uma equação da forma

$$0 = k \neq 0,$$

o que constitui uma contradição.

■ **Exemplo 6.4** 1.) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 2 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}.$$

Este sistema não tem solução. De fato,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1 \to \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_3 - 2\ell_2 \to \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Assim, o sistema equivalente obtido é

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 2 \\ 0 = -2 \end{cases},$$

que não tem solução.

2.) Vamos procurar a solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Construimos

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_3-\ell_1\to\ell_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_2\to\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_3\to\ell_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_1-\ell_2\to\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1-\ell_3\to\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{array}\right).$$

O sistema equivalente fica

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{2}\\ y & = & 0\\ z & = & -\frac{1}{2}\end{array}\right. .$$

O conjunto soluçao é

$$S=\{(1/2,0,-1/2)\}$$

3.) Se temos um sistema em que a matriz aumentada fica

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & 1\\ y & + & 2z & = & 2\\ w & = & 3 & & \end{array}\right. .$$

Temos infinitas soluções. Mais ainda o conjunto solução é

$$S=\{(1-z,2-2z,z,3)\,,z\in\mathbb{R}\}.$$

4.) Se temos um sistema em que matriz aumentada fica

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 4w & = & 1\\ & & z & + & 3w & = & 0\\ & & & & v & = & 1\end{array}\right. .$$

Temos infinitas soluções. Mais ainda o conjunto solução é

$$S=\{(1-2y-4w,y,-3w,w,1)\,,y,w\in\mathbb{R}\}.$$

■

Em particular quando tratarmos de um sistema linear homogenêo, o caso 2 nunca acontece. Pois o sistema sempre tem solução, de fato a solução trivial (todas as entradas nulas) sempre é solução como vimos anteriormente. Mais ainda, caso exista uma solução não trivial teremos então infinitas soluções.

6.2 Sistemas com número de incógnitas igual ao número de equações

Considere agora um sistema de equações lineares $AX = B$ com um número de incognitas n igual ao número de equações m, isto é, a matriz associada ao sistema é quadrada. Caso a matriz seja equivalente por linhas a identidade teremos que existe A^{-1} e portanto a solução do sistema é única e da forma

$$S = A^{-1}B.$$

Caso a matriz não seja equivalente por linhas a identidade então teremos que o sistema tem infinitas ou nenhuma solução, dependendo do B. Portanto assuma que depois de fazer operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada ficamos com uma matriz escalonada reduzida

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & b_2 \\
\vdots & & \ddots & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
0 & & & 1 & * & * & 0 & 0 & 0 & b_{k-3} \\
0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{k-2} \\
0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{k-1} \\
0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_k \\
0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{k+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n
\end{array}\right).$$

- Se $b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$ temos um sistema com infinitas soluções e que possui $n - k$ variáveis livres.
- Se $b_{k+1} \neq 0$ então o sistema não tem solução.

Proposição 6.2 Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares com número de incógnitas igual ao número de equações. O sistema tem solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Demonstração: Se $\det(A) \neq 0$ então a matriz do sistema possui inversa, donde a solução é unica.

Se o sistema possui solução única então não existem variáveis livres, de onde segue que cada coluna da matriz escalonada reduzida associada a A tem pivô. Portanto é a identidade. Então A é equivalente por linhas a identidade e consequêntemente invertível e com $\det(A) \neq 0$. ■

Temos assim as seguintes equivalências para matrizes quadradas.

$$\begin{tikzcd}
A \text{ é invertível} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Updownarrow] & A \sim I_n \arrow[d, Updownarrow] \\
\det(A) \neq 0 \arrow[r, Leftrightarrow] & AX = B \text{ tem solução única}
\end{tikzcd}$$

Um método interessante para resolver este tipo de sistemas de equações lineares é fornecido pela regra de Cramer.

Teorema 6.2 (Regra de Cramer). Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é invertível. Então a solução do sistema é

$$S = (S_1, \cdots, S_n),$$

onde

$$S_j = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_1 & a_{2j+1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

para todo $i = 1 \cdots n$. para todo $i = 1 \cdots n$.

Demonstração: Sabemos que a solução do sistema $AX = B$ é dada por $S = A^{-1}B$. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A),$$

$$S = \frac{1}{\det(A)} adj(A)B.$$

Portanto a entrada j–ésima é dada por

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{1}{\det(A)}(b_1\tilde{a}_{j1} + \cdots + b_n\tilde{a}_{jn}) \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_1 & a_{2j+1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

■ Exemplo 6.5
Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 2 \\ x - y = 2 \end{cases},$$

então

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 + (-1)(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -1 + (-2) = -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Então é invertível e portanto o sistema tem solução única. Se a solução é

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix},$$

temos, da regra de Cramer, que

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{-3}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-3}\left(0+(-1)\cdot 1\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{-1}{3}(-2+(-2)) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{-1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{3}\left(1\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 1\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{-1}{3}(2+0) = \frac{-2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{-1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\left(1\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0\right) \\
&= -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Então

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

■

II Vetores

7. Vetores no plano e no espaço

Quando resolvemos um sistema linear obtemos um conjunto solução. As perguntas neste caso são: Como é esse conjunto solução? Como caracterizá-lo e como estudá-lo?

O problema básico a que nos confronntamos é o da visualização do conjunto solução. O ser humano visualiza coisas intuitivamente por meio de figuras e desenhos. Mas, para desenhar, precisamos do lugar ou papel onde desenhar e uma ideia de escala para que a nossa figura guarde uma certa coerência; esse é o objetivo deste capítulo.

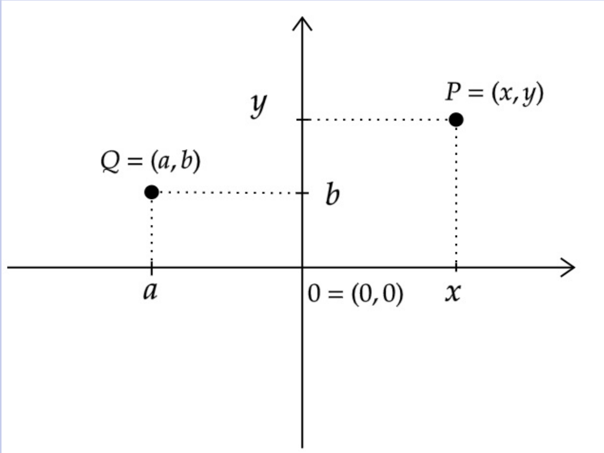
7.1 O plano e o espaço

Quando tratamos de um sistema linear com duas incognitas sabemos que o conjunto solução é formado por elementos da forma (a,b) então é natural, na hora de desenhar o conjunto de faze-lo sobre um papel onde o número a dé uma ideia de largura e o número b de altura. Nosso papel aqui é o plano cartesiano

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Para fazer o desenho traçamos sobre o plano duas retas perpendiculares. Uma delas será chamada de eixo x e a outra de eixo y. O ponto de interseção O, que chamamos de origem, terá por coordenadas $O=(0,0)$. Sobre cada uma das retas traçamos uma escala, que de preferência deve ser a mesma para as duas. Os valores de x positivo será do lado direito do $(0,0)$ e do y positivo será acima do $O=(0,0)$.

Então, nosso conjunto solução pode ser representado ali: por exemplo o ponto $Q=(a,b)$ vai corresponder ao ponto que for a intersecção da reta paralela ao eixo y cortando o eixo x no valor correspondente a a e da reta paralela ao eixo x cortando o eixo y no valor b.

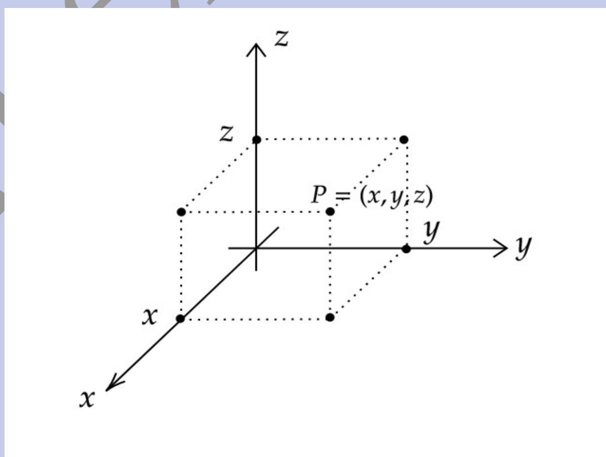


Da mesma forma que para sistemas de duas incognitas podemos proceder para sistemas de três incognitas. Só que agora o conjunto solução possui elementos da forma a,b,c portanto para representa-los somente com altura e largura não é possivel, precisamos de mais uma magnitude, neste caso profundidade. Este novo lugar geométrico onde vamos desenhar nosso conjunto solução é o espaço cartesiano

$$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c),\ a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Para desenhar nele, traçamos três retas perpendiculares, uma que será chamada de eixo x, outra de eixo y e a terceira de eixo z. As três retas se intersectam em um ponto que chamamos de origem O. Este ponto O terá coordenadas $O = (0,0,0)$.

Análogamente ao caso anterior, sobre cada uma das retas traçamos uma escala, que de preferência deve ser a mesma para todas. Os valores de x positivo, y positivo e z positivo serão distribuidos na forma que indica o desenho. Agora, nosso conjunto solução pode ser representado ali: por exemplo o ponto $P = (a,b,c)$ vai corresponder ao ponto que for intersecção do plano paralelo ao plano correspondente aos eixos xz que corta o eixo y em b e do plano paralelo ao plano correspondente aos eixos xy que corta o eixo z em c.



Obs. Uma solução de um sistema linear pode ser representada no plano ou no espaço por um ponto no mesmo.

Uma vez que sabemos onde desenhar e onde representar os objetos do conjunto, temos que ter uma noção de diferencia entre os objetos representados.

Começamos por diferenciar pontos. Para diferenciá-los basta ver que não são iguais. Isto será feito por meio da distância.

Definição 7.1 Dados dois pontos P e Q no plano ou espaço, definimos a distância entre P e Q como

- No plano, se $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

- No espaço, se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Obs. Decorre da definição que $d(P,Q) = 0$ se, e somente se $P = Q$. De fato, se $P = Q$ claramente $d(P,Q) = 0$. Por outro lado se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ então $d(P,Q) = 0$ garante que

$$(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + q_3 - p_3)^2 = 0.$$

De onde segue que

$$q_1 = p_1 \quad q_2 = p_2 \quad \text{e} \quad q_3 = p_3.$$

Portanto $P = Q$.

7.2 Vetores

Se dois pontos A e B no plano como no espaço não são iguais, nosso próximo passo é de alguma forma mensurar ou descrever como deve ser o deslocamento de A a para B. Para isto introduzimos o conceito de vetor.

Definição 7.2 Um vetor $\vec{u}$ no plano é um par ordenado de números reais (a,b). Análogamente, um vetor $\vec{u}$ no espaço é uma tripla ordenada de números reais (a,b,c). As entradas a,b,c recebem o nome de componentes do vetor.

Denotamos por $\mathbb{V}_2$ ao conjunto dos vetores no plano e por $\mathbb{V}_3$ ao conjunto de vetores no espaço, isto é

$$\mathbb{V}_2 = \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{V}_3 = \{(a,b,c),\ a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos sobre estes espaços duas operações: a soma e o produto por escalar. Dados $\vec{u} = (a,b), \vec{v} = (c,d)$ vetores no plano e $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\alpha\vec{u}$ aos vetores cujas componentes são dadas por

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d), \qquad \alpha\vec{u} = (\alpha a, \alpha b).$$

Analogamente ao caso do plano, dados $\vec{u} = (a,b,c)$ e $\vec{v} = (d,e,f)$ vetores no espaço e $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + e, c + f) \qquad \alpha\vec{u} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c).$$

Observamos como a definição é igual ao caso das matrizes e que, embora esta notação seja igual à notação que damos para os pontos, o significado é completamente diferente.

Os espaços dos vetores munidos da soma e produto por escalar definidos satisfazem as seguintes operações:

i- Comutatividade da soma: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
ii- Associatividade da soma: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
iii- Existe um único elemento $0 = (0,0)$ em $\mathbb{V}_2$ (ou $0 = (0,0,0)$ em $\mathbb{V}_3$) tal que $\vec{u} + 0 = u$.
iv- Para cada elemento $\vec{u}$ existe um único elemento, que denotamos por $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$.
v- $1\vec{u} = \vec{u}$.
vi- $(\lambda_1\lambda_2)\vec{u} = \lambda_1(\lambda_2\vec{u})$.
vii- $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{u}$.
viii- $\lambda_1(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda_1\vec{u} + \lambda_1\vec{v}$.

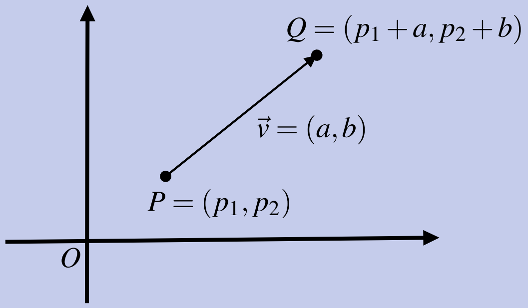
para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores e λ_1, λ_2 escalares.

Vemos assim que o conjunto dos vetores tem uma estrutura de espaço vetorial.

Os vetores agem no plano e no espaço produzindo deslocamentos. Por exemplo, dado um ponto $P = (p_1, p_2)$ no plano e um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ o ponto Q obtido ao se deslocar desde P na direção de $\vec{v}$ é dado por

$$Q = (p_1 + v_1, p_2 + v_2).$$

Graficamente isto pode ser representado por um segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ com origem em P e extremo em Q.



Desta forma, podemos ver cada ponto P, no plano ou no espaço, como deslocamentos do ponto origem O na direção do vetor $\overrightarrow{OP}$, cujas componentes são dadas precisamente pelas entradas do ponto, isto é

$$P = (a, b) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{OP} = (a + 0, b + 0) = (a, b).$$

$$P = (a, b, c) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{OP} = (a + 0, b + 0, c + 0) = (a, b, c).$$

Também podemos fazer o caminho contrário, dado dois pontos $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ procuramos o vetor $\overrightarrow{PQ}$ que mensura o deslocamento do ponto P ao ponto Q.

Gráficamente, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é representado pelo segmento de reta orientado com origem em P e extremidade em Q.

Neste caso é simples fazer a conta e obter

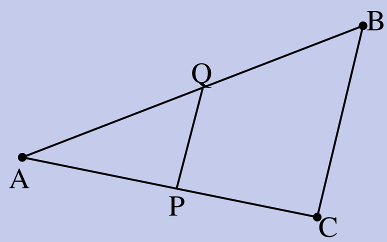
$$P = (p_1, p_2),\ Q = (q_1, q_2) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

$$P = (p_1, p_2, p_3),\ Q = (q_1, q_2, q_3) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

Definição 7.3 Sejam $\overrightarrow{AB}$ (que vai do ponto A ao ponto B) e $\overrightarrow{PQ}$ (que vai do ponto P ao ponto Q) dois segmentos de reta orientados que representam os correspondentes vetores. Dizemos que

- os segmentos de reta orientados representam o mesmo vetor se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.
- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são paralelos se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}\{0\}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{PQ}$.

■ **Exemplo 7.1** Seja $\widehat{ABC}$ um triângulo e sejam P e Q os pontos médios dos lados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ respectivamente. Então o segmento de reta que une P com Q é paralelo ao lado CB.



Vamos resolver isto com vetores. Sabemos que

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ},$$

então

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\
&= 2\overrightarrow{AQ}-2\overrightarrow{AP}\\
&= 2(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})\\
&= 2\overrightarrow{PQ}.
\end{aligned}$$

■

Definição 7.4

- Um vetor $\vec{v}$ é dito uma combinação linear de vetores $\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_k\}$ se existem escalares $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$ tais que

$$\vec{v}=\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_k\vec{u}_k$$

- Um conjunto de vetores $\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_k\}$ é dito linearmnete dependente (l.d) se existem escalares $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$, não todos simultaneamente nulos, tais que

$$\lambda_1\vec{u}_1,+\cdots+\lambda_k\vec{u}_k=\vec{0}.$$

Caso contrário dizemos que são linearmente independente (l.i).

Obs. Vamos dar uma ideia intuitiva sobre o que significa um conjunto de vetores ser linearmente independente ou linearmente dependente. Assuma que $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k\}$ é um conjunto linearmente dependente, então existem escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ tais que

$$\lambda_1\vec{u}_1,+\cdots+\lambda_k\vec{u}_k=\vec{0}$$

Isto significa que se começamos em um ponto P_0 arbitrário e fazemos o deslocamento dado pelo vetor $\lambda_1\vec{u}_1$ chegamos em P_1, isto é,

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\lambda_1\vec{u}_1.$$

Agora se nos deslocamos de P_1 seguindo o vetor $\lambda\vec{u}_2$ chegamos em P_2, isto é,

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda_2\vec{u}_2.$$

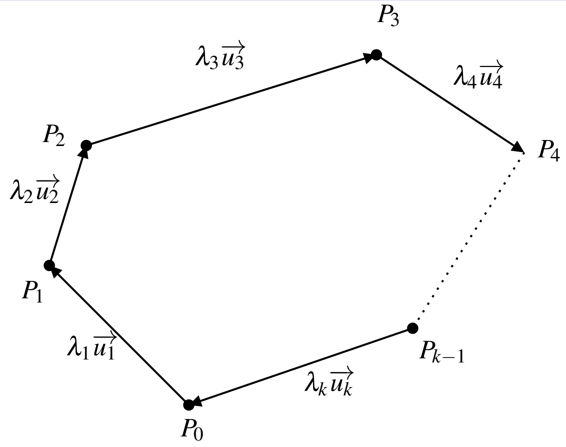
Procedendo desta forma, isto é,

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=\lambda_i\vec{u}_i,$$

chegamos a o ponto P_k. Mas como

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_k} &= \sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\\
&= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{u}_i=\vec{0}
\end{aligned}$$

temos que $P_k=P_0$. Ou seja, temos o seguinte percurso.



Caso os vetores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k\}$ sejam linearmente independentes nunca poderemos fazer um percurso fechado em P_0 como acima, pois a única forma de formar o $\vec{0}$ é fazendo todos os termos iguais a $\vec{0}$.

■ **Exemplo 7.2** 1. Os vetores $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$ $\overrightarrow{v}_2 = (2,1,0)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (2,0,-2)$ são linearmente dependentes. De fato

$$\overrightarrow{v}_3 = -2\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2.$$

2. Os vetores $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (1,0,1)$ são linearmente independentes. De fato, se

$$\alpha\overrightarrow{v}_1 + \beta\overrightarrow{v}_2 + \gamma\overrightarrow{v}_3 = 0.$$

Então

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Como

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Temos que o sistema tem solução única, portanto, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

■

Obs. Todo vetor do plano pode ser escrito unívocamente como combinação linear dos vetores

$$\{\vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1)\}.$$

Mais ainda, as coordenadas (x,y) de um ponto qualquer do plano $P = (x,y)$, podem ser vistas como as componentes da combinação linear, isto é,

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2.$$

Os eixos coordenados são os conjuntos

$$\text{eixo x} \rightarrow \{P,\ \overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1, x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{eixo y} \rightarrow \{P,\ \overrightarrow{OP} = y\,\vec{e}_2, y \in \mathbb{R}\}.$$

Todo vetor no espaço pode ser escrito unívocamente como combinação linear dos vetores

$$\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}.$$

Mais ainda, as coordenadas (x,y,z) podem ser vistas como as compenentes da combinação linear, isto é,

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3.$$

Os eixos coordenados são os conjuntos

$$\text{eixo x} \to \{P,\ \overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1, x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{eixo y} \to \{P,\ \overrightarrow{OP} = y\,\vec{e}_2, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{eixo z} \to \{P,\ \overrightarrow{OP} = z\,\vec{e}_3, z \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente, os planos coordenados podem ser descritos da seguinte forma

$$\text{plano yz} \to \{P,\ \overrightarrow{OP} = y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3,\ y,z \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{plano xz} \to \{P,\ \overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1 + z\,\vec{e}_3,\ x,z \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{plano xy} \to \{P,\ \overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2,\ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Determinar se um conjunto de vetores $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k$ é linearmente dependente é equivalente a determinar se existe uma $k-$upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$ tais que

$$\lambda_1\,\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\,\vec{u}_k = 0.$$

Este problema pode ser escrito em forma matricial como $AX = 0$ onde

$$A = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_k \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Assim, por exemplo, o problema de como determinar se um conjunto $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k\}$ de vetores no espaço é linearmente independente ou não, pode ser tratado da seguinte forma (fazemos aqui o caso do espaço como exemplo): assuma que

$$\vec{u}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}).$$

então a equação

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{u}_k = 0$$

pode ser escrita matricialmente (ou como um sistema linear) como

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{k1} \\ a_{12} \cdots a_{k2} \\ a_{13} \cdots a_{k3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se o sistema tem solução única temos $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ e, portanto, o conjunto é linearmente independente. Caso contrário, temos soluções com $\lambda_i \neq 0$ para alguns i's. Neste último caso o conjunto é linearmente dependente.

■ **Exemplo 7.3** Vamos mostrar agora que dados dois vetores linearmente independentes no plano, podemos escrever qualquer outro vetor como combinação linear deles. O mesmo acontece no espaço, isto é, com três vetores linearmente independentes podemos descrever qualquer outro vetor no espaço como combinação linear deles.

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores no plano. Então se $\vec{w} = (a, b)$ é um outro vetor queremos saber se existe α, β tal que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}$$

o que é equivalente a saber se o sistema

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

tem solução.

Em geral, se

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

sempre vai ter solução. Mas, pedir que o determinante seja diferente de zero é equivalente a dizer que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes. De fato, ao ter determinante diferente de zero, temos que o problema

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0},$$

tem por única solução $\alpha = \beta = 0$.

Analogamente, três vetores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ no espaço que sejam linearmente independentes nos permitem descrever qualquer outro vetor como combinação linear de estes vetores. ■

Do que foi discutido acima obtemos

Proposição 7.1

- Em $\mathbb{V}_2$ o número máximo de vetores linearmente independentes é 2.
- Em $\mathbb{V}_3$ o número máximo de vetores linearmente independentes é 3.

Demonstração: Assuma que, em $\mathbb{V}_2$, temos k vetores lineramente independentes que geram $\mathbb{V}_2$. Claramente $k > 1$ pois, pelo visto acima, se $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$ temos que $\vec{u} = (-b,a)$ satisfaz $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente. Assuma então que $k > 2$. Considere o sistema homogêneo associado

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos assim $k > 2$ variáveis e, portanto, o sistema possui váriáveis livres. De onde segue que existem soluções não nulas, o que é uma contradição. De fato, se há soluções não nulas temos que $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ não é lineramente independente.

O resultado para $\mathbb{V}_3$ se prova em forma análoga. ■

8. Produto entre vetores

Sobre um espaço vetorial nem sempre é possível definir uma operação produto cujo resultado seja um vetor do mesmo espaço. Em termos matemáticos, um espaço vetorial nem sempre admite uma estrutura de álgebra. No entanto outras noções de produto podem ser introduzidas. Este é o conteúdo deste capítulo.

8.1 Produto generalizado

Um produto entre elementos de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é uma aplicação $\star : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{K}$ que associa a dois elementos de $\mathbb{V}$ um outro elemento de outro espaço vetorial $\mathbb{K}$ satisfazendo as seguintes regras

a) Distributividade a respeito da soma.

$$\vec{u}\star(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\star\vec{v}) + (\vec{u}\star\vec{w}).$$

b) Distributividade a respeito do produto por escalar.

$$(\lambda\cdot\vec{v})\star\vec{u} = \lambda\cdot(\vec{v}\star\vec{u}) = \vec{v}\star(\lambda\cdot\vec{u}).$$

Assim o produto genérico $\star$ será determinado por

$$\begin{aligned}(a,b)\star(d,e) &= (a\vec{e}_1+b\vec{e}_2)\star(d\vec{e}_1+e\vec{e}_2)\\ &= ad(\vec{e}_1\star\vec{e}_1)+ae(\vec{e}_1\star\vec{e}_2)+bd(\vec{e}_2\star\vec{e}_1)+be(\vec{e}_2\star\vec{e}_2),\end{aligned}$$

para vetores em $\mathbb{V}_2$ e por

$$\begin{aligned}(a,b,c)\star(d,e,f) &= (a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3)\star(d\vec{e}_1+e\vec{e}_2+f\vec{e}_3)\\ &= ad(\vec{e}_1\star\vec{e}_1)+ae(\vec{e}_1\star\vec{e}_2)+af(\vec{e}_1\star\vec{e}_3)\\ &\quad +bd(\vec{e}_2\star\vec{e}_1)+be(\vec{e}_2\star\vec{e}_2)+bf(\vec{e}_2\star\vec{e}_3)\\ &\quad +cd(\vec{e}_3\star\vec{e}_1)+ce(\vec{e}_3\star\vec{e}_2)+cf(\vec{e}_3\star\vec{e}_3),\end{aligned}$$

para vetores em $\mathbb{V}_3$, portanto o produto fica determinado pelos valores que assumem

$$(\vec{e}_1\star\vec{e}_1) \quad (\vec{e}_1\star\vec{e}_2)$$

$$(\vec{e}_2 \star \vec{e}_1) \quad (\vec{e}_2 \star \vec{e}_2),$$

para vetores em $\mathbb{V}_2$, e por

$$(\vec{e}_1 \star \vec{e}_1) \quad (\vec{e}_1 \star \vec{e}_2) \quad (\vec{e}_1 \star \vec{e}_3)$$

$$(\vec{e}_2 \star \vec{e}_1) \quad (\vec{e}_2 \star \vec{e}_2) \quad (\vec{e}_2 \star \vec{e}_3)$$

$$(\vec{e}_3 \star \vec{e}_1) \quad (\vec{e}_3 \star \vec{e}_2) \quad (\vec{e}_3 \star \vec{e}_3),$$

para vetores em $\mathbb{V}_3$.

8.2 Produto escalar

O produto escalar, ou interno, entre dois vetores é um produto $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ que associa a dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ um escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ que chamamos de produto escalar de $\vec{u}$ com $\vec{v}$. Aqui $\mathbb{R}$ é visto como o espaço vetorial dos escalares.

Ele fica determinado pelas seguintes fórmulas

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 1 \quad (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = 0$$

$$(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) = 0 \quad (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = 1,$$

para vetores no plano, e por

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 1 \quad (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = 0 \quad (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) = 0$$

$$(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) = 0 \quad (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = 1 \quad (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) = 0$$

$$(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) = 0 \quad (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) = 0 \quad (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) = 1,$$

para vetores no espaço.

Portanto, no plano, se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (d, e)$ teremos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be,$$

e, no espaço, se $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$ teremos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf.$$

■ **Exemplo 8.1**

1.
$$(1, 2) \cdot (-1, -3) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = -7.$$

2.
$$(2, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$

■

Proposição 8.1 O produto escalar satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$.
ii) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se, e somente se $\vec{u} = \vec{0}$.
iii) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$ para qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.
iv) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
v) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Demonstração: Fazemos o caso $\mathbb{V}_3$ pois o outro é análogo. Observamos que iii- e iv- seguem da construção do produto. Se $\vec{u} = (a,b,c)$ temos que

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = a^2 + b^2 + c^2,$$

então

i) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ pois é soma de números não negativos.
ii) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.
iv) $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot d + b \cdot e + e \cdot j = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

■

Definição 8.1 A norma de um vetor $\vec{u}$ é o escalar dado por

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Um vetor de norma igual a 1 é dito um vetor unitário.

Corolário 8.1 Seja $\vec{u}$ um vetor, então $\vec{v} = \frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}$ é unitario.

Demonstração: Segue imediato da seguinte conta:

$$\left\| \frac{1}{\| \vec{u} \|}\vec{u} \right\| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{u}||} = 1.$$

■

Corolário 8.2 Seja $\vec{u}$ um vetor tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ para todo $\vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{0}$.

Demonstração: Em particular para $\vec{u} = \vec{v}$ teremos

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||u||^2.$$

Portanto $\vec{u} = \vec{0}$. ■

■ **Exemplo 8.2** Vamos mostrar que dados dois pontos P, Q temos que

$$d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \|.$$

Fazemos o caso do espaço, o outro é análogo. Se

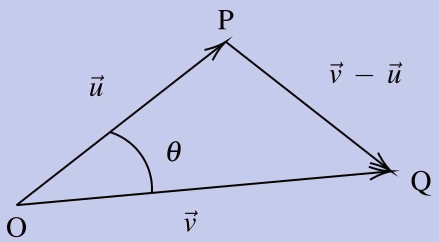
$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad Q = (q_1, q_2, q_3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

De onde

$$\| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + q_3 - p_3)^2} = d(P,Q).$$

■

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores em $\mathbb{V}_2$ ou $\mathbb{V}_3$ e considere uma representação deles de tal forma que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.



Seja $0 \leq \theta \leq \pi$ o ângulo formado pelos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$. Então, pela lei do cosseno, tiramos que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= d(P,Q)^2 \\ &= d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)\,d(O,Q)\cos(\theta) \\ &= \|\,\vec{u}\,\|^2 + \|\,\vec{v}\,\|^2 - 2\,\|\,\vec{u}\,\|\,\|\,\vec{v}\,\|\cos(\theta). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ &= \|\,\vec{u}\,\|^2 + \|\,\vec{v}\,\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}. \end{aligned}$$

Comparando obtemos que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\,\vec{u}\,\|\,\|\,\vec{v}\,\|\cos(\theta).$$

Definição 8.2 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores. O ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ definido por

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\,\vec{u}\,\|\,\|\,\vec{v}\,\|}.$$

é chamado de ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos ortogonais se $\cos(\theta) = 0$ ou, equivalentemente, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Neste caso denotamos $\vec{u} \perp \vec{v}$.

■ **Exemplo 8.3** Dois segmentos de reta são paralelos se os vetores que os representam tem um ângulo de $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. De fato se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ tiramos que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\,\vec{u}\,\|\,\|\,\vec{v}\,\|} = \frac{\lambda\,\vec{v}\cdot\vec{v}}{|\lambda|\,\|\,\vec{v}\,\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm 1.$$

■

Uma vez que temos a noção de perpendicularidade entre dois vetores $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ podemos perguntar se é possível decompor $\vec{v}$ como soma de dois elementos

$$\vec{v} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp},$$

onde

$$\vec{v}_{\|} = \lambda\vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{\perp}\cdot\vec{u} = 0.$$

A solução desta pergunta, embora muito simples, terá grande interesse para nosso trabalho depois.

Vamos assumir que sim. Neste caso, existe um α tal que

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \alpha\vec{u},$$

como, por hipótese,

$$0 = \vec{v}_{\perp}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u} - \alpha\,\|\,\vec{u}\,\|^2,$$

tiramos que

$$\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\,\vec{u}\,\|^2}.$$

Portanto

$$\vec{v} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp},$$

onde

$$\vec{v}_{\|} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\,\vec{u}\,\|^2}\vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{\perp} = \left(\vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\,\vec{u}\,\|^2}\vec{u}\right).$$

Definição 8.3 Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos. A aplicação que leva $\vec{v} \to \vec{v}_{\|}$ recebe o nome de projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e é denotada por

$$Proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\vec{u}.$$

Proposição 8.2 Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e α escalar, então

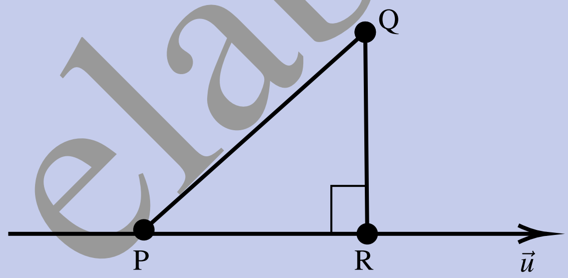
$$Proj_{\vec{u}}(\vec{v}+\alpha\vec{w}) = Proj_{\vec{u}}(\vec{v}) + \alpha Proj_{\vec{u}}(\vec{w})$$

Demonstração: Utilizando a definição da projeção ortogonal e as propriedades do produto escalar vemos que

$$\begin{aligned} Proj_{\vec{u}}(\vec{v}+\alpha\vec{w}) &= \frac{(\vec{v}+\alpha\vec{w})\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\vec{u} \\ &= \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\vec{u} + \alpha\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\vec{u} \\ &= Proj_{\vec{u}}(\vec{v}) + \alpha Proj_{\vec{u}}(\vec{w}). \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 8.4** Sejam P e Q dois pontos e $\vec{u}$ um vetor dado, queremos determinar um ponto R tal que $\overrightarrow{PR} = \lambda\vec{u}$ e $\overrightarrow{RQ} \perp \overrightarrow{PR}$ como na figura



Como vimos antes se $P = (p_1, p_2, p_3)$,$Q = (q_1, q_2, q_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ então

$$\overrightarrow{PR} = Proj_{\vec{u}}\ (\overrightarrow{PQ}),$$

Assumindo $R = (x, y, z)$ temos

$$\overrightarrow{PR} = (x - p_1, y - p_2, z - p_3) = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\cdot u.$$

Portanto

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\cdot u_1 \\ y &= p_2 + \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\cdot u_2 \\ z &= p_3 + \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\cdot u_3. \end{aligned}$$

■

8.3 Produto vetorial

O produto vetorial é um produto entre vetores de $\mathbb{V}_3$ cujo resultado é um vetor em $\mathbb{V}_3$. Este produto é denotado por $\times$ e é dado pelas seguintes condições

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{0} \quad (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_3 \quad (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{-e}_2$$

$$(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = -\vec{e}_3 \quad (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \vec{0} \quad (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1$$

$$(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_2 \quad (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 \quad (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = \vec{0} \quad .$$

Portanto a fórmula geral do produto é

$$(a,b,c) \times (d,e,f) = (bf - ce)\vec{e}_1 + (cd - af)\vec{e}_2 + (ae - bd)\vec{e}_3.$$

Como visto, lembrar da fórmula para o produto não é fácil. No entanto, podemos utilizar a seguinte regra mnemotécnica: Sejam $\vec{v} = (a,b,c)$, $\vec{u} = (d,e,f)$ vetores e $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ os vetores canônicos. Utilizando formalmente o cálculo de determinantes, temos que

$$\vec{v} \times \vec{u} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (bf - ce)\vec{e}_1 + (cd - af)\vec{e}_2 + (ae - bd)\vec{e}_3.$$

Observamos que esta fórmula não faz sentido no sentido estrictamente matemático.

Proposição 8.3 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e α um escalar. São válidas as seguintes identidades:

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

ii)

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} - & \vec{w} & - \\ - & \vec{u} & - \\ - & \vec{v} & - \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0,$$

e, consequentemente, $\vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$ e $\vec{v} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$.

iii) $\alpha(\vec{v} \times \vec{u}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{u} = \vec{v} \times (\alpha\vec{u})$.

iv) $(\vec{w} + \vec{v}) \times \vec{u} = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u}$.

Demonstração: Vamos fazer a prova utilizando a regra vista acima. Sejam $\vec{v} = (a,b,c), \vec{u} = (d,e,f)$ e $\vec{w} = (g,h,i)$.

i-

$$\vec{v} \times \vec{u} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = -(\vec{u} \times \vec{v}).$$

ii- Fazemos a conta

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) &= (g\vec{e}_1 + h\vec{e}_2 + i\vec{e}_3) \cdot (bf - ce)\vec{e}_1 + (cd - af)\vec{e}_2 + (ae - bd)\vec{e}_3 \\ &= g(bf - ce) + h(cd - af) + i(ae - bd) \\ &= \det \begin{pmatrix} - & \vec{w} & - \\ - & \vec{u} & - \\ - & \vec{v} & - \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Claramente, quando fizermos $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ ou $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ estaremos calculando o determinante de uma matriz com duas linhas repetidas. Portanto o resultado é 0.

iii-

$$\alpha(\vec{v}\times\vec{u}) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (\alpha\vec{v})\times\vec{u} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \end{pmatrix} = \vec{v}\times(\alpha\vec{u}).$$

iv- Segue imediatamente das propriedades que definem o produto vetorial como produto.

■

Obs. Observamos que

$$\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}.$$

De fato, pela propriedade i- da proposição acima, temos

$$\vec{u}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{u} \;\Rightarrow\; 2(\vec{u}\times\vec{u}) = \vec{0},$$

então,

$$\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}.$$

■ **Exemplo 8.5** Sejam $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,-2,-1)$. Então

$$\begin{aligned} \vec{u}\times\vec{v} &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-2-(-3))\vec{e}_1 - (-1-1)\vec{e}_2 + (-2-1)\vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ &= (1,2,-3) \end{aligned}$$

Observamos que

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (1,1,1)\cdot(1,2,-3) = 1+2-3 = 0$$

e

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (1,-2,-1)\cdot(1,2,-3) = 1-4+3 = 0$$

■

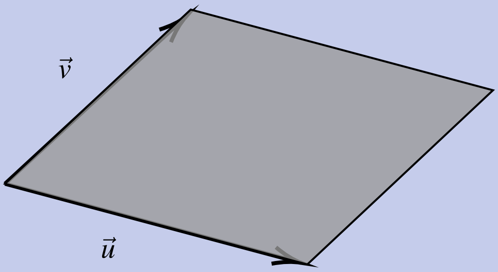
Vamos calcular a norma do produto vetorial entre dois vetores. Sejam $\vec{v} = (a,b,c)$ e $\vec{u} = (d,e,f)$ então

$$\begin{aligned} \|\,\vec{v}\times\vec{u}\,\|^2 &= (bf-ce)^2 + (cd-af)^2 + (ae-bd)^2 \\ &= d^2f^2 - 2bfce + c^2e^2 + c^2d^2 - 2cdaf + a^2f^2 \\ &\quad + a^2e^2 - 2aedb + b^2d^2 \\ &\quad + c^2f^2 - c^2f^2 + b^2e^2 + a^2d^2 - a^2d^2 \\ &= (a^2f^2 + b^2f^2 + c^2f^2) + (a^2e^2 + b^2e^2 + c^2e^2) \\ &\quad + (a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\ &\quad - 2bfce - 2cdaf - 2aedb - c^2f^2 - b^2e^2 - a^2d^2 \\ &= (a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2) - ((a,b,c)\cdot(d,e,f))^2 \\ &= \|\,\vec{u}\,\|^2\|\,\vec{v}\,\|^2 - (\vec{u}\times\vec{v})^2 \\ &= \|\,\vec{u}\,\|^2\|\,\vec{v}\,\|^2\,(1-\cos(\theta)^2) \\ &= \|\,\vec{u}\,\|^2\|\,\vec{v}\,\|^2\,\sin(\theta)^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\| \vec{v} \times \vec{u} \| = \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \ \sin(\theta).$$

Assim $\| \vec{v} \times \vec{u} \|$ é a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Corolário 8.3 $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se, e só se, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Claramente se $u = \lambda v$ temos que

$$\vec{v} \times \vec{u} = \lambda \vec{u} \times \vec{u} = 0.$$

Por outro lado, se $\vec{v} \times \vec{u} = 0$ se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é zero ou π. Portanto $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. ∎

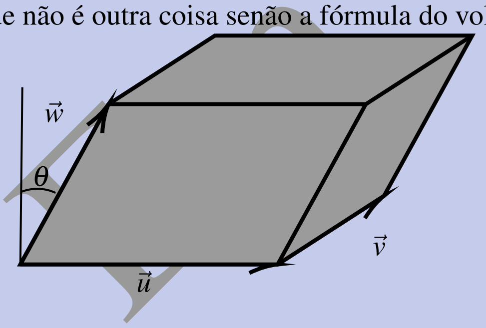
Corolário 8.4 Dados três vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ o volume do paralelepípido determinado por esses é dado por

$$Vol = |\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})|.$$

Demonstração: Observamos que

$$|\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})| = \| \vec{w} \| \, \| (\vec{v} \times \vec{u}) \| \ |\cos(\theta)|,$$

que não é outra coisa senão a fórmula do volume do sólido que é a área da base pela altura do mesmo.



∎

III Objetos Geométricos

9. Retas

Uma reta é uma linha formada por um número infinito de pontos que não tem inicio nem fim. Mas qual a diferência entre reta e curva infinita? Para uma resposta teríamos que entrar em criterios sobre como a reta é a curva do plano que minimiza a distância entre quaisquer dois de seus pontos. Não vamos percorrer este caminho. Faremos algo um pouco mais intuitivo e utilizando conhecimentos prévios de matemática. Em particular vamos ver que as retas representam soluções de sistemas lineares com uma variável livre.

9.1 Retas

Observamos que, quando foram intoduzidas as coordenadas, descrevemos os eixos coordenados (que são retas) como um conjunto de pontos P tais que o vetor que mede o deslocamento de O para P, isto é, $\overrightarrow{OP}$ é um multiplo de um vetor fixo, por exemplo $\vec{e}_1$ no caso do eixo x.

Na matemática, a reta aparece por exemplo nas aproximações de funções por polinômio de Taylor de primeira ordem. Se queremos estudar o comportamento de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ao redor de um ponto x_0 então, do polinômio de Taylor tiramos que se $y=f(x)$,

$$y \simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

que é a equação da reta, isto é, uma equação da forma

$$y = mx+b.$$

Assim, uma reta r é descrita então pelo conjunto

$$r:\{P=(x,y), y=mx+b\}.$$

Vamos manipular um pouco esta equação para obter uma equação vetorial. Se $P=(x,y)$ é um ponto da reta, então temos que $P=(x,mx+b)$. Seja Q o ponto de coordenadas $(0,b)$ e $\vec{v}$ o vetor $(1,m)$ então, em forma vetorial, podemos dizer que

$$\overrightarrow{OP} = x(1,m)+(0,b) = x\vec{v}+\overrightarrow{OQ}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ} = x\vec{v}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

De onde tiramos que podemos escrever a equação da reta em forma vetorial como

$$r : \{P = (x,y),\ \overrightarrow{QP} = x\vec{v}, \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

Esta equação coincide em estrutura com a que vimos para eixos coordenados.

Obs. A equação acima diz: A reta é o conjunto r, que contém o ponto Q, tal que $\overrightarrow{QP}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$ para todo $P \in r$.
De fato, $Q \in r$ pois, fazendo $x = 0$, temos que $\overrightarrow{QP} = 0$ de onde segue que $P = Q$.

Chegamos assim a seguinte definição:

Definição 9.1 Uma reta r, no plano ou espaço, que passa por um ponto Q e é paralela ao vetor $\vec{v}$ é o conjunto de pontos P no plano (ou espaço) que satisfaz a equação vetorial

$$\overrightarrow{QP} = \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obs.

- O ponto $Q \in r$, pois $\overrightarrow{QQ} = 0\vec{v} = \vec{0}$.
- Existe um ponto $P_0 \in r$ tal que $\overrightarrow{QP_0} = \vec{v}$.
- Para cada ponto P_0 na reta existe um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{QP_0} = \lambda_0\vec{v}$. Isto é, toda a reta é formada por todos os pontos P_0 tais que $\overrightarrow{QP_0}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$.

Proposição 9.1 No espaço, a reta r que passa pelo ponto Q e é paralela ao vetor $\vec{v}$ pode ser descrita como o conjunto de pontos P que satisfaz

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{v} = 0.$$

Demonstração: Das propriedades do produto vetorial sabemos que $\overrightarrow{QP} \times \vec{v} = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{QP} = \lambda\vec{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ portanto se, e somente se, satisfaz a equação da reta. ■

■ **Exemplo 9.1** Vamos escrever a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $Q = (1,-2,5)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (1,-1,-2)$. Então, r consiste de todos os pontos $P = (x,y,z)$ tais que

$$(x-1, y+2, z-5) = \lambda(1,-1,-2)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Para facilitar as ideias fazemos as contas no espaço. Assuma que Q tem coordenadas (x_0,y_0,z_0) e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Se o ponto genérico $P \in r$ tem coordenadas $P = (x,y,z)$, então a equação vetorial da reta r é dada por

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \lambda(v_1,v_2,v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

Assim, temos uma outra forma de definir a reta, equivalente com a anterior

Definição 9.2 Uma reta r no plano que passa pelo ponto $Q = (x_0,y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (v_1,v_2)$ é o conjunto de pontos P do plano que satisfazem a equação paramétrica

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uma reta r no espaço, que passa pelo ponto $Q=(x_0,y_0,z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=v_1,v_2,v_3)$ é o conjunto de pontos P do espaço que satisfazem a equação paramétrica

$$\begin{cases} x &=& x_0 &+& \lambda v_1 \\ y &=& y_0 &+& \lambda v_2 \\ z &=& z_0 &+& \lambda v_3 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obs. Quando escrita dessa forma temos que a reta nada mais é do que a representação gráfica da solução de um sistema linear (de duas incógnitas e duas equações no plano e de três incógnitas e três equações no espaço) cuja matriz escalonada reduzida é quadrada e tem uma única linha nula. Ou seja, as retas representam o conjunto solução de sistemas lineares com uma variável livre. De fato, por exemplo, para um sistema de 3 equações e 3 incógitas com uma matriz escalonada reduzida com uma linha nula, teremos uma solução da forma

$$S=\{(x_0+\lambda v_1, y_0+\lambda v_3, x_0+\lambda v_3),\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

que coincide com a equação paramétrica da reta.

■ **Exemplo 9.2** Vamos escrever a equação paramétrica da reta do exemplo anterior, isto é a reta que passa pelo ponto $Q=(1,-2,5)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(1,-1,-2)$. Então, r consiste de todos os pontos $P=(x,y,z)$ tais que

$$\begin{cases} x &=& 1+\lambda \\ y &=& -2-\lambda \\ z &=& 5-2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad ,$$

■

A equação paramétrica

$$\begin{cases} x &=& x_0 &+& \lambda v_1 \\ y &=& y_0 &+& \lambda v_2 \\ z &=& z_0 &+& \lambda v_3 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad .$$

diz que dado um ponto $P=(x,y,z)$ na reta, existe um λ comum tal que

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\lambda \quad \frac{y-y_0}{v_2}=\lambda \quad \frac{z-z_0}{v_3}=\lambda,$$

então, um ponto $P=(x,y,z)$ da reta deve satisfazer as identidades

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}.$$

Essa última expressão é conhecida como equação simétrica da reta que passa pelo ponto $Q=(x_0,y_0,z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$.

Obs. Caso algum dos v_i seja 0 a equação em forma simétrica, como escrita acima, fica mal definida. Mas é só perceber que, por exemplo, se $v_1=0$ e $v_2\neq 0$ e $v_3 \neq 0$ então da equação paramétrica tiramos que $x=x_0$. Onde a equação simétrica é

$$x=x_0 \quad \frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}.$$

■ **Exemplo 9.3** Vamos escrever a equação simétrica da reta dos exemplos anteriores, isto é a reta que passa pelo ponto $Q=(1,-2,5)$ e paralela ao vetor $\vec{v}=(1,-1,-2)$. Então, a retar r consiste de todos os pontos $P=(x,y,z)$ tais que

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{-2}.$$

■

Resumindo: Para obter a equação de uma reta é necessário um ponto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ que esteja na reta e um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ paralelo a ela. Depois é só substituir na fórmula correspondente. Isto é, em

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(v_1, v_2, v_3) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

para a forma vetorial, em

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

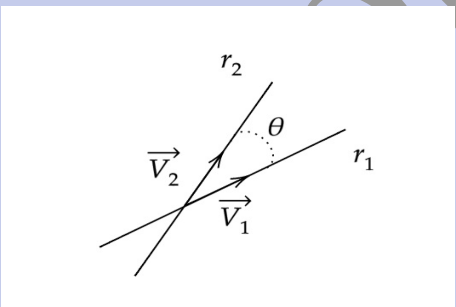
para a forma paramétrica, ou em

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

para a forma simétrica.

9.2 Ângulo entre retas

Dadas duas retas $r_1 : \overrightarrow{PQ_1} = \lambda \vec{v}_1$ e $r_2 : \overrightarrow{PQ_2} = \lambda \vec{v}_2$ o ângulo θ entre elas



é definido como o $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{||\vec{v}_1|| \, ||\vec{v}_2||}$$

Se o ângulo é 0 as retas são ditas paralelas e se o ângulo é $\frac{\pi}{2}$ são ditas perpendiculares.

9.3 Posição Relativa de retas

Sejam $r_1 : \overrightarrow{Q_1P} = \lambda \vec{v}_1$ e $r_2 : \overrightarrow{Q_2P} = \lambda \vec{v}_2$ duas retas no plano.

Primeiro caso: Se $\vec{v}_1 = a\vec{v}_2$ para algum $a \neq 0$ então temos duas possibilidades

i- $Q_2 \in r_1$. Neste caso as retas são iguais: De fato como $Q_2 \in r_1$ temos que $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \lambda_0 \vec{v}_1$. De onde segue que, para todo $P \in r_1$, existe um λ_1 tal que $\overrightarrow{Q_1P} = \lambda_1 \vec{v}_1$

$$\overrightarrow{Q_2P} = \overrightarrow{Q_2Q_1} + \overrightarrow{Q_1P} = -\lambda_0 \vec{v} - \lambda_1 \vec{v}_1 = a(\lambda_0 + \lambda_1)\vec{v}_2.$$

Portanto $P \in r_2$. Analogamente se prova que todo $P \in r_2$ pertence a r_1.

ii- $Q_2 \notin r_1$. Neste caso as retas são paralelas (claramente $\cos(\theta) = 0$ para θ o ângulo entre as retas). De fato, para haver interseção teria que existir um ponto P_0 que satisfaça as duas equações, isto é, existem λ_1 e λ_2 tais que

$$\overrightarrow{Q_1P_0} = \lambda_1 \vec{v}_1 = a\lambda_1 \vec{v}_2 \qquad \overrightarrow{Q_2P_0} = \lambda_2 \vec{v}_2$$
$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P_0} - \overrightarrow{Q_2P_0} = (a\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_2,$$

e portanto $Q_2 \in r_2$, o que é uma contradição.

Segundo caso: Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente independentes as retas se intersectam. De fato, como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente independentes existem a, b tais que

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2.$$

Vamos mostrar que o ponto $P \in r_1$ tal que $\overrightarrow{Q_1P} = a\vec{v}_1$ é o único ponto de r_1 que está em r_2, isto é

$$r_1 \bigcap r_2 = \{P\}.$$

De fato

$$\overrightarrow{Q_2P} = \overrightarrow{Q_2Q_1} + \overrightarrow{Q_1P} = -\overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_1P} = -(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + a\vec{v}_1 = -b\vec{v}_2$$

Portanto $P \in r_1 \bigcap r_2$. Se existir um outro $P' \in r_1 \bigcap r_2$ teremos que

$$\overrightarrow{PP'} = a\vec{v}_1 = a\vec{v}_2,$$

para escalares a_1, a_2. Isto gera uma contradição pois temos assumido que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente independentes.

Quando tratarmos com retas no espaço aparece mais uma possibilidade.

Sejam $r_1 : \overrightarrow{Q_1P} = \lambda\vec{v}_1$ e $r_2 : \overrightarrow{Q_2P} = \lambda\vec{v}_2$ duas retas no espaço.

Primeiro caso: $\vec{v}_1 = a\vec{v}_2$, isto é, os vetores são linearmente dependentes. Temos duas possibilidades

i- $Q_2 \in r_1$. Neste caso as retas são iguais e a demonstração é idêntica ao caso 1 i-no plano

ii- $Q_2 \notin r_1$. Neste caso as retas são paralelas e não se cruzam e a demonstração é idêntica ao caso 1 ii-no plano

Segundo caso: Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente independentes. Temos duas possibilidades.

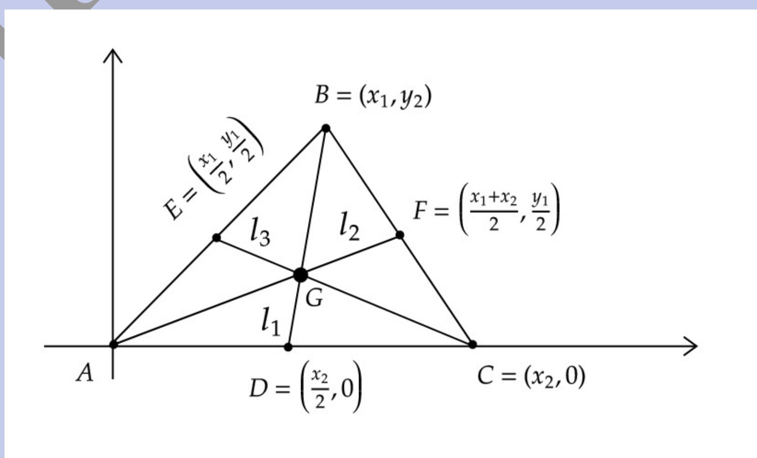
i- Se $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, as retas se intersectam. A demonstração deste fato é muito similar ao Caso 2 do plano.

ii- Se $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente independentes as retas são ditas reversas e não se intersectam. De fato, se $P \in r_1 \cap r_2$ então existe λ_1 e λ_2 tais que $\overrightarrow{Q_1P} = \lambda_1\vec{v}_1$ e $\overrightarrow{Q_1P} = \lambda_2\vec{v}_2$, portanto

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{Q_1P} - \overrightarrow{Q_2P} = \lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2,$$

o que é uma contradição.

■ **Exemplo 9.4** Considere o triângulo



Vamos mostrar que existe um único ponto G na intersecção das 3 retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 para isto vemos que

- $\ell_1 : D + \lambda\overrightarrow{DB} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_2}{2}, 0\right) + \lambda\left(x_1 - \frac{x_2}{2}, y_1\right).$
- $\ell_2 : A + \alpha\overrightarrow{AF} \quad \Rightarrow \quad \alpha\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1}{2}\right).$
- $\ell_3 : C + \beta\overrightarrow{CE} \quad \Rightarrow \quad (x_2, 0) + \beta\left(\frac{x_1}{2}, x_2, \frac{y_1}{2}\right).$

Observamos que, por ser um triângulo, ℓ_1 e ℓ_2 não são paralelas então existe $\{G\} = \ell_1 \cap \ell_2$. Portanto G é tal que existem α_0, λ_0 satisfazendo

- $\frac{\alpha_0}{2}(x_1 + x_2) = \lambda_0 \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right) + \frac{x_2}{2}$.
- $\frac{\alpha_0}{2} y_1 = \lambda_0 y_1$.

Então

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

Donde

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2}{3}, \frac{y_1}{3}\right).$$

Por outro lado, vemos que $G \in \ell_3$. De fato, ao fazer $B = \frac{2}{3}$

$$(x_2, 0) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{3}, \frac{y_1}{3}\right) = G.$$

Então

$$\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = \{G\}.$$

■

9.4 Distâncias

Estudaremos aqui somente o caso do espaço, pois o plano torna-se um caso particular deste.

Dados dois conjuntos A e B sobre um espaço onde é possível medir, a distância entre esses dois conjuntos será definida por

$$dist(A, B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a, b),$$

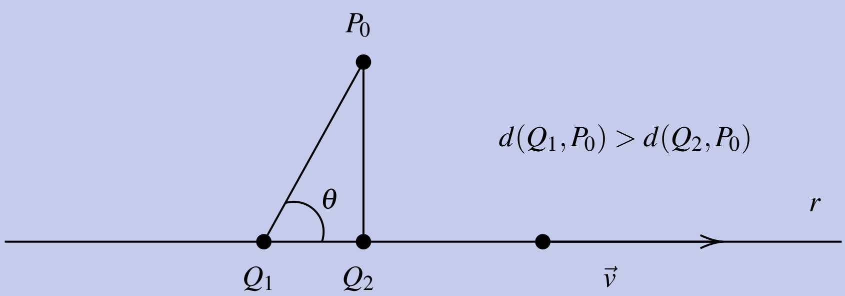
isto é, p ínfimo de todas as possíveis distâncias entre os pontos de A e B. Caso existam $a \in A$ e $b \in B$ que realizam esse ínfimo, dizemos que a e b realizam a distância e portanto

$$d(A, B) = d(a, b).$$

Distância ponto-reta: Dado um ponto P_0 e uma reta $r : \overrightarrow{Q_1 P_1} = \lambda \vec{v}$ calculamos a distância entre P_0 e r como

$$d(P, r) = \inf_{P \in \{P_0\},\, Q \in r} d(P, Q) = \inf_{Q \in r} d(P_0, Q).$$

Agora observamos o seguinte desenho



Pelo teorema de Pitágoras, vemos que a distância será realizada por aquele ponto $Q_2 \in r$ tal que $\overrightarrow{Q_2P_0}$ é perpendicular a $\vec{v}$. Mais ainda, observamos que $\overrightarrow{Q_2P_0}$ pode ser escrito como

$$\overrightarrow{Q_2P_0} = \overrightarrow{Q_1P_0} - Proj_{\vec{v}}(\overrightarrow{Q_1}P_0) = \overrightarrow{Q_1P_0} - \frac{\overrightarrow{Q_1P_0} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v},$$

de onde

$$\begin{aligned} d(P_0, r)^2 &= \left|\left|\overrightarrow{Q_2P_0}\right|\right|^2 \\ &= \left|\left|\overrightarrow{Q_1P_0}\right|\right|^2 - \frac{(\overrightarrow{Q_1P_0} \cdot \vec{v})^2}{||\vec{v}||^2} \\ &= \left|\left|\overrightarrow{Q_1P_0}\right|\right|^2 (1 - \cos(\theta)^2) \\ &= \left|\left|\overrightarrow{Q_1P_0}\right|\right|^2 \sin(\theta)^2 = \frac{\left|\left|\overrightarrow{Q_1P_0} \times \vec{v}\right|\right|^2}{||\vec{v}||^2}. \end{aligned}$$

Assim,

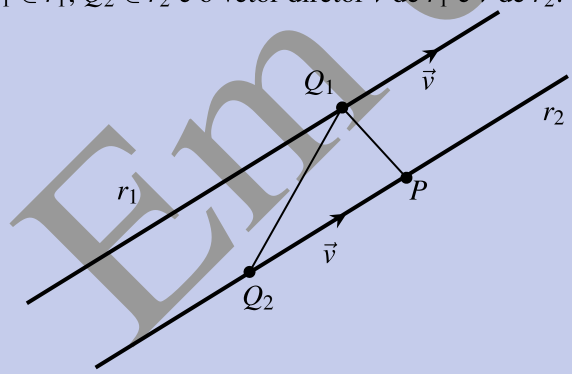
$$d(P_0, r_2) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{Q_1P_0} \times \vec{v}\right|\right|}{||\vec{v}||}.$$

Distância reta-reta:

No caso de duas retas poderemos falar de distância entre elas quando tivermos duas retas paralelas ou reversas, pois caso se intersectem a distância será 0. De fato, se temos duas retas r_1 e r_2 que se intersectam, existe um ponto $P \in r_1 \cap r_2$, então $P \in r_1$ e $P \in r_2$ e

$$d(r_1, r_2) = \inf_{Q_1 \in r_1,\, Q_2 \in r_2} d(Q_1, Q_2) = d(P, P) = 0$$

Se as retas são paralelas, podemos fazer o desenho delas sobre um plano onde identificamos os pontos $Q_1 \in r_1$, $Q_2 \in r_2$ e o vetor diretor $\vec{v}$ de r_1 e $\vec{v}$ de r_2.



Novamente, pelo teorema de Pitágoras, vemos que a distância será realizada pelo ponto $P \in r_2$ tal que $\overrightarrow{PQ_1}$ é perpendicular a $\vec{v}$. Mais ainda, observamos que $\overrightarrow{PQ_1}$ pode ser escrito como

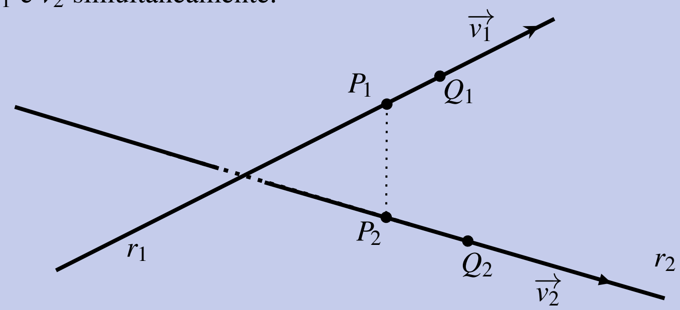
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ_1} &= \overrightarrow{Q_2Q_1} - \overrightarrow{Q_2P} \\ &= \overrightarrow{Q_2Q_1} - Proj_{\vec{v}}(\overrightarrow{Q_2Q_1}) \\ &= \overrightarrow{Q_2Q_1} - \frac{\overrightarrow{Q_2Q_1} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} \end{aligned}$$

Procedendo de forma similar ao caso do ponto, temos

$$d(r_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{Q_2Q_1} \times \vec{v}||}{||\vec{v}||}.$$

Se temos duas retas $r_1 : \overrightarrow{PQ_1} = \lambda \vec{v}_1$ e $r_2 : \overrightarrow{PQ_2} = \lambda \vec{v}_2$ que são reversas então a distância entre as duas retas será dada pela distância entre dois pontos $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ tais que $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v}_1$ e $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v}_2$.

Assim sendo, este vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ será dado pela projeção ortogonal de $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ na direção $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ que é ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ simultaneamente.



Portanto,

$$d(r_1, r_{2)} = ||\overrightarrow{P_1P_2}|| = ||Proj_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}(\overrightarrow{Q_1Q_2})|| = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{Q_1Q_2}|}{||\vec{v}_1 \times \vec{v}_2||}.$$

10. Planos

No capítulo anterior estudamos as retas e suas características. Em particular vimos que estas representam soluções de sistemas lineares com uma variável livre. Neste capítulo veremos os planos. Estes são representações de soluções de sistemas lineares de três incógnitas com duas variáveis livres.

10.1 Planos

O plano euclidiano pode ser visto como o conjunto de pontos P tais que o vetor que mede o deslocamento de P com respeito a um ponto O pode ser escrito como uma combinação linear de dois vetores fixos que são linearmente independentes $\{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$. Isto é, $P = (x,y)$ então

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Então, podemos generalizar esta construção para o espaço. Este é o conteúdo da seguinte definição.

Definição 10.1 O plano π que passa por um ponto Q e é paralelo aos vetores linearmente independentes $\vec{v}, \vec{w}$ é o conjunto de pontos P tais que

$$\overrightarrow{QP} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}.$$

Obs.

- Um ponto P está no plano π se $\overrightarrow{QP}$ é combinação linear de $\{\vec{v}, \vec{w}\}$. Em particular, $Q \in \pi$ pois $\overrightarrow{QQ} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$
- Existem pontos $P_1, P_2 \in \pi$ tais que $\overrightarrow{QP_1} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{QP_1} = \vec{w}$.

  Demonstração: De fato, na equação do plano,

  $$\overrightarrow{QP} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}.$$

  Se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$ sabemos que existe P_1 tal que

  $$\overrightarrow{QP_1} = 1\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{v}$$

  Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ sabemos que existe P_2 tal que

  $$\overrightarrow{QP_2} = 0\vec{v} + 1\vec{w} = \vec{w}.$$

■

■ **Exemplo 10.1** Seja $Q = (0,-1,2)$, $\vec{v} = (1,-2,1)$ e $\vec{w} = (-1,0,3)$. Então, um ponto $P = (x,y,z)$ está no plano π que passa por Q e é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ se

$$(x, y+1, z-2) = \lambda_1(1,-2,1) + \lambda_2(-1,0,3) \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

■

A equação do plano pode ser escrita em termos de coordenadas como segue: O plano π que passa por um ponto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores linearmente independentes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ é o conjunto de pontos $P = (x,y,z)$ tais que

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda_1(v_1, v_2, v_3) + \lambda_2(w_1, w_2, w_3),$$

de onde segue que

$$\pi : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 \\ y &= y_0 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 \\ z &= z_0 + \lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é conhecida como equação paramétrica do plano.

■ **Exemplo 10.2** Seja $Q = (0,-1,2)$, $\vec{v} = (1,-2,1)$ e $\vec{w} = (-1,0,3)$. Então, um ponto $P = (x,y,z)$ está no plano π que passa por Q e é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ se

$$\pi : \begin{cases} x &= 0 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ y &= -1 - 2\lambda_1 \\ z &= 2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Definição 10.2 Um vetor $\vec{v}$ é dito paralelo ao plano π se para qualquer $P \in \pi$ existe um $Q \in \pi$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$. Um vetor $\vec{\eta}$ é dito normal ao plano se $\vec{\eta} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ para quaisquer $P, Q \in \pi$.

Com esta definição obtemos outra forma de descrever o plano π. Seja π o plano que passa por um ponto Q e é paralelo aos vetores linearmente independentes $\vec{v}, \vec{w}$. Defina $\vec{\eta} = \vec{v} \times \vec{w}$ então, claramente $\eta \cdot \vec{v} = \eta \cdot \vec{w} = 0$. Da definição tiramos que o plano π que passa por Q e é paralelo aos vetores $\vec{v}, \vec{w}$ é o conjunto de pontos P tais que

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{\eta} = 0.$$

De fato, se $P \in \pi$ existem escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{QP} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w},$$

de onde segue que

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{\eta} = 0.$$

Por outro lado, assuma que $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{\eta} = 0$. Utilizando que $\{\vec{\eta}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são linearmente independentes no espaço, temos

$$\overrightarrow{QP} = \lambda_1 \vec{\eta} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w}.$$

Como

$$0 = \overrightarrow{QP} \cdot \vec{\eta} = \lambda_1 \|\vec{\eta}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

de onde

$$\overrightarrow{QP} = \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w}$$

portanto $P \in \pi$.

Neste caso o vetor $\vec{\eta}$ recebe o nome de vetor normal ao plano π pois, para todo par de pontos P e Q no plano π temos que, $\overrightarrow{QP}$ é ortogonal a $\vec{\eta}$.

Temos assim que o plano π que passa por Q e tem $\vec{\eta}$ como vetor normal é o conjunto de pontos P que satisfaz

$$\pi : \{P \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{QP} \cdot \vec{\eta} = 0\}.$$

Se $P = (x,y,z)$, $Q = (x_0,y_0,z_0)$ e $\vec{\eta} = (a,b,c)$ então a equação acima pode ser escrita como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) = 0,$$

ou

$$ax + by + cz = (ax_0 + by_0 + cz_0) := d,$$

que é a equação geral do plano. Temos mostrado com isto o seguinte:

Proposição 10.1 O plano é a representação gráfica do conjunto solução de um sistema linear com duas variáveis livres.

Obs. Para estudar o comportamento de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ao redor de um ponto (x_0,y_0), podemos calcular o polinômio de Taylor de primeiro grau ao redor do ponto:

$$f(x,y) = z \simeq f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Temos assim que f pode ser descrita, ao redor de (x_0,y_0) pela equação de um plano. Este plano recebe o nome de plano Tangente a $z = f(x,y)$ em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

■ **Exemplo 10.3** Seja $Q = (0,-1,2)$, $\vec{v} = (1,-2,1)$ e $\vec{w} = (-1,0,3)$. Observamos que

$$\vec{\eta} = \vec{v} \times \vec{w} = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (\ -6,-4,-2\ ).$$

Então, um ponto $P = (x,y,z)$ está no plano se

$$-6x - 4y - 2z = (0 + 4 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y + z = 0.$$

■

■ **Exemplo 10.4** Vamos achar condições para determinar se três pontos P_1, P_2, P_3 estão no mesmo plano.

Se eles estão no mesmo plano temos que $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são paralelos ao plano, portanto $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ deve ser normal ao plano. De onde tiramos que

$$\overrightarrow{P_2P_3} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0.$$

Análogamente, se temos três pontos P_1, P_2, P_3 no plano podemos determinar a equação deste considerando o vetor normal $\vec{\eta} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ e um ponto qualquer, por exemplo P_1, e substituir na equação do plano

$$\pi : \{P \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{\eta} = 0\}.$$

■

Resumindo: Para obter a equação de um plano são necessários um ponto no plano $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e dois vetores linearmente independentes e paralelos ao plano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Com esta informação, a equação do plano fica

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda_1(v_1, v_2, v_3) + \lambda_2(w_1, w_2, w_3) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

na forma vetorial, ou

$$\pi : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 \\ y & = & y_0 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 \\ z & = & z_0 + \lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 \end{array} \right. \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

na forma paramétrica.

Também podemos descrever um plano a partir de um ponto no plano $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal $\vec{\eta} = (a, b, c)$. Neste caso, temos uma equação para descrevé-lo, chamada de equação geral do plano, e que pode ser obtida a partir do vetor normal e do ponto ao fazer

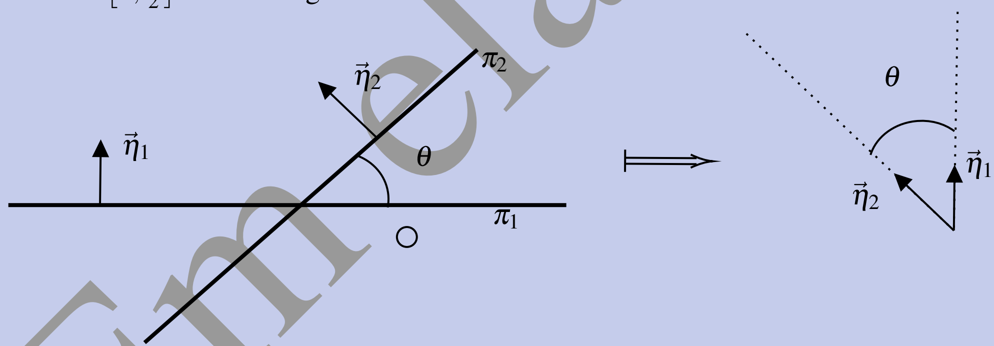
$$ax + by + cz = (ax_0 + by_0 + dz_0).$$

A relação entre as duas formas de descrever o plano é a seguinte:

- Os vetores paralelos $\vec{v}$ e $\vec{w}$ fornecem um vetor normal no plano $\vec{\eta} = \vec{v} \times \vec{w}$.
- O vetor normal fornece dois vetores paralelos ao plano, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que são vetores linearmente independentes e que ressolvem a equação $\vec{\eta} \cdot \vec{u} = 0$.

10.2 Ângulo

Ângulo entre dois planos: Dados dois planos $\pi_1 : \overrightarrow{Q_1P} \cdot \vec{\eta}_1 = 0$ e $\pi_2 : \overrightarrow{Q_2P} \cdot \vec{\eta}_2 = 0$ o ângulo entre eles é definido como o $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ como na figura

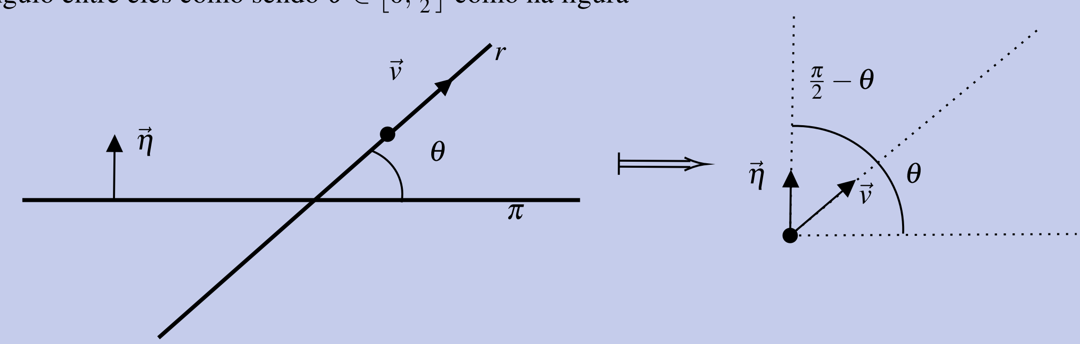


é fácil ver que

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2|}{||\vec{\eta}_1|| \, ||\vec{\eta}_2||}.$$

Dois planos cujo ângulo é $\frac{\pi}{2}$ são ditos perpendiculares. Caso o ângulo entre os planos seja $\theta = 0$ os planos são ditos paralelos.

Ângulo entre um plano e uma reta: Dados um plano $\pi : \overrightarrow{Q_1P} \cdot \vec{\eta} = 0$ e uma reta $r : \overrightarrow{Q_2P} = \lambda \vec{v}$ definimos o ângulo entre eles como sendo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ como na figura



Então

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\vec{\eta}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{\eta}\|\|\vec{v}\|}.$$

Como

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

Temos que

$$\sin\theta=\frac{|\vec{\eta}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{\eta}\|\|\vec{v}\|}.$$

Neste caso, se $\theta=\frac{\pi}{2}$ o plano e a reta são perpendiculares e caso $\theta=0$ são paralelos.

10.3 Posição relativa de dois planos

Sejam $\pi_1:\overrightarrow{Q_1P}\cdot\vec{\eta}_1=0$ e $\pi_2:\overrightarrow{Q_2P}\cdot\vec{\eta}_2=0$ dois planos, então temos 3 possibilidades.

1. Se $\vec{\eta}_1=a\vec{\eta}_2$ e $Q_2\in\pi_1$ para algum $a\in\mathbb{R}$ então os planos são iguais.
   De fato, se $P\in\pi_2$ então
   $$\begin{aligned}\vec{\eta}_1\cdot\overrightarrow{PQ_1} &= \vec{\eta}_1\cdot(\overrightarrow{PQ_2}+\overrightarrow{Q_2Q_1})\\ &= \underbrace{\vec{\eta}_1}_{=a\vec{\eta}_2}\cdot\overrightarrow{PQ_2}+\underbrace{\vec{\eta}_1\cdot\overrightarrow{Q_2Q_1}}_{=0,\text{ pois } Q_2\in\pi_1}\\ &= a\underbrace{\vec{\eta}_2\cdot\overrightarrow{PQ_2}}_{=0,\text{ pois } Q_2\in\pi_2}+0=0.\end{aligned}$$
   de onde segue $P\in\pi_1$ e portanto $\pi_2\subset\pi_1$. Análogamente se prova que $\pi_1\subset\pi_2$.
2. Se $\vec{\eta}_1=a\vec{\eta}_2$ e $Q_2\notin\pi_1$ então os planos são paralelos. De fato, o ângulo entre eles é zero (fácil de verificar).
   Para mostrar que $\pi_1\cap\pi_2=\emptyset$ assuma que $P\in\pi_1\cap\pi_2$, então
   $$\begin{aligned}0=a\underbrace{\overrightarrow{Q_2P}\cdot\vec{\eta}_2}_{=0,\text{ pois } Q_2\in\pi_2} &= \overrightarrow{Q_2P}\cdot\underbrace{\vec{\eta}_1}_{=a\eta_2}\\ &= (\overrightarrow{Q_2Q_1}+\overrightarrow{Q_1P})\cdot\vec{\eta}_1\\ &= \overrightarrow{Q_2Q_1}\cdot\vec{\eta}_1+\overrightarrow{Q_1P}\cdot\vec{\eta}_1\\ &= \overrightarrow{Q_2Q_1}\cdot\vec{\eta}_1+0.\end{aligned}$$
   Portanto $Q_2\in\pi_1$ o que é uma contradição. Então $\pi_1\cap\pi_2=\emptyset$.
3. Se $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$ são linearmente independentes então os planos se intersectam em uma reta.
   De fato, as equações dos planos são:
   $$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1. \qquad \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_1,$$
   e o fato de serem vetores linearmente independentes garantem que a matriz escalonada reduzida associada ao sistema formado pelas duas equações tem duas linhas não nulas. Portanto, o sistema tem uma variável livre e infinitas soluções. Consequentemente existe uma intersecção entre os planos. Por se tratar de um sistema de três incógnitas e duas equações independentes, o conjunto solução é uma reta.

10.4 Posição relativa entre uma reta e um plano

Seja $\pi:\overrightarrow{Q_1P}\cdot\vec{\eta}_1=0$ um plano e $r:\overrightarrow{Q_2P}=\lambda\vec{v}$ uma reta.
Novamente temos 3 possibilidades.

1. Se $\vec{\eta}\perp\vec{v}$ e $Q_2\in\pi$ então a reta está contida no plano.
   De fato, se P é um ponto da reta existe λ_0 tal que $\overrightarrow{Q_2P}=\lambda_0\vec{v}$. Portanto
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_1P}\cdot\vec{\eta} &= \overrightarrow{Q_1Q_2}\cdot\vec{\eta}+\overrightarrow{Q_2P}\cdot\vec{\eta}\\ &= 0+\lambda_0\vec{v}\cdot\vec{\eta}=0.\end{aligned}$$
   Então $P\in\pi$ e, consequentemente, $r\subset\pi$.

2. Se $\vec{\eta} \perp \vec{v}$ e $Q_2 \notin \pi$ então a reta é paralela ao plano e $r \cap \pi = \emptyset$.
   Claramente, como $\vec{\eta} \perp \vec{v}$, temos que a reta é paralela ao plano. Assuma que existe $P \in r \cap \pi$. Então
   $$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{Q_1P} \cdot \vec{\eta} &= \overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot \vec{\eta} + \overrightarrow{Q_2P} \cdot \vec{\eta} \\ &= \overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot \vec{\eta} + 0. \end{aligned}$$
   de onde segue que $Q_2 \in \pi$, o que é uma contradição.
3. Se $\vec{\eta}$ e $\vec{v}$ não são perpendiculares então a reta e o plano se intersectam em um único ponto.
   De fato, existem vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ perpendiculares a $\vec{\eta}$ e paralelos ao plano tais que $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ são linearmente independentes. O ponto interseção a reta e ao plano é um ponto P tal que existem escalares λ, λ_1 e λ_2 satisfazendo
   $$\overrightarrow{Q_2P} = \lambda \vec{v} \qquad \overrightarrow{Q_1P} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2.$$
   De onde tiramos que
   $$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P} - \overrightarrow{Q_2P} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 - \lambda \vec{v}.$$
   Como $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ são linearmente independentes sabemos que λ, λ_1 e λ_2 devem ser os únicos escalares que resolvem o sistema linear associado.

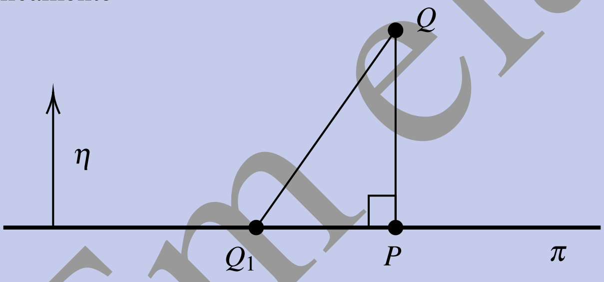
10.5 Distâncias

Vamos agora calcular as distâncias para os seguintes casos.

Distância ponto-plano. Seja Q um ponto e $\pi : \overrightarrow{Q_1P} \cdot \vec{\eta} = 0$. Então

$$d(Q,\pi) = \inf_{P \in \{Q\},\, Q_1 \in \pi} d(P, Q_1) = \inf_{Q_1 \in \pi} d(Q, Q_1),$$

Gráficamente



Utilizando Pitágoras, vemos que a distância será dada pela norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ que é a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{QQ_1}$ na direção de $\vec{\eta}$. Portanto

$$d(Q,\pi) = \| Proj_{\vec{\eta}} \overrightarrow{QQ_1} \| = \frac{|\vec{\eta} \cdot \overrightarrow{QQ_1}|}{\| \vec{\eta} \|}.$$

Lema 10.1 Seja $Q = (q_0, q_1, q_2)$ um ponto e π o plano que tem por equação

$$\pi : \; ax + by + c = d.$$

então

$$d(Q,\pi) = \frac{|d - (aq_0 + bq_1 + cq_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Demonstração. Observamos que o vetor normal ao plano é $\vec{\eta} = (a,b,c)$ e qualquer ponto $Q_1 = (p_0, p_1, p_2)$ no plano satisfaz

$$ap_0 + bp_1 + cp_3 = d.$$

Então

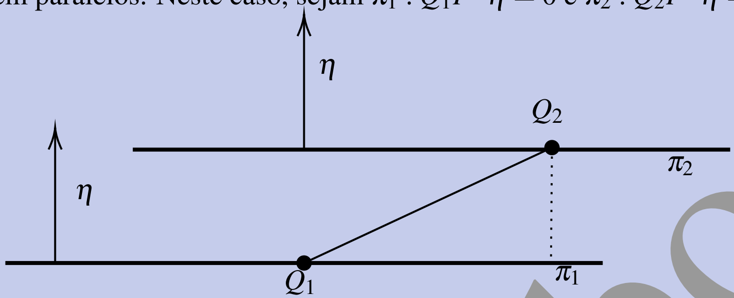
$$\begin{aligned} \overrightarrow{QQ_1}\cdot\vec{\eta} &= a(p_0-q_0)+b(p_1-q_1)+c(p_2-q_2)\\ &= (ap_0+bp_1+cp_2)-(aq_0+bq_1+cq_2)\\ &= d-(aq_0+bq_1+cq_2). \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da distância temos

$$d(Q,\pi)=\frac{|d-(aq_0+bq_1+cq_2)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

■

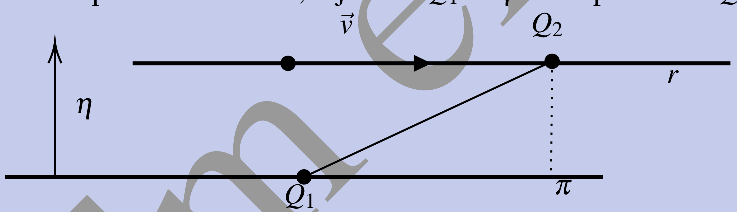
Distância plano-plano. A distância entre dois planos será diferente de 0 somente no caso em que os planos forem paralelos. Neste caso, sejam $\pi_1 : \overrightarrow{Q_1P}\cdot\vec{\eta}=0$ e $\pi_2 : \overrightarrow{Q_2P}\cdot\vec{\eta}=0$ os planos paralelos.



A distância entre os planos será igual a

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(\pi_1,Q_2)=d(\pi_2,Q_1)=\frac{|\vec{\eta}\cdot\overrightarrow{Q_2Q_1}|}{\|\vec{\eta}\|}.$$

Distância reta-plano. A distância entre uma reta e um plano será diferente de 0 somente quando a reta for paralela ao plano. Neste caso, sejam $\pi : \overrightarrow{Q_1P}\cdot\vec{\eta}=0$ o plano e $r : \overrightarrow{Q_2P}=\lambda\vec{v}$ a reta.



A distância será igual a

$$d(\pi,r)=d(\pi,Q_2)=\frac{|\vec{\eta}\cdot\overrightarrow{Q_2Q_1}|}{\|\vec{\eta}\|}.$$

Em elaboração

11. Cônicas

Até agora temos estudado sistemas lineares sobre o plano ou espaço. No plano isto se reduz a estudar equações da forma

$$ax + by = c$$

Como vimos nas seções anteriores a solução destes sistemas pode ser uma reta ou um ponto. No entanto na realidade, os problemas não são necessáriamente lineares. Por exemplo, descrever a órbita de um planeta não pode ser por meio de um sistema linear dado que o planeta não se translada em linha reta. A trajetória de um objeto que é jogado com um certo ângulo e cai também não pode ser descrito por uma reta.

A primeira aproximação para modelar é uma equação linear, no entanto quando não é suficiente, incrementa-se o grau da equação para grau dois com a esperança de que o modelo seja melhor. Isto ocorre, por exemplo,quando temos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e queremos estudar o comportamento desta perto de x_0. Fazendo o polinômio de Taylor a segunda ordem em f temos que

$$f(x) = y \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

que dá um polinômio de grau 2.

Portanto, vamos estudar o conjunto solução de equações da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f,$$

onde a, b, c, d, e, f são constantes em $\mathbb{R}$ com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

11.1 Cônicas

Da mesma forma que acontece com as equações lineares, queremos saber como representar, ou melhor, qual a forma geométrica do conjunto solução destas equações. Embora classificar os tipos de soluções a serem obtidas pareça ser uma tarefa impossível, vamos ver que de fato não é tão dificil assim e que existem, para o caso "não degenerado", três formas básicas que estas soluções podem assumir: Elipses, Hipérboles e Parábolas. Estas curvas são conhecidas desde a antiga Grécia e são chamadas de cônicas, pois cada uma delas pode ser obtidas ao cortar um cone com um plano.

Como determinar quando a cônica é degenerada ou não? Observamos que a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

pode ser escita, na notação matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Uma cônica é degenerada se:

$$\det \begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} = 0.$$

Caso contrário é dita não degenerada. Daremos uma justificativa deste fato mais para frente. Passamos agora a estudar as cônicas não degeneradas.

Assim como fizemos com planos e retas, estudando estes objetos através de pontos e vetores, faremos com as cônicas não degeneradas. Veremos então que podemos caracteriza-las a partir de números (excentricidade) pontos fixos (focos, vértices) e retas (reta diretriz e assíntotas). Assim cada cônica fica completamente determinado por alguns destes dados.

11.2 Elipse

A elipse é a curva que se obtém de seccionar um cone com um plano que não passa pelo vértice do cone, que não é paralelo a reta geratriz do cone e que corta só uma das folhas do cone.

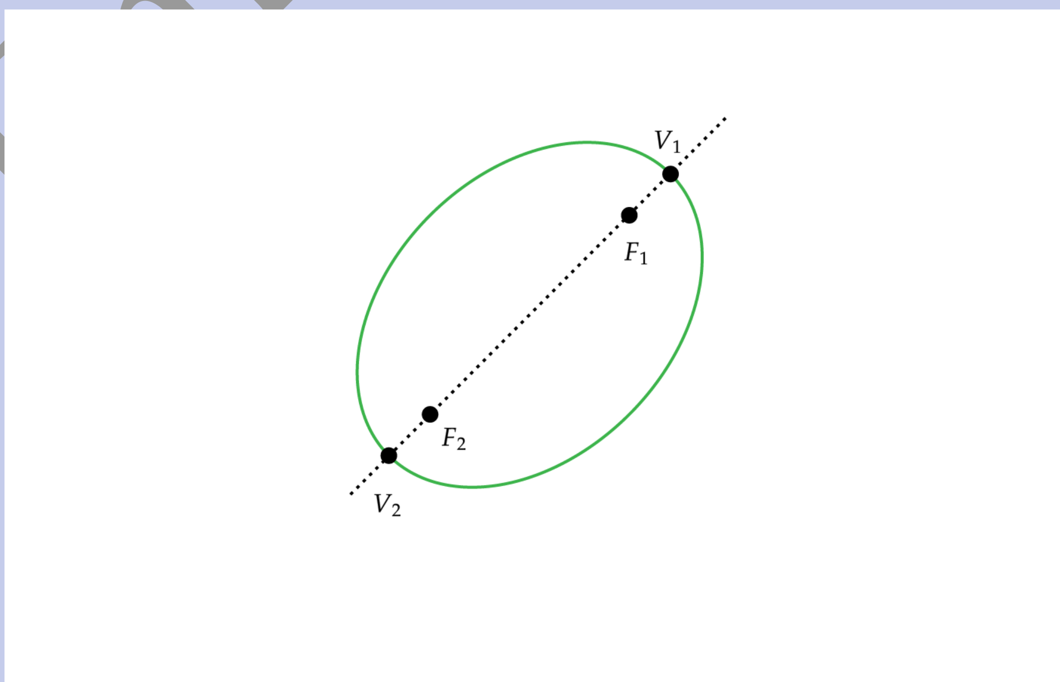
Ela pode ser caracterizada como o conjunto de pontos P do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos F_1, F_2 (Focos) é constante e maior que a distância $d(F_1, F_2)$. Isto é

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Com

$$a > c = \frac{d(F_1, F2)}{2}.$$

A forma da elipse é a seguinte:



Os pontos V_1, V_2 que realizam a intersecção da reta que passa pelos dois focos com a elipse são chamados de vértices da elipse. Observamos que $d(V_1,F_1) = d(V_1,F_2)$ pois

$$\begin{aligned} d(V_1,F_1)+d(V_1,F_2) &= 2a \\ d(V_2,F_1)+d(V_2,F_2) &= 2a. \end{aligned}$$

Como

$$d(V_1,F_2) = d(V_1,F_1)+d(F_1,F_2),$$

e

$$d(V_2,F_1) = d(V_2,F_2)+d(F_1,F_2),$$

vemos que

$$\begin{aligned} 2d(V_1,F_1)+d(F_1,F_2) &= 2a \\ 2d(V_2,F_2)+d(F_1,F_2) &= 2a. \end{aligned}$$

Então

$$d(V_1,F_1) = d(V_2,F_2),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} d(V_1,V_2) &= d(V_1,F_1)+d(F_1,F_2)+d(F_2,V_2) \\ &= d(V_1,F_1)+d(F_2,F_1)+d(F_1,V_1) \\ &= d(V_1,F_1)+d(V_1,F_2) = 2a. \end{aligned}$$

Os segmentos que realizam o diâmetro maior e menor são chamados de eixos da elipse. O número

$$e = \frac{d(F_1,F_2)}{d(V_1,V_2)} = \frac{c}{a}.$$

é conhecido com o nome de **Excentricidade** e é uma medida de quanto uma cônica deixa de ser uma circunfência. No caso da elipse, $0 < e < 1$.

No caso particular em que $F_1 = F_2$ a elipse se reduz a uma circunferência, que é o conjunto de pontos cuja distância a um ponto fixo é constante, e neste caso claramente $e = 0$. Portanto a circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

Sobre o plano vamos distinguir duas equações de elipse particulares:

Proposição 11.1

- A equação da elipse com focos $F_1 = (c,0)$ e $F_2 = (-c,0)$ é dada por
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$
em que $b^2 = a^2-c^2$. Neste caso os vértices correspondem aos pontos $V_1 = (a,0)$e $V_2 = (-a,0)$. Os eixos coincidem com os segmentos $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{W_1W_2}$ em que $W_1 = (0,b)$ e $W_2 = (-b,0)$. A excentrecidade é dada por $e = c/a$.
- A equação da elipse com focos $F_1 = (0,c)$ e $F_2 = (0,-c)$ é dada por
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1,$$
em que $b^2 = a^2-c^2$. Neste caso os vértices correspondem aos pontos $V_1 = (0,a)$e $V_2 = (0,-a)$. Os eixos coincidem com os segmentos $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{W_1W_2}$ em que $W_1 = (b,0)$ e $W_2 = (0,-b)$. A excentrecidade é dada por $e = c/a$.

Demonstração: Fazemos a prova da primeira parte e a segunda fica como exercicio. Seja $P=(x,y)$ então substituindo na equação da elipse pelos dados acima temos

$$\begin{aligned}
d(P,F_1)+d(P,F_2) &= 2a \quad \Rightarrow\\
\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \quad \Rightarrow\\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \text{elevamos ao quadrado}\\
(x-c)^2+y^2 &= 4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow\\
xc+a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow\\
a^4+2xca^2+x^2c^2 &= a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \quad \Rightarrow\\
a^2(a^2-c^2) &= (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 \quad \Rightarrow\\
1 &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}.
\end{aligned}$$

■

A reta que passa pelos focos é o eixo x portanto a intersecção desta com a elipse corresponde a

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{e} \quad y=0.$$

de onde segue que os vértices são $V_1=(a,0)$ e $V_2=(-a,0)$. Para determinar o eixo menor somente resta achar o menor diâmetro da elipse, isto acontece quando $x=0$ (Pitágoras) donde $W_1=(0,b)$ e $W_2=(0,-b)$. A excentrecidade é $e=c/a$ por definição.

11.3 Hipérbole

A Hipérbole é a curva que se obtém de seccionar um cone com um plano que não passa pelo vértice do cone, que não é paralelo a reta geratriz do cone e que corta as duas folhas do cone.

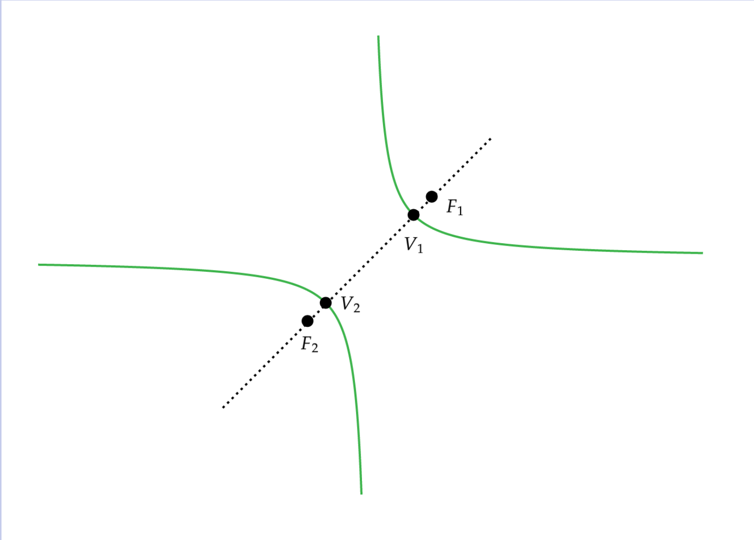
Ela pode ser caracterizada como o conjunto de pontos P do plano tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos F_1,F_2 (Focos) é constante e menor que duas vezes a distância $d(F_1,F_2)$. Isto é

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a,$$

com

$$a<c=\frac{d(F_1,F2)}{2}.$$

A forma da hipérbole é a seguinte.



Os pontos V_1, V_2 que realizam a intersecção da reta que passa pelos dois focos com a elipse são chamados de vértices da elipse. Observamos que, assim como a elipse $d(F_1,V_1) = d(F_2,V_2)$ de onde

$$\begin{aligned} d(V_1,V_2) &= -d(V_1,F_1) + d(F_1,F_2) - d(F_2,V_2) \\ &= -d(V_1,F_1) + d(F_2,F_1) - d(F_1,V_1) \\ &= d(V_1,F_2) - d(V_1,F_1) = 2a. \end{aligned}$$

A Hipérbole tem duas retas assíntotas as quais se aproxima. A excentricidade é dada por

$$e = \frac{d(F_1,F_2)}{d(V_1,V_2)} = \frac{c}{a},$$

na hipérbole $e > 1$.

Sobre o plano vamos distinguir duas equações de hipérbole particulares:

Proposição 11.2

- A equação da hipérbole com focos $F_1 = (c,0)$ e $F_2 = (-c,0)$ é dada por

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  em que $b^2 = c^2 - a^2$. Neste caso os vértices correspondem aos pontos $V_1 = (a,0)$e $V_2 = (-a,0)$. A equação das assíntotas é

  $$y = \frac{b}{a}x \qquad y = \frac{-b}{a}x.$$

  A excentricidade é dada por $e = c/a$.
- A equação da hipérbole com focos $F_1 = (0,c)$ e $F_2 = (0,-c)$ é dada por

  $$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

  em que $b^2 = c^2 - a^2$. Neste caso os vértices correspondem aos pontos $V_1 = (0,a)$e $V_2 = (0,-a)$. A equação das assíntotas é

  $$x = \frac{b}{a}y \qquad x = \frac{-b}{a}y.$$

Demonstração:
Fazemos a prova da primeira parte e a segunda fica como exercício. Seja $P=(x,y)$ então substituindo na equação da hipérbole pelos dados acima temos

$$\begin{aligned}
d(P,F_1)-d(P,F_2) &= \pm 2a \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \text{elevamos ao quadrado} \\
(x-c)^2+y^2 &= 4a^2+(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \\
xc+a^2 &= \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \\
a^4+2xca^2+x^2c^2 &= a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \quad \Rightarrow \\
a^2(a^2-c^2) &= (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 \quad \Rightarrow \\
1 &= \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}.
\end{aligned}$$

A reta que passa pelos focos é o eixo x portanto a intersecção desta com a elipse corresponde a

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \qquad y=0,$$

de onde segue que os vértices estão em $V_1=(a,0)$ e $V_2=(-a,0)$. A excentricidade é $e=c/a$ por definição. As assíntotas devem ser da forma $y=mx$ pois cortam a origem. Observamos que $x\to\infty$ então o y_c correspondente a cônica e o y_a correspondente à assíntota devem satisfazer $\lim_{x\to i\infty} y_c-y_a=0$. Como,

$$y_c-y_a=\left(\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x^2}}-m\right)x.$$

Temos,

$$m=\pm\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x^2}}=\pm\frac{b}{a}$$

■

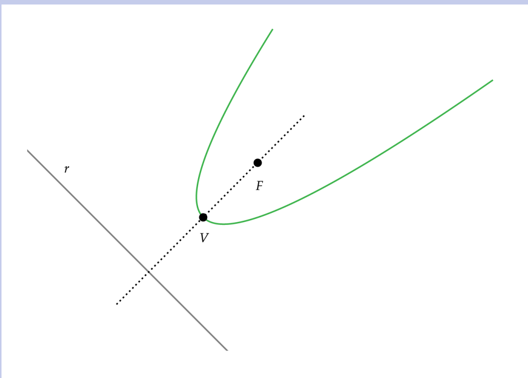
11.4 Parábola

A parábola é a curva que se obtém ao seccionar um cone com um plano paralelo a reta geratriz do cone.

Ela pode ser caracterizada como o conjunto de pontos P do plano tais que a distância de P a um ponto fixo F (Foco) é a distância de P a uma reta r (diretriz). Isto é,

$$d(P,F)=d(P,r).$$

A forma da parábola é a seguinte:



O ponto que realiza a intersecção da reta que passa pelo foco F e que é perpendicular a reta r com a parábola é o vértice da parábola e satisfaz

$$d(F,V) = d(V,r) \Rightarrow d(F,r) = d(F,V) + d(V,r) = 2d(F,V).$$

A excentricidade da parábola é $e = 1$.

Obs.

Podemos pensar que a parábola é um "limite" da elipse em que $F_1 = F$, $V_1 = V$ e fazendo $d(V,V_2) \to \infty$. Por exemplo, considere uma elipse con vértices e focos em

$$V_1 = (0,0) \quad F_1 = (c,0) \quad F_2 = (c+d,0) \quad V_2 = (2c+d,0),$$

para $c > 0$ e $d > 0$. Seja $P = (x,y)$ um ponto genérico nessa elipse. Então, escrevendo a equação da elipse em coordenadas como fizemos antes chegamos na equação canônica, temos que (x,y) satisfaz

$$(x-c)d^2 + (cd+c^2) + (x-c)(cd^2+dc^2) = (d+2c)(x-c)^2 + (d+2c)y^2.$$

Dividimos todo por d^2 e calculando o limite quando $d \to \infty$ temos que (x,y) satisfaz deve satisfazer a equação

$$y^2 = 4cx,$$

que é a equação de uma parábola.
Lembramos que na elipse

$$\begin{aligned} d(F_1,F_2) &= d(V_1,V_2) - d(V_2,F_2) - d(F,V) \\ &= d(V,V_2) - 2d(V,F). \end{aligned}$$

Assim a exentricidade

$$e = \lim_{d(V,V_2)\to\infty} \frac{d(F,F_2)}{d(V,V_2)} = \lim_{d(V,V_2)\to\infty} \left(1 - 2\frac{d(V,F)}{d(V,V_2)}\right) = 1.$$

Também podemos pensar que a parábola é um "limite" da hipérbole com $F_1 = F$, $V_1 = V$ e fazendo $d(V,V_2) \to \infty$. Por exemplos, considere uma hipêrbole con vértices e focos em

$$V_1 = (0,0) \quad F_1 = (c,0) \quad F_2 = (-c-d,0) \quad V_2 = (-d,0).$$

para $c > 0$ e $d > 0$. Seja $P = (x,y)$ um ponto genérico nessa hipêrbole. Então, escrevendo a equação da hipêrbole em coordenadas como fizemos antes chegamos na equação canônica. Logo dividimos todo por d^2 e calculando o limite quando $d \to \infty$ temos que (x,y) satisfaz deve satisfazer a equação

$$y^2 = 4cx,$$

que é a equação de uma parábola.
Lembramos que na hipérbole

$$\begin{aligned} d(F_1,F_2) &= d(F,V) + d(V_1,V_2) + d(V_2,F_2) \\ &= d(V,V_2) + 2d(V,F). \end{aligned}$$

Assim a exentricidade

$$e = \lim_{d(V,V_2)\to\infty} \frac{d(F,F_2)}{d(V,V_2)} = \lim_{d(V,V_2)\to\infty} \left(1 + 2\frac{d(V,F)}{d(V,V_2)}\right) = 1.$$

Sobre o plano vamos distinguir duas equações particulares da parábola:

Proposição 11.3

- A equação da parábola com focos $F = (c,0)$ e reta diretriz $r: \ x = -c$ é dada por

$$y^2 = 4cx.$$

O vértice da parábola é $V = (0,0)$.

- A equação da parábola com focos $F=(0,c)$ e reta diretriz $r: \; y=-c$ é dada por

  $$x^2 = 4cy.$$

  O vértice da parábola é $V=(0,0)$.

Demonstração:

Fazemos a prova da primeira parte a segunda fica como exercício. Seja $P=(x,y)$, substituindo na equação da parábola pelos dados acima temos

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= d(P,r) \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= |x+c| \Rightarrow \\
(x-c)^2+y^2 &= x^2+2xc+c^2 \Rightarrow \\
y^2 &= 4xc.
\end{aligned}$$

Para achar o vértice observamos que a reta que passa pelo foco e é perpendicular a reta diretiz é o eixo x. Substituimos então na equação por $y=0$ e obtemos $x=0$. Portanto o vértice está em $V=(0,0)$.

■

12. Translação de sistema de coordenadas

Como dito anteriormente, vamos estudar equações da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f,$$

onde a, b, c, d, e, f são constantes em $\mathbb{R}$ com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Nesta seção nos concentramos no caso particular em que $b = 0$. Sendo assim, estudaremos equações da forma

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey = f.$$

■ **Exemplo 12.1** Considere a seguinte equação

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 4y = -4.$$

tendo em mente o trinômio quadrado perfeito

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

adicionamos e subtraimos para obter

$$\begin{aligned} -4 = x^2 + 4y^2 + 4x - 4y &= x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 4 - 4 + 1 - 1 \\ &= (x^2 + 4x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) - 5 \\ &= (x + 2)^2 + \frac{(y - 1/2)^2}{1/4} - 5, \end{aligned}$$

donde chegamos a expressão:

$$(x + 2)^2 + \frac{(y - 1/2)^2}{1/4} = 1,$$

se substituimos $x' = x + 2 \text{ e} y' = y - \frac{1}{2}$, nossa equação é

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{1/4} = 1,$$

que, pelo visto no capítulo anterior, tem a mesma cara que a equação de uma elipse. De fato se a gente fizer o desenho no plano xy veremos que o gráfico da equação

$$x^2+4y^2+4x-4y=-4,$$

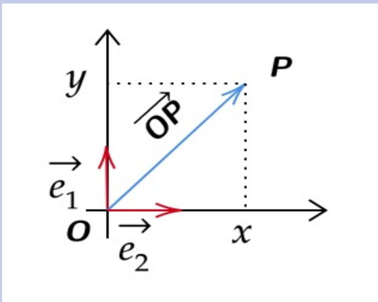
é uma elipse, só que o ponto $O=(0,0)$ não ocupa um lugar preferencial, isto é, não é o ponto médio entre os focos e os vértices. Agora esse ponto é ocupado pelo ponto $O'=(-2,1/2)$. ■

Neste capítulo vamos interpretar geometricamente o feito no exemplo.

12.1 Sistemas de Coordenadas

Como vimos antes, todo ponto P do plano pode ser descrito analiticamente da forma $P=(x,y)$ em que as coordenadas x e y são as únicas constantes tais que

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2.$$

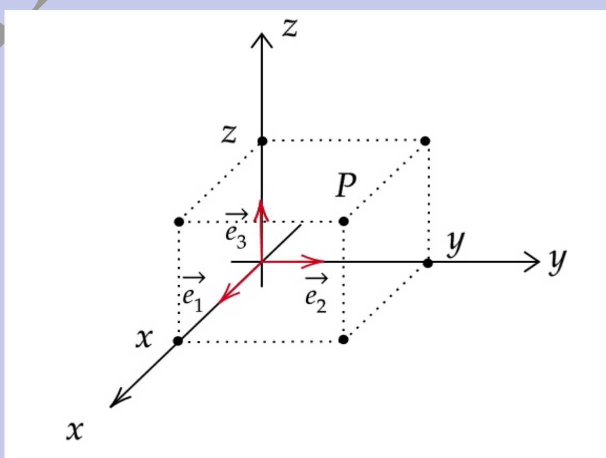


Ou seja, as coordenadas são os escalares que me descrevem $\overrightarrow{OP}$ como combinação linear de $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Neste sentido o ponto O faz o papel de centro, pois cada ponto pode ser escrito em função dele.

Assim, o ponto O junto com os vetores $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ fornecem uma forma de associar a cada ponto P do plano um único par (x,y) que descrevem o ponto P como acima.

A mesma coisa acontece no espaço, o ponto O e os vetores $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ fornecem uma forma de associar univocamente a cada ponto P a única tripla (x,y,z) que satisfaz

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3.$$



Definição 12.1 No plano, o conjunto $S=(O,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\})$ formado pelo ponto origem O e dois vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ linearmente independentes fornecem uma forma de associar, univocamente, a cada ponto P um par (x',y'). Neste caso, S é chamado de sistema de coordenadas do plano.

No espaço, o conjunto $S=(O,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\})$ formado pelo ponto origem O e três vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\vec{e}_3$

linearmente independentes fornecem uma forma de associar, univocamente, a cada ponto P uma trípla (x', y', z'). Neste caso, S é chamado de sistema de coordenadas do espaço.

A escolha do ponto O e dos vetores $\vec{e}_i{}'s$ é completamente arbitrária. De fato, no caso do plano, por exemplo, poderíamos escolher outro ponto O' e um par qualquer $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de vetores linearmente independentes de forma tal que a cada ponto P associamos um par (x', y') que satisfazem

$$\overrightarrow{O'P} = x'\vec{u} + y'\vec{v}.$$

Nessa nova escolha, os eixos coordenados ficariam determinados por

$$\text{eixo } x' \to \left\{P, \overrightarrow{O'P} = x\,\vec{u}, x \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\text{eixo } y' \to \left\{P, \overrightarrow{O'P} = y\,\vec{v}, y \in \mathbb{R}\right\},$$

e assim por diante.

Dito de outra forma, temos completa liberdade na escolha do sistema de coordenadas. Mas o problema, é o problema de Babel. Se duas pessoas A e B utilizam sistemas de coordenadas diferentes, como traduzir de um sistema para outro? Isto é, se no sistema de A o ponto P é dado pelo sistema de coordenadas $P = (x_0, y_0)$, quais serão as coordenadas que esse ponto vai ter no sistema de B?

12.2 Translação de coordenadas

Consideramos aqui o caso mais simples de mudança de coordenadas, isto é, o caso em que temos dois sistemas de coordenadas $S_1 = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ e $S_2 = (O', \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ cujos pontos de origem de coordenadas são diferentes. Este caso é conhecido por translação do sistema de coordenadas S_1 ao sistema de coordenadas S_2. Vamos agora descrever a translação do sistema de coordenadas.

Como assumimos comunicação entre os sistemas, podemos assumir que a pessoa do sistema S_1 sabe que o ponto O' do sistema S_2 tem coordenadas $O' = (x_0, y_0)$ no sistema S_1. Isto é

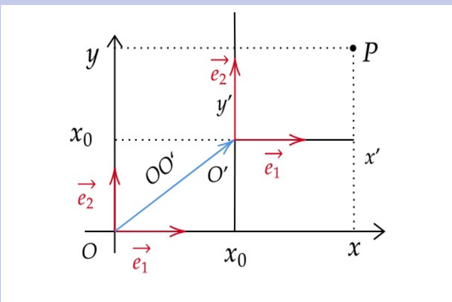
$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2.$$

Seja P um ponto do plano que no sistema S_2 tem coordenadas (x', y') isto é

$$\overrightarrow{O'P} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2,$$

e que no sistema S_1 é descrito por coordenadas (x, y),

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$



Utilizando

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

e substituindo pelo que sabemos, vemos que

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \\ &= (x_0 + x')\vec{e}_1 + (y_0 + y')\vec{e}_2. \end{aligned}$$

De onde tiramos que

$$x = x_0 + x' \qquad y = y_0 + y',$$

que é o tradutor procurado. Observamos que na notação matricial isto é descrito por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x' \\ y_0 + y' \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Resumo: A translação de coordenadas é a mudança de coordenadas de um sistema $S_1 = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ para um sistema $S_2 = (O', \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ em que

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2$$

e as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ segundo S_1 e $P = (x', y')$ segundo S_2 estão relacionadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x' \\ y_0 + y' \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

A seguir provamos um resultado muito importante. Ele diz, basicamente, que os ângulos, as escalas e as medidas são preservadas em uma translação de coordenadas. Isto tem como consequência que as formas são preservadas na translação de coordenadas.

Proposição 12.1 Na translação do sistema de coordenadas, as distâncias são preservadas.

Demonstração: Sejam P, Q dois pontos no plano. Vamos mostrar que a distância entre P e Q respeito de S_1 é igual a distância entre P respeito de S_2. De fato, considere $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$ onde $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ em S_1 e $P = (x', y')$ e $Q = (u', v')$ em S_2 então

$$\vec{v} = (x - u, y - v) \quad \text{em} \quad S_1 \quad \text{e} \quad \vec{v} = (x' - u', y' - v') \quad \text{em} \quad S_2,$$

com

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Calculamos, e obtemos

$$\begin{aligned} d_{S_1}(P, Q) &= \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \\ &= \sqrt{(x' - u')^2 + (y' - v')^2} \\ &= d_{S_2}(P, Q). \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 12.2** Se $S_2 = \left\{\left(-2, \frac{1}{2}\right), \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\right\}$, então, todo ponto P que nesse sistema seja descrito por (x', y') será descrito no nosso sistema pelas coordenadas $(x, y) = \left(x' - 2, y' + \frac{1}{2}\right)$. Dessa forma, a elipse em nosso sistema de coordenadas terá por equação

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 4y = -4.$$

E no sistema de coordenadas S_2 terá por equação

$$(x' - 2)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 + 4(x' - 2) - 4\left(y' + \frac{1}{2}\right) = -4,$$

ou, equivalentemente

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{\frac{1}{4}} = 1,$$

que é a equação obtida no exemplo anterior.

Isto permite o estudo completo da equação. De fato sabemos que representa uma elipse. Determinamos então os vértices, os focos, os eixos. Claro que isto não é possível no nosso sistema, porém no sistema S_2 sim. Neste sistema é o estudo da equação

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Sabemos, do capítulo anterior, que esta é uma elipse com focos $V_1 = (-1,0)$ e $V_2 = (1,0)$ e focos em $F_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}, 0\right)$ e $F_2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}, 0\right)$. Os eixos são dados pelos segmentos $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{W_1W_2}$, em que, $W_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $W_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Por último, a excentrecidade é $e = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$, tudo isso no sistema S_2. Mas, e no sistema S_1?. Sabemos que

$$e = (d(F_1, F_2)/d(V_1, V_2)) = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right),$$

pois distâncias são preservadas.

Para o restante, simplesmente usamos o tradutor $(x,y) = (x' - 2, y' + \frac{1}{2})$ e obtemos

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left(-1-2,\ 0+\frac{1}{2}\right) = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right) \\
V_2 &= \left(1-2,\ 0+\frac{1}{2}\right) = \left(-1,\ \frac{1}{2}\right) \\
F_1 &= \left(\sqrt{\frac{3}{4}}-2,\ 0+\frac{1}{2}\right) \\
F_2 &= \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}-2,\ 0+\frac{1}{2}\right) \\
e &= (d(F_1, F_2)/d(V_1, V_2)) = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right).
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 12.3** Considere a cônica descrita pela equação

$$3x^2 - 4y^2 + 6x + 8y = 13.$$

Queremos determinar os vértices, os focos, excentricidade, assíntotas (se tiver) e esboçar o gráfico.

Primeiramente completamos quadrados para obter

$$\begin{aligned}
13 = 3x^2 - 4y^2 + 6x + 8y &= 3(x^2 + 2x) - 4(y - 2y) \\
&= 3(x^2 + 2x + 1) - 4(y - 2y + 1) - 3 + 4 \\
&= 3(x+1)^2 - 4(y-1)^2 + 1,
\end{aligned}$$

de onde

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{3} = 1.$$

Portanto consideramos um sistema de coordenadas tal que a mudança seja

$$x' = x+1 \quad y' = y-1,$$

isto é, $S_2 = \{(-1,1), \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$. Neste novo sistema de coordenadas temos que a equação da cônica se escreve

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{3} = 1.$$

portanto $c^2 = 4+3 = 7$.De onde segue que os focos estão em

$$F_1 = (\sqrt{7}, 0) \quad \text{e} \quad F_2 = (-\sqrt{7}, 0),$$

os vértices em

$$V_1 = (2,0) \quad \text{e} \quad V_2 = (-2,0).$$

A equação das assíntotas são

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' \qquad y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x'$$

Por último, a excentricidade é $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Agora aplicamos o tradutor

$$x' = x+1 \quad \text{e} \quad y' = y-1$$

$$x = x'-1 \quad \text{e} \quad y = y'+1$$

para passar ao sistema de coordenadas xy.

$$\begin{aligned}
V_1 &= (2-1,\ 0+1) = (1,\ 1) \\
V_2 &= (-2, -1\ 0+1) = (-3, 1) \\
F_1 &= \left(\sqrt{7}-1,\ 0+1\right) \\
F_2 &= \left(-\sqrt{7}-1,\ 0+1\right) \\
e &= (d(F_1,F_2)/d(V_1,V_2) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right).
\end{aligned}$$

e as assíntotas tem as equações

$$(y-1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) \qquad (y-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1).$$

■

13. Rotação do sistema de coordenadas

Nesta seção, vamos desenvolver a matemática necessária para identificar a figura geométrica dada pela equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f,$$

para o caso onde $b \neq 0$. Isto será feito por meio de mudanças no sistema de coordenadas.

Como visto na seção anterior, um sistema de coordenadas, fica determinado por um conjunto $S = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$. A translação de um sistema de coordenadas produz um novo sistema de coordenadas $S' = (O', \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ onde os vetores $\vec{e}_i{}'s$ são preservados. Relembramos que esta mudança de coordenadas tem a propriedade de preservar distâncias, portanto os ângulos, as medidas e as escalas são preservadas.

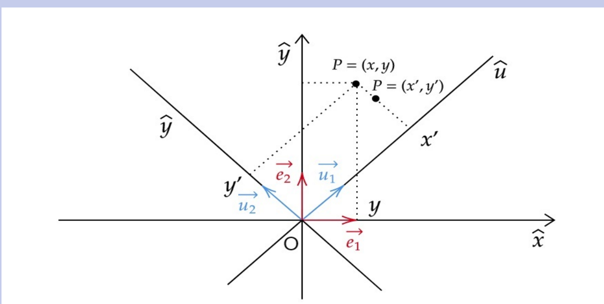
Nesta seção vamos estudar a relação entre as coordenadas de um ponto P com respeito de dois sistemas de coordenadas $S = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ e $S' = (O, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$. Em particular, vamos estudar as condições sobre $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ que garantem que as distâncias, ângulos e escalas sejam preservados.

13.1 Rotação de coordenadas

Consideramos então os sistemas $S = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ e $S' = (O, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ como S' é um sistema de coordenadas então $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores. Mais ainda, neste novo sistema de coordenadas os eixos são dados por

$$\text{eixo } u \to \left\{P, \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{u}_1 \,, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\text{eixo } v \to \left\{P, \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{u}_2 \,, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$



Como no caso anterior, assumimos que nosso sistema $S = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ conhece o sistema $S' = (O, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$, isto é, sabe como escrever $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ em termos de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$. Como $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ são linearmente independentes, isso significa que, existem escalares $a_{11},\ a_{12},\ a_{21}$ e a_{22} tais que

$$\vec{u}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 \qquad \vec{u}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2.$$

O que queremos achar é um tradutor entre o sistema de coordenadas S e S'. Para isto, seja P um ponto do plano. No sistema de coordenadas S o ponto P tem coordenadas $P = (x, y)$, o que significa

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

No sistema de coordenadas S' o ponto P terá coordenadas (x', y'), o que se traduz como

$$\overrightarrow{OP} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2.$$

Utilizando as relações acima, podemos escrever então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2\\ &= x'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2) + y'(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2)\\ &= (a_{11}x' + a_{21}y')\vec{e}_1 + (a_{12}x' + a_{22}y')\vec{e}_2.\end{aligned}$$

de onde tiramos que

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (a_{11}x' + a_{21}y')\vec{e}_1 + (a_{12}x' + a_{22}y')\vec{e}_2$$

Portanto, da independência linear de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vemos que

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' \qquad y = a_{12}x' + a_{22}y'$$

ou, equivalentemente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Mais ainda, podemos escrever a mudança de coordenadas como $X = RX'$ onde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

A matriz R é chamada de matriz de mudança de coordenadas e caracteriza completamente a mudança. Observamos que a independência linear de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ garante que $\det(R) \neq 0$.

Assim temos resolvido a questão da mudança de coordenadas e o problema de traduzir de um sistema para outro. No entanto cabe a seguinte pergunta: no novo sistema de coordenadas são preservados os formatos? ou melhor: O que devemos pedir sobre R para que os ângulos, distâncias e formas sejam preservadas?

Para responder esta pergunta necessitamos ver se são preservadas as distâncias pois, se isto vale, podemos concluir da lei do cosseno que os ângulos também são preservados.

Sejam P e Q dois pontos. Assuma que $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ em S_1 e $P = (x', y')$ e $Q = (u', v')$ em S_2 então se $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, temos

$$\vec{v} = (x - u,\ y - v) \text{ em } S_1 \qquad \vec{v} = (x' - u',\ y' - v') \text{ em } S_2,$$

com as relações

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} d_{S_1}(P,Q) &= \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} \\ &= \sqrt{(a_{11}(x'-u')+a_{21}(y'-v'))^2+(a_{12}(x'-u')+a_{22}(y'-v'))^2} \\ &= \sqrt{(a_{11}^2+a_{12}^2)(x'-u')^2+(a_{21}^2+a_{22}^2)(y'-v')^2+2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})(x'-u')(y'-v')}. \end{aligned}$$

No entanto,

$$d_{S_2}(P,Q) = \sqrt{(x'-u')^2+(y'-v')^2}.$$

Portanto, para que os ângulos e as distâncias sejam preservadas devemos ter

$$\begin{aligned} a_{11}^2+a_{12}^2 &= 1 \\ a_{21}^2+a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

É possível ver que estas equações são satisfeitas se a matriz R é da forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

para algum valor $\theta \in \mathbb{R}$.

De fato se $a_{11}^2+a_{12}^2=1$ existem θ e ϕ tais que

$$a_{11}=\cos(\theta) \quad a_{12}=\sin(\theta) \quad a_{21}=\sin(\phi) \quad a_{22}=\cos(\phi).$$

Utilizando que $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0$ temos que

$$0=\cos(\theta)\sin(\phi)+\sin(\theta)\cos(\phi) \;\Rightarrow\; \sin(\theta+\phi)=0 \;\Rightarrow\; \phi=-\theta.$$

Em particular, a mudança de coordenadas produzida, que tem por matriz de mudança de coordenadas a

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

é chamada de rotação do sistema de coordenadas.

Obs. Para ser mais precisos, na resolução acima

$$\sin(\theta+\phi)=0 \Rightarrow \theta+\phi=k\pi \quad k\in\mathbb{N}.$$

então as possíveis matrizes de rotação são

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ficamos com a primeira pois é a que tem determinante igual a 1. O motivo disto é que a mudança de coordenadas produzida além de preservar as distâncias vai preservar a orientação dos eixos coordenados.

De acordo com o visto anteriormente, temos que uma rotação de coordenadas preserva distâncias e portanto ângulos e formatos. Mais ainda, os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ resultantes de uma rotação do sistema de coordenadas, satisfazem

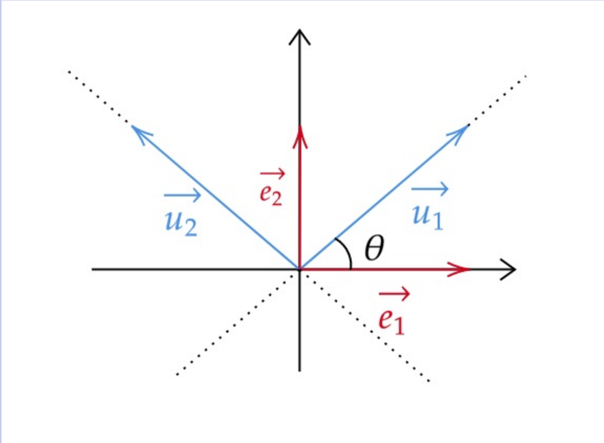
$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1=\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2=1 \quad \text{e} \quad \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0.$$

Assim temos que os eixos coordenados do sistema S' que são dados por

$$\text{eixo } u \to \left\{P, \overrightarrow{OP}=\lambda\vec{u}_1\,, \lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

$$\text{eixo } v \to \left\{P, \overrightarrow{OP}=\lambda\vec{u}_2\,, \lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

são perpendiculares. Mais ainda, o θ da matriz R_θ é o ângulo formado por $\vec{e}_1$ e $\vec{u}_1$ e, portanto, o ângulo entre os eixos coordenados correspondentes.



É interessante observar que as matrizes R_θ são inversíveis e, mais ainda

1. $R_\theta^{-1} = R_\theta^t$, de fato

$$R_\theta^t R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\det(R_\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
3. $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$, de fato

$$\begin{aligned} R_\theta R_\phi &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta) sin(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta) sin(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta+\phi}. \end{aligned}$$

Resumo: A rotação de coordenadas é a mudança de coordenadas de um sistema $S = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ para um sistema $S_2{}' = (O, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ em que

$$\vec{u}_1 = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2,$$

$$\vec{u}_2 = -\sin(\theta)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\vec{e}_2,$$

e as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ segundo S_1 e $P = (x', y')$ segundo S_2, estão relacionadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

14. Identificação de cônicas

Nosso objetivo aqui é o seguinte, dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

que representa uma cônica não degenerada, devemos indentificar que tipo de cônica é e estudar as suas propriedades. Em seções anteriores vimos que no caso em que $b = 0$ o problema pode ser resolvido por uma mudança de coordenadas. No entanto o caso em que $b \neq 0$ não é possível estudar somente via translação, assim vamos precisar de rotações do sistema de coordenadas.

14.1 Um exemplo

Começamos estudando um exemplo.

■ **Exemplo 14.1** Considere a equação $xy = 1$, e considere um novo sistema de coordenadas em que

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Observamos que

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \qquad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0.$$

Pelo que vimos anteriormente, a mudança de coordenadas do novo sistema para a cônica é descrito por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{(x' - y')}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{(x' + y')}{\sqrt{2}}.$$

o que corresponde a uma rotação em que $\theta = \frac{\pi}{4}$ do sistema de coordenadas. A mudança do sistema de coordenadas inversa é dada então por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad x' = \frac{(x + y)}{\sqrt{2}} \quad y' = \frac{(-x + y)}{\sqrt{2}}.$$

Vamos ver como se escreve a equação $xy = 1$ no novo sistema de coordenadas. Para isto substituimos x e y pelas expressões acima e obtemos

$$1 = \left(\frac{(x'-y')}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(x'+y')}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}((x')^2 - (y')^2).$$

Portanto a equação no novo sistema de coordenadas é

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1,$$

que é a equação de uma hipérbole. No sistema S os focos correspondem a $F_1 = (2,0)$ e $F_2 = (-2,0)$ e os vértices a $V_1 = (\sqrt{2},0)$ $V_2 = (-\sqrt{2},0)$. A excentricidade é $e = \sqrt{2}$ e as assíntotas são descritas pelas seguintes retas

$$y' = x' \qquad y' = -x'.$$

Vamos agora traduzir isso para o nosso sistema de coordenadas. Para isto devemos utilizar as fórmulas acima

$$\begin{aligned}
F_1 &: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \\
F_2 &: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \\
V_1 &: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
V_2 &: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A excentricidade é $e = \sqrt{2}$ e as assíntotas são descritas pelas seguintes retas

$$y' = x' \rightarrow \frac{(x-y)}{\sqrt{2}} = \frac{(x-y)}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 0 \quad \text{(eixo x)},$$

$$y' = -x' \rightarrow \frac{(x-y)}{\sqrt{2}}\frac{(x-y)}{\sqrt{2}} \rightarrow x = 0 \quad \text{(eixo y)}.$$

■

14.2 Procurando a mudança de coordenadas

Como vimos no exemplo, a rotação simplifica o estudo da equação. O problema do estudo de equações das cônicas pode ser escrito da seguinte forma:

existe uma rotação de coordenadas que simplifica o estudo da cônica? se existe, qual é tal rotação?

ou melhor,

como escolher o sistema de coordenadas no qual a equação da cônica é mais simples?

O que estamos procurando então é fazer uma rotação de coordenadas do sistema canônico ao sistema S de tal forma que a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

possa ser escrita no novo sistema, como

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' = f.$$

pois neste caso, com uma translação de coordenadas o problema pode ser estudado facilmente.

Em notação matricial, o que queremos é fazer uma mudança de coordenadas $X = R_\theta X'$ de forma tal que possamos passar

$$X^T AX + BX = f,$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix},$$

para uma equação

$$(X')^T A'(X') + B'X' = f,$$

em que

$$A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}.$$

Obs. Como uma translação não altera o sinal de a' e b' temos que, no novo sistema de coordenadas, se a equação

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' = f$$

representa uma cônica não degenerada, ela será

- uma elipse se a' e c' tem o mesmo sinal,
- uma hipérbole se a' e c' tem sinais contrários, ou
- uma parábola se a' ou c' é 0.

Pelo visto acima, nosso trabalho consiste em achar a matriz R_θ que simplifica a equação, em função dos dados conhecidos A, B e f. Para isto, primeiramente substituimos $X = R_\theta X'$ em $X^T AX + BX = f$ e comparamos com

$$(X')^T A'(X') + B'X' = f.$$

então obtemos

$$(X')^T (R_\theta^T AR_\theta)X' + (BR_\theta)X' = f,$$

de onde segue que

$$A' = R_\theta^T AR_\theta.$$

$$B' = BR_\theta.$$

Observamos que

$$a'c' = \det(A') = \det(R_\theta)^{-1}\det(A)\det(R_\theta) = \det(A).$$

portanto o tipo de cônica não degenerada é dado pelo determinante da matriz A, isto é

- se $\det(A) > 0$ a cônica é uma elipse,
- se $\det(A) = 0$ a cônica é uma parábola,
- se $\det(A) < 0$ a cônica é uma hipérbole.

Da forma de A' tiramos que $A' - a'I$ ou $A' - c'I$ tem uma linha nula, de onde segue que a', c' são zeros da função

$$g(u) = \det(A' - uI).$$

Porém ao não conhecer A' não podemos determinar g, no entanto

$$\begin{aligned} A' - uI &= R_\theta^T A R_\theta - uI \\ &= R_\theta^T A R_\theta - R_\theta^T R_\theta \\ &= R_\theta^T (A - uI) R_\theta, \end{aligned}$$

de onde

$$g(u) = \det(A' - uI) = \det(R_\theta)^{-1} \det(A - uI) \det(R_\theta) = \det(A - uI).$$

Assim, a' e c' são os zeros de

$$g(u) = \det(A - uI),$$

e portanto é possível calculá-los a partir de dados conhecidos.

Uma vez conhecidos a' e c' passamos a encontrar R_θ. Sem perder generalidade colocamos como a' ao maior número que é solução de $g(u) = 0$. Observamos que achar R_θ na verdade se reduz a determinar a matriz coluna

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

pois, a partir desta obtemos

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$AR_\theta = R_\theta A'.$$

Calculamos

$$AR_\theta = A \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \left(A \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \right),$$

e

$$R_\theta A' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \left(a' \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} c' \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \right).$$

Comparando as duas matrizes, vemos que

$$A \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = a' \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = c' \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Portanto $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ é a solução $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de norma igual a 1 do problema

$$(A' - a'I) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $u > 0$.

Juntanto todo o que foi visto até agora temos o seguinte resultado:

Teorema 14.1 Considere a equação, no sistema de coordenadas xy, dada por

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f,$$

com $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Então, existe uma rotação de coordenadas

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

tal que a equação acima transforma, no sistema de coordenadas $x'y'$, em

$$a'(x')^2+c'(y')^2+d'x'+e'y'=f$$

onde

- a', c' são raizes de
$$f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}a-\lambda & b/2\\ b/2 & c-\lambda\end{pmatrix}$$
- $(\cos(\theta),\sin(\theta))$ solução de norma 1 do sistema
$$\begin{pmatrix}a-a' & b/2\\ b/2 & c-a'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$
-
$$\begin{pmatrix}d' & e'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Obs.

- O sistema
$$\begin{pmatrix}a-a' & b/2\\ b/2 & c-a'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$
possui duas soluções $\{\vec{U}=(\cos(\theta),\sin(\theta)),\ \vec{V}=(\cos(\phi),\sin(\phi))\}$ de norma 1. Estas soluções estão relacionadas por $\vec{U}=-\vec{V}$ o que induz duas rotações diferentes R_θ e R_ϕ que estão relacionadas por $\theta=\phi-\pi$.

Este teorema produz o seguinte roteiro para simplificar a equação da cônica:

1. Seja $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$ a cônica não degenerada a ser estudada,
2. Construa a matriz
$$A=\begin{pmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}$$
3. Em função do $\det(A)$ classifique a cônica.
4. Ache os valores a' e c' que são zeros de $g(\lambda)=\det(A-\lambda I)$. Escolha a'
5. Determine $\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ que é a solução (u,v) de norma igual a 1 do problema
$$(A'-a'I)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
6. Construa, a partir de $\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ a matriz
$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

7. Escreva a equação da cônica no novo sistema de coordenadas, isto é

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' = f,$$

onde

$$(d'e') = (d,e)R_\theta.$$

8. Faça uma traslação, se necesário, para levar a equação acima na sua forma canônica.
9. Ache todos os elementos que caracterizam a cônica:focos, vértices, assíntotas, reta diretriz.
10. Utilize a mudança de coordenadas $X = R_\theta X'$ e $X' = R_\theta^T X$ junto à traslação para passar esta informação ao sistema de coordenadas inicial.

■ **Exemplo 14.2** Considere a cônica de equação

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0.$$

Para identifica-lá escrevemos a equação em notação matricial

$$X^T AX + BX = 9,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 12, & 6 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 24 > 0$ temos que a cônica é uma elipse.

Vamos simplificar a equação da cônica, para isto fazemos uma rotação de coordenadas $X' = R_\theta X$. Calculamos os 0 do polinômio.

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ -2 & 7-x \end{pmatrix} = x^2 - 11x + 24.$$

Portanto,

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2}.$$

Escolhemos

$$a' = 8,\ c' = 3.$$

Agora resolvemos

$$(A - 8I)U = 0 \qquad \| U \| = 1,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = -2u_1,$$

e obtemos a solução $V = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (1, -2)$. Portanto

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Observamos que $BR_\theta = (0, \frac{30}{\sqrt{5}})$ e portanto, no novo sistema de coordenadas, a equação transformada é

$$(X')^T (R_\theta^T A R_\theta) X' + (BR_\theta)X' = 9 \Rightarrow 8x'^2 + 3y'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}} y' = 9,$$

Fazemos agora uma traslação

$$X'' = X' + Q$$

em que

$$X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

para levar a equação a forma mais simples.

Achamos Q completando quadrados na equação

$$8x'^2 + 3y'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}y' = 9$$

$$8x'^2 + 3(y'^2 + 2\sqrt{5}y' + 5) = 9 + 15 \Rightarrow \frac{x'^2}{3} + \frac{(y'+\sqrt{5})^2}{8} = 1.$$

Finalmente, se $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, temos que a equação simplificada é

$$\frac{(x'')^2}{3} + \frac{(y'')^2}{8} = 1.$$

A mudança de coordenadas completa, isto é rotação mais translação,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e sua inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right).$$

Para achar a excentricidade da cônica calculamos primeiramente

$$c^2 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5},$$

donde $e = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

Os focos no sistema (x'', y'') estão em

$$F_1 = (0, \sqrt{5}), \qquad F_2 = (0, -\sqrt{5}),$$

$$V_1 = (0, \sqrt{8}), \qquad V_2 = (0, -\sqrt{8}).$$

Então, as coordenadas no sistema Oxy são

$$F_1 \; : \; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_2 \; : \; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$V_1 \; : \; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \\ \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

$$V_2 \; : \; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \\ -\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 14.3** Seja C a curva do plano contituída dos pontos que satisfazem a equação

$$3x^2+3y^2+2xy+4\sqrt{2x}-4\sqrt{2y}=-4.$$

Construimos a matriz da cônica

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A)=8>0$ concluimos que a cônica é uma elipse. Procuramos os 0 de

$$f(x)=\det(A-xId)=\det\begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}=x^2-6x+8.$$

De onde $x=\frac{6\pm 2}{2}$, portanto escolhemos $a'=4$ e $c'=2$.

Para encontrar a rotação procuramos a solução do sistema linear $\det(A-4Id)V=0$. Assim

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow v_1=v_2\Rightarrow V=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Portanto,

$$R_\theta=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

A mudança de coordenadas fica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{(x'-y')}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{(x'+y')}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Com isto a equação da cônica transforma em

$$4(x')^2+2(y')^2+4\sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-4\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)=-4.$$

Simplificando

$$4(x')^2+2(y')^2-8y'=-4.$$

Completando quadrados

$$4(x')^2+2(y'-2)^2=-4+8=4\Rightarrow(x')^2+\frac{(y'-2)^2}{2}=1.$$

Fazendo uma translação $u=x'$ e $v=y'-2$ temos que a equação transformada de C é

$$u^2+\frac{v^2}{2}=1.$$

A mudança de variáveis do sistema uv para o sistema xy é dada então por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v+2 \end{pmatrix}.$$

Passamos a estudar a cônica. Para obter os focos no sistema uv primeiramente obtemos $c^2=2-1=1$. Portanto os focos, no sistema uv, tem coordenadas $F_1=(0,1)$ e $F_2=(0,-1)$, de onde segue que no sistema de coordenadas xy

$$F_1\ :\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$F_2\ :\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Análogamente calculam-se os vértices. ■

14.2.1 Apêndice

Vamos discutir neste apêndice uma outra forma de identificar cônicas que também aparecem nos livros textos, como por exemplo o de Boulos-Oliveira.

Considere uma cônica de equação

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f.$$

Sabemos que existe, pelo visto anteriormente, uma rotação que transforma as coordenadas xy em coordenadas $x'y'$ que transformam a equação acima em uma equação

$$a'(x')^2+c'(y')^2+d'x'+e'y'=f$$

No entanto vamos achar a rotação de forma diferente. Assuma que

$$x=\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y' \quad y=\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y'.$$

e substituimos na equação original, então

$$\begin{aligned}
f=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey &= a(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')^2\\
&\quad +b(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y')\\
&\quad +c(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y')^2\\
&\quad +d(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')+e(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y')\\
&= (x')^2(a\cos^2(\theta)+c\sin^2(\theta)+b\sin(\theta)\cos(\theta))\\
&\quad +(y')^2(a^2\sin^2(\theta)+c\cos^2(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta))\\
&\quad x'y'[2(c-a)\cos(\theta)\sin(\theta)+b(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)]\\
&\quad +x'(d\cos(\theta)+e\sin(\theta))+y'(-d\sin(\theta)+e\cos(\theta))
\end{aligned}$$

Identificamos

$$\begin{aligned}
a' &= a\cos^2(\theta)+c\sin^2(\theta)+b\sin(\theta)\cos(\theta)\\
b' &= 2(c-a)\cos(\theta)\sin(\theta)+b(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\\
c' &= a\sin^2(\theta)+c\cos^2(\theta)-b\sin(\theta)\cos(\theta)\\
d' &= d\cos(\theta)+e\sin(\theta)\\
e' &= -d\sin(\theta)+e\cos(\theta).
\end{aligned} \tag{14.1}$$

O ângulo θ que estamos procurando é aquele para o qual $b'=0$e que elimina, portanto, o termo $x'y'$ da equação.

- se $a=c$, então podemos escolher $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$ e temos a rotação procurada.
- se $a\neq c$, então

$$(c-a)\sin(2\theta)+b\cos(2\theta)=0 \quad\Rightarrow\quad \tan(2\theta)=\frac{b}{a-c}$$

Denotamos por

$$\frac{b}{a-c}=k,$$

então devemos achar $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ em função de k. Como

$$\tan(2\theta)=k \quad\Rightarrow\quad \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan(\theta)^2}=k \quad\Rightarrow\quad k\tan(\theta)^2+2\tan(\theta)-k=0$$

Segue que há duas soluções possíveis,

$$\tan(\theta_1)=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \quad \text{ou} \quad \tan(\theta_2)=\frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\tan(\theta_1-\theta_2) &= \frac{\tan(\theta_1)-\tan(\theta_2)}{1+\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}\\ &= \frac{2k\sqrt{1+k^2}}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \theta_1-\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Escolhemos $\theta=\theta_1$. A escolha deste ângulo é equivalente a escolha do autovalor feito no método anterior na identificação de cônicas. De fato, verifique em 14.1 que os valores de a' e c' trocam entre si para θ_1 e θ_2 visto que

$$\begin{aligned}&\cos(\theta_1) = -\sin(\theta_2) \quad \sin(\theta_1) = \cos(\theta_2) \quad \text{se} \quad \theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2},\\ &\cos(\theta_1) = \sin(\theta_2) \quad \sin(\theta_1) = -\cos(\theta_2) \quad \text{se} \quad \theta_1 = \theta_2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Mais ainda

$$\tan(\theta) = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \quad \Rightarrow \quad k\sin(\theta) = \left(-1+\sqrt{1+k^2}\right)\cos(\theta).$$

Propomos

$$\sin(\theta) = \frac{\left(-1+\sqrt{1+k^2}\right)}{\alpha} \qquad \cos(\theta) = \frac{k}{\alpha},$$

Como

$$\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 2\left(1+k^2-\sqrt{1+k^2}\right).$$

Com isto, a rotação procurada fica determinada por

$$\sin(\theta) = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2\left(1+k^2-\sqrt{1+k^2}\right)}} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{k}{\sqrt{2\left(1+k^2-\sqrt{1+k^2}\right)}}.$$

■ **Exemplo 14.4** Considere a cônica de equação

$$7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2 = 8$$

Identificamos

$$a=7 \quad b=2\sqrt{3} \quad c=5 \quad d=0 \quad e=0 \quad f=8.$$

Então

$$k = \frac{2\sqrt{3}}{7-5} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2.$$

Entao

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} \qquad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Com a mudança de coordenadas temos que

$$\begin{aligned}a' &= 8\\ b' &= 0\\ c' &= 4\\ d' &= 0\\ e' &= 0\end{aligned}$$

e a equação da cônica fica

$$8(x')^2+4(y')^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad (x')^2+\frac{(y')^2}{2} = 1.$$

■

15. Como saber se uma cônica é degenerada

Uma cônica é o conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz uma equação da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f,$$

em que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Isto é, o conjunto solução da equação em duas variáveis x e y.

Na notação matricial a equação da cônica pode ser escrita como segue

$$\begin{pmatrix} 1' & x' & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f & d' & e' \\ d' & 2a' & 0 \\ e' & 0 & 2c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Fazemos uma rotação do sistema de coordenadas para eliminar o termos xy da equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f.$$

Na notação matricial que estamos empregando, fazer a rotação torna-se equivalente a substituir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix},$$

para o valor de θ adequado. Assim a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ se transforma da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

logo chegamos numa equação da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f & d' & e' \\ d' & 2a' & 0 \\ e' & 0 & 2c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

que representa uma equação sem termos da forma $x'y'$. Aqui é fácil ver que

$$d' = d\cos(\theta) + e\sin(\theta), \qquad e' = -d\sin(\theta) + e\cos(\theta).$$

Chegamos assim a duas possibilidades:

1) Se $a' \neq 0$ **e** $c' \neq 0$: Então fazemos uma translação de coordenadas, que na nossa linguagem é o mesmo que fazer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2d'/a' & 1 & 0 \\ -2e'/c' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

Substituimos na equação anterior e obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d'/2a' & -e'/2c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f & d' & e' \\ d' & 2a' & 0 \\ e' & 0 & 2c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d'/2a' & 1 & 0 \\ -e'/2c' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 0,$$

para chegar a uma equação da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f' & 0 & e \\ 0 & 2a' & 0 \\ 0 & 0 & 2c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 0,$$

onde

$$f' = f - \frac{d'}{4a'} - \frac{e'}{4c'}.$$

Esta equação representa uma cônica cuja equação, no sistema $x''y''$ é

$$a'(x'')^2 + c'(y'')^2 + f' = 0.$$

- Assuma $f' \neq 0$:
  a) se a', c' e f' tem sinais diferentes: uma elipse ou uma hipérbole.
  b) se a', c', f' tem o mesmo sinal: um conjunto vazio.
- Assuma $f' = 0$ então a equação acima é um ponto (quando a', c' tem o mesmo sinal) ou se

$$(\sqrt{|a'|}x'' + \sqrt{|c'|}y'')(\sqrt{|a'|}x'' - \sqrt{|c'|}y'') = 0$$

que tem como solução

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{|a'|}x'' + \sqrt{|c'|}y'') = 0 \\ (\sqrt{|a'|}x'' - \sqrt{|c'|}y'') = c \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{|a'|}x'' + \sqrt{|c'|}y'') = c \\ (\sqrt{|a'|}x'' - \sqrt{|c'|}y'') = 0 \end{array} \right.$$

para algum $c \in \mathbb{R}$. Este último caso corresponde a um par de retas que se interseptam em um ponto. Estes dois ultimos casos (o ponto ou o par de retas) são o que chamamos de cônicas degeneradas. Observamos que $f' = 0$ é equivalente a $f'a'c' = 0$ e, por sua vez, isto garante que

$$\det \begin{pmatrix} 2f' & 0 & e \\ 0 & 2a' & 0 \\ 0 & 0 & 2c' \end{pmatrix} = 0,$$

mas, como

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2f' & 0 & e0 \\ 0 & 2a' & 0 \\ 0 & 0 & 2c' \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & -d'/a' & -e'/c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2f & d' & e' \\ d' & 2a' & b \\ e' & b & 2c' \end{pmatrix} \\
&\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d'/a' & 1 & 0 \\ -e'/c' & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 2f & d' & e' \\ d' & 2a' & b \\ e' & b & 2c' \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} \\
&\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Então $f' = 0$ é equivalente a

$$\det\begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} = 0.$$

2) Se $a' = 0$ **e** $c' \neq 0$: Então procedemos de forma similar ao caso anterior. Primeiramente fazemos uma translação de coordenadas, que na nossa linguagem é o mesmo que fazer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -e'/2c' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Ao substituirmos na equação da cônica chegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e'/2c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f & d' & e' \\ d' & 2a' & b \\ e' & b & 2c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -e'/2c' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2f' & d' & 0 \\ d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 0,$$

para

$$f' = f - \frac{e'}{4c'}.$$

Portanto a equação da cônica pode ser escrita, no sistema $x''\ y''$ como

$$c'(y'')^2 + d'x' + f' = 0.$$

a) O caso em que $d' \neq 0$ corresponde a uma parábola.

b) O caso em que $d' = 0$ corresponde a duas retas paralelas

$$y'' = \pm \frac{f'}{c'}.$$

Este último caso é uma cônica degenerada.
Observamos que $c'(d')^2 = 0$ garante que

$$\det \begin{pmatrix} 2f' & d' & 0 \\ d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c' \end{pmatrix} = 0.$$

Fazendo as contas como no caso anterior vemos que isto é equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} = 0.$$

Com tudo isso temos provado o seguinte teorema.

Teorema 15.1
Seja C a cônica formada pelo conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz uma equação da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f,$$

em que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Então a cônica C é degenerada se

$$\det \begin{pmatrix} 2f & d & e \\ d & 2a & b \\ e & b & 2c \end{pmatrix} = 0.$$

As cônicas degeneradas podem ser
- um conjunto vazio,
- um ponto,
- um par de retas que se interseptam em um ponto ou
- um par de retas paralelas.

16. Coordenadas polares

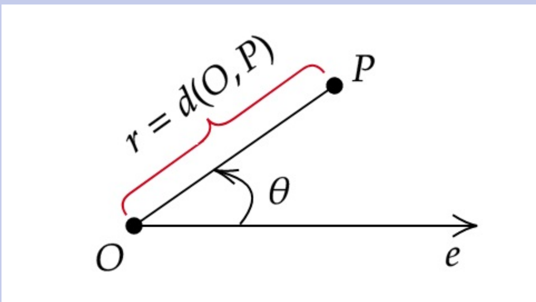
Até agora temos estudado sitemas de coordenadas cartesianas. Nestes sistemas cada ponto era identificado por um par ordenado $P = (x, y)$ cujas entradas x e y são obtidas a partir de duas retas fixas (eixos coordenados). Estudaremos agora um sistema de coordenadas diferente para caracterizar os pontos do plano: o sistema de coordenadas polares.

16.1 Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas polares localiza univocamente quase todos os pontos do plano a exeição de um conjunto particular que é chamado de eixo polar.

Para definir as coordenadas polares identificamos um ponto O que chamaremos de polo, usualmente o identificamos com a origem de coordenadas cartesianas, e uma semireta orientada e que parte do ponto O e que chamamos de eixo polar.

Um ponto P será identificado em coordenadas polares por um par (r, θ) em que $r = d(O, P)$ e $0 < \theta < 2\pi$ é o ângulo formado, em sentido anti-horário, pelo eixo polar e e o vetor $\overrightarrow{OP}$.



Observamos aqui o problema que há com os pontos do eixo polar, em particular, estes pontos que se corresponderiam com ângulos 0 ou 2π e portanto não ficam completamente determinados. O caso extremo é o polo, o qual corresponderia a pontos da forma $(0, \theta)$ em coordenadas polares para qualquer $\theta \in (0, 2\pi)$.

Para abolir estes problemas vamos estender os valores de θ para $[0, 2\pi)$. Assim um ponto sobre o eixo polar tem coordenadas polares $(r, 0)$ e o polo será um ponto qualquer com coordenadas polares com $r = 0$. Isto significa tomar o quociente da banda $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ por uma relação de equivalência $\sim$ definidas pelas seguintes identificações $(r, 0) \sim (r, 2\pi)$ e $(0, 0) \sim (0, \theta)$ para qualquer $\theta \in [0, 2\pi]$. Não vamos entrar em maiores detalhes.

■ **Exemplo 16.1** Vamos fazer desenhos em coordenadas polares. Em cada um dos exemplos a seguir desenhamos o conjunto

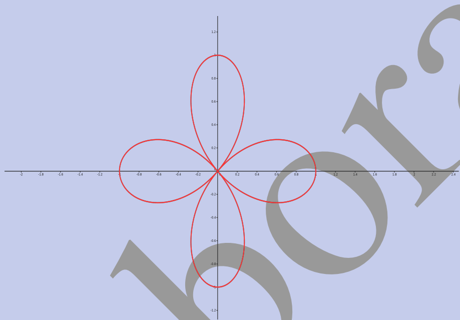
$$\mathscr{C} = \{(r,\theta)\ r = f(\theta),\ \theta \in \mathscr{D}\}$$

para algúm domínio $\mathscr{D} \subset [0,2\pi)$.

i- $r = |\cos(2\theta)|$ (rosácea de 4 pétalas). Aqui $\mathscr{D} = [0,2\pi)$, então

θ	r
0	1
$\pi/4$	0
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	0
π	1

θ	r
$5\pi/4$	0
$3\pi/2$	1
$7\pi/4$	0
2π	1



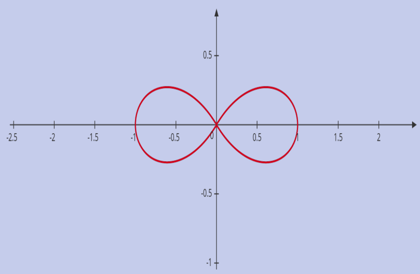
ii- $r = \cos(2\theta)$. Aqui

$$\mathscr{D} = [0,\pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi)$$

pois para $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ temos $f(\theta) < 0$ e, portanto $r < 0$ o que não faz sentido. Então

θ	r
0	1
$\pi/4$	0
$3\pi/4$	0
π	1

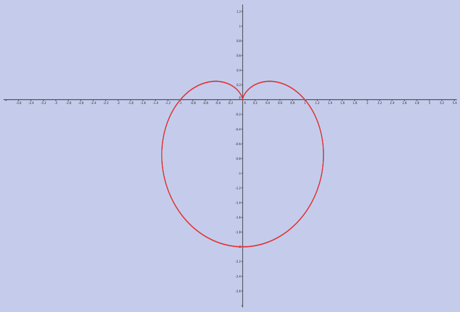
θ	r
$5\pi/4$	0
$7\pi/4$	0
2π	1



iii- $r = 1 - \sin(\theta)$ (Cardioide). Aqui $\mathscr{D} = [0,2\pi)$, então

θ	r
0	1
$\pi/4$	$1-\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$1-\sqrt{2}/2$
π	1

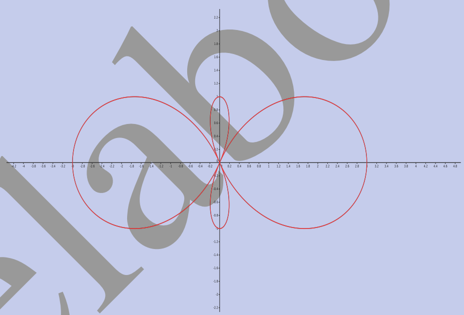
θ	r
$5\pi/4$	$1+\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	2
$7\pi/4$	$1+\sqrt{2}/2$
2π	1



iv- $r = |1+2\cos(2\theta)|$ (Limaçons). Aqui $\mathscr{D} = [0,2\pi)$, então

θ	r
0	3
$\pi/6$	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	1
$5\pi/6$	0

θ	r
π	3
$7\pi/6$	0
$5\pi/4$	1
$3\pi/2$	1
$7\pi/4$	1
$11\pi/6$	0
2π	3



■

16.2 Relação entre coordenadas polares e cartesianas

Como transformar entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas? Para isto devemos estudar as transformações de coordenadas. Considere as coordenadas cartesianas $S = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ em que 0 coincide com o polo e $e = \{\lambda\vec{e}_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Considere um ponto P no plano tal que $P = (x,y)$ em coordenadas cartesianas e $P = (r,\theta)$ em coordenadas polares. Então, da definição

$$r = d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{e}_1}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \|\vec{e}_1\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}.$$

Portanto temos a seguinte mudança de coordenadas: Se $P = (x,y)$ em coordenadas cartesianas então $P = (r,\theta)$ em que

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta \in [0,2\pi) \text{ tal que } \cos(\theta) = \frac{x}{r} \text{ e} \sin(\theta) = \frac{y}{r}.$$

Se agora $P = (r,\theta)$ em coordenadas polares então $P = (x,y)$ em coordenadas cartesianas onde

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta).$$

■ **Exemplo 16.2** i- Vamos traduzir a equação $x^2+2y+y^2 = 2$ que está em coordenadas cartesianas a uma equação em coordenadas polares. Para isto substituimos x e y como acima e obtemos

$$(r\cos(\theta))^2 + 2r\sin(\theta) + \sin(\theta)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2r\sin(\theta) = 2.$$

ii- Vamos traduzir a equação $x^2+y=x$ que está em coordenadas cartesianas a uma equação em coordenadas polares. Para isto substituimos x e y como acima e obtemos

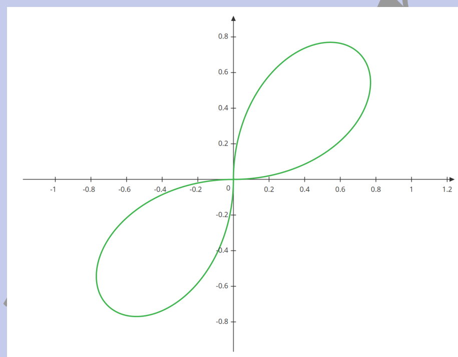
$$(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))=r\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad r\cos(\theta)^2+\sin(\theta)=\cos(\theta).$$

∎

Obs. Quando transformamos de coordenadas polares para cartesianas devemos evitar elevar ao quadrado expressões da forma $\sqrt{x^2+y^2}$ sem ser cuidadosos. Por exemplo as expressões $r=\sin(2\theta)$ e $r=|\sin(2\theta)|$ são duas expressões que parecem similares mas são bem diferentes e produzem gráficos diferentes. Ao transformá-las em coordenadas cartesianas vemos que para a primeira

$$\begin{aligned} r=\sin(2\theta) \quad &\Rightarrow \quad r^3=2r\sin(\theta)r\cos(\theta) \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{(x^2+y^2)^3}=2xy. \end{aligned}$$

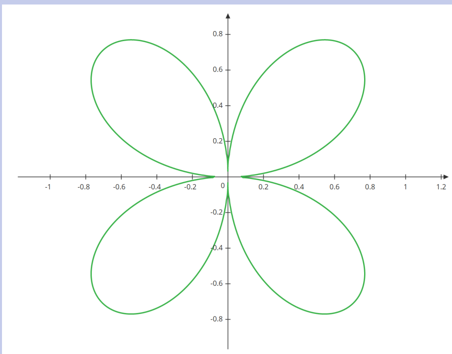
que se corresponde com a gráfica de



No entanto, a segunda expressão transforma em

$$\begin{aligned} r=|\sin(2\theta)| \quad &\Rightarrow \quad r^3=2|r\sin(\theta)r\cos(\theta)| \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{(x^2+y^2)^3}=2|xy| \\ &\Rightarrow \quad (x^2+y^2)^3=4x^2y^2. \end{aligned}$$

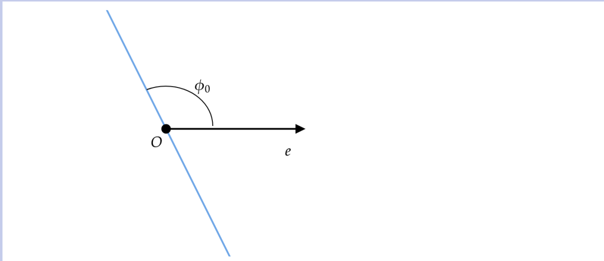
que se corresponde com a gráfica de



16.3 A reta em coordenadas polares.

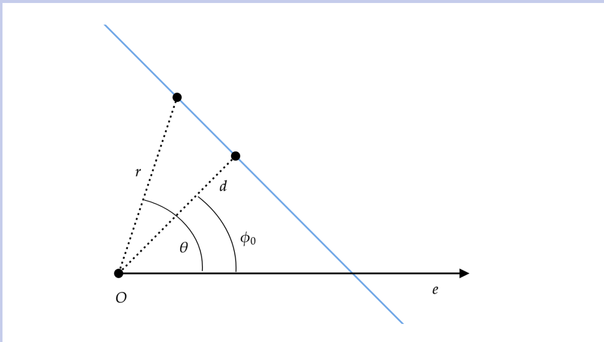
Nosso objetivo aqui é dar uma expressão para a equação da reta em coordenadas polares.

Gráficamente temos que se ℓ é uma reta que passa pela origem de coordenadas com ângulo ϕ_0 então



$$\ell = \{(r,\theta),\ \theta = \phi_0 \text{ ou } \theta = \pi + \phi_0\}$$

Se ℓ não passa pela origem, considere $Q = (d, \phi_0)$ o ponto que faz a distância entre ℓ e O, de onde $d = d(O, \ell)$. Então



$$\ell = \{(r,\theta),\ r\cos(\theta - \phi_0) = d\}.$$

Vamos ver a relação com as coordenadas cartesianas.

Se a equação da reta ℓ em coordenadas cartesianas é da forma $ax + by = c$, então $\|(a,b)\| \neq 0$. Escrevemos a equação da reta como segue

$$\frac{a}{\|(a,b)\|}x + \frac{b}{\|(a,b)\|}y = \frac{c}{\|(a,b)\|},$$

e portanto a relação procurada é a seguinte

$$\begin{aligned} \frac{a}{\|(a,b)\|} &= \cos\phi_0, \\ \frac{b}{\|(a,b)\|} &= \sin\phi_0, \\ \frac{c}{\|(a,b)\|} &= d. \end{aligned}$$

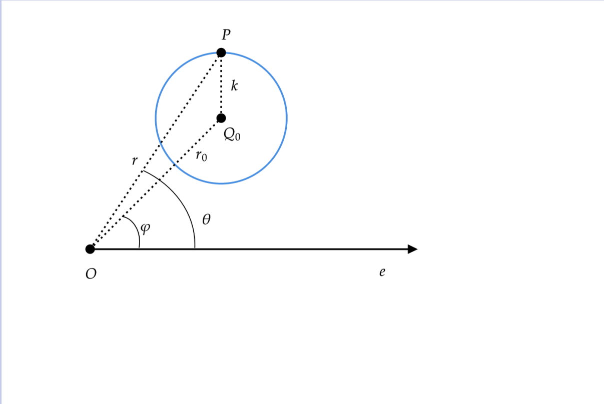
Obs. A reta $\ell : ax + by = c$ é paralela ao vetor $\vec{v} = (-b, a)$. De fato, se por exemplo $b \neq 0$ temos que

$$\ell : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -bt \\ y &=& at + \frac{c}{b} \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R} \qquad .$$

portanto a distância $d(O, \ell) = \frac{c}{\|(a,b)\|}$.

16.4 Circunferência em coordenadas polares

A circunferência é o conjunto de pontos P que equidistam de um ponto fixo Q_0 (centro). Seja $Q_0 = (r_0, \phi)$ em coordenadas polares e $Q_0 = (x_0, y_0)$ em coordenadas cartesianas.



Da lei do cosseno tiramos que se k é o raio da circunferência então

$$C = \left\{(r,\theta),\ k^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \phi)\right\}.$$

Transformando de cartesianas a polares temos que $P = (x,y)$, $x_0 = r_0\cos(\phi)$ e $y_0 = r_0\sin(\phi)$ de onde

$$x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0) = k^2 \quad \Rightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2.$$

Então a relação entre coordenadas polares e cartesianas é

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0\cos(\phi), \\ y_0 &= r_0\sin(\phi), \\ k &= k. \end{aligned}$$

16.5 Cônicas em coordenadas polares

Para obter a equação geral das cônicas em coordenadas polares primeiro precisamos da seguinte caracterização.

Teorema 16.1 Seja C uma cônica não degenerada, que não é uma circunferência, de excentricidade e. Considere um foco F da cônica, então existe uma reta ℓ chamada de diretriz tal que $F \notin \ell$ e a equação da cônica pode ser escrita como

$$d(P,F) = ed(P,\ell).$$

Reciprocamente, seja ℓ uma reta, F um ponto que não pertence a ℓ e $e > 0$ uma constante. Então o conjunto de pontos que satisfazem a equação acima determina uma cônica de excentricidade e.

Demonstração: Para provar a primeira parte observamos que se $e = 1$ então a cônica é uma parábola e portanto a reta existe por definição. Vamos estudar o caso $e \neq 1$. Fazendo uma translação e rotação se necessário, podemos assumir que o foco F tem coordenadas $F = (c,0)$ (com $c = \pm\frac{de^2}{e^2-1}$) e que a equação da cônica é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observamos que

$$a^2 = c^2/e^2 \qquad\qquad b^2 = |e^2 - 1|a^2 = \frac{|e^2-1|}{e^2}c^2,$$

para qualquer um dos casos. De fato se for elipse $b^2 = a^2 - c^2$ e se for hipérbole $b^2 = c^2 - a^2$, mas nos dois casos $e = c/a$ de onde obtemos o procurado.

Considere então que o foco esteja no ponto $F = (c,0)$ e a reta $\ell : x = \frac{c}{e^2}$ então escrevemos a equação $d(P,F) = ed(P,\ell)$ e obtemos

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = e\left|x-\frac{c}{e}\right|,$$

elevando ao quadrado em ambos os lados

$$(x-c)^2+y^2 = e^2\left(x-\frac{c}{e^2}\right)^2,$$

simplicando obtemos

$$(1-e^2) = x^2+y^2 = c^2\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right),$$

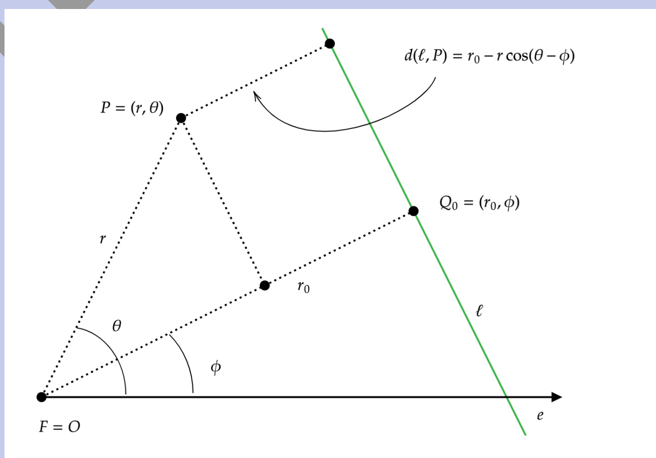
donde chegamos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A segunda parte é imediato da primeira. Se $e = 1$ então não há nada a fazer. Se $e \neq 1$ denotamos por $d_0 = d(F,\ell)$ então existe algum sistema de coordenadas tal que o foco pode ser escrito da forma $F = (c,0)$ e a reta $\ell : x = c/e^2$ com $c = \frac{de^2}{1-e^2}$ (observe que $d(F,\ell) = d$) portanto, repetindo as contas feitas anteriormente obtemos uma cônica não degenerada que é uma elipse ou hipérbole dependendo de e. ■

Considere uma cônica de excentricidade e, cujo foco F está no polo O e sua reta diretriz ℓ está a uma distância d do foco. Seja $Q_0 = (r_0,\phi)$ o ponto na reta que realiza a distância entre F e ℓ, isto é $r_0 = d(F,\ell)$. Um ponto $P = (r,\theta)$ pertence a cônica se satisfaz a equação

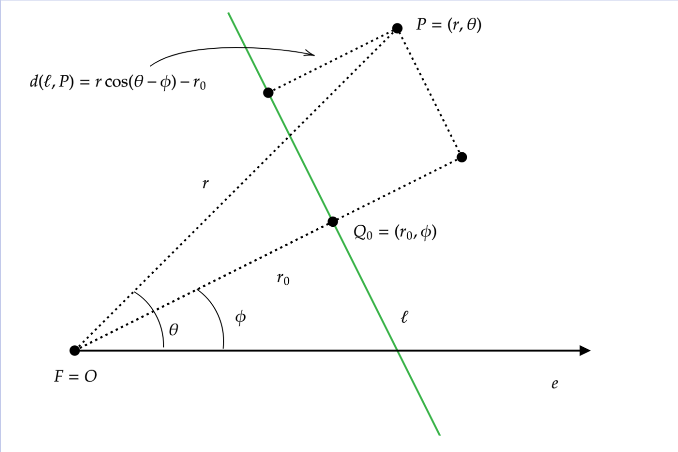
$$d(P,F) = ed(P,\ell).$$



Se $P = (r,\theta)$ está como no desenho, então satisfaz a equação

$$r = e(r_0 - r\cos(\theta-\phi)).$$

Se $P = (r,\theta)$ está do outro lado da reta diretriz, isto é



temos que $P = (r, \theta)$ satisfaz a equação

$$r = e(r\cos(\theta - \phi) - r_0)$$

Assim, o ponto $P = (r, \theta)$ pertence a cônica de excentricidade e e reta diretriz $\ell : r\cos(\theta - \phi) = r_0$ se satisfaz

$$r = \frac{er_0}{1 + e\cos(\theta - \phi)} \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{er_0}{e\cos(\theta - \phi) - 1},$$

então a cônica é dada pelo conjunto

$$C = \left\{(r, \theta), r = \frac{er_0}{1 + e\cos(\theta - \phi)}, \theta \in D_1\right\} \cup \left\{(r, \theta), r = \frac{er_0}{e\cos(\theta - \phi) - 1}, \theta \in D_2\right\},$$

onde cada D_i é o domínio onde o ângulo θ pode assumir valores. Vamos estudar agora estes domínios para as diferentes possibilidades.

16.5.1 Parábola

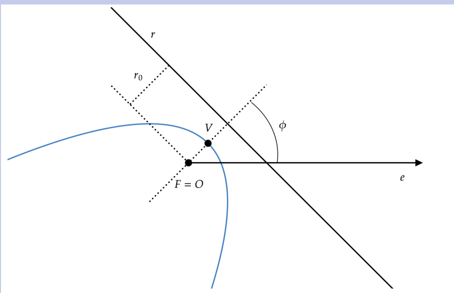
No caso da parábola $e = 1$. Vemos assim que dos dois conjuntos só fica

$$C = \left\{(r, \theta), r = \frac{r_0}{1 + \cos(\theta - \phi)}, \theta \in D\right\},$$

pois o outro conjunto é vazio devido a que corresponde a $r < 0$, que não está definido em coordenadas polares.

Da construção acima tiramos que o foco está na origem de coordenadas e portanto o identificamos, em coordenadas polares com o polo (em cartesianas pelo ponto $F = (0, 0)$).

O ângulo $\theta \neq \phi + \pi$ pois temos uma indeterminação. Portanto $\theta \in (\phi - \pi, \phi + \pi)$. O vértice corresponde a interseção da reta que passa pelo foco e $Q_0 = (r_0, \phi)$.



Vemos então que $V = (r_1, \theta_1)$ quando $\theta_1 = \phi$, de onde segue que

$$r_1 = \frac{r_0}{1 + \cos(0)} = \frac{r_0}{2}$$

isto é $V = (\frac{r_0}{2}, \phi)$, o ponto médio entre F e Q_0.

Resumindo:

Equação	Foco	Vértice	Reta Diretriz
$r = \frac{r_0}{1+\cos(\theta-\phi)}$	$F = O$	$V = \left(\frac{r_0}{2}, \phi\right)$	$r\cos(\theta-\phi) = r_0$

■ **Exemplo 16.3** Seja C a cônica de equação dada em coordenadas polares por

$$r = \frac{4}{2+\sqrt{2}\cos(\theta)-\sqrt{2}\sin(\theta)}.$$

Manipulamos a expressão e chegamos a

$$\begin{aligned} r &= \frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta)} \\ &= \frac{2}{1+\cos(\theta-(-\pi/4))}. \end{aligned}$$

Então pelo visto na teoria identificamos

$$r_0 = 2, \quad e = 1 \quad \phi = -\frac{\pi}{4}.$$

Temos assim que a equação é de uma parábola com foco $F = O$, vértice em $V = (1, -\pi/4)$ e reta diretriz $r\cos(\theta+\pi/4) = 2$, tudo em coordenadas polares. Em coordenadas cartesianas teremos

$$\begin{aligned} F = O \quad &\to \quad F = (0,0), \\ V = (1,-\pi/4) \quad &\to \quad V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Para ver a equação da reta diretriz, utilizamos

$$r\cos(\theta+\pi/4) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos(\theta) - \frac{\sqrt{2}}{2} r\sin(\theta) = 2.$$

Obtendo assim, a equação

$$\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 4.$$

Poderiamos ter chegado a esta informação, em coordenadas cartesianas, fazendo outro procedimento que detalhamos a seguir. Primeiramente transformamos a equação da cônica de coordenadas polares a coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} r = \frac{4}{2+\sqrt{2}\cos(\theta)-\sqrt{2}\sin(\theta)} \quad &\Rightarrow \quad r\left(2+\sqrt{2}\cos(\theta)-\sqrt{2}\sin(\theta).\right) = 4 \\ &\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 4 \\ &\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+y^2} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 4. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado (observamos que neste caso podemos fazé-lo), temos

$$4x^2 + 4y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 16 - 4xy + 8\sqrt{2}y - 8\sqrt{2}x \Rightarrow$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8\sqrt{2}(x-y) = 16.$$

Se fazemos a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-u+v) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ v & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y). \end{array} \right.$$

A equação transforma em

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{2}v)^2 + 8\sqrt{2}(\sqrt{2}u) = 16 \quad & \Rightarrow \quad 4v^2 + 16u = 16 \\ & \Rightarrow \quad v^2 = -4(u-1). \end{aligned}$$

Então temos que, nas coordenadas uv temos

$$F = (0,0), \quad V = (1,0),$$

e a reta diretriz

$$r: \; u = 2.$$

Transformando ao sistema xy temos

$$F = (0,0), \quad V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

E a reta diretriz,

$$\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 4,$$

como foi obtido inicialmente. ■

16.5.2 Elipse

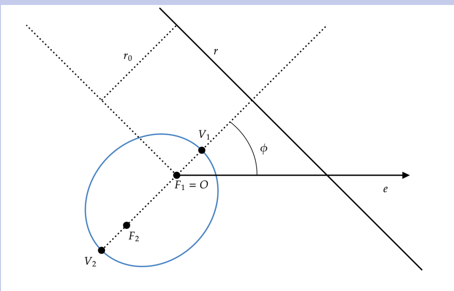
Para a Elipse, $e < 1$. Portanto também ficamos com o primeiro conjunto

$$C = \left\{ (r,\theta), r = \frac{er_0}{1 + e\cos(\theta - \phi)}, \theta \in D \right\},$$

pois o outro se corresponde para $r < 0$.

Observamos que neste caso θ pode assumir qualquer valor. Para não ter sobreposição de pontos fazemos $\theta \in (\phi, \phi + 2\pi)$.

A elipse tem dois vértices. Estes quatro pontos estão sobre a reta que une a origem com o ponto $Q_0 = (r_0, \phi)$.



Em particular, os vértices são os pontos $V_1 = (r_1, \theta_1)$ e $V_2 = (r_2, \theta_2)$ da elipse que se corresponde a $\theta_1 = \phi$ e $\theta_2 = \phi + \pi$. Substituindo na equação vemos que

$$r_1 = \frac{er_0}{1 + \cos(0)} = \frac{er_0}{1 + e},$$

$$r_2 = \frac{er_0}{1+\cos(\pi)} = \frac{er_0}{1-e}.$$

De onde segue que

$$V_1 = \left(\frac{er_0}{1+e}, \phi\right), \qquad V_2 = \left(\frac{er_0}{1-e}, \phi+\pi\right).$$

Para os focos observamos que o primeiro deles F_1 está na origem de coordenadas. Para determinar o segundo utilizamos que $d(V_1,F_1) = d(V_2,F_2)$. Utilizando

$$d(V_2,F_1) - d(F_2,F_1) = d(V_2,F_2) = d(V_1,F_1),$$

vemos que se $F_2 = (r_3, \phi+\pi)$, então

$$\begin{aligned} \frac{er_0}{1-e} - r_3 &= d(V_2,F_2) \\ &= d(V_1,F_1) \\ &= \frac{er_0}{1+e}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$r_1 = \frac{2r_0e^2}{1-e^2}.$$

Assim

$$F_2 = \left(\frac{2r_0e^2}{1-e^2}, \phi+\pi\right).$$

Resumindo

Equação	**Focos**	**Vértices**	**Reta Diretriz**
$r = \frac{er_0}{1+e\cos(\theta-\phi)}$	$F_1 = O$ $F_2 = \left(\frac{2e^2r_0}{1-e^2}, \phi+\pi\right)$	$V_1 = \left(\frac{er_0}{1+e}, \phi\right)$ $V_2 = \left(\frac{er_0}{1-e}, \phi+\pi\right)$	$r\cos(\theta-\phi) = r_0$

■ **Exemplo 16.4** Seja C a cônica de equação dada em coordenadas polares por

$$r = \frac{6}{2+\frac{1}{2}\cos(\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)}.$$

Manipulamos a expressão e chegamos a

$$r = \frac{3}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta-\pi/3)}.$$

Então pelo visto na teoria identificamos

$$r_0 = 6, \quad e = \frac{1}{2} \quad \phi = \frac{\pi}{3},$$

Temos assim que a equação é de uma elipse com

$$\begin{aligned} F_1 &= O. \\ V_1 &= (2, \pi/3), \\ F_2 &= (4, 4\pi/3), \\ V_2 &= (6, 4\pi/3). \end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas teremos

$$\begin{aligned} F_1 = O &\quad\Rightarrow\quad F_1 = (0,0), \\ V_1 = (2, \pi/3) &\quad\Rightarrow\quad V_1 = (1, \sqrt{3}), \\ F_2 = (4, 4\pi/3) &\quad\Rightarrow\quad F_2 = (-2, -2\sqrt{3}), \\ V_2 = (6, 4\pi/3) &\quad\Rightarrow\quad V_2 = (-3, -3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Poderiamos ter chegado a esta informação, em coordenadas cartesianas, fazendo outro procedimento que detalhamos a seguir. Primeiramente transformamos a equação da cônica de coordenadas polares a coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} r = \frac{6}{2 + \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)} &\quad\Rightarrow\quad r\left(2 + \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 6 \\ &\quad\Rightarrow\quad 4\sqrt{x^2+y^2} + x + \sqrt{3}y = 12 \\ &\quad\Rightarrow\quad 4\sqrt{x^2+y^2} = -x - \sqrt{3}y + 12. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado (observamos que neste caso podemos fazé-lo), temos

$$16x^2 + 16y^2 = x^2 + 3y^2 + 144 + 2\sqrt{3}xy - 24\sqrt{3}y - 24x \Rightarrow$$

$$15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy + 24(\sqrt{3}y + x) = 144.$$

Se fazemos a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(u - \sqrt{3}v) \\ y &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}u + v) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{cases} u &= \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \\ v &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

A equação transforma em

$$12u^2 + 16v^2 + 48u = 144 \quad\Rightarrow\quad \frac{(u+2)^2}{16} + \frac{v^2}{12} = 1.$$

Então temos que, nas coordenadas uv temos

$$F_1 = (0,0), \quad V_1 = (2,0),$$

$$F_2 = (-4,0), \quad V_2 = (-6,0).$$

Transformando ao sistema xy temos

$$F_1 = (0,0), \quad V_1 = (1, \sqrt{3}),$$

$$F_2 = (-2, -2\sqrt{3}), \quad V_2 = (-3, -3\sqrt{3}),$$

como foi obtido inicialmente. ■

16.5.3 Hipérbole

Para a hipérbole temos que $e > 1$, portanto a cônica é união de dois conjuntos

$$C = \left\{(r,\theta), r = \frac{er_0}{1+e\cos(\theta-\phi)}, \theta \in D_1\right\} \cup \left\{(r,\theta), r = \frac{er_0}{e\cos(\theta-\phi)-1}, \theta \in D_2\right\}.$$

Temos que ter cuidado na definição de θ para não ter valores de $r < 0$ ou $r = \infty$. Dividimos C em

$$C_1 = \left\{(r,\theta), r = \frac{er_0}{1+e\cos(\theta-\phi)}, \theta \in D_1\right\}.$$

$$C_2 = \left\{(r,\theta), r = \frac{er_0}{e\cos(\theta-\phi)-1}, \theta \in D_2\right\}.$$

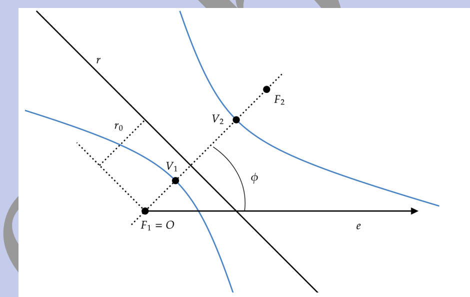
Observamos que, para C_1, $\exists\, \alpha_0$ tal que $\cos(\alpha_0-\phi) = \frac{-1}{e}$ e $\alpha_0 \neq \phi+\pi$. Então

$$\theta \in (2\pi-\alpha_0, 2\pi] \cup [0, \alpha_0) = D_1.$$

Anâlogamente, para C_2, $\exists\, \beta_0$ tal que $\cos(\beta_0-\phi) = \frac{1}{e}$ então

$$\theta \in (2\pi-\beta_0, 2\pi] \cup [0, \beta_0) = D_2.$$

Os vértices da hipérbole correspondem a sua interseção com a reta que passa pela origem de coordenadas e pelo $Q_0 = (r_0, \phi)$.



Assim estes pontos são $V_1 = (r_1, \phi)$ e $V_2 = (r_2, \phi)$

$$r_1 = \frac{er_0}{1+e},$$
$$r_2 = \frac{er_0}{e-1}.$$

Observamos que como $e > 1$ então $e > e-1 > 0$ de onde $\frac{e}{e-1} > 1$ portanto $r_2 > r_0$. No caso dos focos, sabemos que o primeiro deles está na origem de coordenadas. O segundo corresponde ao ponto $F_2 = (r_3, \phi)$ tal que $d(V_1, F_1) = d(V_2, F_2)$, portanto,

$$r_3 - \frac{er_0}{e-1} = \frac{er_0}{1+e}.$$

de onde segue que

$$r_3 = \frac{2r_0e^2}{e^2-1}$$

e

$$F_2 = \left(\frac{2r_0e^2}{e^2-1}, \phi\right).$$

Resumindo:

Equação	Focos	Vértices	Reta Diretriz
$r = \frac{er_0}{1+e\cos(\theta-\phi)}$	$F_1 = O$	$V_1 = \left(\frac{er_0}{1+e}, \phi\right)$	$r\cos(\theta-\phi) = r_0$
$r = \frac{er_0}{e\cos(\theta-\phi)-1}$	$F_2 = \left(\frac{2e^2 r_0}{e^2-1}, \phi\right)$	$V_2 = \left(\frac{er_0}{e-1}, \phi\right)$	

■ **Exemplo 16.5** Seja C a cônica de equação dada em coordenadas polares por

$$r = \frac{8}{1-\sqrt{3}\cos(\theta)+\sin(\theta)}.$$

Manipulamos a expressão e chegamos a

$$r \quad = \quad \frac{8}{1+2\cos(\theta-5\pi/6)}.$$

Então pelo visto na teoria identificamos

$$r_0 = 4, \quad e = 2 \quad \phi = \frac{5\pi}{6}.$$

Temos assim que a equação acima representa um dos braços de uma hipéroble. Podemos identificar então

$$\begin{aligned} F_1 &= O \\ V_1 &= \left(\frac{8}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ F_2 &= \left(\frac{32}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ V_2 &= \left(8, \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas teremos

$$\begin{aligned} F_1 = O \quad &\Rightarrow \quad F_1 = (0,0), \\ V_1 = \left(\frac{8}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) \quad &\Rightarrow \quad V_1 = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3}\right), \\ F_2 = \left(\frac{32}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) \quad &\Rightarrow \quad F_2 = \left(-\frac{16}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3}\right), \\ V_2 = \left(8, \frac{5\pi}{6}\right) \quad &\Rightarrow \quad V_2 = \left(-4\sqrt{3}, 4\right). \end{aligned}$$

Poderiamos ter chegado a esta informação, em coordenadas cartesianas, fazendo outro procedimento que detalhamos a seguir. Primeiramente transformamos a equação da cônica de coordenadas polares a coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} r = \frac{8}{1-\sqrt{3}\cos(\theta)+\sin(\theta)} \quad &\Rightarrow \quad r\Big(1-\sqrt{3}\cos(\theta)+\sin(\theta)\Big) = 8 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{3}x + y = 8 \\ &\Rightarrow \quad 4\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3}x - y + 8. \end{aligned}$$

Aqui podemos elevar ao quadrado, só devemos perceber que ao fazer isto passamos a considerar os dois braços da hipérbole. Elevamos ao quadrado e obtemos

$$x^2 + y^2 = 3x^2 + y^2 + 64 - 2\sqrt{3}xy + 16\sqrt{3}x - 16y \;\Rightarrow$$

$$-2x^2+2\sqrt{3}xy-16(\sqrt{3}x-y)=64.$$

Se fazemos a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x &= -\frac{1}{2}(\sqrt{3}u+v) \\ y &= -\frac{1}{2}(-u+\sqrt{3}v) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u &= -\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y) \\ v &= -\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y) \end{cases}$$

A equação transforma em

$$-3u^2+v^2+32u=64 \quad \Rightarrow \quad \frac{(u-16/3)^2}{\frac{64}{9}}-\frac{v^2}{\frac{64}{3}}=1$$

Então temos que, nas coordenadas uv temos

$$F_1=(0,0), \quad V_1=\left(\frac{8}{3},0\right),$$

$$F_2=\left(\frac{32}{3},0\right), \quad V_2=(8,0).$$

Transformando ao sistema xy temos

$$F_1=(0,0) \quad V_1=\left(-\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{3}\right),$$

$$F_2=\left(-\frac{16}{\sqrt{3}},\frac{16}{3}\right), \quad V_2=\left(-4\sqrt{3},4\right),$$

como foi obtido inicialmente. ■

17. Parametrização de curvas

Suponhamos que temos uma partícula, cuja trajetória é uma curva que está no plano, e queremos descrever o seu movimento em função do tempo no qual está acontecendo o movimento. Podemos pensar então que a posição (x,y) da partícula para cada instante t como uma função de $F : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(t) = (x(t), y(t))$.

Esse será o objetivo desta capítulo: descrever o movimento de uma partícula quando ela se movimenta pelas curvas estudadas até agora.

17.1 Paramerização de curvas

Uma curva algébrica no plano é o conjunto de pontos $P = (x,y)$ que satisfazem uma equação (ou conjunto de equações)

$$F(x,y) = 0,$$

onde F é um polinômio nas variáveis x e y.

Uma forma de ver a relação entre os valores de x e y que satisfazem a equação $F(x,y) = 0$ é escrevé-las como funções de uma variável independente t, isto é, $x = h_1(t)$ e $y = h_2(t)$ onde $h_1, h_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma tal que para cada $t \in I$

$$F(h_1(t), h_2(t)) = 0.$$

Desta forma podemos tratar a curva como sendo o gráfico de uma função de $I \subset \mathbb{R}$ no plano.

■ **Exemplo 17.1** O exemplo natural do dito acima é a reta escrita em forma paramétrica, de fato a reta r que passa por $P_0 = (x_0, y_0)$ e paralela ao vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é escrita em forma paramétrica como

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Neste caso $h_1, h_2 : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$h_1(t) = x_0 + tv_1 \quad \text{e} \quad h_2(t) = y_0 + tv_2.$$

■

Definição 17.1 Seja C uma curva no plano descrita por

$$C = \{P = (x,y), F(x,y) = 0\}.$$

Uma parametrização de C é um conjunto de funções $h_{1j}h_{2j} : I_j \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para $j = 1, \cdots, N$ tais que

i- Cada I_j á da forma (a_j, b_j).

ii-
$$F(h_{1j}(t), h_{2j}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I_j,$$

iii- para cada j temos $F(h_{1j}(t), h_{2j}(t)) \neq F(h_{1j}(s), h_{2j}(s)$ com $s \neq t$.

iv-
$$C = \cup_{j=1}^{N} \cup_{t \in I_j} (h_{1j}(t), h_{2j}(t)).$$

Obs.

- O item $iii-$ diz que para cada j temos que (h_{1j}, h_{2j}) é biunívoca para cada j.
- O item $iv-$ diz que a curva inteira pode ser coberta pela parametrização.
- A definição vista acima pode ser interpretada da seguinte forma: Uma parametrização é de alguma forma mostrar que embora a curva não seja gráfico de nenhuma função, ela pode ser descritas loclamente como o gráfico de um par de funções $h_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Isto, quer dizer que para cada ponto p na curva algébrica $\mathscr{C}$ existe um conjunto $U \subset C$ em que U é similar a um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Vamos agora achar a parametrização das curvas estudadas nas seções anteriores. O caso da reta já foi visto, portanto só restam as cônicas não degeneradas.

Primeiramente estudaremos como parametrizar as formas canônicas das cônicas.

17.1.1 Elipse

Considere a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e escolha a parametrização, seja

$$h_{11}(t) = h_{12}(t) = a\cos(t) \quad \text{e} \quad h_{21}(t) = h_{22}(t) = b\sin(t),$$

escolhemos $I_1 = (0, 2\pi)$ e $(I_2 = (-\pi, \pi)$. Vamos mostrar que é uma parametrização da elipse. Claramente I_1 e I_2 satisfazem o item i. Para ver o item ii observamos que, neste caso,

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

ao fazer

$$\begin{aligned} F(h_{1j}(t), h_{2j}(t)) &= \frac{a^2\cos(t)^2}{a^2} + \frac{b^2\sin(t)^2}{b^2} - 1 \\ &= \cos(t)^2 + \sin(t)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Para mostrar o item iii. Seja (x_0, y_0) um ponto na elipse então

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \qquad \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1.$$

portanto existe um $t_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\frac{x_0}{a} = \cos(t_0) \qquad \frac{y_0}{b} = \sin(t_0),$$

donde $x_0 = a\cos(t_0)$ e $y_0 = b\sin(t_0)$. Agora, como $[0, 2\pi) \subset (-\pi, \pi) \cup (0, 2\pi)$ temos que iii vale.

17.1.2 Hipérbole

Considere a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

e escolha a parametrização

$$h_{11}(t) = h_{12} = a\cosh(t) \quad \text{e} \quad h_{21}(t) = b\sinh(t), \; h_{12}(t) = -a\cosh(t) \quad \text{e} \quad h_{22}(t) = b\sinh(t).$$

Escolhemos $I_1 = \mathbb{R}$ e $I_2 = \mathbb{R}$. Vamos mostrar que é uma parametrização. Claramente I_1 e I_2 satisfazem o item *i*. Para ver o item *ii* observamos que, neste caso,

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} F(h_{1j}(t), h_{2j}(t)) &= \frac{a^2\tan(t)^2}{a^2} + \frac{b^2\sec(t)^2}{b^2} \\ &= \tan(t)^2 + \sec(t)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Para mostrar o item *iii*, seja (x_0, y_0) um ponto na hipérbole, então

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1.$$

Se $x_0 > 0$ então existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{x_0}{a} = \tan(t_0) \qquad \frac{y_0}{b} = \sec(t_0),$$

donde $x_0 = a\tan(t_0)$ e $y = b\sec(t_0)$.

Se $x_0 < 0$, então existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{x_0}{a} = -\tan(t_0) \qquad \frac{y_0}{b} = \sec(t_0),$$

donde $x_0 = -a\tan(t_0)$ e $y_0 = b\sec(t_0)$.

Assim vemos que *iii* vale.

17.1.3 Parábola

Considere a parábola

$$y^2 = 4px,$$

e escolha a parametrização

$$h_1(t) = t^2/4p \quad \text{e} \quad h_2(t) = t,$$

escolhemos $I = \mathbb{R}$. Vamos mostrar que é uma parametrização. Claramente I satisfaz o item *i*. Para ver o item *ii* observamos que

$$F(x,y) = y^2 - 4px,$$

ao fazer

$$F(h_{1j}(t), h_{2j}(t)) = t^2 - 4p\frac{t^2}{4p} = 0.$$

Para mostrar o item *iii*, seja (x_0, y_0) um ponto na parábola então

$$y_0^2 - 4px_0 = 0.$$

Uma vez que conhecemos a parametrização das formas canônicas das cônicas, poderemos ver agora a parametrização de qualquer cônica fazendo rotações e translações de coordenadas.

■ **Exemplo 17.2** Vamos parametrizar a cônica da equação

$$x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+6x=0.$$

Observamos que

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \det(A)=-4<0 \quad \text{é uma hipérbole.}$$

Calculamos os zeros de

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^2-4 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm 2.$$

Obtemos agora R_θ. Para isto achamos uma solução de norma I do sistema $(A-2I)X=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u=\sqrt{3}v \Rightarrow V=\frac{1}{2}(\sqrt{3},1).$$

De onde tiramos que

$$R_\theta=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

portanto a mudança de coordenadas é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

A equação no novo sistema é

$$2(x')^2-2(y')^2+3\sqrt{3}x'-3y'=0 \Rightarrow 2(x'-3\sqrt{3}/4)^2-2(y'-3/4)^2+9/8-27/8=0.$$

Sejam então o novo sistema de coordenadas dado por

$$x''=x'-\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad y''=y'-\frac{3}{4}.$$

Neste sistema a equação da cônica é

$$\frac{(x'')^2}{9/8}-\frac{(y'')^2}{9/8}=1.$$

Parametrizamos aqui por

$$f_\pm(t)=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}\cosh(t) \qquad h_\pm(t)=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}\sinh(t).$$

Então a parametrização no sistema $x'y'$ é

$$\widetilde{f}_\pm(t)=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}\cosh(t)+\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \widetilde{h}_\pm(t)=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}\sinh(t)+\frac{3}{4}.$$

Finalmente, no sistema xy a parametrização é dada por

$$\begin{pmatrix} F_\pm(t) \\ H_\pm(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{f}_\pm(t) \\ \widetilde{h}_\pm(t) \end{pmatrix}.$$

■

17.2 Parametrização em coordenadas polares

Um caso particular de parametrização de curvas é quando as curvas são dadas por equações em coordenadas polares. Esse é o conteúdo de esta seção.

Se temos uma curva em coordenadas polares de equação

$$C = \{(r,\theta),\ r = f(\theta),\ \theta \in I\},$$

então podemos parametrizar a curva, no plano cartesiano, utilizando a mudança de coordenadas.

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases},$$

substituindo $r \leftrightarrow f(\theta)$. Assim a parametrização da curva fica

$$\begin{cases} x &= f(\theta)\cos(\theta) \\ y &= f(\theta)\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in I.$$

■ **Exemplo 17.3** Considere a curva de equação

$$C = \{(r,\theta),\ r = \cos(2\theta),\ \theta \in [0,\pi/4] \cup [\pi, 5\pi/4]\},$$

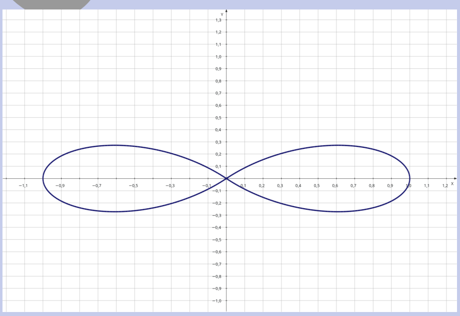
Então a parametrização desta curva é dada por

$$\begin{cases} x &= \cos(2\theta)\cos(\theta) \\ y &= \cos(2\theta)\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi/4] \cup [\pi, 5\pi/4].$$

Se passamos a coordenadas cartesianas $\mathscr{C}$ é o conjunto de pontos $P = (x,y)$ que satisfazem a equação

$$(\sqrt{x^2+y^2})^3 = x^2 - y^2$$

e tem por gráfica



Observe a diferencia com a parametrização de

$$\mathscr{C}_1 = \{(r,\theta),\ r = |\cos(2\theta)|,\ \theta \in [0,2\pi]\},$$

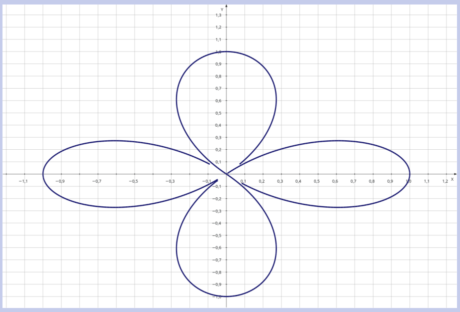
Então a parametrização desta curva é dada por

$$\begin{cases} x &= |\cos(2\theta)|\cos(\theta) \\ y &= |\cos(2\theta)|\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi].$$

Se passamos a coordenadas cartesianas $\mathscr{C}_1$ é o conjunto de pontos $P = (x,y)$ que satisfazem a equação

$$(x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2$$

e tem por gráfica



Obs. Em alguns textos as fórmulas da forma $r = f(\theta)$ são subentendidas como a parametrização de curvas. Isto é, $r = f(\theta)$ é subentendida como a curva $\mathscr{C}$ parametrizada por

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x &= f(\theta)\cos(\theta) \\ y &= f(\theta)\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, para os valores de θ em que $f(\theta) < 0$, temos que o ponto de coordenadas cartesianas (x, y) que se corresponde satisfaz

$$x = f(\theta)\cos(\theta) = |f(\theta)|\cos(\theta + \pi),$$

$$y = f(\theta)\sin(\theta) = |f(\theta)|\sin(\theta + \pi).$$

É por isto que, ao fazer o gráfico de uma tal curva $r = f(\theta)$, os valores de θ em que $r = f(\theta) < 0$ (que não fazem sentidos como equação em coordenadas polares) são desenhados em coordenadas polares como o ponto de coordenadas $(|f(\theta)|, \theta + \pi)$.

IV Quádricas e Superfícies

18. Quádricas

Até agora temos estudado sistemas de duas váriveis onde as equações eram dadas por polinômios nas váriaveis x,y de grau no máximo dois. As do grau 1

$$ax+by+c=0$$

eram retas e as de grau 2

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

eram cônicas. Para estes dois casos estudamos os conjuntos solução e sua classificação.

Neste capítulo vamos estudar o conjunto solução para equações em três variáveis x,y,z de grau dois, isto é, equações da forma

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0.$$

As equações de grau 1, isto é equações da forma

$$ax+by+cz+d=0,$$

já foram estudadas e vimos que, para este caso, o conjunto solução era um plano.

18.1 Quádricas

Como dito acima, passaremos a estudar equações da forma

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0$$

onde a,b,c,d,e,f,g,h,i,j são constantes em $\mathbb{R}$ com $(a,b,c,d,e,f)\neq 0$. Observamos que o caso em que $(a,b,c,d,e,f)=0$ já foi estudado anterioremente que é o caso dos planos, que são equações da forma

$$gx+hy+iz+j=0$$

que são os planos.

Estas equações com grau 2 ocorrem com frequência na natureza. Isto ocorre, por exemplo, quando temos uma função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e queremos estudar o comportamento desta perto de (x_0,y_0). Fazendo o polinômio de Taylor a segunda ordem em f temos que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= z \simeq f(x_0,y_0)+\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_x^2 f(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\partial_{xy}^2 f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\partial_y^2 f(x_0,y_0)(y-y_0)) \end{aligned}$$

que dá um polinômio de grau 2 nas variáveis $x,y,z\cdots$

Outro exemplo é a equação dos gases ideais

$$PV = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume, T a temperatura, n o número de mols do gás e R a constante de Kelvin.

Da mesma forma ao que fizemos com cônicas queremos estudar os diferentes tipos de solução destas equações. Faremos uma revisão rápida de como isto pode ser feito. Começamos pescrevendo a equação

$$ax^2+by+cy^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0$$

na forma matricial $X^tAX+KX+j=0$, em que

$$A=\begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix} \quad K=\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Assim, a equação da quádrica é escrita como

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+j=0.$$

Fazemos uma mudança de coordenadas de um sistema $S=\{O,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\}$ para um sistema $S'=\{O,\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\}$ em que

$$\vec{u}_i = u_{i1}\vec{e}_1+u_{i2}\vec{e}_2+u_{i3}\vec{e}_3$$

e a matriz

$$R=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}$$

satisfaça $RR^t=I_3$ [1]. A mudança fica determinada por $X=RX'$, ou melhor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Esta mudança de coordenadas pode ser escolhida de forma adequada (e isto pode ser provado de forma similar ao caso das cônicas) para que possamos transformar a equação

$$(RX')^tA(RX')+K(RX')+j=0 \quad \Rightarrow \quad (X')^t(R^tAR)X'+(KR)X'+j=0,$$

de forma tal que

$$R^tAR=\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad KR=\begin{pmatrix} g' & h' & i' \end{pmatrix}$$

[1] Isto é pedido para que, da mesma forma que acontecia no caso do plano, os ângulos e as formas sejam preservadas.

Desta forma ficamos com uma equação da forma

$$a'(x')^2+b'(y')^2+c'(z')^2+g'x'+h'+i'+j=0$$

Depois é só completar quadrado e fazer uma traslação

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+p_1 \\ y'+p_2 \\ z'+p_3 \end{pmatrix}$$

para reduzir a algum dos seguintes casos:

- **Elipsoide:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

  Em particular quando $a=b=c$ temos que a quádrica é uma esfera de raio a e de equação

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

- **Hiperboloide de uma folha:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

  (sempre um sinal negativos.)

- **Hiperboloide de duas folhas:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

  (sempre dois sinais negativos.)

- **Paraboloide elíptico:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx.$$

- **Paraboloide hipérbólico:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=cx \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=cy.$$

- **Cone elíptico:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=y^2 \quad \text{ou} \quad \frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=x^2$$

18.2 Superfícies

As quádricas são exemplos de superfícies no espaço. De forma geral podemos dizer que uma superfície é um subconjunto $\mathscr{M}$ do espaço tal que para todo ponto $p\in\mathscr{M}$ existe um subconjunto $U\subset\mathscr{M}$ tal que U é similar a um plano . Não vamos a entrar em detalhe sobre como definir isto formalmente. Nesta seção somente vamos estudar como construir alguns tipos de superfícies que não necesáriamente são quádricas.

18.2.1 Superfícies Cilíndricas

As superfícies cilíndricas são superfícies obtidas por movimentar paralelamente uma reta ℓ, chamada geratriz, ao longo de uma curva fixa C, chamada diretriz.

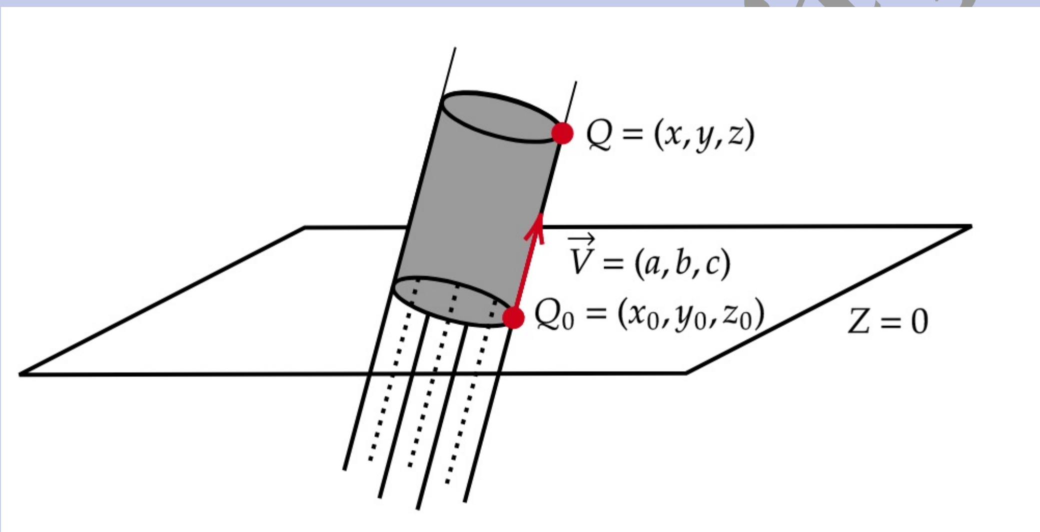
Assuma, por exemplo, que temos uma curva diretriz

$$C = \begin{cases} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$$

no plano $\pi : z = 0$ e procuramos a equação da superfície cilíndrica S com reta geratriz $\ell : \overrightarrow{PP_0} = \lambda \overrightarrow{V}$ onde $\overrightarrow{V} = (a,b,c)$ com $c \neq 0$, (para que $\overrightarrow{V}$ não seja paralelo ao plano). Seja $Q = (x,y,z)$ um ponto genérico desta superfície, então existe $Q_0 = (x_0, y_0, 0) \in C$ tal que

$$\overrightarrow{QQ_0} = \lambda \overrightarrow{V}$$

para algúm $\lambda \in \mathbb{R}$



então

$$(x - x_0, y - y_0, z - 0) = \lambda(a,b,c)$$

de onde segue que

$$\begin{cases} x - x_0 & = & \lambda a \\ y - y_0 & = & \lambda b \\ z & = & \lambda c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{z}{c} \\ x_0 = x - \frac{a}{c} z \\ y_0 = y - \frac{a}{c} z \end{cases}$$

com isto vemos que

$$f\left(x - \frac{a}{c} z, y - \frac{a}{c} z\right) = f(x_0, y_0)\Big) = 0,$$

portanto

$$C = \left\{ (x,y,z),\ f(x - \frac{a}{c} z,\ y - \frac{a}{c} z) = 0 \right\}.$$

Como todo ponto $Q = (x,y,z)$ tal que

$$f\left(x - \frac{a}{c} z, y - \frac{a}{c} z\right) = 0$$

está em S (pela construção acima) temos que

$$S = \left\{ (x,y,z),\ f\left(x - \frac{a}{c}z,\ y - \frac{a}{c}z\right) = 0 \right\}.$$

Análogamente podemos mostrar os casos da seguinte tabela

Curva diretriz	**Reta geratriz**	**Equação da superfície**
$C = \begin{cases} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$	$\ell : \vec{v} = (a,b,c) \quad c \neq 0$	$S = \left\{(x,y,z),\ f\left(x - \frac{a}{c}z,\ y - \frac{a}{c}z\right) = 0\right\}$
$C = \begin{cases} f(x,z) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$	$\ell : \vec{v} = (a,b,c) \quad b \neq 0$	$S = \left\{(x,y,z),\ f\left(x - \frac{a}{b}y,\ z - \frac{c}{b}y\right) = 0\right\}$
$C = \begin{cases} f(y,z) & = & 0 \\ x & = & 0 \end{cases}$	$\ell : \vec{v} = (a,b,c) \quad a \neq 0$	$S = \left\{(x,y,z),\ f\left(y - \frac{b}{a}x,\ z - \frac{c}{a}x\right) = 0\right\}$

■ **Exemplo 18.1** Considere a curva diretriz

$$\begin{cases} x + 2y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e que a reta geratriz é paralela ao vetor $\vec{v} = (1,2,3)$. Então a superfçie cilíndrica sera obtida ao substituir em f

$$x \to x - \frac{1}{3}z \quad y \to y - \frac{2}{3}z.$$

Obtemos assim

$$S = \left\{ (x,y,z),\ x - \frac{1}{3}z + 2\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 = 0 \right\}.$$

■

■ **Exemplo 18.2** A superfície S de equação

$$\ln(zx - 2yx) = z - 2y$$

é cilíndrica. De fato, é a superfície obtida ao movimentar paralelamente uma reta ℓ, paralela ao vetor $\vec{v} = (0,1,2)$, ao longo da curva

$$\ln(zx) = z \quad y = 0.$$

■

18.2.2 Superfícies de revolução

As superfícies de revolução são obtidas pela rotação de uma curva plana (uma curva que está sobre o plano), chamada geratriz, em torno de uma reta fixa, chamada eixo de revolução, que está no plano onde está a curva. Assim, cada ponto da geratriz, ao rotacionar em torno do eixo, descreve uma circunferência, que é chamado de paralelo. Cada cópia da geratriz é chamada de meridiano. Assuma, por exemplo, que temos uma curva

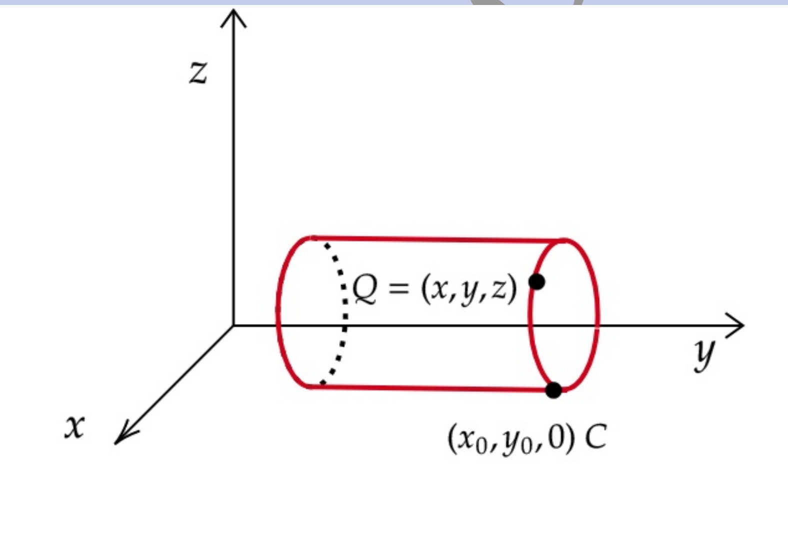
$$C = \begin{cases} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$$

e que procuramos a equação da superficie de revolução obtida ao rotacionar esta ao redor do eixo $\hat{y}$. Um ponto genérico $Q=(x,y,z)$ desta superfície estará no circulo de raio $|x_0|$ no plano

$$\{\pi : y = y_0\ ,$$

isto é

$$\begin{cases} x^2+z^2 & = & |x_0|^2 \\ y & = & y_0 \end{cases},$$



tal que, $f(x_0,y_0)=0$, comparando temos que

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ y\right)=0,$$

é a equação da superfície de revolução procurada.

Análogamente temos os casos do quadro abaixo.

Eixo de Revolução	Curva	Equação da Superfície
$\hat{x}$	$C=\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ ou $C=\left\{\begin{array}{rcl} f(x,z) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$	$f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
$\hat{y}$	$C=\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ ou $C=\left\{\begin{array}{rcl} f(y,z) & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$	$f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$ $f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$
$\hat{z}$	$C=\left\{\begin{array}{rcl} f(x,z) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$ ou $C=\left\{\begin{array}{rcl} f(y,z) & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$	$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z^2\right)=0$

■ **Exemplo 18.3** A superfície de equação

$$x^2+3y^2+z^2=1,$$

é de revolução. De fato, é obtida ao rotacionar a curva de equação

$$x^2+3y^2=1 \quad z=0,$$

ao redor do eixo $\hat{y}$. ■

18.2.3 Superfícies Cônicas

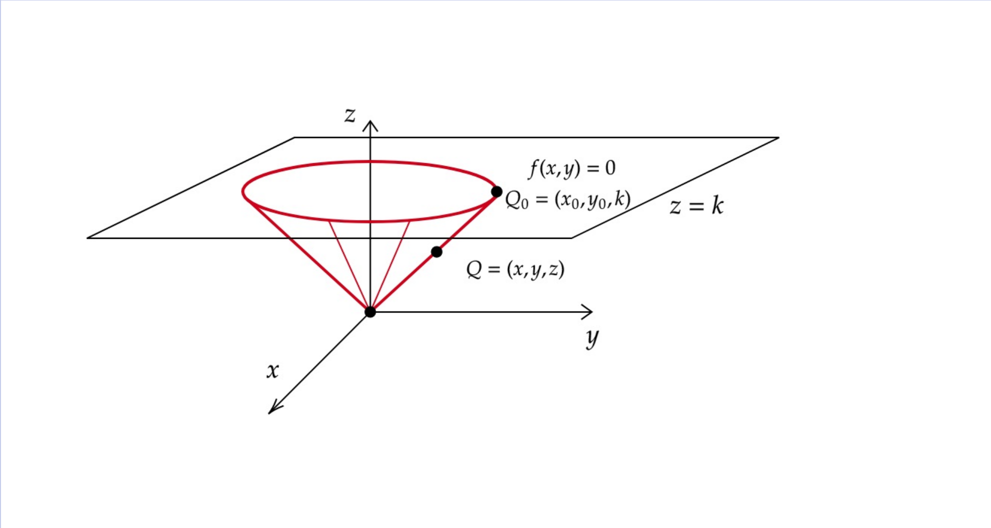
Uma superfície cônica é obtida ao movimentar uma reta com um ponto fixo, chamado vértice, ao longo de uma curva plana fixa C, chamada diretriz. Observamos que o plano que contém a diretriz não pode conter o vértice.

Assuma, por exemplo, que queremos obter a equação da superfície cônica S obtida ao movimentar uma reta com ponto fixo na origem O ao longo da curva

$$C=\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & k \end{array}\right. .$$

Observamos que para todo $Q=(x,y,z)\in S$ existe um ponto $Q_0=(x_0,y_0,k)$ no plano $z=k$ tal que $f(x_0,y_0)=O$ e tal que

$$\overrightarrow{OQ}=\lambda\cdot\overrightarrow{OQ_0} \qquad \text{para algum} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$



Então $(x,y,z) = \lambda(x_0,y_0,k)$ ou, equivalentemente

$$x_0 = \frac{k\cdot x}{z},\ y_0 = \frac{k\cdot y}{z}.$$

Portanto, $Q = (x,y,z)$ vai satisfazer a equação

$$f\left(\frac{k\cdot x}{z},\ \frac{k\cdot y}{z}\right) = f(x_0,y_0) = 0,$$

de onde segue que

$$S = \left\{(x,y,z),\ \text{tal que } f\left(\frac{k\cdot x}{z},\ \frac{k\cdot y}{z}\right) = 0\right\}$$

Análogamente podemos deduzir as equações da tabela a seguir.

Superfície cônica com vértice $O = (0,0,0)$ e curva

Curva plana	**Equação da Superfície**
$C = \begin{cases} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & k \end{cases}$	$S = \left\{(x,y,z),\ \text{tal que } f\left(\frac{k\cdot x}{z},\ \frac{k\cdot y}{z}\right) = 0\right\}$
$C = \begin{cases} f(x,z) & = & 0 \\ y & = & k \end{cases}$	$S = \left\{(x,y,z),\ \text{tal que } f\left(\frac{k\cdot x}{y},\ \frac{k\cdot y}{y}\right) = 0\right\}$
$C = \begin{cases} f(y,z) & = & 0 \\ x & = & k \end{cases}$	$S = \left\{(x,y,z),\ \text{tal que } f\left(\frac{k\cdot y}{x},\ \frac{k\cdot z}{x}\right) = 0\right\}$

■ **Exemplo 18.4** A superfície de equação

$$x^2 + 3y^2 = 4z^2,$$

é uma superfície cônica. De fato éla é obtida ao movimentar uma reta com ponto fixo na origem ao longo da curva

$$x^2 + 3y^2 = 1, \quad z = \frac{1}{2}.$$

■

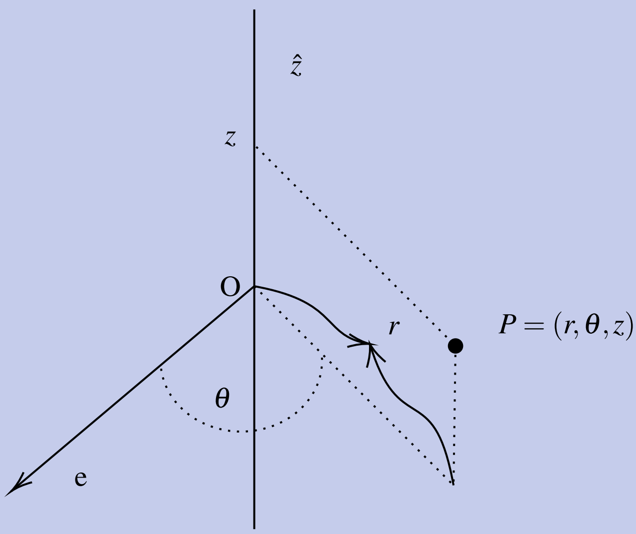
19. Coordenadas Cilíndricas e esféricas

Assim como foi feito com coordenadas polares veremos a seguir dois sistemas de coordenados para o espaço que não são iguais ao sistema de coordenadas cartesiano. As coordenadas associadas a um ponto P no sistema de coordenadas cartesianas não se relaciona com estes novos sistemas de coordenadas por meio de uma traslação e uma rotação.

Os sistemas de coordenadas cilíndricas ou esféricas podem ser utilizados, dependendo do contexto e das simetrias envolvidas, para diminuir o número de variáveis dependentes nas equações do problema específico a ser estudado.

19.1 Coordenadas Cilíndricas

Este sistema é uma generalização da definição das coordenadas polares para o espaço. Está baseado em três elementos, a origem O, um eixo polar e que nasce da origem e uma reta $\hat{z}$ perpendicular ao eixo polar que passa por O.



O plano de referencia é o plano que passa por O e que é perpendicular a reta $\hat{z}$. Neste sistema de coordenadas cada ponto tem associado uma tripla (r,θ,z) onde

$$r \in [0,\infty), \qquad \theta \in [0,2\pi) \qquad z \in \mathbb{R}.$$

e

- O radio r é a distância de P ao eixo z.
- o ângulo θ é o ângulo entre a projeção ortogonal de P ao plano de referencia e o eixo polar.
- a altura z é a distância com sinal de P ao plano de referencia.

A relação entre as coordenadas cilíndricas (r,θ,z) e (x,y,z) de um mesmo ponto P está dada pelas seguintes relações

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad z = z.$$

e

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan(\theta) = \frac{x}{y} \qquad z = z.$$

Obs. Da mesma forma que acontece com as coordenadas polares no plano, temos que as coordenadas cilíndricas não conseguem descrever todo o espaço. Por exemplo a origem é descrita como $r=0$ e $z=0$ para todo valor de θ.

■ **Exemplo 19.1** a) A equação da esfera

$$x^2+y^2+z^2 = a^2,$$

pode ser escrita em coordenadas cilíndricas por

$$r^2+z^2 = a^2.$$

b) A equação do cilindro

$$x^2+y^2 = a^2,$$

pode ser escrita em coordenadas cilíndricas como

$$r = a.$$

■

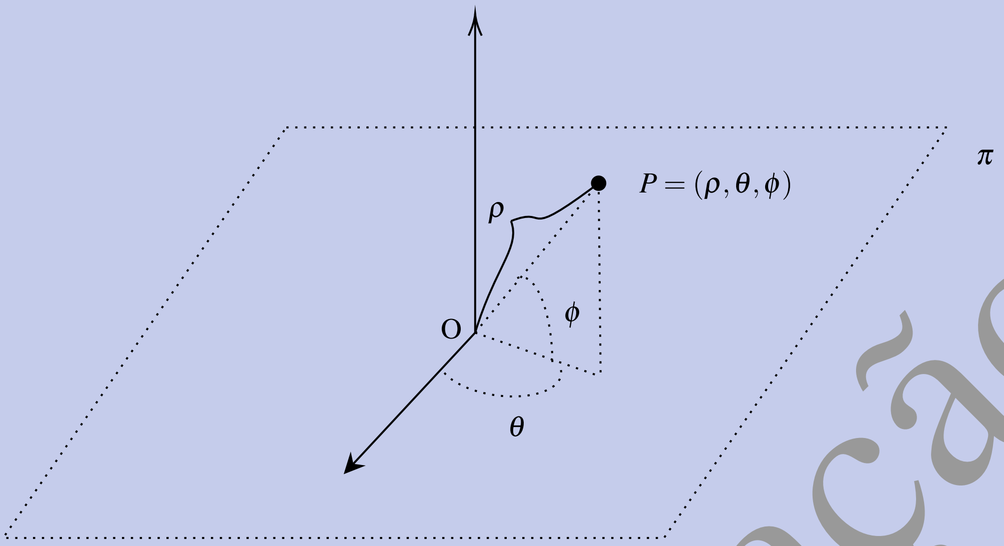
19.2 Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas é um outro tipo de generalização das coordenadas polares para o caso do espaço.

Para definir as coordenadas cilíndricas precissamos de um ponto (origem), um eixo polar e e uma reta z ortogonal ao eixo polar. O plano que contém o eixo polar, perpendicular a z é o plano de referência π.

No sistema de coordenadas esféricas associamos a cada ponto no espaço uma tripla (ρ,θ,ϕ) na qual

- $\rho \in [0,\infty)$ é a distância de P à origem.
- $\theta \in [0,2\pi)$ é o ângulo da projeção de $\vec{OP}$ com o eixo polar.
- $\phi \in [-\pi/2,\pi/2]$ é o ângulo entre $\vec{OP}$ e o plano de referência π.



A relação entre as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e (x, y, z) de um mesmo ponto P está dada pelas seguintes relações

$$x = \rho \cos(\theta)\cos(\phi) \qquad y = \rho \sin(\theta)\cos(\phi) \qquad z = \rho \sin(\phi).$$

e

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \tan(\theta) = \frac{x}{y} \qquad \sin(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Como $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ temos que $\cos(\phi) \geq 0$.

Obs. Também aqui temos problemas com a descrição do espaço todo e as coordenadas polares. A origem fica determinada por todos os pontos da forma $(0, \theta, \phi)$.

■ **Exemplo 19.2** a) A equação da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

pode ser escrita em coordenadas esféricas por

$$\rho^2 = a^2.$$

b) A equação do cilindro

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

pode ser escrita em coordenadas cilíndricas como

$$\rho \cos(\phi) = a.$$

■

20. Parametrizacão de Superfícies

No caso das curvas algébricas em duas variáveis foi visto que, embora elas não sejam gráfico de uma função, elas podem ser descritas loclamente como o gráfico de um par de funções $h_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Isto, quer dizer que para cada ponto p na curva algébrica $\mathscr{C}$ existe um conjunto $U \subset C$ em que U é similar a um subconjunto de $\mathbb{R}$ ela é similar a um temos u Vimos que no caso das curvas algébricas em duas variáveis, vimos que embora elas não representem gráfico de uma função nas viariáveis (x,y) do espaço, elas pode ser descritas por meio de um par de funções. Algo similar acontece com o caso das superfícies. Podemos mostrar que as superfícies podem ser descritas localmente por meio de três funções de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no espaço.

20.1 Parametrização de Superfícies

Novamente aqui vamos nos restrigir a superfícies que são obtidas como o conjunto de pontos $P = (x,y,z)$ no espaço que satisfazem a equação (ou conjunto de equações)

$$F(x,y,z) = 0$$

para F um polinômio nas variáveis (x,y,z). Em matemática estas superfícies são conocidas como curvas algébricas de ordem 2 ou variedade algébrica de dimensão 2.

Definição 20.1 Seja S uma superfície no espaço definida por

$$C = \{P = (x,y,z), F(x,y,z) = 0\}.$$

Uma parametrização de C é um conjunto de funções $h_{1j}, h_{2j}, h_{3j} : I_j \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para $j = 1, \cdots, N$ tais que

i- Cada D_j á da forma $(a_j, b_j) \times (c_j, d_j) \subset \mathbb{R}^2$.

ii-

$$F(h_{1j}(t,s), h_{2j}(t,s), h_{3j}(t,s)) = 0 \qquad \forall t \in D_j,$$

iii- para cada j temos $F(h_{1j}(t,s), h_{2j}(t,s), h_{3j}(t,s)) \neq F(h_{1j}(u,v), h_{2j}(u,v), h_{3j}(u,v))$ com $(t,s) \neq (u,v) \in D_j$.

iv- e

$$C = \cup_{j=1}^{N} \cup_{(t,s)\in D_j} (h_{1j}(t,s), h_{2j}(t,s), h_{3j}(t,s)).$$

Obs.

- O item $iii-$ diz que para cada j temos que (h_{1j}, h_{2j}, h_{3j}) é biunívoca para cada j.
- O item $iv-$ diz que a supoerfície inteira pode ser coberta pela parametrização.
- A definição vista acima pode ser interpretada da seguinte forma: Uma parametrização é de alguma forma mostrar que embora a superfície não seja gráfico de nenhuma função, ela podem ser descritas localmente como o gráfico de uma tripla de funções $h_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Isto, quer dizer que para cada ponto p na superfície $\mathscr{S}$ existe um conjunto $U \subset S$ em que U é similar a um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

■ **Exemplo 20.1** O primeiro exemplo é a equção do plano em forma paramétrica. De fato para todo plano π de equação

$$ax + by + cz = d$$

existem dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que são paralelos ao plano e tais que

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a, b, c)$$

e um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ tal que

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

de forma tal que o plano podia ser descrito como o conjunto de pontos $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ tais que

$$\pi : \left\{ \begin{array}{rcl} x(s,t) & = & x_0 + su_1 + tv_1 \\ y(s,t) & = & y_0 + su_2 + tv_2 \\ z(s,t) & = & z_0 + su_3 + tv_3 \end{array} \right. \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

■

Vamos a ver rápidamente a parametrizazão das superfícies que vimos nos capítulos anteriores. Vamos ver alguns casos, outros podem ser obtidos a partir destes.

- **Elipsoide:** É o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

A parametrização é dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a\cos(s)\sin(t) \\ y(s,t) & = & b\sin(s)\sin(t) \\ z(s,t) & = & c\cos(t) \end{array} \right. \qquad (s,t) \in (0,2\pi)\times(0,\pi) \cup (0,2\pi)\times(-\pi,\pi) \cup (0,2\pi)\times(\pi,3\pi)$$

- **Hiperboloide de uma folha:** É o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$ do espaço que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

A parametrização é dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a\cos(s)\cosh(t) \\ y(s,t) & = & b\sin(s)\cosh(t) \\ z(s,t) & = & c\sinh(t) \end{array} \right. \qquad (s,t) \in (0,2\pi)\times\mathbb{R} \cup (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$$

- **Hiperboloide de duas folhas:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

  $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

  A parametrização é dada por

  $$\left\{\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a\cosh(t) \\ y(s,t) & = & b\cos(s)\sinh(t) \\ z(s,t) & = & c\sin(s)\sinh(t) \end{array}\right. \qquad (s,t)\in(0,2\pi)\times\mathbb{R}\cup(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$$

- **Paraboloide elíptico:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz.$$

  A parametrização é dada por

  $$\left\{\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a\sqrt{|c|t}\cos(s) \\ y(s,t) & = & b\sqrt{|c|t}\sin(s) \\ z(s,t) & = & \frac{|c|}{c}t \end{array}\right. \qquad (s,t)\in(0,2\pi)\times[0,\infty)\cup(-\pi,\pi)\times[0,\infty)$$

- **Paraboloide hipérbólico:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

  $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz.$$

  A parametrização é dada por

  $$\left\{\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a\sqrt{|c|t}\cosh(s) \\ y(s,t) & = & b\sqrt{|c|t}\sinh(s) \\ z(s,t) & = & \frac{|c|}{c}t \end{array}\right. \qquad (s,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

- **Cone elíptico:** É o conjunto de pontos $P=(x,y,z)$ do espaço que satisfazem a equação

  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2.$$

  A parametrização é dada por

  $$\left\{\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & at\cos(s) \\ y(s,t) & = & bt\sin(s) \\ z(s,t) & = & t \end{array}\right. \qquad (s,t)\in(0,2\pi)\times[0,\infty)\cup(-\pi,\pi)\times[0,\infty)$$

V

Exercícios resolvidos

21. Matrizes

1. Construa as seguintes matrizes:

   a) $A = (a_{ij})$ de tamanho 3×4 tal que $a_{ij} = i + j$.

   Resolução: A é uma matriz de 3 linhas e 4 colunas. Então seguindo a regra $a_{ij} = i + j$ temos que:

   $$a_{11} = 1+1 = 2 \quad a_{12} = 1+2 = 3 \quad a_{13} = 1+3 = 4 \quad a_{14} = 1+4 = 5$$

   $$a_{21} = 1+2 = 3 \quad a_{22} = 2+2 = 4 \quad a_{23} = 2+3 = 5 \quad a_{24} = 2+4 = 6$$

   $$a_{31} = 3+1 = 4 \quad a_{32} = 3+2 = 5 \quad a_{33} = 3+3 = 6 \quad a_{34} = 3+4 = 7$$

   Então:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   b) $B = (b_{ij})$ de tamanho 3×3 tal que $b_{ij} = ij$.

   Resolução: B é uma matriz de 3 linhas e 3 colunas. Então seguindo a regra $b_{ij} = i + j$ temos que:

   $$b_{11} = 1 \cdot 1 = 1 \quad b_{12} = 1 \cdot 2 = 2 \quad b_{13} = 1 \cdot 3 = 3$$

   $$b_{21} = 1 \cdot 2 = 2 \quad b_{22} = 2 \cdot 2 = 4 \quad b_{23} = 2 \cdot 3 = 6$$

   $$b_{31} = 3 \cdot 1 = 3 \quad b_{32} = 3 \cdot 2 = 6 \quad b_{33} = 3 \cdot 3 = 9$$

   Então:

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

   c) $C = (c_{ij})$ de tamanho 4×3 tal que $c_{ij} = 2i - \frac{1}{2}j$.

Resolução: C é uma matriz de 4 linhas e 3 colunas. Então construimos C seguindo a regra $c_{ij} = 2i - \frac{1}{2}j$ temos que:

$$
\begin{array}{lll}
c_{11} = 2\cdot 1 - \dfrac{1}{2}\cdot 1 = 2 & c_{12} = \dfrac{3}{2}\cdot 1 - \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1 & c_{13} = 2\cdot 1 - \dfrac{1}{2}\cdot 3 = \dfrac{1}{2} \\
c_{21} = 2\cdot 2 - \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{7}{2} & c_{22} = 2\cdot 2 - \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 2 & c_{23} = 2\cdot 2 - \dfrac{1}{2}\cdot 3 = \dfrac{5}{2} \\
c_{31} = 2\cdot 3 - \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{11}{2} & c_{32} = 2\cdot 3 - \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 5 & c_{33} = 2\cdot 3 - \dfrac{1}{2}\cdot 3 = \dfrac{9}{2} \\
c_{41} = 2\cdot 4 - \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{15}{2} & c_{42} = 2\cdot 4 - \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 7 & c_{43} = 2\cdot 4 - \dfrac{1}{2}\cdot 3 = \dfrac{13}{2}
\end{array}
$$

Então:

$$
C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}
$$

2. Considere as seguintes matrizes

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

$$
A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

- Determine para quais valores de $i,\ j$ podemos fazer os produtos A_iA_j e faça a conta para cada caso.
- Ache a transposta de cada uma das matrizes acima.
- Calcule

$$
((2A_1)A_4)^t + 3A_7
$$

Resolução:

$$
A_1 \in \mathbb{M}(4\times 4), \quad A_2 \in \mathbb{M}(3\times 3), \quad A_3 \in \mathbb{M}(2\times 2)
$$

$$
A_4 \in \mathbb{M}(4\times 1), \quad A_5 \in \mathbb{M}(2\times 1), \quad A_6 \in \mathbb{M}(3\times 1)
$$

$$
A_7 \in \mathbb{M}(1\times 4), \quad A_8 \in \mathbb{M}(1\times 3), \quad A_9 \in \mathbb{M}(1\times 2)
$$

Então os seguintes produtos possiveis são:

$$
\begin{aligned}
A_1 \cdot A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 17 \\ -22 \end{pmatrix} \\
A_2 \cdot A_6 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \\
A_3 \cdot A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \\
A_4 \cdot A_7 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 4 & -2 \\ 15 & 5 & -10 & 5 \\ -12 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \\
A_4 \cdot A_8 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & -0 & 2 \\ 10 & 0 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
A_4 \cdot A_9 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -10 & 5 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \\
A_5 \cdot A_7 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
A_5 \cdot A_8 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
A_5 \cdot A_9 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
A_6 \cdot A_7 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \\ -12 & -4 & 8 & -4 \\ 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \\
A_6 \cdot A_8 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
A_6 \cdot A_9 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\
A_7 \cdot A_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\
A_7 \cdot A_4 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \end{pmatrix} \\
A_8 \cdot A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_8 \cdot A_6 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \\
A_9 \cdot A_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \end{pmatrix} \\
A_9 \cdot A_5 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5
\end{aligned}
$$

$$
A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
A_5^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_7^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A_8^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A_9^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
((2A_1) \cdot A_4)^t + 3A_7 &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right)^t + 3\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 34 \\ -44 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 34 & -44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 28 & -41 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Sejam A, B duas matrizes A de tamanho $m \times n$ e B de tamanho $n \times p$. Escreva

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \end{pmatrix}$$

onde cada B_j é a $j-$ésima coluna da matriz B. Mostrar que a $i-$ésima coluna da matriz AB é dada por AB_i, isto é

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_p \end{pmatrix}$$

Exemplifique para o caso

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Resolução: Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e B de tamanho $n \times p$ denote por B_i a coluna i de B observamos que $(A \cdot B_i)$ é uma matriz coluna. A entrada $j-$ésima da coluna é

$$(A \cdot B_i)_j = \sum_{k=1}^{h} A_{jk} B_{ki} = (AB)_{ij}$$

Portanto $A \cdot B_i$ coincide com $i-$ésima coluna da matriz AB.

Se

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que

$$A \cdot B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Se denotamos por C_i a $i-$ésima coluna da matriz $A \cdot B$ Então

$$C_1 = A \cdot B_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = A \cdot B_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = A \cdot B_3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = A \cdot B_4 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} g \end{pmatrix}$$

- Mostre que a matriz de tamanho 1×1 obtida ao fazer

  $$X^t AX + BX + G$$

  tem como única entrada

  $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g$$

- Exemplifique para o caso em que

  $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

  e obtenha a entrada correspondente a $X^t AX + BX + G$.
- No item anterior substitua X por

  $$Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix}$$

e mostre que ao fazer $Y^TAY + BY + G$ a entrada que obtemos é

$$4u^2 + 9v^2 - 36.$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g \\
= \quad & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax & b/2y \\ b/2x & cy \end{pmatrix} + dx + fy + g \\
= \quad & ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2 + dx + fy + g \\
= \quad & ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g
\end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5x & -2y \\ -2x & +8y \end{pmatrix} + \frac{20x - 80y}{\sqrt{5}} + 4 \\
= \quad & 5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4
\end{aligned}$$

Se

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1x & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix}$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
& y^tAy + By + 6 \\
= \quad & \frac{1}{5}(u+1,\ v+2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix} \\
+ \quad & \frac{1}{5}(20, -80) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & \frac{1}{5}(u+1,\ v+2) \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix} \\
+ \quad & \frac{1}{5}(-40, -180) \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & \frac{1}{5}(u+1,\ v+2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(-8, -36) \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & 4(u+1)^2 + 9(v+2)^2 = 8(u+1) = -36(v+2) + 4 \\
= \quad & 4u^2 + 8u + 4 + 9v^2 + 36v + 36 - 8u - 8 - 36v - 64 + 4 \\
= \quad & 4u^2 + 9v^2 - 36
\end{aligned}$$

5. Sejam $A,\ B$ duas matrizes quadradas de tamanho $n \times n$.
   - Mostre que

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

- Observe que para ter $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ temos que garantir que $AB = BA$. É verdade que $AB = BA$ para qualquer matriz quadrada? Veja o que acontece no caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:
Observamos que $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. É falso que $AB = BA$ se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No entanto

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e X a matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix}$$

Mostrar que

$$AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

onde A_j é a $j-$ésima coluna da matriz A. Para entender as contas considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolução:

Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix}$ como X é de tamannho $(n \times 1)$ temos que AX é de tamanho $(m \times 1)$. Assim a a $j-$ésima linha de AX é

$$\sum_{k=1}^{h} A_{jk}\, X_k = \sum_{k=1}^{h} X_k\, A_{jk} = \sum_{k=1}^{h} X_k = [A]_k^j$$

onde A^j é a $j-$ésima coluna de A. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x & + & y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}$$

$$xA_1 + yA_2 + zA_3 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & + & y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}$$

7. Mostre que as matrizes da forma $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ satisfazem a equação $X^2 - 2X = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$

Resolução:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ então:

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{y} \\ 2y & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & \frac{-2}{y} \\ -2y & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   - Se A é uma matriz de tamanho 2×2 tal que $A^2 = I$ então $A = I$ (aqui I =identidade)
     Resolução: (FALSO) De fato, considere
     $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Se A é uma matriz de tamanho $n \times n$ tais que $A^2 = I$, então $A = I$ ou $A = -I$
     Resolução: (FALSO) De fato, considere
     $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to A \neq I,\ A \neq -I, \text{ e } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Se A e B são duas matrizes de tamanho $n \times n$, então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
     Resolução: (FALSO) Considere
     $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
     Então $(A+B)^2 = A+B$, $A^2 = A$, $B^2 = 0$ e $AB = 0$. Portanto $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
   - Se A e B são duas matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então $AB = BA$.
     Resolução: (VERDADEIRO) Primeiramente observamos que se
     $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
     tal que $AM = MA$ então
     $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a = d\ c = -b.$$
     Portanto A e B devem ser da forma
     $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix}.$$

Fazemos

$$AB = \begin{pmatrix} at - sb & as + tb \\ -bt - sa & at - bs \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} at - bs & bt + sa \\ -sa - tb & -sb + ta \end{pmatrix}.$$

Portanto $AB = BA$.

- Se A é uma matriz quadrada tal que $A^3 = A$ então $A = I$ ou $A = 0$.
  Resolução: (FALSO) Seja $A = -I$ então $A^3 = -I = A$.

22. Operações elementares

1. Construa, para cada operação elementar a seguir, a correspondente matriz elementar.
   (a) troca da linha 2 pela linha 4 sobre uma matriz de 5×4
   (b) Multiplicar a linha 3 por $\frac{1}{4}$ sobre uma matriz de 4×2
   (c) Adicionar a linha 3 a linha 5 multiplicada pelo escalar 3 sobre uma matriz de 5×5.

   Resolução: Para cada caso consideramos o tamanho da identidade em função do tamanho da matriz A sobre a qual fazemos a operação elementar.

   (a) $A \in \mathbb{M}(5 \times 4)$ entção $I \in \mathbb{M}(5 \times 5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

   (b) $A \in \mathbb{M}(4 \times 2)$ entção $I \in \mathbb{M}(4 \times 4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4} \times \ell_3 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

   (c) $A \in \mathbb{M}(5 \times 5)$ entção $I \in \mathbb{M}(5 \times 5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + 3 \times \ell_5 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

2. Decida quais das matrizes abaixo estão na forma escalonada reduzida.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Não está na forma escalonada reduzida, pois o pivô da linha 2 está abaixo do pivô da linha 1.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Está na forma escalonada reduzida.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Não está na forma escalonada reduzida, pois o pivô da coluna 1 contém pivô, mas as outras entradas são $\neq 0$.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Não está na forma escalonada reduzida, pois o pivô da coluna 1 contém pivô, mas as outras entradas são $\neq 0$.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Não está na forma escalonada reduzida, pois o pivô da coluna 1 contém pivô, mas as outras entradas são $\neq 0$.

23. Matrizes Quadradas

1. Verifique se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa: Se A e B são duas matrizes tais que AB está definido e resulta numa matriz invertível, então A e B são quadradas e invertíveis.
   Resolução: (FALSO) Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Encontre a inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Resolução:
   Para achar a matriz inversa, vamos utilizar o método de Gauss-Jordan. Para isto, devemos construir a matriz aumentada M colocando a identidade I a direita da matriz A, isto é,

$$M = [A|I]$$

   e fazer operações elementares sobre M até chegar na sua forma escalonada reduzida

$$\tilde{M} = [I|B]$$

   logo, o método garante que $B = A^{-1}$.

Procedemos desta forma,

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$\ell_6 - \ell_7 \to \ell_6$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$\ell_5 - \ell_6 \to \ell_5$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$\ell_4 - \ell_5 \to \ell_4$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$\ell_3 - \ell_4 \to \ell_3$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$\ell_2 - \ell_3 \to \ell_2$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$\ell_1 - \ell_2 \to \ell_1$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Juntando as partes podemos responder: A matriz inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

3. Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:
Para achar a matriz inversa, vamos utilizar o método de Gauss-Jordan. Para isto, devemos construir a matriz aumentada M colocando a identidade I a direita da matriz A, isto é,

$$M = [A|I],$$

e fazer operações elementares sobre M até chegar na sua forma escalonada reduzida

$$\tilde{M} = [I|B].$$

Logo, o método garante que $B = A^{-1}$.
Procedemos desta forma, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

construimos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

e fazemos operações elementares sobre ela, até chegar na matriz escalonada reduzida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ell_3 - \ell_2 \to \ell_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \ell_1 - 2\ell_3 \to \ell_1 \\ \ell_2 - \ell_3 \to \ell_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \ell_2 - \ell_1 \to \ell_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \ell_1 - 2\ell_2 \to \ell_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

que está na forma escalonada reduzida.
Do método de Gauss-Jordan, obtemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Juntando as partes podemos responder:
A inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Verifique se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa: Se A e B são duas matrizes tais que AB está definido e resulta numa matriz invertível, então A e B são quadradas e invertíveis.
Resolução: (FALSO) Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Calcule a inversa da seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Depois faça $A^{-1}A$ e mostre que é igual a identidade I.
Resolução:
Utilizamos o método de Gauss-Jordan para inversão de matrizes. Para isto, contruimos a matriz $M = [A|I]$ colocando A e depois a identidade I. E levamos M a sua forma escalonada reduzida $\tilde{M} = [I|B]$. Então $A^{-1} = B$.
Assim

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_4 - \ell_1 \to \ell_4]{\substack{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_1 \to \ell_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_2 \to \ell_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 - \ell_2 \to \ell_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_3 \to \ell_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 - \ell_3 \to \ell_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_4 \to \ell_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 - \ell_4 \to \ell_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

Identificamos então

$$\tilde{M} = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

De onde segue que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Agora calculamos

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Determinante de uma matriz quadrada

1. Para cada matriz abaixo encontre a inversa (se existe):

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}\cos(x)&\sin(x)\\-\sin(x)&\cos(x)\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1&3&-7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Resolução:

- $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(A)=5-6=-1$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}5&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\quad\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

- Para que $B=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ tenha inversa $\det(B)=a^2+b^2\neq 0$. Então:

$$\operatorname{adj}(B)=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\frac{1}{(a^2+b^2)}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

- É igual ao caso de B quando $a=\cos x$ e $b=\sin x$ $\quad\Rightarrow\quad C^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(x)&-\sin(x)\\\sin(x)&\cos(x)\end{pmatrix}$

- Por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&5&0&0&1&0\\0&0&6&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{\frac{\ell_2}{5}\to\ell_2}\\\xrightarrow{\frac{\ell_3}{6}\to\ell_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{6}\end{array}\right)\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

- Por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2-\ell_1\to\ell_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\ell_3+\ell_1\to\ell_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\ell_2+\ell_1\to\ell_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{\ell_1}{9}\to\ell_1} \\ \xrightarrow{\frac{\ell_2}{-3}\to\ell_2} \\ \xrightarrow{\ell_3\to\ell_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\ell_2+\ell_3\to\ell_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -4 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\ell_2+\ell_1\to\ell_2} \\ \xrightarrow{\ell_3+4\times\ell_1\to\ell_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3\leftrightarrow\ell_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right)$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

- Por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{7\ell_3+\ell_1\to\ell_1} \\ \xrightarrow{2\ell_3+\ell_2\to\ell_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3\ell_2+\ell_1\to\ell_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \quad F^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Seja $A = (a_{i,j})$ a matriz 5×5 cuja entrada na posição (i, j) é $\max\{i, j\}$, o maior entre i e j, para todo i e j. Calcule $\det(A)$ e conclua se A é ou não invertível.
Resolução:
Para começar escrevemos a matriz A utilizando a definição, isto é, A é uma matriz de 5×5 cuja entrada na posição (i, j) é $\max\{i, j\}$, o maior entre i e j, para todo i e j.

Então

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Da teoria, sabemos que uma matriz A é invertível se o seu determinante é diferente de 0, isto é, se $\det(A) \neq 0$.

Para achar o determinante de A temos varias opções das quais destacamos dois:

- calculamos diretamente utilizando fórmula de determinante
- utilizamos operações para simplificar o cálculo, lembrando que

  i- Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha de A por um escalar $\lambda \neq 0$ então
  $$\det(B) = \lambda \det(A).$$

  ii- Se B é uma matriz obtida a partir de trocar duas linhas de A então
  $$\det(B) = -\det(A).$$

  iii- Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar a uma linha de A um múltiplo escalar de outra linha de A então
  $$\det(B) = \det(A).$$

Fazemos o cálculo do determinante pelo segundo método, fazendo operações elementares sobre A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \ell_5 - \ell_4 \to \ell_5$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_4 - \ell_3 \to \ell_3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_3 - \ell_2 \to \ell_3$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_2 - \ell_1 \to \ell_2$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$\det(A) = \det(A_2) = \det(A_3) = \det(A_4) = \det(A_5)$$

Calculando o determinante de A_5 segundo a última coluna temos

$$\det(A_5) = (-1)^{1+5} \times 5 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 = 5$$

Então $\det(A) = 5 \neq 0$ e, portanto, A é invertível.
Podemos responder:
A matriz A tem $\det(A) = 5$ e portanto é invertível.

3. Calcule o determinante de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:
Para achar o determinante de B temos varias opções das quais destacamos dois:

- calculamos diretamente utilizando fórmula de determinante
- utilizamos operações para simplificar o cálculo, lembrando que

i- Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha de A por um escalar $\lambda \neq 0$ então

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

ii- Se B é uma matriz obtida a partir de trocar duas linhas de A então

$$\det(B) = -\det(A).$$

iii- Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar a uma linha de A um múltiplo escalar de outra linha de A então

$$\det(B) = \det(A).$$

Calculamos o determinante pelo segundo método, fazendo operações elementares sobre B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \ell_2 - \ell_1 \to \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_1 \to \ell_3 \\ \ell_4 - \ell_1 \to \ell_4 \\ \ell_5 - \ell_1 \to \ell_5 \\ \ell_6 - \ell_1 \to \ell_6 \end{array}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_2 \leftrightarrow \ell_6$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_3 \leftrightarrow \ell_5$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, utilizando as propriedades do determinante com respeito às operações elementares, temos

$$\begin{aligned} det(B) &= det(B_1) \\ &= -det(B_2) \\ &= det(B_3) \end{aligned}$$

Calculamos o determinante de B_3 pela fórmula com respeito a sexta coluna da matriz e utilizamos que o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas da diagonal.

$$\det(B_3)$$

$$= (-1)^{(1+6)} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} x_5-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-1 \end{pmatrix}$$

$$= -(x_5-1)(x_4-1)(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1).$$

Assim,

$$det(B) = -(x_5-1)(x_4-1)(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1).$$

Juntando as partes podemos responder:
O determinante de B é

$$det(B) = -(x_5-1)(x_4-1)(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1).$$

4. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar

i- Inversa de A

ii- Determinante de A e de A^{-1}.

Resolução:

Para achar a matriz inversa, vamos utilizar o método de Gauss-Jordan. Para isto, devemos construir a matriz aumentada M colocando a identidade I a direita da matriz A, isto é,

$$M = [A|I]$$

e fazer operações elementares sobre M até chegar na sua forma escalonada reduzida

$$\tilde{M} = [I|B]$$

logo, o método garante que $B = A^{-1}$.

Procedemos desta forma,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ell_1 - \ell_2/2 \to \ell_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ell_2 - 2\ell_3 \to \ell_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ell_3 - \ell_4 \to \ell_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ell_2/2 \to \ell_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Logo, a inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que tanto A como A^{-1} são matrizes triangulares superiores, portanto, o determinante é o produto das entradas da diagonal. Assim

$$\det(A) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 2 \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}.$$

Juntando as partes podemos responder:

i- A inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii- $\det(A) = 2$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$.

5. Calcular o determinante da matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}(5 \times 5, \mathbb{R})$, cujas entradas são da forma

$$a_{ij} = 1 + x_i - y_j$$

para x_t, y_t números reais quaisquer para todo $1 \leq t \leq 5$.
Resolução:
Primeiramente construimos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1+x_1-y_1 & 1+x_1-y_2 & 1+x_1-y_3 & 1+x_1-y_4 & 1+x_1-y_5 \\ 1+x_2-y_1 & 1+x_2-y_2 & 1+x_2-y_3 & 1+x_2-y_4 & 1+x_2-y_5 \\ 1+x_3-y_1 & 1+x_3-y_2 & 1+x_3-y_3 & 1+x_3-y_4 & 1+x_3-y_5 \\ 1+x_4-y_1 & 1+x_4-y_2 & 1+x_4-y_3 & 1+x_4-y_4 & 1+x_4-y_5 \\ 1+x_5-y_1 & 1+x_5-y_2 & 1+x_5-y_3 & 1+x_5-y_4 & 1+x_5-y_5 \end{pmatrix}$$

Para achar o determinante de A temos varias opções das quais destacamos dois:

- calculamos diretamente utilizando fórmula de determinante
- utilizamos operações para simplificar o cálculo, lembrando que

  i- Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha de A por um escalar $\lambda \neq 0$ então

  $$\det(B) = \lambda \det(A).$$

  ii- Se B é uma matriz obtida a partir de trocar duas linhas de A então

  $$\det(B) = -\det(A).$$

  iii- Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar a uma linha de A um múltiplo escalar de outra linha de A então

  $$\det(B) = \det(A).$$

Fazemos o cálculo do determinante pelo segundo método, fazendo operações elementares sobre A. Fazemos operações elementares sobre A para obter

$$\begin{pmatrix} 1+x_1-y_1 & 1+x_1-y_2 & 1+x_1-y_3 & 1+x_1-y_4 & 1+x_1-y_5 \\ 1+x_2-y_1 & 1+x_2-y_2 & 1+x_2-y_3 & 1+x_2-y_4 & 1+x_2-y_5 \\ 1+x_3-y_1 & 1+x_3-y_2 & 1+x_3-y_3 & 1+x_3-y_4 & 1+x_3-y_5 \\ 1+x_4-y_1 & 1+x_4-y_2 & 1+x_4-y_3 & 1+x_4-y_4 & 1+x_4-y_5 \\ 1+x_5-y_1 & 1+x_5-y_2 & 1+x_5-y_3 & 1+x_5-y_4 & 1+x_5-y_5 \end{pmatrix}$$

$\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2$
$\ell_3 - \ell_1 \to \ell_3$
$\ell_4 - \ell_1 \to \ell_4$
$\ell_5 - \ell_1 \to \ell_5$

$$\begin{pmatrix} 1+x_1-y_1 & 1+x_1-y_2 & 1+x_1-y_3 & 1+x_1-y_4 & 1+x_1-y_5 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \\ x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 \\ x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 \end{pmatrix}.$$

Se algum dos números

$$x_2 - x_1, \quad x_3 - x_1, \quad x_4 - x_1, \quad x_5 - x_1$$

for 0 temos que a matriz possui, pelo menos, uma linha nula e, consequentemente

$$\det(A) = 0.$$

Caso contrário continuamos fazendo as seguintes operações elementares

$$\begin{array}{l} \ell_2/(x_2 - x_1) \to \ell_2 \\ \ell_3/(x_3 - x_1) \to \ell_3 \\ \ell_4/(x_4 - x_1) \to \ell_4 \\ \ell_5/(x_5 - x_1) \to \ell_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1+x_1-y_1 & 1+x_1-y_2 & 1+x_1-y_3 & 1+x_1-y_4 & 1+x_1-y_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

o que resulta numa matriz quadrada com duas linhas iguais, e portanto com determinante nulo. Juntando as partes podemos responder: Para qualquer valor de x_i e y_j temos que

$$\det(A) = 0.$$

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i- Determine os valores de x que tornam a matriz A invertível

ii- Calcule o determinante de A e de A^{-1} para cada x que torna A invertível.

iii- Ache a inversa de A para o caso $x = 3$.

Resolução:

Da teoria, sabemos que uma matriz A é invertível se o seu determinante é diferente de 0, isto é, se $\det(A) \neq 0$.

Para achar o determinante de A temos varias opções das quais destacamos dois:

- calculamos diretamente utilizando fórmula de determinante
- utilizamos operações para simplificar o cálculo, lembrando que
  i- Se B é uma matriz obtida a partir de multiplicar uma linha de A por um escalar $\lambda \neq 0$ então

  $$\det(B) = \lambda \det(A).$$

  ii- Se B é uma matriz obtida a partir de trocar duas linhas de A então

  $$\det(B) = -\det(A).$$

  iii- Se B é uma matriz obtida a partir de adicionar a uma linha de A um múltiplo escalar de outra linha de A então

  $$\det(B) = \det(A).$$

Fazemos o cálculo do determinante pelo segundo método, fazendo operações elementares sobre A, lembrando não multiplicar nem dividir por x pois não sabemos o seu valor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \ell_2 - \ell_4 \to \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_4 \to \ell_4 \end{array}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \ell_4 - \ell_1 \to \ell_4$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ell_2 \leftrightarrow \ell_4$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_3 \leftrightarrow \ell_4$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

Calculamos agora o determinante de B_4, utilizando a fórmula a partir da terceira linha e obtemos

$$\det(B_4) = (x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2.$$

Portanto, utilizando as propriedades do determinante respeito das operações elementares, temos

$$\det(B_4) = -(\det(B_3)) = -(-\det(B_2)) = \det(B_2) = \det(B_1) = \det(A).$$

Donde

$$\det(A) = (x-1)^2.$$

Com isto, podemos responder

i- Os valores de x que tornam a matriz A invertível, são $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

ii- para cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ temos

$$\det(A) = (x-1)^2.$$

Como $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ obtemos

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Agora, devemos achar a inversa de A para o caso $x = 3$.
No lugar, achamos a inversa de A para o caso em que $x - 1 = a \neq 0$, que corresponde aos casos em que a matriz é invertível.
Logo podemos substituir diretamente x por 3 e obter a inversa procurada.
Poderiamos ter substituido diretamente x por 3 e fazer a conta, mas optamos por fazer um pouco de trabalho a mais.
Para achar a matriz inversa, vamos utilizar o método de Gauss-Jordan. Para isto, devemos construir a matriz aumentada M colocando a identidade I a direita da matriz A, isto é,

$$M = [A|I]$$

e fazer operações elementares sobre M até chegar na sua forma escalonada reduzida

$$\tilde{M} = [I|B]$$

logo, o método garante que $B = A^{-1}$.
Assim, lembrando que $a = x - 1 \neq 0$, fazemos as operaçoes elementares atê levar esta matriz na forma escalonada reduzida.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \ell_2 - \ell_4 \to \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_4 \to \ell_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \ell_4 - \ell_1 \to \ell_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \ell_2 \leftrightarrow \ell_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \ell_3 \leftrightarrow \ell_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{a}\ell_3 \to \ell_3 \quad (lembre\ a \neq 0)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \ell_1 - \ell_3 \to \ell_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \ell_4 + \ell_1 \to \ell_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & -1/a & 1 & \frac{1-a}{a} \end{array}\right) \ell_4/a \to \ell_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & -1/a^2 & 1/a & \frac{1-a}{a^2} \end{array}\right) \quad \ell_2 - \ell_4 \to \ell_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1+a}{a} & 1/a^2 & -1/a & \frac{a^2+a-1}{a^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & -1/a^2 & 1/a & \frac{1-a}{a^2} \end{array}\right)$$

Donde, para cada a, temos

$$A_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ -\frac{1+a}{a} & 1/a^2 & -1/a & \frac{a^2+a-1}{a^2} \\ 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ 1/a & -1/a^2 & 1/a & \frac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}$$

Se $x = 3$, então $a = 2$. Substituimos isto acima, e obtemos que a inversa de A para $x = 3$ é dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -3/2 & 1/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Juntando as partes podemos responder:

i- Os valores de x que tornam a matriz A invertível, são $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

ii- para $x \neq 1$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

- Para $x = 3$ temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -3/2 & 1/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

7. Calcule os determinantes das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ d+b & d+c \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolução:

- A)

$$\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \sin(\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta)$$

- B)

$$\det\begin{pmatrix} a+b & a+c \\ d+b & d+c \end{pmatrix} = (a+b)(d+c) - (d+b)(a+c) \qquad = (a-d)(c-b)$$

- C)

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

- D)

$$\det\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{pmatrix} = (1+x_1y_1)(1+x_2y_2) \qquad -(1+x_2y_1)(1+x_1y_2)$$

- E)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = b-a$$

- F)

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^{3+1}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+2}\cdot 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^4\cdot(-1)\cdot(1)+0 = -1 \end{aligned}$$

- G)

$$\det\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ b & c & d\\ 0 & e & 0\end{pmatrix} = 0 + d(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & e\end{pmatrix} + 0 = 0$$

- H) Se $a \neq 0$, fazendo duas operações elementares de

$$-a\ell_1 + \ell_2 \to \ell_2 \quad \text{e} \quad -a^2\ell_1 + \ell_2 \to \ell_2$$

temos que o valor do determinante não varia. Assim

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{pmatrix}\\
&= 1\cdot(b-a)\cdot(c^2-a^2) - (c-a)\cdot(b^2-a^2)\\
&= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c+a-b-a)\\
&= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)
\end{aligned}$$

E se $a = 0$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b & c\\ 0 & b^2 & c^2\end{pmatrix} = 1\cdot(bc^2 - b^2c) = bc(c-b)$$

- I)

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix} &= (-1)^{2+1}a\det\begin{pmatrix}c & a\\ a & b\end{pmatrix}\\
&\quad +(-1)^{1+2}b\det\begin{pmatrix}b & a\\ c & b\end{pmatrix} + (-1)^{1+2}b\det\begin{pmatrix}b & c\\ c & a\end{pmatrix}\\
&= a(cb-a^2) - b(b^2-ac) + c(ba-c^2)\\
&= ac^2b - a^3 - b^3 + bac + cba - c^3\\
&= 3abc - (a^3+b^3+c^3)
\end{aligned}$$

- J)

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{pmatrix} &= (-1)^{3+1}\cdot 1\det\begin{pmatrix}\sin\beta & \cos\beta\\ \sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}\\
&\quad +(-1)^{3+2}\cdot 1\det\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}\\
&+ \quad (-1)^{3+3}\cdot 1\det\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\\
&= (\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta)\\
&\quad -(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta)\\
&\quad +(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)\\
&= \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

- K)

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - 4\times\ell_1 \to \ell_2} \xrightarrow{\ell_3 + 2\times\ell_1 \to \ell_3} \xrightarrow{\ell_4 + 4\times\ell_1 \to \ell_4} K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 28 & 12 \\ 0 & 0 & -11 & -6 \\ 0 & -3 & -24 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_4 + \ell_2 \to \ell_4} K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 28 & 12 \\ 0 & 0 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(K) = \det(K_1) = \det(K_2) = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot 3 \det\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot 3\big(-33 \quad + \quad 24\big) = 3\times(-9) = -27$$

- L)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+4}\cdot 1\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 11 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{2+4}\cdot 1\cdot 8\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -4\cdot(-1)^{1+3}\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$+8\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= -28\cdot(\underbrace{108-110}_{-2}) + 24\cdot(\underbrace{108-110}_{-2})$$

$$= 56 - 48 = 8$$

- M) Primeiramente observamos que se $b = c = d = 0$ temos que

$$\det(M) = a^4.$$

Como

$$MM^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a^2+b^2+c^2+d^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a^2+b^2+c^2+d^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2+c^2+d^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2+b^2+c^2+d^2) \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\det(MM^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Utilizando a identidade

$$\det(M)^2 = \det(M^2) = \det(M)\det(M) = \det(M)\det(M^t) = \det(MM^t)$$

temos, da observação inicial, que

$$\det(M) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2, \quad \Rightarrow \quad \det(M) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

- N)

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2-\ell_3\to\ell_2} N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(N) &= \det(N_1) = (-1)^{4+1}\cdot 2\cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad +3\cdot(-1)^{4+4}\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \det(N) &= -2\cdot\left((-1)^{3+2}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)+3\cdot(-2) \\ &= 4\cdot(3+2)-6 = 14 \end{aligned}$$

8. Resolva a equação $f(x) = 0$ onde $f(x) = \det(A-xI)$ e a matriz A é a seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

1.

$$\det\begin{pmatrix} 3-x & 4 \\ 5 & 2-x \end{pmatrix} x^2-5x-14 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5\pm\sqrt{81}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 7, \quad x_2 = -2$$

2.

$$\det\begin{pmatrix} \cos a - x & \sin a \\ -\sin a & \cos a - x \end{pmatrix} = x^2-2\cos\alpha+1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{2\cos a \pm \sqrt{2\cos a - 4}}{2} \quad f(x) \text{ não tem solução real, pois } 2\cos^2 a - 4 < 0$$

3.

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot(1-x)\cdot\det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)\cdot(x^2-1) = (x+1)\cdot(1-x)^2$$

Então: $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

4.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 5-x & 6 & -3 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 2 & 1-x \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot(5-x)\cdot\det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} \\
&\quad +(-1)^{1+2}\cdot 6\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \\
&\quad +(-1)^{1+3}\cdot(-3)\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & -x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (5-x)\cdot(x^2-x-2) - 6(x-1-1) - 3(x+2) \\
&= 5x^2 - 5x - 10 - x^3 + x^2 - 2x + 12 - 6x - 3x - 6 \\
&= -x^3 + 6x^2 - 16x - 4.
\end{aligned}$$

Tem uma única raiz real $x \simeq 0,22$.

5.

$$\det\begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}\cdot(1-x)\cdot\det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)\cdot(x^2-1)$$

Então: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$

9. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule o $det(A^n)$, para todo número natural n.

b) Usando escalonamento encontre a matriz inversa A^{-1}.

Resolução:

a)

$$\det(A) = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0$$

$$= -1\cdot 1\cdot 1 = -1.$$

Então

$$det(A^n) = (det(A))^n = (-1)^n$$

b) Usando escalonamento encontre a matriz inversa A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_2 - \ell_3 \to \ell_2]{\ell_1 - 2\ell_3 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1 - \ell_2 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 + 2\ell_1 \to \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\ell_1 \leftrightarrow \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   a) Toda matriz é produto de matrizes elementares.
   b) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^4 - A^2 + A = 3I_n$, então A é invertível.
   c) Se A, B e C são matrizes $n \times n$, então $\det(A(B+C)) = \det(AB) + \det(AC)$.

Resolução:

a) Toda matriz é produto de matrizes elementares. (FALSO) Considere por exemplo a matriz nula:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não pode ser nunca produto de elementares.

b) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^4 - A^2 + A = 3I_n$, então A é invertível. (VERDADEIRO) Manipulando a expressão

$$A^4 - A^2 + A = 3I_n \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}(A^3 - A + I)\right) = I_n$$

donde

$$B = \left(\frac{1}{3}(A^3 - A + I)\right)$$

é a inversa de A.

c) Se A,B e C são matrizes $n\times n$, então $\det(A(B+C)) = \det(AB)+\det(AC)$. (FALSO).
Sejam

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Então, claramente, $AB=B$ e $AC=C$ e $\det(B)=\det(C)=0$. Como $B+C=A=I$ temos que $\det(A(B+C))=1$.

11. Considere a matriz, que depende do parámetro k,

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3k&8+2k&k-1\\0&8k+8&0\end{pmatrix}$$

a) Determinar, para quais valores reais de k a matriz A é invertível.

b) Calcular a inversa, para o caso $k=0$, utilizando operações elementares nas linhas.

Resolução:

a) Para saber os valores de k que tornam a matriz A invertível, lembramos que: uma matriz é invertível se o seu determinante for diferente de 0. Assim, calculamos o determinante de A

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix}1&-2&0\\3k&8+2k&k-1\\0&8k+8&0\end{pmatrix}\\ &= 0+(-1)^{2+3}(k-1)\det\begin{pmatrix}1&-2\\0&8k+8\end{pmatrix}+0\\ &= -(k-1)(8k+8)\\ &= -8(k^2-1).\end{aligned}$$

De onde tiramos que A será invertível caso $k\notin\{-1,1\}$.

b) Vamos calcular a inversa de A para o caso $k=0$, isto é, quando

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&8&-1\\0&8&0\end{pmatrix}$$

Fazendo operações elementares nas linhas de A. Assim, procedemos pelo método de Gauss, construimos a matriz $M=[A|I]$ e fazemos operações elementares até chegar na forma escalonada reduzida $\tilde{M}=[I|B]$ e nesse caso $B=A^{-1}$.

Assim

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&8&-1&0&1&0\\0&8&0&0&0&1\end{array}\right)\quad -l_3+l_2\to l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&0&-1&0&1&-1\\0&8&0&0&0&1\end{array}\right)\quad l_3/8\to l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&0&-1&0&1&-1\\0&1&0&0&0&\frac{1}{8}\end{array}\right)\quad 2l_3+l_1\to l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&\frac{1}{4}\\0&0&-1&0&1&-1\\0&1&0&0&0&\frac{1}{8}\end{array}\right)\quad (-1)l_2\to l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right) \quad l_2 \leftrightarrow l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Que está na forma escalonada reduzida. Então

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Determinar para quais valores reais de a a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ a & 4-a & a-1 \\ -3a & -9 & 7-2a \end{pmatrix}$$

é invertível.
Resolução: Para calcular o determinante fazemos operações elementares sobre as linhas da matriz para obter

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ a & 4-a & a-1 \\ -3a & -9 & 7-2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} l_2 - l_1 \to l_2 \\ l_3 + 3l_1 \to l_3 \end{array} \quad B_1 = \begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = \det(B_1)$ e B_1 é triangular superior, temos que

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} = a(1-a^2)$$

portanto, A será invertível se o seu determinante for diferente de zero, isto é se, $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

13. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   - Existem duas matrizes $A,\ B$ de tamanho $n \times n$ tais que $\det(A) \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0$.
     Resolução: (FALSO) Se $\det(A) \neq 0$ então A é invertível. Portanto se $AB = 0$ então,

     $$B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0.$$

   - Se $A,\ B$ são duas matrizes de tamanho $n \times n$ então, $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.
     Resolução: (FALSO) Considere

     $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

     e $\det(A - B) = 1$, $\det(A) = 0$ e $\det(B) = 0$.
   - Se A e B são matrizes de tamanho $n \times n$ tais que AB é invertível então A e B são invertíveis.
     Resolução: (VERDADEIRO) Pois como A e B são quadradas, temos que

     $$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

     portanto AB invertível garante $\det(AB) \neq 0$ então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$ e portanto A e B são invertíeis.

- Se A e B são duas matrizes de tamanho $n \times n$ então $\det(A+2B) = \det(A) + 2^n \det(B)$.
  Resolução: (FALSO) Basta considerar por exemplo $n = 2$ e as matrizes
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to A+2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  e $\det(A+2B) = 1$ mas $\det(A) = 0$ e $\det(B) = 0$, não valendo assim a identidade.
- Se A e B são duas matrizes quadradas tais que $A-B$ possui alguma linha nula, então $\det(A) = \det(B)$.
  Resolução: (FALSO)
  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  Mas $\det(A) = 2 \neq 1 = \det(B)$.
- Se n é impar, toda matriz antisimétrica de tamanho $n \times n$ tem determinante nulo.
  Resolução: (VERDADEIRO) Se A é antisimétrica de tamanho $n \times n$ com n ímpar, então $A = -A^t$ e
  $$\det(A) = \det(-A^t) = (-1)^n \det(A^t) = -\det(A)$$
  portanto $\det(A) = 0$.
- Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$. Se $A^3 = I$ (I =a matriz identidade), então $\det(A) = 1$.
  Resolução: (VERDADEIRO) Como $A^3 = I$ então $\det(A)^3 = \det(A^3) = \det(AI) = 1$ então $\det(A)$ é solução da equação de $x^3 = 1$ então $\det(A) = 1$ pois as outras soluções são imaginarias.

14. Calcule o determinante da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
A matriz A, é invertível? Justifique.
Resolução:
Para calcular o determinante fazemos operações elementares até levar A numa matriz diagonal. Logo, calculamos o determinante multiplicando os elementos da diagonal da matriz obtida. Depois, levamos em consideração a mudança do determinante com as operações elementares feitas para achar o determinante da matriz A
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2 \\ \ell_3 + \ell_1 \to \ell_3 \\ \ell_4 - \ell_1 \to \ell_4 \\ \ell_5 - \ell_1 \to \ell_5}}$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + \ell_2 \to \ell_3}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_4 - \ell_3 \to \ell_4 \\ \ell_5 - \ell_3 \to \ell_5}}$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&-2&2&0&0\\0&0&2&2&2\\0&0&0&-4&-2\\0&0&0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\ell_5-\frac{1}{2}\ell_4\to\ell_5}$$

$$A_4=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&-2&2&0&0\\0&0&2&2&2\\0&0&0&-4&-2\\0&0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A)&=\det(A_1)\\&=\det(A_2)\\&=\det(A_3)\\&=\det(A_4)\\&=1\times(-2)\times2\times(-4)\times(-3)=-48.\end{aligned}$$

Como $\det(A)\neq 0$ temos que A é invertível.

15. Calcule o determinante da matriz

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-4&2&2\\6&2&2&4&2\\1&1&1&1&1\\1&-1&1&0&1\\1&1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

Resolução:
Para calcular o determinante da matriz A fazemos operações elementares sobre ela até chegar numa matriz triangular superior T. Depois calculamos o determinante de T multiplicando as entradas da diagonal, e utilizamos as operações elementares feitas para relacionar este valor com o determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-4&2&2\\6&2&2&4&2\\1&1&1&1&1\\1&-1&1&0&1\\1&1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\ell_2-\frac{3}{2}\ell_1\to\ell_2\\ \ell_3-\frac{1}{4}\ell_1\to\ell_3\\ \ell_4-\frac{1}{4}\ell_1\to\ell_4\\ \ell_5-\frac{1}{4}\ell_1\to\ell_5}} A_1=\begin{pmatrix}4&2&-4&2&2\\0&-1&8&1&-1\\0&1/2&2&1/2&1/2\\0&-3/2&2&-1/2&1/2\\0&1/2&0&-3/2&-3/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\ell_3+\frac{1}{2}\ell_2\to\ell_3\\ \ell_4-\frac{3}{2}\ell_2\to\ell_4\\ \ell_5+\frac{1}{2}\ell_2\to\ell_5}} A_2=\begin{pmatrix}4&2&-4&2&2\\0&-1&8&1&-1\\0&0&6&1&0\\0&0&-10&-2&2\\0&0&4&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\ell_4+\frac{5}{3}\ell_3\to\ell_4\\ \ell_5-\frac{2}{3}\ell_3\to\ell_5}}$$

$$A_3=\begin{pmatrix}4&2&-4&2&2\\0&-1&8&1&-1\\0&0&6&1&0\\0&0&0&-1/3&2\\0&0&0&-5/3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\ell_5-5\ell_4\to\ell_5} T=\begin{pmatrix}4&2&-4&2&2\\0&-1&8&1&-1\\0&0&6&1&0\\0&0&0&-1/3&2\\0&0&0&0&-12\end{pmatrix}$$

Observamos que

$$\det(T)=4\times(-1)\times6\times(-1/3)\times(-12)=-96$$

Como, todas as operações elementares feitas são do tipo "adicionar a uma linha um multiplos escalar de outra linha"temos que o valor do determinante não é alterado. Isto é

$$\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = \det(T) = -96.$$

25. Sistema de equações linerares

1. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

determine os valores de λ para que o sistema $AX = \lambda X$ tenha uma, nenhuma ou infinitas soluções.
Resolução:
Para resolver o exercício construímos um sistema linear. Então, para começar observamos que

$$AX = \lambda X \;\Rightarrow\; AX = \lambda IX \;\Rightarrow\; (A - \lambda I)X = 0$$

com I a matriz identidade. Em forma matricial

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos assim que o sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é um sistema linear homogêneo.
Da teoria, sabemos que sistemas lineares homogéneos sempre tem solução pois, por exemplo $(0,0,0)$ é solução do sistema.
Concluimos que não existe λ para o qual o sistema não tem solução.
Para os outros casos, observamos que um sistema linear homogéneo tem solução única se a matriz do sistema for invertível ou, equivalentemente, tiver determinante diferente de 0. Caso contrário o sistema tem infinitas soluções.
Neste caso a matriz do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos o determinante da matriz a partir a primeira linha da matriz utilizando a definição

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 0$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\lambda(\lambda - 2)$$

Observamos que a matriz do sistema não será invertível se o determinante for nulo, isto é, se

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2.$$

Portanto o sistema terá infinitas soluções se $\lambda = 0, 1, 2$ e terá solução única se $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, 2\}$.

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 & = & 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 & = & 9 \end{cases}$$

Resolução:

a) Escreva o sistema acima na forma matricial $AX = B$ e determine a matriz A.
b) Usando o método de Gauss-Jordan de linha equivalência encontre a forma escalonada reduzida (ou forma escada) da matriz aumentada do sistema.
c) Determine as variáveis livres da solução geral do sistema.
d) Escreva a solução geral desse sistema.

Resolução:

Começamos escrevendo o sistema na forma $AX = B$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Identificamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Construimos agora a matriz aumentada M, colocando a matriz coluna B a direita da matriz A, isto é, $M = [A|B]$, assim

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & | & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & | & 9 \end{pmatrix}.$$

Fazemos operações elementares sobre as linhas de M ate chegar na matriz escalonada reduzida:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \ell_2 - \ell_1 \to \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_1 \to \ell_3 \\ \ell_4 - 3 \times \ell_1 \to \ell_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \ell_1 - \ell_3 \to \ell_1 \\ \ell_4 - \ell_3 \to \ell_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ell_4 - \ell_2 \to \ell_4$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Portanto, a matriz escalonada reduzida é

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Utilizando esta matriz, construimos o sistema linear equivalente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases},$$

que tem o mesmo conjunto solução que o sistema original.
Observamos que temos 5 incognitas e 3 equações, portanto temos duas variáveis libres.
Ressolvemos o sistema e obtemos

$$S = \{(-2x_2 + 3x_4, x_2, 1, x_4, 2),\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Juntando as partes podemos responder:
a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) A matriz escalonada reduzida é

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

c) O sistema linear equivalente é

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases},$$

e suas variáveis livres são x_2 e x_4.

d) A solução do sistema é

$$S = \{(-2x_2 + 3x_4, x_2, 1, x_4, 2),\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

3. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} (2-p)x & +(2-p)y & & +z & = 1 \\ x & & +y & +(2-p)z & = 1 \\ (3-2p)x & +(2-p)y & & +z & = p \end{cases},$$

com 3 equações e 3 variáveis. Determinar os valores de p para os quais o sistema tem:

a) Solução única;
b) Várias soluções;
c) Nenhuma solução.
d) Nos casos a) e b), resolver o sistema.

Resolução:

Para começar, escrevemos o sistema na forma matricial $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (2-p) & (2-p) & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) \\ (3-2p) & (2-p) & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}}_{B}$$

Construimos a matriz aumentada M do sistema colocando a matriz A seguida da matriz B na forma $M = [A|B]$, isto é,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) & 1 \\ (3-2p) & (2-p) & 1 & p \end{array}\right)$$

Utilizamos o método de Gauss e fazemos operações sobre as linhas da matriz aumentada para simplificar o sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) & 1 \\ (3-2p) & (2-p) & 1 & p \end{array}\right) \quad \ell_3 - \ell_1 \to \ell_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) & 1 \\ (1-p) & 0 & 0 & p-1 \end{array}\right)$$

o Obtemos assim um novo sistema linear

$$\begin{cases} (2-p)x & +(2-p)y & +z & =1 \\ x & +y & +(2-p)z & =1 \\ (1-p)x & & & =p-1 \end{cases},$$

que é equivalente ao anterior e, portanto, tem o mesmo conjunto solução que o anterior.
Da teoria, sabemos que um sistema linear

$$AX=B,$$

com A matriz quadrada, terá solução única se, e somente se, $\det(A)\neq 0$, isto é, se A for invertível.

Mais ainda, neste caso, a única solução é dada por $S=A^{-1}B$.

Os casos: sistema sem solução ou sistema com infinitas soluções podem ocorrer somente quando $\det(A)=0$.
A matriz do sistema equivalente é dada por

$$A=\begin{pmatrix} (2-p) & (2-p) & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) \\ (1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos o determinante desta a partir da linha 3 e obtemos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1-p)(4-4p+p^2-1) \\ &= (1-p)(p-1)(p-3) \\ &= -(p-1)^2(p-3) \end{aligned}$$

Portanto, como

$$\det(A)=-(p-1)^2(p-3),$$

o sistema tem solução única quando $p\in\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$.
Passamos agora a ver que acontece nos diferentes casos.
Caso $p\neq 1,3$: temos que $p-1\neq 0$ e $p-3\neq 0$. Fazemos operações elementares para simplificar a matriz aumentada do sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) & 1 \\ (3-2p) & (2-p) & 1 & p \end{array}\right) \ \ell_3-\ell_1\to\ell_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) & 1 \\ (1-p) & 0 & 0 & p-1 \end{array}\right) \ \ell_3/(1-p)\to\ell_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2-p) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \ \ell_2-\ell_3\to\ell_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (2-p) & (2-p) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (2-p) & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Portanto o sistema equivalente é

$$\begin{cases} (2-p)x & +(2-p)y & +z & = & 1 \\ & y & +(2-p)z & = & 2 \\ x & & & = & -1 \end{cases}$$

Calculando:

$$x = -1 \;\Rightarrow\; (2-p)y + z = 1 + (2-p) \qquad y + (2-p)z = 2$$

Portanto

$$(2-p)(2-(2-p)z) + z = 1 + (2-p) \;\Rightarrow\; z(1-(2-p)^2) = 1-(2-p)$$

$$\Rightarrow z(3-p) = 1$$

$$\Rightarrow z = 1/(3-p) \qquad y = (4-p)/(3-p)$$

Assim, quando $p \neq 1,3$, a solução é

$$S = \left(-1, \frac{4-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right).$$

Caso $p = 1$**:** A matriz aumentada do sistema é equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

chegamos assim ao sistema linear

$$\{x + y + z = 1,$$

que possui uma equação e 3 incognitas. Portanto temos duas variáveis livres e o sistema possui infinitas soluções. O conjunto solução é dado por

$$S = \{(1-y-z, y, z),\; y, z \in \mathbb{R}\}$$

Caso $p = 3$**:** A matriz aumentada do sistema é equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Portanto, o sistema não possui solução dado que temos as equações

$$\begin{cases} -x & -y & +z & = 1 \\ x & +y & -z & = 1 \end{cases}$$

que geram um sistema impossível.
Juntando as partes podemos responder:

a) O sistema tem solução única quando $p \in \mathbb{R} \backslash \{1,\ 3\}$
b) O sistema tem infinitas soluções quando $p = 1$.
c) O sistema não tem solução quando $p = 3$.
d) Para cada $p \in \mathbb{R} \backslash \{1,\ 3\}$ a única solução do sistema é dada por

$$S = \left(-1, \frac{4-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right).$$

Para $p = 1$ o conjunto solução é

$$S = \{(1-y-z, y, z),\; y, z \in \mathbb{R}\}.$$

4. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & (1+a)y & + & (2+a)z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & (a^2+2a-4)z & = & a \end{array}\right.$$

   a) Determine os valores de a para os quais o sistema tem: solução única, infinitas soluções, nenhuma solução.
   b) Encontre o conjunto solução em cada caso que o sistema é solúvel.

Resolução: Vamos resolver $a)$ e $b)$ simultaneamente.
Para começar, escrevemos o sistema na forma matricial $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 2+a \\ 2 & 2 & a^2+2a-4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}}_{B}$$

e construimos a matriz aumentada M do sistema colocando a matriz A seguida da matriz B na forma $M = [A|B]$, isto é,

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1+a & 2+a & 1 \\ 2 & 2 & a^2+2a-4 & a \end{array}\right)$$

Utilizamos o método de Gauss e fazemos operações sobre as linhas da matriz aumentada para simplificar o sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1+a & 2+a & 1 \\ 2 & 2 & a^2+2a-4 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_2 - \ell_1 \to \ell_2 \\ \ell_3 - 2\ell_1 \to \ell_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right)$$

e obtemos assim um sistema linear equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & ay & + & 2z & = & 0 \\ & & & & (a^2-4)z & = & a-2 \end{array}\right.$$

cujo conjunto solução é igual ao do sistema original.
Da teoria, sabemos que um sistema linear

$$AX = B,$$

com A matriz quadrada, terá solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, isto é, se A for invertível.

Mais ainda, neste caso, a única solução é dada por $S = A^{-1}B$.

Os casos: sistema sem solução ou sistema com infinitas soluções podem ocorrer somente quando $\det(A) = 0$.

Assim, por ser mais simples de manipular, trabalhamos com o nosso sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & ay & + & 2z & = & 0 \\ & & & & (a^2-4)z & = & a-2 \end{array}\right.$$

Observamos que a matriz do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a(a^2-4)$$

O sistema, portanto, terá solução única se $a \notin \{0,\ 2,\ -2\}$.
Resolvendo, para **a** fixo e diferente de $0,\ 2$, e -2, temos

$$z = \frac{1}{a+2} \Rightarrow y = \frac{-2z}{a} = \frac{-2}{a(a+2)} \Rightarrow$$

$$x = 1 - az - y = 1 - \frac{a}{a+2} - \frac{-2}{a(a+2)}$$

Assim, para o valor de **a** escolhido, temos que a solução do sistema é

$$S = \left(1 - \frac{a}{a+2} + \frac{2}{a(a+2)}, \frac{-2}{a(a+2)}, \frac{1}{a+2}\right)$$

Caracterizamos assim o caso de solução única.
Passamos agora a estudar os casos em que

$$det(A) = 0,$$

isto é quando **a** pode assumir os valores 0, 2 e -2.
Se $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ a matriz aumentada do sistema é equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tfrac{1}{2}\ell_2 \to \ell_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\ell_1 - \ell_2 \to \ell_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

obtendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-z \\ y & = & z \end{array}\right.$$

Que é um sistema com infinitas soluções, e cujo conjunto solução é

$$S = \{(1-\lambda, -\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\mathbf{a} = -\mathbf{2}$ então a matriz aumentada do sistema é equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

que tem como resultado um sistema impossível:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right. .$$

Se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ então a matriz aumentada do sistema é equivalente a

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -2 \end{array}\right),$$

que também tem como resultado um sistema impossível:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 0 \\ & & & & -4z & = & -2 \end{array}\right. .$$

5. Em cada um dos sistemas abaixo encontre, usando o método de Gauss, sua solução geral:

$$a)\left\{\begin{array}{rrrrl} 4x & +3y & -z & +t & =4 \\ x & -y & +2z & -t & =0 \\ 5x & +2y & +z & & =4 \end{array}\right. ; \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +5y & +4z & -13z & =3 \\ 3x & -y & +2z & +5t & =2 \\ 2x & +2y & +3z & -4t & =1 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & +2z & -t & =0 \\ 3x & +y & +3z & +t & =0 \\ x & -y & -z & -5t & =0 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +t & =1 \\ x & -y & +z & -t & =1 \\ -x & -y & -z & t & =1 \\ x & +y & -z & -t & =1 \end{array}\right. .$$

Resolução:

a) Escrevemos

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 4x & +3y & -z & +t & =4 \\ x & -y & +2z & -t & =0 \\ 5x & +2y & +z & & =4 \end{array}\right.$$

em forma matricial $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Resolvemos por método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 - \ell_5 \to \ell_1} \left(\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1 + \ell_2 \to \ell_2} \left(\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 + \ell_3 \to \ell_3} \left(\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 5 & \vdots & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{7}\ell_3+\ell_1\to\ell_1}\left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 0 & \frac{-5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 5 & 4 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{7}\ell_3\to\ell_3}{\xrightarrow{-\ell_1\to\ell_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{array}\right)$$

Então: $x_1=\dfrac{4}{7}-\dfrac{-5}{7}z+\dfrac{2}{7}t$ e $y=\dfrac{4}{7}+\dfrac{9}{7}z-\dfrac{5}{7}t$

$$S=\left\{(x,y,z,t),\ x=\frac{4}{7}-\frac{-5}{7}z+\frac{2}{7}t,\ y=\frac{4}{7}+\frac{9}{7}z-\frac{5}{7}t,\ z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

b) Escrevemos

$$\begin{cases} x & +5y & +4z & -13z & =3 \\ 3x & -y & +2z & +5t & =2 \\ 2x & +2y & +3z & -4t & =1 \end{cases}$$

em forma matricial $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos por método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \underset{\ell_3-2\ell_1\to\ell_3}{\xrightarrow{\ell_2-3\ell_1\to\ell_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_2+\ell_3\to\ell_3}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Portanto o sistema é sem solução.

c) Escrevemos

$$\begin{cases} x & -y & +2z & -t & =0 \\ 3x & +y & +3z & +t & =0 \\ x & -y & -z & -5t & =0 \end{cases}$$

em forma matricial $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolvemos por método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -5 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1 \to \ell_3} \\ \xrightarrow{-3\ell + \ell_2 \to \ell_2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2 - \ell_3 \to \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{4}\ell_2 \to \ell_2} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{3}\ell_3 \to \ell_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_1 + \ell_2 \to \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 - 2\ell_3 \to \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Então:} \quad \begin{array}{rcl} x & = & \frac{5}{3}t \\ y & = & -2t \\ z & = & -\frac{4}{3}t \end{array}$$

$$S = \left\{ (x,y,z,t), \; x = \frac{5}{3}t, \; y = -2t, \; z = -\frac{4}{3}t, \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

d) Escrevemos

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +t & = 1 \\ x & -y & +z & -t & = 1 \\ -x & -y & -z & t & = 1 \\ x & +y & -z & -t & = 1 \end{array} \right.$$

em forma matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos por método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\ell_3 + \ell_1 \to \ell_3} \\ \xrightarrow{\ell_4 - \ell_2 \to \ell_4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2+\ell_1\to\ell_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&1&1&1&\vdots&1\\2&0&2&0&\vdots&2\\0&0&0&2&\vdots&2\\0&2&-2&0&\vdots&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{\frac{\ell_2}{2}\to\ell_2}\\\xrightarrow{\frac{\ell_3}{3}\to\ell_3}\\\xrightarrow{\frac{\ell_4}{2}\to\ell_4}\end{array}\left(\begin{array}{cccccc}1&1&1&1&\vdots&1\\1&0&1&0&\vdots&1\\0&0&0&1&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2-\ell_1\to\ell_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&1&1&1&\vdots&1\\0&-1&0&-1&\vdots&0\\0&0&0&1&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{\ell_1+\ell_3\to\ell_1}\\\xrightarrow{\ell_2+\ell_3\to\ell_2}\end{array}\left(\begin{array}{cccccc}1&1&1&0&\vdots&0\\0&-1&0&0&\vdots&1\\0&0&0&1&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{\ell_1+\ell_2\to\ell_1}\\\xrightarrow{\ell_4+\ell_2\to\ell_4}\end{array}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&1&0&\vdots&1\\0&-1&0&0&\vdots&1\\0&0&0&1&\vdots&1\\0&0&-1&0&\vdots&1\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_1+\ell_4\to\ell_1}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&0&\vdots&2\\0&-1&0&0&\vdots&1\\0&0&0&1&\vdots&1\\0&0&-1&0&\vdots&1\end{array}\right)$$

Então: $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&2\\y&=&-1\\z&=&-1\\t&=&1\end{array}\right.$. $\quad S=\{(2,-1,-1,1)\}$

6. Seja

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c}a&0&b&2\\a&a&4&4\\0&a&2&b\end{array}\right)$$

a matriz ampliada (ou aumentada) do sistema linear. Para que valores de a e b o sistema admite:
a) Solução única
b) Solução com uma variável livre
c) Solução com duas variáveis livres.
d) Nenhuma solução.

Resolução:

- Utilizando o método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a&0&b&2\\a&a&4&4\\0&a&2&b\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_2-\ell_1\to\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|c}a&0&b&2\\0&a&4-b&2\\0&a&2&b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_3-\ell_2\to\ell_3}\left(\begin{array}{ccc|c}a&0&b&2\\0&a&4-b&2\\0&0&b-2&b-2\end{array}\right)$$

- Se $b-2=0$, então o sistema fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 2 \\ a & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Se $a=0$, então o sistema fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Portanto temos $S=\{(x,y,1),\ \ x,y\in\mathbb{R}\}$

- Se $a\neq 0$, então o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} ax & + & z & =2 \\ ay & + & 2z & =2 \end{cases}$$

  Possui infinitas soluções, então

$$S=\left\{(x,y,z,),\ \ x=\frac{2}{a}-\frac{2}{a}z,\ \ y=\frac{2}{a}-\frac{2}{a}z\right\}$$

- Se $b\neq 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{b-2}\ell_3\to\ell_3} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1-b\ell_3\to\ell_1} \quad \xrightarrow{\ell_2-(4-b)\ell_3\to\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & a & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  Então o sistema e equivalente a

$$\begin{cases} ax & = & 2-b \\ ay & = & b-2 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

  Se $a=0$ o sistema não tem solução, pois $b\neq 2$.

- Se $a\neq 0$, então

$$S=\left\{\left(\frac{2-b}{a},\frac{b-2}{a},1,\right)\right\}$$

7. Considere o sistema $AX=B$, com

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2-16 \end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a+14 \end{pmatrix}$$

a) Determine o valor (ou valores) de a para que o sistema tenha solução única.
b) Existem valores para a de forma que o sistema tenha infinitas soluções?
c) Existem valores para a de forma que o sistema não tenha solução?

Resolução:

- Resolvemos pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \\ 3 & -1 & 5 & \vdots & 2 \\ 4 & 1 & a^2-16 & \vdots & a+14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3-\ell_2\to\ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \\ 3 & -1 & 5 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & a^2-2 & \vdots & a+12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_3-\ell_1\to\ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \\ 3 & -1 & 5 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & a^2-18 & \vdots & a+8 \end{pmatrix}$$

Observamos que se $a^2 = 18$ o sistema não tem solução, pois a última linha fica na forma $(0,0,0,|,0)$ com $b \neq 0$.

- Se $a^2 \neq 18$, então

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & a^2-18 \end{pmatrix} = (a^2-18)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -7(a^2-18) \neq 0$$

Então o sistema possui solução única. Não há valores de a para que o sistema possua infinitas soluções.

8. Verificar se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

- Seja $AX = B$ um sistema linear com m equações e n variáveis. Se $n < m$ o sistema nunca admite soluções.

Resolução: (FALSO) Por exemplo

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+2y &= 1 \\ 2x+3y &= 1 \end{cases}$$

é um sistema com 3 equações e 2 variáveis e tem como solução $(-1,1)$.

9. Considere o sistema linear nas três variáveis x,y,z

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ (a+1)x + 2y + (a+2)z = 3b-2 \\ x + ay + (a+2)z = b+2 \end{cases}$$

i) Determinar os valores de a e b para os quais o sistema tem: solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução
ii) Nos casos onde tiver solução, resolver o sistema.

Resolução: Primeiramente construimos escrevemos o sistema em forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ (a+1) & 2 & (a+2) \\ 1 & a & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3b-2 \\ b+2 \end{pmatrix}$$

e construimos a matriz aumentada do sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ (a+1) & 2 & (a+2) & 3b-2 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right)$$

Aplicamos agora o método de Gauss-Jordan para transformar o sistema num sistema mais simples, lembrando que ao manipular as expressões que tem a ou b não estivermos multiplicando por 0 ou dividindo por 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ (a+1) & 2 & (a+2) & 3b-2 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right) \; -l_3+l_2 \to l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ a & 2-a & 0 & 2b-4 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right) \; -l_1+l_3 \to l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ a & 2-a & 0 & 2b-4 \\ 0 & 0 & a+2 & b \end{array}\right)$$

Temos assim um novo sistema, cuja matriz principal é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

Claramente se o $\det(A) \neq 0$ o sistema terá solução única pois, nesse caso, A é invertível. Os outros casos podem acontecer somente se $\det(A) = 0$, isto é, o sistema pode não ter solução ou ter infinitas soluções. Como

$$\det(A) = (a+2)(2-a-a^2) = -(a+2)^2(a-1).$$

Temos que para $a \notin \{-2,1\}$ o sistema possui solução única.
Caso $a \notin \{-2,1\}$**:** Observamos que então $(2-a-a^2) = -(a+2)(a-2) \neq 0$.
Ressolvemos

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + (2-a)y = 2b-4 \\ (a+2)z = b \end{cases}$$

Então

$$z = \frac{b}{a+2}, \qquad y = \frac{2b-4-2a}{2-a-a^2} \qquad x = 2 - \frac{a(2b-4-2a)}{2-a-a^2}$$

Portanto

$$S = \left(2 - \frac{a(2b-4-2a)}{2-a-a^2}, \frac{2b-4-2a}{2-a-a^2}, \frac{b}{a+2}\right)$$

para todo $b \in \mathbb{R}$. **Caso** $a = -2$**:** Neste caso a matriz aumentada do sistema equivalente fica

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 2b-4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right) \; 2l_1+l_2 \to l_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Portanto se $b \neq 0$ o sistema não tem solução. Se $b = 0$, então o sistema é equivalente a

$$x - 2y = 2$$

cujo conjunto solução é

$$S = \{(2+2y, y, z),\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

Caso $a = 1$**:** A matriz aumentada do sistema equivalente é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2b-4 \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right)$$

portanto, se $2b - 4 \neq 2$, isto é se $b \neq 3$ o sistema não possui solução. Caso $b = 3$ temos que o sistema fica

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donde

$$S = \{(x, 2-x, 1),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

10. Considere o sistema linear nas três variáveis x, y, z

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+kz = 1 \\ x+ky+z = 1 \\ kx+y+z = 1 \end{array}\right.$$

Determinar os valores de k o sistema tem: solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução. Nos casos onde tiver solução, resolver o sistema.
Resolução:
Primeiramente escrevemos o sistema em forma matricial $AX = B$. Obtemos assim

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sistema possui solução única quando o determinante da matriz do sistema A for diferente de zero. Pois neste caso a matriz, é invertível e a solução é $S = A^{-1}B$.
Calculamos então

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} &= 1(k-1) - 1(1-k) + k(1-k^2) \\ &= -(k^3 - 3k + 2) \\ &= -(k-1)^2(k+2) \end{aligned}$$

Donde, se $k \notin \{-2,\ 1\}$ temos que A é invertível.
Caso $k \notin \{-2,\ 1\}$**:** construimos a matriz aumentada do sistema e fazemos operações elementares sobre ela

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} l_2 - l_1 \to l_2 \\ l_3 - l_1 \to l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ k-1 & 0 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} l_2/(k-1) \to l_2 \\ l_3/(k-1) \to l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \ l_1 - l_2 \to l_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{array}\right) \; l_1 - l_3 \to l_1 \; \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & k+2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{array}\right)$$

Portanto chegamos no sistema equivalente

$$\begin{cases} z = 1/(k+2) \\ y = z \\ x = z \end{cases}$$

Que tem solução

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2} \right) \right\}$$

Caso $k = 1$ temos que o sistema fica

$$x + y + z = 1,$$

Cujo conjunto solução é

$$S = \{(x, y, 1 - x - y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Caso $k = -2$ Substituindo $k = 2$ e aplicando o método de Gauss, temos

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ -2 & 1 & 1 & | & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_2 - l_1 \to l_2 \\ l_3 - l_1 \to l_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ -3 & 0 & 3 & | & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} l_2/(-3) \to l_2 \\ l_3/(-3) \to l_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{array}\right) l_1 - l_2 \to l_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{array}\right)$$

que produz um sistema

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

que é um sitema sem solução. Portanto este caso não tem solução.

11. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
    - Todo sistema Homogêneo com 5 equações e 6 variáveis possui soluções não nulas.
      Resolução: (VERDADEIRO) Todo sistema linear homogêneo possui solução. Neste caso, o sistema possui uma variável livre e portanto possui infinitas soluções não nulas.
    - Se A é uma matriz de tamnho $n \times n$ com $\det(A) = 0$, então o sistema homogêneo $AX = 0$ sempre tem solução única.
      Resolução:(FALSO) Por exemplo considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Claramente $\det(A) = 0$ e o sistema homogêneo associado é $\{x = 0$ que possui como conjunto solução $S = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}.\}$
    - Um sistema de 3 equações e 5 variáveis sempre possui solução.
      Resolução: (FALSO) Basta considerar por exemplo o sistema

$$\begin{cases} \quad x & = & 0 \\ y + z + v + w & = & 0 \\ y + z + v + w & = & 1 \end{cases}$$

- Se A é uma matriz de tamanho $m \times n$ com $m < n$ e existe uma matriz B de tamanho $n \times m$ tal que $AB = I_m$, então todo sistema linear tendo A como matriz principal tem soluções múltiplas.
Resolução (VERDADEIRO)
Primeiramente observamos que, como $AB = I$, cada coluna $[B]^i$ de B é uma solução da equação

$$A[B]^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Então uma solução de

$$AX = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

é dada por

$$S = c_1[B]^1 + \ldots + c_n[B]^n.$$

Então todo sistema que tem A como matriz principal tem solução. Portanto, como o sistema terá mais variáveis do que equações, esse sistema terá soluções múltiplas.
- Se A é uma matriz invertível, então ela não é matriz aumentada de um sistema solúvel.
Resolução: (VERDADEIRO) Por ser a matriz invertível quer dizer que a matriz aumentada é equivalente por linhas à identidade. Então o sistema original será equivalente a um sistema que tem uma equação da forma

$$0 = 1$$

que é um sistema sem solução.

12. Sabendo que o sistema

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ mx & +2y & +3z & = 0 \\ m^2x & +4y & +9z & = 1 \end{cases}$$

admite uma única solução, podemos concluir que m pode assumir todos os valores do intervalo real:
a) $[0,1]$ b) $[1,2]$ c) $[3,4)$ d)$[0,4]$.
Resolução:
Considere o sistema

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ mx & +2y & +3z & = 0 \\ m^2x & +4y & +9z & = 1 \end{cases}$$

- Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m^2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ a matriz do sistema, então

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} m & 3 \\ m^2 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} m & 2 \\ m^2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 6 - (9m - 3m^2) + (4m - 2m^2) = 6 - 5m + m^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\det(A) = 0$ se

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

isto é, se $m = 3$ ou $m = 2$, então o sistema possui única solução se $m \in a) = [0,1]$

13. Resolva o sistema dependendo dos valores dos parámetros respectivos:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x_1+ & 3x_2+ & x_3 & = 1 \\ x_1+ & 6x_2+ & x_3 & = 3 \\ 2x_1- & 3x_2+ & 2x_3 & = \lambda \\ x_1+ & 3x_2+ & 2x_3 & = 1 \end{array} \right. ; \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1- & 2x_2- & x_3+ & x_4 & = -2 \\ 2x_1+ & 7x_2+ & 3x_3+ & x_4 & = 6 \\ 11x_1+ & 11x_2+ & 4x_3+ & 8x_4 & = 8 \\ 10x_1+ & 2x_2+ & & 8x_4 & = \lambda \end{array} \right. .$$

Resolução:

- a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & -3 & 2 & \vdots & \lambda \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1 \to \ell_3} \xrightarrow{\ell_2 - \ell_4 \to \ell_4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -6 & 1 & \vdots & \lambda - 1 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_1 - \ell_2 \to \ell_1} \xrightarrow{\ell_3 + 2\ell_2 \to \ell_3} \xrightarrow{\ell_4 - \ell_2 \to \ell_4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -6 & 1 & \vdots & \lambda - 1 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_1 - \ell_2 \to \ell_1} \xrightarrow{\ell_3 + 2\ell_2 \to \ell_3} \xrightarrow{\ell_4 - \ell_2 \to \ell_4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -6 & 1 & \vdots & \lambda - 1 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Então para que o sistema tenha solução devemos ter

$$2(3\lambda + 8) = 2\lambda + 5$$

$$6\lambda + 16 = 2\lambda + 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-11}{4}$$

Neste caso

$$x = -\frac{1}{4}, \quad 3y = \frac{7}{4}, \quad z = -\frac{1}{4}$$

- b) Aplicamos o método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & \vdots & 6 \\ 11 & 11 & 4 & 8 & \vdots & 8 \\ 10 & 2 & 0 & 8 & \vdots & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_4 - 10\ell_4 \to \ell_4]{\substack{\ell_1 - 2\ell_1 \to \ell_2 \\ \ell_3 - 11\ell_1 \to \ell_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & \vdots & 10 \\ 0 & 33 & 15 & -3 & \vdots & 30 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & \vdots & 20 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2/11 \to \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{-1}{11} & \vdots & \frac{10}{11} \\ 0 & 33 & 15 & -3 & \vdots & 30 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & \vdots & 20 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_1 + 2\ell_2 \to \ell_1 \\ \ell_3 - 33\ell_2 \to \ell_3 \\ \ell_4 - 22 \to \ell_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0- & \frac{-1}{11} & \frac{9}{11} & \vdots & \frac{-2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{-1}{11} & \vdots & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Portanto, se $\lambda \neq 0$ o sistema é sem solução. Se $\lambda = 0$ temos

$$S = \left\{ \frac{-2+a-9b}{11}, \frac{10-5a+b}{11},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0,10)$, $P_2 = (1,7)$, $P_3 = (3,-11)$ e $P_4 = (4,-14)$.
Resolução:
Seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o que passa pelos pontos
    - $P_1 = (0,10)$ então, $P(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad d = 10$
    - $P_2 = (1,7)$ então, $P(1) = 7 \quad \Rightarrow \quad a+b+c+d = 7$
    - $P_3 = (3,-11)$ então, $P(3) = -11 \quad \Rightarrow \quad 27a+9b+3c+d = -11$
    - $P_4 = (4,-14)$ então, $P(4) = -14 \quad \Rightarrow \quad 64a+16b+4c+d = -14$

Então,

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ 27a + 9b + 3c = -21 \\ 64a + 16b + 4c = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -3 \\ 9a + 3b + c = -7 \\ 16a + 4b + c = -6 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -3 \\ 9 & 3 & 1 & \vdots & -7 \\ 16 & 4 & 1 & \vdots & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3-\ell_1 \to \ell_3]{\ell_2-\ell_1 \to \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -3 \\ 8 & 2 & 0 & \vdots & -4 \\ 15 & 3 & 0 & \vdots & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}\ell_2 \to \ell_2 \\ \frac{1}{3}\ell_3 \to \ell_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -3 \\ 4 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 5 & 1 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 3\ell_2 \to \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -3 \\ 4 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $a = 1$
- $4a + b = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -6$
- $c = -3 - 1 + 6 = 2$

Então,

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$$

15. Determine coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2,7)$, $P_2 = (-4,5)$ e $P_3 = (4,-3)$.
Resolução:
Seja a equação do círculo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

que passa pelos pontos
    - $P_1 = (-2,7)$ então, $4 + 49 - 2a + 7b + c = 0 \Rightarrow\ -2a + 7b + c = -53$
    - $P_2 = (-4,5)$ então, $16 + 25 - 4a + 5b + c = 0 \Rightarrow\ -4a + 5b + c = -41$
    - $P_3 = (4,-3)$ então, $16 + 9 + 4a - 3b + c = 0 \Rightarrow\ 4a - 3b + c = -25$

Então,

$$\begin{cases} -2a + 7b + c = -53 \\ -4a + 5b + c = -41 \\ 4a - 3b + c = -25 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccccc} -2 & 7 & 1 & \vdots & -53 \\ -4 & 5 & 1 & \vdots & -41 \\ 4 & -3 & 1 & \vdots & -25 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2+3\ell_3 \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccccc} -2 & 7 & 1 & \vdots & -53 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -66 \\ 4 & -3 & 1 & \vdots & -25 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{\ell_2}{2} \to \ell_2} \\ \\ \xrightarrow{2\ell_1+\ell_3 \to \ell_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} -2 & 7 & 1 & \vdots & -53 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -33 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & -31 \end{array}\right) \xrightarrow{-3\ell_2+\ell_3 \to \ell_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} -2 & 7 & 1 & \vdots & -53 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -33 \\ 0 & 8 & 0 & \vdots & -32 \end{array}\right)$$

Então,

$$b=4 \qquad c=-33-b=-29 \qquad 2a=53+b+c=-4 \quad \Rightarrow \quad a=-2$$

16. Considere o sistema $(*)$ $AX=B$, com A uma matriz $m\times n$ e B uma matriz $m\times 1$.

a) Mostre que: se Y_1 e Y_2 são soluções do sistema homogêneo associado $AX=\mathbf{0}$ e a e b são números reais então $Z=aY_1+bY_2$ também é solução do homogêneo associado.

Resolução:

Se Y_1 e Y_2 são tais que $AY_1=0$ e $AY_2=0$ e $a,b\in\mathbb{R}$

Então,

$$A(aY_1+bY_2)=aAY_1+bAY_2=a\cdot 0+b\cdot 0=0$$

b) Mostre que: Se X_1 e X_2 são soluções de $(*)$ então $Y=X_2-X_1$ é solução do sistema homogêneo associado $AX=\mathbf{0}$.

Resolução:

Se Y_1 e Y_2 são tais que $AY_1=B$ e $AY_2=B$

Então,

$$A\cdot(Y_1-Y_2)=AY_1-AY_2=B-B=0$$

c) Suponha que X_0 é uma solução particular de $(*)$ e mostre que qualquer solucão X de $(*)$ é da forma $X=X_0+Y$, com Y solução do homogêneo associado.

OBS: Na verdade pode-se provar que para todo sistema homogêneo $(**)$ $AX=\mathbf{0}$, com A uma matriz $m\times n$, existem r soluções não nulas $Y_1,\cdots,Y_r$, $0\le r\le n$, de $(**)$ tal que toda solução Y de $(**)$ se escreve na forma $Y=a_1Y_1+a_2Y_2+\cdots+a_rY_r$, com $a_1,\cdots,a_r$ números reais ($r=0$ ocorre quando $(**)$ tem a solução nula como única solução) . Portanto, por c), se o sistema $(*)$ tem uma solução X_0 então toda solução X de $(*)$ é do tipo $X=X_0+a_1Y_1+a_2Y_2+\cdots+a_rY_r$, com $a_1,\cdots,a_r$ números reais. A solução X_0 é comumente chamada de solução inicial (ou particular) de $(*)$ e o conjunto $\{Y_1,\cdots,Y_r\}$ é chamado de um conjunto de geradores do sistema $(*)$ (ou simplesmente de geradores de $(*)$) Observe ainda que X_0 é a única solução de $(*)$ somente quando $r=0$.

Resolução:

Seja X_0 tal que $AX_0 = B$. Se X_1 é solução de $AX = B$

Então,

$$A \cdot (X_0 - X_1) = AX_0 - AX_1 = B - B = 0$$

logo,

$$X_1 = X_0 + (X_1 - X_0) = X_0 + Y$$

onde $AY = 0$.

17. Dada uma matriz $A = CD$ onde

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

resolva o sistema $AX = B$, sabendo-se que $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resolução:

$$\text{Se } A = CD \text{ com } D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Então a solução de } AX = B \text{ para } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B = (CD)^{-1}B = D^{-1}C^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

18. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas

a) Seja A uma matriz quadrada e $A^2 = 0$ então $A = 0$ (0 é a matriz nula.)
Resolução: (FALSO) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então, $A \neq 0$ e $A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Seja A uma matriz quadrada que é simétrica e antisimétrica. Então $A = 0$.
Resolução: (VERDADEIRO) $A = A^t$ e $A = -A^t$, então, $2A = A + A = A^t + (-A^t) = A^t - A^t = 0$ $\Rightarrow \quad A = 0$

c) Toda matriz pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica e uma antisimétrica.
Resolução: (VERDADEIRO) Dada A, seja $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$. Então:

$$B + C = \tfrac{1}{2}A + A^t + \tfrac{1}{2}A - A^t = A$$

$$B^t = \tfrac{1}{2}(A + A^t)^t = \tfrac{1}{2}(A^t + A) = B$$

$$C^t = \tfrac{1}{2}(A - A^t)^t = \tfrac{1}{2}(A^t - A) = -C$$

d) A única matriz quadrada tal que $A^2 = Id$ é $A = Id$.
Resolução: (FALSO) Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

e) Se $A,\ B$ são matrizes quadradas tais que $AB = BA$ então $A^kB^k = (AB)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$
Resolução: (VERDADEIRO) Sejam A, B tal que $AB = BA$. Provamos por indução.

Se $k = 1 \quad \Rightarrow \quad A^-1 \cdot B^1 = AB = (AB)^1$. vale para k. Então provamos para $k = 1$

$$A^{k+1} \cdot B^{k+1} = A^k \cdot AB^k \cdot B = A^k \cdot B^k \cdot AB = (AB)^k \cdot (AB) = (AB)^{k+1}$$

f) Seja A uma matriz quadrada que satisfaz $A^2+3AB+7I=0$, onde B é uma matriz quadrada do tamanho apropriado, então A é invertível.
Resolução: (VERDADEIRO)

$$A^2+3AB+7I=0 \;\Rightarrow\; A^2+3AB=-7I \;\Rightarrow\; -\frac{1}{7}(A^2+3AB)=I$$

$$\Rightarrow\; A\left(-\frac{1}{7}A-\frac{3}{7}B\right)=I.$$

19. Considere o sistema

$$\begin{cases} -x & -y & +z & = & 1 \\ x & -y & -az & = & 1 \\ x & +ay & +z & = & -3 \end{cases}$$

a) Determine os valores de a para os quais o sistema tem solução única.
b) Determine o conjunto solução para $a=1$
c) Determine o conjunto solução para $a=-1$
d) Determine o conjunto solução para $a=3$

Resolução:
Para calcular o determinante da matriz A fazemos operações elementares sobre ela até chegar numa matriz triangular superior T. Depois calculamos o determinante de T multiplicando as entradas da diagonal, e utilizamos as operações elementares feitas para relacionar este valor com o determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_5-\frac{1}{4}\ell_1\to\ell_5}]{\substack{\ell_2-\frac{3}{2}\ell_1\to\ell_2 \\ \ell_3-\frac{1}{4}\ell_1\to\ell_3 \\ \ell_4-\frac{1}{4}\ell_1\to\ell_4}} A_1=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_5+\frac{1}{2}\ell_2\to\ell_5}]{\substack{\ell_3+\frac{1}{2}\ell_2\to\ell_3 \\ \ell_4-\frac{3}{2}\ell_2\to\ell_4}} A_2=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_4+\frac{5}{3}\ell_3\to\ell_4 \\ \ell_5-\frac{2}{3}\ell_3\to\ell_5}}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_5-5\ell_4\to\ell_5} T=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Observamos que

$$\det(T)=4\times(-1)\times 6\times(-1/3)\times(-12)=-96$$

Como, todas as operações elementares feitas são do tipo "adicionar a uma linha um multiplos escalar de outra linha"temos que o valor do determinante não é alterado. Isto é

$$\det(A)=\det(A_1)=\det(A_2)=\det(A_3)=\det(T)=-96.$$

4) Primeiramente observamos que o sistema pode ser escrito na forma matricial

$$AX=B$$

em que

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

Claramente, o sistema terá solução única quando a matriz do sistema A for invertível, isto é, quando $\det(A)\neq 0$. Calculamos então

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\\ &= -1\times(-1)^{1+1}\times\det\begin{pmatrix}-1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+2}\times\det\begin{pmatrix}1 & -a\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &\quad +(1)\times(-1)^{1+3}\times\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & a\end{pmatrix}\\ &= -(-1+a^2)+(1+a)+(a+1)\\ &= -a^2+2a+3=-(a-3)(a+1)\end{aligned}$$

Se $a=1$ Temos que a matriz aumentada do sistema fica

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)$$

Fazemos operações elementares sobre ela para obter um sistema mais simples de resolver.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[\ell_2+\ell_3\to\ell_1]{\ell_1+\ell_3\to\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)$$

Então o sistema é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & -3\\ 2x & & & = & -2\\ & & 2z & = & -2\end{array}\right. ,$$

que tem por conjunto solução

$$S=\{(-1,-1,-1)\}$$

Se $a=-1$ Temos que o sistema fica

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} -x & -y & +z & = & 1\\ x & -y & +z & = & 1\\ x & -y & +z & = & -3\end{array}\right.$$

Este sistema não tem solução pois não podemos ter simultáneamente

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 1\\ x & -y & +z & = & -3\end{array}\right.$$

Se $a=3$ Temos que a matriz aumentada do sistema fica

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & -3\end{array}\right)$$

Fazemos operações elementares sobre ela para obter um sistema mais simples de resolver.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_3+\ell_1\to\ell_3]{\ell_2+\ell_1\to\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_3+\ell_2\to\ell_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_2\to\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1+\ell_2\to\ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\ell_1\to\ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Então o sistema equivalente é

$$\begin{cases} x \quad -2z = 0 \\ \quad y \ +z = -1 \end{cases}$$

Que tem por conjunto solução a

$$S = \{(2z, -1-z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

Em elaboração

26. Vetores no plano e no espaço

1. Determine a extremidade ou a origem do segmento orientado nos seguintes casos:
   a) Representa o vetor $v = (1,-2,1)$ e sua origem é o ponto $P = (1,0,1)$.
   b) Representa o vetor $v = (-1,0,1)$ e sua origem é o ponto médio entre os pontos $P_1 = (1,1,3)$ e $P_2 = (-1,1,1)$.
   c) Representa o vetor $v = (1,1,1)$ e sua extremidade é o ponto $P = (1,1,1)$.

   Resolução:
   a) Se $\vec{V} = (1,-2,1)$ então o representante de $\vec{V}$ com origem em $M\ P = (1,0,1)$ tem extremidade $Q = (q_1,q_2,q_3)$ onde $= (q_1 - 1, q_2 - 0, q_3 - 1) = (1,-2,1)$, portanto, $q_1 = 2,\ \ q_2 = -2,\ \ q_3 = 2$, isto é, $Q = (2,-2,2)$.

   b) A origem de $\vec{V} = (-1,0,1)$ é $P = \frac{1}{2}(1,1,3) + \frac{1}{2}(-1,1,1) = (0,1,2)$. Então sua extremidade é $Q = (q_1,q_2,q_3)$ onde $\overrightarrow{PQ} = \vec{V}$, isto é, $(q_1, q_2 - 1, q_3 - 2) = (-1,0,1)$, portanto, $q_1 = -1,\ \ q_2 = 1,\ \ q_3 = 3$ de onde $Q = (-1,1,3)$.

   c) O representante de $\vec{V} = (1,1,1)$ tem extremidade em $P = (1,1,1)$ então sua origem é $Q = (q_1,q_2,q_3)$ tal que $\overrightarrow{QP} = \vec{V}$, isto é, $(1-q_1, 1-q_2, 1-q_3) = (1,1,1)$, portanto, $q_1 = -0,\ \ q_2 = 0,\ \ q_3 = 0$, ou seja $Q = (0,0,0)$.

2. Verifique se os pontos dados abaixo são colineares:
   a) $A = (1,0,1)$, $B = (2,2,0)$ e $C = (0,-2,2)$;
   b) $A = (0,1,-1)$, $B = (1,2,0)$ e $C = (0,2,1)$;
   c) $A = (3,1,4)$, $B = (2,7,1)$ e $C = (0,1,5)$.

   Resolução:
   a) $A = (1,0,1)$, $B = (2,2,0)$ e $C = (0,-2,2)$ são colineares, pois $\overrightarrow{AB} = (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,-2,1)$ satisfazem $-\overrightarrow{AB} = AC$

   b) $A = (0,1,1)$, $B = (1,2,0)$ e $C = (0,2,1)$ não são colineares, pois $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0,1,2)$ são linearmente independentes.

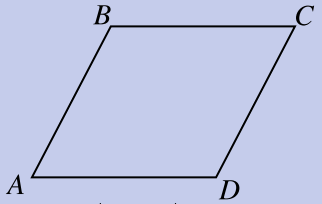
   c) $A = (3,1,4)$, $B = (2,7,1)$ e $C = (0,1,5)$ não são colineares, pois $\overrightarrow{AB} = (-1,6,-3)$ e $\overrightarrow{AC} = (-3,0,1)$ são linearmente independentes.

3. Dados os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (-1,1,1)$ e $C = (0,1,2)$.

a) Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo
b) Determine o ponto médio entre A e C e o ponto médio entre B e D.

Resolução:

a) Sejam $A=(1,0,1)$, $B=(-1,1,1)$ e $C=(0,1,2)$. Se A,B,C,D formam um paralelogramo



então $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, logo, se $D=(x,y,z)$ temos que $(-2,1,0)=(-x,1-y,2-z)$ de onde $x=2$, $y=0$ e $z=2 \quad\Rightarrow\quad D=(2,0,2)$. Observamos que $\overrightarrow{AD}=(1,0,1)=\overrightarrow{CD}$.

b) O ponto médio entre A e C é

$$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)+\left(0,\frac{1}{2},1\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

O ponto médio entre B e D é

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+(1,0,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

4. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais. Mostre $\overline{MN}=\vec{0}$.)

Resolução:

Sejam A,B,C,D os vértices do paralelogramo
seja M o ponto médio entre A e C e N o ponto médio de B e D

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=0\\
&\Rightarrow \quad M=N
\end{aligned}$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MN})\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})
\end{aligned}$$

5. Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ dois vetores não colineares no espaço. Qual o conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$?

Resolução:

Sejam $A=(x_0,y_0)$ e $B=(x_1,y_1)$ dois pontos no espaço tal que $\left\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\}$ é linearmente independentes, então, os pontos P tal que $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$ é a reta $\overrightarrow{OP}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{OB} \quad\Rightarrow$ $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}$, portanto é a reta que passa por B e A.

27. Produto entre vetores

1. Considere

$$\vec{u} = 3\vec{v} - 5\vec{w}$$

onde $||\vec{v}||^2 = 4$, $||\vec{w}||^2 = 3$ e $\vec{v}\cdot\vec{w} = 1$. Calcule
- $\vec{u}\cdot\vec{v}$,
- $\vec{u}\cdot\vec{w}$,
- $||\vec{u} - 2\vec{v}||^2$,
- $||\vec{u} - 2\vec{w}||^2$,
- $||\vec{u} - \vec{v}||^2$,
- $||\vec{u} - \vec{w}||^2$.

Resolução:
Considere $\vec{u} = 3\vec{v} - 5\vec{w}$ onde $||\vec{v}||^2 = 4$, $||\vec{w}||^2 = 3$ e $\vec{v}\cdot\vec{w} = 1$. Observamos que

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\vec{v} - 5\vec{w})\cdot\vec{v} &= 3||\vec{v}||^2 - 5\vec{w}\cdot\vec{v} \\ &= 12 - 5(1) = 7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} = (3\vec{v} - 5\vec{w})\cdot\vec{w} &= 3\vec{v}\cdot\vec{w} - 5||\vec{w}||^2 \\ &= 3 - 15 = -12.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\vec{u} - 2\vec{v}||^2 = ||\vec{v} - 5\vec{w}||^2 &= ||\vec{v}||^2 - 10\vec{v}\cdot\vec{w} + 25||\vec{w}||^2 \\ &= 4 - 10 + 75 = 69.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\vec{u} - 2\vec{w}||^2 = ||3\vec{v} - 8\vec{w}||^2 &= 9||\vec{v}||^2 - 48\vec{v}\cdot\vec{w} + 64||\vec{w}||^2 \\ &= 36 - 48 + 192 = 180.\end{aligned}$$

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||2\vec{v} - 5\vec{w}||^2 = 4||\vec{v}||^2 - 20\vec{v}\cdot\vec{w} + 25||\vec{w}||^2$$

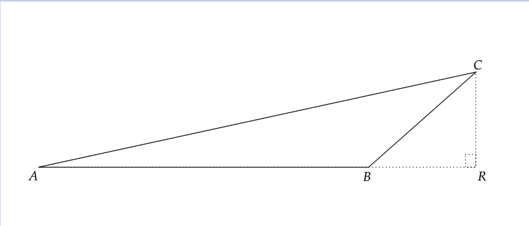
$$= 16 - 20 + 100 = 96.$$

$$||\vec{u} - \vec{w}||^2 = ||3\vec{v} - 6\vec{w}||^2 = 9||\vec{v}||^2 - 36\vec{v}\cdot\vec{w} + 36||\vec{w}||^2$$
$$= 36 - 36 + 108 = 108.$$

2. Sejam

$$A = (1, -2, 1) \quad B = (-1, 0, 2) \quad C = (3, 20, 150)$$

e considere o triângulo $\widehat{ABC}$ (imagem puramente ilustrativa)



Determine R, $\overrightarrow{RC}$ e $\overrightarrow{AR}$.

Resolução: Pela forma do triângulo temos que decompor

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC}.$$

Observamos que

$$\overrightarrow{AR} = Proj_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}.$$

Como

$$\overrightarrow{AC} = (2, 22, 149) \quad \overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1).$$

Então

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \frac{(2,22,149)\cdot(-2,2,1)}{9}(-2,2,1) \\ &= 21(-2,2,1) \\ &= (-42, 42, 21). \end{aligned}$$

Obtemos assim que

$$R = (-42 + 1, 42 - 2, 21 + 1) = (-41, 44, 22),$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AR} \\ &= (2, 22, 149) - (-42, 42, 21) \\ &= (44, -20, 128). \end{aligned}$$

Portanto

$$\overrightarrow{AR} = (-2, 2, 1).$$

$$R = (-41, 44, 22).$$

$$\overrightarrow{RC} = (44, -20, 128).$$

3. A área do triângulo ABC é $\sqrt{6}$. Sabendo-se que $A = (2, 1, 0)$, $B = (-1, 2, 1)$ e que o vértice C está no eixo y, encontre as coordenadas de C.

Resolução:

Seja $\widehat{ABC}$ um triângulo de área $\sqrt{6}$. Se $A = (2,1,0)$ e $B = (-1,2,1)$ e $C = (0,y,0)$, então $\overrightarrow{AB} = (-3,1,1)$ e $\overrightarrow{AB} = (-2, y-1, 0)$. Então

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}\,\|\overline{AB}\times\overline{AC}\|$$

Como

$$AB\times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & y-1 & 0 \end{vmatrix} = \left(-(y-1)^2, -2, -3y+5)\right)$$

$$\begin{aligned} \|\overline{AB}\times\overline{AC}\|^2 &= (y-1)^2+4+(5-3y)^2 \\ &= y^2-2y+1+4+25-30y+9y^2 \\ &= 10y^2-32y+30. \end{aligned}$$

Então,

$$6 = \frac{1}{4}\cdot(10y^2-32y+0) \;\Rightarrow\; 10y^2-32y+6=0$$

$$\Rightarrow\; 5y^2-18y+3=0 \;\Rightarrow\; y = \frac{18\pm\sqrt{14}}{10}$$

$$\Rightarrow\;\; y=3 \;\text{ ou }\; y=\frac{1}{5}$$

Portanto

$$C=(0,3,0) \;\text{ ou }\; C=\left(0,\frac{1}{5},0\right)$$

4. a) Decompor o vetor $\vec{w} = (1,3,2)$ como soma de dois vetores $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$, onde $\vec{u}$ é paralelo ao vetor $(0,1,3)$ e v é ortogonal a $(0,1,3)$.
   b) Encontre um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores $(2,3,-1)$ e $(2,-4,6)$ tal que $\|\,\vec{u}\,\| = 3\sqrt{3}$.

Resolução:

a) Seja $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}_0 = (0,1,3)$. Queremos decompor $\vec{w}$ como uma soma $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ em que $\vec{u}//\vec{u}_0$ e $\vec{v}\perp\vec{u}_0$. Então,

$$\vec{u} = Proj_{u_0}(\vec{w}) = \frac{\langle\vec{w},u_0\rangle}{\|u_0\|^2}\cdot\vec{u}_0 = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}_0}{\|u_0\|^2}\cdot\vec{u}_0 = \frac{9}{10}\cdot(0,1,3)$$

$$\Rightarrow\;\vec{u} = \left(0,\frac{9}{10},\frac{27}{10}\right) \;\;\Rightarrow\;\; \vec{v} = \vec{w}-\vec{u} = \left(1,\frac{21}{10},\frac{-7}{10}\right)$$

b) Queremos achar $\vec{u}$ que seja ortogonal a $\vec{u}_0 = (2,3,-1)$ e a $(\vec{u}_1 = (2,-4,6)$ tal que $\|u\| = 3\cdot\sqrt{3}$. Fazemos

$$\vec{w} = \vec{u}_0\times\vec{u}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (14,-14,-14)$$

Então $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}_0$ e $\vec{u}_1$ simultáneamente. O vetor que procuramos é um múltiplo escalar de $a\vec{w}$ com norma igual a $3\cdot\sqrt{3}$. Como

$$3\cdot\sqrt{3} = ||a\vec{w}|| = |a|\;||\vec{w}|| = 14|a|\sqrt{3}$$

temos que $a = \pm\frac{3}{14}$. Assim o vetor procurado é

$$\vec{u} = \pm(3,-3,-3).$$

5. a) Demonstre que não existe x tal que os vetores $\vec{v} = (x,2,3)$ e $\vec{u} = (x,-2,3)$ sejam perpendiculares.
   b) Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2,1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,-1)$ e entre os vetores $\vec{w} = (1,1,1)$ e $\vec{z} = (0,-2,-2)$.

Resolução:

a) Se $\vec{v} = (x,2,3)$ e $\vec{u} = (x,-2,3)$. Então,

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = x^2 - 4 + 9 = x^2 + 5 > 0 \quad \forall x$$

Portanto,

$$\vec{v}\cdot\vec{u} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Sejam $\vec{u} = (2,1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,-1)$. Então,

$$\cos(\alpha(u,v)) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \alpha(u,v) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Sejam $\vec{w} = (1,1,1)$ e $\vec{z} = (0,-2,-2)$. Então,

$$\cos(\alpha(z,w)) = \frac{\vec{w}\cdot\vec{z}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}} = \frac{-4}{\sqrt{24}}$$

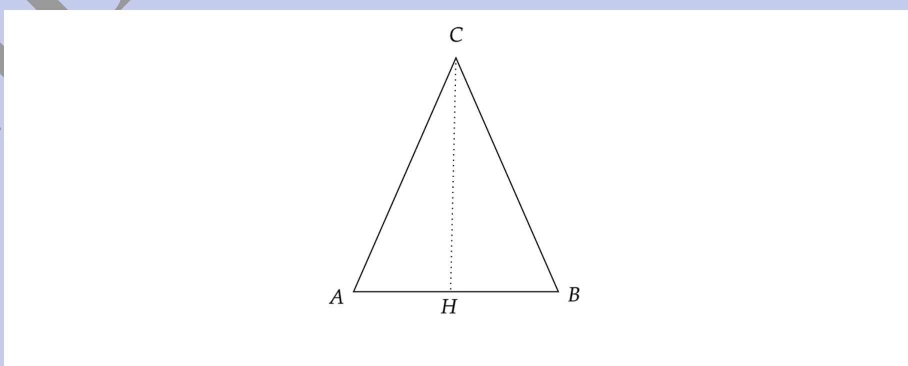
Então ,

$$\alpha(\vec{z},\vec{w} = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{24}}\right).$$

6. a) Dado um triângulo isósceles, mostre que a mediana relativa à base é a mediatriz (isto é, é perpendicular à base).
   b)

Resolução:

a) Considere o desenho



Assuma que

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB} = \overline{HB}$$

e que $\|\overline{AC}\| = \|\overline{BC}\|$. Então,

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HC}, \quad \text{e} \quad \overline{BC} = -\overline{HB} + \overline{HC} = \overline{AH} + \overline{HC}$$

Portanto

$$||\overline{AC}||^2 = ||\overline{AH}||^2 + ||\overline{HC}||^2 + 2\cdot\overline{AH}\cdot\overline{HC}$$

$$||\overline{BC}||^2 = ||\overline{AH}||^2 + ||\overline{HC}||^2 - 2\cdot\overline{AH}\cdot\overline{HC}$$

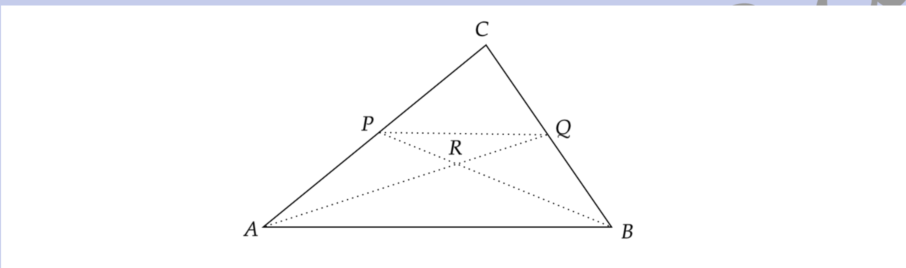
Comparando, temos que

$$\overline{AH}\cdot\overline{HC} = -\overline{AH}\cdot\overline{HC}.$$

Portanto,

$$\overline{AH}\cdot\overline{HC} = 0.$$

b) Seja P o ponto médio de $\overline{AC}$ e Q o ponto médio de $\overline{BC}$ e R o ponto interseção de $\overline{AQ}$ com $\overline{BP}$.



Sabemos que $||\overline{AQ}|| = ||\overline{PB}||$ e que $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$. Observamos que os triângulos $\widehat{QRP}$ e $\widehat{ARB}$ são isóceles. Agora, utilizando a lei dos cossenos provamos

$$||\overline{AP}||^2 = ||\overline{RP} - \overline{RA}||^2 = ||\overline{RQ} - \overline{RB}||^2 = ||\overline{BQ}||^2.$$

De onde segue que

$$||\overline{AC}|| = 2||\overline{AP}|| = 2||\overline{QB}|| = ||\overline{BC}||.$$

7. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de comprimentos iguais, mostre que para quaisquer números a e b, os vetores $a\vec{u}+b\vec{v}$ e $a\vec{v}+b\vec{u}$ têm o mesmo comprimento. O que significa isso?

Resolução:
Sejam $\vec{u},\vec{v}$ tal que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = c$ e considere $a,b\in\mathbb{R}$. Seja $\vec{w}_2 = a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$ e $\vec{w}_2 = b\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}$. Então:

$$\|\vec{w}\|^2 = a^2\cdot\|\vec{u}\|^2 + b^2\cdot\|\vec{v}\|^2 + 2ab\cdot\vec{v}\cdot\vec{u} = (a^2+b^2)\cdot c^2 + 2ab\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$\|\vec{w}\|^2 = a^2\cdot\|\vec{v}\|^2 + b^2\cdot\|\vec{u}\|^2 + 2ab\cdot\vec{v}\cdot\vec{u} = (a^2+b^2)\cdot c^2 + 2ab\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}$$

O vetor $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são o lado de um triângulo de lado ac e outro bc e que formam o ângulo que formam $\vec{v}$ e $\vec{u}$. Os dois tem o mesmo comprimento por causa do teorema do coseno.

8. Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $\vec{v} = x\vec{i}+6\vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $\vec{w} = \vec{i}+x\vec{j}+2\vec{k}$ por $\vec{u} = 2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

Resolução:
Sejam $\vec{w} = (1,x,2)$ e $\vec{u} = (2,1,2)$.

$$\Rightarrow \quad \vec{w}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2x-2, 2, 1-2x).$$

Para que $\vec{w}\times\vec{u}$ seja paralelo a $\vec{v} = (x,0,6)$ teriamos que $\exists\ \lambda$ tal que

$$\lambda\cdot\vec{v} = \vec{w}\times\vec{u}$$

Mas isto significa $(\lambda\cdot 0 = 2)$ o que não pode acontecer, portanto não serão paralelos $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

9. Determine x para que os pontos $A=(x,1,2)$, $B=(2,-2,-3)$, $C=(5,-1,1)$ e $D=(3,-2,-2)$ sejam coplanares.

Resolução:
Sejam $A=(x,1,2)$, $B=(2,-2,-3)$, $C=(5,-1,1)$ e $D=(3,-2,-2)$. Considere:

- $\overline{BA}=(-27x,+3,+5,)$
- $\overline{BC}=(3,1,4)$
- $\overline{DC}=(1,0,1)$

Calculamos então,

$$\overline{BC}\times\overline{DC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,4,-1)$$

Logo para que A,B,C e D sejam coplanares devemos ter

$$0=\overline{BA}\cdot(\overline{BC}\times\overline{DC})=(x-2,3,5)\cdot(1,1,-1)=x-2+3-5=x-4 \quad\Rightarrow\quad x\equiv 4$$

10. Encontre o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nos seguintes casos:
   a) Dados os pontos $A=(1,3,4)$, $B=(3,5,3)$, $C=(2,1,6)$ e $D=(2,2,5)$ tome $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{AD}=(1,3,4)$.
   b) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{w}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

Resolução:

a) Sejam $A=(1,3,4)$, $B=(3,5,3)$, $C=(2,2,5)$ e $D=(2,2,5)$.

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,2,-1) \qquad \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,-2,2) \qquad \vec{w}=\overrightarrow{AD}=(1,-1,1)$$

O volume do paralelepípido determinado por $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $(\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w})$. Calculamos:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,1,1)=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(2,2,-1)\cdot(0,1,1)=2-1=1$$

Então $vol=1$.

b) O volume do paralelepípido gerado por $\vec{u}=(1,3,2)$, $\vec{v}=(2,1,-1)$ e $w=(1,-2,1)$ é dado por

$$|\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\,|$$

Calculamos,

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-3,-5)$$

$$|\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\,|=|\,\vec{u}\cdot(1,3,2)\cdot(-1,-3,-5)\,|=|\,-1,-9,-10\,|=|\,-20\,|=20$$

11. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço. Mostre que
   a) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{v}\times\vec{u}$
   b) Se $\vec{u}\times\vec{v}$ é não nulo e $\vec{w}$ é um vetor qualquer no espaço então existem números reais a,b e c tal que $\vec{w}=a(\vec{u}\times\vec{v})+b\vec{u}+c\vec{v}$.
   c) Se $\vec{u}\times\vec{v}$ é não nulo e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ então $\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})$ é paralelo a $\vec{v}$.

Resolução:

a)

$$(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{u} - \vec{u}\times\vec{v} + \vec{v}\times\vec{u} - \vec{v}\times\vec{v} = 2\vec{v}\times\vec{u} \qquad \begin{array}{l} \vec{u}\times\vec{u}=0 \\ \vec{v}\times\vec{v}=0 \end{array}$$

b) Se $\vec{u}\times\vec{u} = 0 \neq 0$. Então:

$$\det\begin{pmatrix} \vec{u} & \mid & \vec{v} & \mid & \vec{u}\times\vec{u} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \dots \\ \vec{v} \\ \dots \\ \vec{u}\times\vec{v} \end{pmatrix} = \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 \neq 0$$

Pois, $\det(A) = \det(A^t)$ e $\det\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \dots \\ \vec{v} \\ \dots \\ \vec{u}\times\vec{v} \end{pmatrix} = u_3\cdot(u_1\times u_2)$. Então o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \vec{u} & \mid & \vec{v} & \mid & \vec{u}\times\vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\vec{w})$$

tem única solução. Portanto, $\exists\, a,b,c \in \mathbb{R}$ tal que

$$a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w}$$

c) Assuma $\vec{u}\times\vec{v}\neq 0$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Como $\vec{u}\times\vec{v}\neq 0$. Então $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ é uma base tal que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u}\times\vec{v}=0$$
$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=0$$

Como $\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{u}\times\vec{v}$. Pelo item anterior e $\vec{u}\perp\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})$ e $\vec{u}\times\vec{v}\perp u\times(u\times v)$. Por propriedade do prodduto vetorial segue que

$$0 = u\cdot(\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})) = a$$
$$0 = \vec{u}\times\vec{v}\cdot(\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})) = c$$
$$\Rightarrow \quad \vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = b\vec{v}$$

12. Sejam $A=(2,1,2)$, $B=(1,0,0)$ e $C=(1+\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6})$ três pontos no espaço. Calcule os ângulos do triângulo $\widehat{ABC}$, e os comprimentos da mediana e da altura que saem do vértice A.

Resolução:
Sejam $A=(2,1,2)$, $B=(1,0,0)$ e $C=(1+\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6})$

$$\overline{BA}=(1,1,2) \qquad \overline{BC}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6}) \qquad \overline{AC}=(\sqrt{3}-1-1,\sqrt{3},-\sqrt{6}-2)$$

$$\overline{BA}\cdot\overline{BA} = \sqrt{3}+\sqrt{3}-2\sqrt{6} = 2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{6}) = \cos\theta\cdot\|BA\|\,\|BC\| = \cos\theta\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{42}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{6})}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{42}}$$

Os outros se calculam de forma similar.

13. Sejam $\vec{u} = (-1,1,1)$ e $\vec{v} = (2,0,1)$ dois vetores. Encontre os vetores $\vec{w}$ que são paralelos ao plano determinado por O, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, perpendiculares a $\vec{v}$ e $\vec{u}\cdot\vec{w} = 7$.

    Resolução:
    Sejam $\vec{u} = (-1,1,1)$ e $\vec{v} = (2,0,1)$. Seja $\vec{w} = (a,b,c)$ tal que $w \in \pi$ com π sendo o plano gerado por $\{o,\vec{u},\vec{v}\}$. Então,

$$\vec{w} = \lambda\cdot\vec{u} + \gamma\vec{v} \qquad \vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{u}\cdot\vec{w} = 7$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \vec{w}\cdot\vec{v} = \lambda\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + \gamma\cdot\|\vec{v}\|^2 = \lambda\cdot(-1) + \gamma\cdot 5$$

$$\Rightarrow \quad 7 = \vec{u}\cdot\vec{w} = \lambda\cdot\|\vec{u}\|^2 + \gamma\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda\cdot 3 + \gamma\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} -\lambda & + & 5\gamma & = 0 \\ 3\lambda & - & 2\gamma & = 7 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrl} & & \lambda & = 5\gamma \\ 15\gamma & - & \gamma & = 7 \end{array} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \text{ e } \lambda = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{w} = \frac{5}{2}\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}\cdot\vec{v}$$

14. O vetor $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2,3,-1)$ e $\vec{v} = (1,-2,3)$ e $\vec{w}\cdot(2,-1,1) = -6$. Encontre $\vec{w}$.
    Resolução:
    Seja $\vec{w}$ ortogonal a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (2,3,-1) \\ \vec{v} & = & (1,-2,3) \end{array}\right. \quad \text{e tal que} \quad \vec{w}\cdot(2,-1,1) = -6$$

    Observamos que $\vec{w} = \lambda(\vec{u}\times\vec{v})$. Como

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right| = (7,-7,-7),$$

    temos que

$$\vec{w} = a(7,-7,-7).$$

    Como

$$\vec{w}\cdot(2,-1,1) = -6 \;\rightarrow\; 14a = -6 \;\rightarrow a = -\frac{3}{7}.$$

    Portanto,

$$\vec{w} = -\frac{3}{7}(7,-7,-7) = (-3,3,3).$$

15. Sejam $u = (1,-1,3)$ e $v = (3,-5,6)$. Encontre $proj_{u+v}(2u-v)$.
    Resolução:
    Sejam $\vec{u} - (1,-1,3)$ e $\vec{v} = (3,-5,6)$

$$\begin{array}{rcl} proj_{u+v}(2u-v) & = & proj_{(4,-6,9)}(-1,3,0) \\ & = & \dfrac{(4,-6,9)\cdot(-1,3,0)}{\|4,6,9\|^2}\cdot(4,6,9) \\ & = & \dfrac{-22}{|\,16+36+81\,|}\cdot(4,6,9) \\ & = & \dfrac{-22}{133}\cdot(4,6,9). \end{array}$$

16. Responda, justificando, falso ou verdadeiro a cada uma das seguintes afirmações:
   a) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço, com $\vec{v}$ não nulo e $\vec{v}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{w}$ então $\vec{u}=\vec{w}$.
   b) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço então: $|\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\,|=|\,\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})\,|=|\,\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})\,|=|\,\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})\,|$.
   c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço então $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$.
   d) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço, $\vec{u}$ é não nulo e $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}=\vec{0}$ então $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{0}$.

Resolução:

a) **Falso**

$$\vec{v}=(1,0,0)\qquad \vec{u}=(1,1,0)\qquad \vec{w}=(0,1,0)\qquad \vec{v}\times\vec{w}=(0,0,1)=\vec{v}\times\vec{u}$$

b) **Verdadeiro**

$$|\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\,|=\left|\det\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \vec{w}\end{pmatrix}\right|$$

As outras são permutaçoẽs, das linhas da matriz. Como estas permutaçoẽs alteram o sinal do determinante não temos alteração do módulo.

c) **Falso**

Sejam $\vec{u}=(0,1,0)$, $\vec{v}=(0,1,0)$ e $\vec{w}=(0,0,1)$

Se $\vec{u}=(0,1,0)\ \Rightarrow\ \vec{u}\times\vec{v}=(-1,0,0)\ \Rightarrow\ (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(0,1,0)$

$$\Rightarrow\quad \vec{v}\times\vec{w}=(1,0,0)\quad\Rightarrow\quad \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,1,-1)$$

d) **Verdadeiro**

Sejam $\vec{u}=(1,0,0)$ $\quad\begin{array}{l}\Rightarrow\ \vec{u}\times\vec{v}=0\ \Rightarrow\ \vec{v}=\lambda\cdot\vec{u}\\ \Rightarrow\ \vec{u}\times\vec{w}=0\ \Rightarrow\ \vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}\end{array}\quad \Rightarrow\ \vec{v}\times\vec{w}=\alpha\cdot\lambda\cdot\vec{u}\times\vec{u}=0$

Em elaboração

28. Retas

1. Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{2} \quad y = 0;$$

Determine:

a) se são iguais, paralelas, concorrentes ou reversas,

b) a distância entre elas,

c) o ângulo entre elas.

Resolução:

Sabemos que toda reta fica determinada por um ponto P sobre ela e o vetor diretor $\overrightarrow{V}$.

Então, começamos procurando esta informação de r_1 e r_2, isto é, um ponto sobre elas e o vetor diretor.

Esta informação é fácilmente determinada ao achar as equações paramétricas das retas.

Para achar r_1 resolvemos o sistema

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \ell_2 - \ell_1 \to \ell_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \ell_2/3 \to \ell_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\ell_1 + 2\ell_2 \to \ell_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \end{array}\right)$$

Portanto o sistema equivalente é

$$\begin{cases} x - z = 1/3 \\ y - z = -1/3 \end{cases} .$$

A reta r_1 é solução deste sistema e, portanto fica determinada por

$$r_1 = \begin{cases} x &= 1/3+t \\ y &= -1/3+t \\ z &= t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Daqui, podemos concluir que a reta r_1 passa pelo ponto $P_1 = (1/3, -1/3, 0)$ e tem como vetor diretor a $\vec{V}_1 = (1,1,1)$.
Para achar a reta r_2 definida por

$$r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{2} \quad y = 0$$

fazemos

$$\frac{x-1}{2} = s \qquad \frac{1-z}{2} = s \qquad y = 0;$$

donde

$$r_2 = \begin{cases} x &= 1+2s \\ y &= 0 \\ z &= 1-2s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Portanto, a reta r_2 passa pelo ponto $P_2 = (1,0,1)$ e é paralela a ao vetor $\vec{V}_2 = (2,0,-2)$.
Com esta informação, podemos observar que as retas não são paralelas nem iguais pois $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ são linearmente independentes, de fato

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2e_1 + 4e_2 - 2e_3 \equiv (-2,4,-2) \neq \vec{0}.$$

Utilizando que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1-1/3, 0-(-1/3), 1-0) = (2/3, 1/3, 1),$$

calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(r_1, r_2) &= \frac{|(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{||\vec{V}_1 \times \vec{V}_2||} \\ &= \frac{|(-2,4,-2)\cdot(2/3,1/3,1)|}{||(-2,4,-2)||} \\ &= \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0. \end{aligned}$$

Finalmente, o ângulo entre elas é $\pi/2$ pois

$$\cos(\alpha(r_1, r_2)) = \frac{|\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2|}{||\vec{V}_1||\,||\vec{V}_2||} = \frac{|(1,1,1)\cdot(2,0,-2)|}{\sqrt{24}} = 0.$$

Juntando as informações, podemos responder:

a) As retas são reversas.
b) A distância entre elas é $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
c) O ângulo entre elas é $\pi/2$.

2. As retas r e s são dadas por

$$r := \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \ , \ s := \left\{ x+2 = \frac{y-2}{-1} \ \text{ e } \ z = 1 \right\}$$

a) Encontrar a distância entre as retas r e s e mostrar que as duas retas são reversas.
b) Encontrar a equação paramétrica da reta l, concorrente com ambas retas r e s, e paralela ao vetor $\overrightarrow{V} = (0,3,1)$.

Resolução:
a) Observamos primeiramente que a reta s pode ser escrita em forma paramétrica como

$$s := \begin{cases} x = -2+t \\ y = 2-t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Disto podemos concluir que

- o ponto $P = (1,3,1) \in r$ e que r é paralela a $\vec{V}_r = (2,1,-1)$.
- o ponto $Q = (-2,2,1) \in s$ e que s é paralela a $\vec{V}_s = (1,-1,0)$.

Como

$$(\vec{V}_r \times \vec{V}_s) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,-3) \neq \vec{0}$$

vemos que $\vec{V}_r$ e $\vec{V}_s$ não são paralelos. Utilizando que

$$\overrightarrow{PQ} = (-3,-1,0)$$

e a fórmula da distância, temos que

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{V}_r \times \vec{V}_s)|}{||(\vec{V}_r \times \vec{V}_s)||} = \frac{|3+1|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{4}{\sqrt{11}}.$$

Assim $d(r,s) > 0$ e portanto as retas são reversas.
b) Observamos que se $A \in l \cap r$ então $A = (1+2\alpha, 3+\alpha, 1-\alpha)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e se $B \in l \cap s$ então $B = (-2+\beta, 2-\beta, 1)$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Como

$$\overrightarrow{AB} = (-3-2\alpha+\beta, -1-\beta-\alpha, \alpha)$$

é paralelo a $\overrightarrow{V} = (0,3,1)$ temos que

$$\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

De onde,

$$(0,0,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3-2\alpha+\beta & -1-\beta-\alpha & \alpha \end{vmatrix}$$
$$= (1+\beta+4\alpha, -3-2\alpha+\beta, -9-6\alpha+3\beta).$$

Chegamos assim no sistema

$$\begin{cases} \beta+4\alpha & = & -1 \\ -2\alpha+\beta & = & 3 \\ -6\alpha+3\beta & = & 9 \end{cases} \quad \to \alpha = -2/3,\ \beta = 5/3$$

Portanto

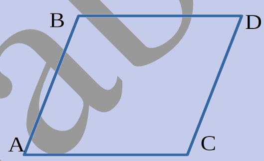
$$A = (-1/3, 7/3, 5/3) \qquad B = (-1/3, 1/3, 1)$$

e

$$l:\ (-1/3, 7/3, 5/3) + \lambda(0,3,1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

29. Planos

1. Considere o desenho



Onde $A = (0,1,-1)$, $B = (0,0,1)$, $D = (2,-1,1)$. Determine

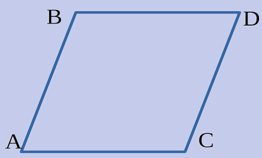
a) o plano π que contém A, B, D,

b) o ponto C, e verifique que $C \in \pi$,

c) a área do triângulo $\widehat{ABC}$ utilizando produto vetorial,

d) a área do triangulo $\widehat{ABC}$ utilizando a fórmula $A = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$ onde a base é dada pelo segmento $\overline{AC}$.

Resolução:
Considere o desenho



Onde $A = (0,1,-1)$, $B = (0,0,1)$, $D = (2,-1,1)$.
Para determinar a equação do plano π que contém A, B, D, precisamos de um ponto e o vetor normal ao plano.
Escolhemos como ponto, por exemplo a B, e calculamos o vetor normal N fazendo o produto vetorial $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{BD}$.
Como

$$\overrightarrow{AB} = (0-0, 0-1, 1-(-1)) = (0,-1,2),$$

e

$$\overrightarrow{BD} = (2-0, -1-0, 1-1) = (2,-1,0).$$

Temos que o vetor normal N, é dado por

$$N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2e_1 + 4e_2 + 2e_3 \equiv (2,4,2).$$

Agora, a equação do plano π é obtida ao fazer

$$N \cdot ((x,y,z) - B) = 0.$$

Calculando

$$(2,4,2) \cdot (x,y,z-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + 4y + 2z - 2 = 0$$

Portanto, a equação do plano é

$$x + 2y + z = 1.$$

Para determinar o ponto $C = (c_1, c_2, c_3)$ observamos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donde

$$(0,-1,2) = (2 - c_1, -1 - c_2, 1 - c_3).$$

Ressolvemos

$$c_1 = 2,\ c_2 = 0,\ c_3 = -1,$$

e obtemos

$$C = (2,0,-1).$$

Observamos que $C \in \pi$ pois satisfaz a equação de π, de fato

$$2 + 2 \cdot 0 + (-1) = 1.$$

Podemos calcular a área do triângulo $\widehat{ABC}$ utilizando produto vetorial.
Observamos que esta, será a metade da área do paralelogramo $ABCD$.
Como a área deste paralelogramo é dado pela norma do produto vetorial entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, utilizamos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\widehat{ABC}) &= \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD}|| \\ &= \frac{1}{2}||(2,4,2)|| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{24} \\ &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Para achar a área do triângulo $\widehat{ABC}$ utilizando a fórmula

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2},$$

onde a base é dada pelo segmento $\overline{AB}$, primeiramente devemos achar a altura h. Observamos que a altura h será a norma do vetor

$$\vec{H} = \overrightarrow{AB} - \text{Proj}_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{AB}),$$

com

$$\text{Proj}_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{AB})$$

denotando a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ na direção de $\overrightarrow{AC}$.
Calculamos $\vec{H}$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= (0,-1,2) - \frac{(2,-1,0)\cdot(0,-1,2)}{||(2,-1,0||^2}(2,-1,0)\\ &= (0,-1,2) - \frac{1}{5}(2,-1,0)\\ &= \left(\frac{-2}{5},\frac{-4}{5},2\right)\end{aligned}$$

Portanto

$$h = \left|\left|\left(\frac{-2}{5},\frac{-4}{5},2\right)\right|\right| = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

a base $b = ||\overrightarrow{AC}|| = ||(2,-1,0)|| = \sqrt{5}$. Donde

$$\text{Area}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{24}{5}} = \sqrt{6}.$$

Juntando o que temos feito, podemos responder:

a) A equação do plano π é

$$x+2y+z=1.$$

b) o ponto $C=(2,0,-1)$

c) a área do triângulo $\widehat{ABC}$ utilizando produto vetorial é $\sqrt{6}$,

d) a área do triangulo $\widehat{ABC}$ utilizando a fórmula $A=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$ onde a base é dada pelo segmento $\overline{AC}$ é $\sqrt{6}$.

2. Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- Os pontos

$$A=(0,1,1),\;\; B=(1,1,1),\;\; C=(3,-3,1)\;\text{ e }\; D=(-5,2,4)\;\text{ de }\mathbb{R}^3$$

são coplanares.
Resolução: (FALSO) Se $A,\ B,\ C$ e D são coplanares, então temos

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = 0$$

Fazendo as contas temos

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,0),\qquad \overrightarrow{AC}=(3,-4,0),\qquad \overrightarrow{AD}=(-5,1,3).$$

Portanto

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 3 & -4 & 0\\ -5 & 1 & 3\end{vmatrix} = (-12,-9,-17)$$

Então

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = (1,0,0)\cdot(-12,-9,-17) = -12 \neq 0$$

e, consequêntemente, os pontos não são coplanares.

- Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores no espaço tais que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, então

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}.$$

Resolução: (VERDADEIRO). Da relação $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$ observamos que

$$\vec{0}=\vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}\ \to\ \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{u}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$$

e

$$\vec{0}=\vec{v}\times(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{w}\ \to\ \vec{v}\times\vec{w}=-\vec{v}\times\vec{u}=\vec{u}\times\vec{v},$$

então

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}.$$

- Os vetores $\vec{u}=(1,-2,1)$, $\vec{v}=(2,1,3)$ e $\vec{w}=(3,1,4)$ são linearmente dependentes.
Resolução: (FALSO) Como

$$\det\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}=1(4-3)-2(-8-1)+3(-6-1)=3\neq 0$$

Então, os vetores são linearmente independentes.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores no espaço então

$$||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2=|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2+||\vec{u}\times\vec{v}||^2$$

Resolução: (VERDADEIRO) Utilizando que

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2=||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2\cos^2(\theta)\qquad ||\vec{u}\times\vec{v}||^2||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2\sin^2(\theta)$$

temos que

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2+||\vec{u}\times\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2.$$

- Para quaisquer dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale $||\vec{u}+\vec{v}||\geq||\vec{u}-\vec{w}||$.
Resolução: (FALSO) Seja $\vec{u}=-\vec{v}=(1,1)$. Então

$$||\vec{u}+\vec{v}||=||(0,0)||=0\qquad ||\vec{u}-\vec{v}||=||(2,2)||=4\sqrt{2}.$$

Então $||\vec{u}+\vec{v}||<||\vec{u}-\vec{w}||$.
- Para quisquer vectores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ vale

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{w}\times\vec{u}).$$

Resolução: (VERDADEIRO) Calculamos

$$\begin{aligned}\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) &= (\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})\\ &= (\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{w}\times\vec{u}).\end{aligned}$$

- Para quaisquer dois vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ vale $||\vec{v}||^2+||\vec{w}||^2-||\vec{v}-\vec{w}||^2=2<\vec{v},\vec{w}>$.
Resolução: (VERDADEIRO) Calculamos

$$\begin{aligned}||\vec{v}-\vec{w}||^2 &= <\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w}>\\ &= ||\vec{v}||^2+||\vec{w}||^2-2<\vec{u},\vec{v}>.\end{aligned}$$

- Para quaisquer três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ em $\mathbb{R}^3$ vale

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}.$$

Resolução: (FALSO) Sejam $\vec{u}=\vec{e}_1$, $\vec{v}=\vec{w}=\vec{e}_2$
Então

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{e}_1\times(\vec{e}_2\times\vec{e}_2) = \vec{e}_1\times\vec{0} = \vec{0}$$

No entanto ,

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \neq \vec{0}.$$

- Para quaisquer três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$ vale $\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{w})=\vec{0}$.
Resolução: (VERDADEIRO) De fato

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w} \;\rightarrow\; \vec{u}\times\vec{v}-\vec{u}\times\vec{w}=\vec{0} \;\rightarrow\; \vec{u}\times(\vec{v}-\vec{w})=\vec{0}.$$

3. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
- A reta r que contém o ponto $P=(1,2,0)$ e tem como vetor diretor $\vec{v}=(2,1,2)$ é perpendicular a reta de equação

$$s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Resolução: (FALSO) O vetor diretor da reta s é dado por $\vec{w}=(-1,2,-1)$, portanto

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (2,1,2)\cdot(-1,2,-1) = -4+2 = -2 \neq 0$$

portanto não são perpendiculares.
- A reta

$$r: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \qquad\qquad t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$$

é perpendicular ao plano $\pi: 4x-2y-4z+3=0$.
Resolução: (VERDADEIRO) O vetor diretor da reta é dado por $\vec{u}=(2,-1,-2)$ e o vetor normal do plano é $\vec{\eta}=(4,-2,-4)=2\vec{u}$. Como os vetores são paralelos e, neste caso, uma reta e um plano se intersectam num ponto. O plano e a reta são perpendiculares pois $2\vec{u}=\vec{\eta}$.
- Os pontos $A=(4,3,1)$ e $B=(1,-1,2)$ são equidistantes do plano $\pi: 3x+4y-z=10$.
Resolução: (VERDADEIRO) O plano passa pelo ponto $P=(0,0,-10)$ e tem por vetor normal $\vec{\eta}=(3,4,-1)$. Utilizando a fórmula

$$\begin{aligned} d(A,\pi) &= \frac{|\overline{AP}\cdot\vec{\eta}|}{||\vec{\eta}||} \\ &= \frac{|(-4,-3,-11)\cdot(3,4,-1)}{\sqrt{26}} \\ &= \frac{13}{\sqrt{26}}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(B,\pi) &= \frac{|\overline{BP}\cdot\vec{\eta}|}{||\vec{\eta}||} \\ &= \frac{|(-1,1,-12)\cdot(3,4,-1)|}{\sqrt{26}} \\ &= \frac{13}{\sqrt{26}}. \end{aligned}$$

4. Considere a reta r_1 que passa por $Q=(0,0,1)$ e tem $\vec{v}=(1,2,-1)$ como vetor diretor, assim como a reta r_2 dada por

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z.$$

(a) Encontre os pontos de $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ que satisfazem $d(P_1,P_2)=d(r_1,r_2)$.
(b) Encontre as projeções ortogonais da origem em r_1 e r_2. (A projeção ortogonal de um ponto P em uma reta r é a interseção de r com a reta S que contém P e intersecta r ortogonalmente.)
(c) Encontre equações lineares dos planos π_1 e π_2 que contém r_1 e r_2, respectivamente, e satisfazem $d(\pi_1,\pi_2)=d(r_1,r_2)$.

Resolução:
Toda reta r é determinada por um ponto $P=(x_0,y_0,z_0)$ e um vetor diretor $\vec{V}=(v_1,v_2,v_3)$. Neste caso, a equação para métrica da reta é dada por

$$r:\begin{cases} x &= x_0+tv_1\\ y &= y_0+tv_2\\ z &= z_0+tv_3\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}\quad .$$

Por outro lado, se temos a forma paramétrica da reta como acima, determinamos o ponto P na reta e o vetor diretor $\vec{V}$ da mesma simplesmente ao fazer $P=(x_0,y_0,z_0)$ e $\vec{V}=(v_1,v_2,v_3)$.
Considere a reta r_1 que passa por $Q=(0,0,1)$ e tem $\vec{v}=(1,2,-1)$ como vetor diretor. Então, sua equação paramétricaé

$$r_1:\begin{cases} x &= \lambda\\ y &= 2\lambda\\ z &= 1-\lambda\end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R} \qquad Q_1=(0,0,1)\quad \vec{v}_1=(1,2,-1)$$

A reta r_2 dada por

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z.$$

para chegar na sua equação paramétrica fazemos

$$\frac{x+1}{3}=\alpha \qquad \frac{y-1}{2}=\alpha \qquad z=\alpha.$$

para todo $\alpha\in\mathbb{R}$. Assim obtemos,

$$r_2:\begin{cases} x &= -1+3\alpha\\ y &= 1+2\alpha\\ z &= \alpha\end{cases} \qquad \alpha\in\mathbb{R} \qquad Q_2=(-1,1,0)\quad \vec{v}_2=(3,2,1)$$

Vamos achar os pontos de $P\in r_1$ e $Q\in r_2$ que satisfazem $d(P,Q)=d(r_1,r_2)$. Então, das equações paramétricas acima, estes pontos devem ser tais que,

$$P=(\lambda,2\lambda,1-\lambda) \qquad \text{para algum } \lambda\in\mathbb{R}$$

$$Q=(-1+3\alpha,1+2\alpha,\alpha) \qquad \text{para algum } \alpha\in\mathbb{R}$$

e, como realizam a distância entre as retas, o segmento que os une deve ser perpendicular a r_1 e r_2 simultáneamente. Isto quer dizer que

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_1=0 \qquad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_2=0$$

para

$$\overrightarrow{PQ}=(-1+3\alpha-\lambda,1+2\alpha-2\lambda,\alpha-1+\lambda)$$

Calculamos

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_1 = 0 \;\Rightarrow\; -1+3\alpha-\lambda+2(1+2\alpha-2\lambda)-(\alpha-1+\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\; 1+3\alpha = 3\lambda$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_2 = 0 \;\Rightarrow\; 3(-1+3\alpha-\lambda)+2(1+2\alpha-2\lambda)+(\alpha-1+\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\; -1+7\alpha = 3\lambda$$

e chegamos no sistema

$$\begin{cases} 3\alpha-3\lambda &= -1 \\ 7\alpha-3\lambda &= 1 \end{cases},$$

de onde obtemos $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{5}{6}$. Substituindo na definição de P e Q vemos que

$$P = \left(\frac{5}{6},\frac{5}{3},\frac{1}{6}\right) \qquad Q = \left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente, os pontos P_1 e P_2 que fazem as projeções ortogonais da origem sobre as retas r_1 e r_2 respectivamente devem satisfazer as seguintes equações:

$$\overrightarrow{Q_1P_1} = Proj_{\vec{v}_1}(\overrightarrow{Q_1O}) \qquad \overrightarrow{Q_2P_2} = Proj_{\vec{v}_2}(\overrightarrow{Q_2O}).$$

Aqui

$$Proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\right)\vec{v},$$

denota a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$.
Se $P_1 = (a,b,c)$

$$\begin{aligned}(a,b,c-1) &= \frac{(1,2,-1)\cdot(0,0,-1)}{||(1,2,-1)||^2}(1,2,-1)\\ &= \frac{1}{6}(1,2,-1)\end{aligned}$$

Portanto $P_1 = (\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{5}{6})$
Se $P_2 = (d,e,f)$

$$\begin{aligned}(d+1,e-1,f) &= \frac{(3,2,1)\cdot(-1,1,0)}{||(3,2,1)||^2}(3,2,1)\\ &= -\frac{1}{14}(3,2,1)\end{aligned}$$

Portanto $P_2 = (-\frac{17}{14},\frac{12}{14},-\frac{1}{14})$
Para encontrar as equações lineares dos planos π_1 e π_2 que contém r_1 e r_2, respectivamente, e satisfazem

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(r_1,r_2)$$

temos que primeiramente achar o vetor normal deste plano,

$$\vec{\eta} = \vec{v}_1\times\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4,-4,-4)$$

e depois utilizamos a fórmula para $P = (x_0,y_0,z_0)$ um ponto na reta correspondente e $X = (x,y,z)$.

$$\vec{\eta}\cdot\overrightarrow{PX} = 0 \;\Rightarrow \eta\cdot(x,y,z) = \eta\cdot(x_0,y_0,z_0)$$

Assim, a equação do plano π_1 é a equação do plano com vetor normal $\vec{\eta}$ que passa por Q_1, isto é

$$4x-4y-4z=-4=\rightarrow\ \pi_1: x-y-z=-1$$

A equação do plano π_2 é a equação do plano com vetor normal $\vec{\eta}$ que passa por Q_2, isto é

$$4x-4y-4z=-4-4+0=-8\ \rightarrow\ \pi_2: x-y-z=-2.$$

Juntando as partes podemos responder:

(a) Os pontos de $P\in r_1$ e $Q\in r_2$ que satisfazem $d(P,Q)=d(r_1,r_2)$ são

$$P=\left(\frac{5}{6},\frac{5}{3},\frac{1}{6}\right)\qquad Q=\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$$

(b) As projeções ortogonais da origem em r_1 e r_2 são

$$P_1=(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{5}{6})\qquad P_2=(-\frac{17}{14},\frac{12}{14},-\frac{1}{14})$$

(c) As equações lineares dos planos π_1 e π_2 que contém r_1 e r_2, respectivamente, e satisfazem $d(\pi_1,\pi_2)=d(r_1,r_2)$ são

$$\pi_1: x-y-z=-1\qquad \pi_2: x-y-z=-2.$$

5. Determine se os seguintes pontos do $\mathbb{R}^3$ são coplanares:

$$P_1=(1,0,1),\quad P_2=(2,1,3),\quad P_3=(1,1,1),\quad P_4=(2,2,3).$$

Resolução:

Para determinar se quatro pontos são coplanares devemos ver se eles estão no mesmo plano ou não. A forma mais simples de provar isto é fixar um ponto, por exemplo P_1, e verificar que os vetores

$$\{\overrightarrow{P_1P_2}=(1,1,2),\ \overrightarrow{P_1P_3}=(0,1,0),\ \overrightarrow{P_1P_4}=(1,2,2))\}$$

são linearmente dependentes. Mas isto é claro pois

$$\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{P_1P_4}$$

de fato:

$$(1,1,2)+(0,1,0)=(1,2,2).$$

Outra forma de mostrar isto, é provar que os pontos devem pertencer ao plano com normal η, dado por exemplo por

$$\vec{\eta}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2e_1+0e_2+e_3=(-2,0,1),$$

e que passa pelo ponto $P_1=(1,0,1)$. Isto é, o plano de equação

$$\vec{\eta}\cdot\overrightarrow{P_1X}=0\ \Rightarrow\ (-2,0,1)\cdot(x-1,y,z-1)=0.$$

Fazendo as contas obtemos:

$$-2(x-1)+z-1=0\ \Rightarrow\ 2x-z=1.$$

Claramente,

$$P_1=(1,0,1),\quad P_2=(2,1,3),\quad P_3=(1,1,1),\quad P_4=(2,2,3),$$

satisfazem essa equação e portanto estão no plano. Portanto os pontos são coplanares.

6. (a) Encontre equações paramétricas assim como uma equação linear que descrevam o plano contendo os pontos

$$P_1 = (1,0,0), \quad P_2 = (1,2,-1) \quad \text{e} \quad P_3 = (0,-1,2).$$

(b) Encontre a interseção do plano do item (a) com a reta determinada por

$$x + 2z = 1, \quad y = 2.$$

(c) Determine o cosseno do ângulo formado pela reta e o plano dos itens anteriores.

Resolução:
Para determinar as equações paramétricas de um plano, precisamos achar dois vetores paralelos ao plano $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, e um ponto no plano $P = (x_0, y_0, z_0)$. Desta forma a equação fica:

$$\begin{cases} x &= x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y &= y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z &= z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Neste caso particular, temos somente os pontos no plano

$$P_1 = (1,0,0), \quad P_2 = (1,2,-1) \quad \text{e} \quad P_3 = (0,-1,2),$$

e precisamos construir os vetores paralelos ao plano. Isto pode ser fácilmente feito ao fixar um ponto, por exemplo $P_1 = (1,0,0)$ e fazer

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (0,2,-1) \qquad \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (-1,-1,2)$$

Observamos que o vetor

$$\vec{\eta} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3e_1 + e_2 + 2e_3 = (3,1,2)$$

é normal ao plano que estamos construindo.
Então as equações paramétricas do plano π que contém os pontos são

$$\pi : \begin{cases} x &= 1 - \beta \\ y &= 2\alpha - \beta \\ z &= -\alpha + 2\beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

A equação linear fica determinada por

$$\vec{\eta} \cdot \overrightarrow{P_1X} = 0$$

para $X = (x,y,z)$. Calculando

$$\pi : (3,1,2) \cdot (x-1,y,z) = 0 \;\Rightarrow\; 3x + y + 2z = 3.$$

Para determinar a interseção do plano π acima com a reta r dada por

$$r: \; x + 2z = 1, \quad y = 2.$$

Construimos um sistema juntando as equações da reta à equação do plano. Isto é,

$$\begin{cases} x + 2z &= 1 \\ y &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 3 \end{cases}$$

Fazendo manipulações algébricas no sistema, obtemos as equivalências

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ y & = & 2 \\ 3x+2z & = & 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 2 \\ 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Portanto a interseção da reta com o plano é dada pelo ponto

$$P = (0, 2, 1/2).$$

Observamos que o cosseno do ângulo θ formado pela reta r e o plano π é tal que $\frac{\pi}{2} - \theta = \gamma$ com γ o ângulo formado por $\vec{\eta}$, o vetor normal ao plano, e o vetor diretor da reta $\vec{v}$

$$\cos(\theta) = \sin(\gamma) = \frac{||\vec{\eta} \times \vec{v}||}{||\vec{\eta}||\ ||\vec{v}||}$$

Portanto, devemos achar o vetor diretor da reta r. Para isto, lembramos que a reta é determinada por

$$x + 2z = 1, \quad y = 2,$$

de onde, a equação vetorial da reta é

$$r: \ (1-2z, 2, z)\ z \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ z(-2, 0, 1) + (1, 2, 0)\ z \in \mathbb{R}.$$

Assim, o vetor diretor é $\vec{v} = (-2, 0, 1)$.
Calculamos

$$\vec{\eta} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right| = e_1 - 7e_2 + 2e_3 \equiv (1, -7, 2)$$

portanto

$$\cos(\theta) = \frac{||\vec{\eta} \times \vec{v}||}{||\vec{\eta}||\ ||\vec{v}||} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{14}\ \sqrt{5}}$$

Agora, podemos responder:

1) A equação paramétrica do plano π que contém os pontos dados é

$$\pi : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1-\beta \\ y & = & 2\alpha - \beta \\ z & = & -\alpha + 2\beta \end{array} \right. \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

2) A interseção da reta com o plano é dada pelo ponto

$$P = (0, 2, 1/2).$$

3)

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{14}\ \sqrt{5}}$$

7. Encontrar a equação do plano π que é perpendicular a cada um dos planos

$$\alpha : x - y - 2z = 0 \qquad\qquad \beta : 2x + y - 4z - 5 = 0$$

e contém o ponto $A = (4, 0, -2)$.
Resolução:

Para encontrar a equação do plano π devemos encontrar um ponto que pertence ao plano, que neste caso pode ser o ponto A, e um vetor normal $\overrightarrow{N}$. Logo, a equação do plano é obtida ao fazer

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$$

para $X = (x,y,z)$, ou equivalentemente, se $\overrightarrow{N} = (n_1,n_2,n_3)$,

$$(n_1,n_2,n_3)\cdot(x-4,y-0,z-(-2)) = 0.$$

Assim, para poder aplicar a formula, só nos resta achar $\overrightarrow{N}$.
Para obter $\overrightarrow{N}$, utilizamos que o plano deve ser perpendicular a cada um dos planos

$$\alpha: x-y-2z=0 \qquad\qquad \beta: 2x+y-4z-5=0.$$

Das equações, concluimos que os vetores normais destes planos são $\overrightarrow{N}_\alpha = (1,-1,-2)$ e $\overrightarrow{N}_\beta = (2,1,-4)$, pois as entradas do vetor normal são os números que acompanham as variáveis da equação.
Como π é perpendicular a α e β simultáneamente, temos que $\overrightarrow{N}$ é perpendicular a $\overrightarrow{N}_\alpha$ e $\overrightarrow{N}_\beta$ simultáneamente. Então $\overrightarrow{N}$ deve ser paralelo a

$$N_\alpha \times N_\beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (6,0,3).$$

Escolhemos $\overrightarrow{N} = (6,0,3)$ e calculamos

$$\begin{aligned} \pi:\ (6,0,3)\cdot(x-4,y-0,z-(-2)) = 0 &\Rightarrow 6x+3z = 18 \\ \equiv \quad 2x+z = 6. \end{aligned}$$

A equação do plano π é

$$\pi:\ 2x+z=6.$$

8. As retas r e l são dadas por:

$$r = \begin{cases} x=0 \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad\qquad l = \begin{cases} x-4=z-1 \\ y=3. \end{cases}$$

a) Mostrar que r e l são reversas.
b) Encontrar os planos π e α tais que: $r\subset\pi$, $l\subset\alpha$ e π é paralelo a α.
c) Encontrar a distância entre os planos π e α do item anterior.
d) Encontrar os pontos P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

Resolução:
Toda reta é caracterizada por um ponto P sobre ela e o vetor diretor $\overrightarrow{V}$ ao qual ela é paralela.
A forma mais fácil de obter P e $\overrightarrow{V}$ é colocar a reta na forma vetorial ou na paramétrica, pois, se por exemplo a equação paramétrica da reta é

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

então $P = (x_0,y_0,z_0)$ e $\overrightarrow{V} = (v_1,v_2,v_3)$.
Análogamente, se a equação vetorial da reta é

$$(x_0,y_0,z_0) + t(v_1,v_2,v_3),$$

então $P=(x_0,y_0,z_0)$ e $\overrightarrow{V}=(v_1,v_2,v_3)$
Para conseguir trabalhar com as retas r e l, vamos procurar, de cada um delas, esta informação
Considere as retas r e l dadas por:

$$r=\begin{cases} x=0 \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R} \qquad\qquad l=\begin{cases} x-4=z-1 \\ y=3. \end{cases}$$

Observamos r está na forma paramétrica, no entanto l não. Para escrever l em forma paramétrica fazemos

$$x-4=s=z-1 \ \Rightarrow x-3=z$$

$$\Rightarrow\ x=3+s, \quad z=s.$$

Então

$$l=\begin{cases} x=3+s \\ y=3 \\ z=s. \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Assim, obtemos que r passa pelo ponto $P_1=(0,2,1)$ e tem como vetor diretor $\overrightarrow{V}=(0,-1,-1)$ e que l passa por $P_2=(3,3,0)$ e tem como vetor diretor a $\overrightarrow{W}=(1,0,1))$.
Claramente, $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$ não são paralelos pois

$$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{W}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-1,1)\neq(0,0,0).$$

Calculamos a distância entre r e l utilizando os pontos $P_1=(0,2,1)\in r$ e $P_2=(3,3,0)\in l$. Calculando,

$$d(r,l)=\frac{|<\overrightarrow{P_1P_2},(\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{W})>|}{||\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{W}||}$$

$$=\frac{|<(3,1,-1),(-1,-1,1)>|}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Um plano fica determinado por um ponto $P=(a,b,c)$ sobre ele e um vetor normal $\overrightarrow{N}=(n_1,n_2,n_3)$. Com esta informação, podemos obter a equação do plano utilizando a fórmula:

$$\overrightarrow{N}(\overrightarrow{PX})=0$$

para $X=(x,y,z)$, ou equivalentemente,

$$\overrightarrow{N}\cdot((x,y,z)-(a,b,c))=0.$$

Os planos π e α tais que: $r\subset\pi$, $l\subset\alpha$ e π é paralelo a α terão como vetor normal, um vetor que é perpendicular a $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$ simultáneamente.
Então, utilizamos como vetor normal a

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{W}.$$

Se π é o plano que contem r, então ele passa por P_1 e tem como vetor normal $\overrightarrow{N}$, então

$$\pi:\ (-1,-1,1)((x,y,z)-(0,2,1))=0\ \Rightarrow\ -x-y+z=-1$$

Se α é o plano que contem l, então passa por P_2 e tem como vetor normal $\overrightarrow{N}$, isto é,

$$\alpha: \ (-1,-1,1)((x,y,z)-(3,3,0)) = 0 \ \Rightarrow \ -x-y+z = -6$$

Claramente, como π e α são paralelos temos

$$d(\pi,\alpha) = d(r,l) = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Para achar os pontos P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l observamos que como $P \in r$ existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P = (0, 2-t_0, 1-t_0)$$

e como $Q \in l$ existe um $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q = (s_0+3, 3, s_0).$$

Mais ainda, como estes pontos são os únicos que realizam a distância, então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ tem que ser perpendicular as retas r e l.
Portanto, se

$$\overrightarrow{PQ} = (s_0+3, 1+t_0, s_0+t_0-1)$$

temos

$$\begin{cases} <\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{V}> &= 0 \\ <\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{W}> &= 0, \end{cases}$$

isto é

$$0 = <\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{V}> = <(s_0+3, 1+t_0, s_0+t_0-1),(0,-1,-1)> = -(s_0+2t_0)$$

$$0 = <\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{W}> = <(s_0+3, 1+t_0, s_0+t_0-1),(1,0,1)> = 2s_0+t_0+2.$$

Obtemos assim um sistema

$$\begin{cases} s_0+2t_0 &= 0 \\ 2s_0+t_0 &= -2 \end{cases}.$$

Ressolvendo,

$$t_0 = 2/3 \qquad s_0 = -4/3.$$

Portanto

$$P = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad Q = \left(\frac{5}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right).$$

Então:

a) Provamos que $d(r,l) = \frac{5}{\sqrt{3}} > 0$ e portanto as retas são reversas.

b) Os planos π e α tais que: $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$ e π é paralelo a α são

$$\pi: \ x-y+z = -1 \qquad \alpha: \ x-y+z = -6$$

c) $d(\pi,\alpha) = d(r,l) = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

d)

$$P = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad Q = \left(\frac{5}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right).$$

9. Dados o plano

$$\pi : 2x+2y-z=6$$

e o ponto $P:(2,2,-4)$, encontre
   (a) a distância de P a π.
   (b) a equação da reta que passa por P e é ortogonal a π.
   (c) o ponto Q em π de forma que a distância de P a Q seja igual a distândica de P a π

Resolução:
Começamos determinando um ponto no plano e um vetor normal a este, pois é a informação que precissamos para fazer os cálculos.
Se $\pi:\ 2x+2y-z=6$ então as entradas do vetor normal são os números as que acompanham as variáveis $x,\ y$ e z, isto é,

$$\overrightarrow{N}_\pi=(2,2,-1).$$

Como ponto P_π sobre o plano, escolhemos qualquer um que satisfaça a equação, por exemplo $P_\pi=(3,0,0)$.
Da fórmula de distancia.

$$d(P,\pi)=\frac{|\overrightarrow{PP_\pi}\cdot\overrightarrow{N}|}{||\overrightarrow{N}||}=\frac{|(1,-2,4)\cdot(2,2,-1))|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{6}{3}=2$$

Toda reta é caracterizada por um ponto P sobre ela e um vetor diretor $\overrightarrow{V}$.
A reta r que passa por P e é ortogonal a π terá como vetor diretor o vetor normal ao plano. Então

$$\begin{cases}\overrightarrow{V}_r=\overrightarrow{N}_\pi=(2,2,-1)\\ P_r=P=(2,2,-4)\end{cases}\Rightarrow\ r=(2,2,-4)+t(2,2,-1)\qquad t\in\mathbb{R}$$

Sabemos da teoria, que a interseção de uma reta com um plano pode ser a propria reta, um ponto ou vazia.
De fato, se o vetor diretor da reta $\overrightarrow{V}_r$ for paralelo ao plano, e um ponto da reta estiver no plano, isto é,

$$\overrightarrow{N}_\pi\cdot\overrightarrow{V}_r=0$$

então, a reta inteira estará contida no plano.
Caso contrário, isto é,

$$\overrightarrow{N}_\pi\cdot\overrightarrow{V}_r\neq 0$$

a interseção será um único ponto.
Neste caso, $r\cap\pi$ tem que ser um ponto Q pois o vetor diretor da reta é perpendicular ao plano.
Como Q está na reta, existe um t_0 tal que

$$Q=(2+2t_0,2+2t_0,-4-t_0).$$

E como Q está no plano, deve satisfazer a equação deste, isto é,

$$2(2+2t_0)+2(2+2t_0)-(-4-t_0)=6\ \Rightarrow$$

$$9t_0=6-12=-6\ \Rightarrow\ t_0=-2/3$$

Então

$$Q=\left(2-\frac{4}{3},2-\frac{4}{3},-4+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-10}{3}\right)$$

Juntando as informações, obtemos:
   (a) a distância de P a π é de 2 unidades.

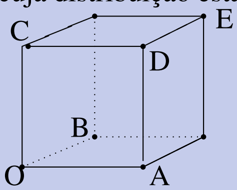
(b) a equação da reta que passa por P e é ortogonal a π é

$$r = (2,2,-4) + t(2,2,-1) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) o ponto Q em π de forma que a distância de P a Q é

$$Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-10}{3}\right)$$

10. Dados quatro vértices, $O = (0,0,0)$, $A = (-2,-1,1)$, $B = (1,1,1)$, e $C = (5,1,-1)$ de um paralelepípedo, cuja distribuição está esquematizada no desenho abaixo.



(a figura não é um cubo!)

(a) Encontrar a equação do plano que contém os vértices 0, A, e B.
(b) Encontrar a equação do plano que contém os vértices C, D, e E.
(c) Encontrar a equação da reta que passa pelos vértices C e D.
(d) Encontrar as coordenadas dos pontos D e E.

Resolução:
Primeiramente observamos que, por ser um paralelepípedo, temos

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA} = (-2,-1,1) \qquad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OB} = (1,1,1).$$

Então, o plano π que contém O, A, B está caracterizado por

$$\begin{cases} \overrightarrow{N}_\pi = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \\ P_\pi = O = (0,0,0) \end{cases} \Rightarrow N_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,3,-1).$$

Assim, equação do plano π é dada por

$$\overrightarrow{N}_\pi \cdot ((x,y,z) - (0,0,0)) = 0 \Rightarrow -2x + 3y - z = 0.$$

O plano α, que contém C, D, E, é paralelo a π e, portanto, está caracterizado por

$$\begin{cases} \overrightarrow{N}_\alpha = \overrightarrow{N}_\pi = (-2,3,-1) \\ P_\alpha = C = (5,1,-1) \end{cases}$$

A equação do plano α é dada por

$$\overrightarrow{N}_\alpha((x,y,z) - (5,1,-1)) = 0 \Rightarrow$$

$$-2x + 3y - z + 2(5) - 3(1) - (-1)(-1) = 0.$$

Então

$$\alpha: \ -2x + 3y - z = -6.$$

Para determinar a equação de uma reta precissamos um ponto sobre ela e o vetor diretor da mesma.
A reta r que passa por C e D é paralela a reta que passa por O e A. Escolhemos então como ponto P_r sobre a reta e vetor diretor $\overrightarrow{V}_r$ a

$$\begin{cases} \overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{OA} = (-2,-1,1) \\ P_r = C = (5,1,-1) \end{cases}$$

Portanto, a equação vetorial da reta é

$$r = \ (5,1,-1)+t(-2,-1,1)\ t \in \mathbb{R}$$

Finalmente, como

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA} = (-2,-1,1)$$

e $C = (5,1,-1)$ temos que

$$D = (-2,-1,1)+(5,1,-1) = (3,0,0)$$

Por outro lado

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OB} = (1,1,1),$$

donde

$$E = (1,1,1)+(3,0,0) = (4,1,1).$$

Juntando o feito, podemos responder:

(a) A equação do plano que contém os vértices 0, A, e B é

$$\pi : \ -2x+3y-z = 0.$$

(b) A equação do plano que contém os vértices C, D, e E é

$$\alpha : \ -2x+3y-z = -6.$$

(c) A equação da reta que passa pelos vértices C e D é

$$r = \ (5,1,-1)+t(-2,-1,1)\ t \in \mathbb{R}.$$

(d) As coordenadas dos pontos D e E são

$$D = (3,0,0) \qquad E = (4,1,1).$$

11. Encontrar equações paramétricas assim como uma equação linear que descreva os planos π_1 e π_2 que contém a reta r definida por

$$r := \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

e tais que $(1,0,0) \in \pi_1$ e $(0,0,0) \in \pi_2$.
b) Encontre o ângulo entre os dois planos π_1 e π_2.

Resolução:
a) Sabemos que cada plano contém a reta

$$r := \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

que passa pelo ponto $P = (1,-1,0)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{V} = (1,1,2)$.
Então, para achar a equação de cada plano, temos que procurar um ponto Q em cada um deles, que não

esteja na reta e, com ele construir o vetor $\overrightarrow{PQ}$. Logo, a quação paramétrica de cada plano virá dada pela equação

$$X = P + \alpha\overrightarrow{V} + \beta\overrightarrow{PQ}, \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

onde $X = (x,y,z)$.
Para a equação linear, primeiro achamos o vetor normal ao plano fazendo

$$\eta = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{V}$$

e obtemos a equação do plano ao fazer

$$\eta \cdot \vec{PX} = 0.$$

Fazemos então cada caso:

- **π_1:** Neste caso $Q_1 = (1,0,0)$ donde $\overrightarrow{PQ_1} = (0,1,0)$ e portanto

$$\pi_1 : \begin{cases} x &= & 1+\alpha \\ y &= & -1+\alpha+\beta \\ z &= & 2\alpha \end{cases}$$

  Calculamos

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,-1)$$

  portanto

$$(2,0,-1)\cdot(x-1,y+1,z) = 0 \ \Rightarrow 2(x-1) - z = 0 \ \Rightarrow 2x - z = 2$$

- **π_2:** Neste caso $Q_2 = (0,0,0)$ donde $\overrightarrow{PQ_2} = (-1,1,0)$ e portanto

$$\pi_2 : \begin{cases} x &= & 1+\alpha-\beta \\ y &= & -1+\alpha+\beta \\ z &= & 2\alpha \end{cases}$$

Calculamos

$$\eta_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2,2,-2)$$

portanto

$$(2,2,-2)\cdot(x-1,y+1,z) = 0 \ \Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1) - 2z = 0$$

$$\Rightarrow x + y - z = 0$$

b) O ângulo θ entre os dois planos deve satisfazer a equação

$$\cos(\theta) = \frac{|\eta_1\cdot\eta_2|}{||\eta_1||\ ||\eta_2||} = \frac{|(2,0,-1)\cdot(2,2,-2)|}{||\sqrt{4+1}||\ ||\sqrt{4+4+4}||} = \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{12}}.$$

12. As retas r e s são dadas por

$$r := \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases}, \quad s := \begin{cases} x = 2 \\ y = 2+p \quad p\in\mathbb{R} \\ z = -p \end{cases}$$

a) Encontrar a distância entre as retas r e s e mostrar que as duas retas são reversas.
b) Encontrar as equações dos planos paralelos π_1 e π_2, tais que r está contida em π_1 e s está contida em π_2.
c) Encontrar o ângulo entre as retas r e s.

Resolução:
Primeiramente observamos que a reta r passa pelo ponto $P = (1,2,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (-1,3,1)$ e que a reta s passa pelo ponto $Q = (2,2,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$. Calculamos

$$\overrightarrow{PQ} = (1,0,0)$$

e

$$\vec{\eta} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-4,-1,-1)$$

a) A distância entre as retas é dada por

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{\eta}|}{||\vec{\eta}||} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

portanto as retas são reversas.

b) As equações dos planos π_1 e π_2 são

$$\pi_1 : \ \vec{\eta} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \ \Rightarrow \ (-4,-1,-1)\cdot(x-1, y-2, z) = 0$$

$$\Rightarrow \ \pi_1 : \ 4x + y + z = 6$$

e

$$\pi_2 : \ \vec{\eta} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \ \Rightarrow \ (-4,-1,-1)\cdot(x-2, y-2, z) = 0$$

$$\Rightarrow \ \pi_2 : \ 4x + y + z = 10$$

c) O ângulo θ entre as duas retas satisfaz

$$\cos(\theta) = \left| \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_1||\ ||\vec{v}_2||} \right| = \frac{2}{\sqrt{22}}.$$

13. Para cada um dos casos abaixo encontre equações paramétricas e equações simétricas para a reta r:
   a) A reta r passa pelos pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (2,3,1)$.
   b) A reta r tem vetor diretor $v = (1,1,-1)$ e passa pelo ponto $P_0 = (0,1,7)$.
   c) A reta r passa pelo ponto $P_0 = (1,-1,1)$ e é paralela à reta $l : x-1 = y = \frac{2z-2}{3}$.
   d) A reta r é perpendicular ao plano $2x - y + 2z = 4$ e passa pelo ponto de interseção das retas l_1 e l_2 dadas por:

$$l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad l_2 : \begin{cases} x = -1+2s \\ y = 1+s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

   e) A reta r é a interseção dos planos $x + y + 2z = 1$ e $2x - y + z = 2$.

Resolução:

a) A reta que passa por $A = (1,0,1)$ e $B = (2,3,1)$ tem vetor diretor $= (1,3,0)$. Então sua equação paramétrica é

$$r = \begin{cases} x = -1+t \\ y = 0+3t \\ z = 1+0t \end{cases} = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases}$$

e sua e equação simétrica é

$$x-1=\frac{y}{3} \qquad z=1$$

b) A reta r que tem vetor diretor $\vec{v}=(1,1,-1)$ e passa por $(0,1,7)$ tem equaçoẽs paramétricas

$$r=\begin{cases} x=0+t \\ y=1+1\cdot t \\ z=7+(-1)\cdot t \end{cases} = \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=7-t \end{cases}$$

e equação simétrica

$$x=y-1=\frac{z-7}{-1}$$

c) A reta r que passa por $P_0=(1,-1,1)$ e é paralela a

$$\ell : x-1=y=\frac{2z-2}{3}=\frac{z-1}{3/2}$$

tem por vetor diretor o mesmo vetor da reta

$$\ell : \vec{v}=(1,1,3/2)$$

então as equações paramétricas são:

$$r=\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=1+\frac{3}{2}t \end{cases}$$

e simétricas são:

$$x-1=y+1=\frac{z-1}{3/2}$$

d) A reta r que é perpendicular ao plano $\pi : 2x-y+2z=4$ e passa pelo ponto de intersecção das retas

$$l_1 : \begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases} ,t\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad l_2 : \begin{cases} x=-1+2s \\ y=1+s \\ z=0 \end{cases} ,s\in\mathbb{R}.$$

por ser perpendicular a π tem por vetor diretor $\vec{v}$ o vetor normal do plano. Então $\vec{v}=(2,-1,2)$. O ponto $P_0=\ell_1$ é tal que

$$\left.\begin{array}{r} t_0=-1+2s_0 \\ 2+t_0=1+s_0 \\ 1+t_0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t_0=-1 \quad \text{e} \quad S_0=0 \quad \Rightarrow \quad P_0=(-1,1,0)$$

Portanto, a equação paramétrica é

$$r=\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1-1\lambda \\ z=0+2\lambda \end{cases} = \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} ,\lambda\in\mathbb{R}$$

e a equação simétrica é

$$\frac{x+1}{2}=1-y=\frac{z}{2}$$

e) Sejam $\pi_1 : x+y+2z=1$ e $\pi_2 : 2x-$ então r é solução do sistema

$$r : \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

Resolvemos pelo método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2\ell_1+\ell_2 \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{\ell_2}{3} \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1-\ell_2 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = 1-z \quad y=-z \quad \Rightarrow \quad S = \{(1-\lambda, -\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = 1-\lambda \\ 2y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ou na forma simétrica} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-1} = z$$

14. Para cada par de retas r e l abaixo encontre $l \cap r$. E nos casos em que a interseção é vazia decida se elas são paralelas ou reversas.

a)

$$r : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{e} \quad l : \begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}.$$

b)

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3} \quad \text{e} \quad l : \frac{x-3}{2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}.$$

c)

$$r : \begin{cases} 3x-y-z=0 \\ 8x-2y-3z=-1 \end{cases} \quad \text{e} \quad l : \begin{cases} x-3y+z=-3 \\ 3x-y-z=-5 \end{cases}.$$

Resolução:

a) Escrevemos as duas retas na forma paramétrica

$$r : \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = -3-\lambda \\ z = -2+3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

para achar a equação paramétrica de ℓ resolvemos o sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3\ell_2+\ell_1 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{\ell_2}{5} \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1+\ell_2 \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = z - 1 \quad x = -z$$

$$\ell : \begin{cases} x = -\alpha \\ 2y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad l \cap r \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 2 + 4\lambda = -\alpha \\ -3 - \lambda = \alpha - 1 \\ -2 + 3\lambda = \alpha \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 0. \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2. \quad \text{Portanto} \quad l \cap r = \{(2, -3, -2)\}$$

b) Escrevemos r e ℓ na forma paramétrica

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - 5\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \ell : \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = -14 + 5\alpha \\ z = 8 - 3\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$l \cap r \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -1 + 2\lambda & = & 3 + 2\alpha \\ -4 - 5\lambda & = & -14 + 5\alpha \\ 2 + 3\lambda & = & 8 - 3\alpha \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \lambda - \alpha & = & 2 \\ \lambda + \alpha & = & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \quad \alpha = 0.$$

Portanto

$$l \cap r = \{(3, -14, 8)\}$$

c) O ponto de interseção deve resolver todas as equações

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z = -1 \\ x - 3y + z = -3 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$$

Então sistema impossível. Portanto ℓ e r são reversas.

15. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação do plano π.
   a) O plano π passa pelo ponto $P = (3, 1, 2)$ e tem vetor normal $N = (1, 2, -3)$.
   b) O plano π passa pelos pontos $A = (0, 0, 2)$, $B = (2, 4, 1)$ e $C = (-2, 3, 3)$
   c) Tem-se que $C = (-5, 1, 2) \in \pi$ e que π é perpendicular à reta que passa pelos pontos $A = (2, 2, -4)$ e $B = (7, -1, 3)$.
   d) O plano π é perpendicular ao plano $x + 3y - z = 7$ e contém os pontos $A = (2, 0, 5)$ e $B = (0, 2, -1)$.
   e) O plano π é perpendicular a cada um dos planos $x - y - 2z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ e contém o ponto $A = (4, 0, -2)$.

Resolução:

a) Substituindo na equação do plano $\overrightarrow{Px} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ para $P = (3, 1, 2)$ e $N = (1, 2, -3)$ temos:

$$(x - 3, y - 1, z - 2) \cdot (1, 2(-3)) = 0$$

$$x - 3 + 2(y - 1) - 3(z - 2) = 0$$

$$x + 2y - 3z = -1$$

b) O plano π que passa por $A=(0,0,2)$, $B=(2,4,1)$ e $C=(-2,3,3)$ tem vetor normal

$$\overrightarrow{N}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(7,0,14)$$

substituindo agora na equação do plano $\overrightarrow{Px}\cdot\overrightarrow{N}=0$ para $P=A$ temos:

$$(7,0,14)\cdot(x,y,z-2)=0$$

$$7x+14z=28 \qquad \Rightarrow \qquad x+2z=4$$

c) Como $\pi\perp r$ temos que um vetor normal a π é o vetor diretor de r. Como r passa por $A=(2,2,-4)$ e $B=(7,-1,3)$ temos $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}=(5,-3,7)$, como π passa por $C=(-5,1,2)$ temos que a equação do plano é

$$\overrightarrow{Cx}\cdot\overrightarrow{N}=0$$

$$\Rightarrow \qquad (x+5,y-1,z-2)\cdot(5,-3,7)=0$$

$$5(x+5)-3(y-1)+7(z-2)=0$$

$$5x-3y+7z=25-3+14=-14$$

$$5x-3y+7z=-14$$

d) O plano π é perpendicular a

$$\pi_2: x+3y-z=7$$

contém os pontos $A=(2,0,5)$ e $B=(0,2,-1)$ como $\pi\perp\pi_2$ temos que $\overrightarrow{N_2}=(1,3,-1)$ é paralelo a π e como $A,B\in\pi$ temos

$$\overrightarrow{AB}\setminus\setminus\pi \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{N_2}\perp\pi$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix}=(-16,8,8)$$

então a equação do plano fica $P=A$

$$(-16,8,8)\cdot(x-2,y,z-5)=0$$

$$-16(x-2)+8y+8(z-5)=0$$

$$-16x+8y+8z=-32+40=8$$

$$-2x+y+z=1$$

e) Como π é perpendicular a

$$\pi_1 : x - y - 2z = 0\text{e} \quad \pi_2 : 2x + y - 4z = 5$$

e contém $A = (4, 0, -2)$ temos que $N_1 = (1, -1, -2)$ e $N_2 = (2, 1, -4)$ são paralelos a π. Então o vetor

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (6, 0, 3)$$

é perpendicular a π e substituindo na equação $\pi : \overrightarrow{Px} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ para $P = A$ temos:

$$(x-4, y, z+2) \cdot (6, 0, 3) = 0$$

$$6(x-4) + 3(z-2) = 0$$

$$2x - 8 + z - 2 = 0$$

$$\pi : 2x + z = 6$$

16. a) Encontre a distância do plano $\pi : 2x + 2y - z = 6$ e o ponto $P = (2, 2, -4)$.
b) Encontre a distância perpendicular entre os planos (paralelos): $4x - 8y - z = 9$ e $2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$.
c) Verifique que a reta $x - 1 = z - 2$ e $y = 3$ é paralela ao plano $x + 2y - z = 3$ e encontre a distância perpendicular entre eles.

Resolução:

a) Dados $\pi : 2x + 2y - z = 6$ e $P = (2, 2, 4)$ observamos que o vetor $\overrightarrow{N} = (2, 2, -1)$ é normal ao plano e que $Q = (0, 0, -6)$ é um ponto no plano. Então, substituindo na fórmula, temos:

$$d(\pi, P) = \frac{|\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{||\overrightarrow{N}||} = \frac{|(2,2,-1) \cdot (-2,-2,-10)|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

b) Dados os planos $\pi_1 : 4x - 8y - z = 9$ e $\pi_2 : 2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$ vemos que $\overrightarrow{N_1} = (4, -8, -1)$ e $\overrightarrow{N_2} = (2, -4, -1/2)$ são os vetores normais a π_1 e π_2 respectivamente. Como $2\overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{N_1}$ e $P_1 = (0, 0, -9) \in \pi$, mas $\pi_1 \notin \pi_2$, pois $9/2 \neq 0$, temos que $\pi_1 \setminus \setminus \pi_2$ e $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$.

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{||\overrightarrow{N_1}||} = \frac{|(4,-8,-1) \cdot (0,0,-1)|}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$$

c)

Dada a reta $\quad r : x - 1z - 2 \quad y = 3 \quad$ e o plano $\quad \pi : x + 2y - z = 3$

vamos mostrar que são paralelos. Para isto devemos ver que o normal ao plano é perpendicular ao vetor diretor da reta. Observamos que

$$\overrightarrow{N_\pi} = (1, 2, -1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{V_r} = (1, 0, 1)$$

Então como

$$\overrightarrow{N_\pi} \cdot \overrightarrow{V_r} = (1, 2, -1) \cdot (1, 0, 1) = 0$$

para calcular a distância considere o ponto $P = (1, 3, 2) \in r$ e $Q = (3, 0, 0) \in \pi$. Então

$$d(r, \pi) = \frac{|\overrightarrow{N_\pi} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{||\overrightarrow{N_\pi}||} = \frac{|(1,2,-1) \cdot (2,-3,2)|}{\sqrt{6}} = \frac{|2-6+2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

17. Determine o valor de x para que os pontos

$$A=(-1,7,1) \quad B=(4,7,4) \quad C=(29,9+x,5) \quad D=(2,9,3)$$

sejam coplanares. **Resolução:**

Para que os pontos

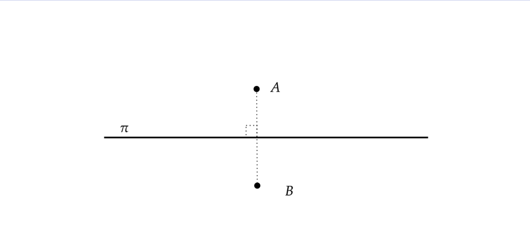
$$A=(-1,7,1) \quad B=(4,7,4) \quad C=(29,9+x,5) \quad D=(2,9,3)$$

sejam coplanares devemos ter, por exemplo, que

$$\begin{aligned} 0=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}) &= \det\begin{pmatrix} 27 & x & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\\ &= 27(-6)-x+2(10)\\ &= -142-x. \end{aligned}$$

Portanto se $x=-142$ os pontos são coplanares.

18. Considere o desenho abaixo

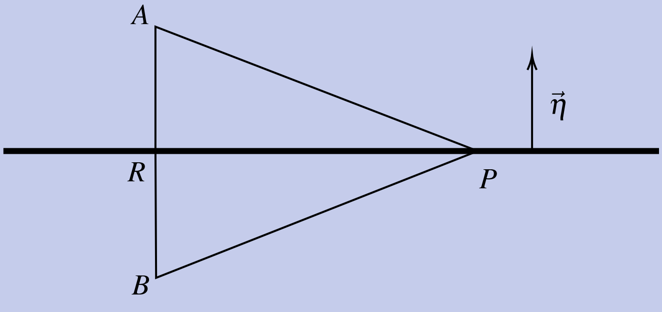


onde π é um plano de equação

$$\pi:\begin{cases} x &= 3+2\alpha+2\beta\\ y &= \alpha\\ z &= -1+\alpha+\beta\end{cases} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

$A=(3,0,4)$ é um ponto e B o ponto simétrico a A em relação ao plano. Determine B.

Resolução:
O ponto $P=(3,0,-1)$ está no plano, então podemos montar a figura



Onde o vetor normal é dado pelo produto vetorial

$$\vec{\eta}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,0,-2).$$

Observamos que, pela configuração, se $\vec{\eta}$ é o vetor normal ao plano e $\overrightarrow{PA} = (0,0,5)$, então

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{AR} \\
&= -2Proj_{\vec{\eta}}\overrightarrow{PA} \\
&= -2\frac{(0,0,5)\cdot(1,0,-2)}{1+5}(1,0,-2) \\
&= 4(1,0,-2) \\
&= (4,0,-8).
\end{aligned}$$

Então

$$B = (4+3,0,-8+4) = (7,0,-4).$$

19. a) Sejam r : a reta $x-1=y=z$ e A,B os pontos $A=(1,1,1)$ e $B=(0,0,1)$. Encontre o ponto de r eqüidistante de A e B.
    b) Dados o plano $x-y+z=1$ e o ponto $P=(1,0,1)$. Encontre o ponto Q que é simétrico a P em relação ao plano dado.

Resolução:

a) Seja $r : x-1=y=z$ e A,B e $A=(1,1,1)$ e $B=(0,0,1)$. Procuramos o ponto $P\in r$ tal que $d(A,P)=d(P,B)$ Escrevemos r na forma paramétrica

$$r = \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Então

$$P = (\lambda_0+1,\lambda_0,\lambda_0)$$

para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

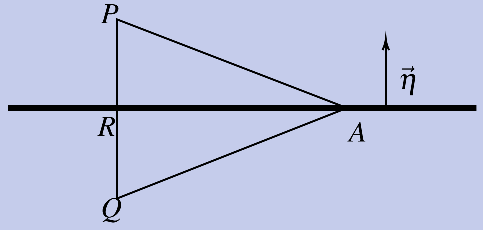
$$d(A,P)^2 = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = \|(\lambda_0+1,\lambda_0,\lambda_0)\|^2 = \lambda_0^2+2\cdot(\lambda_0-1)^2 = 3\cdot\lambda_0^2-4\cdot\lambda_0+2$$

$$d(B,P)^2 = \left\|\overrightarrow{BP}\right\|^2 = \|(\lambda_0+1,\lambda_0,\lambda_0-1)\|^2 = (\lambda_0+1)^2+\lambda_0^2+(\lambda_0-1)^2 = 3\cdot\lambda_0^2+2$$

$$\Rightarrow \quad d(A,P)=d(B,P) \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0=0$$

Então $P=(1,0,0)$

b) Seja $\pi : x-y+z=1$ e $P=(1,0,1)$ temos que achar o ponto Q simétrico em relação ao plano. Graficamente



Onde $A=(1,0,0)\in\pi$ e $\vec{\eta}=(1,-1,1)$ é o vetor normal. Observamos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RQ} \\
\overrightarrow{RQ} &= -\overrightarrow{RP} \\
\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{RP}
\end{aligned}$$

Então

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{RP}$$

Calculamos

$$\overrightarrow{AP} = (0,0,1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{RP} = Proj_{\vec{\eta}}(\overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{3}(1,-1,1).$$

Então

$$\overrightarrow{AQ} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

de onde segue que

$$Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

20. Sejam $P = (a,b,c)$ um ponto no espaço e r a reta

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}.$$

Para cada par, não nulo, de números reais (m,n) considere o plano

$$\pi_{(m,n)} : (m+n)x + (m-2n)y + (2m+n)z = 4m+5n.$$

Mostre que: $P \in r$ se e somente se $P \in \pi_{(m,n)}$, para todo par não nulo (m,n).

Resolução:
Seja $P = (a,b,c)$ e r a reta

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}.$$

dados $(m,n) \in \mathbb{R}^2$. Considere o plano $\pi_{(m,n)} = (m+n)x + (m-2n)y + (2m+n)z = 4m+5n$. Então se

$$P = (x_0, y_0, z_0) \quad \in \quad r \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_0 + y_0 + 2z_0 = 4 \ \ (1) \\ x_0 - 2y_0 + z_0 = 5 \ \ (2) \end{array}$$

Então $m \times (1) + n \times (2)$ é

$$(m+n)x_0 + (m-2n)y_0 + (2m+n)z_0 = 4m+5n \quad \Rightarrow \quad P \in \pi_{(m,n)}$$

Se $P \in \pi_{(m,n)}\ \forall\ (m,n)$. Então $P \in \pi_{(1,0)}$ e $P \in \pi_{(0,1)}$. Logo $P = (x_0, y_0, z_0)$ satisfaz

$$\begin{array}{lll} P \in \pi_{(1,0)} & \Rightarrow & x_0 + y_0 + 2z_0 = 4 \\ P \in \pi_{(0,1)} & \Rightarrow & x_0 - 2y_0 + z_0 = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P \in r$$

21. Dados os dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam de A e B é um plano que passa pelo ponto médio de A e B e é perpendicular à reta que contém A e B.

Resolução:
Seja $P = (x,y,z)$ tal que $d(A,P) = d(B,P)$. Então,

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BP}\right\|^2$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$

Então,

$$-2xx_1-2yy_2-2zz_1+x_1^2+y_1^2+z_1^2=-2x_2-2yy_2-2zz_2+x_2^2+y_2^2+z_2^2$$

$$\pi:2x\cdot(x_2-x_1)+2y\cdot(y_2-y_1)+2z\cdot(z_2-z_1)=(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2)$$

Logo π é um plano com normal

$$N_\pi=(2\cdot(x_2-x_1),2\cdot(y_2-y_1),2\cdot(z_2-z_1))$$

que é um vetor paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$ de fato $N_\pi=2\cdot\overrightarrow{AB}$. Portanto o plano é perpendicular a reta que passa por A e B. Observamos que

$$P=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+2_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

é o ponto médio entre A e B e que $P\in\pi$, de fato,

$$2\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot(x_2-x_1)+2\cdot\left(\frac{y_1+2_2}{2}\right)\cdot(y_2-y_1)+2\cdot\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cdot(z_2-z_1)$$

é igual a

$$(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2)$$

22. Considere as retas r e l dadas por:

$$r:\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & 1+t \end{array}\right. \qquad l:x-2=z+1 \quad y=3.$$

a) Mostre que r e l são reversas.
b) Encontre os planos π e α tais que: $r\subset\pi$, $l\subset\alpha$ e π é paralelo a α.
c) Encontre a distância entre os planos π e α do item anterior.
d) Encontre P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

Resolução:
Considereas retas

$$r:\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & 1+t \end{array}\right. ,\quad t\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \overrightarrow{N_r}=(0,1,1) \\ \\ \overrightarrow{P_r}=(0,2,1) \end{array}$$

$$\ell:\left\{\begin{array}{c} x-2=z+1 \\ y=3 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \overrightarrow{N_\ell}=(1,0,1) \\ \\ \overrightarrow{P_\ell}=(2,3,-1) \end{array}$$

Então $\overrightarrow{P_\ell P_r}=(-2,-1,2)$ e

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N_r}\times\overrightarrow{N_\ell}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,1,-1)$$

a)

$$d(r,\ell) = \frac{|\overrightarrow{P_\ell P_r} \cdot \overrightarrow{N}|}{|\overrightarrow{N}|} = \frac{|(-2,1,2)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{|-2-1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

b) Os planos π e α vão ter $\overrightarrow{N}$ como vetor normal, então suas equações são:

$$\pi : x+y-z = d_1 \ \text{ e } \ \alpha : x+y-z = d_2$$

para achar d_1 e d_2 utilizamos que

$$P_r \in \pi \ \Rightarrow \ 0+2-1 = d_1 \ \Rightarrow \ d_1 = 1$$

$$P_\ell \in \alpha \ \Rightarrow \ 2+3++1 = d_2 \ \Rightarrow \ d_2 = 6$$

Portanto,

$$\pi : x+y-z = 1$$

$$\alpha : x+y-z = 6$$

c) Observamos que

$$d(\pi,\alpha) = d(r,\ell) = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

d) Tais P e Q devem satisfazer

$$P \in r \quad \Rightarrow \quad P = (0, 2+t_0, 1+t_0)$$

$$Q \in \ell \quad \Rightarrow \quad Q = (\lambda_0+2, 3, \lambda_0-1)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{N} \quad = \quad \overrightarrow{O}$$

Então,

$$\overrightarrow{O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_0+1 & 1-t_0 & \lambda_0-t_0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} t_0-1-\lambda_0+t_0+2 \\ \lambda_0+2+\lambda_0-z_0-2 \\ \lambda_0+2+t_0-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t_0-\lambda_0 = -1 \\ -t_0+2\lambda_0 = 0 \\ t_0+\lambda_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3\lambda_0 = 1 \\ \\ 3t_0 = -2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_0 = \frac{-1}{3} \\ \\ t_0 = \frac{-2}{3} \end{matrix}$$

de onde

$$P = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{5}{3}, 3, \frac{-4}{3}\right)$$

23. Considere os planos $\alpha : x-y+z-3 = 0$ e $\beta : 2m^2x-(m+1)y+2z = 0$.
   a) Determine m, em cada caso, para que os planos α e β sejam: paralelos; concorrentes e concorrentes ortogonais.
   b) Para $m = -1$ encontre a equação da reta interseção entre α e β.

Resolução:
Sejam $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : 2m^2x - (m+1)y + 2z = 0$. Então,

$$\overrightarrow{N_\alpha} = (1,-1,1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{N_\beta} = (-2m^2, -(m+1), 2).$$

$$\overrightarrow{N_\alpha} \cdot \overrightarrow{N_\beta} = 2m^2 + (m+1) + 2 = 2m^2 + m + 3.$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{4}, \; \in \; \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{N_\alpha} \cdot \overrightarrow{N_\beta} \neq 0.$$

a) Como $\overrightarrow{N_\alpha} \cdot \overrightarrow{N_\beta} \neq 0 \; \forall \, m$, então os planos nunca são ortogonais.

$$\overrightarrow{N_\alpha} \times \overrightarrow{N_\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2m^2 & -(m+1) & 2 \end{vmatrix} = \left(-2+m+1, -2+2m^2, -(m+1)+2m^2\right)$$

$$\overrightarrow{N_\alpha} \times \overrightarrow{N_\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1.$$

Portanto se $m = 1$, então $\alpha // \beta$. Nos outros casos α e β são concorrentes.

b)

$$\text{Se } \; m = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \alpha : x - y + z = 3 \\ \beta : 2x + 2z = 0 \end{array}$$

Resolvemos o sistema.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{\ell_2}{2} \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 - \ell_1 \to \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2 \to \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$S = \{(-\lambda, -3, \lambda), \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$$r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

24. Sejam a, b, c, d números reais tais que $ax + by + cz + d > 0$ para quaisquer x, y, $z \in \mathbb{R}$. Mostre que $a = b = c = 0$ e $d > 0$.

Resolução:
Se $x = y = z = 0$. Então $d > 0$. Assuma $a \neq 0$. Logo,

- Se $a > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \exists \; n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 \cdot a > d \quad \Rightarrow \quad -n_0 \cdot a + d < 0, \quad \text{o que não pode acontecer.}$$

- Se $a < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \;\; n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-n_0 \cdot a > d \quad \Rightarrow \quad n_0 \cdot a + d < 0, \quad \text{o que não pode acontecer.}$$

$$\Rightarrow \quad a = 0$$

Análogamente provamos $b = c = 0$.

30. Translação de sistema de coordenadas

1. Seja $\mathscr{C}$ o lugar geométrico dos pontos $P=(x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$2y^2-3x^2-4y+12x+8=0$$

a) Qual é o tipo de cônica $\mathscr{C}$? Encontrar novas coordenadas para escrever a equação de $\mathscr{C}$ na forma canônica.
b) Encontrar os focos, os vértices e a excentricidade de $\mathscr{C}$ nas coordenadas x e y. No caso de hipérbole, encontrar também as equações das assíntotas em x e y.
Fazer um esboço do gráfico da cônica $\mathscr{C}$.

Resolução:
a) Começamos manipulando a expressão

$$2y^2-3x^2-4y+12x+8=0$$

$$\to\ 2(y^2-2y+1)-3(x^2-4x+4)+8=0+2-12$$

$$2(y-1)^2-3(x-2)^2=-18\ \to\ \frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$$

Fazendo a translação de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'+2 \\ y'+1 \end{pmatrix}$$

temos que a equação reducida da cônica é

$$\frac{(x')^2}{6}-\frac{(y')^2}{9}=1,$$

e portanto, a cônica é uma hipérbole.
b) Primeiramente achamos os Focos, vértices e assíntotas no sistema $x'y'$. Da forma da equação canônica temos que

$$a^2=6 \qquad b^2=9 \qquad e \qquad c^2=9+6=15$$

Portanto

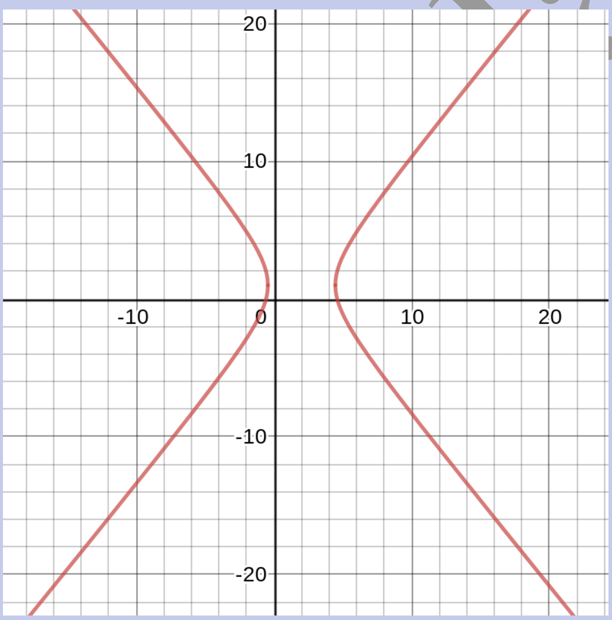
$$a = \sqrt{6} \quad b = 3 \quad e \quad c = \sqrt{15}$$

Utilizando as transformações de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+2 \\ y'+1 \end{pmatrix}$$

podemos então concluir que

	Sist. $x'y'$	Sist. xy
F_1	$(\sqrt{15}, 0)$	$(\sqrt{15}+2, 1)$
F_2	$(-\sqrt{15}, 0)$	$(-\sqrt{15}+2, 1)$
V_1	$(\sqrt{6}, 0)$	$(\sqrt{6}+2, 1)$
V_2	$(-\sqrt{6}, 0)$	$(-\sqrt{6}+2, 1)$
Ass.1	$y' = \frac{3}{\sqrt{6}}x'$	$y-1 = \frac{3}{\sqrt{6}}(x-2)$
Ass. 2	$y' = -\frac{3}{\sqrt{6}}x'$	$y-1 = -\frac{3}{\sqrt{6}}(x-2)$



2. Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ no plano cujas coordenadas satisfazem a equação

$$\ell\colon\, 9x^2 - 16y^2 - 54x + 48y + 81 = 0.$$

a) Determinar que tipo de cônica é ℓ. Escrever a equação canônica de ℓ.
b) Encontrar os focos, a excentricidade e os vértices de ℓ. Se ℓ for hipérbole, encontrar as equações das assíntotas de ℓ.

Resolução:
Consideramos a equação

$$\ell\colon\, 9x^2-16y^2-54x+48y+81=0.$$

Para determinar que tipo de cônica é ℓ primeiramente procuramos a equação canônica de ℓ.
Para isto, completamos quadrados

$$9(x^2-6x)-16(y^2-3y)=-81$$

$$9(x^2-6x+9)-16\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)=-81+81-\left(16\cdot\frac{9}{4}\right)$$

donde

$$\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{16}=1$$

Consideramos a translação do sistema de coordenadas $S=\{(0,0),\{\vec{e}_1=(1,0),\ \vec{e}_2=(0,1)\}$ para $S'=\{(3,3/2),\{\vec{e}_1=(1,0),\ \vec{e}_2=(0,1)\}$. Assim, a mudança de coordenadas, é dada por

$$\begin{cases} x' &= x-3 \\ y' &= y-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Neste novo sistema de coordenadas, a equação da canônica é dada pela expressão:

$$\frac{(y')^2}{\frac{9}{4}}-\frac{(x')^2}{4}=1.$$

Portanto a cônica é uma hiperbole.
Para encontrar os focos, a excentricidade, os vértices de ℓ e as equações das assíntotas de ℓ, primeiramente achamos estes para o sistema S'.
Observamos que, neste caso,

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$$

donde tiramos que os focos estão

$$F_1=(0,-5/2) \qquad F_2=(0,5/2).$$

Os vértices correspondem a $x'=0$ donde

$$V_1=(0,-3/2) \qquad V_2=(0,3/2).$$

A excentricidade é dada por

$$e=\frac{5/2}{3/2}=\frac{5}{3}.$$

As assíntotas correspondem a

$$x'=\pm\frac{4}{3}y'.$$

Utilizando que

$$\begin{cases} x' &= x-3 \\ y' &= y-\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= x'+3 \\ y &= y'+\frac{3}{2} \end{cases}$$

tiramos que, no sistema S os

a) Focos:

$$F_1 = (0,-5/2)+(3,3/2) = (3,-1)$$

$$F_2 = (0,5/2)+(3,3/2) = (3,4)$$

b) Vértices:

$$V_1 = (0,-3/2)+(3,3/2) = (3,0),$$

$$V_2 = (0,3/2)+(3,3/2) = (3,3)$$

c) Exentricidade $e = 5/3$

d) Assíntotas

$$(x-3) = \pm\frac{4}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right).$$

Concluimos então que :

a) A cônica é uma hiperbole e sua equação canônica é

$$\frac{(y')^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(x')^2}{4} = 1.$$

b) Focos:

$$F_1 = (3,-1) \qquad F_2 = (3,4)$$

Vértices:

$$V_1 = (3,0) \qquad V_2 = (3,3)$$

Exentricidade $e = 5/3$

Assíntotas

$$(x-3) = \frac{4}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right) \quad e \quad (x-3) = -\frac{4}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right).$$

3. Considere a cônica de equação

$$2x^2+3y^2+4x-12y+8=0$$

Determine

a) se é elipse, hipêrbole ou parábola,

b) focos, vértices e assíntotas (se houver) no sistema de coordenadas $S = \{O,\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\}$,

c) exentricidade,

d) um esboço do gráfico.

Resolução:

Começãmos manipulando a equação

$$2x^2+3y^2+4x-12y+8=0.$$

Observamos que

$$2x^2+3y^2+4x-12y+8$$

$$= 2(x^2+2x+1)+3(y^2-4y+4)+8-2-12$$
$$= 2(x+1)^2+3(y-2)^2-6.$$

Portanto, a equação da cônica pode ser escrita como

$$2(x+1)^2+3(y-2)^2-6=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$$

Considere o sistema de coordenadas $S'=\{O',\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\}$ com $\overrightarrow{OO'}=(-1,2)$.
As coordenadas (x,y) do sistema S e as coordenadas (x',y') do sistema S' se relacionam por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Portanto, no sistema de coordenadas S' a equação da cônica é dada por

$$\frac{(x')^2}{3}+\frac{(y')^2}{2}=1.$$

que é a equação de uma elipse.
No sistema S' os vértices estarão em

$$V_1=(\sqrt{3},0),\ V_2=(-\sqrt{3},0).$$

Para achar os focos, primeiramente calculamos

$$c^2=a^2-b^2=3-2=1.$$

Assim, os focos estão, no sistema S', em

$$F_1=(1,0),\ F_2=(-1,0).$$

A exentricidade é dada por

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1,$$

como esperado.
No sistema S a exentricidade é a mesma. Os focos e vértices terão coordenadas

$$\mathrm{V}_1:\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{V}_2:\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{F}_1:\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{F}_2:\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Juntando as informações, podemos responder:

a) A curva é uma elipse.

b) No sistema de coordenadas $S=\{O,\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\}$, os focos e vertices estão em

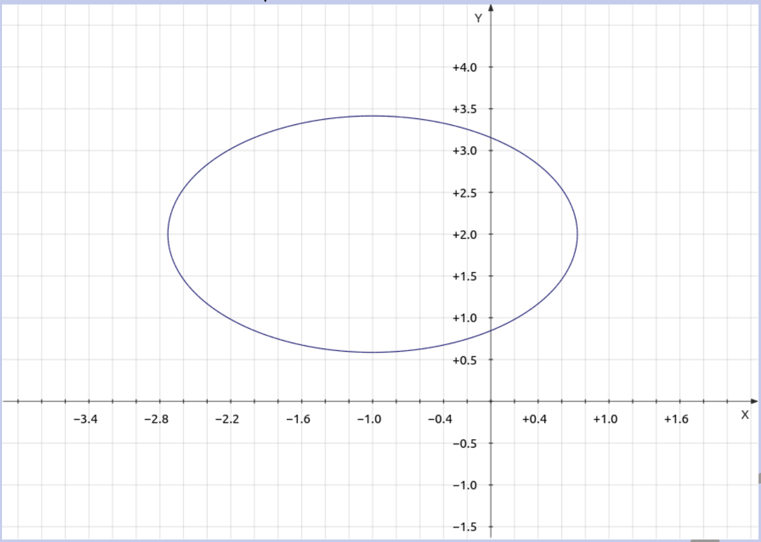
$$\mathrm{V}_1:(-1+\sqrt{3},2)$$

$$\mathrm{V}_2:(-1-\sqrt{3},2)$$

$$\mathrm{F}_1:(0,2)$$

$$\mathrm{F}_2:(-2,2)$$

c) a exentricidade é $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) 

4. Tome $x'y'$ o sistema de eixos do plano que é a translação do sistema xy para a nova origem $O' = (1,1)$, i.é., $x' = x - 1$ e $y' = y - 1$.
   i- Dado o ponto $P = (1,4)$ no sistema xy, encontre as coordenadas de P no sistema $x'y'$.
   ii- Dado o ponto $A = (2,1)$ no sistema $x'y'$, encontre as coordenadas de A no sistema xy.
   iii- Dada a equação $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$, encontre tal equação nas variáveis $x'y'$.

   Resolução:
   Considere a translação

$$\begin{cases} x' &= x - 1 \\ y' &= y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= x' + 1 \\ y &= y' + 1 \end{cases}$$

   i- Se $P = (1,4)$ no sistema xy, então $P = (1-1, 4-1) = (0,3)$ no sistema $x'y'$.
   ii- Se $A = (2,1)$ no sistema $x'y'$, então $A = (2+1, 1+1) = (3, 2+)$ no sistema xy.
   iii- Se $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$, então,

$$(x'+1)^2 - 4(x'+1) + (y'+1)^2 - 6(y'+1) = 12.$$

$$(x')^2 + 2x' + 1 - 4x' - 4 + (y')^2 + 2y' + 1 - 6y' - 6 = 12.$$

$$(x')^2 - 2x' + (y')^2 - 4y' = 4. \quad \text{No sistema } x'y'.$$

5. Encontre os vértices (ou vértic**e**), os focos (ou foco) e a excentricidade de cada uma das cônicas. E esboce o gráfico.
   i- $4x^2 + 9y = 144$
   ii- $49x^2 - 9y^2 = 441$
   iii- $3x^2 - 14y = 0$

   Resolução:
   i- Seja a cônica de equação

$$4x^2 + 9y = 144 \;\Rightarrow\; 4x^2 = 144 - 9y \;\Rightarrow\; 4x^2 = -9 \cdot (y - 16).$$

   Fazemos a translação

$$x = x'.$$
$$y = y' + 16.$$

   Então a equação fica

$$(x')^2 = \frac{-9}{4} y',$$

que é a equação de uma parábola. Comparando com a equação canônica, temos

$$\frac{-9}{4} = 4p \;\Rightarrow\; p = -\left(\frac{9}{16}\right).$$

Utilizando a mudança de coordenadas e o que foi visto na teoria temos:

	Foco	Vértice	Reta diretriz	Excentricidade
(x', y')	$\left(0, \frac{-9}{16}\right)$	$(0,0)$	$y' = \frac{9}{16}$	1
(x, y)	$\left(0, \frac{247}{16}\right)$	$(0,16)$	$y = \frac{265}{16}$	1

ii- Seja a cônica de equação $49x^2 - 9y^2 = 441$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{441}{49}} - \frac{y^2}{\frac{441}{9}} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1 \;\Rightarrow\; a = 3 \quad b = 7$$

$$c^2 = 9 + 49 = 58$$

A excentricidade é

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{58}}{3}$$

Agora comparando com a equação canônica e as mudanças de coordenadas feitas para obter

F_1	F_2	V_1	V_2
$\left(-\sqrt{58}, 0\right)$	$\left(\sqrt{58}, 0\right)$	$(-3,0)$	$(3,0)$

iii- Seja a cônica de equação $3x^2 - 14y = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 = 14y \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{14}{3}y$$

Que é a equação de uma parábola. Comparando com a equação canônica temos:

$$4p = \frac{14}{3} \;\Rightarrow\; p = \frac{7}{6}.$$

Assim, temos $e = 1$

$$F = \left(\frac{7}{6}, 0\right) \qquad V = (0,0) \qquad r : x = -\frac{7}{6}.$$

6. Para cada uma das equações abaixo decida se a cônica C determinada pela equação é degenerada ou não. Nos casos em que não são degeneradas encontre os vértices (ou vértic**e**), os focos (ou foco) e esboce o gráfico.
   i- $9x^2 - 18x + 9y^2 - 6y = 10$
   ii- $4x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 26$

iii- $4y^2 - 4y - 24x + 9 = 0$
iv- $36x^2 - 24x + 36y^2 - 36y + 14 = 0$
v- $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 69 = 0$
vi $9y^2 - 9x^2 + 6x = 1$.

Resolução:

i- Completamos quadrados na equação

$$9x^2 - 18x + 9y^2 - 6y = 20$$

$$9(x^2 - 2x + 1) + 9\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - 9 - 1 = 10,$$

$$9(x-1)^2 + 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 20.$$

Fazendo a translação de coordenadas

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Obtemos a equação

$$9x'^2 + 9y'^2 = 10,$$

que é a equação de uma circunferência de raio $r = \frac{\sqrt{20}}{3}$. Então a cônica é uma circunferência com centro em $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

ii- Completamos quadrados na equação

$$4x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 26$$

$$4 \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 9 \cdot (y^2 - 2y + 1) = 26 + 1 + 9$$

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{9} + \frac{1 - y}{\frac{36}{9}} = 1$$

$$9 \cdot (x-1)^2 + 9 \cdot \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 10$$

Ao fazer a translação de coordenadas.

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

obtemos a equação de uma elipse

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

No sistema $x'y'$ temos

$$c^2 = 9 - 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Então, utilizando a translação de coordenadas obtemos:

	$x'y'$	xy
F_1	$(\sqrt{5},0)$	$\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2},1\right)$
F_2	$(-\sqrt{5},0)$	$\left(-\sqrt{5}+\frac{1}{2},1\right)$
V_1	$(3,0)$	$\left(\frac{7}{2},1\right)$
V_1	$(-3,0)$	$\left(-\frac{5}{2},1\right)$
e	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$

iii- Completamos quadrados na equação

$$4y^2-4y-24x+9=0$$

$$4\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-24x+9-1=0$$

$$4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-24\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$$

Fazendo a translação

$$\begin{cases} y'=y-\frac{1}{2} \\ x'=x-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Chegamos na equação

$$y'^2=6x'$$

que é a equação de uma parábola. Fazemos

$$4p=6 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{3}{2}$$

Então, utilizando a transformação de coordenadas chegamos em:

	$x'y'$	xy
F	$\left(\frac{3}{2},0\right)$	$\left(\frac{11}{6},\frac{1}{2}\right)$
V	$(0,0)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$
r	$x'=-\frac{3}{2}$	$x=-\frac{7}{6}$

iv- Completamos quadrados na equação

$$36x^2 - 24x + 36y^2 - 36y - 23 = 0$$

$$36\left(x^2 - 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 36\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 23 + 4 + 9$$

$$36\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 36\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 36$$

fazendo a translação

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{3} \\ y' = y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

obtemos a equação de uma circunferência

$$x'^{\,2} + y'^{\,2} = 1$$

Então, a equação representa uma circunferência com centro em

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e raio} \qquad r = 1$$

v- Completamos quadrados na equação

$$4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 69 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) - 9\left(y^2 - \frac{2}{3}\right) = 69$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9\left(y^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) = 69 + 4 - 1$$

$$4(x - 1)^2 - 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 72$$

$$\frac{(x-1)^2}{18} - \frac{(y - \frac{1}{3})^2}{8} = 1$$

fazendo a translação

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - \frac{1}{3} \end{cases}$$

obtemos a equação de uma hipérbole

$$\frac{x'^{\,2}}{18} - \frac{y'^{\,2}}{8} = 1.$$

calculamos

$$c^2 = 18 + 8 + 26 \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{26}{18}} = \sqrt{\frac{13}{9}}.$$

Utilizando a mudança de coordenadas obtemos:

	$x'y'$	xy
F_1	$(\sqrt{26},0)$	$\left(1+\sqrt{26},\frac{1}{3}\right)$
F_2	$(-\sqrt{26},0)$	$\left(1-\sqrt{26},\frac{1}{3}\right)$
V_1	$(\sqrt{18},0)$	$(1+\sqrt{18},\frac{1}{3})$
V_1	$(-\sqrt{18},0)$	$(1-\sqrt{18},\frac{1}{3})$
Assíntotas	$y'=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}x'$	$(y-\frac{1}{3})=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}(x-1)$ ou $y=\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}(x-1)$

vi- Completamos quadrados na equação

$$9y^2-9x^2+6x=1$$

obtemos

$$9y^2-9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)=1-1=0$$

$$9y^2=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

que é uma cônica degenerada correspondente ao par de retas

$$r_1: y=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{e} \quad r_2: y=-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

que se intersectam em

$$P=\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

31. Identificação de cônicas

1.
2. Seja $\mathscr{C}$ o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 4 = 0$$

Encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam $\mathscr{C}$ à forma canônica e identificar a cônica $\mathscr{C}$.
Resolução: Para encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam a cônica $\mathscr{C}$ de equação

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 4 = 0$$

na sua forma canônica primeiramente escrevemos esta equação na sua forma matricial

$$X^tAX + BX + 4 = 0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = (-16\sqrt{2}, 8\sqrt{2}).$$

Calculando

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 24 > 0$$

vemos que a cônica é uma elipse.
Para achar a rotaçãode coordenadas R_θ que diagornaliza A calculamos os zeros de

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 24 \to \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 4$$

Escolhemos $a' = 6$. Resolvemos o sistema $(A - 6I)X = 0$ e procuramos uma solução de norma 1.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto matriz R_θ é dada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

E a mudança de coordenadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

isto é

$$x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$$

Então a equação da cônica transforma em

$$6(x')^2 + 4(y')^2 - 16\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 8\sqrt{2}\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 4 = 0.$$

Simplificando temos

$$6(x')^2 - 24x' + 4(y')^2 - 8y' + 4 = 0 \Rightarrow 6(x'-2)^2 + 4(y'-1)^2 = 24.$$

Fazendo

$$x'' = x' - 2 \qquad y'' = y' - 1$$

Temos

$$\frac{(x'')^2}{4} + \frac{(y'')^2}{6} = 1$$

que é a forma canônica de $\mathscr{C}$.

3. Seja $\mathscr{C}$ o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

a) Encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam $\mathscr{C}$ à forma canônica e identificar a cônica $\mathscr{C}$.
b) Determine excentricidade, vértices, focos e assíntotas (se houver)
Resolução: Seja $\mathscr{C}$ o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

Observamos que esta equação pode ser escrita na forma matricial como

$$X^T AX + BX = 9$$

para

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = (12, 6).$$

Como

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = 24 > 0$$

tiramos que a cônica é uma elipse.
Para achar as transformações de coordenadas que levam a equação acima na forma canônica começamos calculando os zeros de

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ -2 & 7-x \end{pmatrix} = x^2 - 11x + 24$$

que são

$$x_1 = 8 \qquad x_2 = 3.$$

Escolhemos $a' = 8$ e procuramos as soluções unitarias de

$$(A - 8I)U = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2u = v$$

das quais escolhemos

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \sin(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Com isto obtemos que a matriz de rotação e a mudança de coordenadas são dadas por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$x = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}, \qquad y = \frac{-2x' + y'}{\sqrt{5}}$$

Utilizando esta mudança de coordenadas e substituindo na equação da cônica obtemos a seguinte

$$8(x')^2 + 3(y')^2 + 12\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 6\left(\frac{-2x' + y'}{\sqrt{5}}\right) = 9$$

$$\Rightarrow 8(x')^2 + 3y'^2 + 6\sqrt{5}y' = 9$$

Completamos quadrados para obter

$$8(x')^2 + 3(y'^2 + 2\sqrt{5}y' + 5) = 9 + 15.$$

ou, equivalentemente,

$$8(x')^2 + 3(y' + \sqrt{5})^2 = 24 \Rightarrow \frac{(x')^2}{3} + \frac{(y' + \sqrt{5})^2}{8} = 1.$$

Fazendo a traslação

$$x'' = x' \qquad y'' = y' + \sqrt{5}$$

Obtemos finalmente a equação canônica

$$\frac{(x'')^2}{3} + \frac{(y'')^2}{8} = 1.$$

Com isto podemos responder a
a)as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \sqrt{5} \end{cases}$$

e a equação canônica da elipse é

$$\frac{(x'')^2}{3}+\frac{(y'')^2}{8}=1.$$

b) Observamos que, pela forma da equação canônica, os focos e vértices estão sobre o eixo $\hat{y''}$ e que,

$$a^2=8 \quad b^2=3 \quad c^2=a^2-b^2=5$$

donde

$$a=\sqrt{8} \quad b=\sqrt{3} \quad c=\sqrt{5}$$

Portanto a Exentricidade da cônica é

$$e=\sqrt{\frac{5}{8}}$$

e os focos e vértices estão em

	x"y"	x'y'	xy
F_1	$(0,\sqrt{5})$	$(0,0)$	$(0,0)$
F_2	$(0,-\sqrt{5})$	$(0,-2\sqrt{5})$	$(-4,-2)$
V_1	$(0,\sqrt{8})$	$(0,\sqrt{8}-\sqrt{5})$	$\left(2\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}-2),\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}-1\right)$
V_2	$(0,\sqrt{8})$	$(0,-(\sqrt{8}+\sqrt{5}))$	$\left(-2-\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{5}},-1-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}\right)$
Ex.	$\sqrt{\frac{5}{8}}$	$\sqrt{\frac{5}{8}}$	$\sqrt{\frac{5}{8}}$

4. Seja $\mathscr{C}$ a curva do plano constituída dos pontos que satisfazem a equação

$$3x^2+3y^2+2xy+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=-4.$$

(a) Encontre a forma canônica (ou reduzida) de $\mathscr{C}$.
(b) Encontre as coordenadas do(s) foco(s) da curva $\mathscr{C}$ em relação ao sistema de eixos XY.
(c) Esboce o desenho da curva $\mathscr{C}$ no sistema de eixos XY.

Resolução:
Seja $\mathscr{C}$ a curva do plano constituída dos pontos que satisfazem a equação

$$3x^2+3y^2+2xy+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=-4.$$

Observamos que a equação pode ser escrita

$$(x,y)\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(4\sqrt{2},-4\sqrt{2})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-4$$

A partir da matriz

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$$

temos que, como $\det(A)=8>0$, concluimos que a cônica é uma elipse.
Para poder estudar a cônica vamos a fazer uma rotação seguida de uma traslação para poder levar a equação numa forma simples.
Faremos o estudo da cônica no último sistema de coordenadas e depois transformamos tudo ao sistema de coordenadas original.
Começamos procurando a rotação a ser feita e cuja matriz é

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Procuramos primeiro os autovalores da matriz. Para isto, determinamos os 0 de

$$f(x) = \det(A - xId) = \det\begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix} = x^2 - 6x + 8.$$

Donde

$$x = \frac{6 \pm 2}{2},$$

assim os autovalores serão $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$.
As colunas da matriz R_θ são os autovetores unitarios associados aos autovalores acima.
Calculamos os autovetores: Para λ_1 temos que o autovetor será dado por um vetor unitario u_1 que é solução do sistema linear $(A - 4Id)V = 0$. Assim

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_2$$

$$\implies u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Como esta é a primeira coluna de R_θ, a segunda coluna vai ser obtda trocando as componentes de lugar e mudando o sinal da primeira, isto é

$$u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Portanto a mudança de coordenadas fica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x & = & \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y & = & \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Para obter a forma canônica ou reduzida de $\mathscr{C}$ observamos que a equação da cónica transforma em

$$4(x')^2 + 2(y')^2 + 4\sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) - 4\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = -4.$$

Simplificando

$$4(x')^2 + 2(y')^2 - 8y' = -4.$$

Completando quadrados

$$4(x')^2 + 2(y'-2)^2 = -4 + 8 = 4 \implies (x')^2 + \frac{(y'-2)^2}{2} = 1.$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis $u = x'$ e $v = y' - 2$ temos que a forma canônica de $\mathscr{C}$ é

$$u^2 + \frac{v^2}{2} = 1$$

A mudança de variáveis de UV para XY é dada então por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v+2 \end{pmatrix}$$

Para obter os focos no sistema UV primeiramente obtemos $c^2 = 2 - 1 = 1$. Portanto os focos no sistema UV tem coordenadas $F_1 = (0,1)$ e $F_2(0,-1)$ Assim, no sistema de coordenadas XY

$$F_1: \quad = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$F_2: \quad = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

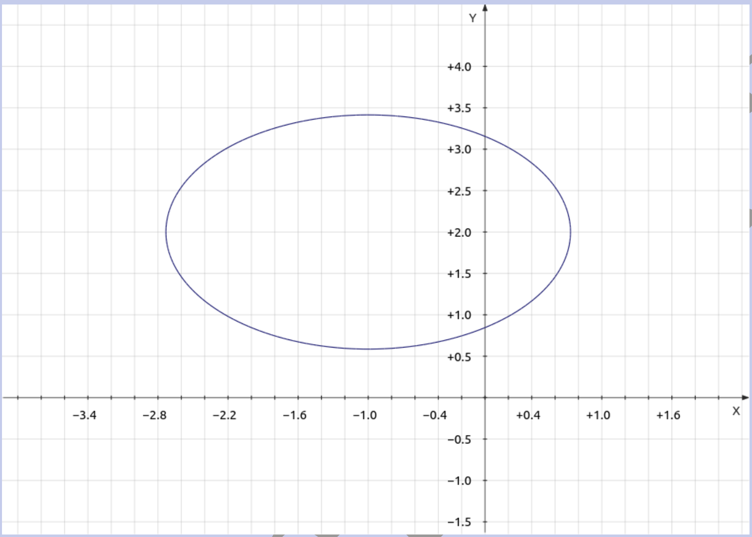
Juntando as partes podemos responder:

(a) A forma canônica (ou reduzida) de $\mathscr{C}$ é

$$u^2 + \frac{v^2}{2} = 1.$$

(b) As coordenadas do(s) foco(s) da curva $\mathscr{C}$ em relação ao sistema de eixos XY

$$F_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \qquad F_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(c) 

5. Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P = (x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0.$$

a) Identificar a cônica ℓ.
b) Encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam ℓ à forma canônica.
c) Encontrar a excentricidade de ℓ. Encontrar também as coordenadas dos focos, dos vértices e as equações das assíntotas (se aplicável) no sistema Oxy .

Resolução:
Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P = (x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0.$$

Para identificar a cônica ℓ escrevemos a equação em notação matricial

$$X^T AX + KX = 9$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 12, 6 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 24 > 0$ temos que a cónica é uma elipse.

Vamos levar ℓ à forma canônica. Primeiramente fazemos uma rotação de coordenadas $X' = OX$ em que

$$O = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{21} \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

de forma tal que a matriz $O^T A O$ seja da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que os elementos da diagonal, λ_1, λ_2, são dados pelos 0 do polinomio

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ -2 & 7-x \end{pmatrix} = x^2 - 11x + 24$$

Portanto,

$$\frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 8, \; \lambda_2 = 3$$

Agora, para achar os vetores $V_1 = (v_{11}, v_{12})$ e $V_2 = (v_{21}, v_{22})$ que determinam O resolvemos

$$(A - 8I)U = 0 \qquad ||U|| = 1$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_2 = -2u_1$$

e obtemos $V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$ donde $V_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$. Portanto a mudança de coordenadas fica determinada por

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Observamos que $KO = (0, \frac{30}{\sqrt{5}})$ e portanto, no novo sistema de coordenadas, a equação transformada é

$$(X')^T (O^T A O) X' + (KO) X' = 9 \Longrightarrow 8x'^2 + 3y'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}} y' = 9$$

Por último fazemos uma traslação da forma $X'' = X' + Q$, com

$$X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

para levar a equação na forma canônica. Para determinar Q completamos quadrados em

$$8x'^2 + 3y'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}} y' = 9$$

e obtemos

$$8x'^2 + 3(y'^2 + 2\sqrt{5}y' + 5) = 9 + 15 \Longrightarrow \frac{x'^2}{3} + \frac{(y' + \sqrt{5})^2}{8} = 1.$$

Finalmente, se $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, temos que a equação canônica é

$$\frac{x''^2}{3} + \frac{y''^2}{8} = 1$$

A mudança de coordenadas total é

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e sua inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right)$$

Para achar a excentricidade de ℓ calculamos primeiramente

$$c^2 = 8 - 3 = 5 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{5}$$

donde $e = \sqrt{5/8}$.
Os focos no sistema (x'', y'') estão em

$$F_1 = (0, \sqrt{5}) \qquad F_2 = (0, -\sqrt{5})$$

e os vértices

$$V_1 = (0, \sqrt{8}) \qquad V_2 = (0, -\sqrt{8})$$

Portanto, as coordenadas no sistema Oxy são

$$F_1 : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \\ \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$V_2 : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{\sqrt{5}} \\ -\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Juntando as partes podemos responder:

a) A cônica é uma elipse.

b) A mudança de coordenadas é

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c)

$$F_1 = (0, 0) \qquad F_2 = (-4, -2)$$

$$V_1 = \left(\frac{2(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}}, \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \right)$$

$$V_2 = \left(-\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{\sqrt{5}}, -\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{\sqrt{5}} \right)$$

6. Em cada uma das equações abaixo elimine, através de uma rotação, o termo xy. Identifique o conjunto solução e nos casos em que for uma cônica encontre as coordenadas, no sistema inicial, do(s) foco(s), vertice(s), diretrizes e assíntotas (quando couber).
   (a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;
   Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 50 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Elipse.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 10,\ 5.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 10$ e resolvemos o sistema $(A - 10I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = -2v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$10\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 = 30 \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{x}^2}{3} + \frac{\bar{y}^2}{6} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = 6 \quad b^2 = 3 \quad \rightarrow \quad c^2 = 6 - 3 = 3$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
excent.	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$
F_1	$(0, \sqrt{3})$	$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
F_2	$(0, -\sqrt{3})$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
V_1	$(0, \sqrt{6})$	$\left(\sqrt{\frac{6}{5}}, 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$
V_2	$(0, -\sqrt{6})$	$\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}, -2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

(b) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -10 \\ -10 & 25-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 29\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,\ 29.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 0$ e resolvemos o sistema $(A - 0I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2u = 5v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}} \right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{-2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$0\bar{x}^2 + 29\bar{y}^2 - 15\left(\frac{5\bar{x} - 2\bar{y}}{\sqrt{29}}\right) - 6\left(\frac{2\bar{x} + 5\bar{y}}{\sqrt{29}}\right) = 0 \quad \to \quad 29\bar{y}^2 - 3\sqrt{29}\bar{x} = 0 \quad \to \quad \bar{y}^2 = 4\left(\frac{3}{4\sqrt{29}}\right)\bar{x}.$$

Temos assim que

$$c = \frac{3}{4\sqrt{29}}$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
V	$(0,0)$	$(0,0)$
F	$\left(\frac{3}{4\sqrt{29}}, 0\right)$	$\left(\frac{15}{116}, \frac{3}{58}\right)$
reta d.	$\bar{x} = -\frac{3}{4\sqrt{29}}$	$5x - 2y = \frac{3}{4}$

(c) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 2$ e resolvemos o sistema $(A-2I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{3}v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$2\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 + 6\left(\frac{\sqrt{3}\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) = 0 \quad \to \quad 2\left(\bar{x} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2\left(\bar{y} + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Fazendo a traslação

$$x' = \bar{x} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad y' = \bar{y} + \frac{3}{4}$$

temos a equação

$$\frac{(x')^2}{9/8} - \frac{(y')^2}{9/8} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = \frac{9}{8} \quad b^2 = \frac{9}{8} \quad \to \quad c^2 = \frac{9}{4}$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
F_1	$(3/2, 0)$	$\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \frac{3}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{8}\right)$
F_2	$(-3/2, 0)$	$\left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), -\frac{3}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{8}\right)$
V_1	$(3/\sqrt{8}, 0)$	$\left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \frac{3}{2\sqrt{8}} - \frac{6\sqrt{3}}{8}\right)$
V_2	$(-3/\sqrt{8}, 0)$	$\left(-\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), -\frac{3}{2\sqrt{8}} - \frac{6\sqrt{3}}{8}\right)$
Assínt.	$x' = \pm y'$	$\bar{y} + \frac{3}{4} = \pm\left(\bar{x} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	$-x + \sqrt{3}y + 3/2 = \pm(\sqrt{3}x + y + (3\sqrt{3}/2))$

(d) $18x^2+12xy+2y^2+94\frac{\sqrt{10}}{10}x-282\frac{\sqrt{10}}{10}y+94=0.$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A=\begin{pmatrix}18 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(A)=0 \quad\Rightarrow\quad \text{Parábola.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}18-\lambda & 6\\ 6 & 2-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-20\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda=0,\ 20.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda=0$ e resolvemos o sistema $(A-0I)U=0$ com $||U||=1$, isto é

$$\begin{pmatrix}18 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 3u=v$$

Então uma solução unitária é

$$U=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$0\bar{x}^2+20\bar{y}^2-94\bar{x}+94=0 \quad 20\bar{y}^2-94(\bar{x}-1)=0\to$$

$$\to \quad \bar{y}^2=4\left(\frac{94}{80}\right)(\bar{x}-1).$$

Fazendo a traslação

$$x'=\bar{x}-1 \quad \bar{y}=y'$$

chegamos à equação

$$(y')^2=4\left(\frac{94}{80}\right)x'.$$

Temos assim que

$$c=\frac{94}{80}$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $x'y'$	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
V	$(0,0)$	$(1,0)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
F	$\left(\frac{94}{80},0\right)$	$\left(\frac{274}{80},0\right)$	$\left(\frac{274}{80\sqrt{10}},\frac{822}{80\sqrt{10}}\right)$
reta d.	$x'=-\frac{94}{80}$	$\bar{x}=-\frac{14}{80}$	$\frac{x+3y}{\sqrt{10}}=-\frac{14}{80}$

(e) $3x^2+5y^2+4x-2y-\frac{202}{15}=0$
Resolução: Completamos quadrados para obter

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+5\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=15$$

Consideramos a traslação

$$\bar{x}=x+\frac{2}{3} \quad \bar{y}=y-\frac{1}{5},$$

e obtemos a equação canônica

$$\frac{\bar{x}^2}{5}+\frac{\bar{y}^2}{3}=1.$$

Aqui

$$a^2=5 \quad b^2=3 \quad c^2=5-3=2$$

Agora podemos completar a tabela

	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
excent.	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{2/5}$
F_1	$(\sqrt{2},0)$	$\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$
F_2	$(-\sqrt{2},0)$	$\left(-\sqrt{2}-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$
V_1	$(\sqrt{5},0)$	$\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$
V_2	$(-\sqrt{5},0)$	$\left(-\sqrt{5}-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$

(f) $x^2+y^2+3xy+\frac{6}{\sqrt{2}}x+\frac{9}{\sqrt{2}}y=\frac{1}{2}$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A)=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-2\lambda-\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{5}{2},\ \frac{-1}{2}.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda=5/2$ e resolvemos o sistema $(A-5/2I)U=0$ com $||U||=1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u=v$$

Então uma solução unitária é

$$U=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$\frac{5}{2}\left(\bar{x}^2 + 3\bar{x} + \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{y}^2 - 3\bar{y} + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{36}{8} = 5.$$

Fazendo a traslação

$$x' = \bar{x} + \frac{3}{2} \quad y' = \bar{y} - \frac{3}{2}$$

temos a equação

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{10} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = 2 \quad b^2 = 10 \quad \to \quad c^2 = 12.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
F_1	$(\sqrt{12}, 0)$	$\left(\sqrt{12} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\sqrt{6} - \frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{6}\right)$
F_2	$(-\sqrt{12}, 0)$	$\left(\sqrt{12} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(-\sqrt{6} - \frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{6}\right)$
V_1	$(\sqrt{2}, 0)$	$\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$
V_2	$(-\sqrt{2}, 0)$	$\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(-1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, -1\right)$
Assínt.	$y' = \pm\sqrt{5}x'$	$\bar{y} - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}\left(\bar{x} + \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}\left(\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{2}\right)$

(g) $x^2 + \frac{1}{5}xy + y^2 + \frac{22}{10\sqrt{2}}(x+y) = \frac{88}{10}$

Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/10 \\ 1/10 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Elipse.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/10 \\ 1/10 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{99}{100} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{10}, \frac{9}{10}.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 11/10$ e resolvemos o sistema $(A - (11/10)I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1/10 & 1/10 \\ 1/10 & -1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$\frac{11}{10}\bar{x}^2 + \frac{9}{10}\bar{y}^2 + \frac{22}{10}\bar{x} = \frac{88}{10} \quad \to \quad \frac{(\bar{x}+1)^2}{9} + \frac{\bar{y}^2}{11} = 1.$$

Fazendo agora uma traslação

$$x' = \bar{x} + 1 \quad y' = \bar{y},$$

chegamos à equação canônica

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{11} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = 11 \quad b^2 = 9 \quad \to \quad c^2 = 11 - 9 = 2$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $x'y'$	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
excent.	$\sqrt{2/11}$	$\sqrt{2/11}$	$\sqrt{2/11}$
F_1	$(0,\sqrt{2})$	$(-1,\sqrt{2})$	$\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$
F_2	$(0,-\sqrt{2})$	$(-1,-\sqrt{2})$	$\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$
V_1	$(0,\sqrt{11})$	$(-1,\sqrt{11})$	$\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{\sqrt{2}},\frac{-1+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}\right)$
V_2	$(0,-\sqrt{11})$	$(-1,-\sqrt{11})$	$\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{\sqrt{2}},\frac{-1-\sqrt{11}}{\sqrt{2}}\right)$

(h) $x^2 + y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}y - \frac{2}{3} = 0$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3,\ -1.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 3$ e resolvemos o sistema $(A-3I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$3\bar{x}^2-\bar{y}^2+4\bar{x}+4\bar{y}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\left(\bar{x}+\frac{2}{3}\right)^2-(\bar{y}-2)^2=\frac{10}{3}.$$

Fazendo a traslação

$$x'=\bar{x}+\frac{2}{3} \quad y'=\bar{y}-2$$

temos a equação

$$-\frac{(x')^2}{2/3}+\frac{(y')^2}{2}=1.$$

Temos assim que

$$a^2=2 \quad b^2=2/3 \quad \rightarrow \quad c^2=2+2/3=8/3.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x’y’	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	$\sqrt{4/3}$	$\sqrt{4/3}$	$\sqrt{4/3}$
F_1	$(0,\sqrt{8/3})$	$\left(-2/3,2+\sqrt{8/3}\right)$	$\left(\frac{-8}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{3},\frac{4}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{3}\right)$
F_2	$(0,-\sqrt{8/3})$	$\left(-2/3,2-\sqrt{8/3}\right)$	$\left(\frac{-8}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{3},\frac{4}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\right)$
V_1	$(0,\sqrt{2})$	$\left(-2/3,2+\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{-8}{3\sqrt{2}}-1,\frac{4}{3\sqrt{2}}+1\right)$
V_2	$(0,-\sqrt{2})$	$\left(-2/3,2-\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{-8}{3\sqrt{2}}+1,\frac{4}{3\sqrt{2}}-1\right)$
Assínt.	$x'=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}y'$	$\bar{x}+\frac{2}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{y}-2)$	$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)+\frac{2}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)-2\right)$

(i) $x^2-2y^2+4xy-6=0$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A)=-6<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2+\lambda-6 \quad \Rightarrow \quad \lambda=2,\ -3.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda=3$ e resolvemos o sistema $(A-2I)U=0$ com $||U||=1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u=2v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$2\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{x}^2}{3} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = 3 \quad b^2 = 2 \quad \to \quad c^2 = 2 + 3 = 5.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	$\sqrt{5/3}$	$\sqrt{5/3}$
F_1	$(\sqrt{5}, 0)$	$(2, 1)$
F_2	$(-\sqrt{5}, 0)$	$(-2, -1)$
V_1	$(\sqrt{3}, 0)$	$\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
V_2	$(-\sqrt{3}, 0)$	$\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
Assínt.	$\bar{y} = \pm\sqrt{2/3}\bar{x}$	$(-x+2y) = \pm\sqrt{2/3}(2x+y)$

(j) $-2x^2 + y^2 - 4xy - \sqrt{5}y = \frac{67}{12}$.
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2, \ -3.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 2$ e resolvemos o sistema $(A - 2I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -2u = v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$2\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 - (-2\bar{x} + \bar{y}) = \frac{67}{12} \quad \Rightarrow \quad 2\left(\bar{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\bar{y} + \frac{1}{6}\right)^2 = 6.$$

Fazendo a traslação

$$x' = \bar{x} + \frac{1}{2} \quad y' = \bar{y} + \frac{1}{6}$$

temos a equação

$$\frac{(x')^2}{3} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = 3 \quad b^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 2 + 2/3 = 5.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	$\sqrt{5/3}$	$\sqrt{5/3}$	$\sqrt{5/3}$
F_1	$(\sqrt{5}, 0)$	$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{5}, -\frac{1}{6}\right)$	$\left(-\frac{1}{6\sqrt{5}} + 1, \frac{1}{6\sqrt{5}} - 2\right)$
F_2	$(-\sqrt{5}, 0)$	$\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{5}, -\frac{1}{6}\right)$	$\left(-\frac{1}{6\sqrt{5}} - 1, \frac{1}{6\sqrt{5}} + 2\right)$
V_1	$(\sqrt{3}, 0)$	$(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, -\frac{1}{6})$	$\left(-\frac{1}{6\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{6\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
V_2	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}, -\frac{1}{6})$	$\left(-\frac{1}{6\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{6\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
Assínt.	$y' = \pm\sqrt{2/3}x'$	$\bar{y} + \frac{1}{6} = \pm\sqrt{2/3}\,(\bar{x} - \frac{1}{2})$	$\left(\frac{2x+y}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{6} = \pm\sqrt{2/3}\left(\left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right) - 2\right)$

(k) $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2x - 2\sqrt{3}y = 6$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = -1 - 3 = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 2$ e resolvemos o sistema $(A - 2I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = -\sqrt{3}v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$2\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 - 4\bar{y} = 6 \quad \Rightarrow \quad 2\bar{x}^2 - 2(\bar{y}+1)^2 = 4$$

Fazendo a traslação

$$x' = \bar{x} \quad y' = \bar{y} + 1$$

temos a equação

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Temos assim que

$$a^2 = 2 \quad b^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 2 + 2 = 4.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	2	2	2
F_1	$(2,0)$	$(2,-1)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \frac{-2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
F_2	$(-2,0)$	$(-2,-1)$	$\left(\frac{-2\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
V_1	$(\sqrt{2},0)$	$\left(\sqrt{2},-1\right)$	$\left(\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
V_2	$(-\sqrt{2},0)$	$\left(-\sqrt{2},-1\right)$	$\left(\frac{-\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
Assínt.	$y' = \pm x'$	$\bar{y}+1 = \pm\bar{x}$	$\left(x+\sqrt{3}y\right)+2 = \pm\left(\sqrt{3}x-y\right)$

(l) $x^2 + 4y^2 + 4xy - \frac{24}{\sqrt{5}}x + \frac{12}{\sqrt{5}}y = 0$

Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,\ 5.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 0$ e resolvemos o sistema $(A - 0I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = -2v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$0\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 - 12\bar{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{y}^2 = 4\left(\frac{3}{5}\right)\bar{x}.$$

Temos assim que

$$c = \frac{3}{5}$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
V	$(0,0)$	$(0,0)$
F	$\left(\frac{3}{5},0\right)$	$\left(\frac{6}{5\sqrt{5}}, \frac{-3}{5\sqrt{5}}\right)$
reta d.	$\bar{x} = -3/5$	$x + 3y = -3\sqrt{5}$

(m) $x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{5}xy + \sqrt{\frac{5}{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y = 1$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,\ 6.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 0$ e resolvemos o sistema $(A - 0I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{5}v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$0\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 + \bar{x} = 1 \quad \to \quad \bar{y}^2 = 4\left(\frac{-1}{24}\right)(\bar{x} - 1).$$

Fazendo a traslação

$$\bar{y} = y' \quad x' = \bar{x} - 1$$

chegamos a,

$$(y')^2 = 4\left(\frac{-1}{24}\right)x'.$$

Temos assim que

$$c = \frac{-1}{24}.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
V	$(0,0)$	$(1,0))$	$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
F	$(\frac{-1}{24}, 0)$	$(\frac{23}{24})$	$\left(\frac{23\sqrt{5}}{24\sqrt{6}}, \frac{23}{24\sqrt{6}}\right)$
reta d.	$x' = \frac{1}{24}$	$x' = \frac{25}{24}$	$\sqrt{5}x + y = \frac{25\sqrt{6}}{24}$

(n) $y^2 + 2\sqrt{2}xy = 4$

Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbole.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1,\ 2.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = -1$ e resolvemos o sistema $(A - (-1)I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = -\sqrt{2}v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$-\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

Temos assim que

$$a^2 = 4 \quad b^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 2 + 4 = 6.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
Excent.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
F_1	$(0, \sqrt{6})$	$\left(\sqrt{2}, 2\right)$
F_2	$(0, -\sqrt{6})$	$\left(-\sqrt{2}, -2\right)$
V_1	$(0, \sqrt{2})$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
V_2	$(0, -\sqrt{2})$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$
Assínt.	$\pm\sqrt{2}\bar{x} = \bar{y}$	$\pm\sqrt{2}(\sqrt{2}x - y) = (x + \sqrt{2}y)$

(o) $x^2 - 2xy + y^2 + 10\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 24 = 0$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,\ 2.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda = 0$ e resolvemos o sistema $(A - 0I)U = 0$ com $||U|| = 1$, isto é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = v$$

Então uma solução unitária é

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$0\bar{x}^2+2\bar{y}^2+4\bar{x}-16\bar{y}+24=0 \quad \rightarrow \quad (\bar{y}-4)^2=4\left(\frac{-1}{2}\right)(\bar{x}-2).$$

Fazendo a traslação

$$y'=\bar{y}-4 \quad x'=\bar{x}-2$$

chegamos a,

$$(y')^2=4\left(\frac{-1}{2}\right)x'.$$

Temos assim que

$$c=\frac{-1}{2}.$$

Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
V	$(0,0)$	$(2,4))$	$\left(\frac{-2}{\sqrt{2}},\frac{6}{\sqrt{2}}\right)$
F	$\left(\frac{-1}{2},0\right)$	$\left(\frac{3}{2},4\right)$	$\left(\frac{-5}{2\sqrt{2}},\frac{11}{2\sqrt{2}}\right)$
reta d.	$x'=\frac{1}{2}$	$x'=\frac{5}{2}$	$x+y=\frac{5}{\sqrt{2}}$

(p) $4x^2+4xy+y^2-6\sqrt{5}y+3\sqrt{5}x=9$
Resolução: Primeiramente construimos a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A)=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola.}$$

Agora calculamos os zeros de

$$f(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-5\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=0,\ 5.$$

Com isto agora calculamos a rotação que vai tirar os termos da forma xy. Consideramos $\lambda=0$ e resolvemos o sistema $(A-0I)U=0$ com $||U||=1$, isto é

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2u=-v.$$

Então uma solução unitária é

$$U=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Portanto a matriz de rotação é

$$R=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e as mudanças de coordenadas são

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A equação da cônica transforma em

$$0\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 + 15\bar{x} = 9 \quad \to \quad \bar{y}^2 = 4\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\bar{x} - \frac{3}{5}\right).$$

Fazendo a traslação

$$y' = \bar{y} \quad x' = \bar{x} - \frac{3}{5}$$

chegamos a,

$$(y')^2 = 4\left(-\frac{3}{4}\right)x'.$$

Temos assim que

$$c = -\frac{3}{4}.$$

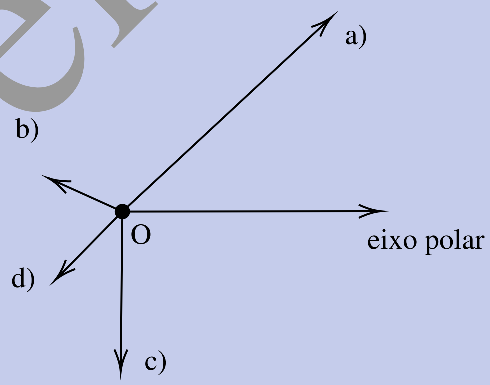
Utilizando agora as mudanças de coordenadas podemos completar a seguinte tabela

	Sist. x'y'	Sist. $\bar{x}\bar{y}$	Sist. xy
V	$(0,0)$	$(3/5,0))$	$\left(\frac{3}{5\sqrt{5}}, \frac{-6}{\sqrt{5}}\right)$
F	$(-\frac{3}{4},0)$	$(\frac{-3}{20},0)$	$\left(\frac{-3}{20\sqrt{5}}, \frac{6}{10\sqrt{5}}\right)$
reta d.	$x' = \frac{3}{4}$	$\bar{x} = \frac{27}{20}$	$x - 2y = \frac{27\sqrt{5}}{20}$

32. Coordenadas polares

1. Desenhe sobre o plano o ponto P que tem coordenadas polares:
   a) $(3, \pi/4)$
   a) $(1, 5\pi/6)$
   a) $(2, 3\pi/2)$
   a) $(1, 5\pi/4)$

   Resolução:



2. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas polares.
   a) $x^2 - y^2 = 16$
   b) $2xy = 25$
   c) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
   d) $x^3 + y^3 - 6xy = 0.$
   e) $4x^2 + 3y^2 = 1$
   f) $2x^2 - y^2 = 1$
   g) $y^2 + 4x = 0$
   h) $x^2 - 2y = 0$
   i) $x^2 + 2y^2 = 1$

   Resolução: Para resolver os exercícios utilizamos que

$$r\cos(\theta) = x, \quad y = r\sin(\theta), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

a)

$$x^2 - y^2 = 16 \quad \to \quad r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 16 \quad \to r^2\cos(2\theta) = 16.$$

b)

$$2xy = 25 \quad \to \quad 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta) = 25 \quad \to \quad r^2\sin(2\theta) = 25.$$

c)

$$(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2) \quad \to \quad r^4 = 4r^2\cos(2\theta) \quad \to \quad r^2 = 4\cos(2\theta).$$

d)

$$x^3+y^3-6xy = 0 \quad \to \quad r^3\cos^3(\theta) + r^3\sin^3(\theta) - 3r^2\sin(2\theta) = 0.$$

e)

$$4x^2+3y^2 = 1 \quad \to \quad x^2+3(x^2+y^2) = 1 \quad \to \quad r^2\cos^2(\theta)+3r^2 = 1.$$

f)

$$2x^2-y^2 = 1 \quad \to \quad x^2+x^2-y^2 = 1 \quad \to \quad r^2\cos^2(\theta)+r^2\cos(2\theta) = 1.$$

g)

$$y^2+4x = 0 \quad \to \quad r^2\sin^2(\theta)+4r\cos(\theta) = 0.$$

h)

$$x^2-2y = 0 \quad \to \quad r^2\cos^2(\theta)-2r\sin(\theta) = 0.$$

i)

$$x^2+2y^2 = 1 \quad \to \quad x^2+y^2+y^2 = 1 \quad \to \quad r^2+r^2\sin^2(\theta) = 1.$$

3. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas cartesianas.
   a) $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$
   b) $r^2 = 2\sin 2\theta$
   c) $r = \frac{6}{2-3\sin\theta}$
   d) $r^2 = \cos(\theta)$.
   e) $r\cos(\theta - \pi/4) = 2$
   f) $r\sin(\theta - \pi/3) = 3$
   g) $r + r\cos(\theta - \pi/4) = 2$
   h) $r + 2r\cos(\theta) = 1$
   i) $2r + r\cos(\theta) = 2$

   Resolução:

   a)

$$r = \frac{5}{2-2\cos\theta} \quad \to \quad 2r - 2r\cos(\theta) = 5 \quad \to \quad 2\sqrt{x^2+y^2} = 5+2x.$$

   b)

$$r^2 = 2\sin 2\theta \quad \to \quad r^2 = 4\sin(\theta) \quad \to \quad r^4 = 4r\sin(\theta)r\cos(\theta)$$

$$\to \quad (x^2+y^2)^2 = 4xy.$$

c)

$$r = \frac{6}{2-3\sin\theta} \quad \to \quad 2r - 3r\sin(\theta) = 6 \quad \to \quad 2\sqrt{x^2+y^2} = 6+3y.$$

d)

$$r^2 = \cos(\theta) \quad \to \quad r^3 = r\cos(\theta) \quad \to \quad (\sqrt{x^2+y^2})^3 = x.$$

e)

$$r\cos(\theta-\pi/4) = 2 \quad \to \quad r\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\theta)+\sin(\theta)) = 2 \quad \to \quad \sqrt{2}(x+y) = 4.$$

f)

$$r\sin(\theta-\pi/3) = 3 \quad \to \quad y - \sqrt{3}x = 6.$$

g)

$$r + r\cos(\theta-\pi/4) = 2 \quad \to \quad \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 2.$$

h)

$$r + 2r\cos(\theta) = 1 \quad \to \quad \sqrt{x^2+y^2} + 2x = 1.$$

h)

$$2r + r\cos(\theta) = 2 \quad \to \quad 2\sqrt{x^2+y^2} + x = 2.$$

4. Em cada um dos casos abaixo identifique a cônica. Determine a excentricidade, a equação cartesiana da cônica e da diretriz e as coordenadas cartesianas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s).
   a) $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$
   b) $r = \frac{6}{3+\sin\theta}$
   c) $r = \frac{3}{2+4\cos\theta}$
   d) $r = \frac{4}{2-3\cos\theta}$.
   e) $r = \frac{1}{2-\cos(\theta-\pi/4)}$
   f) $r = \frac{1}{1+3\sin(\theta-\pi/3)}$
   g) $r = \frac{1}{1-\sin(\theta-\pi/6)}$

   Resolução: Para ressolver os exercçios levamos a equação na forma

$$r = \frac{r_0 e}{1+e\cos(\theta-\phi)}$$

para poder idetificar r_0, e e ϕ utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Logo utilizamos esta informação para achar focos vértices e reta diretriz.

a)

$$r = \frac{5}{2-2\cos\theta} \quad \to \quad r = \frac{5/2}{1+\cos(\theta-\pi)}.$$

Então

$$e=1, \quad er_0=\frac{5}{2} \quad \phi=\pi.$$

Assim temos que a cônica é uma parábola com

Foco $F=O$.

Vértice $V=\left(\frac{5}{4},\pi\right)$.

Reta diretriz $r\cos(\theta-\pi)=\frac{5}{2}$.

b)

$$r=\frac{6}{3+\sin\theta} \quad \to \quad r=\frac{3}{1+\frac{1}{3}\cos(\theta-\pi/2)}.$$

Então

$$e=\frac{1}{3}, \quad er_0=2 \quad \phi=\pi/2.$$

Assim temos que a cônica é uma elipse com

Focos $F_1=O \quad F_2=\left(\frac{3}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

Vértices $V_1=\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad V_2=\left(3,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Reta diretriz $r\cos(\theta-\pi/2)=6$.

c)

$$r=\frac{3}{2+4\cos\theta} \quad \to \quad r=\frac{3/2}{1+2\cos(\theta)}.$$

Então

$$e=2, \quad er_0=\frac{3}{2} \quad \phi=0.$$

Assim temos que a cônica é uma hipérbole com

Focos $F_1=O \quad F_2=(2,0)$.

Vértices $V_1=\left(\frac{1}{2},0\right) \quad V_2=\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Reta diretriz $r\cos(\theta)=\frac{3}{4}$.

d)

$$r=\frac{4}{2-3\cos\theta} \quad \to \quad r=\frac{2}{1+\frac{3}{2}\cos(\theta-\pi)}.$$

Então

$$e=\frac{3}{2}, \quad er_0=2 \quad \phi=\pi.$$

Assim temos que a cônica é uma hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{24}{5}, \pi\right).$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{4}{5}, \pi\right) \quad V_2 = (4, \pi).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - \pi) = \frac{4}{3}.$$

e)

$$r = \frac{1}{2 - \cos(\theta - \pi/4)} \quad \to \quad r = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta - 5\pi/4)}.$$

Então

$$e = \frac{1}{2}, \quad er_0 = \frac{1}{2} \quad \phi = \frac{5\pi}{4}.$$

Assim temos que a cônica é uma hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad V_2 = \left(1, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - 5\pi/4) = 1.$$

f)

$$r = \frac{1}{1 + 3\sin(\theta - \pi/3))} \quad \to \quad r = \frac{1}{1 + 3\cos(\theta - 5\pi/6)}.$$

Então

$$e = 3, \quad er_0 = 1 \quad \phi = \frac{5\pi}{6}.$$

Assim temos que a cônica é uma hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{5\pi}{6}\right) \quad V_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - 5\pi/6) = \frac{1}{3}.$$

g)

$$r = \frac{1}{1 - \sin(\theta - \pi/6)} \quad \to \quad r = \frac{1}{1 + \cos(\theta - 5\pi/3)}.$$

Então

$$e = 1, \quad er_0 = 1 \quad \phi = \frac{4\pi}{3}.$$

Assim temos que a cônica é uma parábola com

$$\textbf{Foco} \quad F_1 = O.$$

$$\textbf{Vértice} \quad V = \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - 5\pi/3) = 1.$$

5. Considere a cônica cuja equação em coordenadas polares é dada por

$$r = \frac{1}{2+\sin(\theta)}$$

Determine
  i- tipo de cônica
  iii- a equação da cônica em coordenadas cartesianas.

Resolução:
Lembramos que, em coordenadas polares, a cônica de exentricidade e com foco no polo e reta diretriz $\ell : r\cos(\theta-\phi) = r_0$ satisfaz a relação

$$r = \frac{er_0}{1+e\cos(\theta-\phi)}.$$

Portanto, devemos manipular a equação do exercício numa forma similar à de cima e comparar para determinar a excentricidade.
Considere a cônica cuja equação em coordenadas polares é dada por

$$r = \frac{1}{2+\sin(\theta)}$$

Observamos que ela pode ser escrita como

$$r = \frac{1/2}{1+(1/2)\cos(\theta+3\pi/2)}$$

portanto, comparando equações, temos

$$de = 1/2 \qquad e = 1/2 \;\Rightarrow\; d = 1.$$

que corresponde a uma cônica de exentricidade $e = 1/2$. Portanto é uma **elipse**.
Para transformar a equação a coordenadas cartesianas fazemos

$$r = \frac{1}{2+\sin(\theta)} \;\to\; 2r + r\sin(\theta) = 1 \;\to$$

$$2\sqrt{x^2+y^2} + y = 1 \;\to\; 2\sqrt{x^2+y^2} = 1-y$$

elevando ao quadrado obtemos

$$4x^2 + 4y^2 = 1 - 2y + y^2 \;\Rightarrow 4x^2 + 3y^2 + 2y = 1.$$

Juntando as partes podemos responder:
  i- A cônica é uma elipse
  iii- a equação da cônica em coordenadas cartesianas é

$$4x^2 + 3y^2 + 2y = 1.$$

6. (a) Encontre as coordenadas polares (r,θ) do ponto $(1,1)$ com $r > 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$.
   b) Determine as coordenadas cartesianas de todos os pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo polar a $\theta = \pi$ unidades dele.
   (c) Reescreva a equação $2xy = 25$ em coordenadas polares.
   (d) Reescreva a equação $r = 3\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas.

Resolução:
As coordenadas polares (r,θ) do ponto $(1,1)$ são

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

e θ tal que

$$\tan(\theta) = 1/1 = 1$$

portanto

$$\theta = \pi/4.$$

Um ponto (r, θ) que é paralelo ao eixo polar é escrito em coordenadas polares, da forma $(r, 0)$ ou (r, π) com $r > 0$. Portanto se, $\theta = \pi$ temos que o ponto é de coordenadas polares (r, π) com $r > 0$, isto é, em coordenadas cartesianas $(x, 0)$ com $x < 0$.
Reescrevemos a equação

$$2xy = 25$$

em coordenadas polares substituindo

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta).$$

Portanto

$$2r^2 \cos\theta \sin(\theta) = 25 \equiv r^2 \sin(2\theta) = 25.$$

Reescrevemos a equação $r = 3\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas utilizando as equivalências acima. Primeiramente, multiplicamos a expresão por r par que fique

$$r^2 = 3r\cos(\theta).$$

Então, a equação em coordenadas cartesianas é

$$x^2 + y^2 = 3x.$$

Juntando as partes podemos responder:
(a) As coordenadas polares são $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4$.
(b) As coordenadas cartesianas de todos os pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo polar a $\theta = \pi$ unidades dele são (x, y) com $x < 0$.
(c) A equação $2xy = 25$ em coordenadas polares é escrita como $r^2 \sin(2\theta) = 25$.
(d) A equação $r = 3\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas é escrita como

$$x^2 + y^2 = 3x.$$

7. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   - A equação em coordenadas polares $r(2 - 3\cos(\theta)) = 4$ representa uma parábola.
     Resolução: (FALSO) Manipulamos a expressão e obtemos

     $$r(2 - 3\cos(\theta)) = 4 \rightarrow r = \frac{2}{1 + \frac{3}{2}\cos(\theta + \pi)}$$

     que representa uma cônica de excentricidade $e = \frac{3}{2}$, ou seja uma hipêrbole.
   - A equação em coordenadas polares $r(1 - 2\cos(\theta)) = 1$ representa uma elipse.
     Resolução: (FALSO) Manipulamos a expressão e obtemos

     $$r(1 - 2\cos(\theta)) = 1 \rightarrow r = \frac{1}{1 + 2\cos(\theta + \pi)}$$

     que representa uma cônica de excentricidade $e = 2$, ou seja uma hipêrbole.

8. Considere a cônica de equação, em coordenadas polares, dada por

$$r - 2r\sin(\theta) = 2.$$

Ache os vértices e focos em coordenadas polares e cartesianas de duas formas diferentes:
   a) Estudando a equação em coordenadas polares.
   b) Transformando as equações a coordenadas cartesianas e estudando a cônica por meio de uma rotação e traslação.

Resolução:
a) A equação $r - 2r\sin(\theta) = 2$ pode ser reescrita como

$$r = \frac{2}{1 - 2\sin(\theta)} = \frac{2}{1 + 2\cos(\theta - 3\pi/2)}.$$

Comparando com o estudado para coordenadas polares, identificamos

$$e = 2 \quad r_0 = 1 \quad \phi = \frac{3\pi}{2}.$$

Portanto a cônica é uma hipérbole com focos e vértices dados em coordenadas polares por

$$F_1 = O \quad F_2 = (8/3, 3\pi/2) \quad V_1 = (2/3, 3\pi/2) \quad V_2 = (2, 3\pi/2).$$

Transformamos a coordenadas cartesianas e obtemos:

$$F_1 = (0,0) \quad F_2 = (0, -8/3) \quad V_1 = (0, -2/3) \quad V_2 = (0, -2).$$

b) Transformamos a equaçao

$$r - 2r\sin(\theta) = 2$$

a coordenadas cartesianas. Fica então

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2y + 2 \quad \to x^2 + y^2 = 4y^2 + 8y + 4$$

Observamos que ao elevar ao quadrado estamos incluindo partes da curva que não pertencem a curva original. Como sabemos que é uma hipérbole, isto equivale a considerar o outro braço da hipérbole. Chegamos assim a equação

$$-\frac{x^2}{4/3} + \frac{(y + 4/3)^2}{4/9} = 1.$$

Fazemos agora a translação

$$u = x \quad v = y + 4/3$$

e chegamos em

$$-\frac{u^2}{4/3} + \frac{v^2}{4/9} = 1$$

Esta é a equação de uma hipérbole. Identificamos

$$a^2 = 4/9 \quad b^2 = 4/3 \quad c^2 = 16/9$$

Então, no sistema uv os focos e vértices estão em

$$F_1 = (0, 4/3) \quad F_2 = (0, -4/3), \quad V_1 = (0, 2/3) \quad V_2 = (0, -2/3).$$

Utilizando a mudança de coordenadas

$$x = u \quad y = v - 4/3$$

Vemos que, no sistema xy, os focos e vértices estão em

$$F_1 = (0,0) \quad F_2 = (0,-8/3), \quad V_1 = (0,-2/3) \quad V_2 = (0,-2).$$

Vemos assim que a cônica é uma hipérbole. Mais ainda no sistema de coordenadas cartesianas xy, os focos e vértices estão em

$$F_1 = (0,0) \quad F_2 = (0,-8/3),$$

$$V_1 = (0,-2/3) \quad V_2 = (0,-2).$$

9. Considere a cônica de equação, em coordenadas polares, dada por

$$2r + \sqrt{3}r\cos(\theta) + r\sin(\theta) = 1.$$

Ache os vértices e focos em coordenadas polares e cartesianas de duas formas diferentes:
  a) Estudando a equação em coordenadas polares.
  b) Transformando as equações a coordenadas cartesianas e estudando a cônica por meio de uma rotação e traslação.

Resolução:
Resolvemos cada item por separado.
a) A equação $2r + \sqrt{3}r\cos(\theta) + r\sin(\theta) = 1$. pode ser reescrita como

$$r = \frac{1/2}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)} = \frac{1/2}{1 + \cos(\theta - \pi/6)}.$$

Comparando com o estudado para coordenadas polares, identificamos

$$e = 1 \quad r_0 = 1/2 \quad \phi = \frac{\pi}{6}.$$

Portanto a cônica é uma parábola com foco e vertice dados em coordenadas polares por

$$F = O \quad V = (1/4, \pi/6)$$

Transformamos a coordenadas cartesianas e obtemos:

$$F = (0,0) \quad V = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

b) Transformamos a equaçao

$$2r + \sqrt{3}r\cos(\theta) + r\sin(\theta) = 1,$$

a coordenadas cartesianas. Fica então

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \sqrt{3}x - y$$

$$\rightarrow \ 4x^2 + 4y^2 = 3x^2 + y^2 + 1 - 2\sqrt{3}x - 2y + 2\sqrt{3}xy$$

Observamos que ao elevar ao quadrado podemos estar incluindo partes da curva que não pertencem a curva original. Como sabemos que é parábola, então aqui não vai ser o caso .
Chegamos assim a equação

$$x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x + 2y = 1$$

Calculamos a rotação de coordenadas necessária para estudar melhor a cônica. Para isto procuramos os zeros da equação

$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda$$

Escolhemos $\lambda = 4$ e calculamos uma solução de norma 1 do sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1/2, -\sqrt{3}/2).$$

Portanos a rotção de coordenadas é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nesse novo sistema a equação da cônica é

$$4(x')^2 + 4y' = 1 \quad (x')^2 = 4\left(\frac{-1}{4}\right)(y' - 1/4).$$

Fazemos agora a translação

$$u = x' \quad v = y' - 1/4,$$

e chegamos em

$$u^2 = 4\left(\frac{-1}{4}\right)v.$$

Esta é a equação de uma parábola. Identificamos

$$c = 1/4.$$

Então, no sistema uv o foco e vértice estão em

$$F = (0, -1/4) \quad V = (0, 0).$$

Utilizando a mudança de coordenadas

$$x' = u \quad y' = v + 1/4$$

Vemos que, no sistema $x'y'$, o foco e o vértice estão em

$$F = (0,0) \quad V = \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Agora, utilizando a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Vemos que, no sistema xy, o foco e o vértice estão em

$$F = (0,0) \quad V = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

Vemos assim que a cônica é uma parábola. Mais ainda, no sistema de coordenadas cartesianas xy o foco e o vértice estão em

$$F = (0,0) \quad V = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

33. Parametrização de curvas

1. Considere a cônica de equação

$$(x+1)y = \frac{1}{2}$$

Determine

a) se é elipse, hipêrbole ou parábola,
b) focos, vértices e assíntotas (se houver) no sistema de coordenadas $\widehat{xy}$,
c) exentricidade,
d) uma parametrização da curva,

Resolução:
Considere a cônica de equação

$$(x+1)y = \frac{1}{2}.$$

Fazendo uma traslação de coordenadas, definimos

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+1 \\ y' & = & y \end{array}.$$

Portanto, no novo sistema de coordenadas, a equação fica

$$x'y' = \frac{1}{2}$$

Construimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

como $\det(A) = -\frac{1}{4} < 0$ concluimos que a cônica é uma **hipérbole**. Calculamos os 0's de

$$f(x) = \det(A - xId) = \det\begin{pmatrix} -x & 1/2 \\ 1/2 & -x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Donde $x = \pm\frac{1}{2}$, portanto escolhemos $a' = 1/2$ e $c' = -1/2$.
Determinamos a rotação R_θ: para a' procuramos a solução do sistema linear $(A - \frac{1}{2}Id)V = 0$.
Assim

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 = v_2$$

$$\Longrightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

A mudança de coordenadas fica

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x' &= \frac{x''-y''}{\sqrt{2}} \\ y' &= \frac{x''+y''}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Com isto, a equação da cónica transforma em

$$\frac{1}{2}(x'')^2 - \frac{1}{2}(y'')^2 = \frac{1}{2}.$$

Simplificando

$$(x'')^2 - (y'')^2 = 1$$

Observamos que as coordenadas $x''y''$ e as coordenadas xy se relacionam da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

isto é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= -1 + \frac{x''-y''}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{x''+y''}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Passamos a estudar a cônica. Para isto obtemos todos os dados no sistema $x''y''$ e depois pasamos para o sistema xy.
No sistema $x''y''$ calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1$$

donde $c = \sqrt{2}$.

Portanto os focos estão em

$$F_1 = (\sqrt{2}, 0) \text{ } e \text{ } F_2 = (-\sqrt{2}, 0),$$

e os vértices em

$$V_1 = (1, 0) \text{ } e \text{ } V_2 = (-1, 0).$$

A exentricidade é

$$e = c/a = \sqrt{2} > 1.$$

As assíntotas são

$$x'' = y'' \text{ } e \text{ } x'' = -y''.$$

Transformamos isto para o sistema xy

$$F_1 : \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 : \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 : \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V_2 : \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

As assíntotas

$$x'' - y'' = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$$

$$x'' + y'' = 0 \Rightarrow y = 0$$

A exentricidade é invariante por rotações e traslações, portanto $e = \sqrt{2}$.
Para obter uma parametrização da curva, parametrizamos no sistema $x''y''$ e passamos para o sistema xy via a mudança de coordenadas. No sistema $x''y''$ a parametrização da equação

$$(x'')^2 - (y'')^2 = 1$$

é dada por

$$\begin{cases} h_1^1(t) &= \cosh(t) \\ h_2^1(t) &= \sinh(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1^2(t) &= -\cosh(t) \\ h_2^2(t) &= \sinh(t) \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Com $h_i^j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Portanto, no sistema xy a parametrização é dada por

$$\begin{cases} \tilde{h}_1^1(t) &= -1 + \frac{\cosh(t)-\sinh(t)}{\sqrt{2}} \\ \tilde{h}_2^1(t) &= \frac{\cosh(t)+\sinh(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{h}_1^2(t) &= -1 + \frac{-\cosh(t)-\sinh(t)}{\sqrt{2}} \\ \tilde{h}_2^2(t) &= \frac{-\cosh(t)+\sinh(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

2. Seja ℓ a curva com equações paramétricas $x = a(1+t^2)/(1-t^2)$, $y = 2bt/(1-t^2)$. Determine ℓ.
Resolução: Se fazemos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{1+2t^2+t^4}{(1-t^2)^2} - \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = 1.$$

Então a parametrização é de uma hipérbole de equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3. A elipse ℓ tem focos $F_1(1,2)$ e $F_2(2,4)$ e vértices $A_1(0,0)$ e $A_2(3,6)$. Dê as equações paramétricas de ℓ.
Resolução: Consideramos um sistema de coordenadas que tenha centro O' no ponto médio entre F_1 e F_2, isto é

$$O' = \frac{1}{2}(F_1+F_2) = \frac{1}{2}(3,6) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

e eixos paralelos a

$$\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{||\overrightarrow{F_1F_2}||} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2).$$

e $\vec{u}_2 = (a,b)$ de forma tal que as entradas de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ formem as colunas de uma matriz de rotação. Então

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1).$$

Com esta informação temos que a mudança de coordenadas é determinada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y - 3 \end{pmatrix}$$

Observamos que no sistema $x'y'$ os focos e vértices estão em

$$F_1 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad F_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

$$V_1 = \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad V_2 = \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right).$$

Comparando isto com a equação canônica da elipse no sistema $x'y'$

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

temos que

$$a = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \quad c = \frac{\sqrt{5}}{2} \to b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10}.$$

A parametrização no sistema $x'y'$ é dada por

$$x' = \frac{3\sqrt{5}}{2}\cos(t) \quad y' = \sqrt{10}\sin(t),$$

para $t \in (0, 2\pi) \cup (-\pi, \pi)$. Fazendo a mudança de coordenadas temos que a parametrização no sistema xy é

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos(t) - 2\sqrt{2}\sin(t)$$

$$y = 3 + 3\cos(t) + \sqrt{2}\sin(t),$$

para $t \in (0, 2\pi) \cup (-\pi, \pi)$.

4. A hipérbole ℓ tem focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2. Encontrar equações paramétricas de ℓ se
   a) $F_1(2,0), F_2(8,0), A_1(3,0), A_2(7,0)$;
   b) $F_1(0,0), F_2(4,8), A_1(1,2), A_2(3,6)$.

Resolução:

a) Consideramos um sistema de coordenadas que tenha centro O' no ponto médio entre F_1 e F_2, isto é

$$O' = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}(10, 0) = (5, 0)$$

e eixos paralelos a $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$. Com esta informação obtemos que a mudanç de coordenadas é determinada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que no sistema $x'y'$ os focos e vértices estão em

$$F_1 = (-3, 0) \quad F_2 = (3, 0)$$

$$V_1 = (-2, 0) \quad V_2 = (2, 0).$$

Comparando isto com a equação canônica da elipse no sistema $x'y'$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

temos que

$$a = 2, \quad c = 3 \to b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5}.$$

A parametrização no sistema $x'y'$ é dada por

$$x' = \pm 2\cosh(t) \quad y' = \sqrt{5}\sinh(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Fazendo a mudança de coordenadas temos que a parametrização no sistema xy é

$$x = 5 \pm 2\cosh(t) \quad y' = \sqrt{5}\sinh(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

b) **Resolução:** Consideramos um sistema de coordenadas que tenha centro O' no ponto médio entre F_1 e F_2, isto é

$$O' = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}(4,8) = (2,4)$$

e eixos paralelos a

$$\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{||\overrightarrow{F_1F_2}||} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2).$$

e $\vec{u}_2 = (a,b)$ de forma tal que as entradas de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ formem as colunas de uma matriz de rotação. Então

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1).$$

Com esta informação temos que a mudança de coordenadas é determinada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

Observamos que no sistema $x'y'$ os focos e vértices estão em

$$F_1 = \left(2\sqrt{5}, 0\right) \quad F_2 = \left(-2\sqrt{5}, 0\right)$$

$$V_1 = \left(\sqrt{5}, 0\right) \quad V_2 = \left(-\sqrt{5}, 0\right).$$

Comparando isto com a equação canônica da elipse no sistema $x'y'$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

temos que

$$a = \sqrt{5}, \quad c = 2\sqrt{5} \to b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{15}.$$

A parametrização no sistema $x'y'$ é dada por

$$x' = \pm\sqrt{5}\cosh(t) \quad y' = \sqrt{15}\sinh(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Fazendo a mudança de coordenadas temos que a parametrização no sistema xy é

$$x = 2 + \pm b\cosh(t) + 2\sqrt{3}\sinh(t)$$

$$y = 4 - (\pm 2\cosh(t) + \sqrt{3}\sinh(t)),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

34. Quádricas

1. Encontrar a equaçao da superfície cilíndrica determinada pelo vetor $\vec{v} = (1,-1,2)$ e a curva diretriz

$$\mathscr{C} : \begin{cases} z^2 + 4yz - y^2 + 3y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Resolução:
Como $\vec{v}$ está na forma $(1,a,b)$ a equação da superfície é obtida ao fazer as substituições

$$y \to (y+x) \qquad z \to z - 2x.$$

na equação da curva. Fazendo isto, temos que a equação da superfície fica

$$(z-2x)^2 + 4(y+x)(z-2x) - (y+x)^2 + 3(y+x) = 5.$$

2. Mostre que

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 8xz - 1 = 0$$

determina a equação de uma superfície cilíndrica e determine uma equação da curva diretriz e um vetor paralelo com a reta geratriz.
Resolução:
Para mostrar que

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 8xz - 1 = 0 \qquad (*)$$

determina a equação de uma superfície cilíndrica primeiramente fazemos $x = 0$ e obtemos $y^2 + 2z^2 = 1$. Consideramos então a superfície cilíndrica com curva diretriz dada por

$$\mathscr{C} : \begin{cases} y^2 + 2z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

e com retas paralelas a um vetor $\overrightarrow{V} = (1,a,b)$. Esta superfície terá por equação

$$(y-ax)^2 + 2(z-bx)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \ (a^2 + 2b^2)x^2 + y^2 + 2z^2 - 2axy - 4bxz - 1 = 0$$

Comparando esta equação com $(*)$ temos que se

$$\begin{aligned} -2a &= 2 \\ -4b &= -8 \\ a^2+2b^2 &= 9 \end{aligned}$$

tem solução, a equação $(*)$ determina uma superfície cilíndrica. Portanto, como a solução existe, de fato é

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 2, \end{aligned}$$

obtemos que

$$9x^2+y^2+2z^2+2xy-8xz-1=0$$

descreve uma superfície cilíndrica com curva diretriz

$$\mathscr{C}:\left\{\begin{array}{c} y^2+2z^2=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

e retas geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{V}=(1,-1,2)$.

3. Encontrar a equação (em coordenadas cartesianas) da superfície cilíndrica S com curva diretriz

$$C\colon x^2+4y=0$$

no plano $z=0$ e retas geratrizes paralelas ao vetor

$$\vec{v}=(-2,4,-6).$$

Resolução:
Para encontrar S consideramos a curva diretriz

$$C\colon \left\{\begin{array}{c} x^2+4y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$

e as retas geratrizes paralelas ao vetor $\vec{v}=(-2,4,-6)$.
Começamos escrevendo $\vec{v}$ na forma $(a,b,1)$.
Multiplicamos então v por $-1/6$ e obtemos

$$\vec{v'}=(1/3,-2/3,1)$$

A equação da superfície procurada é

$$\left(x-\frac{z}{3}\right)^2+4\left(y+\frac{2z}{3}\right)=0$$

A equação da superfície procurada é

$$\left(x-\frac{z}{3}\right)^2+4\left(y+\frac{2z}{3}\right)=0.$$

4. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa.
   a) $4x^2-2y^2+z^2=1$;
   b) $3x^2+4y^2+z^2-12x-8y-2z+16=0$;
   c) $x^2+y+z^2=0$;
   d) $4x^2-8x-9y^2+6y-36z+3=0$.

   Resolução: Em cada caso trabalhamos as expressões, seja completando quadrados ou colocando nas formas canônicas, para identificar as quádricas.

a)

$$4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1 \quad \to \quad \frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/2} + z^2 = 1,$$

que é a equação de um hiperboloide de 1-folha.

b)

$$3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 8y - 2z + 16 = 0 \quad \to \quad 3(x-2)^2 + 4(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

Fazendo a traslação

$$x' = x - 2 \quad y' = y - 1 \quad z' = z - 1$$

chegamos na equação

$$\frac{(x')^2}{1/3} + \frac{(y')^2}{1/4} + (z')^2 = 1$$

que é a equação de um elipsoide.

c)

$$x^2 + y + z^2 = 0 \quad \to \quad x^2 + z^2 = (-1)y,$$

que é a equação de um paraboloide elíptico.

d)

$$4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0 \quad \to \quad 4(x-1)^2 - 9(y-1/3)^2 = 36z,$$

fazendo a traslação

$$x' = x - 1 \quad y' = y - \frac{1}{3} \quad z' = z$$

chegamos na equação

$$\frac{(x')^2}{1/4} - \frac{(y')^2}{1/9} = 36z'$$

que é a equação de um paraboloide hiperbólico.

5. a) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?
   b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas $r : y = z = 0$ e $l : x = y - 1 = 0$. Que conjunto é este?
   c) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?

Resolução:

a) Um ponto genérico deste conjunto será $Q = (x, y, z)$, então

$$d(Q, \pi) = |x - 2| \quad d(P, Q) = \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

Utilizando que $d(P, Q) = d(\pi, Q)$ temos que
$(x-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 + z^2 \to y^2 + z^2 = -8x.$
Portanto o ponto Q satisfaz a equação de um paraboloide elíptico de equação

$$y^2 + z^2 = -8x.$$

b) Um ponto genérico deste conjunto será $Q=(x,y,z)$, então

$$d(Q,r)=\frac{||(1,0,0)\times(x,y,z)||}{||(1,0,0)||}=\sqrt{z^2+y^2}\quad d(Q,l)=\frac{|(0,0,1)\times(x,y-1,z)|}{||(0,0,1)||}=\sqrt{(y-1)^2+x^2}.$$

Utilizando que $d(Q,r)=d(Q,l)$ temos que

$$z^2+y^2=x^2+(y-1)^2\quad\to z^2-x^2=-2y+1$$

Fazendo a traslação

$$x=x'\quad y-1/2=y'\quad z=z'$$

obtemos a equação

$$(z')^2-(x')^2=(-2)(y')$$

que é a equação de um paraboloide hiperbólico.

c) Um ponto genérico deste conjunto será $P=(x,y,z)$, então

$$d((2,0,0),P)=\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}\quad d((-2,0,0),P)=\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$$

Como

$$d((2,0,0),P)+d((-2,0,0),P)=6$$

Obtemos

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}=6-\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$$

Manipulando a experssão temos

$$(x-2)^2+y^2+z^2=36+(x+2)^2+y^2+z^2-12\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}=3+\frac{2}{3}x\quad\to\quad(x+2)^2+y^2+z^2=9+4x+\frac{4}{9}x^2$$

$$\to\quad\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{5}=1,$$

que é a equação de um elipsoide.

6. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica.
   a) $y^2=4x$, $z=0$ e $\vec{v}=(1,-1,1)$
   b) $x^2-y^2=1$, $z=0$ e $\vec{v}=(0,2,-1)$
   c) $x^2+z^2=1$, $y=0$ e $\vec{v}=(4,1,0)$
   d) $4x^2+z^2+4z=0$, $y=0$ e $\vec{v}=(4,1,0)$.

Resolução:

a) Se a curva e vetor diretor são

$$\mathscr{C}=\begin{cases} y^2 &= 4x\\ z &= 0\end{cases}\qquad \vec{v}=(1,-1,1).$$

então a equação da superfície é

$$(y+1)^2=4(x-1).$$

b) Se a curva e vetor diretor são

$$\mathscr{C} = \begin{cases} x^2 - y^2 & = & 1 \\ z & = & 0 \end{cases} \qquad \vec{v} = (0, 2, -1).$$

então a equação da superfície é

$$(x)^2 - (y+2)^2 = 1.$$

c) Se a curva e vetor diretor são

$$\mathscr{C} = \begin{cases} x^2 + z^2 & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \qquad \vec{v} = (4, 1, 0).$$

então a equação da superfície é

$$(x-4)^2 + z^2 = 1.$$

d) Se a curva e vetor diretor são

$$\mathscr{C} = \begin{cases} 4x^2 + z^2 + 4z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases} \qquad \vec{v} = (4, 1, 0).$$

então a equação da superfície é

$$4(x-4)^2 + z^2 + 4z = 0.$$

7. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes.
   a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$;
   b) $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.

   Resolução: Manipulamos as expressões ate levá-las numa expressão que permita interpretar como superfície cilíndrica.

   a)

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1 \quad \rightarrow \quad (x+z)^2 + (y-z)^2 = 1$$

que é a equação da superfície cilíndrica com curva diretriz e vetor diretor

$$\mathscr{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1 \\ z & = & 0 \end{cases} \qquad \vec{v} = (-1, 1, 1).$$

   b)

$$17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(y-2x)^2 + (z-3x)^2 = 2.$$

que é a equação da superfície cilíndrica com curva diretriz e vetor diretor

$$\mathscr{C} = \begin{cases} 2y^2 + z^2 & = & 2 \\ x & = & 0 \end{cases} \qquad \vec{v} = (1, 2, 3).$$

8. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.
   a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y;
   b) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z.

   Resolução:

a) Ao rotacionar a curva de equação $9x^2+4y^2=36$ e $z=0$ em torno do eixo y obtemos a superfície de equação

$$9(\sqrt{x^2+z^2})^2+4y^2=36 \quad \to \quad 9x^2+9z^2+4y^2=36.$$

b) Ao rotacionar a curva de equação $yz=1$ e $x=0$ em torno do eixo z obtemos a superfície de equação

$$\pm z\sqrt{y^2+x^2}=1$$

9. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação da curva geratriz.
   a) $x^2+y^2-z^3=0$;
   b) $y^6-x^2-z^2=0$

Resolução:

a) A superfície de equação $x^2+y^2-z^3=0$ é obtida ao rotacionar a curva

$$\mathscr{C}=\begin{cases} x^2-z^3 &= 0\\ y &= 0\end{cases}$$

ao redor do eixo $\hat{z}$.

b) A superfície de equação $y^6-x^2-z^2=0$ é obtida ao rotacionar a curva

$$\mathscr{C}=\begin{cases} y^6-x^2 &= 0\\ z &= 0\end{cases}$$

ao redor do eixo $\hat{y}$.

35. Coordenadas Cilíndricas e esféricas

1. Seja $\mathscr{S}$ o conjunto dos pontos no espaço cujas coordenadas cartesianas x, y, z satisfazem a equação

$$3y^2 - z^2 + 6y - 6x + 15 = 0$$

a) Determinar que tipo de superfície quádrica é dada por $\mathscr{S}$, encontrando a mudança de coordenadas que levam a equação canônica.
b) Determinar que tipo de cônica obtemos intersecando $\mathscr{S}$ com o plano $x = 3$.
c) Escrever a equação de $\mathscr{S}$ em coordenadas esféricas.
Resolução:
a) Para determinar o tipo de superfície quádrica que é dada por $\mathscr{S}$, primeiramente completamos quadrados na equação

$$3(y^2 + 2y\color{red}{+1}) - z^2 - 6x + 15 = 0\color{red}{+3}.$$

e obtemos a equação

$$3(y+1)^2 - z^2 = 6(x-2).$$

Se fazemos a traslação de coordenadas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x-2 \\ y' &=& y+1 \\ z' &=& z \end{array}\right.$$

a equação transforma a

$$3(y')^2 - (z')^2 = 6x' \Rightarrow \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{6} = x'$$

que é a equação de um paraboloide hiperbólico.
b) Ao fazer a interseção da superfície $\mathscr{S}$ com o plano $x = 3$ ou equivalentemente $x' = 1$ obtemos que as equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3(y')^2 - (z')^2 = 6x' & & \\ x' &=& 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3(y')^2 - (z')^2 = 6 & & \\ x' &=& 1 \end{array}\right.$$

que é a equação de uma hipérbole sobre o plano $x' = 1$.

c) Para escrever a equação de $\mathscr{S}$ em coordenadas esféricas substituimos

$$\begin{cases} x &= \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y &= \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ x &= \rho\cos(\phi) \end{cases}$$

Obtemos assim a equação

$$3(\rho\sin(\theta)\sin(\phi))^2 - (\rho\cos(\phi))^2$$

$$+6(\rho\sin(\theta)\sin(\phi)) - 6\rho\cos(\theta)\sin(\phi) + 15 = 0.$$

2. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:
   a) $x^2+y^2+4z^2 = 16$,
   b) $x^2-y^2 = 3z^2$.
   c) $x^2+y^2+z^2 = 9z$;
   d) $x^2+y^2 = 9$.

   Resolução: Utilizamos as relações

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z.$$

   a)

$$x^2+y^2+4z^2 = 16 \quad \to \quad r^2+4z^2 = 16.$$

   b)

$$x^2-y^2 = 3z^2 \quad \to \quad r^2\cos(2\theta) = 3z^2.$$

   c)

$$x^2+y^2+z^2 = 9z \quad \to \quad r^2+z^2 = 9z.$$

   d)

$$x^2+y^2 = 9 \quad \to \quad r^2 = 9 \quad \to \quad r = 3.$$

3. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada:
   a) $r = 3\cos\theta$
   b) $z^2\sin\theta = r^3$.
   c) $r = z$
   d) $z = r^2$
   e) $z = r\cos(\theta+\pi/4) - 2r\sin(\theta)$
   f) $z = r^2 + r\cos(\theta+\pi/3)$

   Resolução:

   a)

$$r = 3\cos\theta \quad \to \quad x^2+y^2 = 3x.$$

   b)

$$z^2\sin\theta = r^3 \quad \to \quad z^2y = (x^2+y^2)^2.$$

   c)

$$r = z \quad \to \quad \sqrt{x^2+y^2} = z.$$

d)

$$z = r^2 \quad \to \quad z = x^2 + y^2.$$

e)

$$z = r\cos(\theta + \pi/4) - 2r\sin(\theta) \quad \to \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 2y.$$

f)

$$z = r^2 + r\cos(\theta + \pi/3) \quad \to \quad z = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

4. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada:
   a) $r = 2\tan\theta$;
   b) $r = 9\sec\phi$.
   c) $r = \sin(\theta)\sin(\phi)$
   d) $r = 2\cos(\theta)$
   e) $r = \cos(\phi)$

   Resolução: Utilizamos as relações

$$x = r\cos(\theta)\cos(\phi) \quad y = r\sin(\theta)\cos(\phi) \quad z = r\sin(\phi)$$

$$r\cos(\phi) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

a)

$$r = 2\tan\theta \quad \to \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\frac{y}{x}.$$

b)

$$r = 9\sec\phi \quad \to \quad r\cos(\phi) = 9 \quad \to \quad \sqrt{x^2+y^2} = 9.$$

c)

$$r = \sin(\theta)\sin(\phi) \quad \to \quad r^2 = \sin(\theta)r\sin(\phi) \quad \to \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

d)

$$r = 2\cos(\theta) \quad \to \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

e)

$$r = \cos(\phi) \quad \to \quad r^2 = r\cos(\phi) \quad \to \quad x^2+y^2+z^2 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

5. Considere a superfície de revolução S obtida de rotacionar a curva

$$\ell : z = y^2,$$

   no plano yz ao redor do eixo z.
   Determinar
   i- a equação da superfície S em coordenadas cartesianas.
   ii- a equação da superfície S em coordenadas cilíndricas.
   iii- a equação da superfície S em coordenadas esféricas.

Resolução:
Considere a superfície cilíndrica S obtida de rotacionar a curva $\ell : z = y^2$ no plano yz ao redor do eixo z.
Começamos determinando a equação da superfície S em coordenadas cartesianas.
Observamos que, se

$$f(y,z) = y^2 - z,$$

a equação da superfície cilíndrica Sé dada por

$$f(\sqrt{x^2+y^2},z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = z$$

As coordenadas cilíndricas (r,θ,z) e as cartesianas (x,y,z) se relacionam por

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \\ z & = & z \end{array}$$

Então, como

$$x^2+y^2 = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) = r^2,$$

a equação da superfície S em coordenadas cilíndricas é dada por

$$r^2 = z.$$

As coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) e as cartesianas (x,y,z) se relacionam por

$$\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y & = & \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z & = & \rho\cos(\phi) \end{array}$$

Então, como

$$x^2+y^2 = (\rho\cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (\rho\sin(\theta)\sin(\phi))^2 = \rho^2\sin(\phi)^2,$$

a equação da superfície S em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\rho^2\sin(\phi)^2 = \rho\cos(\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)^2}$$

Juntando as partes podemos responder:

i- a equação da superfície S em coordenadas cartesianas é

$$x^2+y^2 = z.$$

ii- a equação da superfície S em coordenadas cilíndricas é

$$r^2 = z.$$

iii- a equação da superfície S em coordenadas esféricas é

$$\rho = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)^2}$$

6. Seja S o conjunto dos pontos $P = (x,y,z)$ no espaço cujas coordenadas cartesianas x, y, z satisfazem a equação

$$x^2+y^2+z^2 = 9z.$$

a) Determinar que tipo de superfície é S.
b) Escrever a equação de S em coordenadas esféricas, escolhendo adequadamente o polo e os eixos.

Resolução:
Seja S o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)$ no espaço cujas coordenadas cartesianas x, y, z satisfazem a equação

$$x^2+y^2+z^2=9z.$$

Claramente S não é superfície cilíndrica nem superfície cônica pois não contém nenhuma reta nela. Portanto só resta provar que ela é de revolução. Para determinar isto temos duas opções:

i) Observamos que é uma superficie de revolução pois se rotacionamos a curva $f(x,z)=0$ com respeito ao eixo z, onde $f(x,z)=x^2+z^2-9z$ obtemos que

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\ \equiv\ x^2+y^2+z^2=9z.$$

ii) Ou completamos quadrados na equação acima

$$x^2+y^2+\left(z^2-9z+\frac{81}{4}\right)=+\frac{81}{4}.$$

e obtemos

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$$

que é a equação de uma esfera de raio $r=\frac{9}{2}$ centrada em $(0,0,9/2)$ e portanto uma superficie de revolução em torno ao eixo z.

Para escrever a equação de S em coordenadas esféricas temos novamente duas opções:

i- Utilizamos que

$$x=\rho\cos(\theta/0\sin(\phi),\ y=\rho\sin(\theta/0\sin(\phi),\ z=\rho\cos(\phi)$$

e o centro em $(0,0,0)$ para $\theta\in[0,2\pi)$ e $\phi\in[0,\pi]$. Portanto $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Substituindo obtemos

$$\rho^2=9\rho\cos(\phi)\implies\rho=9\cos(\phi).$$

ii- Ou fazemos uma traslação do sistema de coordenadas com origem em $(0,0,9/2)$ então

$$x=x',\ y=y',\ z-9/2=z'$$

donde, a equação que define S torna-se

$$x'^2+y'^2+z'^2=(9/2)^2.$$

Agora consideramos coordenadas esféricas

$$x'=\rho\cos(\theta)\sin(\phi),\ y'=\rho\sin(\theta)\sin(\phi),\ z'=\rho\cos(\phi)$$

e o centro em $(0,0,9/2)$ para $\theta\in[0,2\pi)$ e $\phi\in[0,\pi]$. Portanto $x'^2+y'^2+z'^2=\rho^2$. Substituindo obtemos

$$\rho=9/2.$$

36. Parametrizacão de Superfícies

1.
2. a) Determine a superfície cônica, com vértice na origem, obtida a partir da curva definida por

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ e } z = 2.$$

b) Encontre uma parametrização dela.

Resolução: a) Da teoria, temos que a equação da superfície será obtida, ao substituir na equação

$$x^2 + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$$

as variáveis x e y por

$$x \to \frac{2x}{z} \qquad y \to \frac{2y}{z}.$$

Desta forma obtemos

$$\frac{4x^2}{z^2} + \frac{4y^2}{3z^2} - 1 = 0.$$

Manipulando a expressão chegamos em

$$4x^2 + \frac{4}{3}y^2 = z^2,$$

que é a equação de um cone elíptico.

b) Observamos que ao fazer

$$(*) \begin{cases} h_1(r,\theta) & = \frac{r}{2}\cos(\theta) \\ h_2(r,\theta) & = \frac{\sqrt{3}r}{2}\sin(\theta) \\ h_3^{\pm}(r,\theta) & = \pm r \end{cases} \qquad (r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi).$$

temos que

$$4(h_1(r,\theta))^2 + \frac{4}{3}(h_2(r,\theta))^2 = r^2 = (\pm h_3(r,\theta))^2.$$

e portanto $(*)$ é uma parametrizazção da superfície.

3. Seja S a superfície com equação (em coordenadas cartesianas)

$$S\colon -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Determinar equações paramétricas para a superfície S.
Resolução:
Para parametrizar a superficie S de equação

$$S\colon -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

observamos primeiramente que ela é um hiperboloide de duas folhas. Portanto precissaremos de dois conjuntos de parametrizações.
Fazemos a seguinte substituição

$$\begin{array}{rcl} x' &=& x/a \\ y' &=& y/b \\ z' &=& z/b \end{array} \qquad (*)$$

e reescrevemos a equação como

$$-\left(x'^2+z'^2\right)+y'^2=1 \qquad (**)$$

Uma parametrização de $(*)$ é

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \sinh(t)\cos(s) \\ y' &=& \cosh(t) \\ z' &=& \sinh(t)\sin(s) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \sinh(t)\cos(s) \\ y' &=& -\cosh(t) \\ z' &=& \sinh(t)\sin(s) \end{array}\right.$$

para $t\in[0,\infty)$ e $s\in[0,2\pi)$.
De fato, observamos que satisfazem a equação $(**)$ pois, por exemplo,
$-(\sinh(t)\cos(s))^2+(\cosh(t))^2-(\sinh(t)\sin(s))^2 \quad = \quad 1.$
Se $P=(x_0',y_0',z_0')$ um ponto em S então (x_0,z_0) determinam um ponto no plano $y=y_0$ e tal que

$$\left(x_0'^2+z_0'^2\right)=-1+y_0'^2>0$$

portanto obtemos um $t_0\in[0,\infty)$ tal que $\sinh(t_0)^2=-1+y_0'^2$ donde $y_0=\pm\cosh(t_0)$.
Por outro lado como a interseção de S com o plano $y'=y_0'$ determina uma circunferência de raio $\sinh(t_0)^2$, tiramos que (x_0',z_0') são um ponto desta e, portanto, existe um $s_0\in[0,2\pi)$ tal que

$$x_0'=\sinh(t_0)\cos(s_0) \qquad z_0'='\sinh(t_0)\sin(s_0)$$

Assim, utilizando as identidades $(*)$ temos que todo ponto de S é coberto pela parametrização

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\sinh(t)\cos(s) \\ y &=& b\cosh(t) \\ z &=& c\sinh(t)\sin(s) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\sinh(t)\cos(s) \\ y &=& -b\cosh(t) \\ z &=& c\sinh(t)\sin(s) \end{array}\right.$$

para $t\in[0,\infty)$ e $s\in[0,2\pi)$.

4. (a) Determine a equação da superfície cilíndrica com curva diretriz

$$\mathscr{C}=\left\{\begin{array}{rl} x^2-y^2 &=1 \\ z &=0 \end{array}\right.$$

e vetor paralelo as retas geratrizes $W=(0,2,-1)$.

(b) Dada a equação da curva diretriz

$$\mathscr{C} = \begin{cases} y - x^2 & = 0 \\ z & = 2 \end{cases}$$

determine a equação da superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0,0,0)$

(c) Mostre que a equação $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ representa uma superfície de revolução e ache uma parametrização dela.

Resolução:

Sabemos que a curva diretriz é

$$\mathscr{C} = \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

e o vetor paralelo as retas geratrizes $W = (0,2,-1)$. Portanto se $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ e $V = -W = (0,-2,1)$ então a equação da superfície cilíndrica é

$$f(x, y+2z) = 0 \implies x^2 - (y+2z)^2 = 1.$$

Dada a equação da curva diretriz

$$\mathscr{C} = \begin{cases} y - x^2 & = 0 \\ z & = 2 \end{cases}$$

A superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0,0,0)$ é dada pela equação

$$f\left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}\right) = 0$$

para $f(x,y) = y - x^2$. Portanto a equação procurada é

$$2y = 4zx^2.$$

Se $f(x,z) = x^2 - z^3$ e um curva no plano x,z e o eixo de revolução é o eixo y então a superfície de revolução obtida de girar f em torno de y é descrita pela equação

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \implies x^2 + y^2 = z^3.$$

Donde segue que a equação representa uma superfície de revolução.

Para achar uma parametrização dela considere as coordenadas cilíndricas $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z$. Então, substituindo por estas na equação obtemos que $r^2 - z^3 = 0$ donde $z = r^{2/3}$.

Assim, uma parametrização é

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta) \\ y = & r\sin(\theta) \\ z = & r^{2/3} \end{cases} \qquad r \in [0,\infty),\ \theta \in [0,2\pi)$$