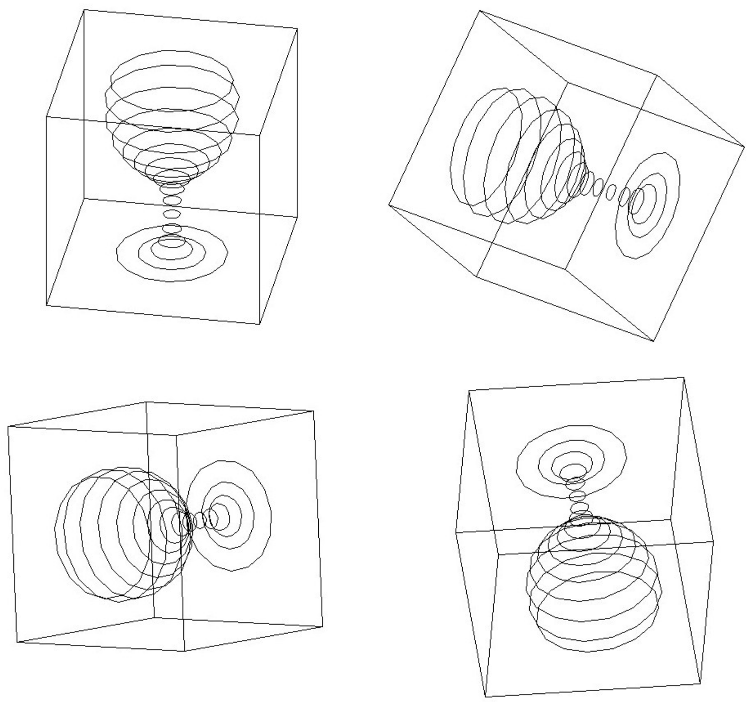
Introdução à Álgebra Linear



$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Lenimar Nunes de Andrade

RNPatu@gmail.com

versão 1.3 – 17/março/2021

Sumário

Prefácio

Este texto é uma compilação das notas de aula da disciplina Introdução à Álgebra Linear, que foi ministrada na UFPB no período especial 2020.1, durante a epidemia da COVID-19. Corresponde a uma versão reformulada e atualizada das notas de aula da disciplina que foi ministrada em 2018.2.

O estudo da Álgebra Linear é de fundamental importância para as mais diversas áreas de conhecimento. É indispensável no estudo de Matemática Aplicada, Equações Diferenciais, Computação Gráfica e Física em geral.

No capítulo 1, fazemos uma rápida revisão dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Esses conceitos deveriam ser estudados no ensino médio e são de extrema importância para o entendimento dos demais capítulos.

No capítulo 2, descrevemos o escalonamento de matrizes, espécie de simplificação de uma matriz, a mais importante ferramenta de cálculo utilizada em todas as atividades. Pode ser utilizado com sucesso na resolução de sistemas lineares e na trabalhosa operação de inversão de matrizes.

Os capítulos 3 e 4 são sobre espaços e subespaços vetoriais. Neles, são apresentados os conceitos de combinação linear, independência linear, base e dimensão.

Os capítulos 5, 6 e 7 são sobre transformações lineares e alguns de seus importantes elementos como núcleo, imagem, autovalores, autovetores e um importante critério para decidir quando é possível a diagonalização.

O capítulo 8 é sobre produto interno e o processo de ortogonalização, e o capítulo 9 é sobre formas bilineares e quadráticas, com uma aplicação à classificação de cônicas e quádricas.

No final, em um dos apêndices, tem um breve tutorial sobre o Maxima, um poderoso sistema de Computação Algébrica de uso geral que serve de apoio computacional a todos os capítulos. O Maxima pode ser usado para resolver os mais diversos problemas de Cálculo e de Álgebra, sendo assim uma ferramenta valiosíssima.

Na elaboração deste texto, foram utilizados exclusivamente programas gratuitos que podem ser facilmente encontrados à disposição na Internet, tais como

LaTeX, Maxima, GeoGebra e FastStone Image Viewer.

Agradeço a todos os que nos apoiaram e incentivaram na elaboração deste texto. Em particular, agradeço a Joémerson de Oliveira Maia por ter encontrado alguns erros que havia na versão inicial. De um modo especial, agradeço à minha esposa Luíza Amélia pela ajuda permanente.

João Pessoa, 10 de março de 2021

Lenimar Nunes de Andrade

Capítulo 1

Matrizes, determinantes e sistemas lineares

1.1 Matrizes

1.1.1 Definições básicas

Dados m e n inteiros positivos, definimos I e J como sendo os conjuntos:

$$I = \{1, 2, 3, \ldots, m\},$$

$$J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

O conjunto de todos os pares ordenados (x, y), nos quais $x \in I$ e $y \in J$ é denominado **produto cartesiano** de I por J e é denotado por $I \times J$.

$$I \times J = \{(x, y) \mid x \in I \text{ e } \; y \in J\}$$

Por exemplo, se $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4\}$, então

$$\begin{aligned} I \times J \;=\; \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4), \\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}. \end{aligned}$$

Dado um conjunto K (por exemplo, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$), chamamos **matriz de ordem** $m \times n$ de elementos em K toda função $f : I \times J \longrightarrow K$ que associa um par ordenado (i, j) a um elemento $f(i, j) \in K$. O elemento $f(i, j)$ costuma ser denotado por a_{ij}: $f(i, j) = a_{ij}$.

Representamos uma matriz M de ordem $m \times n$ ("m por n") por uma **tabela retangular** na qual os elementos a_{ij} são distribuídos em m linhas e n colunas. A posição do elemento a_{ij} na tabela é no cruzamento da i-ésima linha com a j-ésima coluna. Por exemplo a_{23} é colocado na segunda linha e terceira coluna da tabela, enquanto que a_{41} é colocado na quarta linha e primeira coluna. Costuma-se colocar os elementos da tabela entre parênteses ou entre colchetes:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1. Seja $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & -10 \\ 0 & -2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$. Note que M tem 4 linhas e 2 colunas; logo, dizemos que M é uma matriz de ordem 4×2. Alguns de seus elementos são: $a_{11} = 4$, $a_{22} = -10$, $a_{31} = 0$ e $a_{42} = 9$.

Exemplo 1.2. Escrever a matriz $M = (a_{ij})$ de ordem 2×3 em que $a_{ij} = 2i + j^2 - 3$ para todo $i \in \{1, 2\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3\}$.

Solução: Atribuímos valores para i e para j, depois calculamos o valor de a_{ij} em cada caso.

- $i = 1$, $j = 1 \Rightarrow a_{11} = 2 \cdot 1 + 1^2 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$
- $i = 1$, $j = 2 \Rightarrow a_{12} = 2 \cdot 1 + 2^2 - 3 = 2 + 4 - 3 = 3$
- $i = 1$, $j = 3 \Rightarrow a_{13} = 2 \cdot 1 + 3^2 - 3 = 2 + 9 - 3 = 8$
- $i = 2$, $j = 1 \Rightarrow a_{21} = 2 \cdot 2 + 1^2 - 3 = 4 + 1 - 3 = 2$
- $i = 2$, $j = 2 \Rightarrow a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$
- $i = 2$, $j = 3 \Rightarrow a_{23} = 2 \cdot 2 + 3^2 - 3 = 4 + 9 - 3 = 10$

Portanto, a matriz M é $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$.

1.1.2 Diagonal principal e secundária

Seja $M = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $n \times n$. O conjunto D de todos os elementos a_{ij} nos quais $i = j$, ou seja, o conjunto

$$D = \{a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \ldots,\ a_{nn}\}$$

é denominado **diagonal principal** da matriz. O conjunto S de todos os elementos a_{ij} nos quais $i + j = n + 1$, ou seja,

$$S = \{a_{n1},\ a_{n-1,2},\ a_{n-2,3},\ \ldots,\ a_{1n}\}$$

é denominado **diagonal secundária**.

Exemplo 1.3. Se $M = \begin{bmatrix} \boxed{8} & 5 & 5 \\ 3 & \boxed{4} & -9 \\ 0 & 3 & \boxed{\text{-6}} \end{bmatrix}$, então a diagonal principal de M é o conjunto $\{8, 4, -6\}$. Por outro lado, se $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ -4 & -5 & \boxed{2} & 0 \\ 2 & \boxed{4} & 0 & 10 \\ \boxed{\text{-9}} & 1 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ então a diagonal secundária de N é $\{-9, 4, 2, 3\}$.

1.1.3 Tipos especiais de matrizes

Quando a matriz possuir um formato particular, então a denominamos de maneira diferente, de acordo com o caso.

- Se todos os elementos da matriz forem iguais a 0, então ela é chamada **matriz nula**. Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula de ordem 2×2.

- Se $n = 1$, então a matriz é chamada **matriz coluna**. Exemplo: $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

- Se $m = 1$, então a matriz é chamada **matriz linha**. Por exemplo, $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

- Se a quantidade de linhas for igual à quantidade de colunas, ou seja, se $m = n$, então ela é denominada **matriz quadrada de ordem** n. Exemplo: $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

- Uma matriz quadrada $M = (a_{ij})$ de ordem n é denominada **matriz diagonal** quando $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, quando os elementos que não pertençam à diagonal principal forem todos nulos. Exemplo: $M = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

- Uma **matriz identidade de ordem** n é uma matriz quadrada de ordem n em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, para todo i e todo j, ou seja, é uma matriz diagonal de ordem n em que a diagonal principal é formada exclusivamente pelo número 1. Exemplo: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Uma **matriz triangular superior** é uma matriz em que todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são nulos. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 0 \\ \boxed{0} & -1 & 0 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 5 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & -5 \end{bmatrix}$ é triangular superior.

- Uma **matriz triangular inferior** é uma matriz em que todos os elementos situados acima da diagonal principal são nulos. Por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 3 & -5 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 4 & 8 & 6 & \boxed{0} \\ 4 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é triangular inferior.

1.1.4 Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$, são **iguais** quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j, ou seja, quando os elementos correspondentes (mesmo índice) forem iguais. Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então a matriz A é igual à matriz C (em símbolos, $A = C$); no entanto, A não é igual a B (em símbolos, $A \neq B$).

Exemplo 1.4. Determine os valores de x e y para que as matrizes $A = \begin{bmatrix} x^2 & 5 \\ 4y & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sejam iguais.

Solução: Devemos ter $a_{11} = b_{11}$ e $a_{21} = b_{21}$. Logo, $x^2 = 7$ e $4y = 3$. Resolvendo-se essas duas equações obtemos: $x = \pm\sqrt{7}$ e $y = \frac{3}{4}$.

1.1.5 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$, a **soma das matrizes** A e B, que se indica por $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são iguais à soma dos elementos correspondentes de A e B, ou seja, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por exemplo,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}}_{C}$$

Dadas matrizes A, B e C, de mesma ordem $m \times n$, a adição de matrizes possui as seguintes propriedades:

- $A + B = B + A$, ou seja, a adição de matrizes é **comutativa**;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$, ou seja, a adição é **associativa**;
- $A + O = A$, onde O é a matriz nula de ordem $m \times n$; isso significa que a matriz nula é o **elemento neutro** da adição de matrizes;
- Para qualquer matriz A, existe uma matriz $D = (d_{ij})$ de mesma ordem $m \times n$ tal que $A + D = D + A = O$. Os elementos d_{ij} dessa matriz D são calculados pela fórmula $d_{ij} = -a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é denominada **matriz oposta** de A e costuma ser denotada por $D = -A$.

A **diferença** das matrizes A e B de mesma ordem é a matriz denotada por $A - B$ e calculada através da fórmula: $A - B = A + (-B)$.

1.1.6 Multiplicação por um escalar

Se K for um conjunto numérico (por exemplo, $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) e k for um elemento de K, então dizemos que k é um **escalar**. Assim, $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{3}{4}$ e $k_3 = \sqrt{2}$ são exemplos de escalares.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e um escalar k, definimos o **produto de k por A** como sendo a matriz $B = (b_{ij})$ na qual $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nesse caso, denotamos $B = k \cdot A$, ou simplesmente $B = kA$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$ e $k = 3$, então $k \cdot A = 3A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 15 \\ -9 & 33 & 0 \end{bmatrix}$.

O produto de um escalar por uma matriz possui as seguintes propriedades:

- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$
- $0 \cdot A = O$
- $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$
- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

onde A e B são matrizes de ordem $m \times n$, O é a matriz nula de ordem $m \times n$, a e b são quaisquer escalares.

1.1.7 Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times p$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $p \times n$, definimos o **produto de A por B** como sendo a matriz $C = (c_{ik})$ de ordem $m \times n$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk},$$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nesse caso, denotamos $C = A \cdot B$, ou simplesmente $C = AB$.

Note que a quantidade de colunas de A precisa ser igual à quantidade de linhas de B para o produto AB poder ser definido. Note também que a i-ésima linha de A é multiplicada pela k-ésima coluna de B, elemento por elemento, e no final, calcula-se a soma dos produtos desses elementos:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} \end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{matrix}} \longrightarrow a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{ip}b_{pk}$$

Exemplo 1.5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA e verifique se $AB = BA$.

Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 22 \\ 47 & 58 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 1+6\cdot 3 & 4\cdot 2+6\cdot 5 \\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 38 \\ 31 & 54 \end{bmatrix}$$

de onde observamos que $AB \neq BA$. Isso mostra que o produto de matrizes, em geral, não é comutativo.

Exemplo 1.6. Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -8 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$, calcule AB e BA.

Solução: Temos que

- uma matriz de ordem $\underbrace{2 \times 3}_{A}$ multiplicada por $\underbrace{3 \times 2}_{B}$ resulta em matriz de ordem $\underbrace{2 \times 2}_{AB}$
- uma matriz de ordem $\underbrace{3 \times 2}_{B}$ multiplicada por $\underbrace{2 \times 3}_{A}$ resulta em matriz de ordem $\underbrace{3 \times 3}_{BA}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -8 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3\cdot 6+5\cdot(-2)+1\cdot 10 & 3\cdot 2+5\cdot(-8)+1\cdot 0 \\ 0\cdot 6+4\cdot(-2)-3\cdot 10 & 0\cdot 2+4\cdot(-8)-3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -34 \\ -38 & -32 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -8 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6\cdot 3+2\cdot 0 & 6\cdot 5+2\cdot 4 & 6\cdot 1+3\cdot(-3) \\ -2\cdot 3-8\cdot 0 & -2\cdot 5-8\cdot 4 & -2\cdot 1-8\cdot(-3) \\ 10\cdot 3+0\cdot 0 & 10\cdot 5+0\cdot 4 & 10\cdot 1+0\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 38 & -3 \\ -6 & -42 & 22 \\ 30 & 50 & 10 \end{bmatrix}$$

Note que $AB \neq BA$, novamente.

Exemplo 1.7. Sejam $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & 5 & 11 \\ 7 & 6 & -8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$. Se for possível, calcule MN e NM.

Solução:

$$MN = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & 5 & 11 \\ 7 & 6 & -8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y+4z+5t \\ -3x-4y+5z+11t \\ 7x+6y-8z-9t \\ x+4z+5t \end{bmatrix}.$$

A quantidade de colunas de N é diferente da quantidade de linhas de M; logo, não é possível efetuar o produto NM.

Observação: Dadas duas matrizes A e B, se existirem os produtos AB e BA, eles podem ser bem diferentes um do outro. No entanto, existem casos especiais em que esses produtos coincidem. Por exemplo, se as matrizes forem quadradas de mesma ordem e uma das matrizes for nula, então os produtos AB e BA serão ambos nulos e, consequentemente, $AB = BA$.

1.1.8 Propriedades do produto de matrizes

O produto de matrizes possui as seguintes propriedades:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, se A for de ordem $m \times n$, B for de ordem $n \times p$ e C for de ordem $p \times r$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, se A for de ordem $m \times n$, B e C forem de ordem $n \times p$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, se A e B forem de ordem $m \times n$ e C for de ordem $n \times p$;
- $A \cdot I = I \cdot A = A$, se A e I (matriz identidade) forem quadradas e de mesma ordem;
- $A \cdot O = O \cdot A = O$, se A e O (matriz nula) forem quadradas e de mesma ordem;
- $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$, se k for um escalar, A for de ordem $m \times n$ e B for de ordem $n \times p$.

1.1.9 Potência de expoente inteiro positivo

Se A for uma matriz quadrada e n for um inteiro positivo, definimos A **elevado à n-ésima potência** , denotado por A^n , como sendo o produto com

n fatores iguais a A:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ vezes}}.$$

As potências com expoentes inteiros positivos de matrizes quadradas têm algumas propriedades tais como $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ e $(A^m)^n = A^{mn}$ para quaiquer inteiros positivos m e n.

Exemplo 1.8. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, calcule A^4.

Solução:

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 4 & -2 - 3 \\ 8 + 12 & -4 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot (A \cdot A) = A^2 \cdot A^2$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 - 5 \cdot 20 & 0 \cdot (-5) - 5 \cdot 5 \\ 20 \cdot 0 + 5 \cdot 20 & 20 \cdot (-5) + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & -25 \\ 100 & -75 \end{bmatrix}.$$

1.1.10 Matriz transposta

Denominamos **matriz transposta** de $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, a matriz $B = (b_{ij})$, de ordem $n \times m$, definida por $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como consequência dessa definição temos que as linhas de A coincidem ordenadamente com as colunas de B. A matriz transposta de A é denotada por $B = A^t$. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, então $B = A^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Outro exemplo: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & i & x \\ b & j & y \\ c & k & z \end{bmatrix}$.

1.1.11 Propriedades da transposta

Algumas propriedades envolvendo matriz transpostas são:

- $(A^t)^t = A$, para toda matriz A;

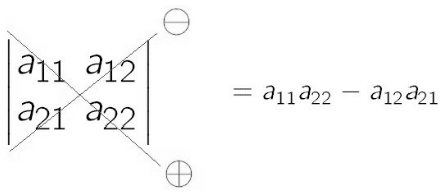
- $(A+B)^t = A^t + B^t$, se A e B forem da mesma ordem;
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, se A for de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$;
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$, se k for um escalar e A for uma matriz quaisquer.

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^t = A$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então A é denominada **matriz simétrica**. Por outro lado, se $A^t = -A$, ou seja, $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então A é denominada **matriz anti-simétrica**. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ é simétrica, enquanto que $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ é anti-simétrica.

1.2 Determinantes

A toda matriz quadrada $M = (a_{ij})$ com elementos em um conjunto K (que pode ser $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, entre outros), podemos associar um único elemento de K que é conhecido como **determinante de** M, denotado por $\det M$ ou por $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ e é calculado da seguinte forma:

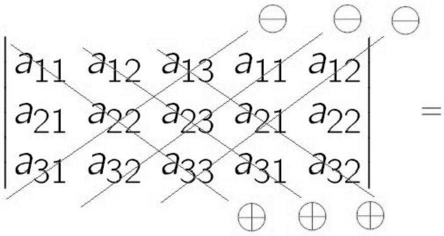
- Se $n = 1$, $M = [a_{11}]$ e definimos $\det M = a_{11}$;
- Se $n = 2$, $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, definimos $\det M = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Essa fórmula pode ser representada no seguinte diagrama:



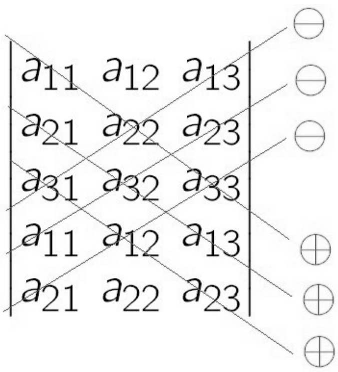
- Se $n = 3$, $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, definimos

$$\det M = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

ou seja, $\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Essa fórmula pode ser representada nos seguintes diagramas que são construídos através da repetição das duas primeiras colunas ou duas primeiras linhas da matriz e efetuando-se os produtos de cada uma das diagonais, com o cuidado de trocar os sinais nas diagonais que são paralelas à diagonal secundária.



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- De um modo geral, definimos o cofator M_{ij} da matriz M como sendo o determinante da matriz de ordem $n-1$ que se obtém ao se eliminar a i-ésima linha e j-ésima coluna de M, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. O determinante de M é definido como sendo o somatório dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respectivos cofatores:

$$\det M = a_{11} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} + \cdots + a_{1n} \cdot M_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot M_{1j}.$$

Por exemplo, para $n = 4$ obtemos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Exemplo 1.9. Calcule $D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Solução: $D = i \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = i(24-1) - j(18-2) + k(3-8) =$ $23i - 16j - 5k$.

1.2.1 Propriedades do determinante

Algumas das propriedades dos determinantes são listadas a seguir:

- Se duas linhas de um determinante são iguais, então ele é igual a zero;
- Se a matriz possui alguma linha nula, então seu determinante é igual a zero;
- Se uma linha for igual à soma de outras linhas, então o determinante é igual a zero;
- Se forem trocadas as posições de duas linhas, então o determinante troca de sinal;
- $\det(A^t) = \det A$;
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$;
- O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

Em geral, toda propriedade de determinante que for válida para linhas, também vale para colunas. Por exemplo, a primeira propriedade anterior também pode ser enunciada assim: "Se duas colunas de um determinante são iguais, então ele é igual a zero".

Exemplo 1.10. Determine o valor de $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Solução: Essa matriz é triangular inferior. Logo, basta multiplicar sua diagonal principal para obtermos o valor do determinante: $D = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Exemplo 1.11. Calcule os seguintes determinantes: $A = \begin{vmatrix} \ln 2 & \ln 3 & \ln 6 \\ \ln 4 & \ln 5 & \ln 20 \\ \ln 3 & \ln 4 & \ln 12 \end{vmatrix}$,

$B = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & 1 & \operatorname{sen}^2\theta \\ \cos^2\alpha & 1 & \operatorname{sen}^2\alpha \\ \cos^2\beta & 1 & \operatorname{sen}^2\beta \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} \frac{3\pi}{7} & \frac{4\pi}{5} & \frac{13\pi}{6} \\ \frac{4\pi}{7} & \frac{6\pi}{5} & \frac{5\pi}{6} \\ \pi & 2\pi & 3\pi \end{vmatrix}$.

Solução:

- No determinante A, temos que a soma da primeira coluna com a segunda dá igual à terceira coluna: $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$, $\ln 4 + \ln 5 = \ln 20$ e $\ln 3 + \ln 4 = \ln 12$. Logo, seu valor é zero, ou seja, $A = 0$;
- Em B, a soma da primeira com a terceira coluna dá igual à segunda coluna. Logo, $B = 0$;
- Em C, a soma da primeira com a segunda linha dá igual à terceira linha. Logo, $C = 0$.

1.3 Matrizes inversas

Uma matriz quadrada A, de ordem n, se chama invertível se existir uma matriz B, de mesma ordem, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n. A matriz B é chamada **matriz inversa** de A e é denotada por $B = A^{-1}$.

Exemplo 1.12. Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Calculamos agora os produtos AB e BA:

- $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Daí, concluímos que B é a matriz inversa de A, ou seja, $B = A^{-1}$.

Exemplo 1.13. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Consideremos uma matriz genérica $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de ordem 2 . Calculando o produto AB, obtemos: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ·

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observamos agora que esse produto nunca poderá ser igual à matriz identidade de ordem 2. Logo, a matriz A não possui inversa.

Algumas propriedades envolvendo matriz inversa são:

- Quando existe, a matriz inversa é única;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$;
- A é invertível $\Leftrightarrow \ \det(A) \neq 0$;

1.3.1 Como calcular a matriz inversa

Para calcular a inversa da matriz A, construímos a transposta da matriz dos cofatores M_{ij} e dividimos pelo determinante de A, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se $n = 2$ e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\det(A) = ad - bc$ e os cofatores de A são:

- $M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det([d]) = d$
- $M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det([c]) = -c$
- $M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det([b]) = -b$
- $M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det([a]) = a$

de onde podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Se $n = 3$ e $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, então $\det(A) = aei - bdi - afh + cdh + bfg - ceg$ e os cofatores de A são:

- $M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = ei - fh$
- $M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = fg - di$
- $M_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = dh - eg$
- $M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} = ch - bi$
- $M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} = ai - cg$
- $M_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} = bg - ah$
- $M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = bf - ce$
- $M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = cd - af$
- $M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$

Portanto,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{aei - bdi - afh + cdh + bfg - ceg} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.14. Calcular a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Solução: O determinante de A é igual a $5 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = -22$. Logo, $A^{-1} = -\frac{1}{22} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{7}{22} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix}$

Exemplo 1.15. Calcular a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: Temos que $\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-6) - 2 \cdot (0-6) + 3 \cdot (4-5) = 3$

Os cofatores de A são:

- $M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$
- $M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$
- $M_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$
- $M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$
- $M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$
- $M_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- $M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$
- $M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$
- $M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

Daí obtemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

No próximo capítulo, apresentamos uma maneira bem mais eficiente de se calcular a matriz inversa.

1.4 Sistemas lineares

1.4.1 Equações lineares

Seja K um conjunto numérico como $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Chama-se **equação linear** nas variáveis $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$ toda equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in K$ são chamados **coeficientes** e $b \in K$ é o **termo independente** da equação. Por exemplo, $4x - 3y + 8z = 10$ é uma equação linear nas variáveis $x, y, , z$ com coeficientes iguais a $4,\ -3,\ 8$ e com termo independente igual a 10.

Uma **solução** de uma equação linear é um conjunto ordenado de n números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que se substituídos na equação no lugar das variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, respectivamente, obtemos uma sentença verdadeira.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \text{ é solução } \Leftrightarrow a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b \text{ é verdadeira}$$

Por exemplo, $(3, 2, 1)$ é uma solução da equação linear $2x + 3y - 5z = 7$ porque se substituirmos $x = 3, y = 2, z = 1$ obtemos $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 7$, ou seja, $7 = 7$ que é verdadeira. Por outro lado, $(1, 2, 3)$ não é solução porque se substituirmos $x = 1, y = 2, z = 3$, obtemos $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 7$, ou seja, $-7 = 7$ que é falso.

1.4.2 Sistemas lineares

Um **sistema linear** $m \times n$ é um conjunto de m equações lineares a n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_1 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_1 + \cdots + a_{2n}x_1 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_1 + \cdots + a_{3n}x_1 = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_1 + \cdots + a_{mn}x_1 = b_m \end{cases}$$

Um conjunto ordenado $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema linear S se for solução de todas as equações do sistema, ou seja,

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \text{ é solução } &\Leftrightarrow a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ &\qquad \text{são verdadeiras para todo } i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}\end{aligned}$$

Por exemplo, o sistema linear $\begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+y+5z=4 \end{cases}$ admite $(-2,1,1)$ como sendo uma solução porque

- $2\cdot(-2)+2\cdot 1+2\cdot 1=0 \ \Rightarrow\ 0=0$ (verdadeira)
- $2\cdot(-2)+3\cdot 1+1=0 \ \Rightarrow\ 0=0$ (verdadeira)
- $-2+1+5\cdot 1=4 \ \Rightarrow\ 4=4$ (verdadeira)

mas não admite $(2,-1,-1)$ como solução porque

- $2\cdot 2+2\cdot(-1)-2\cdot 1=0 \ \Rightarrow\ 0=0$ (verdadeira)
- $2\cdot 2+3\cdot(-1)+(-1)=0 \ \Rightarrow\ 0=0$ (verdadeira)
- $2+(-1)+5\cdot(-1)=4 \ \Rightarrow\ -4=4$ (falsa)

1.4.3 Classificação de um sistema linear

Se um sistema linear possuir pelo menos uma solução, diremos que ele é **possível** ou **compatível**; caso contrário, se não tiver solução, diremos que é **impossível** ou **incompatível**.

Se o sistema for possível e tiver uma única solução, diremos que é um **sistema determinado**; se tiver mais de uma solução, diremos que é um **sistema indeterminado**.

Sistema linear **homogêneo** é aquele em que todos os termos independentes das equações são iguais a zero, ou seja, $b_1=b_2=b_3=\cdots=b_m=0$. Por exemplo, $\begin{cases} 5x-4y+z=0 \\ x+2y+8z=0 \\ 3x-3y+z=0 \end{cases}$ é um sistema linear homogêneo.

Todo sistema linear homogêneo é compatível e admite pelo menos a solução $(0,0,0,\ldots,0)$.

Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são **equivalentes** se toda solução de um também for solução do outro, ou seja, se os dois sistemas tiverem as mesmas soluções. Por exemplo, os sistemas $S_1 \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ e $S_2 \begin{cases} 3x+4y=7 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$ são equivalentes porque admitem a mesma solução $(1,\ 1)$.

Exemplo 1.16. Consideremos o sistema S $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ 4x-y+3z=0 \end{cases}$. Como os termos independentes são todos nulos, então esse é um sistema homogêneo. Logo,

$(0,\ 0,\ 0)$ é solução. Mas também são soluções os seguintes valores: $(1,\ 1,\ -1)$, $(2,\ 2,\ -2)$, $(3,\ 3,\ -3)$, $(4,\ 4,\ -4)$, etc. Concluímos assim que S é um sistema possível indeterminado.

1.4.4 Matrizes e sistemas lineares

A todo sistema linear S podemos associar algumas matrizes:

- Matriz dos coeficientes do sistema $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- Matriz dos termos independentes $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

- Matriz das variáveis do sistema $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- Matriz completa do sistema $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$

Usando essas matrizes, podemos escrever o sistema S na forma de equação matricial: $AX = B$. Por exemplo, o sistema $\begin{cases} 2x & -5y & +4z & = & 11 \\ 6x & +y & -z & = & 0 \\ 2x & & -7z & = & -9 \end{cases}$ pode ser escrito como uma equação matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

1.4.5 Resolução de um sistema linear

Consideremos um sistema linear de duas equações a duas variáveis

$$S\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $-d$ e a segunda por a, obtemos o sistema

$$\begin{cases} -\cancel{adx} & -bdy & = -cd \\ \cancel{adx} & +aey & = af \end{cases}$$

Adicionando cada lado das equações do sistema anterior, obtemos $(ad-ad)x+(ae-bd)y = af-cd$, ou seja, $(ae-bd)y = af-cd \Rightarrow y = \dfrac{af-cd}{ae-bd}$. De modo análogo, multiplicando a primeira equação do sistema S por $-e$, multiplicando a segunda equação por b e adicionando as novas equações assim obtidas, encontramos o seguinte valor $x = \dfrac{ec-bf}{ae-bd}$. Obtivemos assim a seguinte solução para o sistema S: $\quad x = \dfrac{ec-bf}{ae-bd}, \quad y = \dfrac{af-cd}{ae-bd}$.

As expressões $ec-bf$, $ae-bd$ e $af-cd$ podem ser escritas no formato de determinante de matriz de ordem 2×2: $ec-bf = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = D_1$, $ae-bd = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = D$, $af-cd = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = D_2$. Sendo assim, a solução do sistema S pode ser escrita na forma: $x = \dfrac{D_1}{D}$ e $y = \dfrac{D_2}{D}$. É importante observar que se $D \neq 0$, o sistema S tem solução única que são os valores de x e y mostrados.

Note que D é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, D_1 é o determinante da matriz obtida quando os termos independentes do sistema substituem a coluna 1 da matriz dos coeficientes e que D_2 é o determinante da matriz obtida quando os termos independentes substituem a coluna 2. Isso pode ser generalizado para qualquer ordem: em um sistema linear $n\times n$ (n equações a n variáveis), a k-ésima variável x_k pode ser calculada pela fórmula $x_k = \dfrac{D_k}{D}$, onde D é o determinante da matriz dos coeficentes e D_k é o determinante da matriz obtida a partir da substituição dos termos independentes pela k-ésima coluna da matriz dos coeficientes. Observamos também que se $D \neq 0$, então o sistema tem solução única.

Exemplo 1.17. Determine a solução do sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 22 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

Solução: Observando os coeficientes e os termos independentes das equações, calculamos os seguintes determinantes:

- $D = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 28 = -43$

- $D_1 = \begin{vmatrix} 22 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -66 - 20 = -86$

- $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 22 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 154 = -129$

A partir daí, concluímos que $x = \frac{-86}{-43} = 2$ e $y = \frac{-129}{-43} = 3$, ou seja, a solução encontrada é $(2,\ 3)$.

1.5 Exercícios Resolvidos

Exemplo 1.18. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz inversa de A sabendo que $A^3 - 12A - 16I = O$, onde O é a matriz nula e I é a matriz identidade, todas de ordem 3×3.

Solução: A equação $A^3 - 12A - 16I = O$ pode ser escrita na forma $A(A^2 - 12I) = 16I$, ou seja, $A \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot (A^2 - 12I)\right) = I$. De modo semelhante, essa equação também pode ser escrita na forma $\left(\frac{1}{16} \cdot (A^2 - 12I)\right) \cdot A = I$. A partir daí, concluímos que a matriz inversa de A é $A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot (A^2 - 12I)$.

Como $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{bmatrix}$, temos finalmente que

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \left(\begin{bmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{bmatrix} - 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.19. Sejam $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $p(x) = \det(xI - M)$.

Solução:

$$p(x) = \det\left(x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 0 \\ 1 & x+2 & -2 \\ 0 & -4 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x+2 & -2 \\ -4 & x-5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & x-5 \end{vmatrix} + 0 = (x-2)((x+2)(x-5)-8)+3(x-5)$$

$$= (x-2)(x^2-3x-18)+3x-15 = x^3-3x^2-18x-2x^2+6x+36+3x-15$$

$$= x^3-5x^2-9x+21.$$

Exemplo 1.20. Resolver o sistema $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=6 \end{cases}$

Solução: Esse sistema não é linear. No entanto, se for feita a mudança de variável: $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$ e $Z = \frac{1}{z}$, então ele se transforma no seguinte sistema linear nas variáveis X, Y, Z:

$$\begin{cases} X+Y+Z=4 \\ X-Y-Z=5 \\ X+Y-Z=6 \end{cases}$$

- Somando as duas primeiras equações, dos dois lados, obtemos: $(X+Y+Z)+(X-Y-Z)=4+5 \Rightarrow 2X=9 \Rightarrow X=\dfrac{9}{2}$.
- Substraindo a terceira equação da segunda, obtemos: $(X+Y-Z)-(X-Y-Z)=6-5 \Rightarrow 2Y=1 \Rightarrow Y=\dfrac{1}{2}$.
- Substituindo os valores de X e Z na primeira equação, obtemos: $\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+Z=4 \Rightarrow 5+Z=4 \Rightarrow Z=-1$.

Finalmente, obtemos $X = \frac{1}{x} = \frac{9}{2}$, $Y = \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, $Z = \frac{1}{z} = -1$ e daí concluímos que $x = \frac{2}{9}$, $y = 2$, $z = -1$.

Exemplo 1.21. Determine o valor de k para que o sistema linear homogêneo $\begin{cases} 2x+ky-z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$ admita apenas a solução $(0,0,0)$.

Solução: O determinante da matriz dos coeficientes do sistema é

$$D = \begin{vmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 3 \end{vmatrix} = 22 - 5k - 1 = 21 - 5k$$

Concluímos assim que se o sistema tem solução única, então $D \neq 0$, ou seja, $21 - 5k \neq 0$ que implica $k \neq \dfrac{21}{5}$.

1.6 Exercícios Propostos

1) Comprove que são válidos os seguintes produtos de matrizes curiosos:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 42 \\ 84 & 79 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 14 & 29 \\ 42 & 87 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1414 & 2929 \\ 4242 & 8787 \end{bmatrix}$

2) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Mostre que $A^3 - 9A + 10I = O$, onde I e O são as matrizes identidade e nula de ordem 3, respectivamente.

3) Sendo $M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$, calcule M^{2020}. Resp.: $M^{2020} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Se $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$, calcule AB e BA.

Resp.: $AB = BA = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$

5) Se $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, calcule $X = A^2 - 8A + 13I$.

Resp.: $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) Determine x, y e z para que $\begin{bmatrix} 1 & x & 8 \\ 9 & 2 & 0 \\ y & z & 5 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Resp.: $x = 9$, $y = 8$, $z = 0$

7) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $B = A^2 + 2A + 5I$ e, a partir desse resultado, mostre que $A^{-1} = -\frac{1}{5}(A + 2I)$. Resp.: $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8) Sabendo que a equação da reta que passa pelos pontos $A(a_1, b_1)$ e $B(a_2, b_2)$ é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

determine a equação do reta que passa pelos pontos $A(1, -1)$ e $B(3, 7)$.
Resp.: $y = 4x - 5$

9) Sabendo que a equação do plano que passa pelos pontos $A(a_1, b_1, c_1)$, $B(a_2, b_2, c_2)$ e $C(a_3, b_3, c_3)$ é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

determine a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, 2, 0)$, $B(2, 3, -1)$ e $C(0, 4, 4)$. Resp.: $2x - y + z = 0$

10) Calcule o determinante $\begin{vmatrix} x-1 & -3 & 2 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 1 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$. Resp.: $x^3 + 3x^2 + x - 6$

11) Dê exemplo de um sistema linear 3×3 que tenha como solução $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$.
Resp.: Pense em três equações nas variáveis x, y, z, por exemplo: $2x + y - z = \ldots$, $3x + y - 5z = \ldots$, $4x - 5y + 2z = \ldots$. Agora, é só substituir a solução desejada para completar as equações. Obtemos dessa forma o seguinte sistema linear: $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 3x + y - 5z = 4 \\ 4x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$

11) Se $A = \begin{bmatrix} 213 & 917 & 0 & 0 \\ 1030 & 811 & 0 & 0 \\ 634 & 711 & 0 & 0 \\ 842 & 335 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 477 & 371 & 1500 & 876 \\ 549 & 788 & 990 & 413 \end{bmatrix}$, calcule AB.

Resp.: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Observação: este exemplo mostra que é possível um produto de matrizes ser igual à matriz nula, mesmo que cada fator não seja nulo.*

12) Calcule o produto ABC das seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 & 998 \\ 997 & 996 & 995 \\ 994 & 993 & 992 \\ 991 & 990 & 989 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Resp.: $ABC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Observação: neste exemplo, apesar de dar o mesmo resultado, é mais fácil calcular $A(BC)$ do que $(AB)C$.*

13) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Resp.: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

14) Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, mostre que $AB = AC$ e, no entanto, $B \neq C$.

Resp.: $AB = AC = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *Observação: este exemplo mostra que nem sempre podemos "cortar" a matriz A na igualdade $AB = AC$.*

Capítulo 2

Escalonamento de Matrizes

Apresentamos neste capítulo mais um procedimento de cálculo: o escalonamento de matrizes. Pode ser utilizado com qualquer tipo de matriz e é muito útil na resolução de diversos problemas. É indispensável que ele seja completamente entendido e bastante praticado nos exercícios.

2.1 Operações elementares sobre linhas

Dado uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, denotemos a linha k (ou k-ésima linha) dessa matriz por L_k. Chamam-se **operações elementares** com as linhas da matriz as seguintes operações:

[1.] Trocar a linha i pela linha j. Em símbolos: $L_i \leftrightarrow L_j$;

[2.] Somar linhas e substituir uma das linhas pela soma. Em símbolos: $L_i + L_j \to L_i$ ou $L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $L_i = L_i + L_j$;

[3.] Multiplicar uma linha por uma constante $k \neq 0$. Em símbolos: $kL_i \to L_i$ ou $L_i \leftarrow kL_i$ ou $L_i = kL_i$.

Observação: Podemos também subtrair linhas ($L_i - L_j = L_i + (-1)L_j$) e dividir uma linha por uma constante não nula $\left(\dfrac{L_i}{k} = \dfrac{1}{k}L_i\right)$.

Se uma matriz B for obtida através da aplicação de um número finito de operações elementares com as linhas de uma matriz A, então dizemos que A é **equivalente por linha** a B e denotamos isso da seguinte forma: $A \longrightarrow B$ ou $A \sim B$.

Exemplo 2.1. Consideremos a matriz $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, vamos aplicar as seguintes operações elementares: troca de linhas, multiplicação de uma linha por uma constante (duas vezes) e soma de linhas:

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\frac{1}{2})L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\frac{1}{3})L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \frac{19}{3} \end{bmatrix}$$

Baseado no que foi obtido no exemplo anterior, temos que $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \frac{19}{3} \end{bmatrix}$, que também pode ser denotado por $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \frac{19}{3} \end{bmatrix}$. Isso significa que "a matriz $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ é equivalente por linha a $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \frac{19}{3} \end{bmatrix}$".

2.2 Matriz escalonada

Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, é uma **matriz escalonada**, ou ainda, que está na **forma escada** quando:

[1.] Para cada $r = 1, 2, \ldots, m$, o primeiro elemento não nulo da linha r é igual a 1, ou seja, se o primeiro elemento não nulo ocorrer na coluna s, então $a_{rs} = 1$;

[2.] Todos os elementos da coluna s que estiverem abaixo de a_{rs} são nulos, ou seja, $a_{ks} = 0$ se $r < k \leq m$.

Essa é uma definição que pode ter algumas variações. Dependendo do autor, ela pode ser apresentada de outras formas parecidas.

A ideia principal dessa definição é que a quantidade de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo vai aumentando linha por linha, da esquerda para a direita, até chegar na última linha. São exemplos de matrizes escalonadas as seguintes matrizes:

- $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 6 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$

- $B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 7 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 8 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$

- $C = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 13 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$

- $N = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $P = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 13 & 0 & -15 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 8 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Para qualquer matriz dada, podemos obter a partir dela uma matriz escalonada através das operações elementares com as linhas. Não há um roteiro único para se obter essa matriz escalonada. No entanto, podemos seguir algumas orientações:

[1.] Se houver linhas nulas na matriz, então trocamos as posições delas de modo que elas se tornem as últimas linhas;

[2.] Na linha L_r, obtemos um número 1 como sendo o primeiro elemento não nulo dessa linha. Isso pode ser feito através de uma troca de linhas ou a partir de outras operações, por exemplo, divisão dos elementos da linha por um valor constante. Vamos supor que o elemento 1 assim obtido esteja na coluna s, ou seja, suponhamos $a_{rs} = 1$.

[3.] Substituímos cada linha L_k que esteja abaixo da linha r por $L_k - a_{ks}L_r$, para todo $k > r$.

[4.] Repetimos o cálculo realizado no item [2.] com a linha L_{r+1} no lugar da linha L_r; depois, repetimos o item [3.]; fazemos isso até chegar na última linha da matriz.

Esse procedimento é muito repetitivo e pode ser demorado. Mas é algo que se mostra útil para resolver um grande número de problemas e deve ser bem estudado e bastante praticado.

Exemplo 2.2. Determine a forma escalonada de $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: A primeira coisa a se fazer é obter o número 1 como sendo o primeiro elemento não nulo da primeira linha. Isso pode ser feito de muitas formas: trocando-se a primeira linha pela terceira, trocando-se a primeira linha pela segunda, subtraindo-se a primeira linha da segunda e colocando-se o resultado como sendo a primeira linha etc. Vamos preferir trocar a primeira linha pela terceira, entre muitas outras possibilidades. Depois disso, vamos zerar todos os elementos da primeira coluna que estiverem abaixo do 1 obtido. Depois, passamos para a segunda linha, obtemos um número 1 como primeiro elemento não nulo e zeramos tudo o que estiver abaixo dele.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 1L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{3})L_2 \to L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 9L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\frac{1}{-5})L_3 \to L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Note que essa última matriz apresenta as seguintes características: o primeiro elemento diferente de 0 em cada linha é igual a 1 e os elementos que estão situados abaixo dele são iguais a 0. Por causa disso, concluímos que a matriz escalonada obtida é $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Observação 1: A matriz escalonada assim obtida, em geral, não é única. São possíveis **várias respostas** diferentes, todas consideradas **corretas**. Por exemplo, se no início do exemplo anterior fosse feita a troca de linhas $L_1 \leftrightarrow L_2$ no lugar da troca $L_1 \leftrightarrow L_3$ utilizada, então a matriz escalonada obtida seria igual a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ que é uma resposta diferente da obtida antiormente, mas também é considerada correta.

Observação 2: Ao escalonar uma matriz, a quantidade de linhas nulas e a quantidade de linhas não nulas obtidas no final são sempre as mesmas. Essas quantidades independem do procedimento utilizado no escalonamento. Por exemplo, no caso anterior, ao completar o escalonamento, foram obtidas 3 linhas não nulas e nenhuma linha nula. Qualquer outro procedimento utilizado para escalonar a matriz deveria chegar no final a essas mesmas quantidades. Por causa disso, damos um nome a cada um desses valores: a quantidade de linhas nulas após o escalonamento se chama **nulidade** e a quantidade de linhas não nulas se chama **posto** da matriz. Sendo assim, no exemplo anterior, temos que a nulidade de A é igual a 0 e o posto é igual a 3.

Exemplo 2.3. A matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada e tem 3 linhas não nulas e 2 linhas nulas. Portanto, seu posto é igual a 3 e sua nulidade é 2.

Exemplo 2.4. Obtenha uma matriz escalonada a partir da aplicação de operações elementares à matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ e determine seu posto e sua nulidade.

Solução: Primeiramente, vamos colocar o número 1 como primeiro elemento não nulo da primeira linha. Podemos fazer isso de várias formas, por exemplo, trocando as posições da primeira e terceira linhas. Depois disso, para as outras linhas, aplicamos as operações $L_r - a_{r1}L_1 \to L_r$, com $r = 2, 3, \dots 6$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 1L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - 4L_1 \to L_4 \\ L_5 - 2L_1 \to L_5 \\ L_6 - 5L_1 \to L_6 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Passamos agora a considerar a matriz a partir da segunda linha e da segunda coluna, repetindo a primeira linha e primeira coluna até o final dos cálculos. O primeiro elemento não nulo da segunda linha é igual a 1; portanto, vamos agora zerar todos os elementos da segunda coluna que estão abaixo dele. Para isso, efetuamos as operações $L_r - a_{r2}L_2 \to L_r$, com $r = 3, 4, 5, 6$.

Como a terceira linha obtida é nula, trocamos a posição dela com a última linha ($L_3 \leftrightarrow L_6$)

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 1L_2 \to L_3 \\ L_4 + 2L_2 \to L_4 \\ L_5 - 1L_2 \to L_5 \\ L_6 + 2L_2 \to L_6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_6 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passamos agora a considerar a matriz a partir da terceira linha e da terceira coluna, repetindo as duas primeiras linhas e duas primeiras colunas até o final. Para obter o primeiro elemento não nulo da terceira linha igual a 1, fazemos uma divisão da linha por 10: $(\frac{1}{10})L_3 \to L_3$. Depois disso, zeramos todos os elementos da terceira coluna que estão abaixo desse 1 obtido; para isso, efetuamos as operações $L_r - a_{r3}L_3 \to L_r$, com $r = 4$ e $r = 5$.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{L_3}{10} \to L_3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 - 8L_3 \to L_4 \\ L_5 + 1L_3 \to L_5 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtivemos então que a matriz escalonada obtida é $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que seu posto é 3 e sua nulidade também é 3.

Exemplo 2.5. Reduzir $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ à forma escada e calcular o posto e a nulidade.

Solução: Inicialmente, obtemos um número 1 como sendo o primeiro elemento não nulo da primeira linha. Isso pode ser feito de várias formas, aqui vamos subtrair as duas primeiras linhas e colocar a diferença como sendo a primeira linha $(L_2 - L_1 \to L_1)$. Depois disso, através das operações $L_r - a_{r1}L_1 \to L_r$,

$r = 2, 3, 4, 5$, zeramos os outros elementos da primeira coluna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \to L_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3 \\ L_4 - 5L_1 \to L_4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 11 & -10 & 15 & -5 \\ 0 & 11 & -10 & 15 & -5 \\ 0 & 22 & -20 & 30 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (\frac{1}{11})L_2 \to L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{10}{11} & \frac{15}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 11 & -10 & 15 & -5 \\ 0 & 22 & -20 & 30 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 11L_2 \to L_3 \\ L_4 - 22L_2 \to L_4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{10}{11} & \frac{15}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos assim que a forma escalonada da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{10}{11} & \frac{15}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que seu posto é igual a 2 e que sua nulidade é 2.

Exemplo 2.6. Reduzir $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ à forma escalonada e calcular posto e nulidade.

Solução: Como o primeiro elemento não nulo da primeira linha é igual a 1, iniciamos zerando os elementos da primeira coluna que estão abaixo dele através das operações $L_2 - a_{21}L_1 \to L_2$ e $L_3 - a_{31}L_1 \to L_3$.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -12 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (\frac{1}{3})L_2 \to L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\frac{1}{-2})L_3 \to L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

A partir daí, concluímos que a forma escalonada da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

que o seu posto é igual a 3 e a sua nulidade é 0.

2.3 Método de eliminação de Gauss

Existem muitos métodos para resolução de um sistema linear. Nesta seção, vamos descrever e exemplificar um método simples e eficiente que é conhecido como *método de eliminação de Gauss**.

Esse método consiste em transformar o sistema dado em um sistema mais simples, de fácil resolução. O procedimento de transformação consiste no escalonamento da matriz completa do sistema, no qual são utilizadas apenas operações elementares com as linhas. O processo de escalonamento não altera a solução do sistema porque são realizadas apenas operações de troca de linhas, multiplicação de uma linha por uma constante e adição de linhas.

Depois que o escalonamento é concluído, resolvemos cada equação, iniciando com a última equação (que é a mais simples) e terminando com a primeira. A seguir, vamos exemplificar esse método de resolução.

Exemplo 2.7. Resolver o sistema $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 30 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Solução: A matriz completa do sistema é $M = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 30 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. O escalo-

*Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão.

namento de A é executado nos seguintes passos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 30 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \longrightarrow \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 26 \end{bmatrix} (-1)L_2 \to L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - (-7)L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\frac{1}{26})L_3 \to L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Obtivemos assim que a forma escalonada da matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa é a matriz completa correspondente ao sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y + 4z = 0 \\ \qquad\quad\;\; z = 1 \end{cases}.$$

Dessa equação da última linha, obtemos $z = 1$. Substituindo na segunda equação, obtemos: $y + 4 \cdot 1 = 0$, ou seja, $y = -4$. Substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos $x + (-4) + 1 = 1$, ou seja, $x = 4$. Finalmente, obtivemos a solução do sistema como sendo igual a $(4,\ -4,\ 1)$.

Exemplo 2.8. Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 4y - 6z + 3t = 3 \\ 3x - 5y + 2z + 4t = 4 \\ 5x - y - 4z + 7t = 0 \end{cases}.$

Solução: A matriz completa do sistema é $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ que pode ser escalonada da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \to L_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -9 & 8 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -9 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 22 & -22 & 1 & 1 \\ 0 & 44 & -44 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (\frac{1}{22})L_2 \to L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -9 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} \\ 0 & 44 & -44 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 44L_2 \to L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -9 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

e essa última matriz obtida corresponde ao sistema $\begin{cases} x - 9y + 8z + t = 1 \\ y - z + \frac{t}{22} = \frac{1}{22} \\ 0 = -7 \end{cases}$. Como essa terceira equação do sistema $(0 = -7)$ é uma contradição, ou seja, é sempre falsa, temos que o sistema dado é **impossível**, não tem solução.

Exemplo 2.9. Resolver o sistema linear: $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + 5y = 11 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 12 \\ 6x + 3y = 15 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$.

Solução: Vamos determinar a forma escalonada da matriz completa M do sistema:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 6 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 6 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chegamos à conclusão que o sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x + \frac{y}{4} = \frac{9}{4} \\ \quad\quad y = 1 \end{cases}$. Substituindo $y = 1$ na primeira equação, obtemos $x = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$. Portanto, a solução do sistema dado é $(2,\ 1)$.

Para comprovar que a solução encontrada está correta, devemos substituí-la no sistema original (do enunciado) e observar que obtemos apenas sentenças verdadeiras: $9 = 9$, $11 = 11$, $3 = 3$, $12 = 12$, $15 = 15$, $3 = 3$.

2.3.1 Variáveis livres

Às vezes, um sistema linear pode ter variáveis que não podem ser calculadas, ou seja, que podem assumir quaisquer valores. Nesses casos, chamamos essas variáveis de **variáveis livres**.

Por exemplo, o sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y - 3z = 2 \end{cases}$ tem 3 variáveis e apenas 2 equações; logo, é um sistema que possui "variáveis demais". Em um caso como esse, não conseguimos calcular os valores de todas as variáveis que sejam soluções do sistema. Como fica uma variável sem ter seu valor calculado, dizemos que essa variável é livre para assumir qualquer valor, ou simplesmente que é uma variável livre. Nesses casos, as outras variáveis devem ser calculadas em função das variáveis livres. Por exemplo, se no sistema anterior escolhermos a variável livre como sendo z, então os valores de x e y devem ser calculados em função de z. No caso desse sistema, obtemos $\begin{cases} x + y = 4 - z \\ x - y = 2 + 3z \end{cases}$, e daí, somando-se as equações, obtemos $2x = 6 + 2z$ que implica $x = 3 + z$. Substituindo na primeira equação, podemos calcular $y = 1 - 2z$. Assim, a solução do sistema é $(3 + z, 1 - 2z, z)$, onde z pode assumir qualquer valor real ou complexo. Por exemplo, se $z = 0$, obtemos $(3, 1, 0)$ como sendo solução do sistema; se $z = 1$, obtemos que $(4, -1, 1)$ é outra solução; se $z = 2$, obtemos que $(5, -3, 2)$ é mais outra e assim por diante.

Sistemas lineares que têm variáveis livres são sistemas possíveis indeterminados e eles possuem sempre uma infinidade de soluções. O conjunto de todas as soluções de um sistema indeterminado é denominada **solução geral** do sistema.

O número de variáveis livres que esse sistema pode ter é sempre igual a $n - p$, onde n é o número de variáveis e p é o posto da matriz completa do sistema.

Exemplo 2.10. Resolver $\begin{cases} 2x + y - z - s + t = 1 \\ x - y + z + s - 2t = 0 \\ 3x + 3y - 3z - 3s + 4t = 2 \\ 4x + 5y - 5z - 5s + 7t = 3 \\ 5x + 4y - 4z - 4s + 5t = 3 \end{cases}$

Solução: A matriz completa do sistema é $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & -4 & -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e pode ser escalonada da seguinte forma:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & -4 & -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema dado equivale a $\begin{cases} x - y + z + s - 2t = 0 \\ y - z - s + \frac{5}{3}t = \frac{1}{3} \end{cases}$. Podemos isolar o valor de y na segunda equação para obter $y = \frac{1}{3} + z + s - \frac{5}{3}t$. Isolando x e substituindo y na primeira equação, obtemos $x = (\frac{1}{3} + z + s - \frac{5}{3}t) - z - s + 2t = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t$. Obtivemos assim a solução geral do sistema: $x = \dfrac{t+1}{3}$, $y = \dfrac{3z + 3s - 5t + 1}{3}$, $\forall z, s, t \in \mathbb{R}$.

Observação 1: A solução geral também pode ser escrita na forma

$$\left(\underbrace{\frac{t+1}{3}}_{x}, \ \underbrace{\frac{3z + 3s - 5t + 1}{3}}_{y}, \ z, \ s, \ t \right).$$

Observação 2: As variáveis z, s, t não foram calculadas e por isso são livres para assumirem quaisquer valores. Note que a quantidade de variáveis livres é igual ao número total de variáveis do sistema ($n = 5$), menos o posto da matriz do sistema escalonada ($p = 2$), ou seja, é igual a $5 - 2 = 3$.

Observação 3: Em geral, podemos escolher um conjunto diferente de variáveis livres e escrever a solução geral de outras formas. Por exemplo, se isolarmos o valor de z na segunda equação, obtemos $z = y - s + \frac{5}{3}t - \frac{1}{3}$. Substituindo esse valor de z na primeira equação e isolando o valor de x, obtemos $x = y - (y - s + \frac{5}{3}t - \frac{1}{3}) - s + 2t = \frac{t}{3} + \frac{1}{3}$. Assim, a solução geral desse sistema também pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{t+1}{3},\ y,\ \frac{3y - 3s + 5t - 1}{3},\ s,\ t\right).$$

2.4 Calculando a inversa de uma matriz

O método utilizado para resolver sistemas lineares através de escalonamento também pode ser usado de forma eficiente para calcular a inversa de uma matriz quadrada.

A partir de uma matriz A de ordem $n \times n$, montamos o seguinte sistema linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $A \cdot X = B$, onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Multiplicando por A^{-1} à esquerda dessa equação, obtemos $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Isso significa que se isolarmos as variáveis do sistema $AX = B$, ou seja, se obtivermos $X = A^{-1}B$, então a matriz que aparece no segundo membro multiplicando B é a matriz inversa de A. Para isolarmos essas variáveis, é conveniente fazer um escalonamento da matriz completa do sistema, conforme está exemplificado a seguir.

Exemplo 2.11. Vamos determinar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Consideremos as matrizes $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. A equação $AX = B$ equivale ao sistema $\begin{cases} x + 4y - 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 5x + y - 2z = c \end{cases}$. Vamos escalonar a matriz completa M desse sistema:

$$M=\begin{bmatrix}\boxed{1} & 4 & -3 & a\\ 2 & 3 & 1 & b\\ 5 & 1 & -2 & c\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1} & 4 & -3 & a\\ 0 & -5 & 7 & b-2a\\ 0 & -19 & 13 & c-5a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1} & 4 & -3 & a\\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & \frac{2a-b}{5}\\ 0 & 19 & -13 & 5a-c\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1} & 4 & -3 & a\\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & \frac{2a-b}{5}\\ 0 & 0 & \frac{68}{5} & \frac{-13a+19b-5c}{5}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1} & 4 & -3 & a\\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & \frac{2a-b}{5}\\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-13a+19b-5c}{68}\end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada equivale ao sistema $\begin{cases}x+4y-3z=a\\ y-\frac{7}{5}z=\frac{2a-b}{5}\\ z=\frac{-13a+19b-5c}{68}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{-13a+19b-5c}{68}$ $\Rightarrow y=\frac{2a-b}{5}+\frac{7}{5}z=\frac{9a+13b-7c}{68}\Rightarrow x=a-4y+3z=\frac{-7a+5b+13c}{68}$. Escrevendo em forma de equação matricial:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{7}{68} & \frac{5}{68} & \frac{13}{68}\\ \frac{9}{68} & \frac{13}{68} & -\frac{7}{68}\\ -\frac{13}{68} & \frac{19}{68} & -\frac{5}{68}\end{bmatrix}}_{A^{-1}}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

Dessa forma, concluímos que

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{68} & \frac{5}{68} & \frac{13}{68}\\ \frac{9}{68} & \frac{13}{68} & -\frac{7}{68}\\ -\frac{13}{68} & \frac{19}{68} & -\frac{5}{68}\end{bmatrix}=\frac{1}{68}\begin{bmatrix}-7 & 5 & 13\\ 9 & 13 & -7\\ -13 & 19 & -5\end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.12. Determinar a matriz inversa de $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

Solução: Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2 & 2 & b \\ 1 & 2 & 3 & 3 & c \\ 1 & 2 & 3 & 4 & d \end{bmatrix}$. Vamos obter a forma escalonada de M:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & c-a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & d-a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & c-b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d-b \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & d-c \end{bmatrix}$$

Essa última matriz equivale ao sistema linear $\begin{cases} x+y+z+t=a \\ y+z+t=b-a \\ z+t=c-b \\ t=d-c \end{cases}$ $\Rightarrow t = d-c \Rightarrow z = c-b-t = -b+2c-d \Rightarrow y = b-a-z-t = -a+2b-c \Rightarrow x = a-y-z-t = 2a-b$. Escrevendo essas equações na forma de equação matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.13. Calcular A^{-1} sabendo que $A = \begin{bmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 \\ 40 & 56 & 15 & 21 \\ 15 & 20 & 6 & 8 \\ 25 & 35 & 10 & 14 \end{bmatrix}$.

Solução: A partir de A, construímos a matriz $M = \begin{bmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 & a \\ 40 & 56 & 15 & 21 & b \\ 15 & 20 & 6 & 8 & c \\ 25 & 35 & 10 & 14 & d \end{bmatrix}$ e obtemos sua forma escalonada:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 40 & 56 & 15 & 21 & b \\ 15 & 20 & 6 & 8 & c \\ 25 & 35 & 10 & 14 & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & 1 & b - \frac{5a}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & c - \frac{5a}{8} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} & d - \frac{25a}{24} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3b-5a}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & c - \frac{5a}{8} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} & d - \frac{25a}{24} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3b-5a}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & c - \frac{5a}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & \frac{8d-5b}{8} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3b-5a}{8} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{8c-5a}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & \frac{8d-5b}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3b-5a}{8} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{8c-5a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{24d-40c-15b+25a}{24} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{a}{24} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3b-5a}{8} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{8c-5a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 24d - 40c - 15b + 25a \end{bmatrix}$$

Escrevendo a matriz escalonada em forma de sistema linear, obtemos

$$\begin{cases} x + \frac{4y}{3} + \frac{3z}{8} + \frac{t}{2} = \frac{a}{24} \\ y + \frac{3t}{8} = \frac{-5a+3b}{8} \\ z + \frac{4t}{3} = \frac{-5a+8c}{3} \\ t = 25a - 15b - 40c + 24d \end{cases}$$

e, a partir daí, calculamos t, z, y e x: $\begin{cases} x = 14a - 8b - 21c + 12d \\ y = -10a + 6b + 15c - 9d \\ z = -35a + 20b + 56c - 32d \\ t = 25a - 15b - 40c + 24d \end{cases}$ que pode ser escrito em forma de equação matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -21 & 12 \\ -10 & 6 & 15 & -9 \\ -35 & 20 & 56 & -32 \\ 25 & -15 & -40 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix},$$

de onde finalmente obtemos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -21 & 12 \\ -10 & 6 & 15 & -9 \\ -35 & 20 & 56 & -32 \\ 25 & -15 & -40 & 24 \end{bmatrix}$$

Observação: Nesse tipo de procedimento, se algum dos elementos da diagonal principal da matriz escalonada for nulo, a matriz não possui inversa. Por exemplo, a forma escalonada de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 2 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \end{bmatrix}$. Isso significa que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ não é invertível.

2.5 Exercícios Resolvidos

Exemplo 2.14. Resolver o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + y - 3r - s = 0 \\ x - y + 2z - r = 0 \\ 4x - 2y + 6z + 3r - 4s = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 4r - 7s = 0 \end{cases}.$$

Solução: Determinamos a forma escalonada da matriz completa desse sistema:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada encontrada corresponde ao sistema $\begin{cases} x + y - 3r - s = 0 \\ y - z - r - \frac{s}{2} = 0 \\ r - \frac{s}{3} = 0 \end{cases}$. Da terceira equação, isolamos o valor de r: $r = \frac{s}{3}$. Substituímos esse r encontrado na segunda equação e isolamos y: $y = z + r + \frac{s}{2} = z + \frac{s}{3} + \frac{s}{2} = z + \frac{5s}{6}$. Por fim, substituímos o y e o r encontrados na primeira equação e isolamos o x: $x = -y + 3r + s = -(z + \frac{5s}{6}) + \frac{3s}{3} + s = -z + \frac{7s}{6}$. Portanto, a solução geral do sistema é $\left(-z + \dfrac{7s}{6},\ z + \dfrac{5s}{6},\ z,\ \dfrac{s}{3},\ s\right), \forall s, z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.15. Resolver $\begin{cases} x+y+z+r+s=7 \\ 3x+2y+z+r-3s=-2 \\ y+2z+2r+6s=23 \\ 5x+4y+3z+3r-s=12 \end{cases}$

Solução: Vamos escalonar a matriz desse sistema:

$$M=\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada obtida corresponde ao sistema $\begin{cases} x+y+z+r+s=7 \\ y+2z+2r+6s=23 \end{cases}$. Isolamos o valor de y na segunda equação desse sistema: $y=23-2z-2r-6s$. Substituindo esse y na primeira equação e isolando o x, obtemos: $x=7-y-z-r-s=7-(23-2z-2r-6s)-z-r-s=-16+z+r+5s$. Portanto, a solução geral é $(-16+z+r+5s,\ 23-2z-2r-6s,\ z,\ r,\ s), \forall z,r,s\in\mathbb{R}$.

Exemplo 2.16. Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 8x+12y=20 \\ 14x+21y=35 \\ 9z+11r=0 \\ 16z+20r=0 \\ 10s+12t=22 \\ 15s+18t=33 \end{cases}$$

nas variáveis x,y,z,r,s,t.

Solução: Vamos escalonar a matriz completa M desse sistema:

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 14 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 14 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{6}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{6}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa última matriz mostrada é a forma escalonada de M que equivale ao sistema $\begin{cases} x + \frac{3}{2}y = \frac{5}{2} \\ z + \frac{11}{9}r = 0 \\ r = 0 \\ s + \frac{6}{5}t = \frac{11}{5} \end{cases}$ Substituindo $r = 0$ na segunda equação, obtemos $z = 0$. O sistema dado tem 6 variáveis e sua matriz completa tem posto igual a 4; logo, existem $6 - 4 = 2$ varáveis livres nesse sistema. Escolhendo as variáveis livres como sendo y e t, podemos calcular os valores de x e s em função dessas variáveis, usando a primeira e a última equações do sistema anterior: $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}y$, $s = \frac{11}{5} - \frac{6}{5}t$.

Conclusão: a solução geral do sistema dado é $(\frac{5-3y}{2}, y, 0, 0, \frac{11-6t}{5}, t)$, ou seja, $x = \frac{5-3y}{2}$, $s = \frac{11-6t}{5}$, $z = 0, r = 0$, $\forall y, t \in \mathbb{R}$.

2.6 Exercícios Propostos

1) Calcule o posto das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$

Resp.: a) 4 b) 5 c) 3 d) 2

2) Determine os valores de α, β e γ de modo que o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 2t + 3w = \alpha \\ 3x - y - z - 4t + 8w = \beta \\ 5x + 4y - 6z + 11t - 10w = \gamma \end{cases}$$

admita $(5,\ -3,\ 4,\ 0,\ 5)$ como uma das suas soluções e determine a solução geral do sistema assim obtido.

Resp.: $\alpha = 36, \beta = 54, \gamma = -61,\ x = \dfrac{1145 + 55t - 157w}{72}$,

$$y = \frac{-2567 - 361t + 427w}{144}, \ z = \frac{1661 + 115t - 217w}{144}, \ \forall t, w.$$

Resolva os seguintes sistemas lineares. Se o sistema for indeterminado, determine sua solução geral.

3)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4r - s = -1 \\ 2x - y + 3z - 4r + 2s = 8 \\ 3x + y - z + 2r - s = 3 \\ 4x + 3y + 4z + 2r + 2s = -2 \\ x - y - z + 2r - 3s = -3 \end{cases}$$

nas variáveis x, y, z, r, s. Resp.: $(2,\ 0,\ -2,\ -2,\ 1)$

4) $\begin{cases} x - 2y + z - r + s = 0 \\ 2x + y - z + 2r - 3s = 0 \\ 3x - 2y - z + r - 2s = 0 \\ 2x - 5y + z - 2r + 2s = 0 \end{cases}$

Resp.: $x = \dfrac{-4r + 7s}{8}, \ y = \dfrac{-4r + 5s}{8}, \ z = \dfrac{4r - 5s}{8}$

5) $\begin{cases} 4x + 5y = 38 \\ 2x - 5y = 4 \\ 3x + 6y = 33 \\ 5x - 6y = 19 \end{cases}$ Resp.: sistema impossível

6) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 3y = 7 \\ 5x - 2y = 0 \\ -2x + 5y = -21 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases}$ Resp.: $(-2,\ -5)$

7) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5w = 13 \\ 2x + y + 2z + 3t + 4w = 10 \\ 2x + 2y + z + 2t + 3w = 11 \\ 2x + 2y + 2z + t + 2w = 6 \\ 2x + 2y + 2z + 2t + w = 3 \end{cases}$ Resp.: $(0,\ 2,\ -2,\ 0,\ 3)$

8) Dê exemplo de um sistema linear com as seguintes características:

- Tenha quatro equações nas variáveis x, y, z, t;

- Tenha uma variável livre;
- Admita $(6, 4, 10, -13)$ como uma das suas soluções.

Resp.: É claro que este problema possui uma **infinidade** de respostas válidas. Descrevemos aqui uma das possibilidades de resposta correta. Como o sistema tem 4 variáveis, e 1 deve ser livre, o posto da matriz escalonada do sistema deve ser igual a $4-1=3$. Sendo assim, escrevemos inicialmente 3 equações nas variáveis x, y, z, t. Os coeficientes são escolhidos à vontade, aleatoriamente, tendo o cuidado de não ter dependência entre elas (ou seja, uma equação não pode ser múltipla ou soma das outras). Se houvesse qualquer dependência entre as equações, o posto seria menor do que 3. Imaginamos assim as seguintes equações:

$$\begin{gathered} 3x+2y+4z-5t=\dots \\ 5x-2y+3z+2t=\dots \\ 4x+3y-7z+6t=\dots \end{gathered}$$

A quarta equação deve ser obtida a partir dessas 3 equações, fazendo-se algum tipo de operação com elas tais como somar linhas, subtrair linhas, multiplicar uma linha por uma constante, etc. Vamos escolher a quarta linha como sendo a soma da segunda com a terceira equações (entre muitas outras possibilidades):

$$9x+y-4z+8t=\dots$$

Se a quarta linha não tivesse essa dependência das linhas anteriores, então o posto da matriz escalonada do sistema seria igual a 4 e daí o sistema não teria variável livre. Substituímos agora a solução $(6, 4, 10, -13)$ nas equações escolhidas acima e completamos o segundo membro de cada equação:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-5t=131 \\ 5x-2y+3z+2t=26 \\ 4x+3y-7z+6t=-112 \\ 9x+y-4z+8t=-86 \end{cases}$$

E pronto! Essa é uma das possíveis soluções.

9) Calcule A^{2021} sabendo que $A=\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

Resp.: $A^{2021} = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

10) Calcule as inversas das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 5 & -10 \\ -6 & 9 & -10 & 15 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

Resp.: a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -21 \\ 3 & 12 & -92 & -279 \\ -1 & -4 & 31 & 94 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -6 & -4 \\ 10 & 5 & -4 & -2 \\ -9 & -6 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix} = D$.

Capítulo 3

Espaços Vetoriais e Subespaços

3.1 Vetores e escalares

Neste capítulo, definimos alguns dos conceitos básicos de espaços e subespaços vetoriais. Diversos exemplos e exercícios resolvidos também são apresentados.

Os espaços vetoriais são conhecidos também pelo nome de espaços lineares. Sua definição envolve o conceito de escalar que é descrita a seguir.

Definição 3.1. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio no qual estão definidas duas operações, denominadas adição e multiplicação, denotadas por $+$ e $\cdot$, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:

[1] $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$*;*

[2] $\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{K}$*;*[*]

[3] Dado $a \in \mathbb{K}$, $\exists -a \in \mathbb{K}$ *tal que* $a + (-a) = 0$*;*

[4] $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$*;*

[5] $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$*;*

[6] $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$*;*

[7] $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{K}$*;*

[8] Dado $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = 1$*;*

[9] $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$*.*

Neste caso, o conjunto $\mathbb{K}$ é denominado **corpo**.

[*] O símbolo $\exists$ significa "existe", $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer".

Alguns dos exemplos mais conhecidos de corpos são os conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ (racionais), $\mathbb{R}$ (reais) e $\mathbb{C}$ (complexos) com as operações de adição e multiplicação usuais. No entanto, há uma infinidade de exemplos de outros corpos diferentes desses três aqui citados.

Denominaremos o corpo $\mathbb{K}$ de conjunto de **escalares**.

Definição 3.2. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, por exemplo) e $V \neq \emptyset$ um conjunto no qual são definidas duas operações: uma adição $u+v$ entre os elementos u e v de V, e uma multiplicação kv de um escalar k por um elemento v de V. Dizemos que V é um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$ quando as seguintes propriedades são todas verificadas:

[1] $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

[2] $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$;

[3] $\exists\ \mathbf{0} \in V$ *tal que* $u+\mathbf{0} = u$, $\forall u \in V$; *esse elemento* $\mathbf{0}$ *é denominado* **vetor nulo**;

[4] $\exists v \in V$ *tal que* $u+v = \mathbf{0}$, $\forall u \in V$; *esse elemento* v *é denominado inverso aditivo e é denotado por* $-u$;

[5] $k(v + w) = kv + kw$, $\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall v, w \in V$;

[6] $(a + b)v = av + bv$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall v \in V$;

[7] $(ab)v = a(bv)$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall v \in V$;

[8] $1v = v$, $\forall v \in V$.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados genericamente de **vetores**.

Em qualquer espaço vetorial, podemos definir a **diferença** entre os vetores v e w, denotada por $v - w$, como sendo a seguinte soma: $v - w = v + (-w)$.

Exemplo 3.1. O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e produto por escalar usuais:

- A adição de vetores é definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$;
- A multiplicação por escalar é definida por $k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Para verificar isso, temos que testar a validade de cada uma das propriedades *[1], [2], ..., [8].* Por exemplo, a propriedade *[1]* é verificada da seguinte forma: se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (y_1, y_2)$ são dois elementos genéricos de V, então $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $v + u = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$. Como a adição de números reais é comutativa, $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ e $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$, temos que $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$, ou seja, $u + v = v + u$.

A propriedade *[3]* é verificada assim: se $u = (x_1, y_1) \in V$ e $\mathbf{0} = (0, 0)$, então $u + \mathbf{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1) = u$; e a propriedade *[7]* é verificada da seguinte forma: se $a, b \in \mathbb{R}$ e $v = (x_1, y_1)$, então $(ab)v = (ab)(x_1, y_1) = ((ab)x_1 = (ab)y_1)$ e $a(bv) = a(b(x_1, y_1)) = a(bx_1, by_1) = (a(bx_1), a(by_1))$. Como $(ab)x_1 = a(bx_1)$ e $(ab)y_1 = a(by_1)$, temos que $(ab)v = a(bv)$.

De modo semelhante, se n é um inteiro positivo,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fatores}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

também é um espaço vetorial com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas por

- $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots x_n + y_n),$
  $\forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$
- $k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n),\ \ \forall k \in \mathbb{R},\ \ \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$

O vetor nulo é $(0, 0, \cdots, 0)$ e o inverso aditivo de $v = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ é $-v = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$.

Exemplo 3.2. O conjunto de todas as matrizes 2×2 com elementos reais, denotado por $M(2, 2)$, definido por

$$M(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

é um espaço vetorial com as seguintes operações de adição de matrizes e multiplicação por escalar usuais:

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
- $k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

para quaisquer matrizes de $M(2,2)$ e qualquer escalar k.

O vetor nulo de $M(2,2)$ é a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o inverso aditivo de $v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz $-v = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$.

De modo semelhante, o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com elementos reais, denotado por $M(m,n)$, também é um espaço vetorial com as operações usuais de matrizes.

Exemplo 3.3. Denotemos por $\mathcal{P}_2$ o conjunto de todos os polinômios de grau no máximo 2, juntamente com o polinômio nulo

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c, \in \mathbb{R}\}.$$

Com as operações usuais de soma e produto por escalar de polinômios,

- $(ax^2+bx+c)+(dx^2+ex+f) = (a+d)x^2+(b+e)x+(c+f), \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$
- $k(ax^2 + bx + c) \ = \ (ka)x^2 + (kb)x + (kc), \ \ \forall k \in \mathbb{R}, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

temos que $\mathcal{P}_2$ é um espaço vetorial.

O vetor nulo de $\mathcal{P}_2$ é o polinômio nulo $p(x) = 0$ e o inverso aditivo de $q(x) = ax^2 + bx + c$ é $-q(x) = -ax^2 - bx - c$.

De modo análogo, se n é um inteiro positivo, o conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais e grau menor ou igual a n, juntamente com o polinômio nulo,

$$\mathcal{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

também é um espaço vetorial.

Exemplo 3.4. Seja X um conjunto não vazio qualquer. Consideremos o conjunto de todas as funções de X em R

$$\mathscr{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é função}\}$$

com as seguintes operações de soma $f + g$ das funções f e g e produto kf de um escalar k por uma função f definidos da seguinte forma:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$;
- $(kf)(x) = kf(x)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$.

O conjunto $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ assim definido, com as duas operações $f + g$ e kf é um espaço vetorial.

Exemplo 3.5. Considere $V = \mathbb{R}^2$ com as operações de adição de vetores e produto por escalar definidas da seguinte maneira:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
- $k(a, b) = (ka, b)$, $\forall k, a, b \in \mathbb{R}$.

Com as operações definidas dessa forma, V **não** é um espaço vetorial. Isso significa que pelo menos uma das propriedades *[1]*, *[2]*, ... , *[8]* da definição não é válida. Por exemplo, vamos testar a propriedade [6] no caso particular em que $a = 2$, $b = 3$ e $v = (4, 5)$. Nesse caso particular, temos que

- $(a + b)v = (2 + 3)(4, 5) = 5(4, 5) = (5 \cdot 4, 5) = (20, 5)$,
- $av = 2(4, 5) = (2 \cdot 4, 5) = (8, 5)$,
- $bv = 3(4, 5) = (3 \cdot 4, 5) = (12, 5)$,

de onde podemos observar que $\underbrace{av + bv}_{(8,5)+(12,5)=(20,10)} \neq \underbrace{(a + b)v}_{(20,5)}$. Como a propriedade *[6]* da definição não é verificada como sendo verdadeira, temos que V não é espaço vetorial com as operações assim definidas.

Observação 1: Para verificar se determinado conjunto é ou não é um espaço vetorial, é indispensável considerar as duas operaçoes definidas nesse conjunto.

Observação 2: Para mostrar que determinado conjunto, com determinadas operações, não é um espaço vetorial, basta mostrar uma propriedade que não funciona em determinado caso particular.

3.1.1 Propriedades

Se V for um espaço vetorial, então são válidas as seguintes propriedades:

- $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall k \in \mathbb{R}$;
- O vetor nulo é único;
- $0v = \mathbf{0}$, $\forall v \in V$;
- Se $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, então $kv = \mathbf{0}$ implica $k = 0$ ou $v = \mathbf{0}$;
- $-(-v) = v$, $\forall v \in V$;
- $(-k)v = k(-v) = -(kv)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$.

3.2 Subespaços vetoriais

Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Dizemos que W é um **subespaço** de V se W também for um espaço vetorial com relação às operações de adição de vetores e multiplicação por escalar.

Um critério simples para identificar se $W \subset V$ é subespaço é mostrar que

- $W \neq \emptyset$;
- Se $v, w \in W$, então $v+w \in W$; esta propriedade significa que W é **fechado** com relação à soma de vetores, ou seja, quando se somam dois vetores v e w de W, a soma $v+w$ ainda está em W.
- Se $k \in \mathbb{R}$ e $v \in W$, então $kv \in W$; esta propriedade significa que W é fechado com relação ao produto de um escalar por um vetor de W, ou seja, o produto kv está em W sempre que $k \in \mathbb{R}$ e $v \in W$.

Note que se V é um espaço vetorial e W é subespço de V, então as propriedades que valem para V, também valem para W. Por exemplo, $u+v = v+u$, $u+(v+w) = (u+v)+w$, $u+ \mathbf{0} = u$ etc. para quaisquer $u, v, w \in W$.

Todo espaço vetorial V possui pelo menos dois subespaços vetoriais: $W_1 = V$ e $W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Esses são chamados **subespaços triviais** de V.

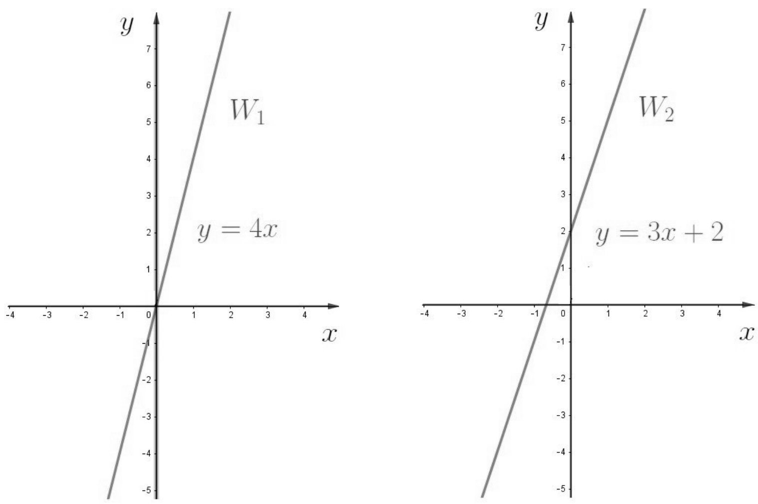
Exemplo 3.6. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x\} = \{(x,\ 4x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. O gráfico de W_1 corresponde a uma reta que passa pela origem $(0,\ 0)$, veja gráfico a seguir. Vamos mostrar que W_1 é um subespaço vetorial de V.

Solução:

- Inicialmente, devemos observar que o conjunto W_1 não é vazio. Para observar isso, basta mostrar algum elemento de W_1, escolhendo um valor particular para x. Por exemplo, escolhendo $x = 0$ temos que o elemento $(0, 4 \cdot 0) = (0,\ 0) \in W_1$. Portanto, W_1 não é vazio porque ele contém pelo menos o vetor nulo.
- Suponhamos agora que $v = (x_1,\ 4x_1)$ e $w = (x_2,\ 4x_2)$ sejam dois elementos de W_1. A soma deles é $v+w = (x_1,\ 4x_1) + (x_2,\ 4x_2) = (x_1+x_2,\ 4x_1 + 4x_2) = (x_1+x_2,\ 4(x_1+x_2))$. Notando que a segunda coordenada é igual a 4 vezes a primeira coordenada, temos que $v+w \in W_1$.
- Se $k \in \mathbb{R}$ for um escalar qualquer, então $kv = k(x_1, 4x_1) = (kx_1, k(4x_1)) = (kx_1, 4(kx_1))$. Mais uma vez percebemos que a segunda coordenada $4(kx_1)$ é 4 vezes a primeira kx_1. Concluímos assim que $kv \in W$.

Portanto, pelo que foi mostrado nos três itens anteriores, temos que W_1 é um subespaço de V.

De modo geral, se W corresponde ao gráfico de uma reta $y = mx$ que passa pela origem $(0, 0)$, então W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.



Exemplo 3.7. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 + 3x\} = \{(x,\ 2 + 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. O gráfico de W_2 corresponde a uma reta que não passa pela origem, veja gráfico anterior. Verificar se W_2 é um subespaço vetorial de V.

Solução: Escolhendo dois valores para x, obtemos dois exemplos de elementos de W_2. Por exemplo, para $x = 0$ e $x = 1$ (aleatoriamente escolhidos), obtemos $v = (0,\ 2) \in W_2$ e $w = (1,\ 5) \in W_2$. Daí, temos que $v + w = (0,\ 2) + (1,\ 5) = (1,\ 7)$ que não pertence a W_2 porque a segunda coordenada 7 não é igual a $2 + 3 \cdot 1$. Assim, W_2 não é um subespaço vetorial de V.

Poderíamos também justificar que W_2 não é subespaço de V de inúmeras outras maneiras. Por exemplo, bastaria observar que o vetor nulo $(0,\ 0)$ não pertence a W_2. Todo espaço ou subespaço vetorial deve conter o vetor nulo, obrigatoriamente.

Em geral, se W corresponde a uma reta que não passa pela origem $(0, 0)$, então W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.8. Sendo $V = M(3, 3)$ o conjunto de todas as matrizes reais 3×3 com operações usuais de matrizes e

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

mostre que W é subespaço de V.

Solução: Como sempre fazemos, devemos verificar os três itens seguintes:

- Escolhendo $a = b = c = d = e = f = 0$, temos que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$; logo, $W \neq \emptyset$.

- Sejam v e w duas matrizes triangulares superiores genéricas: $v, w \in W$, $v = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{bmatrix}$. Então temos que $v - w = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ 0 & d_1 - d_2 & e_1 - e_2 \\ 0 & 0 & f_1 - f_2 \end{bmatrix} \in W$. Note que o caracteriza um elemento pertencer a W é o fato desse elemento ser uma matriz real 3×3 do tipo triangular superior; assim, o que observamos é que a soma de duas matrizes 3×3 triangulares superiores é uma matriz 3×3 triangular superior.

- Se $k \in \mathbb{R}$, então $kv = k \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ 0 & kd_1 & ke_1 \\ 0 & 0 & kf_1 \end{bmatrix} \in W$. Verificamos dessa forma que o produto de uma matriz 3×3 triangular superior por um escalar dá como resultado uma matriz 3×3 triangular superior.

Concluímos assim que W é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 3.9. Verifique se W é subespaço vetorial de V no caso em que $V = M(3,3)$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & d & e \\ 1 & 1 & f \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$.

Solução: Basta notar que o vetor nulo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W$. Por causa disso, W não pode ser subespaço de V. Inúmeras outras justificativas também seriam aceitáveis.

3.3 Combinação linear

Sejam $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ vetores de um espaço vetorial V. Se $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ são escalares, então um vetor da forma

$$w \ = \ a_1v_1 \ + \ a_2v_2 \ + \ \ldots \ + \ a_nv_n$$

é chamado uma **combinação linear** dos vetores $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$.

Exemplo 3.10. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,4)$, então são exemplos de combinações lineares de v_1 e v_2 os seguintes vetores:

- $w_1 = 2v_1 + 5v_2 = 2(1,2) + 5(3,4) = (2,4) + (15,20) = (17,24)$,
- $w_2 = 3v_1 - 4v_2 = 3(1,2) - 4(3,4) = (3,6) - (12,16) = (-9,-10)$,
- $w_3 = -4v_1 + 0v_2 = -4(1,2) + 0(3,4) = (-4,-8) + (0,0) = (-4,-8)$,
- $w_4 = 0v_1 + 0v_2 = 0(1,2) + 0(3,4) = (0,0) + (0,0) = (0,0)$,
- $w_5 = 0v_1 + 11v_2 = 0(1,2) + 11(3,4) = (0,0) + (33,44) = (33,44)$.

Exemplo 3.11. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $v_1 = (1,\ 2)$, $v_2 = (3,\ 4)$, verifique se $w = (17,\ 17)$ é combinação linear de v_1 e v_2.

Solução: Suponhamos que existam escalares a e b tais que $w = av_1 + bv_2$. Essa equação equivale a $(17,\ 17) = a(1,\ 2) + b(3,\ 4)$ que leva à equação $(17,\ 17) = (a + 3b,\ 2a + 4b)$ e à resolução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} a + 3b = 17 \\ 2a + 4b = 17 \end{cases}$. Multiplicando a primeira equação por (-2) e somando com a segunda, obtemos: $-2(\cancel{a} + 3b) + (\cancel{2a} + 4b) = -2 \cdot 17 + 17$. Daí, podemos calcular imediatamente o valor de b, depois o valor de a:

$$-6b + 4b = -17 \Rightarrow b = \frac{17}{2} \Rightarrow a = 17 - 3b = 17 - 3\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{2 \cdot 17 - 3 \cdot 17}{2} = -\frac{17}{2}.$$

Como o sistema linear tem solução, concluímos que w é combinação linear de v_1 e v_2:

$$w = -\frac{17}{2}(1,\ 2) + \frac{17}{2}(3,\ 4).$$

De um modo geral, verificar se um vetor é combinação linear de outros vetores equivale a resolver determinado sistema linear.

Exemplo 3.12. No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau ≤ 2 juntamente com o polinômio nulo, verifique se o polinômio $v = 7x^2 + 11x - 26$ é uma combinação linear dos polinômios $v_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $v_2 = -2x^2 + 5x - 8$.

Solução: Vamos tentar encontrar escalares a e b tais que $v = av_1 + bv_2$, que é o mesmo que $7x^2 + 11x - 26 = a(5x^2 - 3x + 2) + b(-2x^2 + 5x - 8)$. Efetuando os produtos no segundo membro da igualdade anterior e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$7x^2 + 11x - 26 = (5a - 2b)x^2 + (-3a + 5b)x + (2a - 8b).$$

Comparando os coeficientes de termos de mesmo grau dos dois lados da equação, obtemos o sistema $\begin{cases} 5a - 2b = 7 \\ -3a + 5b = 11 \\ 2a - 8b = -26 \end{cases}$. Escrevendo a matriz completa desse sistema e escalonando:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -3 & 5 & 11 \\ 2 & -8 & -26 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -8 & -26 \\ -3 & 5 & 11 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & -13 \\ -3 & 5 & 11 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & -13 \\ 0 & -7 & -28 \\ 0 & 18 & 72 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & -13 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -4 & -13 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa última matriz equivale ao sistema linear $\begin{cases} a - 4b = -13 \\ b = 4 \end{cases}$ cuja solução é $b = 4$ e $a = -13 + 4b = -13 + 16 = 3$.

Portanto, v se escreve como combinação linear de v_1 e v_2 da seguinte forma: $v = 3v_1 + 4v_2$.

3.4 Subespaços Gerados

Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. O conjunto de todas as combinações lineares desses vetores é um subespaço de V, denotado por $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ e denominado **subespaço gerado** por esses vetores.

$$W = [v_1, v_2, \ldots, v_n] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Nesse caso, dizemos também que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram o W.

Quando somamos duas combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, o resultado é também uma combinação linear desses mesmos vetores

$$\begin{aligned}(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) \ &+ \ (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) \\ &= \ (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_n + b_n)v_n.\end{aligned}$$

Por outro lado, quando multiplicamos uma combinação linear por um escalar $k \in \mathbb{R}$, o resultado ainda é uma combinação linear:

$$k(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) \ = \ (ka_1)v_1 + (ka_2)v_2 + \cdots + (ka_n)v_n.$$

Por isso, o conjunto de todas as combinaçoes lineares dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 3.13. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ tês elementos de V. Uma combinação linear genérica desses vetores é

$$\begin{aligned}xi + yj + zk &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = (x, y, z)\end{aligned}$$

dá como resultado um ponto genérico (x, y, z) de V. Dizemos dessa forma que os vetores i, j, k geram o $\mathbb{R}^3$. Em símbolos: $[i, j, k] = \mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.14. Dados $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1, -1)$, $v = (0, 4)$ e $w = (-11, 7)$ três elementos de V, determinar se $w \in [u, v]$.

Solução: Devemos verificar se w é uma combinação linear de u e v, ou seja, se existem escalares a, b tais que $w = au + bv$. Essa última equação é o mesmo que $(-11, 7) = a(1, -1) + b(0, 4) \Rightarrow (a, -a + 4b) = (-11, 7) \Rightarrow \begin{cases} -a + 4b = 7 \\ a = -11 \end{cases}$ que é um sistema linear cuja resolução é imediata: $a = -11$ e $b = \frac{a+7}{4} = -1$. Dessa forma, obtivemos que $w = -11u - v$, o que significa que w pertence ao conjunto $[u, v]$.

Exemplo 3.15. Verificar se os vetores $u = (5, 0, 0)$, $v = (0, 3, 4)$ e $w = (0, 0, -6)$ geram o espaço $V = \mathbb{R}^3$.

Solução: Devemos verificar se um elemento genérico $(x, y, z) \in V$ é uma combinação linear de u, v e w, ou seja, se existem escalares a, b, c tais que

$(x, y, z) = a(5, 0, 0) + b(0, 3, 4) + c(0, 0, -6) \Rightarrow (5a, 3b, 4b - 6c) = (x, y, z) \Rightarrow$ $\begin{cases} 5a = x \\ 3b = y \\ 4b - 6c = z \end{cases}$ que é um sistema linear nas variáveis a, b, c e cuja solução é dada por $a = \frac{x}{5}$, $b = \frac{y}{3}$, $c\frac{4b-z}{6} = \frac{4\cdot\frac{y}{3}-z}{6} = \frac{4y-3z}{18}$. Dessa forma, obtivemos a seguinte combinação linear:

$$(x, y, z) \;=\; \frac{x}{5}(5, 0, 0) + \frac{y}{3}(0, 3, 4) + \frac{4y - 3z}{18}(0, 0, -6),$$

e isso significa que $[u, v, w] = V$.

3.5 Exercícios Resolvidos

R1) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial com as operações usuais de vetores:

- $(x_1,\ y_1,\ z_1) \ +\ (x_2,\ y_2,\ z_2) \ =\ (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$
- $k(x_1,\ y_1,\ z_1) \ =\ (kx_1,\ ky_1,\ kz_1)$.

Solução: Sejam $u = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $v = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, $w = (x_3,\ y_3,\ z_3)$ três elementos genéricos de V e $a, b, k \in \mathbb{R}$. Vamos observar que são válidos os oito itens a seguir:

[1.] $u + v = (x_1,\ y_1,\ z_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) = (x_2 + x_1,\ y_2 + y_1,\ z_2 + z_1) = (x_2,\ y_2,\ z_2) + (x_1,\ y_1,\ z_1) = v + u$

[2.] $u + (v + w) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + ((x_2,\ y_2,\ z_2) + (x_3,\ y_3,\ z_3)) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + (x_2 + x_3,\ y_2 + y_3,\ z_2 + z_3) = (x_1 + (x_2 + x_3),\ y_1 + (y_2 + y_3),\ z_1 + (z_2 + z_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3,\ (y_1 + y_2) + y_3,\ (z_1 + z_2) + z_3) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) + (x_3,\ y_3,\ z_3) = ((x_1,\ y_1,\ z_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2)) + (x_3,\ y_3,\ z_3) = (u + v) + w$

[3.] Se $\mathbf{0} =\ (0,\ 0,\ 0)$, então $u + \mathbf{0} = (x_1,\ y_1,\ z_1) + (0,\ 0,\ 0) = (x_1,\ y_1,\ z_1) = u$

[4.] Se $-u = (-x_1,\ -y_1,\ -z_1)$, então $u + (-u) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + (-x_1,\ -y_1,\ -z_1) = (x_1 + (-x_1),\ y_1 + (-y_1),\ z_1 + (-z_1)) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$

[5.] $k(v + w) = k((x_2,\ y_2,\ z_2) + (x_3,\ y_3,\ z_3)) = k(x_2 + x_3,\ y_2 + y_3,\ z_2 + z_3) = (k(x_2 + x_3),\ k(y_2 + y_3),\ k(z_2 + z_3)) = (kx_2 + kx_3,\ ky_2 + ky_3,\ kz_2 + kz_3) = (kx_2, ky_2, kz_2) + (kx_3, ky_3, kz_3) = k(x_2, y_2, z_2) + k(x_3, y_3, z_3) = kv + kw$

[6.] $(a+b)v = (a+b)(x_2,\ y_2,\ z_2) = ((a+b)x_2,\ (a+b)y_2,\ (a+b)z_2) = (ax_2 + bx_2,\ ay_2+by_2,\ az_2+bz_2) = (ax_2, ay_2, az_2) + (bx_2, by_2, bz_2) = a(x_2, y_2, z_2) + b(x_2, y_2, z_2) = av + bv$

[7.] $(ab)v = (ab)(x_2,\ y_2,\ z_2) = ((ab)x_2,\ (ab)y_2,\ (ab)z_2)$
$= (a(bx_2),\ a(by_2),\ a(bz_2)) = a(bx_2, by_2, bz_2) = a(b(x_2,\ y_2,\ z_2)) = a(bv)$

[8.] $1v = 1(x_2,\ y_2,\ z_2) = (1x_2,\ 1y_2,\ 1z_2) = (x_2,\ y_2,\ z_2) = v$

Conclusão: como os 8 itens anteriores foram verificados como sendo verdadeiros, temos que V é um espaço vetorial.

R2) Verifique se $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial com as seguintes operações :

- $(x_1,\ y_1,\ z_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2) = (x_2,\ y_2,\ z_2),\ \forall\,(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2) \in V$
- $k(x_1,\ y_1,\ z_1) = (kx_1,\ ky_1,\ kz_1), \forall k \in \mathbb{R},\ \forall\,(x_1,\ y_1,\ z_1) \in V$

Solução: Escolhemos aleatoriamente dois vetores: $u = (1, 2, 3)$ e $v = (4, 5, 6)$. Agora, calculamos os valores de $u + v$ e $v + u$ para ver se coincidem:

- $u + v = (1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (4, 5, 6)$, de acordo com a operação de adição definida em V;
- $v + u = (4, 5, 6) + (1, 2, 3) = (1, 2, 3)$.

Como $u + v \neq v + u$, chegamos à conclusão que V não é espaço vetorial com essas operações .

Observação: Há uma infinidade de maneiras de justificar o fato de V não ser espaço vetorial. Por exemplo, neste exemplo temos também: $v + (-v) \neq \mathbf{0}$, $v+\ \mathbf{0}\ \neq v$, $(a + b)v \neq av + bv$ etc. Basta apontar uma única propriedade que não é verificada.

R3) Se $V = M(2, 2)$ e $W = \{M \in V \mid M^t = M\}$, mostre que W é um subespaço vetorial de V com as operações usuais de matrizes.

Solução:

- A matriz nula $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz a propriedade $N^t = N$; logo, $N \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$;

- Se $A \in W$ e $B \in W$, então $(A+B)^t = A^t+B^t = A+B \Rightarrow (A+B)^t = A+B$, o que significa que $A+B \in W$. Dizendo com outras palavras, isso significa que a soma de duas matrizes simétricas dá como resultado uma matriz simétrica.

- Se $A \in W$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t = kA$, o que implica $kA \in W$.

Assim, pelo que mostramos nos três itens anteriores, W é um subespaço de V.

R4) Se $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, mostre que W é um subespaço vetorial de V com as operações usuais.

Solução: O que caracteriza os elementos de W é a terceira coordenada do vetor de $\mathbb{R}^3$ ser nula. Sendo assim:

- o vetor nulo $(0, 0, 0)$ pertence a W; isso significa que $W \neq \emptyset$;

- se $u = (a, b, 0)$ e $v = (c, d, 0)$ são dois elementos genéricos de W, então a soma $u + v = (a + c, b + d, 0) \in W$;

- se $v = (c, d, 0) \in W$ e $k \in \mathbb{R}$, então $kv = (kc, kd, 0) \in W$.

Portanto, pelo que foi mostrado nos 3 itens anteriores, chegamos à conclusão de que W é subespaço de V.

R5) Sejam $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e W o conjunto de todas as funções reais limitadas, ou seja, funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para os quais $|f(x)| \leq M$ para alguma constante $M \in \mathbb{R}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de V com as operações usuais de funções : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(kf)(x) = kf(x)$ para quaisquer funções f, g e qualquer escalar k.

Solução: Vamos verificar que são verdadeiros os seguintes itens:

- Se f for a função nula, $f(x) = 0$, obtemos $|f(x)| \leq M$, onde M é qualquer constante positiva, por exemplo, $M = 1$. Portanto, a função nula é limitada e, consequentemente, pertence a W. Logo, $W \neq \emptyset$.

- Se f, $g \in W$, então existem constantes M_1 e M_2 tais que $|f(x)| \leq M_1$ e $|g(x)| \leq M_2$. Vamos testar o que acontece com $f + g$:

$$|(f + g)(x)| = \underbrace{|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|}_{\text{desigualdade triangular}} \leq \underbrace{M_1 + M_2}_{\text{constante}}.$$

  Portanto, $f + g$ é limitada, ou seja, $f + g \in W$.

- Se $f \in W$ e $k \in \mathbb{R}$, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M \Rightarrow |(kf)(x)| = |kf(x)| = |k| \cdot |f(x)| \leq |k|M$. Portanto, kf é limitada, o que implica $kf \in W$.

Como os três itens foram verificados como sendo verdadeiros, concluímos que W é um subespaço vetorial de V.

R6) Verifique se $W = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x) = 0\}$ é subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solução: Vamos mostrar que são verdadeiros: $W \neq \emptyset$, $f + g \in W$ e $kf \in W$ se $f, g \in W$ e $k \in \mathbb{R}$.

- Se f for uma função constante, por exemplo $f(x) = 1$, então $f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x) = 0 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$;
- Sejam f e g dois elementos de W. Então, $f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x) = 0$ e $g'''(x) + 2g''(x) - 5g'(x) = 0 \Rightarrow (f + g)'''(x) + 2(f + g)''(x) - 5(f + g)'(x) = (f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x)) + (g'''(x) + 2g''(x) - 5g'(x)) = 0 + 0 = 0$ $\Rightarrow f + g \in W$;
- Sejam $f \in W$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, $f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x) = 0 \Rightarrow (kf)'''(x) + 2(kf)''(x) - 5(kf)'(x) = kf'''(x) + 2kf''(x) - 5kf'(x) = k(f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x)) = k \cdot 0 = 0 \Rightarrow kf \in W$;

Chegamos assim à conclusão de que W é subespaço vetorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

R7) Verifique se $W = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x) = 1\}$ é subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solução: Se f for a função nula, $f(x) = 0$, então $f'''(x) + 2f''(x) - 5f'(x) = 0 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0 \neq 1$, logo, $f \notin W$. Daí, podemos concluir que W não é subespaço vetorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

R8) Verifique se $W = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$ é subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solução: Vamos mostrar que $W \neq \emptyset$, $f + g \in W$ e $kf \in W$ se $f, g \in W$ e

$k \in \mathbb{R}$.

- Se $f(x) = 0$ for a função nula, então $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 0\,\mathrm{d}x = 0$; logo, $f \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$;
- Se $f, g \in W$, então $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ e $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^2 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 0+0 = 0$; logo, $f+g \in W$;
- Se $k \in \mathbb{R}$ e $f \in W$, então $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^2 (kf)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot 0 = 0$; logo, $kf \in W$.

Por isso, chegamos à conclusão que W é subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

R9) Verifique se $W = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \right\}$ é subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solução: Se f e g forem dois elementos de W, então $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ e $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Daí, obtemos que $\int_0^2 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 4+4 = 8$. Logo, $f+g \notin W$, de onde concluímos que W não é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

R10) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores: $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

a) Escreva $v = (-4, -18, 7)$ como combinação linear de v_1 e v_2;

b) Mostre que não é possível escrever $v = (4, 3, -6)$ como combinação linear de v_1 e v_2;

c) Determine uma condição sobre x, y, z para que (x, y, z) seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução: a) Vamos calcular os valores de escalares a e b tais que $v = av_1 + bv_2$. Essa equação é o mesmo que $(-4, -18, 7) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1) \Rightarrow (-4, -18, 7) = (a+2b,\ -3a+4b,\ 2a-b)$ que equivale ao sistema linear $\begin{cases} a + 2b = -4 \\ -3a + 4b = -18 \\ 2a - b = 7 \end{cases}$, cuja matriz completa é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -18 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ que pode ser escalonada da seguinte maneira:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & 10 & -30 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa última matriz é equivalente ao sistema $\begin{cases} a + 2b = -4 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a = -4 - 2b = -4 + 6 = 2$. Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$ é a combinação linear procurada.

b) Suponhamos que existam escalares a e b tais que

$$v = (4, 3, -6) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1) = = \ (a + 2b,\ -3a + 4b,\ 2a - b)$$

que equivale ao sistema linear $\begin{cases} a + 2b = 4 \\ -3a + 4b = 3 \\ 2a - b = -6 \end{cases}$, cuja matriz completa é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}$ que pode ser escalonada da seguinte maneira:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 15 \\ 0 & -5 & -14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{10} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Essa última matriz é equivalente ao sistema $\begin{cases} a + 2b = 4 \\ b = \frac{3}{2} \\ 0 = 1 \end{cases}$ Como essa terceira equação $(0 = 1)$ é sempre falsa, temos que o sistema é impossível . Consequentemente, v não pode ser combinação linear de v_1 e v_2.

c) Se $v = (x, y, z) = av_1 + bv_2 = (a+2b, -3a+4b, 2a-b)$, então $\begin{cases} a + 2b = x \\ -3a + 4b = y \\ 2a - b = z \end{cases}$ cuja matriz completa é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -3 & 4 & y \\ 2 & -1 & z \end{bmatrix}$. A forma escalonada de M é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{y+3x}{10} \\ 0 & 0 & \frac{2z+y-x}{2} \end{bmatrix}$. Essa última linha da matriz equivale a uma linha $0 = \frac{2z+y-x}{2}$

de um sistema, ou seja, $2z + y - x = 0$. Portanto, a condição sobre x, y, z para que o vetor (x, y, z) seja combinação linear de v_1 e v_2 é que $x = y + 2z$.

R11) Escreva o vetor $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores $V_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e $V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução: Vamos determinar escalares $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 = M$. Essa equação pode ser escrita na forma

$$a \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\begin{bmatrix} 2a + b + 3c & 2a + b + 5d \\ b + 5c + d & 3a + b + 4c + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e equivale ao sistema linear

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 1 \\ 2a + b + 5d = 2 \\ b + 5c + d = 3 \\ 3a + b + 4c + 4d = 4 \end{cases}.$$

Escalonando a matriz completa dessa sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_4 - L_1 \to L_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ \\ L_4 - 3L_1 \to L_4 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{47}{7} & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{28}{47} \end{bmatrix}$$

A matriz escalonada assim obtida equivale ao sistema $\begin{cases} a + c + 4d = 3 \\ b - 2c - 3d = -4 \\ c + \frac{4}{7}d = 1 \\ d = \frac{28}{47} \end{cases} \Rightarrow$

$d = \frac{28}{47} \Rightarrow c = 1 - \frac{4}{7}d = \frac{31}{47} \Rightarrow b = -4 + 2c + 3d = -\frac{42}{47} \Rightarrow a = 3 - c - 4d = -\frac{2}{47}$.

Concluímos dessa forma que $M = -\frac{2}{47}V_1 - \frac{42}{47}V_2 + \frac{31}{47}V_3 + \frac{28}{47}V_4$.

R12) Sejam $u = (5,4,3)$, $v = (0,2,1)$ e $w = (1,11,10)$. Mostre que $[u,v,w] = \mathbb{R}^3$.

Solução: Consideremos um elemento genérico de $\mathbb{R}^3$ que é (x,y,z). Vamos escrever esse elemento como uma combinação linear de u,v,w, ou seja, vamos determinar escalares a,b,c tais que

$$(x,\ y,\ z) = a(5,\ 4,\ 3) + b(0,\ 2,\ 1) + c(1,\ 11,\ 10).$$

Essa equação equivale a $(x,\ y,\ z) = (5a+c,\ 4a+2b+11c,\ 3a+b+10c)$ que pode ser escrito no formato de sistema linear nas variáveis a,b,c: $\begin{cases} 5a+c=x \\ 4a+2b+11c=y \\ 3a+b+10c=z \end{cases}$. A matriz M desse sistema pode ser escalonada da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & x \\ 4 & 2 & 11 & y \\ 3 & 1 & 10 & z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{x}{5} \\ 4 & 2 & 11 & y \\ 3 & 1 & 10 & z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{x}{5} \\ 0 & 2 & \frac{51}{5} & y-\frac{4x}{5} \\ 0 & 1 & \frac{47}{5} & z-\frac{3x}{5} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{x}{5} \\ 0 & 2 & \frac{51}{5} & y-\frac{4x}{5} \\ 0 & 1 & \frac{47}{5} & z-\frac{3x}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{x}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{47}{5} & z-\frac{3x}{5} \\ 0 & 2 & \frac{51}{5} & y-\frac{4x}{5} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{x}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{47}{5} & z-\frac{3x}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{5} & \frac{2x+5y-10z}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{x}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{47}{5} & z-\frac{3x}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-2x-5y+10z}{43} \end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada equivale ao sistema

$$\begin{cases} a+\frac{c}{5}=\frac{x}{5} \\ b+\frac{47c}{5}=z-\frac{x}{5} \\ c=\frac{-2x-5y+10z}{43} \end{cases}$$

que pode ser resolvido facilmente "de baixo para cima":

- $c = \frac{-2x-5y+10z}{43}$
- $b = z - \frac{3x}{5} - \frac{47}{5}c = \frac{-7x+47y-51z}{43}$
- $a = \frac{x}{5} - \frac{c}{5} = \frac{9x+y-2z}{43}$

Dessa forma, concluímos que

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \;=\; & \underbrace{\frac{9x+y-2z}{43}}_{a}\underbrace{(5,4,3)}_{u}+\underbrace{\frac{47y-7x-51z}{43}}_{b}\underbrace{(0,2,1)}_{v} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + \underbrace{\frac{10z-2x-5y}{43}}_{c}\underbrace{(1,11,10)}_{w},
\end{aligned}
$$

e isso significa que $\mathbb{R}^3$ é gerado pelos vetores u, v, w.

3.6 Exercícios Propostos

1) Verifique se $V = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as operações de adição de vetores e produto por escalar definidos para $x_1, y_1, x_2, y_2, k \in \mathbb{R}$:
a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1), \quad k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$;
b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (0, 0), \quad k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$;
c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad k(x_1, y_1) = (0, 0)$;
d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad k(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$.
Resp.: Nenhum dos conjuntos apresentados em a), b), c), d) é espaço vetorial

2) Sendo $V = \mathbb{R}^3$, verifique se W é um subespaço de V em cada um dos seguintes casos:
a) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$
b) $W = \{(x, y, z) \mid y = x^2\}$
c) $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$
d) $W = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$
e) $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 1\}$
f) $W = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 5\}$
Resp.: São subespaços de V somente os itens c) e d).

3) Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de V ?

a) $W_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-1) = 0\}$
b) $W_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(3) = 1 + f(-5)\}$
c) $W_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-1) = 1\}$
d) $W_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$
e) $W_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'(x) = 3f(x)\}$
f) $W_6 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'(x) = x\}$
g) $W_7 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$
h) $W_8 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\}$
Resp.: São subespaços de V somente os itens a), d), e) e g).

4) Seja $V = M(2,2)$. Verifique se W é subespaço de V em cada um dos casos:
a) $W = \{A \in M(2,2) \mid \det A = 0\}$
b) $W = \{A \in M(2,2) \mid \det A = 1\}$
c) $W = \{A \in M(2,2) \mid A^2 = A\}$
d) $W = \{A \in M(2,2) \mid A^{-1} = A\}$
e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = c = 0,\ a + d = 1 \right\}$
f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a^2 = d^2 \right\}$
g) $W = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a^2 + d^2 = 1, b^2 + c^2 = 1\}$
Resp.: Nenhum dos conjuntos apresentados em a), b), c), d), e), f), g) é subespaço de V.

5) Verifique se é possível escrever a matriz $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Resp.: Não se pode escrever D como combinação linear de A, B, C.

6) Escreva o polinômio $p = 10x^3 + 3x^2 + 2x + 5 \in \mathcal{P}_3$ como combinação linear dos polinômios $w_1 = 1$, $w_2 = -x + 3$, $w_3 = x^2$ e $w_4 = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.
Resp.: $p = -14w_1 + \frac{11}{2}w_2 - 2w_3 + \frac{5}{2}w_4$

7) Escreva o vetor $v = (4,3,2,1) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3,1,1,1)$, $v_2 = (0,2,3,0)$, $v_3 = (0,0,-5,-10)$ e $v_4 = (0,0,0,-1)$.
Resp.: $v = \frac{4}{3}v_1 + \frac{5}{6}v_2 + \frac{11}{30}v_3 - \frac{10}{3}v_4$

8) Dados $p_1 = x^2 + x + 2$, $p_2 = 4x$, $p_3 = -3x^2 + 4$, $v = 10x^2 + 3x - 7$, verifique se $v \in [p_1,\ p_2,\ p_3]$.
Resp.: $v \in [p_1,\ p_2,\ p_3]$ porque $v = \frac{19}{10}p_1 + \frac{11}{40}p_2 - \frac{27}{10}p_3$

9) Verifique se $u = (2, 3, 0)$, $v = (-7, 0, 8)$ e $w = (1, 1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$.
Resp.: Sim, porque $(x, y, z) = \frac{-8x+15y-7z}{29}(2, 3, 0) + \frac{-3x+2y+z}{29}(-7, 0, 8) + \frac{24x-16y+21z}{29}(1, 1, 1)$.

10) Seja W um subespaço de um espaço vetorial V. Justifique se a seguinte afirmação é *verdadeira* ou *falsa*: "Se $u \notin W$ e se $v \notin W$, então $u + v \notin W$ ".
Resp.: É **falsa**; considere, por exemplo, $W = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $u = (1, 2) \notin W$, $v = (2, 1) \notin W$, mas $u + v = (3, 3) \in W$.

Capítulo 4

Base e dimensão

4.1 Dependência e indepedência linear

Sejam V um espaço vetorial e $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ vetores de V. Dizemos que esses vetores são **linearmente independentes** (abreviadamente: LI) quando a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\ = \mathbf{0}$, com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, possuir apenas a solução nula: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Se na solução dessa equação tiver pelo menos um $a_k \neq 0$, então dizemos que os vetores são **linearmente dependentes** (abreviadamente: LD).

Se $v_1, v_2,\ \ldots,\ v_n$ forem linearmente dependentes, então a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \mathbf{0}$ possui uma solução em que $a_k \neq 0$, e daí, podemos isolar v_k nessa equação: $v_k = -\dfrac{a_1v_1 + \cdots + a_nv_n}{a_k}$. Isso significa que um vetor, v_k , é combinação linear dos outros vetores $v_1, \cdots, v_n$.

No caso particular de dois vetores, u e v, o fato deles serem linearmente dependentes é o mesmo que um deles ser múltiplo do outro: $u = kv$, com $k \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $(1, 2, 3)$ e $(4, 8, 12)$ são linearmente dependentes porque $(4, 8, 12) = 4 \cdot (1, 2, 3)$.

No caso particular de três vetores, u, v e w, eles são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois: $u = av + bw$ ou $v = au + bw$ ou $w = au + bv$, onde a e b são escalares. Por exemplo, $(2, 3)$, $(3, -2)$ e $(1, -5)$ são linearmente dependentes porque $(3, -2) = (2, 3) + (1, -5)$.

Se um dos vetores for nulo, digamos $v_k = \mathbf{0}$, então $0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_k + \cdots + 0v_n = \mathbf{0}$. Isso significa que a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\ = \mathbf{0}$ admite a solução $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_k = 1, \ldots, a_n = 0$ que não é toda nula, logo, os vetores são linearmente dependentes. Por exemplo, os vetores $u = (1, 1, 2)$, $v = (0, 0, 0)$ e $w = (-4, 5, 7)$ são linearmente dependentes.

Se dois vetores forem iguais, digamos $v_j = v_k$, então a equação

$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \ = \mathbf{0}$ admite a solução

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \ldots,\ a_j = 1,\ \ldots,\ a_k = -1,\ \ldots,\ a_n = 0$$

e, consequentemente, os vetores são linearmente dependentes. Exemplo: os vetores $v_1 = (3, 5, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, -3)$, $v_3 = (2, 4, 0, 9)$ e $v_4 = (3, 5, 0, 1)$ são linearmente dependentes.

Exemplo 4.1. Dados $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ e $w = (5, 3, -2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^3$, verificar se esses vetores são linearmente dependentes ou independentes.

Solução: Formamos uma combinação linear genérica desses vetores, igualamos a $\mathbf{0}$ e calculamos os valores dos escalares. Essa equação vetorial é equivalente a um sistema linear:

$$au + bv + cw = \mathbf{0} \Rightarrow a(1, -1, 0) + b(1, 3, -1) + c(5, 3, -2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (a + b + 5c, -a + 3b + 3c, -b - 2c) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b + 5c = 0 \\ -a + 3b + 3c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$$

Usando qualquer método de resolução válido para sistemas lineares, tentamos calcular os valores de a, b e c.

- Calculamos o determinante da matriz dos coeficientes do sistema:
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 5 = 0;$
  como o sistema é homogêneo, temos que ele é indeterminado, ou seja, admite uma infinidade de soluções. Portanto, de acordo com a definição do início desta seção, concluímos que os vetores u, v, w são linearmente dependentes.

- Outra solução seria escalonar a matriz completa do sistema:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  O aparecimento de uma linha nula na matriz escalonada significa que o sistema tem variável livre, ou seja, é um sistema indeterminado. E assim, concluímos mais uma vez que os vetores u, v e w são linearmente dependentes.

A partir da matriz escalonada, podemos obter também a solução geral do sistema: $b+2c=0$ e $a+b+5c=0 \Rightarrow b=-2c$ e $a=-3c$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Escolhendo um valor qualquer para c, por exemplo $c=1$, obtemos $a=-3$ e $b=-2$. Substituindo na equação vetorial do início, obtemos: $-3u-2v+w=0$, ou seja, $w=3u+2v$, isso mostra que um dos vetores pode ser obtido a partir dos outros.

Observação: Sempre que forem dados n vetores de $\mathbb{R}^n$,

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),\ \dots,\ (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}),$$

podemos montar um determinante D a partir deles,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ao calcular o valor desse determinante, se $D=0$ podemos concluir que os vetores são linearmente dependentes e, se $D \neq 0$, são linearmente independentes. No entanto, lembramos que o cálculo de um determinante às vezes é bastante trabalhoso. Por exemplo, no desenvolvimento de um determinante $n \times n$, podemos ter um total de $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2 \cdot 1$ parcelas, sendo que cada parcela é um produto com n fatores.

Exemplo 4.2. Verificar se os vetores $v_1 = (5,0,0,3)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (5,0,4,1)$ e $v_4 = (0,3,0,-1)$ pertencentes a $\mathbb{R}^4$ são linearmente dependentes ou independentes.

Solução: Poderíamos iniciar com uma equação vetorial da forma $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = \mathbf{0}$ e desenvolver essa equação até chegar em um sistema linear homogêneo 4×4 nas variáveis a, b, c, d. A partir daí, poderímos calcular o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema para saber se ele é indeterminado ou não. Aqui, vamos pular todas essas passagens iniciais e começar diretamente do cálculo do determinante. Neste caso, é só verificar quais são os vetores dados e escrever de imediato o determinante. Dá o mesmo resultado escrever os vetores dados como linhas ou colunas do determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-4+6-0+12+0-0) - 3(0+0+30-0-0-0) = 70 - 90 = -20 \neq 0.$$

Como o determinante D deu um resultado diferente de zero, chegamos à conclusão que os vetores dados são linearmente independentes.

A dependência ou independência linear de um conjunto de vetores não é afetada pela aplicação das seguintes transformações elementares:

[1] trocar a posição de dois vetores;

[2] multiplicar um vetor por um escalar diferente de zero;

[3] substituir um vetor do conjunto pela soma dele com outros vetores desse mesmo conjunto.

Vamos exemplificar isso com um caso particular de três vetores. Suponhamos que $A = \{u, v, w\}$ seja um conjunto de vetores linearmente independentes. Consideremos $B = \{u, v, au + bv + cw\}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, como sendo o conjunto obtido a partir de A pela substituição do vetor w por uma combinação linear de u, v, w. Se α, β, γ forem escalares tais que $\alpha u + \beta v + \gamma(au + bv + cw) = \mathbf{0}$, então $(\alpha + a\gamma)u + (\beta + b\gamma)v + c\gamma w = \mathbf{0}$. Como u, v, w são linearmente independentes, devemos ter que $\begin{cases} \alpha + a\gamma = 0 \\ \beta + b\gamma = 0 \\ c\gamma = 0 \end{cases}$. Como $c\gamma = 0$ e $c \neq 0$, devemos ter $\gamma = 0$. Substituindo nas duas primeiras equações , obtemos $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Concluímos assim que o conjunto B também é formado por vetores linearmente independentes.

Por causa disso, quando tivermos uma matriz M cujas linhas são obtidas a partir de um conjunto A de vetores linearmente independentes, então as linhas não nulas da matriz escalonada obtida a partir de M correspondem a vetores linearmente independentes do conjunto A. Por exemplo, retomando o exemplo anterior, vamos escalonar a seguinte matriz

$$M=\begin{bmatrix}5&0&0&3\\0&1&2&-1\\5&0&4&1\\0&3&0&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&\frac{3}{5}\\0&1&2&-1\\5&0&4&1\\0&3&0&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&\frac{3}{5}\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&0&4&-2\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&\frac{3}{5}\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&0&4&-2\\0&0&-6&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&\frac{3}{5}\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&0&\boxed{1}&-\frac{1}{2}\\0&0&-6&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&\frac{3}{5}\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&0&\boxed{1}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&\frac{3}{5}\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&0&\boxed{1}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}$$

Como foram obtidas quatro linhas não nulas na matriz escalonada, concluímos, mais uma vez, que os quatro vetores dados são linearmente independentes.

Exemplo 4.3. Determine se os vetores $u=(1,2,3,4,5)$, $v=(5,0,10,-14,2)$ e $w=(7,1,0,2,-8)$ são linearmente dependentes ou independentes.

Solução: A partir dos vetores dados, formamos uma matriz M e determinamos sua forma escalonada:

$$M=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3&4&5\\5&0&10&-14&2\\7&1&0&2&-8\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3&4&5\\0&-10&-5&-34&-23\\0&-13&-21&-26&-53\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3&4&5\\0&\boxed{1}&\frac{1}{2}&\frac{17}{5}&\frac{23}{10}\\0&-13&-21&-26&-53\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3&4&5\\0&\boxed{1}&\frac{1}{2}&\frac{17}{5}&\frac{23}{10}\\0&0&-\frac{29}{2}&\frac{91}{5}&-\frac{231}{10}\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3&4&5\\0&\boxed{1}&\frac{1}{2}&\frac{17}{5}&\frac{23}{10}\\0&0&\boxed{1}&-\frac{182}{145}&-\frac{231}{145}\end{bmatrix}$$

Como não apareceu linha nula na forma escalonada de M, concluímos que os vetores dados são linearmente independentes.

Exemplo 4.4. Determine se os vetores $V=(v_{ij})=\begin{bmatrix}1&2&-3\\6&-5&4\end{bmatrix}$ e

$W = (w_{ij}) = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes ou independentes.

Solução: No caso de dois vetores, basta verificar se um deles é múltiplo do outro, ou seja, se existe alguma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $W = kV$. Como $w_{11} = 8v_{11}$ e essa relação não se mantém para os outros elementos (ou seja, $w_{12} \neq 8v_{12}$, $w_{13} \neq 8v_{13}$ etc.) temos que W não é múltiplo de V e, consequentemente, os vetores dados são linearmente independentes.

4.2 Base e dimensão

Definição 4.1. Um conjunto β é denominado uma **base** de um espaço vetorial V quando:

- β é um conjunto de vetores linearmente independentes;
- β gera todo o espaço V, $[\beta] = V$, ou seja, todo elemento de V é uma combinação linear dos vetores de β.

É usual manter a ordem em que os elementos do conjunto β é dada. Não se deve trocar posições de elementos desse conjunto.

Definição 4.2. A **dimensão** de um espaço vetorial V é a quantidade de elementos de uma base e é denotada por $\dim V$.

- Se $V = \{\ \mathbf{0}\ \}$, então definimos a dimensão de V como sendo igual a zero: $\dim V = 0$;
- Se β for finito com n elementos não nulos, $n \geq 1$, então dizemos que β é n-dimensional ou que dimensão de V é igual a n: $\dim V = n$;
- Se β for um conjunto infinito, então dizemos que a dimensão de V é infinita: $\dim V = \infty$.

Exemplo 4.5. Se v é um elemento não nulo de um espaço vetorial V, então o conjunto W dos múltiplos de v, $W = [v] = \{xv \mid x \in \mathbb{R}\}$, é um espaço vetorial de dimensão 1 porque $\beta = \{v\}$ é um conjunto unitário que é uma base de W. Em particular, se $V = \mathbb{R}^2$ e $v = (1, 3)$, então

$$W = [v] = [(1, 3)] = \{x(1, 3) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

corresponde à reta $y = 3x$ que passa pela origem e é um espaço de dimensão 1.

Exemplo 4.6. O conjunto de vetores LI $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ porque

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1),$$

ou seja, todo elemento de V é combinação dos vetores de β. Como β é formado por dois vetores, temos que a dimensão de V é igual a dois: $\dim V = 2$.

Note que $B = \{(2,0),\ (0,3)\}$ também é base de V, porque $(x,y) = \frac{x}{2}(2,0) + \frac{y}{3}(0,3)$. De modo geral, quando multiplicamos os vetores de uma base por escalares não nulos, obtemos uma nova base. Assim, se $V \neq \{\mathbf{0}\}$, então V tem uma infinidade de bases.

Exemplo 4.7. Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ e $B = \{(1,1),(0,1),(3,5)\}$. Como

$$(x,y) = x\cdot(1,1) + (y-x)\cdot(0,1) + 0\cdot(3,5),$$

temos que o conjunto B gera todo o espaço V, ou seja, $[B] = V$. Apesar disso, B não é uma base de V porque seus vetores são linearmente dependentes: por exemplo, $(3,5) = 3\cdot(1,1) + 2\cdot(0,1)$.

Exemplo 4.8. Consideremos agora $V = \mathbb{R}^3$ e $B = \{(3,2,0),\ (1,-5,0)\}$. Cada vetor de B não é múltiplo do outro, logo B é formado por vetores linearmente independentes. No entanto, B não gera todo o V porque os vetores que têm terceira coordenada nula não são combinação linear dos elementos de B. Por exemplo, não existem escalares a e b tais que

$$\underbrace{a(3,2,0) + b(1,-5,0)}_{(3a+b,\,2a-5b,\,\boxed{0})} = (1,1,\boxed{1}).$$

Portanto, B não é uma base de V.

Exemplo 4.9. Se n é um inteiro positivo, então $V = \mathbb{R}^n$ tem como base o conjunto de vetores LI

$$\beta = \{v_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ v_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ v_3 = (0,0,1,\ldots,0),\\ \cdots, v_n = (0,0,\ldots,0,1)\}.$$

Note que $(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n) = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_nv_n$. Essa base β chama-se **base canônica de** $\mathbb{R}^n$ e como β é formado por n vetores, temos que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 4.10. O espaço vetorial das matrizes 2×3, $M(2,3)$, tem uma base formada pelas matrizes linearmente independentes:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

porque

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluímos assim que $\dim M(2,3) = 2 \cdot 3 = 6$. O conjunto β chama-se base canônica de $M(2,3)$.

O conjunto de matrizes linearmente independentes

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é chamado base canônica de $M(m,n)$ e, consequentemente, $\dim M(m,n) = mn$.

Exemplo 4.11. Seja $V = \mathcal{P}_2$ o conjunto de todos os polinômios de grau ≤ 2, mais o polinômio nulo. No conjunto $\beta = \{x^2,\ x,\ 1\}$ formado de vetores linearmente independente, temos que todo polinômio $p \in V$ se escreve na forma $p = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1$. Assim, β é uma base de V e $\dim \mathcal{P}_2 = 3$.

De um modo geral, uma base de $\mathcal{P}_n$ é $B = \{x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x, 1\}$ e $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$. A base B é denominada base canônica de $\mathcal{P}_n$.

Exemplo 4.12. Não é possível encontrar um conjunto finito de funções reais linearmente independentes $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de tal forma que qualquer outra função real seja combinação linear dessas funções. Assim, o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tem dimensão infinita: $\dim \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$.

Teorema 4.2.1. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente.

Demonstração: Seja $\alpha = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ um conjunto com m vetores de V tal que $m \geq n$. Vamos mostrar que os vetores de α são LD. Para isso, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ escalares tais que $x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots = x_mw_m = \mathbf{0}$. Como β é base de V, cada elemento w_k de α se escreve como combinação linear dos elementos de β: $w_k = a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Logo, a equação anterior se torna

$$x_1 \underbrace{(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n)}_{w_1} + x_2 \underbrace{(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n)}_{w_2} + \cdots + x_m \underbrace{(a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \cdots + a_{nm}v_n)}_{w_m} = \mathbf{0}$$

que é o mesmo que

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)v_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m)v_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m)v_n = \mathbf{0}.$$

Como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, temos que todos os coeficientes dos x_k na equação anterior são nulos. Isso leva ao seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

que é um sistema com n equações e m variáveis, logo possui mais variáveis do que equações. Todo sistema linear homogêneo dessa forma é indeterminado, ou seja, ele admite alguma solução $x_k \neq 0$. Portanto, os vetores do conjunto α são LD, conforme queríamos mostrar.

O teorema a seguir mostra que o conceito de dimensão é bem definido.

Teorema 4.2.2. Duas bases quaisquer de um espaço vetorial V de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Demonstração: Suponhamos que β_1 e β_2 são bases de V com m e n elementos, respectivamente.

- Como β_1 é base de V, pelo teorema anterior, o número de vetores LI em β_2 não pode superar o de β_1, ou seja, $n \leq m$.
- Por outro lado, β_2 também é base de V e daí o número de vetores LI em β_1 não supera o de β_2, ou seja, $m \leq n$.

Como $n \leq m$ e $m \leq n$, então $m = n$, o que significa que as duas bases devem ter a mesma quantidade de elementos.

Observação 1: Se $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ é um conjunto LI, então ele pode ser estendido a uma base $B = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$ de V.

Observação 2: Se $\dim V = n$, então qualquer conjunto com n vetores LI é uma base.

Exemplo 4.13. Consideremos

$$A = \{(3, 5, -11),\ (101, 23, 19),\ (-17, 200, 453),\ (-19, 47, 93)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, A tem 4 vetores e $4 > 3$, temos que A é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

Exemplo 4.14. Seja $\beta = \{(11, 13, 15),\ (-5, 0, 0),\ (8, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Como β é um conjunto com 3 vetores linearmente independentes e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então concluímos que β é uma base de $\mathbb{R}^3$. Nesse caso, a informação sobre a dimensão dispensa o trabalho de verificação do fato de que $\mathbb{R}^3$ é gerado por β.

Exemplo 4.15. Seja $B = \{1,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2,\ 1 + x + x^2 + x^3\} \subset \mathcal{P}_3$. B é um conjunto LI com 4 polinômios. Como $\dim \mathcal{P}_3 = 3 + 1 = 4$, temos que B é uma base de $\mathcal{P}_3$.

4.3 Coordenadas

Teorema 4.3.1. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único como combinação linear dos elementos de V.

Demonstração: Suponhamos que v se escreva como combinação linear dos elementos de β de duas maneiras: $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$. Como $\mathbf{0} = v - v = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) - (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$ e os vetores

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, temos $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, $\ldots$, $a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$ e isso significa que o modo de escrever v como combinação dos elementos de β é único.

Definição 4.3. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V e $v \in V$ se escreve como $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, então dizemos que os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são as **coordenadas** de v com relação à base β. Denotamos isso por $[v]_\beta$ e escrevemos em forma de linha $[v]_\beta = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou na forma de coluna $[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo 4.16. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ uma base de V. Determinar as coordenadas de $v = (3, 1, -4) \in V$ na base β.

Solução: Consideremos escalares x, y, z tais que $v = (3, 1, -4) = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1)$. Essa equação é o mesmo que $(3,1,-4) = (x, x+y, x+y+z)$ e corresponde ao sistema linear $\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 1 \\ x + y + z = -4 \end{cases}$ cuja solução é $x = 3$, $y = 1 - x = 1 - 3 = -2$ e $z = -4 - x - y = -4 - 3 - (-2) = -5$. Portanto, $[v]_\beta = (3, -2, -5)$.

Exemplo 4.17. Determinar as coordenadas de $v = (3, 1, -4)$ com relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

Solução: Se x, y, z são escalares tais que $v = (3,1,-4) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x, y, z)$, então $x = 3$, $y = 1$, $z = -4$. Logo, $[v]_B = (3, 1, -4)$. Note a facilidade que é calcular coordenadas de um vetor com relação a uma base canônica.

Exemplo 4.18. Determine as coordenadas de $p = 2t^2 - 5t + 6 \subset \mathcal{P}_2$ com relação à base $\beta = \{1,\ t - 1,\ (t-1)^2\}$.

Solução: Vamos determinar escalares x, y, z tais que $p = 2t^2 - 5t + 6 = x \cdot 1 + y(t-1) + z(t-1)^2 = x + yt - y + zt^2 - 2zt + z \Rightarrow 2t_2 - 5t + 6 =$

$zt^2 + (y - 2z)t + (x - y + z) \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y - 2z = -5 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$ cuja solução é $z = 2$, $y = 2z - 5 = -1$ e $x = 6 + y - z = 3$. Portanto, $[p]_B = (3, -1, 2)$.

4.4 Interseção e soma de subespaços

Definição 4.4. Sejam U e W subespaços de V. Então a interseção $U \cap W$ e a soma $U + W$ são subespaços de V e são definidos da seguinte forma:

- $U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ e } v \in W\}$
- $U + W = \{u + w \in V \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$

Podemos mostrar que $U \cap W$ é um subespaço vetorial da seguinte forma:

- Como $\mathbf{0} \in U$, $\mathbf{0} \in W$, temos que $\mathbf{0} \in U \cap W$. Assim, $U \cap W \neq \emptyset$;
- Se $u, v \in U \cap W$, então $u, v \in U$ e $u, v \in V$. Logo, $u + v \in U$ e $u + v \in W \Rightarrow u + v \in U \cap W$;
- Se $v \in U \cap W$ e $k \in \mathbb{R}$, então $v \in U$ e $v \in V \Rightarrow kv \in U$ e $kv \in W$ $\Rightarrow kv \in U \cap W$.

Os três itens anteriores mostram que $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.

Agora, vamos mostrar que $U + W$ é subespaço vetorial de V:

- Como $\mathbf{0} \in U$ e $\mathbf{0} \in W$, temos que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in U + W$. Logo, $U + W \neq \emptyset$;
- Se $u, v \in U + W$, então $u = u_1 + w_1$ e $v = u_2 + w_2$, com $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Daí,
  $u + v = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(u_1 + u_1)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$;
- Se $k \in \mathbb{R}$ e $v \in U + W$, então $v = u_2 + w_2$, com $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$ $\Rightarrow kv = k(u_2 + w_2) = ku_2 + kw_2 \in U + W$.

Dessa forma, fica mostrado que $U + W$ também é um espaço vetorial de V.

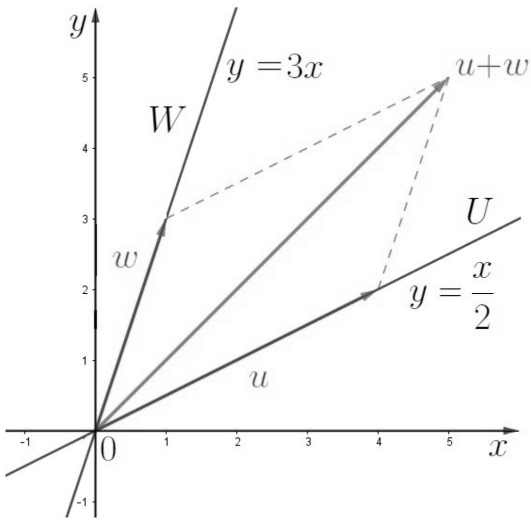
Exemplo 4.19. Sejam U e W dois subespaços cujos gráficos no plano cartesiano correspondam a duas retas que passam pela origem:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x}{2}\}$$

e

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}.$$

A união desses subespaços, $U \cup W$, não é um subespaço de V. Por exemplo, $u = (4, 2) \in U \subset U \cup W$ e $w = (1, 3) \in W \subset U \cup W$, mas $u + w = (5, 5) \notin U$ e $u + w \notin W$; logo, $u + w \notin U \cup W \Rightarrow U \cup W$ não é um subespaço de V.



Em geral, a união de subespaços $U \cup W$ só é subespaço de V no caso particular em que $U \subset W$ ou $W \subset U$.

Definição 4.5. Se $V = U + W$ e $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, então dizemos que V é **soma direta** de U e W e denotamos por $V = U \oplus W$.

Se $V = U \oplus W$, então cada $v \in V$ pode ser escrito de modo único como uma soma $v = u + w$. Para mostrar isso, sejam $v = u_1 + w_1$ e $v = u_2 + w_2$. Como $u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$
$\Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

Teorema 4.4.1. Se U e W são subespaços vetoriais de dimensão finita, então

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

A demonstração consiste em iniciar com uma base $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ de $U \cap W$ e completar essa base com vetores $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de modo que

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_r, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

seja uma base de U e depois completar com $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de modo que

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_r, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

seja uma base de W. Daí pode-se mostrar que o conjunto

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_r, u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é linearmente independente e, consequentemente, é uma base de $U + W$. Como $\dim U = m + r$, $\dim W = n + r$, $\dim(U \cap W) = r$ e $\dim(U + W) = m + n + r$, temos que

$$\dim U + \dim W = (m+r)+(n+r) = (m+n+r)+r = \dim(U+W)+\dim(U \cap W).$$

Exemplo 4.20. Considere os subespaços W_1 e W_2 de $\mathbb{R}^3$ definidos por $W_1 = \{(x, y, z) \mid y = z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \mid x = y - z\}$. Determine uma base para W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ e calcule suas dimensões. Verifique também se $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

Solução: Vamos dividir a solução em várias partes:

- $W_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$. Assim, uma base de W_1 é $\beta_1 = \{(1, 0, 0)\}$ e $\dim W_1 = 1$.

- $W_2 = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{(y, y, 0) + (-z, 0, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 0),\ (-1, 0, 1)]$. Por isso, uma base de W_2 é $\beta_2 = \{(1, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\}$ e $\dim W_2 = 2$.

- Uma base de $W_1 + W_2$ é gerada pelos vetores das bases de W_1 e W_2. Como esses vetores são linearmente independentes, eles são uma base para $W_1 + W_2$:
$$\beta_3 = \{(1, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\}$$
e daí obtemos que $\dim(W_1 + W_2) = 3$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, temos que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

- Se um vetor (x, y, z) pertence à interseção $W_1 \cap W_2$, então suas coordenadas x, y, z satisfazem a todas as equações que definem W_1 e W_2, ou seja, $y = 0$, $z = 0$ e $x = y - z$. Resolvendo-se o sistema $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = y - z \end{cases}$, obtemos $x = y = z = 0$. Isso significa que a interseção de W_1 e W_2 é formada apenas pelo vetor nulo: $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$, o que implica $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$.

- Como $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$, temos que a soma é dita direta e é denotada por $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

Observação 1: Nesse caso, $\dim(W_1 + W_2) = 3 = 1 + 2 - 0 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Observação 2: O gráfico de W_1 é uma reta que passa pela origem $(0, 0, 0)$ e o de W_2 é um plano que também passa pela origem.

4.5 Exercícios Resolvidos

R1) Determine as coordenadas do polinômio $p = t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ com relação à base $\beta = \{v_1 = t^3 + 1,\ v_2 = t^3 + t,\ v_3 = t^3 + t^2,\ v_4 = t^3,\ v_5 = t^4 + t^3,\ v_6 = t^5 + t^3\}$ de $\mathcal{P}_5$.

Solução: Vamos determinar escalares a, b, c, d, e, f tais que $p = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 + ev_5 + fv_6$. Essa última igualdade é equivalente a

$$t^5-t^4+t^3-t^2-t+1 = a\cdot(t^3+1)+b\cdot(t^3+t)+c\cdot(t^3+t^2)+d\cdot(t^3)+e\cdot(t^4+t^3)+f\cdot(t^5+t^3)$$

Reagrupando os termos semelhantes, obtemos

$$t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 = f \cdot t^5 + e \cdot t^4 + (a + b + c + d + e + f)t^3 + c \cdot t^2 + b \cdot t + a,$$

que leva às equações: $a = 1, b = -1, c = -1, a + b + c + d + e + f = 1, e = -1, f = 1 \Rightarrow d = 1 - a - b - c - e - f = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 2$. Portanto, $[f]_\beta = (1, -1, -1, 2, -1, 1)$.

R2) Seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right\}$. Mostre que B é uma base de $M(2, 2)$ e determine as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 4 & 49 \end{bmatrix}$ com relação a essa base.

Solução: Sejam x, y, z, t escalares tais que

$$x \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa equação matricial equivale a $\begin{bmatrix} x + z & 2x + 3t \\ 3y + 2z & 4y + 5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e ao sistema

$\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+3t=0 \\ 3y+2z=0 \\ 4y+5t=0 \end{cases}$, cuja matriz é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. O processo de escalonamento de M é

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada de M equivale ao sistema $\begin{cases} x+z=0 \\ y+\frac{5t}{4}=0 \\ z-\frac{15t}{8}=0 \\ t=0 \end{cases}$ e sua solução é $x=y=z=t=0$. Logo, os vetores de B são linearmente independentes. Como $\dim M(2,2)=4$, temos que B é uma base de $M(2,2)$.

Vamos agora determinar as coordenadas de A na base B. Sejam $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ tais que

$$x\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 4 & 49 \end{bmatrix}.$$

Essa equação matricial equivale a $\begin{bmatrix} x+z & 2x+3t \\ 3y+2z & 4y+5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 4 & 49 \end{bmatrix}$ e ao sistema $\begin{cases} x+z=-7 \\ 2x+3t=11 \\ 3y+2z=4 \\ 4y+5t=49 \end{cases}$, cuja matriz é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 49 \end{bmatrix}$. Um processo de escalonamento semelhante ao anterior, leva à seguinte forma escalonada:

$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{49}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{15}{8} & -\frac{131}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{31}{3} \end{bmatrix}$. Essa forma escalonada de M equivale ao sistema $\begin{cases} x + z = -7 \\ y + \frac{5t}{4} = \frac{49}{4} \\ z - \frac{15t}{8} = -\frac{15}{8} \\ t = -\frac{131}{8} \end{cases}$ e sua solução é $x = -10$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = 3$, $t = \frac{31}{3}$. Portanto, $[A]_B = (-10,\ -\frac{2}{3},\ 3,\ \frac{31}{3})$.

R3) Determine se as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes ou independentes.

Solução: Sejam x, y, z escalares tais que $xA+yB+zC = \mathbf{0}$. Vamos determinar os valores de x, y, z que são soluções da equação que equivale a

$$x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + 13z & x + 3y + 7z \\ x - 2y + 4z & x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 13z = 0 \\ x + 3y + 7z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}.$$

A matriz desse sistema é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que pode ser escalonada da seguinte maneira:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & -3 & -13 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 13 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & -3 & -13 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 13 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 13 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 13 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada de M equivale ao sistema $\begin{cases} x + 13z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, cuja solução é $x = y = z = 0$. Portanto, as matrizes A, B e C são linearmente independentes.

R4) Verifique se os vetores $u = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, $v = x^3 - x^2 + 8x + 2$ e $w = 2x^3 - 4x^2 + 9x + 5$ de $V = \mathcal{P}_3$ são linearmente dependentes ou independentes.

Solução: Sejam a, b, c escalares tais que $au + bv + cw = 0$. Essa equação equivale a

$$a(x^3 - 3x^2 + 5x + 1) + b(x^3 - x^2 + 8x + 2) + c(2x^3 - 4x^2 + 9x + 5) = 0.$$

Agrupando os termos de mesmo grau, obtemos

$$\underbrace{(a + b + 2c)}_{0}x^3 + \underbrace{(-3a - b - 4c)}_{0}x^2 + \underbrace{(5a + 8b + 9c)}_{0}x + \underbrace{(a + 2b + 5c)}_{0} = 0$$

que implica

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -3a - b - 4c = 0 \\ 5a + 8b + 9c = 0 \\ a + 2b + 5c = 0 \end{cases}$$

Devemos agora resolver esse sistema, ou seja, calcular os valores de a, b, c. Para isso, escrevemos a matriz completa do sistema e a escalonamos:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa última matriz obtida equivale ao sistema $\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$, cuja solução é $a = b = c = 0$. Portanto, os vetores u, v, w são linearmente independentes.

R5) Seja $V = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mostre que $f, g, h \in V$ são linearmente independentes, onde $f(x) = \cos(\pi x)$, $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ e $h(x) = x^2 e^x$.

Solução: Consideremos uma combinação linear $af + bg + ch = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ representa a função nula. Isso significa que $af(x) + bg(x) = ch(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Já que vale para todo x, então podemos escolher alguns valores particulares para x. Por exemplo,

- para $x = 0$, a equação se torna: $af(0) + bg(0) + ch(0) = 0$
  $$\Rightarrow a \underbrace{\cos 0}_{1} + b \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0} + c \cdot 0e^0 = 0 \Rightarrow a = 0$$

- para $x = 1$, a equação se torna: $af(1) + bg(1) + ch(1) = 0$
  $$\Rightarrow a \underbrace{\cos \pi}_{-1} + b \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{0} + c \cdot 1e^1 = 0 \Rightarrow -a + ce = 0 \Rightarrow ce = 0 \Rightarrow c = 0$$

- para $x = \frac{1}{2}$, a equação se torna: $af(\frac{1}{2}) + bg(\frac{1}{2}) + ch(\frac{1}{2}) = 0$
  $$\Rightarrow a \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + b \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{1} + (\tfrac{1}{2})^2 e^{1/2} = 0 \Rightarrow \underbrace{a \cdot 0}_{0} + b \cdot 1 + \underbrace{\frac{c \cdot e^{1/2}}{4}}_{0} = 0 \Rightarrow$$
  $b = 0$

Portanto, a equação $af + bg + ch = 0$ tem somente a solução nula $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, e isso significa que f, g, h são linearmente independentes.

R6) Considere o seguinte conjunto de vetores do $\mathbb{R}^4$: $A = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$, onde $v_1 = (14,\ -27,\ -49,\ 113)$, $v_2 = (43,\ -82,\ -145,\ 340)$, $v_3 = (-29,\ 55,\ 96,\ -227)$, e $v_4 = (85,\ -163,\ -293,\ 677)$. Determine um subconjunto $B \subset A$ que tenha a maior quantidade possível de vetores linearmente independentes.

Solução: Inicialmente, vamos verificar se os vetores de A são linearmente independentes. Para isso, determinamos a forma escalonada da matriz M cujas linhas são os vetores dados.

$$M=\begin{bmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 85 & -163 & -293 & 677 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{27}{14} & -\frac{7}{2} & \frac{113}{14} \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 85 & -163 & -293 & 677 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{27}{14} & -\frac{7}{2} & \frac{113}{14} \\ 0 & \frac{13}{14} & \frac{11}{2} & -\frac{99}{14} \\ 0 & -\frac{13}{14} & -\frac{11}{2} & -\frac{99}{14} \\ 0 & \frac{13}{14} & \frac{9}{2} & -\frac{127}{14} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{27}{14} & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{14} & \frac{11}{2} & -\frac{99}{14} \\ 0 & -\frac{13}{14} & -\frac{11}{2} & -\frac{99}{14} \\ 0 & \frac{13}{14} & \frac{9}{2} & -\frac{127}{14} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{27}{14} & -\frac{7}{2} & \frac{113}{14} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{77}{13} & -\frac{99}{13} \\ 0 & -\frac{13}{14} & -\frac{11}{2} & -\frac{99}{14} \\ 0 & \frac{13}{14} & \frac{9}{2} & -\frac{127}{14} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{27}{14} & -\frac{7}{2} & \frac{113}{14} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{77}{13} & -\frac{99}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{27}{14} & -\frac{7}{2} & \frac{113}{14} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{77}{13} & -\frac{99}{13} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A linha nula que apareceu na forma escalonada de M indica que os quatro vetores de A são linearmente dependentes. No processo de escalonamento, a linha nula apareceu como sendo a terceira linha e não houve troca de linhas antes disso. Isso indica que podemos eliminar o terceiro vetor do conjunto A para obtermos um conjunto de vetores independentes: $B=\{v_1,v_2,v_4\}$.

Observação: Outras respostas são possíveis para o conjunto B de vetores linearmente independentes: $B=\{v_1,v_3,v_4\}$ ou $B=\{v_2,v_3,v_4\}$. No entanto, a escolha $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ não é válida porque os vetores v_1,v_2,v_3 são linearmente dependentes.

R7) Em um espaço vetorial V cuja base é $\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_5\}$ considere os vetores

$$\begin{array}{l} v_1 = 2w_1 - w_3 \\ v_2 = 3w_2 + w_4 \\ v_3 = -w_1 + 2w_5 \\ v_4 = w_1 - 3w_2 - 2w_3 - w_4 + 6w_5 \\ v_5 = 6w_2 + w_3 + 2w_4 - 4w_5 \end{array}.$$

Determine o subconjunto de $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ formado pela maior quantidade possível de vetores linearmente independentes.

Solução: As equações anteriores podem ser escritas na forma de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada de M fornece todas as informações a respeito de dependência e independência linear desses vetores.

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No final do escalonamento, restaram três linhas não nulas. Essas linhas não nulas correspondem a três vetores independentes. Como não houve troca de linhas no processo de escalonamento, escolhemos como subconjunto de vetores linearmente independentes o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Observação: Pelo processo de escalonamento anterior, percebemos que os vetores v_4 e v_5 são dependentes de v_1, v_2, v_3, ou seja, são combinações lineares de v_1, v_2, v_3. O processo de escalonamento também pode ser usado para determinar quais são essas combinações lineares. Vamos denotar por L, M, N, P, Q, R, S a primeira, segunda, terceira, quarta, quinta, sexta e sétima etapa do escalonamento, respectivamente. Denotemos por $L_1, L_2, \ldots, L_5$ as linhas da matriz na etapa L do escalonamento, $M_1, M_2, \ldots, M_5$ as linhas da etapa M e assim por diante. Por exemplo, vamos denotar a divisão da primeira linha por 2 no início do escalonamento por $M_1 = \frac{L_1}{2}$. Outro exemplo: ao escrever $Q_4 = P_4 + 3P_2$, estamos denotando que a quarta linha da etapa Q foi obtida através da soma da quarta linha com três vezes a segunda linha da etapa anterior. Vamos denotar todas as etapas do escalonamento na seguinte tabela:

L	M	N	P	Q	R	S
$L_1 = v_1$	$M_1 = \frac{L_1}{2}$	$N_1 = M_1$	$P_1 = N_1$	$Q_1 = P_1$	$R_1 = Q_1$	$S_1 = R_1$
$L_2 = v_2$	$M_2 = L_2$	$N_2 = M_2$	$P_2 = \frac{N_2}{3}$	$Q_2 = P_2$	$R_2 = Q_2$	$S_2 = R_2$
$L_3 = v_3$	$M_3 = L_3$	$N_3 = M_3 + M_1$	$P_3 = N_3$	$Q_3 = P_3$	$R_3 = -2Q_3$	$S_3 = R_3$
$L_4 = v_4$	$M_4 = L_4$	$N_4 = M_4 - M_1$	$P_4 = N_4$	$Q_4 = P_4 + 3P_2$	$R_4 = Q_4$	$S_4 = R_4 + \frac{3}{2}R_3$
$L_5 = v_5$	$M_5 = L_5$	$N_5 = M_5$	$P_5 = N_5$	$Q_5 = P_5 - 6P_2$	$R_5 = Q_5$	$S_5 = R_5 - R_3$

Substituímos agora todas as operações realizadas para chegar em S_4 e S_5 que correspondem às linhas nulas da matriz escalonada.

- $S_4 = R_4 + \frac{3}{2}R_3 = Q_4 + \frac{3}{2}(-2Q_3) = Q_4 - 3Q_3 = (P_4 + 3P_2) - 3P_3 = N_4 + N_2 - 3N_3 = (M_4 - M_1) + M_2 - 3(M_3 + M_1) = M_4 - 3M_3 + M_2 - 4M_1 = L_4 - 3L_3 + L_2 - 2L_1 = \mathbf{0} \Rightarrow L_4 = 2L_1 - L_2 + 3L_3 \Rightarrow \boxed{v_4 = 2v_1 - v_2 + 3v_3}$

- $S_5 = R_5 - R_3 = Q_5 - (-2Q_3) = (P_5 - 6P_2) + 2P_3 = N_5 - 6(\frac{N_2}{3}) + 2N_3 = M_5 - 2M_2 + 2(M_3 + M_1) = M_5 + 2M_3 - 2M_2 + 2M_1 = L_5 + 2L_3 - 2L_2 + L_1 = \mathbf{0} \Rightarrow L_5 = -L_1 + 2L_2 - 2L_3 \Rightarrow \boxed{v_5 = -v_1 + 2v_2 - 2v_3}$

R8) Encontre a dimensão e uma base para o espaço W das soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ 3x + y - z + t = 0 \\ 3x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

.

Solução: Vamos determinar a forma escalonada da matriz do sistema:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa última matriz equivale a $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ \quad\ y-z+t=0 \end{cases}$ cuja solução é $y = z - t$ e $x = -y + z - t = -z + t + z - t = 0$. Assim, a solução geral do sistema é $(0, z-t, z, t)$, $\forall z, t \in \mathbb{R}$. Como $(0, z-t, z, t) = (0, z, z, 0) + (0, -t, 0, t) = z(0, 1, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$, temos que uma base da solução do sistema dado é

$$\beta \ = \ \{(0,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ -1,\ 0,\ 1)\}.$$

R9) Encontre as bases da interseção e da soma dos subespaços

$$U = [(1,2,1,1),\ (2,3,1,0),\ (3,1,1,-2)]$$

e

$$W = [(0,4,1,3),\ (1,0,-2,-6),\ (1,0,3,5)].$$

Solução: Este problema é resolvido em várias etapas. Primeiramente, vamos encontrar uma base da interseção de U e W.

- U é formado por todas as combinações lineares dos vetores $(1,2,1,1)$, $(2,3,1,0)$ e $(3,1,1,-2)$. Logo,

$$\begin{aligned} U &= \{x(1,2,1,1) + y(2,3,1,0) + z(3,1,1,-2) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\underbrace{x+2y+3z}_{*},\ \underbrace{2x+3y+z}_{**},\ \underbrace{x+y+z}_{***},\ \underbrace{x-2z}_{****}) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- Pelo mesmo motivo, W é o conjunto de todas as combinações lineares de $(0,4,1,3)$,
$(1,0,-2,-6)$, e $(1,0,3,5)$. Daí,

$$\begin{aligned} W &= \{r(0,4,1,3) + s(1,0,-2,-6) + t(1,0,3,5) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\underbrace{s+t}_{*},\ \underbrace{4r}_{**},\ \underbrace{r-2s+3t}_{***},\ \underbrace{3r-6s+5t}_{****}) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Se um vetor pertence a $U \cap W$, então ele pertence simultaneamente a U e a W. Isso quer dizer que nos pontos de interseção, as coordenadas dos vetores de U coincidem com as dos vetores de W, o que leva à resolução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+2y+3z = s+t \\ 2x+3y+z = 4r \\ x+y+z = r-2s+3t \\ x-2z = 3r-6s+5t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z-s-t = 0 \\ 2x+3y+z-4r = 0 \\ x+y+z-r+2s-3t = 0 \\ x-2z-3r+6s-5t = 0 \end{cases}$$

- Para resolver o sistema anterior, escalonamos a sua matriz completa M:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & -8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e essa matriz escalonada corresponde ao sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z - s - t = 0 \\ y + 5z + 4r - 2s - 2t = 0 \\ z + r + \frac{s}{3} - \frac{4t}{3} = 0 \\ s - t = 0 \end{cases}$
cuja solução é: $s = t$, $z = -r - \frac{s}{3} + \frac{4t}{3} = -r + t$, $y = -5z - 4r + 2s + 2t = r - t$, $x = -2y - 3z + s + t = r + t$.

- Substituindo os valores encontrados de x, y, z, s nas coordenadas *, **, ***, **** de U ou de W escritas no início, obtemos $(2t,\ 4r,\ r+t,\ 3r-t)$. Como esses vetores pertencem tanto a U, quanto a W, temos que

$$U \cap W = \{(2t,\ 4r,\ r+t,\ 3r-t) \mid r, t \in \mathbb{R}\}.$$

Como $(2t,\ 4r,\ r+t,\ 3r-t) = (0, 4r, r, 3r) + (2t, 0, t, -t) = r(0, 4, 1, 3) + t(2, 0, 1, -1)$, concluímos que

$$U \cap W = [(0,\ 4,\ 1,\ 3),\ (2,\ 0,\ 1,\ -1)].$$

- Os vetores $(0,\ 4,\ 1,\ 3)$ e $(2,\ 0,\ 1,\ -1)$ são linearmente independentes (um não é múltiplo do outro), dessa forma eles formam uma base para $U \cap W$.

Agora, vamos encontrar uma base da soma $U+W$. Para isso, montamos uma matriz S cujas linhas sejam formadas pelos vetores que geram U e W e escalonamos essa matriz.

$$S=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&0\\3&1&1&-2\\0&4&1&3\\1&0&-2&-6\\1&0&3&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&-2\\0&-5&-2&-5\\0&4&1&3\\0&-2&-3&-7\\0&-2&2&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&-2\\0&-5&-2&-5\\0&4&1&3\\0&-2&-3&-7\\0&-2&2&4\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&-5&-2&-5\\0&4&1&3\\0&-2&-3&-7\\0&-2&2&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&0&3&5\\0&0&-3&-5\\0&0&-1&-3\\0&0&4&8\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&0&\boxed{1}&\frac{5}{3}\\0&0&-3&-5\\0&0&-1&-3\\0&0&4&8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&0&\boxed{1}&\frac{5}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{4}{3}\\0&0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&0&\boxed{1}&\frac{5}{3}\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

As quatro linhas não nulas dessa matriz escalonada podem ser escolhidas como uma base B de $U+W$:

$$B\ =\ \left\{(1,2,1,1),\ (0,1,1,2),\ (0,0,1,\frac{5}{3}),\ (0,0,0,1)\right\}.$$

Outra base B' pode ser escolhida entre entre as linhas iniciais, antes do escalonamento da matriz. Mas nesse caso, as quatro primeiras linhas não podem ser escolhidas porque a quarta linha se anulou no processo de escalonamento. Iisso significa que a quarta linha é dependente das três primeiras. O mesmo vale também para a sexta linha que também não pode ser escolhida com as três primeiras.

$$B'=\{(1,2,1,1),\ (2,3,1,0),\ (3,1,1,-2),(1,0,-2,-6)\}.$$

Observação: Pelo que vimos acima, temos $\dim(U\cap W)=2$ e $\dim(U+W)=4$. Escalonando-se $P=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&0\\3&1&1&-2\end{bmatrix}$ e $Q=\begin{bmatrix}0&4&1&3\\1&0&-2&-6\\1&0&3&5\end{bmatrix}$, formadas pelas bases de U e W, respectivamente, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$. Logo, $\dim U = 3$ e $\dim W = 3$. Sendo assim, a fórmula

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{4} = \underbrace{\dim U}_{3} + \underbrace{\dim W}_{3} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{2}$$

é verificada.

R10) Sejam U e W os seguintes subespaços de $V = \mathbb{R}^4$:

$$U = \{(a,\ b,\ c,\ d) \mid 3b + 2c - d = 0\},$$

$$W == \{(a,\ b,\ c,\ d) \mid a - 2b = 0,\ 5a + c + d = 0\}.$$

Encontre a dimensão e uma base para U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

Solução: Vamos separar a solução em vários itens:

- Isolando-se uma das variáveis da equação que define U obtemos, por exemplo, $d = 3b + 2c$. Daí, U pode ser escrito na forma

  $$U = \{(a,\ b,\ c,\ 3b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

  Como $(a,\ b,\ c,\ 3b+2c) = (a, 0, 0, 0)+(0, b, 0, 3b)+(0, 0, c, 2c) = a(1, 0, 0, 0)+ b(0, 1, 0, 3)+c(0, 0, 1, 2)$. Os vetores $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$ são LI de onde obtemos que uma base de U é $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 2)\}$. Portanto, $\dim U = 3$.

- As equações $a - 2b = 0$ e $5a + c + d = 0$ de W podem ser escritas na forma $a = 2b$ e $d = -5a - c = -10b - c$. Logo,

  $$W = \{(2b, b, c, -10b - c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}.$$

  Como $(2b, b, c, -10b - c) = (2b, b, 0, -10b) + (0, 0, c, -c) = b(2, 1, 0, -10) + c(0, 0, 1, -1)$, obtemos $\{(2, 1, 0, -10),\ (0, 0, 1, -1)\}$ como sendo uma base de W, e daí, $\dim W = 2$.

- Na interseção de U e W, todas as equações usadas para definir U e W devem ser válidas. Logo,

  $$U \cap W = \{(a,\ b,\ c,\ d) \mid 3b + 2c - d = 0,\ a - 2b = 0,\ 5a + c + d = 0\}$$

Devemos agora resolver o sistema $\begin{cases} 3b + 2c - d = 0 \\ \quad\quad a - 2b = 0 \\ 5a + c + d = 0 \end{cases}$. Da segunda equação, $a = 2b$. Somando-se a primeira com a terceira equações, obtemos $3b+3c+5a = 0 \Rightarrow 3b + 3c + 10b = 0 \Rightarrow c = -\frac{13b}{3}$. Da terceira equação, temos $d = -5a - c = -10b + \frac{13b}{3} = -\frac{17b}{3}$. Dessa forma, obtivemos que

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ \left(2b,\ b,\ -\frac{13b}{3},\ -\frac{17b}{3}\right) \mid b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\left(2,\ 1,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{17}{3}\right) \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left[\left(2,\ 1,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{17}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Portanto, uma base de $U \cap W$ é $\{(2, 1, -\frac{13}{3}, -\frac{17}{3})\}$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

- Para determinar uma base de $U + W$ devemos escalonar a matriz cujas linhas são os vetores das bases de U e W:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Um escalonamento possível é:

$$M \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da forma escalonada da matriz, concluímos que $\dim(U + W) = 4$ e, como $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ temos que $U + W = \mathbb{R}^4$. Uma base de $U + W$ pode ser formada pelas quatro linhas não nulas da matriz escalonada:

$$B = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 1)\}$$

Outra opção para base de $U + W$ seria o conjunto formada pelas quatro primeiras linhas de M (antes do escalonamento):

$$B' = \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,3),\ (0,0,1,2),\ (2,1,0,-10)\}$$

Observação 1: Como $\dim(U \cap W) > 0$, temos que a soma $U + W = \mathbb{R}^4$ não é uma soma direta. Isso significa que cada vetor de $\mathbb{R}^4$ se escreve de infinitos modos como soma de um elemento de U com outro de W.

Observação 2: $4 = \dim(U+W) = 3+2-1 = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

4.6 Exercícios Propostos

1) Considere V um espaço vetorial de dimensão 3 e $\alpha = \{u, v, w\}$ uma base de V. Mostre que $\beta = \{u+v, v+w, u+w\}$ também é uma base de V.

2) Considere V um espaço vetorial de dimensão 5 e $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ uma base de V. Mostre que $\beta = \{u_1, u_1 - u_2, u_1 + u_2 + 2u_3, u_1 + u_2 - u_3 - 5u_4, u_1 - 3u_2 - u_3 + u_4 + 8u_5\}$ também é uma base de V.

3) Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V de dimensão n. Sabendo que $\dim U < \frac{n}{2}$ e $\dim W < \frac{n}{2}$, mostre que $U \cap W \neq \{0\}$.
Resp.: Use uma fórmula conveniente para calcular $\dim(U + V)$.

4) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço $W = \{(x, y, z) \mid x = y\}$. Encontre um subespaço U de $\mathbb{R}^3$ tal que $W \oplus U = \mathbb{R}^3$.
Resp.: $U = [(0, 1, 0)]$, por exemplo. Existem outras respostas válidas.

5) Sejam V o espaço vetorial de todas as funções $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, U o subespaço de V das funções pares e W o subespaço das funcoes ímpares. Mostre que $V = U \oplus W$.
Resp.: Observe que $\underbrace{\dfrac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{função par}} + \underbrace{\dfrac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{função ímpar}} = f(x)$ para qualquer f.

6) Sejam $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e f, g, h três vetores de V. Verifique se esses vetores são linearmente independentes em cada um dos seguintes casos:

a) $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^t$
b) $f(t) = \cos^2 t$, $g(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $h(t) = \cos 2t$
c) $f(t) = \cos^2 t$, $g(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $h(t) = -5$
d) $f(t) = e^t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^t \operatorname{sen} t$
f) $f(t) = 1$, $g(t) = t$, $h(t) = t^2$
g) $f(t) = t$, $g(t) = t^2$, $h(t) = te^t$
Resp.: São LI somente os casos a), d), f), g).

7) No espaço vetorial $V = \mathcal{P}_3$ dos polinômios de grau ≤ 3, considere a base

$$\beta = \{1,\ 1+t,\ (1+t)^2,\ (1+t)^3\}.$$

Calcule as coordenadas $[v]_\beta$ e $[w]_\beta$ sabendo que $v = 4 + 3t - t^2 + 2t^3$ e $w = 5 + t - t^2$.
Resp.: $[v]_\beta = (-2, 11, -7, 2)$, $[w]_\beta = (3, 3, -1, 0)$

8) Mostre que os polinômios $p_1 = 1 + 2x - 3x^2$, $p_2 = 1 - 3x + 2x^2$ e $p_3 = 2 - x + 5x^2$ formam uma base do espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau ≤ 2 e calcule as coordenadas de $p = -2 - 9x - 13x^2$ na base $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$.
Resp.: $[p]_\beta = (1, 5, -4)$

9) Considere os subespaços W_1 e W_2 de $\mathbb{R}^3$ definidos por $W_1 = \{(x, y, z) \mid z = x + y\}$ e $W_2 = [(0, 0, 1)]$. Determine uma base e calcule a dimensão de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. É verdade que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?
Resp.: $W_1 = [(1, 0, 1),\ (0, 1, 1)]$, $W_2 = [(0, 0, 1)]$, $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, a soma é direta.

10) Sejam $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ dados por $W_1 = [(0, 1, -1), (1, 2, 1), (1, -3, 6)]$ e $W_2 = \{(x, y, z) \mid x + y = 0,\ x - z = 0\}$. Calcule $\dim W_1$, $\dim W_2$ e verifique se $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.
Resp.: $W_1 = [(0, 1, -1), (0, 1, 1)]$, $W_2 = [(1, -1, 1)]$, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$, a soma é direta.

11) Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos por $W_1 = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \mid x - y - z + t = 0\}$. Determine uma base e calcule a dimensão de cada um dos subespaços W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$. É verdade que $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$?
Resp.: $W_1 = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$, $W_2 = [(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)]$, $W_1 \cap W_2 = [(0, 0, 1, 1)]$, $W_1 + W_2 = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1)]$, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$, a soma não é

direta.

12) Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $M(2,2)$:

a) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = a + c,\ d = c \right\}$

b) $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a - 5b + c = 0 \right\}$

c) $W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid c = a - 3b,\ d = 0 \right\}$

d) $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + d = b + c \right\}$

e) $W_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = c \right\}$

f) $W_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b = 0,\ c - d = 0 \right\}$

Resp.: a) $\dim W_1 = 2$, $\quad W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

b) $\dim W_2 = 3$, $\quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

c) $\dim W_3 = 2$, $\quad W_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right]$

d) $\dim W_4 = 3$, $\quad W_4 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

e) $\dim W_5 = 3$, $\quad W_5 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

f) $\dim W_6 = 2$, $\quad W_6 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

13) Determine uma base e calcule a dimensão do subespaço W de $M(3,3)$ formado pelas *matrizes simétricas*, ou seja, as matrizes M de ordem 3×3 tais que $M^t = M$.

Resp.: $\dim W = 6$,

$$W = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

14) Encontre uma base e a dimensão do espaço-solução S dos sistemas:

a) $\begin{cases} x-2y-z &= 0 \\ 2x+y+3z &= 0 \\ x+3y+4z &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z+3t &= 0 \\ 2x-y+z-t &= 0 \\ 4x+3y-z+5t &= 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-2z+t &= 0 \\ 2x+2y-4z+2t &= 0 \\ 3x+3y-6z+5t &= 0 \end{cases}$

Resp.: a) $\dim S = 1$, $S = [(1,1,-1)]$;
b) $\dim S = 2$, $S = [(-1,3,5,0),(-1,-7,0,5)]$;
c) $\dim S = 2$, $S = [(2,0,1,0),(0,2,1,0)]$.

15) Determine um subconjunto de $A = \{v_1 = (-1,4,-3,-2),\ v_2 = (3,-7,5,3),\ v_3 = (3,-2,1,0),\ v_4 = (-4,1,0,1)\}$ que tenha a maior quantidade possível de vetores linearmente independentes.
Resp.: $\{v_1, v_2\}$, por exemplo. OBS.: $v_3 = 3v_1 + 2v_2$, $v_4 = -5v_1 - 3v_2$

16) Em um espaço vetorial V cuja base é $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ considere os vetores

$$\begin{array}{l} v_1 = w_1 - 2w_2 + 2w_3 - w_4 - 3w_5 \\ v_2 = w_1 - 3w_2 + 2w_3 - w_4 - 4w_5 \\ v_3 = 2w_1 - 3w_2 + 4w_3 - 2w_4 - 5w_5 \\ v_4 = 2w_1 + 2w_2 - 3w_3 + 2w_4 + 3w_5 \end{array}.$$

Determine o subconjunto de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ formado pela maior quantidade possível de vetores linearmente independentes.
Resp.: $\{v_1, v_2, v_4\}$, por exemplo. OBS.: $v_3 = 3v_1 - v_2$.

Capítulo 5

Transformações Lineares

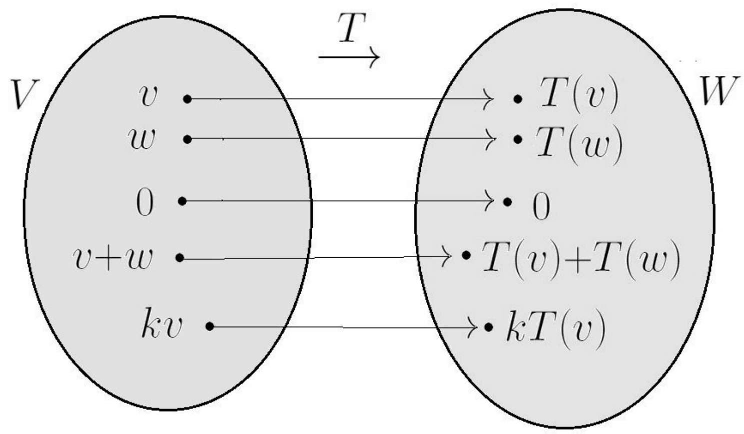
Neste capítulo, definimos um tipo especial de função que é chamada de transformação linear, exploramos sua relação com o conceito de matriz e seus principais elementos como o núcleo e a imagem. Definimos também o conceito de isomorfismo entre espaços vetoriais, uma ideia que é fundamental em Álgebra.

5.1 Definição de transformação linear

Definição 5.1. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma função $T : V \longrightarrow W$ é denominada **transformação linear*** se satisfaz as condições:

- $T(v+w) = T(v) + T(w), \; \forall v, w \in V$
- $T(kv) = kT(v), \forall k \in \mathbb{R}, \; \forall v \in \mathbb{R}$

Nesse caso, dizemos também que T preserva as operações básicas do espaço vetorial.



*Também chamado de **operador linear**

Substituindo $k = 0$ em $T(kv) = kT(v)$ do segundo item anterior, obtemos $T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) \Rightarrow T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Assim, toda transformação linear leva vetor nulo no vetor nulo. Isso equivale à implicação:

$$T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0} \Rightarrow T \text{ não é uma transformação linear.}$$

Observação: Se T for linear, então $T(av + bw) = T(av) + T(bw) = aT(v) + bT(w)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in V$.

Exemplo 5.1. Um exemplo dos mais simples de transformação linear é o de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde a é uma constante. O gráfico desse tipo de função é uma reta que passa pela origem. Para mostrar que esse tipo de função é linear, é só observar que $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$ e $f(kx_1) = a(kx_1) = k(ax_1) = kf(x_1)$ para quaisquer $x_1, x_2, k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.2. Também são exemplos simples de transformações lineares as seguintes funções:

- A função nula: $f : V \longrightarrow V$, $f(v) = \mathbf{0}$; em particular, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 0$.
- A função identidade: $f : V \longrightarrow V$, $f(v) = v$; em particular, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x, y)$.
- Funções do tipo $f ; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by$, cujo gráfico são planos que passam pela origem; em particular, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x + 5y$.

Exemplo 5.3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 5y)$. Se $v = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$, então

- $T(v + w) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 5(y_1 + y + 2)) = (x_1 + y_1, 5y_1) + (x_2 + y_2, 5y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(v) + T(w)$;
- $T(kv) = T(k(x_1, y_1)) = T(kx_1, ky_1) = (kx_1+ky_1, 5ky_1) = (k(x_1+y_1), k(5y_1)) = k(x_1 + y_1, 5y_1) = kT(x_1, y_1) = kT(v)$.

Dessa forma, chegamos à conclusão que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Note que, neste caso, $T(0, 0) = (0 + 0, 5 \cdot 0) = (0, 0)$.

Exemplo 5.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 1,\ 5y)$. Como $T(0, 0) = (1,\ 0) \neq (0,\ 0)$, concluímos imediatamente que T não é linear.

Há também uma infinidade de outras justificativas aceitáveis. Para mostrar que T não é uma transformação linear, basta dar um exemplo com valores particulares (chamado de contra-exemplo). Por exemplo, se escolhermos (aleatoriamente) $v = (1,1)$ e $w = (2,2)$, então $v + w = (3,3)$ e $T(v) = T(1,1) = (2,5)$, $T(w) = T(2,2) = (3,10)$, $T(v+w) = T(3,3) = (4,6)$, $T(v) + T(w) = (2,5) + (3,10) = (5,15) \neq T(v+w)$. Isso mostra, mais uma vez, que T não é linear.

Exemplo 5.5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x + y^2,\ x^2 + y)$. Escolhendo (aleatoriamente) $v = (1,2)$ e $w = (3,4)$, obtemos:

- $T(v) = T(1,2) = (1 + 2^2, 1^2 + 2) = (5,3)$
- $T(w) = T(3,4) = (3 + 4^2, 3^2 + 4) = (19,13)$
- $T(v) + T(w) = (5,3) + (19,13) = (24,16)$
- $T(v+w) = T(4,6) = (4^2 + 6, 4 + 6^2) = (22,40)$

Como $\underbrace{T(v+w)}_{(22,\ 40)} \neq \underbrace{T(v) + T(w)}_{(24,\ 16)}$, temos que T não é linear.

Observação: Note que, nesse exemplo anterior, $T(0,\ 0) = (0,\ 0)$. Sendo assim, quando $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ temos que realizar outros testes para descobrir se T é linear ou não.

Exemplo 5.6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,\ y,\ z) = (y,\ x,\ 0)$. Vamos verificar se T é linear. Sejam $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos genéricos do $\mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ um escalar qualquer. Temos que:

- $T(v+w) = T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (x_2+y_2, x_1+y_1, 0) = (y_1, x_1, 0) + (y_2, x_2, 0) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(v) + T(w)$;
- $T(kv) = T(kx_1, ky_1, kz_1) = (ky_1, kx_1, 0) = k(y_1, x_1, 0) = kT(x_1, y_1, z_1) = kT(v)$.

Assim, concluímos que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 5.7. Seja $V = \mathcal{P}$ o espaço vetorial de todos os polinômios na variável x, qualquer que seja o grau, e $D : V \longrightarrow V$ a "transformação derivada" definida por $D(f) = f'(x)$. Por exemplo, $D(x^5) = 5x^4$ e $D(x^2 - 5x + 6) = 2x - 5$. Essa transformação derivada é linear porque

$$D(f+g) = (f+g)'(x) = (f'+g')(x) = f'(x) + g'(x) = D(f) + D(g)$$

e

$$D(kf) = (kf)'(x) = kf'(x) = kD(f),$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in V$.

Exemplo 5.8. Seja $V = \mathcal{P}$ o conjunto de todos os polinômios na variável x e $I : V \longrightarrow \mathbb{R}$ a "transformação integral" definida por $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Por exemplo, $I(x^4) = \left[\dfrac{x^5}{5}\right]_0^1 = \dfrac{1}{5}$. Essa transformação integral é linear porque

$$I(f+g) = \int_0^1 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = I(f) + I(g)$$

e

$$I(kf) = \int_0^1 (kf(x))\,\mathrm{d}x = k\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = kI(f),$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in V$.

Observação: As operações mais importantes do Cálculo, tais como cálculo de derivadas, integrais, gradiente, divergente, rotacional, laplaciano, são todos exemplos de transformações lineares.

Exemplo 5.9. Seja $A \in M(m,n)$ uma matriz $m \times n$ de elementos reais e consideremos $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T(v) = Av^t$. Note que v^t é o vetor v escrito na forma de coluna. A função T assim definida é linear porque

- $T(v+w) = A(v+w)^t = A(v^t+w^t) = Av^t+Aw^t = T(v)+T(w);\ \forall v, w \in \mathbb{R}^n;$
- $T(kv) = A(kv)^t = Akv^t = kAv^t = kT(v),\ \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{R}.$

Desse modo, **toda matriz** pode ser associada a uma transformação linear.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3 que pode ser associada à transformação

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 , T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix}(x,y,z)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(x,y,z) = (2x+3y+5z,\ -2x+4y+8z).$$

Outro exemplo, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -5 & 6 & 1 \\ -7 & 10 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & 11 & -4 \\ 2 & 9 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ é uma matriz 5×4 que pode ser associada a $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definida por $T(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -5 & 6 & 1 \\ -7 & 10 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & 11 & -4 \\ 2 & 9 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$, ou seja,

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) \;=\; & (4x + 3y + 2z + 6t,\ x - 5y + 6z + t, \\ & -7x + 10y + 8z - 2t,\ x + 11z - 4t,\ 2x + 9y - 7t). \end{aligned}$$

5.2 Transformação aplicada a vetores de uma base

Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é perfeitamente determinada se forem dados os valores de $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ nos elementos de uma base $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de V. Nesse caso, se $v \in V$, então para calcular $T(v)$, basta escrever v como combinação linear dos vetores da base $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ e, depois, calcular $T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)$.

Exemplo 5.10. Determine $T(x, y)$ sabendo que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é linear e $T(1, 0) = (4, 6)$ e $T(1, 1) = (-7, 10)$.

Solução: Escrevendo (x, y) como combinação linear de $(1, 0)$ e $(1, 1)$, obtemos que $(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$. Aplicando a função T nos dois lados dessa igualdade, $T(x, y) = T((x - y)(1, 0) + y(1, 1)) = (x - y)T(1, 0) + yT(1, 1) = (x - y)(4, 6) + y(-7, 10) = (4x - 4y, 6x - 6y) + (-7y, 10y)$ e daí obtemos finalmente que

$$T(x, y) \;=\; (4x - 11y,\ 6x + 4y).$$

Exemplo 5.11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\beta = \{(0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determinar $T(5, 3, -2)$ sabendo que $T(0, 1, 1) = (1, -2)$, $T(1, 0, 1) = (3, 1)$ e $T(1, 1, 0) = (0, 2)$.

Solução: Inicialmente, escrevemos $(5, 3, -2)$ como sendo uma combinação linear de $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$. Para isso, determinamos escalares a, b, c

tais que $(5,3,-2) = a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) \Rightarrow (b+c, a+c, a+b) = (5,3,-2) \Rightarrow \begin{cases} b+c=5 \\ a+c=3 \\ a+b=-2 \end{cases}$ Resolvendo-se esse sistema linear, obtemos $a=-2$, $b=0$ e $c=5$. Portanto, $(5,3,-2) = -2\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,0,1) + 5\cdot(1,1,0) \Rightarrow T(5,3,-2) = T(-2\cdot(0,1,1)+0\cdot(1,0,1)+5\cdot(1,1,0)) \Rightarrow T(5,3,-2) = -2T(0,1,1)+0T(1,0,1)+5T(1,1,0)) \Rightarrow T(5,3,-2) = -2\cdot(1,-2)+0\cdot(3,1)+5\cdot(0,2) = (-2,4)+(0,0)+(0,10) = (-2,14)$.

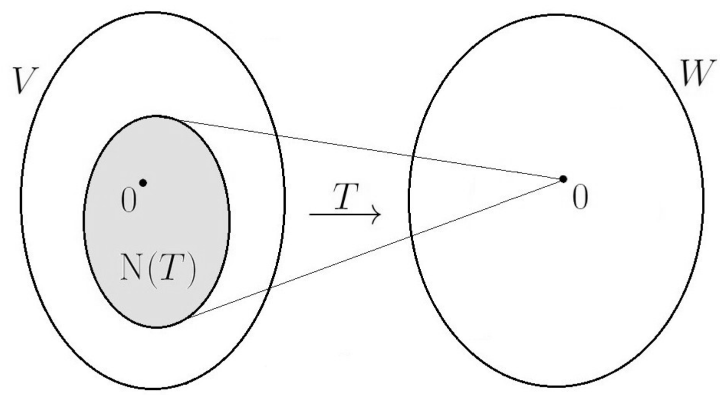
5.3 Núcleo e imagem

O domínio e o contradomínio de uma transformação linear são espaços vetoriais. Nesta seção , definimos um subespaço do domínio chamado núcleo e outro do contradomínio chamado imagem.

5.3.1 Definição de núcleo

Definição 5.2. Chama-se **núcleo** (em inglês: kernel) de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ ao conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são transformados em $\mathbf{0} \in W$, ou seja, $T(v) = \mathbf{0}$. Notação: $N(T)$ ou $\ker(T)$.

O núcleo de uma transformação linear T é um subconjunto do domínio de T e nunca é um conjunto vazio porque $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} \in N(T)$. Além disso, se $v, w \in N(T)$, então $T(v) = T(w) = \mathbf{0} \Rightarrow T(v+w) = T(v)+T(w) = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow v+w \in N(T)$. Se k for um escalar qualquer, então $T(kv) = kT(v) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Portanto, o núcleo de uma transformação linear é um subespaço vetorial do domínio V.



Exemplo 5.12. Calcular o núcleo de $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, 2x-y)$.

Solução: A determinação do núcleo de uma transformação linear sempre recai na resolução de um sistema linear homogêneo.

Se $(x, y) \in N(T)$, então $T(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (x + y, 2x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow N(T) = \{(0,\ 0)\}$. Portanto, o núcleo de T é formado só pelo vetor nulo.

Exemplo 5.13. Determine o núcleo de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) \ = \ (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z).$$

Solução: Se $(x, y, z) \in N(T)$, então $T(x, y, z) = (0, 0) \Rightarrow (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z) = (0,\ 0) \Rightarrow \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$ Somando-se as duas equações desse sistema, obtemos $4x = -12z \Rightarrow x = -3z$ e substituindo o valor de x em uma das equações, obtemos $y = z$. Portanto, escolhendo z como variável livre, a solução do sistema é $(-3z,\ z,\ z) = z(-3,\ 1,\ 1)$. Obtivemos assim que o núcleo de T é $N(T) = \{(-3z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-3,\ 1,\ 1)]$.

Definição 5.3. Uma função $T : V \longrightarrow W$ é chamada **injetora** quando

$$\forall v, w \in V,\ T(v) = T(w) \Rightarrow v = w.$$

Por exemplo, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x, 3x + y)$ é injetora porque se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ e $T(a, b) = T(c, d)$, então $(4a,\ 3a + b) = (4c,\ 3c + d) \Rightarrow 4a = 4c,\ 3a + b = 3c + d \Rightarrow a = c,\ b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d) \Rightarrow T$ é injetora.

Teorema 5.3.1. Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Demonstração: O símbolo que representa o "se, e somente se" é uma seta dupla $\Longleftrightarrow$. Assim, a demonstração consiste de duas partes: uma "ida" ($\Longrightarrow$) e uma "volta" ($\Longleftarrow$)

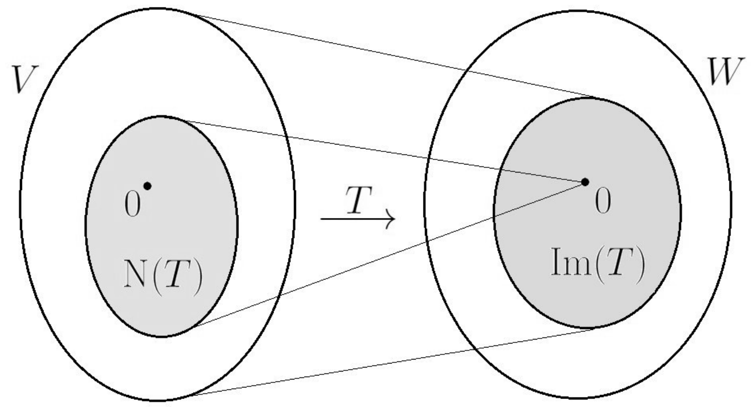
($\Rightarrow$) Suponhamos T injetora e $v \in N(T)$. Então $T(v) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \Rightarrow v = \mathbf{0} \Rightarrow N(T) = \{\mathbf{0}\}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $T(v) = T(w)$. Então $T(v - w) = T(v) - T(w) = \mathbf{0} \Rightarrow v - w \in N(T) \Rightarrow v - w = \mathbf{0} \Rightarrow v = w$. Logo, T é injetora.

5.3.2 Definição de imagem

Definição 5.4. Se $T : V \longrightarrow W$ é uma função, então a **imagem** de T é definida como o conjunto de todos os $T(v)$, com $v \in V$, e é denotada por $\text{Im}(T)$:

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}.$$



A imagem de T é sempre um subconjunto de W e, quando ela coincide com W, ou seja, quando $\text{Im}(T) = W$, a função é dita **sobrejetora**.

Além de ser subconjunto de W, a imagem de T é um subespaço de W. Para verificar isso, começamos observando que $\text{Im}(T) \neq \emptyset$ porque a imagem contém pelo menos o vetor nulo, já que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Se $v, w \in V$ e $k \in \mathbb{R}$, então $v = T(u_1)$ e $w = T(u_2)$, com $u_1, u_2 \in V$, e daí $T(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in V}) = T(u_1) + T(u_2) = v + w \in \text{Im}(T)$. Temos também que $T(\underbrace{ku_1}_{\in V}) = kT(u_1) = kv \in \text{Im}(T)$. Chegamos à conclusão de que $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Observação: Os conceitos de imagem, função injetora, função sobrejetora são válidos para quaisquer tipos de função, inclusive as lineares.

Exemplo 5.14. Determine a dimensão e uma base para a imagem de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + 2z,\ x + 3y + z)$.

Solução: De acordo com a definição de imagem,

$$\begin{aligned}
\text{Im}(T) &= \{T(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(x+2y-z,\ y+2z,\ x+3y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,0,x) + (2y,y,3y) + (-z,2z,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,0,1) + y(2,1,3) + z(-1,2,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1),\ (2,1,3)\ (-1,2,1)].
\end{aligned}$$

Obtivemos dessa forma um conjunto de geradores para a imagem. Agora, para obter uma base, é só escolher um subconjunto formado de vetores linearmentes independentes. Para isso, um dos procedimentos mais simples e direto é fazer um escalonamento da matriz M cujas linhas são os vetores desse conjunto de geradores.

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz escalonada tem duas linhas não nulas, concluímos que existem dois vetores independentes. Nesse caso, tanto faz escolher as duas primeiras linhas da matriz escalonada, como escolher as duas primeiras linhas de M:

$$\text{Im}(T) \;=\; [(1,0,1),\ (2,1,3)] \;=\; [(1,0,1),\ (0,1,1)]$$

Concluímos assim que uma base de $\text{Im}(T)$ é $\beta = \{(1,0,1),\ (0,1,1)\}$ e que $\dim \text{Im}(T) = 2$.

Observação: $\text{Im}(T) = [(1,0,1),\ (0,1,1)] = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $= \{(x, y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$.

Para encerrar a seção, um teorema importante conhecido pelo nome de "Teorema da Dimensão" e também como "Teorema da Imagem e do Núcleo".

Teorema 5.3.2. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e a transformação $T : V \longrightarrow W$ é linear, então

$$\dim N(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V.$$

Demonstração: Seja $B = \{w_1, \cdots, w_r\}$ base de $N(T)$. Estendemos B a uma base β de V: $\beta = \{w_1, \cdots, w_r, v_1, \cdots, v_s\}$. Seja $\alpha = \{T(v_1), \cdots, T(v_s)\}$. Vamos mostrar que α é uma base de $\text{Im}(T)$.

- Se $v \in \text{Im}(T)$, então $v = T(w)$ para algum $w \in V$. Como β é base de V, existem escalares $a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots b_s$ tais que

$$v = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r + b_1 v_1 + \cdots b_s v_s$$

  que implica $T(v) = a_1 T(w_1) + \cdots + a_r T(w_r) + b_1 T(v_1) + \cdots b_s T(v_s) = \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} + b_1 T(v_1) + \cdots b_s T(v_s)$. Assim, α gera $\text{Im}(T)$.

- Por outro lado, se $c_1, \cdots, c_s$ são escalares tais que $c_1T(v_1)+\cdots+c_sT(v_s) = \mathbf{0}$ $\Rightarrow T(c_1v_1 + \cdots + c_sV_s) = \mathbf{0} \Rightarrow c_1v_1 + \cdots c_sv_s \in N(T) \Rightarrow c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = d_1w_1 + \cdots + d_rw_r$, onde $w_1, \cdots, w_r$ são escalares. Daí, $c_1v_1 + \cdots + c_sv_s - d_1w_1 - \cdots - d_rw_r = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_s = d_1 = \cdots = d_r = 0$. Logo, α é formado por vetores linearmente independentes.

Assim, α é uma base de $N(T)$. Portanto, $\dim N(T) = r$, $\dim \operatorname{Im}(T) = s$, $\dim V = r + s$ e, consequentemente, $\dim V = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$.

Exemplo 5.15. Determine uma base para o núcleo e para a imagem de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - 3y, x - z, z - x)$.

Solução: Se $(x, y, z) \in N(T)$, então $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (x - 3y, x - z, z - x) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $x = z$ e $y = \frac{x}{3} = \frac{z}{3}$; portanto, $(z, \frac{z}{3}, z)$, é solução geral do sistema com variável livre $z \in \mathbb{R}$. Assim,

$$N(T) = \{(z, \frac{z}{3}, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1, \frac{1}{3}, 1)],$$

e daí, uma base do núcleo é $\alpha = \{(1, \frac{1}{3}, 1)\} \Rightarrow \dim N(T) = 1$.

A imagem de T é o conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \{(x - 3y, x - z, z - x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, -x) + (-3y, 0, 0) + (0, -z, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, -1) + y(-3, 0, 0) + z(0, -1, 1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 1, -1),\ (-3, 0, 0),\ (0, -1, 1)]. \end{aligned}$$

Para saber quais são os vetores independentes, escalonamos a matriz cujas linhas são esses vetores.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma base de $\operatorname{Im}(T)$ é formada pelas duas primeiras linhas de qualquer uma dessas matrizes, por exemplo $\beta = \{(1, 1, -1),\ (0, 1, -1)\}$. Como a base encontrada tem 2 elementos, temos que $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.

Observação 1: Podemos multiplicar qualquer vetor de uma base por qualquer constante não nula e o resultado ainda continua sendo um vetor da base.

Por exemplo, podemos multiplicar o vetor da base de $N(T)$ por 3 que o resultado é outra base de $N(T)$: $\alpha' = \{(3,\ 1,\ 3)\}$.

Observação 2: Note que $\dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim V$.

5.4 Matrizes e transformações lineares

Sejam V e W um espaços vetoriais com $\dim V = m$, $\dim W = n$, $T : V \longrightarrow W$ linear, $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ base de V e $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ base de W.

Como $T(v_1)$, $T(v_2)$, $\ldots$, $T(v_m) \in W$, eles são combinações lineares dos vetores de β:

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\ T(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ T(v_m) & = & a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \cdots + a_{nm}w_n \end{array}$$

A transposta da matriz dos coeficientes a_{ij} acima é definida como sendo a **matriz de T com relação às bases α e β,** denotada por $[T]^\alpha_\beta$:

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Quando $\alpha = \beta$, denotamos $[T]^\alpha_\beta$ por $[T]_\beta$ e, às vezes, simplesmente por $[T]$.

Observação: Da maneira como é definida, as colunas da matriz $[T]^\alpha_\beta$ são as coordenadas de $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ com relação à base β:

$$\begin{array}{cccc} T(v_1) & T(v_2) & & T(v_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.16. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x - 4y,\ x + 5y)$, $\alpha = \{(1, 0),\ (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 3),\ (2, 5)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Determine $[T]^\alpha_\beta$.

Solução: Iniciamos aplicando T nos vetores da base α e escrevendo cada resultado como combinação linear dos vetores de β, ou seja, determinamos suas coordenadas com relação a β. Ao longo da resolução desse tipo de problema, aparecem alguns sistemas lineares para se resolver.

- $T(1,0) = (3,1) = a(1,3) + b(2,5) = (a+2b, 3a+5b)$
$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 3a + 5b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -13,\ b = 8;$$
- $T(0,1) = (-4,5) = c(1,3) + d(2,5) = (c+2d, 3c+5d)$
$$\Rightarrow \begin{cases} c + 2d = -4 \\ 3c + 5d = 5 \end{cases} \Rightarrow c = 30,\ d = -17;$$

Portanto, $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} -13 & 30 \\ 8 & -17 \end{bmatrix}$.

Exemplo 5.17. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$T(x,y,z) = (4x + 3y + 5z,\ 6x - y + 7z,\ 2y + z),$$
e $\beta = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine $[T] = [T]^\beta_\beta$.

Solução:

- $T(1,0,0) = (4,6,0) = 4(1,0,0) + 6(0,1,0) + 0(0,0,1)$
- $T(0,1,0) = (3,-1,2) = 3(1,0,0) - 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$
- $T(0,0,1) = (5,7,1) = 5(1,0,0) + 7(0,1,0) + 1(0,0,1)$

Logo, $[T] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Observação 1: Quando as bases dos espaços são bases canônicas (como neste exemplo), então os cálculos se tornam extremamente simples, não há necessidade de resolver sistemas lineares. A matriz $[T]$ pode ser escrita diretamente a partir dos coeficentes das variáveis na definição da função .

Observação 2: É verdade que $\underbrace{T(x,y,z)}_{T(v)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{v^t}$. De um modo geral, é válida a seguinte igualdade: $[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha^t$, onde $T : V \longrightarrow W$ é linear, α base de V e β base de W.

Exemplo 5.18. Sejam $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z,r,s) = (4x+5y-8z+2r-3t,\ 2x-y+4z+11t-13t,\ 7x+4z-6r+t),$$

$\alpha = \{(1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0),\ (0,0,1,0,0),\ (0,0,0,1,0),\ (0,0,0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^5$ e $\beta = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determine $[T]_\beta^\alpha$.

Solução: Como as bases α e β são bases canônicas, então podemos escrever imediatamente a resposta da questão, bastando olhar os coeficientes das variáveis x, y, z, r, s:

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -8 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & -13 \\ 7 & 0 & 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.19. A função $I : V \longrightarrow V$ definida por $I(v) = v$ é denominada **transformação identidade**. Se V for um espaço de dimensão n, então sua matriz é uma matriz identidade $n \times n$. Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^3$, a transformação identidade é dada por $I(x,y,z) = (x,y,z)$ e sua matriz é $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 5.20. Se $F : V \longrightarrow W$ e $G : V \longrightarrow W$ são transformações lineares, então a soma de F e G é uma transformação linear $F+G : V \longrightarrow W$ definida por $(F+G)(v) = F(v) + G(v),\ \forall v \in V$. Se $k \in \mathbb{R}$ for um escalar, então o produto de F por esse escalar é a transformação linear $kF : V \longrightarrow W$ definida por $(kF)(v) = kF(v),\ \forall v \in V$.

Dadas as transformações lineares F e G de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$F(x,y,z) = (3x - 4y + 11z,\ x + 3z,\ -2x + 10y - 8z)$$

e

$$G(x,y,z) = (y - 18z,\ x + 2y,\ 5x - 11y + 20z),$$

determine as funções $F+G$ e kF, com $k = 2$, determine suas matrizes [F], [G], [F+G], [kF] com relação à base canônica $\beta = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

Solução: Calculamos $F+G$ e kF usando a definição e obtemos suas matrizes observando os coeficientes de x, y, z.

- $(F+G)(x,y,z) = F(x,y,z)+G(x,y,z) = (3x-4y+11z,\ x+3z,\ -2x+10y-8z)+(y-18z,\ x+2y,\ 5x-11y+20z) = (3x-3y-7z,\ 2x+2y+3z,\ 3x-y+12z)$

- $(kF)(x,y,z) = (2F)(x,y,z) = 2F(x,y,z) = 2(3x-4y+11z,\ x+3z,\ -2x+10y-8z) = (6x-8y+22z,\ 2x+6z,\ -4x+20y-16z)$

- $[F] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 10 & -8 \end{bmatrix}$

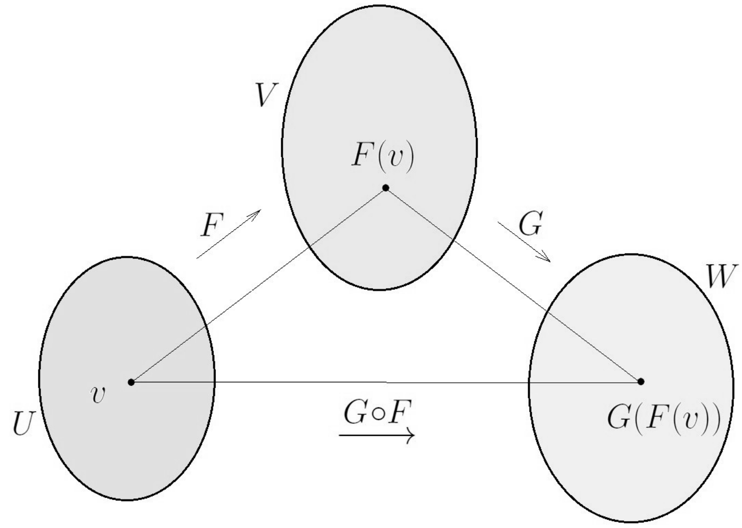
- $[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -18 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -11 & 20 \end{bmatrix}$

- $[F+G] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 12 \end{bmatrix}$

- $[kF] = [2F] = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 22 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 20 & -16 \end{bmatrix}$

Observação: Note que $[F+G] = [F]+[G]$ e $[kF] = k[F]$. Essa é uma propriedade geral que é válida em todos os casos.

Exemplo 5.21. Se $F : U \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ são transformações lineares, então a composta de G e F é uma transformação linear $G \circ F : U \longrightarrow W$ definida por $(G \circ F)(v) = G(F(v)),\ \forall v \in U$. Note que a composta $G \circ F$ só é definida no caso em que o contradomínio de F coincide com o domínio de G.



Dadas as transformações lineares F e G de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$F(x,y,z) \;=\; (-3x-2y+6z,\, 4x+y+z,\, 10y-3z)$$

e

$$G(x,y,z) \;=\; (x+2y-8z,\, -5x+3y+z,\, 6x-10y+4z),$$

determine as funções $G\circ F$, $F\circ G$ e suas matrizes $[F]$, $[G]$, $[G\circ F]$ e $[F\circ G]$ com relação à base canônica $\beta=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

Solução: Usamos a definição para calcular $G\circ F$ e $F\circ G$. Para isso, substituímos as coordenadas de uma função na outra.

- $(G\circ F)(x,y,z) = G(F(x,y,z)) = G(-3x-2y+6z,\, 4x+y+z,\, 10y-3z)$
  $= (-3x-2y+6z+2(4x+y+z)-8(10y-3z),\, -5(-3x-2y+6z)$
  $+3(4x+y+z)+(10y-3z),\, 6(-3x-2y=6z)-10(4x+y+z)+4(10y-3z))$
  $\Rightarrow\; (G\circ F)(x,y,z) \;=\; (5x-80y+32z,\, 27x+23y-30z,\, -58x+18y+14z)$
- $(F\circ G)(x,y,z) = F(G(x,y,z)) = F(x+2y-8z,\, -5x+3y+z,\, 6x-10y+4z)$
  $= (-3(x+2y-8z)-2(-5x+3y+z)+6(6x-10y+4z), 4(x+2y-8z)$
  $+(-5x+3y+z)+(6x-10y+4z), 10(-5x+3y+z)-3(6x-10y+4z))$
  $\Rightarrow\; (F\circ G)(x,y,z) \;=\; (43x-72y+46z,\, 5x+y-27z,\, -68x+60y-2z)$
- $[F]=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 6\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & 10 & -3\end{bmatrix}$
- $[G]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -10 & 4\end{bmatrix}$

- $[G \circ F] = \begin{bmatrix} 5 & -80 & 32 \\ 27 & 23 & -30 \\ -58 & 18 & 14 \end{bmatrix}$

- $[F \circ G] = \begin{bmatrix} 43 & -72 & 46 \\ 5 & 1 & -27 \\ -68 & 60 & -2 \end{bmatrix}$

Observação 1: Note que o produto das matrizes $[F]$ e $[G]$ coincide com a matriz da composta: $[F \circ G] = [F][G]$ e $[G \circ F] = [G][F]$. Essa é uma propriedade que vale para quaisquer transformações lineares e quaisquer bases.

Observação 2: Quando $F = G$, a composta $F \circ G = F \circ F$ é denotada por F^2. Em geral, dado n inteiro positivo, definimos $F^n = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ vezes}}$.

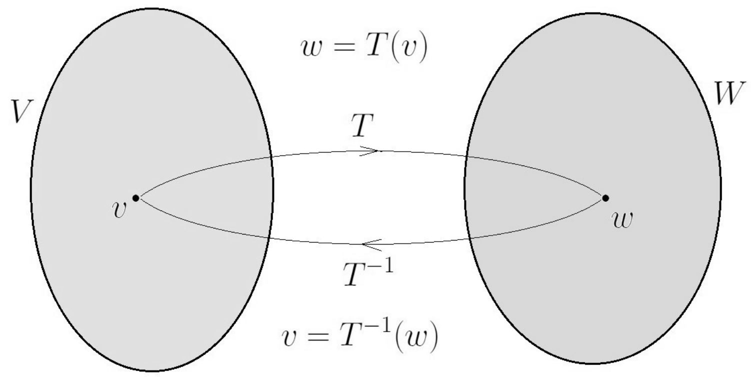
5.5 Isomorfismos

Já definimos anteriormente função injetora e função sobrejetora. Uma função pode ter somente uma dessas propriedades, pode ter nenhuma ou pode ter as duas simultaneamente. No caso das transformações lineares é sempre bom lembrar que $T : V \longrightarrow W$, T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{\mathbf{0}\}$, e T é sobrejetora se, e somente se, $\mathrm{Im}(T) = W$.

5.5.1 Função bijetora e função inversa

Definição 5.5. Dizemos que $T : V \longrightarrow W$ é **bijetora** quando T é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Toda função $T : V \longrightarrow W$ bijetora possui uma função inversa $T^{-1} : W \longrightarrow V$ definida por $v = T^{-1}(w)$ se, e somente se, $w = T(v)$. Como consequência dessa definição, temos que $T(T^{-1}(w)) = T(v) = w$ e $T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(w) = v$. E assim, $T \circ T^{-1} = I$ e $T^{-1} \circ T = I$, onde I é a função identidade $I(v) = v$, $\forall v$.



Definição 5.6. Uma transformação linear bijetora é denominada um **isomorfismo**. Dizemos que um espaço vetorial V é **isomorfo** a outro espaço vetorial W quando existir um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$.

Teorema 5.5.1. Seja $T : V \longrightarrow W$ linear e bijetora. Então a inversa $T^{-1} : W \longrightarrow V$ também é linear.

Demonstração: Sejam $v, w \in W$. Então, $T^{-1}(v) = r$ e $T^{-1}(w) = s$ pertencem a V e $v = T(r)$, $w = T(s) \Rightarrow T^{-1}(av+bw) = T^{-1}(aT(r)+bT(s)) = T^{-1}(T(ar+bs)) = I(ar+bs) = ar+bs = aT^{-1}(v)+bT^{-1}(w)$, para quaisquer escalares a, b. Concluímos assim que T^{-1} é linear.

Observação 1: O teorema anterior mostra que se $T : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo, então $T^{-1} : W \longrightarrow V$ também o é.

Observação 2: Se um espaço vetorial V é isomorfo a W, então W também é isomorfo a V. Sendo assim, podemos dizer que dois espaços V e W são isomorfos quando existir algum isomorfismo entre eles.

Exemplo 5.22. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 5y,\ 3x - 10y)$. Mostre que T é um isomorfismo e determine T^{-1}.

Solução: Vamos mostrar que T é uma transformação linear e que é injetora e sobrejetora.

- Sejam $v = (x, y), w = (z, t) \in \mathbb{R}^2$. Então, $T(v + w) = T((x, y) + (z, t)) = T(x+z,\ y+t) = (2(x+z)+5(y+t),\ 3(x+z)-10(y+t)) = (2x+5y,\ 3x-10y) + (2z + 5t,\ 3z - 10t) = T(x, y) + T(z, t) = T(v) + T(w)$;

- $T(kv) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = (2(kx) + 5(ky),\ 3(kx) - 10(ky)) = (k(2x+5y),\ k(3x-10y)) = k(2x+5y, 3x-10y) = kT(x, y) = kT(v)$ para todo escalar k;

- Se $T(x,y)=(0,0)$, então $(2x+5y, 3x-10y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x+5y=0 \\ 3x-10y=0 \end{cases}$. Resolvendo esse sistema linear nas variáveis x,y, obtemos $x=0$, $y=0$. Logo, $N(T)=\{(0,0)\} \Rightarrow T$ é injetora;

- Do item anterior, temos que $\dim N(T)=0$. A dimensão do domínio de T é $\dim \mathbb{R}^2=2$. Pelo Teorema da Dimensão, temos $\dim \mathrm{Im}(T)+\dim N(T)=\dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0+\dim \mathrm{Im}(T)=2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T)=2 \Rightarrow \mathrm{Im}(T)=\mathbb{R}^2 \Rightarrow T$ é sobrejetora.

Os quatro itens anteriores mostram que T é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Como T é um isomorfismo, T possui uma função inversa T^{-1} tal que $T \circ T^{-1} = I$. Daí, $[T \circ T^{-1}]=[I] \Rightarrow [T][T^{-1}]=[I] \Rightarrow [T^{-1}]=[T]^{-1}$. Assim, a matriz da função inversa de T é a matriz inversa de $[T]$ e essa é uma propriedade que é válida para todos os casos que envolvem a inversa de uma transformação linear.

A matriz de T com relação á base canônica do $\mathbb{R}^2$ é $[T]=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$. A matriz inversa de $[T]$ é $[T]^{-1}=\frac{1}{\det[T]}\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{(-35)}\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{35} & -\frac{2}{35} \end{bmatrix}$. E assim, chegamos à seguinte conclusão:

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}y,\ \frac{3}{35}x-\frac{2}{35}y\right) = \left(\frac{2x+y}{7},\ \frac{3x-2y}{35}\right)$$

Teorema 5.5.2. Se $T: V \longrightarrow W$ for um isomorfismo e $\alpha=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ for base de V, então $\beta=\{T(v_1),T(v_2),\ldots,T(v_n)\}$ é base de W.

Demonstração: Sejam $a_1,\ldots,a_n$ escalares tais que $a_1T(v_1)+\cdots+a_nT(v_n)=\mathbf{0}$. Então $T(a_1v_1+\cdots+a_nv_n)=\mathbf{0} \Rightarrow a_1v_1+\ldots a_nv_n \in N(T)=\{\mathbf{0}\} \Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_nv_n=\mathbf{0}$. Como α é formado por vetores linearmente independentes, temos que $a_1=0,\ldots,a_n=0 \Rightarrow \beta$ também é um conjunto de vetores independentes.

Seja $w \in W$. Como $W=\mathrm{Im}(T)$, temos que $w=T(v)$ com $v \in V$. Assim, existem escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tais que $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n \Rightarrow T(v)=w=T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha_1T(v_1)+\cdots+\alpha_nT(v_n) \Rightarrow \mathrm{Im}\,T=[T(v_1),\ldots,T(v_n)]$.

Chegamos assim à conclusão de que β é uma base de W, ou seja, se T é um isomorfismo, então T leva base de V em base de W.

Observação: Podemos mostrar que a recíproca é verdadeira, ou seja, se T leva base de V em base de W, então T é um isomorfismo.

Exemplo 5.23. Sejam $V = \mathcal{P}_2$ e $W = \mathbb{R}^3$. Mostre que V é isomorfo a W.

Solução: Temos que $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}$. Definimos $T : V \longrightarrow W$ por $T(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$ e vamos mostrar que a T assim definida é um isomorfismo, ou seja, que T é linear, injetora e sobrejetora.

- $T((ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)) = T((a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)) = (a+d, b+e, c+f) = (a, b, c)+(d, e, f) = T(ax^2+bx+c)+T(dx^2+ex+f)$, $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$;

- $T(k(ax^2 + bx + c)) = T(kax^2 + kbx + kc) = (ka, kb, kc) = k(a, b, c) = kT(ax^2 + bx + c)$, $\forall a, b, c, k \in \mathbb{R}$;

- $T(ax^2 + bx + c) = \mathbf{0} \Rightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0) \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow N(T) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow T$ é injetora;

- Como $\dim N(T) = 0$ e $\dim V = 3$, temos $\dim \mathrm{Im}(T) + \underbrace{\dim N(T)}_{=0} = \underbrace{\dim V}_{=3} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$. Logo, T é sobrejetora.

Fica mostrado assim que T é um isomorfismo e, consequentemente, V é isomorfo a W.

Observação: Dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita sempre são isomorfos.

5.6 Exercícios Resolvidos

R1) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z + x)$. Mostre que T é linear e determine seu núcleo e sua imagem.

Solução: Inicialmente, vamos mostrar que T é linear. Para isso, consideremos dois vetores genéricos $v = (a, b, c)$, $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ e um escalar $k \in \mathbb{R}$. Temos que:

- $T(v + w) = T((a, b, c) + (d, e, f)) = T(a + d, b + e, c + f)$
$= (a + d + b + e,\ b + e + c + f,\ c + f + a + d)$
$= (a + b,\ b + c,\ c + a) + (d + e,\ e + f,\ f + d) = T(a,\ b,\ c) + (d,\ e,\ f)$;

- $T(kv) = T(k(a,b,c)) = T(ka,\, kb,\, kc) = (ka + kb,\, kb + kc,\, kc + ka)$
  $= (k(a + b),\, k(b + c),\, k(c + a)) = k(a + b,\, b + c,\, c + a) = kT(a,\, b,\, c)$.

Para calcular seu núcleo, basta resolver $T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (x + y, y + z, z + x) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + x = 0 \end{cases}$. O determinante da matriz dos coeficientes desse sistema homogêneo é $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Logo, o sistema possui apenas a solução nula $x = 0, y = 0, z = 0$. Isso significa que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$. Como $\dim N(T) = 0$, pelo Teorema da Dimensão, temos $\underbrace{\dim N(T)}_{=0} + \dim \mathrm{Im}(T) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Observação: A imagem também poderia ser calculada da seguinte forma: $(x+y, y+z, z+x) = (x, 0, x)+(y, y, 0)+(0, z, z) = x(1, 0, 1)+y(1, 1, 0)+z(0, 1, 1)$ $\Rightarrow \mathrm{Im}(T) = [\underbrace{(1, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)}_{\text{três vetores LI}}]$.

R2) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V, mostre que

$$\mathrm{Im}(T) \ = \ [T(v_1),\, T(v_2),\, \ldots,\, T(v_n)].$$

Solução: Seja $w \in \mathrm{Im}(T)$. Pela definição de imagem, existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$. Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V, existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que $v = a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$ o que implica $T(v) = w = a_1T(v_1)+a_2T(v_2)+ \cdots + a_nT(v_n)$. Isso significa que $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ geram a imagem de T e é o que queríamos demonstrar.

R3) Sejam V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V e $T : V \longrightarrow V$ linear tal que $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3, \ldots, T(v_{n-1}) = v_n$, $T(v_n) = \mathbf{0}$. Determine $[T]^{\beta}_{\beta}$.

Solução: Pelos dados do problema, temos que

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + \cdots + 0 \cdot v_{n-1} + 0 \cdot v_n \\ T(v_2) & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + \cdots + 0 \cdot v_{n-1} + 0 \cdot v_n \\ T(v_3) & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 + \cdots + 0 \cdot v_{n-1} + 0 \cdot v_n \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ T(v_{n-1}) & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + \cdots + 0 \cdot v_{n-1} + 1 \cdot v_n \\ T(v_n) & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + \cdots + 0 \cdot v_{n-1} + 0 \cdot v_n \end{array}$$

Daí, observando os coeficientes de $v_1, \dots, v_n$ nas igualdades anteriores, concluímos que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

R4) Determine a inversa de $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por
$T(x, y, z, t) = (x+2y+3z+4t,\ -2x+y+4z-3t,\ -3x-4y+z+2t,\ -4x+3y-2z+t)$,
sabendo que

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

Solução: Observando os coeficientes de x, y, z, t na definição de $T(x, y, z, t)$, temos que a matriz de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^4$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando a informação sobre a inversa que foi dada, temos que

$$[T]^{-1} = \frac{1}{1^2+2^2+3^2+4^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

e, a partir daí, chegamos ao seguinte resultado:

$$T^{-1}(x,y,z,t) = \left(\frac{x}{30}-\frac{y}{15}-\frac{z}{10}-\frac{2t}{15}, \frac{x}{15}+\frac{y}{30}-\frac{2z}{15}+\frac{t}{10}, \frac{x}{10}+\frac{2y}{15}+\frac{z}{30}-\frac{t}{15}, \frac{2x}{15}-\frac{y}{10}+\frac{z}{15}+\frac{t}{30}\right).$$

Observação: Para verificar que esse resultado está correto, basta calcular $T(T^{-1}(x,y,z,t))$ e $T^{-1}(T(x,y,z,t))$ e observar que a resposta é (x,y,z,t).

R5) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, onde $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se T é um isomorfismo e calcule T^{-1}. E se $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$?

Solução: A matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ possui determinante igual a 8 que é diferente de 0. Logo, M possui inversa e, consequentemente, T é um isomorfismo. Como T^{-1} é a inversa de T, e a matriz de T é M, então a matriz de T^{-1} é M^{-1}, a matriz inversa de M. Usando qualquer método para calcular matriz inversa, obtemos $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x-3z}{2}, \frac{-5x+2y+9z}{8}, z\right).$$

Se fosse $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, como o determinante de M é nulo, M não seria invertível e, consequentemente, T também não teria inversa.

Observação: Um método muito eficiente para se calcular matriz inversa é através de escalonamento de matriz. Se $\underbrace{M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{(*)}$, então $(M^{-1} \cdot M)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$

$M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}}_{(**)}$. Essa implicação significa o seguinte: iniciamos com um sistema linear (*) cuja matriz dos coeficientes é M. Nesse sistema, se isolarmos os valores de x, y, z, então o sistema linear que resulta dessa operação (**) tem matriz de coeficientes igual a M^{-1}. Por exemplo, para calcular a inversa de $M = \begin{bmatrix}2&0&3\\5&4&3\\0&0&1\end{bmatrix}$, iniciamos com a matriz $N = \begin{bmatrix}2&0&3&a\\5&4&3&b\\0&0&1&c\end{bmatrix}$ e fazemos o seu escalonamento:

$$N \longrightarrow \begin{bmatrix}\boxed{1}&0&\frac{3}{2}&\frac{a}{2}\\5&4&3&b\\0&0&1&c\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\boxed{1}&0&\frac{3}{2}&\frac{a}{2}\\0&4&-\frac{9}{2}&b-\frac{5a}{2}\\0&0&1&c\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\boxed{1}&0&\frac{3}{2}&\frac{a}{2}\\0&\boxed{1}&-\frac{9}{8}&\frac{2b-5a}{8}\\0&0&\boxed{1}&c\end{bmatrix}.$$

Essa última matriz equivale a $\begin{cases}x+\frac{3}{2}z=\frac{a}{2}\\y-\frac{9}{8}z=\frac{2b-5a}{8}\\z=c\end{cases} \Rightarrow z = c,\ y = \frac{9}{8}z + \frac{2b-5a}{8} = -\frac{5}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{9}{8}c \Rightarrow x = \frac{a}{2} - \frac{3}{2}z = \frac{a}{2} - \frac{3}{2}c$. Escrevendo essas três últimas equações em forma de equação matricial, obtemos $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{3}{2}\\-\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{9}{8}\\0&0&1\end{bmatrix}}_{M^{-1}}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$. Portanto, $M^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{3}{2}\\-\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{9}{8}\\0&0&1\end{bmatrix}$. Esse é apenas mais um método para se calcular matriz inversa.

R6) Sendo $S,\ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $S(x,\ y,\ z) = (3x,\ 2y,\ 4x - z)$ e $T(x,\ y,\ z) = (z,\ x + y,\ 2x - z)$. Determine $[S \circ T]$, $[T \circ S]$, $(S \circ T)(x, y, z)$ e $(T \circ S)(x, y, z)$.

Solução: O problema não menciona bases; logo, podemos supor que se trata da base canônica do $\mathbb{R}^3$: $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$. Dessa forma, para se obter a matriz de uma transformação linear dada, basta observar quais são os coeficientes de x, y, z. Portanto, $[S] = \begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\4&0&-1\end{bmatrix}$ e $[T] = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}$.

Para se obter as matrizes das compostas, basta multiplicar as matrizes de S e T:

- $[S \circ T] = [S][T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$;

- $[T \circ S] = [T][S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Uma vez obtidas essas matrizes, agora é só escrever as funções: $(S \circ T)(x, y, z) = (3z,\ 2x + 2y,\ -2x + 5z)$ e $(T \circ S)(x, y, z) = (4x - z,\ 3x + 2y,\ 2x + z)$.

Observação: As compostas também poderiam ser obtidas através da substituição das coordenadas de uma função na outra. Por exemplo: $(S \circ T)(x, y, z) = S(T(x, y, z)) = S(z, x + y, 2x - z) = (3z,\ 2(x + y),\ 4z - (2x - z)) = (3z,\ 2x + 2y,\ -2x + 5z)$.

R7) Determine o núcleo e a imagem de $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear sabendo que $T(3, 0, 0, 0) = (0, 3, 3)$, $T(0, 4, 0, 0) = (4, 0, 4)$, $T(0, 0, 7, 0) = (7, 7, 0)$ e $T(0, 0, 0, 5) = (5, 0, 5)$.

Solução: Sejam (x, y, z, t) um vetor genérico de $\mathbb{R}^4$. Escrevendo esse vetor como combinação linear dos vetores $(3, 0, 0, 0)$, $(0, 4, 0, 0)$, $(0, 0, 7, 0)$ e $(0, 0, 0, 5)$, obtemos:

$$(x, y, z, t) = \frac{x}{3}(3, 0, 0, 0) + \frac{y}{4}(0, 4, 0, 0) + \frac{z}{7}(0, 0, 7, 0) + \frac{t}{5}(0, 0, 0, 5).$$

Aplicando T aos dois lados dessa equação:

$$T(x, y, z, t) = \frac{x}{3}T(3, 0, 0, 0) + \frac{y}{4}T(0, 4, 0, 0) + \frac{z}{7}T(0, 0, 7, 0) + \frac{t}{5}T(0, 0, 0, 5),$$

ou seja, $T(x, y, z, t) = \frac{x}{3}(0, 3, 3) + \frac{y}{4}(4, 0, 4) + \frac{z}{7}(7, 7, 0) + \frac{t}{5}(5, 0, 5) \Rightarrow T(x, y, z, t) = (y + z + t,\ x + z,\ x + y + t)$.

Se $(x, y, z, t) \in N(T)$, então $T(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Rightarrow (y+z+t,\ x+z,\ x+y+t) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases}$. Subtraindo-se a primeira da terceira equação desse sistema, obtemos $x = z$. Substituindo $x = z$ na segunda equaç ao, obtemos $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$. Assim, a primeira equação se torna $0 + y + t = 0 \Rightarrow y = -t$. Obtivemos assim a solução do sistema como sendo $(0, -t, 0, t)$, t variável livre. Portanto, o núcleo de T é

$$N(T) = \{(0, -t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(0, -1, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = [(0, -1, 0, 1)]$$

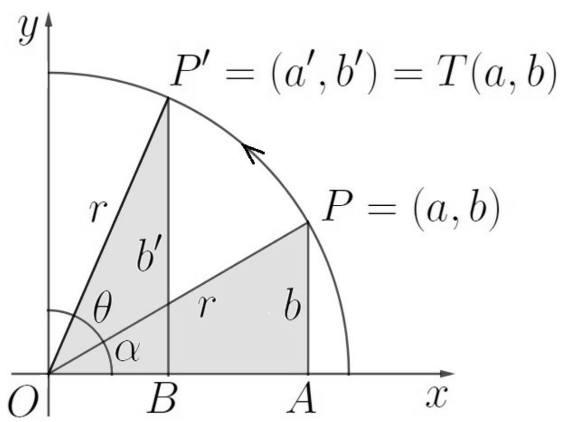
e daí, $\dim N(T) = 1$. Como $\underbrace{\dim N(T)}_{=1} + \dim \operatorname{Im}(T) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4} \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = 3 \Rightarrow \operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

R8) Calcule $T(6,\ 5)$ sabendo que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(2,\ 3)$ é linear e $T(1,\ -1) = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}$ e $T(4,\ 4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: A resolução consiste em escrever $(6,\ 5)$ como combinação linear de $(1,\ -1)$ e $(4,\ 4)$ e depois aplicar T nos dois lados da equação. Sejam a e b escalares tais que $(6,\ 5) = a(1,\ -1) + b(4,\ 4) \Rightarrow (6,\ 5) = (a + 4b,\ -a + 4b)$ e isso leva ao sistema $\begin{cases} a + 4b = 6 \\ -a + 4b = 5 \end{cases}$ cuja solução é $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{11}{8}$. Desse modo, obtemos que $(6,\ 5) = \frac{1}{2}(1,\ -1) + \frac{11}{8}(4,\ 4) \Rightarrow T(6,\ 5) = \frac{1}{2}T(1,\ -1) + \frac{11}{8}T(4,\ 4)$ $\Rightarrow T(6,\ 5) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 11 & 1 \end{bmatrix} + \frac{11}{8}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(6,\ 5) = \begin{bmatrix} \frac{19}{8} & \frac{1}{4} & 13 \\ \frac{55}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

R9) Obtenha a matriz de rotação R_θ de um ângulo θ de um ponto $P = (a, b)$ em torno da origem, no sentido anti-horário.

Solução: Sejam $P = (a, b)$ um ponto qualquer do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e $P' = T(a, b) = (a', b')$ o ponto obtido a partir de P através da aplicação de uma rotação de um ângulo θ em torno da origem O, no sentido anti-horário, conforme mostrado na figura a seguir.



No triângulo OAP, temos as seguintes relações: $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{r}$, ou seja, $a = r\cos\alpha$ e $b = r\operatorname{sen}\alpha$. No triângulo OBP', temos: $\cos(\alpha+\theta) = \frac{a'}{r}$ e $\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \frac{b'}{r}$, que equivale a $a' = r\cos(\alpha+\theta) = \underbrace{r\cos\alpha}_{a}\cos\theta - \underbrace{r\operatorname{sen}\alpha}_{b}\operatorname{sen}\theta$ e $b' = r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \underbrace{r\operatorname{sen}\alpha}_{b}\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{a}\operatorname{sen}\theta$.

Dessa forma, obtemos que $a' = a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta$ e $b' = b\cos\theta + a\operatorname{sen}\theta$ que pode escrito na forma

$$T(a,b) \;=\; (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta,\; b\cos\theta + a\operatorname{sen}\theta).$$

Daí, concluímos que a matriz dessa transformação linear é

$$[T] \;=\; [R_\theta] \;=\; \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

R10) Considerando $V = W = \mathbb{R}^2$ e a função identidade $I : V \longrightarrow W$, $I(v) = v$. Determine $[I]^\alpha_\beta$, onde $\alpha = \{(2,3),\ (1,-5)\}$ e $\beta = \{(4,0),\ (-4,10)\}$.

Solução: Aplicamos I em cada vetor de α e escrevemos o resultado como combinação linear dos vetores de β:

- $I(2,3) = (2,3) = a(4,0) + b(-4,10) \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = 2 \\ 10b = 3 \end{cases}$
- $I(1,-5) = (1,-5) = c(4,0) + d(-4,10) \Rightarrow \begin{cases} 4c - 4d = 1 \\ 10d = -5 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas lineares obtidos, temos que $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = -\frac{1}{4}$ e $d = -\frac{1}{2}$. Portanto, $[I]^\alpha_\beta \;=\; \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Observação: Note que, neste caso, apesar da função ser a função identidade, a matriz obtida não é a matriz identidade. Isso se deve ao fato das bases dos espaços não serem canônicas.

R11) Seja W o subespaço de $V = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ cuja base é

$$\beta \;=\; \{e^{2x},\, xe^{2x},\, \cos(3x),\, \operatorname{sen}(3x)\}.$$

Determine $[D]^\beta_\beta$, onde $D : W \longrightarrow W$, $D(f) = f'$ é a transformação derivada.

Solução: Aplicamos D a cada elemento da base e escrevmos o resultado como combinação linear dos elementos dessa mesma base:

- $D(e^{2x}) = (e^{2x})' = 2e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot xe^{2x} + 0 \cdot \cos(3x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(3x)$
- $D(xe^{2x}) = (xe^{2x})' = e^{2x} + 2xe^{2x} = 1 \cdot e^{2x} + 2 \cdot xe^{2x} + 0 \cos(3x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(3x)$
- $D(\cos(3x)) = (\cos(3x))' = -3\operatorname{sen}(3x) = 0 \cdot e^{2x} + 0 \cdot xe^{2x} + 0 \cdot \cos(3x) - 3 \cdot \operatorname{sen}(3x)$
- $D(\operatorname{sen}(3x)) = (\operatorname{sen}(3x))' = 3\cos(3x) = 0 \cdot e^{2x} + 0 \cdot xe^{2x} + 3 \cdot \cos(3x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(3x)$

Dessa forma, obtivemos que $[D]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

R12) Seja $T : \mathcal{P}_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Determine a matriz de T com relação às bases $\alpha = \{1, t+1, t^2+t+1, t^3+t^2+t+1, t^4+t^3+t^2+t+1\}$ e $\beta = \{1\}$.

Solução: Calculamos T em cada elemento da base α e escrevemos o resultado como combinação linear dos elementos de β:

- $T(1) = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1 = 1 \cdot 1$
- $T(t+1) = \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{3}{2} \cdot 1$
- $T(t^2+t+1) = \displaystyle\int_0^1 (t^2+t+1)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{11}{6} \cdot 1$
- $T(t^3+t^2+t+1) = \displaystyle\int_0^1 (t^3+t^2+t+1)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{25}{12} \cdot 1$
- $T(t^4+t^3+t^2+t+1) = \displaystyle\int_0^1 (t^4+t^3+t^2+t+1)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{137}{60} \cdot 1$

E desse modo, chegamos à seguinte conclusão: $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} & \frac{25}{12} & \frac{137}{60} \end{bmatrix}$.

R13) Dê exemplo de $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ linear cuja base do núcleo seja $B = \{(0,5,0,0),\ (0,0,0,4)\}$.

Solução: Para que os vetores $(0,5,0,0)$ e $(0,0,0,4)$ façam parte do núcleo de T, é preciso que $T(0,5,0,0) = (0,0,0,0,0)$ e $T\ (0,0,0,4) = (0,0,0,0,0)$.

Acrescentamos agora dois vetores ao conjunto B com o objetivo de obter uma base do domínio $\mathbb{R}^4$. Por exemplo, podemos acrescentar os vetores $(1,0,0,0)$ e $(0,0,1,0)$. Assim, construímos a seguinte base para $\mathbb{R}^4$:

$$\beta = \{(0,5,0,0),\ (0,0,0,4),\ (1,0,0,0),\ (0,0,1,0)\}.$$

Escolhemos agora qualquer vetor não nulo como sendo imagem desses vetores de β que foram acrescentados ao conjunto B. Por exemplo, escolhemos $T(1,0,0,0) = (1,1,1,1,1)$ e $T(0,0,1,0) = (2,2,2,2,2)$. Para concluir, escrevemos (x,y,z,t) como combinação linear dos vetores de β e aplicamos T:

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) &= \frac{y}{5}(0,5,0,0) + \frac{t}{4}(0,0,0,4) + x(1,0,0,0) + z(0,0,1,0) \\
\Rightarrow T(x,y,z,t) &= \frac{y}{5}T(0,5,0,0) + \frac{t}{4}T(0,0,0,4) + xT(1,0,0,0) + zT(0,0,1,0) \\
\Rightarrow T(x,y,z,t) &= \frac{y}{5}(0,0,0,0,0) + \frac{t}{4}(0,0,0,0,0) + x(1,1,1,1,1) + z(2,2,2,2,2) \\
&\Rightarrow T(x,y,z,t) = (x+2z,\ x+2z,\ x+2z,\ x+2z,\ x+2z).
\end{aligned}$$

Existe uma infinidade de respostas para esse problema. Essa $T(x,y,z,t)$ que foi obtida é apenas uma delas.

R14) Dê exemplo de $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear cuja base da imagem seja $\{(1,2,3),\ (0,4,1)\}$.

Solução: Escolhemos qualquer base para o domínio $\mathbb{R}^5$, por exemplo:

$$\beta = \{(1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0),\ (0,0,1,0,0),\ (0,0,0,1,0),\ (0,0,0,0,1)\}.$$

Depois, definimos a imagem de cada vetor da base como sendo um dos vetores da base da imagem ou qualquer combinação linear deles. Por exemplo, escolhemos

$$T(1,0,0,0,0) = T(0,1,0,0,0) = T(0,0,1,0,0) = (1,2,3)$$
$$\text{e}\ \ T(0,0,0,1,0) = T(0,0,0,0,1) = (0,4,1).$$

Escrevemos (x, y, z, s, t) como combinação linear dos elementos da base do domínio e aplicamos o T dos dois lados da igualdade:

$$\begin{aligned}
(x,y,z,s,t) &= x(1,0,0,0,0)+y(0,1,0,0,0)+z(0,0,1,0,0)\\
&\quad + s(0,0,0,1,0)+t(0,0,0,0,1)\\
\Rightarrow T(x,y,z,s,t) &= xT(1,0,0,0,0)+yT(0,1,0,0,0)+zT(0,0,1,0,0)\\
&\quad + sT(0,0,0,1,0)+tT(0,0,0,0,1)\\
\Rightarrow T(x,y,z,s,t) &= x(1,2,3)+y(1,2,3)+z(1,2,3)+s(0,4,1)+t(0,4,1)\\
\Rightarrow T(x,y,z,s,t) &= (x+y+z,\ 2x+2y+2z+4s+4t,\ 3x+3y+3z+s+t).
\end{aligned}$$

Essa é uma das possíveis respostas para esse problema.

5.7 Exercícios Propostos

1) Verifique se cada $T : U \longrightarrow V$ a seguir é uma transformação linear.
a) $U = V = \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x-y,\ x+y)$
b) $U = V = \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x+y,\ 1)$
c) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R},\ T(x,y,z) = 3x+z$
d) $U = \mathbb{R}^2$, $V = M(2,2)$, $T(x,y) = \begin{bmatrix} 3y & 0 \\ y & 2x \end{bmatrix}$
e) $U = V = \mathbb{R},\ T(x) = x - x^2$
f) $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3,\ T(x) = (2x,\ 3x,\ 4x)$
Resp.: Somente (b) e (e) não são lineares.

2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0,0) = (2,3)$, $T(1,1,0) = (1,1)$ e $T(0,1,1) = (1,0)$. Calcule $T(2,-3,5)$.
Resp.: $T(2,-3,5) = (17,22)$

3) Determine $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (1,-1)$ sabendo que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(3,0) = (1,3)$ e $T(0,5) = (3,1)$. Resp.: $v = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

4) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,\ y) = (2x+3y,\ 5x-y)$. Mostre que T é linear e calcule as matrizes de T com relação à base canônica $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e com relação à base $\beta = \{(1,-1),(3,0)\}$.
Resp.: $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $[T]_\beta = \begin{bmatrix} -6 & -15 \\ \frac{5}{3} & 7 \end{bmatrix}$

5) Sejam R, S e T três transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tais que

$R(x,y,z) = (x-z, y+x, 2y)$, $S(x,y,z) = (y+z, 4z+x, y-z)$ e $T = R \circ S$. Escolha uma base qualquer $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^3$, determine as matrizes de R, S e T com relação a essa base e verifique que $[T]_{\mathcal{B}} = [R]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}$.
Resp.: Escolhendo $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ [R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ [S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6) Seja $D : V \longrightarrow V$ o operador derivação (ou seja, $D(f) = f'$). Calcule $[D]_{\mathcal{B}}$ em cada um dos seguintes casos:
a) $V = \mathcal{P}_n, \ \mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$
b) $V = [\operatorname{sen} x, \ \cos x], \ \mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x, \ \cos x\}$
c) $V = [e^x, \ e^{2x}, \ xe^{2x}], \ \mathcal{B} = \{e^x, \ e^{2x}, \ xe^{2x}\}$
d) $V = [1, e^x, \ e^{-x}, \ e^{-3x}]$, $\mathcal{B} = \{1, e^x, \ e^{-x}, \ e^{-3x}\}$
Resp.:

$$\text{a) } [D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \qquad \text{b) } [D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } [D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{d) } [D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x+2y, y-5x)$ e $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,0)\}$. Mostre que $[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}, \ \forall v \in \mathbb{R}^2$. Escreva $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ na forma de matriz-coluna.
Resp.: $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y \\ x-y \end{bmatrix}$, $[T(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y-5x \\ y+6x \end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$. A partir daí obtemos $\begin{bmatrix} y-5x \\ y+6x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x-y \end{bmatrix}$, ou seja, $[T(v)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$.

8) Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear tal que $f(v_1) = 3v_3$, $f(v_2) = v_1 - v_2$, $f(v_3) = 2v_1 - v_3$. Calcule $[f]_{\mathcal{B}}$.

Resp.: $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

9) Verifique se $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um isomorfismo em cada um dos casos:
a) $T(x, y, z) = (2x, y, x - y - 3z)$ b) $T(x, y, z) = (x, x + y, 2x + y)$
c) $T(x, y, z) = (2z, 3y, 4x)$ d) $T(x, y, z) = (x + z, x - y, y + z)$
Resp.: São isomorfismos somente (a) e (c).

10) Mostre que todo espaço vetorial V de dimensão 3 é isomorfo a $\mathbb{R}^3$.
Resp.: Se $\beta = \{u, v, w\}$ for base de V, então $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(u) = (1, 0, 0)$, $T(v) = (0, 1, 0)$, $T(w) = (0, 0, 1)$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

11) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+2z, x+2y, y-z)$. Calcule $\dim(\text{Im}(T))$ e $\dim(N(T))$.
Resp.: $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, $\dim(N(T)) = 1$

12) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear cuja base do núcleo seja $\{(1, -1, 0),\ (0, 1, 1)\}$.
Resp.: Há uma infinidade de respostas corretas, uma delas é $T(x, y, z) = (-x - y + z,\ -2x - 2y + 2z)$.

13) Dê exemplo de uma $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear cuja imagem seja gerada por $(1, 1, 0)$ e $(0, 2, 1)$.
Resp.: Há uma infinidade de respostas corretas, uma delas é
$T(x, y, z, w) = (x + y,\ x + y + 2z + 2w,\ z + w)$.

14) Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear cuja matriz com relação às bases canônicas é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine o núcleo e a imagem de T e verifique que $\dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^4)$.
Resp.: $T(x, y, z, t) = (x + 3z,\ -2y - 6z + t,\ 4x - 4y + t)$,
$\text{Im}(T) = [(1, 0, 4), (0, 1, 2), (0, 0, 1)]$,
$N(T) = [(3, 3, -1, 0)]$, $\dim(\text{Im}(T)) = 3$, $\dim(N(T)) = 1$

15) Mostre que não existe $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ linear injetora, e nem $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ linear sobrejetora. Resp.: Se existisse $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ linear injetora, então teríamos $\dim(N(T)) = 0$ e daí $\dim(\text{Im}(T)) = 5$, o que é absurdo. Por outro lado, se existisse $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ linear sobrejetora, então teríamos $\dim(\text{Im}(T)) =$

5 e daí $\underbrace{\dim(N(T))}_{\geq 0} + 5 = 4$, que também é absurdo.

16) Existe transformação linear $T : V \longrightarrow W$ sobrejetora tal que $\dim W > \dim V$? Justifique sua resposta.
Resp.: Não existe tal transformação linear. Se existisse, $\underbrace{\dim(N(T))}_{\geq 0} = \dim V - \dim W$, e daí, $\dim V \geq \dim W$ o que é absurdo.

17) Seja $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por $T(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Determine a matriz de T com relação às bases $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{1\}$.
Resp.: $[T]_\beta^\alpha = [2 \quad 0 \quad \frac{2}{3}]$

18) Se $\dim V = n$ e $T : V \longrightarrow V$ é linear tal que $\mathrm{Im}(T) = N(T)$, então mostre que n é par. Dê um exemplo de uma tal T quando $n = 4$.
Resp.: $\dim V = \dim(N(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = m + m = 2m$, um exemplo é $T(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$.

19) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Se for possível, encontre a inversa T^{-1}.
Resp.: $T^{-1}(x, y, z) = (\frac{x}{2},\ 2x - y,\ 7x - 3y - z)$

20) Seja $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ a transformação linear que satisfaz $T(x^2) = x^2 - 2x + 1$, $T(x) = x - 1$ e $T(1) = x$. Calcule $T(4x^2 - 5)$ e verifique se T é um isomorfismo.

21) Seja $\alpha = \{u, v\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear que satisfaz $T(u - v) = 3v$ e $T(u + 2v) = u - v$. Determine $[T]_\alpha^\alpha$ e verifique se T é um isomorfismo.
Resp.: $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

22) Seja $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$. Mostre que T é um isomorfismo e calcule a sua inversa T^{-1}.
Resp.: Escolhendo a base $\beta = \{1,\ x,\ x^2\}$ para $\mathcal{P}_2$, temos $T(1) = 1$, $T(x) = 2x$ e $T(x^2) = 3x^2$. Como T leva base $\{1, x, x^2\}$ em base $\{1, 2x, 3x^2\}$, T é um isomorfismo. Logo, T possui inversa e $T^{-1}(1) = 1$, $T^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ e $T^{-1}(x^2) = \frac{x^2}{3}$ e daí $T^{-1}(p(x)) = \boxed{T^{-1}(ax^2 + bx + c) = \frac{ax^2}{3} + \frac{bx}{2} + c} = \frac{1}{x}(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx) = \frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t$.

Capítulo 6

Autovalores e autovetores

O cálculo dos autovalores e autovetores de uma transformação linear é um dos problemas básicos e dos mais importantes da Álgebra Linear. Esse tipo de cálculo aparece em diversos problemas da Física, problemas de Geometria Analítica, sistemas de Equações Diferenciais, entre outros. Neste capítulo, fazemos uma breve introdução a esse interessante assunto.

6.1 Polinômios de matrizes e de operadores lineares

Definição 6.1. Consideremos um polinômio

$$f(x) \; = \; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se A é uma matriz quadrada, então definimos

$$f(A) \; = \; a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I,$$

onde I é a matriz identidade de mesma ordem que A.

Exemplo 6.1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ Temos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 4\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} f(A) = 2A^2 + 3A + 5I = 2\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 61 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 6.2. Dizemos que uma matriz quadrada A é uma raiz ou é um zero de um polinômio $f(x)$, quando $f(A) = \mathbf{0}$ = matriz nula.

Exemplo 6.2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $f(x) = x^2 - 5x - 2$. Então

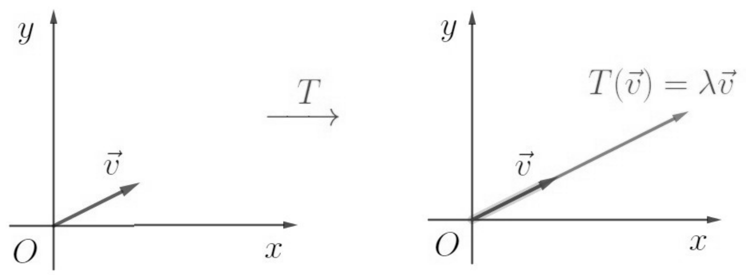
$$\begin{aligned} f(A) = A^2 - 5A - 2I &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, A é uma raiz de $f(x)$.

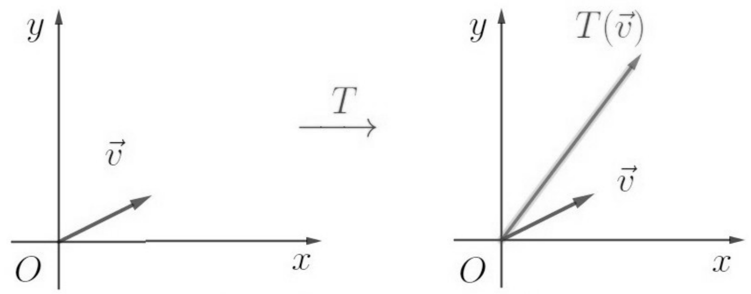
6.2 Autovalores e autovetores

Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear em um espaço vetorial V. Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$ é chamado **autovalor*** de T se existir $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, tal que $T(v) = \lambda v$. Nesse caso, dizemos que v é um **autovetor**† de T associado ao autovalor λ.

De acordo com essa definição, $v \neq \mathbf{0}$ é um autovetor de T se, e somente se, v e $T(v)$ são vetores colineares.



$\vec{v}$ é autovetor de T



$\vec{v}$ não é autovetor de T

Equivalentemente, se A for uma matriz quadrada, então um autovalor de A é um escalar λ tal que $Av = \lambda v$ para alguma matriz coluna $v \neq \mathbf{0}$ que é denominada autovetor associado a λ.

*Também chamado valor próprio ou valor característico. Em inglês: eigenvalue.

†Também chamado vetor próprio ou vetor característico. Em inglês: eigenvector.

Exemplo 6.3. Considerando $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,\, y) = (3x+5y,\, -2x-4y)$ e $v = (-2,\, 2)$ temos que

$$T(v) = T(-2,\, 2) = (-6+10,\, 4-8) \;=\; (4,\, -4) \;=\; \underbrace{-2}_{\text{autovalor}}\ \underbrace{(-2,\, 2)}_{\text{autovetor}},$$

ou seja, $T(v) = -2v$. Isso significa que v é um autovetor de T associado ao autovalor -2.

Exemplo 6.4. O exemplo anterior pode ser enunciado de outra maneira, usando matrizes. Para isso, consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Temos também que v é autovetor de A porque

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \;=\; \underbrace{-2}_{\text{autovalor}}\ \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{autovetor}} = -2v.$$

Nesse caso, o autovalor associado a v é igual a -2.

Exemplo 6.5. Consideremos $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (5x+2y+2z,\, 3x+6y+3z,\, 6x+6y+9z)$$

e os vetores $u = (2,3,6)$, $v = (-3,2,1)$ e $w = (1,1,4)$. Vamos calcular $T(u)$, $T(v)$ e $T(w)$ e verificar se u, v, w são autovetores de T.

- $T(u) = T(2,3,6) = (10+6+12,\, 6+18+18,\, 12+18+54) = (28,\, 42,\, 84) = 14 \cdot (2,\, 3,\, 6) = 14u$; como $T(u) = 14u$, temos que u é um autovetor de T associado ao autovalor 14.
- $T(v) = T(-3,2,1) = (-15+4+2,\, -9+12+3,\, -18+12+9) = (-9,\, 6,\, 3) = 3(-3,\, 2,\, 1) = 3v$; e daí, o fato de que $T(v) = 3v$ significa que v é autovalor de T associado ao autovalor 3.
- $T(w) = T(1,1,4) = (5+2+8,\, 3+6+12,\, 6+6+36) = (15,\, 21,\, 48)$. Como $(15,21,48)$ não é um múltiplo de w, temos que w não é autovetor de T.

Observação: Essas propriedades também podem ser enunciadas usando-se matrizes. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, então $Au = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \\ 84 \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ significa que u é autovetor de A associado ao autovalor 14.

Exemplo 6.6. Encontre os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Devemos encontrar um escalar λ e $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tais que $Av = \lambda v$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 3x + 2y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}}_{(*)}$$

Para um sistema linear homogêneo possuir solução não nula, o determinante da matriz dos seus coeficientes deve ser igual a zero. No caso desse exemplo, devemos ter $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow$ $\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 4$. Os valores -1 e 4 assim encontrados são os autovalores de A.

Para encontrar os autovetores, substituímos cada um desses valores de λ no sistema linear (*) anterior. Por exemplo, substituindo $\lambda = -1$, obtemos $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $x = -y$, com y variável livre. Sendo assim, os autovetores associados ao autovalor -1 são os vetores da forma $v = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}$, para todo y. Podemos também escrever v no formato de linha: $v = (-y, y)$.

Substituindo $\lambda = 4$ no sistema (*), obtemos $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ que tem solução dada por $x = \frac{2y}{3}$, y variável livre. Portanto, os autovetores associados ao autovalor 4 são da forma $w = \begin{bmatrix} \frac{2y}{3} \\ y \end{bmatrix}$ ou $w = (\frac{2y}{3}, y)$, para qualquer valor de y.

Note que no exemplo anterior, depois que foi calculado o determinante da matriz dos coeficientes, apareceu um polinômio na variável λ. Esse polinômio sempre aparece nesse tipo de problema. Por isso, ele recebe um nome especial na próxima definição.

Definição 6.3. Dada uma matriz $n \times n$, o polinômio de grau n definido por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, onde I é a matriz identidade $n \times n$ é chamado **polinômio característico** de A. Suas raízes são os autovalores de A. Também pode ser definido por $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ou $p(x) = \det(xI - A)$ ou $p(x) = \det(A - xI)$.

Exemplo 6.7. Determine o polinômio característico $p(\lambda)$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e calcule $p(A)$.

Solução: O polinômio característico de A é dado por
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 8 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$= (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - 8(5-\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda - 15.$

Para calcular $p(A)$, substituímos λ por A e o termo constante, -15, por $-15I$. Precisamos calcular também as potências A^2 e A^3.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 \\ 56 & 16 & 17 \end{bmatrix};$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 \\ 56 & 16 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 66 & 41 & 42 \\ 384 & 84 & 83 \end{bmatrix};$

- $p(A) = -A^3 + 9A^2 - 23A - 15I$
$$= -\begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 66 & 41 & 42 \\ 384 & 84 & 83 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 \\ 56 & 16 & 17 \end{bmatrix} - 23\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 15\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -125 & 0 & 0 \\ -66 & -41 & -42 \\ -384 & -84 & -83 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 225 & 0 & 0 \\ 36 & 81 & 72 \\ 504 & 144 & 153 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -115 & 0 & 0 \\ 46 & -23 & -46 \\ -184 & -92 & -69 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, obtivemos que $p(A) = \mathbf{0}$. Esse tipo de operação dá sempre esse resultado nulo, não importa qual seja a matriz, nem a sua ordem. Essa é a tese do próximo teorema.

Teorema 6.2.1. Toda matriz A é um zero do seu polinômio característico $p(\lambda)$, ou seja, $p(A) = \mathbf{0}$.

Esse teorema é conhecido pelo nome de Teorema de Cayley-Hamilton e sua demonstração pode ser encontrada em muitos livros sobre esse assunto.

Exemplo 6.8. Determine os autovalores e autovetores de $M = \begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix}$.

Solução: Polinômio característico de M:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & 9 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (13-\lambda)(4-\lambda)(-7-\lambda) \; + \; 75(4-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)((13-\lambda)(-7-\lambda) + 75) = (4-\lambda)(-91 - 6\lambda + \lambda^2 + 75)$$

$$= (4-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 - 6\lambda - 16)}_{(*)} = (4-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-8).$$

Os autovalores de M são as raízes de $p(\lambda)$. Igualando a zero o $p(\lambda)$ encontrado, obtemos a equação $(4-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-8) = 0 \Rightarrow 4 - \lambda = 0$ ou $\lambda + 2 = 0$ ou $\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$ ou $\lambda = -2$ ou $\lambda = 8$. Logo, os autovalores são 4, -2 e 8.

Para determinar os autovetores, devemos substituir cada autovalor λ na equação $Mv = \lambda v$ e calcular v. Essa equação é a mesma que $(M - \lambda I)v = \mathbf{0}$ e equivale a um sistema linear:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 13-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & 9 & -7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{(M-\lambda I)v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (13-\lambda)x - 3y + 5z = 0 \\ (4-\lambda)y = 0 \\ -15x + 9y + (-7-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

- Substituindo $\lambda = 4$: $\begin{cases} 9x - 3y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ -15x + 9y - 11z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = -5z \\ -15x + 9y = 11z \end{cases}$, cuja solução é $(-\frac{z}{3}, \frac{2z}{3}, z), \forall z \in \mathbb{R}$.

- Substituindo $\lambda = -2$: $\begin{cases} 15x - 3y + 5z = 0 \\ 6y = 0 \\ -15x + 9y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$ que tem por solução $(x, 0, -3x), \forall x \in \mathbb{R}$.

• Substituindo $\lambda = 8$: $\begin{cases} 5x - 3y + 5z = 0 \\ -4y = 0 \\ -15x + 9y - 15z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ do qual $(x,\, 0,\, -x), \forall x \in \mathbb{R}$, é a solução.

Concluímos dessa forma que a matriz $\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ possui o autovalor 4 associado aos autovetores $\{(-\frac{z}{3},\, \frac{2z}{3},\, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)] = [(-1,\, 2,\, 3)]$, possui o autovalor -2 associado aos autovetores $\{(x,\, 0,\, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,\, 0,\, -3)]$ e possui o autovalor 8 associado a $\{(x,\, 0,\, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,\, 0,\, -1)]$.

Observação 1: Podemos verificar se a resposta encontrada está correta. Para isso, basta observar os seguintes produtos de matrizes:

- $\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Observação 2: Nesse tipo de problema, geralmente usamos algum tipo de fatoração de polinômio. Se o grau do polinômio for considerado alto, essa fatoração pode ser bastante complicada. Em geral, se $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ possuir raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

No caso do exemplo anterior, o polinômio (*) do segundo grau $\lambda^2 - 6\lambda - 16$ possui as raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 8$ e, consequentemente, ele pode ser escrito na forma $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 2)(\lambda - 8)$.

Teorema 6.2.2. Seja $T : V \longrightarrow V$ linear possuindo um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. O conjunto de todos os autovetores associados a λ, juntamente com o vetor nulo, forma um subespaço vetorial de V, denotado por V_λ e denominado **autoespaço** de λ.

Demonstração: Como $\mathbf{0} \in V_\lambda$, então $V_\lambda \neq \emptyset$. Se $v, w \in V_\lambda$ e $k \in \mathbb{R}$, então $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \lambda w \Rightarrow T(v+w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w) = T(v+w) \Rightarrow v + w \in V_\lambda$ e $T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv) = T(kv) \Rightarrow kv \in V_\lambda$ Assim, fica mostrado que V_λ é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 6.9. Determine os autovalores e seus respectivos autoespaços de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + 3z,\ x + 5y + z,\ 3x + y + z)$.

Solução: A matriz de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e seu polinômio característico é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$. Desenvolvendo esse determinante e simplificando, obtemos $p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36$. Como $p(\lambda)$ tem grau 3, ele tem um total de 3 raízes. Se esse polinômio possuir alguma raiz inteira, ela será um divisor de 36, o termo constante desse polinômio (aqui, não importa o sinal). Os divisores de 36 (ou -36) são os elementos do seguinte conjunto: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$. Substituindo cada um desses valores em $p(\lambda)$, obtemos $p(-2) = 0$, $p(3) = 0$ e $p(6) = 0$. Desse modo, encontramos as três raízes de $p(\lambda)$ que são $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$. Esses são os autovalores de T.

Vamos agora determinar os autovetores associados a cada um desses autovalores, substituindo λ por λ_1, λ_2 e λ_3 na equação $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$, onde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Substituindo λ por -2: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 3z = 0 \\ x + 7y + z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$. A solução desse sistema é $x = -z, y = 0$. Sendo assim, os autovetores encontrados são os vetores da forma $(-z, 0, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Logo, o autoespaço associado ao autovalor -2 é

$$V_{-2} = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 0, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-1, 0, 1)].$$

- Substituindo λ por 3, obtemos
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$
cuja solução é $x = z, y = -z$. Assim, os autovetores encontrados são da forma $(z, -z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Logo, o autoespaço associado ao autovalor 3 é
$$V_3 = \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1, -1, 1)].$$

- Substituindo λ por 6, obtemos
$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$$
que tem solução dada por $x = z, y = 2z$. Daí, os autovetores encontrados são $(z, 2z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Portanto, o autoespaço associado a 6 é
$$V_6 = \{(z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1, 2, 1)].$$

Exemplo 6.10. Determine autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

Solução: O polinômio caracterísco de A é
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix}.$$
Desenvolvendo e simplificando esse determinante, obtemos o resultado $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$.

A fatoração desse polinômio pode ser efetuada de várias maneiras. Uma das possibilidades é mostrada a seguir.
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda^3 + \lambda^2) + (\lambda - 1) = -\lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$
Obtemos assim que as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Esses são os autovalores de A.

Usamos agora agora a equação $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$ para encontrarmos os autovetores. Essa equação equivale a $\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Substituindo λ por 1, obtemos
$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 12y + 6z = 0 \\ 10x - 20y + 10z = 0 \\ 12x - 24y + 12z = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 2y + z = 0$$
$\Rightarrow z = -x + 2y$. Logo, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são
$$(x, y, -x+2y) = (x, 0, -x) + (0, y, 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Substituindo λ por -1, obtemos
$$\begin{bmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 12y + 6z = 0 \\ 10x - 18y + 10z = 0 \\ 12x - 24y + 14z = 0 \end{cases} \text{ cuja solução é}$$
$x = \frac{z}{2}, y = \frac{5z}{6}$. Logo, os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ são
$$\left(\frac{z}{2}, \frac{5z}{6}, z\right) = z\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right), \ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Conclusão: a matriz A possui dois autovalores: 1 e -1; são dois autovetores linearmente independentes $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, 2)$ associados ao autovalor 1 e um autovetor $v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1)$ associado a -1.

Observação 1: Esse tipo de problema sempre tem uma infinidade de autovetores como resposta válida. Para cada valor de x, y ou z escolhidos, encontramos uma resposta diferente. Por exemplo, escolhendo $x = 2$, $y = 1$ e $z = 6$ obtemos o autovetor $v_2 = (2, 1, 0)$ associado ao autovalor 1 e $v_3 = (3, 5, 6)$ associado a -1.

Observação 2: Os divisores do termo constante de $p(\lambda)$ são 1 e -1. Substituindo diretamente em $p(\lambda)$, obtemos $p(1) = p(-1) = 0$. Isso significa que 1 e -1 são raízes de $p(\lambda)$ e, consequentemente, $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1$. Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda^2 - 1$ obtemos um quociente igual a $1 - \lambda$.

$$\begin{array}{rrrr|l} -\lambda^3 & +\lambda^2 & +\lambda & -1 & \lambda^2 - 1 \\ \cline{5-5} \lambda^3 & & -\lambda & & -\lambda + 1 \\ \cline{1-4} & \lambda^2 & & -1 & \\ & -\lambda^2 & & +1 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

Logo, $p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(1 - \lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$.

6.3 Exercícios Resolvidos

R1) Sejam a, b, c, d, e números reais não todos nulos simultaneamente. Determine o autovalor que é associado ao autovetor $v = (1, 1, 1, 1, 1)$ da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & e & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & e & a \end{bmatrix}$.

Solução: Escrevendo v no formato de matriz coluna, temos que

$$Av = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & e & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & e & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d+e \\ a+b+c+d+e \\ a+b+c+d+e \\ a+b+c+d+e \\ a+b+c+d+e \end{bmatrix} = (a+b+c+d+e) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= (a+b+c+d+e)v,$$

e assim chegamos à conclusão de que o autovalor associado a v é $a+b+c+d+e$.

R2) Mostre que o polinômio característico de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ é $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$ e verifique que $p(A) = \mathbf{0}$.

Solução: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$ e $p(A) = A^2 - 6A + 9I = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

R3) Determine os autovalores e autovetores de $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução: O polinômio característico de M é calculado através do seguinte determinante:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-3)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 5-\lambda \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo cada um desses determinantes e simplificando, obtemos:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 20\lambda^3 + 112\lambda^2 - 192\lambda = \lambda(\underbrace{\lambda^3 - 20\lambda^2 + 112\lambda - 192}_{q(\lambda)}).$$

O termo constante de $q(\lambda)$ é -192 e os divisores de 192 (ou -192) são os elementos do conjunto

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm16, \pm24, \pm32, \pm48, \pm64, \pm96, \pm192\}.$$

Esse é o conjunto com todas as possíveis raízes inteiras de $q(\lambda)$. Aplicando q a cada um desses valores, chegamos à conclusão de que somente 4 e 12 são realmente raízes: $q(4) = 0$ e $q(12) = 0$. Isso significa que $q(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 4)(\lambda - 12) = \lambda^2 - 16\lambda + 48$.

Dividindo $q(\lambda)$ por $\lambda^2 - 16\lambda + 48$ obtemos $(\lambda - 4)$ como quociente.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 20\lambda^2 + 112\lambda - 192 & \lambda^2 - 16\lambda + 48 \\ \cline{2-2} -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 48\lambda \phantom{{}-192} & \lambda - 4 \\ \cline{1-1} -4\lambda^2 + 64\lambda - 192 & \\ 4\lambda^2 - 64\lambda + 192 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Logo,

$$\frac{q(\lambda)}{(\lambda-4)(\lambda-12)} = \lambda - 4 \Rightarrow q(\lambda) = (\lambda-12)(\lambda-4)^2 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda(\lambda-12)(\lambda-4)^2.$$

Portanto, observando essa forma fatorada do polinômio característico temos que os autovalores de M são 0, 12 e 4.

Vamos agora determinar os autovetores de M. A equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$, equivale a $\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Substituindo $\lambda = 0$ nessa equação: $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, que pode ser escrita na forma $\begin{cases} 5x - y - 3z + 3t = 0 \\ -x + 5y + 3y - 3t = 0 \\ -3x + 3y + 5z - t = 0 \\ 3x - 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$. A forma escalonada da matriz do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e daí obtemos que a solução desse sistema é $x = -t, y = t, z = -t$, t variável livre. Logo, os autovetores de M associados a 0 são da forma $(-t, t, -t, t) = t(-1, 1, -1, 1)$, para qualquer valor de t.

- Substituindo $\lambda = 12$ em $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$: $\begin{bmatrix} -7 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & -7 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, que pode ser escrita na forma $\begin{cases} -7x - y - 3z + 3t = 0 \\ -x - 7y + 3y - 3t = 0 \\ -3x + 3y - 7z - t = 0 \\ 3x - 3y - z - 7t = 0 \end{cases}$. A forma escalonada da matriz desse sistema é $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e daí obtemos que a solução desse sistema é $x = t, y = -t, z = -t$, t variável livre. Logo, os autovetores de M associados a 12 são da forma $(t, -t, -t, t) = t(1, -1, -1, 1)$, para qualquer valor de t.

- Substituindo $\lambda = 4$ nessa equação: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, que pode ser escrita na forma $\begin{cases} x - y - 3z + 3t = 0 \\ -x + y + 3y - 3t = 0 \\ -3x + 3y + z - t = 0 \\ 3x - 3y - z + t = 0 \end{cases}$. A forma escalonada da matriz do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e sua solução é $x = y, z = t$, y e t variáveis livres. Logo, os autovetores de M associados a 4 são da forma $(y, y, t, t) = y(1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1)$, para quaisquer valores de y e de t.

Observação: Todo polinômio do quarto grau possui quatro raízes reais ou complexas, distintas ou repetidas. No caso do $p(\lambda)$ desse exemplo, a raiz 4 é uma raiz repetida e é o que chamamos de raiz dupla.

R4) Determine os autovalores reais e autoespaços de $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: O polinômio característico é calculado através do desenvolvimento do determinante $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$. Ao ser simplificado, obtemos $p(\lambda) = \lambda^4 - 1$ que pode ser fatorado na forma[‡] $p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$. Daí, deduzimos que as raízes reais da equação $p(\lambda) = 0$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Esses são os autovalores procurados.

Vamos calcular os autovetores associados a esses autovalores encontrados.

[‡] Nessa fatoração, utilizamos duas vezes que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

- Substituindo $\lambda = 1$ na equação

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos o sistema $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = t, y = t, z = t$, ou seja, $(t, t, t, t) = t(1, 1, 1, 1)$ para qualquer valor de t.

- Substituindo $\lambda = -1$ nessa mesma equação, obtemos o sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = -t, y = t, z = -t$, ou seja, $(-t, t, -t, t) = t(-1, 1, -1, 1)$ para todo t.

Dessa forma, obtivemos $V_1 = [(1,\ 1,\ 1,\ 1)]$ e $V_{-1} = [(-1,\ 1,\ -1,\ 1)]$.

Observação: A matriz M possui mais dois autovalores complexos $\lambda_3 = i$ e $\lambda_4 = -i$ que são as raízes da equação $\lambda^2 + 1 = 0$. Esses autovalores estão associados aos seguintes autoespaços complexos: $V_i = [(1,\ i,\ -1,\ -i)]$ e $V_{-i} = [(1,\ -i,\ -1,\ i)]$.

R5) Se A for uma matriz invertível na qual $\lambda \neq 0$ é um autovalor associado a um autovetor $v \neq \mathbf{0}$, determine um autovalor de A^{-1} e seu autovetor associado.

Solução: Se λ é autovalor de A associado ao autovetor v, então $Av = \lambda v$ $\Rightarrow A^{-1} \cdot (Av) = A^{-1} \cdot (\lambda v) \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} v = \lambda(A^{-1}v) \Rightarrow \lambda(A^{-1}v) = v \Rightarrow A^{-1}v =$ $\frac{1}{\lambda} \cdot v$. Essa última igualdade significa que $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1} associado ao autovetor v.

R6) Mostre que $T : V \longrightarrow V$ não é uma função injetora se, e somente se, T possui um autovalor igual a 0.

Solução: T não é injetora $\Leftrightarrow N(T) \neq \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \exists v \in V, T(v) = 0, v \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $T(v) = 0 \cdot v \Leftrightarrow 0$ é autovalor de T.

6.4 Exercícios Propostos

1) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y + z,\ x - 2y + z,\ x + y)$ uma transformação linear. Encontre uma base para $N(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, verifique se T é injetora ou sobrejetora e determine seus autovalores e autovetores.
Resp.: Uma base do núcleo de T é $\{(-1, 1, 3)\}$ e uma base da imagem é $\{(1, 1, 0),\ (0, 1, -1)\}$, T não é injetora, nem sobrejetora, os autovalores são 0, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ associados respectivamente aos autovetores $(-1, 1, 3)$, $(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ e $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$.

2) Os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, -1)$ são autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determine $T(4, 1)$. Resp.: $T(4,\ 1)\ =\ (8,\ 11)$

3) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autovetores $v_1 = (y, -y)$ e $v_2 = (0, y)$, respectivamente. Resp.: $T(x,\ y)\ =\ (x,\ 2x + 3y)$

4) Seja $T : V \longrightarrow V$ linear que não é invertível. Os vetores não nulos do núcleo de T são autovetores? Em caso afirmativo, determine seus respectivos autovalores.
Resp.: Vetores não-nulos do núcleo são autovetores associados ao autovalor 0.

5) Calcule os polinôios característicos, autovalores e autovetores das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Resp.: a) $p(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$; autovalores: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2$; autovetores: $v_1 = (1, 1),\ v_2 = (1, \frac{1}{3})$
b) $p(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$; autovalores: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$; autovetores: $v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 3)$
c) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; autovalores: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$; autovetores: $v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, -1, -\frac{1}{2}),\ v_3 = (1, -2, -1)$
d) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$; autovalores: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$,

$\lambda_3 = 3$; autovetores: $v_1 = (1, 2, 2),\ v_2 = (1, -1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0)$
e) $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+2)(x-2)(x+1)$; autovalores: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,$ $\lambda_3 = -1$; autovetores: $v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (0, 1, 0)$
f) $p(x) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24 = (x-6)(x-2)^2$; autovalores: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 2$; autovetores: $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 1, -2)$

6) Determine os autovalores e autovetores das transformações lineares:
a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$
b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, x - 8y, y + z)$
c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5y, 5x)$
d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + 2z, y)$
Resp.: a) Autovalor: $\lambda_1 = 4$; autovetor: $v_1 = (1, 1)$
b) Autovalores: $\lambda_1 = -8,\ \lambda_2 = 1$; autovetores: $v_1 = (0, 9, -1),\ v_2 = (0, 0, 1)$
c) Autovalores: $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 5$; autovetores: $v_1 = (1, -1),\ v_2 = (1, 1)$
d) Autovalores: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$; autovetores: $v_1 = (0, 1, \frac{1}{2})$, $v_2 = (1, -2, 2),\ v_3 = (1, 0, 0)$

7) Encontre os valores de a e b sabendo que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores do operador linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x + ay, -2x + by)$.
Resp.: $a = 3,\ b = 4$.

8) Dado um polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$ é chamada **matriz companheira** de $p(x)$.
a) Mostre que o polinômio característico de M é $p(x)$
b) Determine uma matriz 3×3 cujo polinômio característico seja $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 13$.
Resp.: b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -13 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

9) Sejam v_1 e v_2 autovetores do operador linear T associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI.
Resp.: Aplique T à equação $av_1 + bv_2 = 0$ e calcule a e b.

10) Sejam $T : V \longrightarrow V$ linear e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Sabendo que $T(v_i) = \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, \ldots, n$, determine o polinômio característico, autovalores e autovetores de T.
Resp.: Os autovalores são os λ_i, os autovetores são os v_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$. O polinômio característico é $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n)$.

11) Determine a, b, c, d, e, f, sabendo que $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$ são autovetores da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.
Resp.: $a = b = c = 1,\ \ d = e = f = 1$

12) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação *rotação de um ângulo θ em torno da origem* dada por

$$T(x, y) \ = \ (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$

T possui autovalores reais para quais valores de θ ? Quais são esses autovalores?
Resp.: $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, os autovalores são $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Capítulo 7

Diagonalização de Operadores

Neste capítulo, introduzimos o conceito de diagonalização de uma matriz ou, equivalentemente, de uma transformação linear . Essa é uma simplificação que se pode fazer na apresentação de uma matriz.

O principal objetivo deste capítulo é a definição de polinômio mínimo e sua relação com a diagonalização. Tudo o que se definir para uma matriz, também se define de modo análogo para uma transformação linear que também é conhecida pelo nome de operador linear.

7.1 Matrizes semelhantes

Definição 7.1. Duas matrizes quadradas A e B de ordem n são **semelhantes** se existir uma matriz invertível P, de mesma ordem n, tal que $A = P^{-1}BP$.

Exemplo 7.1. Sejam $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$P^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

e

$$A = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 67 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{29}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Deduzimos, a partir daí, que as matrizes A e B são semelhantes.

Duas matrizes semelhantes têm muitas propriedades em comum: mesma soma dos elementos da diagonal principal, mesmo posto, mesma nulidade, mesmo determinante, mesmo polinômio característico, mesmos autovalores etc.

Por exemplo, suponhamos $A = P^{-1}BP$, ou seja, A e B são semelhantes. Então, o polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det(P^{-1}BP - \lambda I) = \det(P^{-1}BP - \lambda I P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(B - \lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(B - \lambda I)\det P \\ &= \cancel{(\det P)^{-1}}\det(B - \lambda I)\cancel{\det P} = \det(B - \lambda I) = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

que é polinômio característico de B. Em particular, no exemplo anterior, temos que o polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{21}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{29}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{21}{2} - \lambda\right)\left(\frac{5}{2} - \lambda\right) - \frac{29}{4} = \lambda^2 - 13\lambda + 19$$

e o de B é

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(11 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 13\lambda + 19.$$

Portanto, $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, ou seja, A e B têm o mesmo polinômio característico.

7.2 Polinômio mínimo

Dado uma matriz quadrada A de ordem n, existem polinômios não nulos $p(x)$ para os quais $p(A) = \mathbf{0}$. Um exemplo de um polinômio desse é o polinômio característico de A que é um polinômio de grau n, conforme o Teorema de Cayley-Hamilton do capítulo 6.

Outro exemplo de polinômio $P(x)$ em que $P(A) = \mathbf{0}$ pode ser construído considerando as $n^2 + 1$ potências da matriz A: $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, $A^4 = A^3 \cdot A, \ldots, A^{n^2} = A^{n^2-1} \cdot A$. Obtemos assim um conjunto de $n^2 + 1$ elementos pertencentes ao espaço vetorial $M(n, n)$ cuja dimensão é n^2. Logo, esses $n^2 + 1$ vetores são linearmente dependentes. Isso significa que existem escalares $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ não todos nulos tais que $a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \cdots + a_{n^2} \cdot A^{n^2} = \mathbf{0} \Rightarrow P(A) = \mathbf{0}$, onde $P(x) = a_{n^2}x^{n^2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Definição 7.2. Dado uma matriz quadrada A, entre os polinômios $p(\lambda)$ tais que $p(A) = \mathbf{0}$, consideremos $m(\lambda)$ como o polinômio de menor grau cujo coeficiente do termo de maior grau seja igual a 1. Esse polinômio é denominado **polinômio mínimo*** de A.

Um teorema muito útil no cálculo do polinômio mínimo é o seguinte:

*Também conhecido como **polinômio minimal** de A.

Teorema 7.2.1. O polinômio mínimo de uma matriz quadrada A de ordem n é um divisor do polinômio característico e, quando esses polinômios são fatorados, ambos têm os mesmos fatores irredutíveis do 1^o grau da forma $(\lambda - \lambda_i)$.

Esse teorema também pode ser enunciado da seguinte forma: se

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

é o polinômio característico de A, com $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, entõ o polinômio mínimo de A é da forma

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

onde $0 < k_1 \leq n_1$, $0 < k_2 \leq n_2$, $\dots, 0 < k_r \leq n_r$. Os λ_i, $i = 1, 2, \dots, r$, são os autovalores de A que podem ser números reais ou complexos.

Nem sempre é fácil escrever o polinômio característico na forma fatorada. Se n for considerado grande, então essa fatoração pode se tornar muito difícil.

Exemplo 7.2. Quais as possibilidades para o polinômio mínimo de uma matriz 6×6 cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 8)^2(\lambda + 5)^4$?

Solução: Os fatores irredutíveis do 1^o grau de $p(\lambda)$ são $(\lambda - 8)$ e $(\lambda + 5)$. Logo, o polinômio mínimo é um produto de potências desses fatores $m(\lambda) = (\lambda - 8)^j(\lambda + 5)^k$, onde $1 \leq j \leq 2$ e $1 \leq k \leq 4$. E assim, chegamos à conclusão de que as alternativas possíveis para polinômio mínimo são:

- $m(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda + 5)$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)^2(\lambda + 5)$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda + 5)^2$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)^2(\lambda + 5)^2$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda + 5)^3$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)^2(\lambda + 5)^3$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda + 5)^4$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 8)^2(\lambda + 5)^4$

Exemplo 7.3. Encontre o polinômio mínimo de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -11 & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 17 \end{bmatrix}$.

Solução: O polinômio característico é

$$p(\lambda) \;=\; \det(A - \lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} 1-x & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4-x & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -11-x & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 17-x \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo esse determinante e simplificando, obtemos

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^4 - 11\lambda^3 + 42\lambda^2 - 68\lambda + 40.$$

Precisamos agora fatorar esse polinômio para, depois, calcular o polinômio mínimo. Os divisores do termo constante de $p(\lambda)$, 40, são os elementos do conjunto

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40\}.$$

Aplicando o p em cada um desses valores, obtemos no final que $p(2) = 0$ e $p(5) = 0$ e que 2 e 5 são as únicas raízes inteiras desse polinômio. Logo, $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 2)(\lambda - 5) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & \lambda^4 - 11\lambda^3 + 42\lambda^2 - 68\lambda + 40 & \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ \cline{3-3}
 & -\lambda^4 + 7\lambda^3 - 10\lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ \cline{2-2}
 & -4\lambda^3 + 32\lambda^2 - 68\lambda & \\
 & 4\lambda^3 - 28\lambda^2 + 40\lambda & \\ \cline{2-2}
 & 4\lambda^2 - 28\lambda + 40 & \\
 & -4\lambda^2 + 28\lambda - 40 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda^2 - 7\lambda + 10$, obtemos um quociente igual a $\lambda^2 - 4x + 4 = (\lambda - 2)^2$, ou seja, $\dfrac{p(\lambda)}{(\lambda-2)(\lambda-5)} = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 5).$$

Observando o polinômio característico assim obtido, temos que as alternativas para o polinômio mínimo de M são:

- $m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- ou $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$
- ou $m(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 5)$

Testamos agora cada uma dessas alternativas, iniciando com a de menor grau.

- Se $m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$, então
$$m(A) = (A - 2I)(A - 5I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -13 & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -16 & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 12 \end{bmatrix}$$
$= \begin{bmatrix} 3 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$. Um asterisco $*$ significa "qualquer valor". O primeiro elemento da matriz sendo igual a 3 já mostra que ela não é uma matriz nula, não há necessidade de se obter os outros elementos.

- Se $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$, então
$$m(A) = (A - 2I)^2(A - 5I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -13 & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 15 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} -4 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -16 & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 12 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & -24 & 24 \\ 0 & 0 & -36 & 36 \\ 0 & 0 & -45 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -9 & 8 \\ -1 & 2 & -16 & 12 \\ -1 & 2 & -16 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Portanto, o polinômio mínimo de M é $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$.

7.3 Diagonalização de uma transformação linear

Uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ definida por
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

pode ser representada por uma matriz diagonal

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

se, e somente se, existe uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ de V tal que $T(v_1) = k_1v_1$, $T(v_2) = k_2v_2$, $T(v_3) = k_3v_3$, $\dots, T(v_n) = k_nv_n$. Nesse caso, $v_1, v_2, \dots, v_n$ são autovetores de T associados aos autovalores $k_1, k_2, \dots, k_n$ e dizemos que T é **diagonalizável**. Se P for a matriz cujas colunas são os n autovetores, então $P^{-1}AP = [T]_\beta$ é uma matriz diagonal.

Exemplo 7.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (25x-13y,\ 42x-22y)$. Mostre que existe um base β de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T e determine $[T]_\beta$

Solução: A matriz de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é $A = \begin{bmatrix} 25 & -13 \\ 42 & -22 \end{bmatrix}$.
O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 25-\lambda & -13 \\ 42 & -22-\lambda \end{vmatrix} = (25-\lambda)(-22-\lambda)+546 = \lambda^2-3\lambda-4$. Resolvendo a equação $p(\lambda) = \lambda^2-3\lambda-4 = 0$, obtemos os autovalores de A: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.

Sendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ na equação $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$, substituindo λ por -1, obtemos: $\begin{bmatrix} 26 & -13 \\ 42 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 26x - 13y = 0 \\ 42x - 21y = 0 \end{cases}$ cuja solução é $y = 2x$, x variável livre. Escolhendo um valor não nulo qualquer para x, por exemplo $x = 1$, obtemos $y = 2$. Logo, $v_1 = (1,\ 2)$ é um autovetor de A associado ao autovalor -1.

Substituindo agora λ por 4 na equação $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$, obtemos $\begin{bmatrix} 21 & -13 \\ 42 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 21x - 13y = 0 \\ 42x - 26y = 0 \end{cases}$ cuja solução é $y = \frac{21x}{13}$, x livre. Escolhendo $x = 13$, obtemos $y = 21$, e daí, $v_2 = (13,\ 21)$ é autovetor de A associado ao autovalor 4.

Como v_1 não é múltiplo de v_2, eles são LI e, consequentemente, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. Para determinar a matriz de T com relação a essa base, calculamos o valor de T em cada vetor da base e escrevemos o resultado como combinação linear dos vetores dessa mesma base:

- $T(1,\ 2) = (-1,\ -2) = (-1) \cdot (1,\ 2) + 0 \cdot (13,\ 21)$.
- $T(13,\ 21) = (52,\ 84) = 0 \cdot (1,\ 2) + 4 \cdot (13,\ 21)$.

Obtivemos assim o seguinte resultado: $[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Observação 1: Note que $B = [T]_\beta$ é uma matriz diagonal e que os elementos da diagonal principal da matriz são os autovalores. É por isso que dizemos que T é diagonalizável.

Observação 2: Se considerarmos $P = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 21 \end{bmatrix}$ como sendo a matriz cujas colunas são os autovetores de T, temos $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ e que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & -13 \\ 42 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = B.$$

O teorema a seguir é muito importante na verificação da possibilidade de diagonalização de uma matriz ou operador linear.

Teorema 7.3.1. O polinômio mínimo de A é um produto de fatores do 1^o grau distintos

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r)$$

se, e somente se, A é diagonalizável.

Exemplo 7.5. Nos dois casos a seguir, determine A, a matriz de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$, calcule o polinômio mínimo de A e verifique se A é diagonizável. Se A for diagonalizável, determine uma base β do $\mathbb{R}^3$ na qual $[T]_\beta$ seja uma matriz diagonal e uma matriz $P \in M(3,3)$ tal que $P^{-1}AP = [T]_\beta$.

a) $T(x, y, z) = (5x - y,\ 5x + 3y - 2z,\ 8x)$

b) $T(x, y, z) = (x,\ -14x - 24y - 31z,\ 14x + 25y + 32z)$

Solução: a) A matriz de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & -2 \\ 8 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

que depois de desenvolvido, fornece a resposta

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16.$$

Os divisores de 16 são as possíveis raízes inteiras de $p(\lambda)$: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$. Substituindo diretamente λ por cada um desses valores em $p(\lambda)$, obtemos que $p(2) = 0$, $p(4) = 0$ e $p(x) \neq 0$ se $x \neq 2$ e $x \neq 4$, ou seja, somente 2 e 4 são raízes.

$$\begin{array}{rr|l} -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 & & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \cline{3-3} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda & & -\lambda + 2 \\ \cline{1-1} 2\lambda^2 - 12\lambda + 16 & & \\ -2\lambda^2 + 12\lambda - 16 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

Dividindo $p(\lambda)$ por $(\lambda-2)(\lambda-4) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$, obtemos $\dfrac{p(\lambda)}{(\lambda-2)(\lambda-4)} = -\lambda + 2 \Rightarrow p(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-4)$. Esse é o polinômio característico de A na sua forma fatorada e que é essencial para se determinar o polinômio mínimo.

Baseado na resposta encontrada para o polinômio característico fatorado, temos que o polinômio mínimo é um divisor desse polinômio e que tem os mesmos fatores do 1^o grau encontrados. Assim, o polinômio mínimo deve ser igual a $m(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)$ ou $m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$. Fazemos agora uma substituição de λ por A, começando pelo de menor grau.

Se $m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, então

$$m(A) = (A - 2I)(A - 4I) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Não é preciso calcular esses valores marcados com um $*$ porque pelo primeiro elemento calculado, já percebemos que a matriz não é nula.

Concluímos assim que o polinômio mínimo não é o $m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Como só há duas possibilidades para o polinômio mínimo de M, então ele só pode ser igual a $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$. Além disso, como tem o fator $(\lambda - 2)$ repetido (por causa do expoente 2), chegamos à conclusão de que a matriz M não é diagonalizável.

b) A matriz de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & -24 & -31 \\ 14 & 25 & 32 \end{bmatrix}$ e seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -14 & -24-\lambda & -31 \\ 14 & 25 & 32-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7.$$

Os divisores de 7 são $1, -1, 7, -7$. Aplicando o p nesses valores, obtemos $p(1) = 0$, $p(-1) = 32$, $p(7) = 0$ e $p(-7) = 896$. Logo, as raízes inteiras de $p(\lambda)$ são 1 e 7 e, consequentemente, $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 1)(\lambda - 7) = \lambda^2 - 8\lambda + 7$.

$$\begin{array}{rl|l} -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 & & \lambda^2 - 8\lambda + 7 \\ \cline{3-3} \lambda^3 - 8\lambda^2 + \ \ 7\lambda & & -\lambda \ +1 \\ \cline{1-1} \lambda^2 \ - 8\lambda + 7 & & \\ -\lambda^2 \ + 8\lambda - 7 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda^2 - 8\lambda + 7$ obtemos um quociente igual a $(1 - \lambda)$, ou seja, $\dfrac{p(\lambda)}{(\lambda - 1)(\lambda - 7)} = 1 - \lambda \Rightarrow p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2\lambda - 7)$. Observando essa forma fatorada do polinômio característico, temos que o polinômio mínimo de M só pode ser um dos seguintes: $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$ ou $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 7)$.

Vamos agora calcular $m(M)$, começando pelo de menor grau. Se $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$, então

$$m(M) = (M - I)(M - 7I) =$$
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & -24 & -31 \\ 14 & 25 & 32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & -24 & -31 \\ 14 & 25 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -14 & -25 & -31 \\ 14 & 25 & 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -14 & -31 & -31 \\ 14 & 25 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Portanto, o polinômio mínimo de M é $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$ e, como não tem fatores repetidos, temos que a matriz M é diagonalizável. Isso significa que existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Vamos agora determinar os autovetores de T. Para isso, devemos substituir cada autovalor encontrado na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$ e resolver cada sistema linear obtido a partir daí. Essa equação pode ser escrita na forma

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & -24 & -31 \\ 14 & 25 & 32 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -14 & -24-\lambda & -31 \\ 14 & 25 & 32-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Substituindo $\lambda = 1$, obtemos $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -14 & -25 & -31 \\ 14 & 25 & 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 14x + 25y + 31z = 0 \Rightarrow z = \frac{-14x-25y}{31}$. Logo, os autovetores associados ao autovalor 1 são $(x, y, \frac{-14x-25y}{31}) = (x, 0, -\frac{14}{31}x) + (0, y, -\frac{25}{31}y) = x(1, 0, -\frac{14}{31}) + y(0, 1, -\frac{25}{31})$, para quaisquer valores de x e y.

- Substituindo $\lambda = 7$, obtemos $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -14 & -31 & -31 \\ 14 & 25 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{cases} -6x = 0 \\ -14x - 31y - 31z = 0 \\ 14x + 25y + 25z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = -z$. Logo, os autovetores asso-

ciados ao autovalor 7 são da forma $(0, -z, z) = z(0, -1, 1)$, para qualquer valor de z.

Escolhendo, por exemplo, $x = 31$, $y = 0$, obtemos o autovetor $v_1 = (31, 0, -14)$; escolhendo $x = 0$, $y = 31$, obtemos o autovetor $v_2 = (0, 31, -25)$ e escolhendo $z = -1$, obtemos o autovetor $v_3 = (0, 1, -1)$. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ são linearmente independentes, eles formam uma base do $\mathbb{R}^3$. E assim, a matriz P pode ser definida como sendo aquela cujas colunas são esses vetores da base:

$$P = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 1 \\ -14 & -25 & -1 \end{bmatrix}.$$

Com essa matriz P, temos que

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Observação: É claro que essa matriz P não é única. Para cada escolha de valores para x, y, z, podemos obter uma matriz P diferente. Mas, não importa qual seja a matriz P escolhida, se as colunas dela forem autovetores LI, a matriz $P^{-1}MP$ será a mesma matriz diagonal citada anteriormente. Além disso, a diagonal dessa matriz será sempre formada pelos autovalores de T.

7.4 Exercícios Resolvidos

R1) Verifique se existe alguma matriz diagonal que seja semelhante à matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$

Solução: Se calcularmos o polinômio mínimo dessa matriz, então poderemos dar uma resposta a esse problema.

O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(12-\lambda) + 45$$

$$+ 45 - 18 - 60 + 90 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54.$$

O termo constante desse polinômio pode ser fatorado da seguinte forma: $54 = 2 \cdot 3^3$. Daí, obtemos o conjunto com todos os divisores de 54 que é igual a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 9, \pm 6, \pm 18, \pm 27, \pm 54\}$. Substituindo diretamente em $p(\lambda)$, temos que somente 3 e 6 são raízes. Isso significa que $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 3)(\lambda - 6) = \lambda^2 - 9\lambda + 18$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-\lambda^3 & +12\lambda^2 & -45\lambda & +54 & \lambda^2 - 9\lambda + 18 \\ \cline{5-5}
\lambda^3 & -9\lambda^2 & +18\lambda & & -\lambda + 3 \\ \cline{1-4}
 & 3\lambda^2 & -27\lambda & +54 & \\
 & -3\lambda^2 & +27\lambda & -54 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda^2 - 9\lambda + 18$, obtemos um quociente igual a $(-\lambda + 3)$, ou seja $\dfrac{p(\lambda)}{(\lambda - 3)(\lambda - 6)} = -\lambda + 3 \Rightarrow p(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)^2$ que é a forma fatorada de $p(\lambda)$.

A partir de $p(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)^2$, temos duas possibilidades para o polinômio mínimo:
$m(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 3)$ ou $m(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 3)^2$. Substituindo λ por A em $(\lambda - 6)(\lambda - 3)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
m(A) &= (A - 6I)(A - 3I) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto, o polinômio mínimo de A é $m(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 3)$ e não apresenta fatores repetidos na sua fatoração. Isso implica no fato de que A é semelhante a uma matriz diagonal.

Observação: A matriz diagonal que é semelhante a A é $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ que é a matriz cuja diagonal principal são os autovalores de A.

R2) Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, t) = (y, 3x + 2z, 2y + 3t, z)$.

Determine uma base β do $\mathbb{R}^4$ de tal forma que $[T]_\beta$ seja uma matriz diagonal.

Solução: Esse tipo de problema é resolvido apresentando-se uma base do $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de T. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz de T com relação à base canônica. Por isso, vamos determinar os autovalores de A. O cálculo dos autovalores independe da base utilizada.

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$.

Desenvolvendo e simplificando esse determinante, obtemos $p(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9$.

Os autovalores de A são as raízes da equação $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = 0$. Essa é uma equação biquadrada na variável λ. Para resolvê-la, basta fazer uma mudança de variável $\lambda^2 = x$. Com essa mudança, a equação se torna $x^2 - 10x + 9 = 0$ que é uma equação do segundo grau cujas raízes são $x = 1$ ou $x = 9$. Portanto, $\lambda^2 = 1$ ou $\lambda^2 = 9$ e isso implica $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = -3$. Esses são os 4 autovalores de A. Com isso, já podemos afirmar que a matriz é diagonalizável porque o polinômio característico é igual ao polinômio mínimo, sem fatores repetidos.

R3) Mostre que $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e determine $P \in M(4,4)$ invertível tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

Solução: Esse tipo de problema é completamente resolvido se encontrarmos os autovalores e autovetores da matriz dada.

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, I a matriz identidade 4×4 e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$. Então, a equação $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$ pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-\lambda^3 + 15\lambda^2 - 63\lambda + 81) - 2(2\lambda^2 - 12\lambda + 18) + 2(-2\lambda^2 + 12\lambda - 18)$$
$$- 2(2\lambda^2 - 12\lambda + 18) \Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^4 - 20\lambda^3 + 126\lambda^2 - 324\lambda + 297.$$

As possíveis raízes inteiras de um polinômio de coeficientes inteiros são os divisores do termo constante. Fatorando o termo constante de $p(\lambda)$, obtemos $297 = 11 \cdot 3^3$ e daí temos que as possíveis raízes inteiras desse polinômio são $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27, \pm 11, \pm 33, \pm 99, \pm 297$. Substituindo cada um desses valores em $p(\lambda)$, obtemos que as raízes são 3 e 11. Esses são autovalores de A.

Como 3 e 11 são raízes de $p(\lambda)$, temos que $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 3)(\lambda - 11) = \lambda^2 - 14\lambda + 33$. Efetuando a divisão de $p(\lambda)$ por $\lambda^2 - 14\lambda + 33$ obtemos um quociente igual a $\lambda^2 - 6\lambda + 9$. As raízes da equação $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 3$. E assim, chegamos à conclusão de que as raízes de $p(\lambda)$ são $11,\ 3,\ 3,\ 3$ (nesse caso, o 3 é chamado raiz tripla) e que $p(\lambda)$ pode ser escrito na forma

$$p(\lambda) = (\lambda - 11)(\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 3) = (\lambda - 11)(\lambda - 3)^3.$$

Substituindo $\lambda = 11$ na equação $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para resolver esse sistema, fazemos o escalonamento da sua matriz completa:

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e essa última matriz corresponde ao sistema $\begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ \qquad\qquad y - t = 0 \\ \qquad\qquad z - t = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = t$, $y = t$, $z = t$, com t variável livre. Logo, (t, t, t, t) é autovetor de A para todo $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1$, obtemos o autovetor $v_1 = (1, 1, 1, 1)$.

Substituindo $\lambda = 3$ em $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale à equação $2x+2y+2z+2t = 0 \Rightarrow x+y+z+t = 0 \Rightarrow t = -x-y-z$, com x, y, z variáveis livres. Logo, os autovetores associados ao autovalor 3 são

$$\begin{aligned} (x, y, z, -x - y - z) &= (x, 0, 0, -x) + (0, y, 0, -y) + (0, 0, z, -z) \\ &= x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

Obtemos assim, mais três autovetores de A: $v_2 = (1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $v_3 = (0,\ 1,\ 0,\ -1)$ e $v_4 = (0,\ 0,\ 1,\ -1)$.

Tendo em vista que $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ são linearmente independentes, eles formam uma base de autovetores para o $\mathbb{R}^4$ e, por isso, A é diagonalizável. Definindo P como sendo a matriz cujas colunas são esses autovetores encontrados, ou seja, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, obtemos

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observação 1: A matriz inversa de P pode ser calculada como sendo $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ e o polinômio mínimo de A é $m(\lambda) = (\lambda - 11)(\lambda - 3)$.

Observação 2: Esse problema pode ser generalizado para matrizes A de ordem $n \times n$:
$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$ é diagonizável e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}$ é tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a+(n-1)b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{bmatrix}$. O polinômio caractístico de A é $p(\lambda) = (\lambda - (a+(n-1)b))(\lambda - a + b)^{n-1}$.

R4) Dado um inteiro positivo m, calcule A^m sabendo que $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Solução: Esta questão não cita autovalores, nem autovetores, nem diagonalização. Mas vamos tentar a diagonização como forma de simplificar o problema, uma vez que é muito fácil calcular potências de uma matriz diagonal: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$. Suas raízes são 1 e -1 que são os autovalores de A. Neste caso, o polinômio mínimo também é igual a $m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$ e isso indica que a matriz é diagonalizável.

Vamos agora determinar os autovetores de A. Para isso, substituímos $\lambda = 1$ e, depois, $\lambda = -1$ na equação $(A - \lambda I)X = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Substituindo $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x.$$

  Logo, (x, x) é autovetor para todo x, em particular $v_1 = (1, 1)$ é autovetor.

- Substituindo $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x.$$

  Logo, $(x, 3x)$ é autovetor para todo x, em particular $v_2 = (1, 3)$ é autovetor.

Considerando agora $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, temos $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M$ e, a partir daí, podemos calcular as potências:

$$M^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^m = (P^{-1}AP)^m = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{m \text{ vezes}}$$

$$= \underbrace{P^{-1}A\overbrace{(PP^{-1})}^{=I}A\overbrace{(PP^{-1}}^{=I}A\cdots\overbrace{(PP^{-1})}^{=I}AP}_{m \text{ vezes}} = P^{-1}\underbrace{A\cdot A\cdot A\ldots A}_{m \text{ vezes}}P = P^{-1}A^mP.$$

Portanto,

$$M^m = P^{-1}A^mP \Rightarrow PM^mP^{-1} = PP^{-1}A^mPP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^m = PM^mP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-(-1)^m}{2} & \frac{(-1)^m-1}{2} \\ \frac{3(1-(-1)^m)}{2} & \frac{3\cdot(-1)^m-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se m for um número par, como por exemplo $m = 1000$, então $A^{1000} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e se m for ímpar, por exemplo $m = 1001$, então $A^{1001} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = A$.

7.5 Exercícios Propostos

1) Verifique se a matriz A é diagonalizável. Se for, determine uma matriz P que diagonaliza A e calcule $P^{-1}AP$ em cada um dos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Resp.: a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) A matriz A não é diagonalizável

e) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f) A matriz A não é diagonalizável

2) Seja $A \in M(7,7)$ tal que $2A^2 - 14A + 24I = 0$. Mostre que A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. Resp.: $2A^2 - 14A + 24I = 0 \Rightarrow A^2 - 7A + 12I = 0$. Daí, se $p(x) = x^2 - 7x + 12$ temos que $p(A) = 0$. Como $p(x) = (x-3)(x-4)$, concluímos que o polinômio mínimo é um produto de fatores do primeiro grau em x e que A é diagonalizável.

3) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Mostre que $(A-3I)^{100}(A-2I)^{100} = 0$.

Resp.: O polinômio característico de A é $p(x) = (x-3)^2(x-2)$ e o polinômio mínimo é $m(x) = (x-3)(x-2)$. Daí, $m(A) = (A-3I)(A-2I) = 0$
$\Rightarrow (A-3I)^{100}(A-2I)^{100} = 0$.

4) Calcule os polinômios mínimo e característico, autovalores e autovetores de

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (4x + 8y - 2z,\ -3x - 6y + z,\ -2x - 8y + 4z)$.
Resp.: $p(x) = m(x) = (x - 2)^2(x + 2)$, $v = (1, -1, -1)$ é um autovetor associado ao autovalor -2 e $w = (1, -\frac{1}{2}, -1)$ é outro autovetor associado ao autovalor 2.

5) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Mostre que o polinômio característico de A é $p(x) = x^2 - (a + d)x + \det A$, e que se $\det A < 0$, então A é diagonalizável.

6) Calcule o determinante de uma matriz diagonalizável A sabendo que seu polinômio característico é $p(x) = (x + 3)(x - 2)^2(x + 4)^2$.

Resp.: A matriz A é semelhante a $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Logo, $\det A = -3 \cdot 2^2 \cdot (-4)^2 = -192$.

7) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(x, y, z) = (4x + y - z, 5y - 2z, 2z)$. Mostre que T é diagonizável e determine uma base de autovetores e a matriz diagonal associada.
Resp.: Os autovetores são $(1, 4, 6)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ associados aos autovales 2, 4, 5, respectivamente. A matriz diagonal é $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

8) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear cujo polinômio mínimo é $m(x) = x^2 + 1$. Mostre que $\dim V$ é par e que $T^{-1} = -T$.
Resp.: O grau do polinômio caracterísco é $2n$ para algum n e $m(T) = 0$.

9) O polinômio característico de uma matriz A de ordem 6×6 é $p(x) = (x - 3)^2(x + 2)^3(x - 5)$. Quais é um possível polinômio mínimo para essa matriz?
Resp.: Um possível polinômio mínimo é:

- $m(x) = (x - 3)^2(x + 2)^3(x - 5)$

- ou $m(x) = (x-3)(x+2)^3(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)^2(x+2)^2(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)(x+2)^2(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)^2(x+2)(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)(x+2)(x-5)$

10) Dê exemplo de uma matriz M de ordem 4×4 que não seja uma matriz diagonal, mas seja diagonalizável e tenha polinômio característico $p(x) = (x-2)^3(x+11)$.
Resp.: Há uma infinidade de respostas para esse problema. Como as raízes de $p(x)$ são $2, 2, 2, -11$, definimos a matriz diagonal $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$, escolhemos qualquer matriz P de ordem 4×4 invertível, por exemplo $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, e concluímos definindo $M = P^{-1}AP \Longrightarrow M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 13 & 26 & 41 & 52 \\ -13 & -26 & -39 & -50 \end{bmatrix}$. Para cada P escolhida, obtemos uma resposta diferente.

Capítulo 8

Espaços com Produto Interno

Neste capítulo, apresentamos o conceito de produto interno de vetores. Como consequência dessa definição, podemos calcular o comprimento de um vetor, distância e ângulo entre dois vetores. Esse conceito generaliza o que é estudado nos cursos de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.

8.1 Produto interno e norma

Definição 8.1. Seja V um espaço vetorial com conjunto de escalares $\mathbb{R}$. Uma função $\langle\ ,\ \rangle\ :\ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par de vetores (u, v) a um número real $\langle u,\ v\rangle$ é denominada **produto interno** em V se satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer vetores u, v, w e qualquer escalar k:

[I_1] $\langle u + v,\ w\rangle = \langle u,\ w\rangle + \langle v,\ w\rangle$;
[I_2] $\langle kv,\ w\rangle = k\langle v,\ w\rangle$;
[I_3] $\langle u,\ v\rangle = \langle v,\ u\rangle$;*
[I_4] $\langle v,\ v\rangle \geq 0$ e $\langle v,\ v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$.

Um espaço vetorial V no qual está definido um produto interno é chamado **espaço com produto interno**.

Definição 8.2. A **norma**† de um vetor v é definida como sendo igual a $\sqrt{\langle v,\ v\rangle}$ e denotada por $\|v\|$:

$$\|v\| \ = \ \sqrt{\langle v,\ v\rangle}.$$

A **distância** entre os vetores u e v é definida como sendo igual a $\|u - v\|$.

*Se o conjunto dos escalares for o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, então a propriedade [I_3] deve ser substituída por $\langle u,\ v\rangle = \overline{\langle v,\ u\rangle}$

†Também chamado **comprimento** ou **módulo** do vetor.

8.2 Exemplos de espaços com produto interno

Exemplo 8.1. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Definimos

$$\langle (a_1, a_2, a_3),\ (b_1, b_2, b_3)\rangle \ = \ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

para quaisquer (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) pertencentes a V. Vamos mostrar que a função assim definida é um produto interno em V.

Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores genéricos de V e k um escalar qualquer. Então:

$[I_1]$ $\langle u + v,\ w\rangle = \langle (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),\ (w_1, w_2, w_3)\rangle = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + (u_3 + v_3)w_3 = u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + u_3w_3 + v_3w_3 = (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) = \langle u,\ w\rangle + \langle v,\ w\rangle$;

$[I_2]$ $\langle kv,\ w\rangle = \langle (kv_1, kv_2, kv_3),\ (w_1, w_2, w_3)\rangle = (kv_1)w_1 + (kv_2)w_2 + (kv_3)w_3 = k(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) = k\langle v,\ w\rangle$;

$[I_3]$ $\langle u,\ v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \langle v,\ u\rangle$;

$[I_4]$ $\langle v,\ v\rangle = v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \geq 0$ e $\langle v,\ v\rangle = 0 \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$.

Os itens $[I_1]$, $[I_2]$, $[I_3]$ e $[I_4]$ anteriores demonstram que a função é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Com esse produto interno, temos $\|v\| = \sqrt{\langle v,\ v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Observação 1: O produto interno definido nesse exemplo é conhecido como **produto interno usual** do $\mathbb{R}^3$ e $\langle u,\ v\rangle$ também pode ser denotado na forma $u \cdot v$

Observação 2: Em geral, podemos definir o seguinte produto interno usual em $\mathbb{R}^n$:

$$\langle (a_1, a_2, \dots, a_n),\ (b_1, b_2, \dots, b_n)\rangle \ = \ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

para quaisquer $(a_1, a_2, \dots, a_n),\ (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 8.2. Se acrescentarmos um coeficiente positivo em qualquer termo a_ib_i, então ainda teremos um outro produto interno em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo,

$$\langle (a_1, a_2, a_3),\ (b_1, b_2, b_3)\rangle \ = \ a_1b_1 + 5a_2b_2 + 11a_3b_3$$

e

$$\langle (a_1, a_2, a_3),\ (b_1, b_2, b_3)\rangle \ = \ 2a_1b_1 + 4a_2b_2 + 7a_3b_3$$

são produtos internos em $\mathbb{R}^3$. É claro que esses produtos não são considerados usuais.

Exemplo 8.3. Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ e a função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f((a_1, a_2, a_3),\, (b_1, b_2, b_3)) \;=\; a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3.$$

Sendo $v = (1, 2, 1) \in V$. Como $f(v, v) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -2 < 0$, temos que f não é um produto interno em V porque isso contraria o item $[I_4]$ da definição.

Observação: Note que f satisfaz os itens $[I_1]$, $[I_2]$ e $[I_3]$ da definição de produto interno.

Exemplo 8.4. Dado uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, chama-se **traço** de A a soma dos elementos da sua diagonal principal e denota-se por $\mathrm{tr}(A)$:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Seja $V = M(m, n)$ o espaço vetorial das matrizes $m \times n$. Se $A, B \in V$, definimos o produto interno entre as matrizes A e B como sendo

$$\langle A,\ B\rangle \;=\; \mathrm{tr}(B^tA).$$

No caso particular em que $V = M(2, 2)$, para quaisquer matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ em V, temos que

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle \;=\; \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$$
$$= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} ae + cg & be + dg \\ af + ch & bf + dh \end{bmatrix} \right) = ae + bf + cg + dh$$

define um produto interno em $M(2, 2)$. Por exemplo,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + 4 \cdot (-1) = -11.$$

Exemplo 8.5. Seja $V = C([a,\, b])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[a,\, b]$:

$$C([a,\, b]) \;=\; \{f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua } \}$$

Um produto interno em V pode ser definido da seguinte forma:

$$\langle f,\ g\rangle \;=\; \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Com essa definição, podemos verificar que são verdadeiros as seguintes propriedades para quaisquer $f, g, h \in V$ e $k \in \mathbb{R}$:

$[I_1]$ $\langle f+g,\ h\rangle = \displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t)h(t)+g(t)h(t))\,\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t =$
$\langle f,\ h\rangle + \langle g,\ h\rangle$;

$[I_2]$ $\langle kf,\ g\rangle = \displaystyle\int_a^b (kf(t))g(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = k\langle f,\ g\rangle$;

$[I_3]$ $\langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \langle g,\ f\rangle$;

$[I_4]$ $\langle f,\ f\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ e $\langle f,\ f\rangle = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow f(t) =$
$0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Por exemplo,

$$\langle 2t^2,\ 5t^6\rangle = \int_a^b (2t^2)\cdot(5t^6)\,\mathrm{d}t = \int_a^b 10t^8\,\mathrm{d}t = \left.\frac{10t^9}{9}\right|_a^b = \frac{10}{9}(b^9 - a^9).$$

8.3 Propriedades do produto interno

São consequências da definição, as seguintes propriedades, válidas para quaisquer $t, u, v, w \in V$ e $k \in \mathbb{R}$.

- $\langle \mathbf{0},\ v\rangle = \langle v,\ \mathbf{0}\rangle = 0$;
- $\langle v,\ kw\rangle = k\langle v,\ w\rangle$;
- $\langle u,\ v+w\rangle = \langle u,\ v\rangle + \langle u,\ w\rangle$;
- $\langle u-v,\ w\rangle = \langle u,\ w\rangle - \langle v,\ w\rangle$;
- $\langle t+u,\ v+w\rangle = \langle t,\ v\rangle + \langle t,\ w\rangle + \langle u,\ v\rangle + \langle u,\ w\rangle$;
- $\langle v,\ v\rangle = \|v\|^2$.

8.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Nesta seção, enunciamos e demonstramos uma fórmula muito importante conhecida como Desigualdade de Cauchy[‡]-Schwarz[§].

‡Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês
§Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), matemático polonês

Teorema 8.4.1. Se V é um espaço com produto interno, então

$$|\langle u,\ v\rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$

para quaisquer vetores $u, v \in V$.

Demonstração: Se $v = \mathbf{0}$, então a desigualdade se reduz a $0 \leq 0$ que é verdadeiro. Suponhamos $v \neq \mathbf{0}$ e seja t um escalar qualquer. Vamos desenvolver $\|u - t\langle u,\ v\rangle v\|^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - t\langle u,\ v\rangle v\|^2 = \langle u - t\langle u,\ v\rangle v,\ u - t\langle u,\ v\rangle v\rangle \\ = \langle u,\ u\rangle - 2t\langle u,\ v\rangle^2 + t^2\langle u,\ v\rangle^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $t = \frac{1}{\|v\|^2}$ nessa desigualdade, obtemos:

$$\|u\|^2 - \frac{2\langle u,\ v\rangle^2}{\|v\|^2} + \langle u,\ v\rangle^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \frac{1}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{\langle u,\ v\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

que implica $|\langle u,\ v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \Rightarrow |\langle u,\ v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, como queríamos demonstrar.

8.5 Ângulo entre vetores

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\frac{|\langle u,\ v\rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1 \ \Rightarrow\ -1 \leq \frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

Como essa fração é um valor no intervalo $[-1,\ 1]$, ela coincide com o cosseno de algum ângulo. Sendo assim, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos\theta \ = \ \frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

o valor de θ que satisfaz essa igualdade é denominado **ângulo entre os vetores** não nulos u e v.

A igualdade anterior também pode ser escrita na forma

$$\langle u,\ v\rangle \ = \ \|u\|\|v\|\cos\theta.$$

Exemplo 8.6. No $\mathbb{R}^4$ com produto interno usual

$$\langle (a_1, a_2, a_3, a_4),\ (b_1, b_2, b_3, b_4)\rangle \ = \ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4,$$

determine o valor do ângulo entre os vetores $u = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ e $v = (-3,\ 1,\ 0,\ 5)$.

Solução: Se $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, então

$$\|w\| \ = \ \sqrt{\langle w,\ w\rangle} \ = \ \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}.$$

Logo, $\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$ e $\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{35}$.

O produto interno de u e v é $\langle u,\ v\rangle = 1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4\cdot 5 = 19$. Daí, concluímos que $\cos\theta = \dfrac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{19}{\sqrt{30}\sqrt{35}} = \dfrac{19}{\sqrt{1050}} = \dfrac{19\sqrt{1050}}{1050} = \dfrac{19\sqrt{42}}{210}$
$\Rightarrow \theta = \arccos \dfrac{19\sqrt{42}}{210}$.

Observação: O ângulo θ corresponde aproximadamente a $0,944$ radianos ou a $54,1$ graus, ou seja, $54°6'5''$.

8.6 Vetores unitários e vetores ortogonais

Definição 8.3. Um vetor v é chamado **unitário** se $\|v\| = 1$. Nesse caso, dizemos também que o vetor está **normalizado**.

A partir de qualquer vetor não nulo w, podemos obter um vetor unitário que é múltiplo dele. Para isso, basta dividir o vetor pela sua norma para obter um vetor unitário: $v = \dfrac{w}{\|w\|}$.

Exemplo 8.7. Considerando $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e $w = (3, 1, -5)$. A norma de w é $\|w\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$; logo, w não é unitário. No entanto, se dividirmos w pela sua norma, obtemos um vetor v unitário:

$$v = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3, 1, -5) = (\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{5}{\sqrt{35}}).$$

Definição 8.4. Dizemos que os vetores u e v são **ortogonais**[¶] se $\langle u,\ v\rangle = 0$.

Observação: O vetor nulo $\mathbf{0}$ é ortogonal a qualquer outro vetor v porque: $\langle \mathbf{0},\ v\rangle = \langle 0v,\ v\rangle = 0\langle v,\ v\rangle = 0$.

[¶] Nesse caso, dizemos também que u é ortogonal a v ou que v é ortogonal a u.

Exemplo 8.8. Seja $V = \mathbb{R}^5$ com produto interno usual

$$\langle (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5),\ (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \rangle \ = \ u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 + u_5v_5.$$

Os vetores $a = (2, 1, 0, -5, -1)$ e $b = (-1, 3, 7, 1, -4)$ são ortogonais porque

$$\langle a,\ b \rangle = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) = -2 + 3 + 0 - 5 + 4 = 0.$$

Exemplo 8.9. No espaço $C([-1,\ 1])$, considere os elementos $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$ com produto interno definido por $\langle u,\ v \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$. Temos que

$$\langle f,\ g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Portanto, f e g são ortogonais.

8.7 Complemento ortogonal

Definição 8.5. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $W \subset V$. O *complemento ortogonal* de W, denotado por $W^{\perp}$, é o conjunto de vetores de V que são ortogonais a todo $w \in W$:

$$W^{\perp} \ = \ \{v \in V \mid \langle v,\ w \rangle = 0,\ \forall w \in W\}$$

Exemplo 8.10. Seja $W = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, ou seja, W é o eixo Oz do $\mathbb{R}^3$. Com o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, temos que um vetor da forma $(x, y, 0)$ é ortogonal a qualquer vetor $(0, 0, z)$ de W, porque $\langle (x, y, 0),\ (0, 0, z) \rangle = x \cdot 0 + y \cdot 0 + 0 \cdot z = 0$. Portanto,

$$W^{\perp} \ = \ \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $W^{\perp}$ é o plano xOy no $\mathbb{R}^3$.

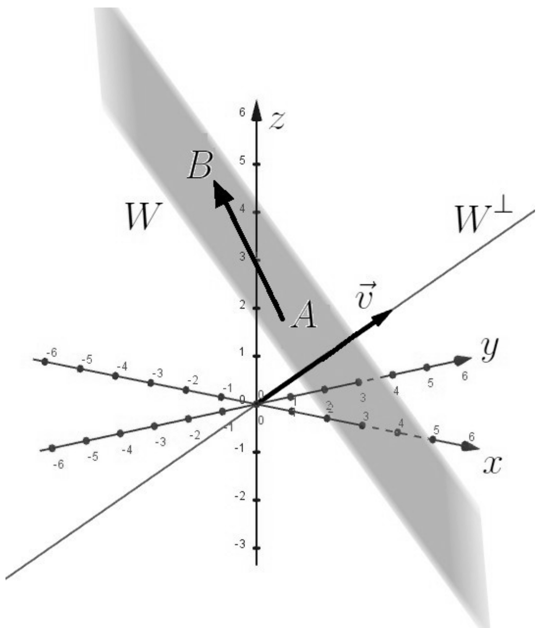
Observação: Em geral, se W for uma reta qualquer em $\mathbb{R}^3$, então $W^{\perp}$ é um plano que passa pela origem e que é ortogonal a essa reta.

Exemplo 8.11. Se $W = \{(x, y, 3 - x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ = plano cuja equação cartesiana é $x + y + z = 3$, então o complemento ortogonal de W é a reta cujo vetor diretor é $\vec{v} = (1, 1, 1)$, ou seja,

$$W^{\perp} \ = \ \{t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \ = \ \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Note que $\vec{v}$ é um vetor ortogonal ao plano e, em geral, qualquer vetor $\vec{v} = (t,t,t)$ de $W^\perp$ é ortogonal a qualquer elemento $\overrightarrow{AB} = B - A$ de W porque

$$\begin{aligned}\langle (t,t,t),\ & (x_1,y_1,3-x_1-y_1)-(x_2,y_2,3-x_2-y_2)\rangle \\ &= \langle (t,t,t),\ (x_1-x_2, y_1-y_2, -x_1-y_1+x_2+y_2\rangle \\ &= t(x_1-x_2)+t(y_1-y_2)+t(-x_1-y_1+x_2+y_2) = 0.\end{aligned}$$



Toda vez que um produto interno não é mencionado, utilizamos o produto interno usual do espaço em questão. No caso desse exemplo, utilizamos que

$$\langle (a_1,b_1,c_1),\ (a_2,b_2,c_2)\rangle \ = \ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2.$$

Observação: Em geral, se W for um plano qualquer em $\mathbb{R}^3$, então $W^\perp$ é uma reta que passa pela origem e que é ortogonal a esse plano.

Teorema 8.7.1. Se V é um espaço vetorial com produto interno e $W \subset V$, então $W^\perp$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: É claro que $\mathbf{0} \in W^\perp$ porque $\mathbf{0}$ é ortogonal a todo elemento de W. Assim, $W^\perp \neq \emptyset$. Se $u, v \in W^\perp$, $w \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, então $\langle au+v,\ w\rangle = a\langle u,\ w\rangle + \langle v,\ w\rangle = a\cdot 0+0 = 0$. Portanto, $au+v \in W^\perp \Rightarrow W^\perp$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 8.12. Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado por $v_1 = (1,2,-3,4)$ e $v_2 = (3,5,-1,8)$. Usando o produto interno usual do $\mathbb{R}^4$, encontre uma base para $W^\perp$.

Solução: Procuramos encontrar todos os vetores $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\begin{cases} \langle w,\ v_1\rangle = 0 \\ \langle w,\ v_2\rangle = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3x + 5y - z + 8t = 0 \end{cases}.$$

Devemos resolver esse sistema linear homogêneo. Para isso, escalonamos sua matriz completa:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada equivale ao sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 0 \\ \qquad\ y - 8z + 4t = 0 \end{cases}$, cuja solução é: $y = 8z - 4t$, $x = -2y + 3z - 4t = -2(8z - 4t) + 3z - 4t = -13z + 4t$, com z e t variáveis livres. Escolhendo $z = 0$ e $t = 1$, obtemos $w_1 = (4, -4, 0, 1) \in W^\perp$ e escolhendo $z = 1$, $t = 0$, obtemos $w_2 = (-13, 8, 1, 0) \in W^\perp$.

Portanto, a base de $W^\perp$ procurada é $\{(4,\ -4,\ 0,\ 1),\ (-13,\ 8,\ 1,\ 0)\}$.

Observação: Conferindo se a resposta encontrada está correta:

- $\langle v_1,\ w_1\rangle = \langle (1, 2, -3, 4),\ (4, -4, 0, 1)\rangle\ = 4 - 8 - 0 + 4 =\ 0$
- $\langle v_2,\ w_1\rangle = \langle (3, 5, -1, 8),\ (4, -4, 0, 1)\rangle\ = 12 - 20 - 0 + 8 =\ 0$
- $\langle v_1,\ w_2\rangle = \langle (1, 2, -3, 4),\ (-13, 8, 1, 0)\}\rangle\ = -13 + 16 - 3 + 0 =\ 0$
- $\langle v_2,\ w_2\rangle = \langle (3, 5, -1, 8),\ (-13, 8, 1, 0)\}\rangle\ = -39 + 40 - 1 + 0 =\ 0$

Efetuamos os produtos internos dos elementos da base de W com todos os da base de $W^\perp$ e todos os resultados deram iguais a zero. Portanto, o resultado encontrado está correto.

8.8 Conjuntos ortogonais e ortonormais

Definição 8.6. Dizemos que um conjunto de vetores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de um espaço com produto interno é **ortogonal** se seus elementos são dois a dois ortogonais, ou seja, $\langle u_i,\ u_j\rangle = 0$, se $i \neq j$. Em particular, dizemos que

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto **ortonormal** se ele é ortogonal e cada vetor u_i é unitário, ou seja

$$\langle u_i,\ u_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Um conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sempre pode ser obtido a partir de um conjunto ortogonal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, bastando dividir cada vetor pela sua norma: $u_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo 8.13. Consideremos $\beta = \{i = (1,0,0),\ j = (0,1,0),\ k = (0,0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual. Então, $\langle i,\ i\rangle = \langle j,\ j\rangle = \langle k,\ k\rangle = 1$ e $\langle i,\ j\rangle = \langle j,\ k\rangle = \langle k,\ i\rangle = 0$ mostra que β é uma base ortonormal.

Exemplo 8.14. Com o produto interno usual, o conjunto

$$S = \{v_1 = (3,\ 0,\ 6,\ 0),\ v_2 = (-6,\ 1,\ 3,,5),\ v_3 = (14,\ 30,\ -7,\ 15)\}$$

é um conjunto ortogonal de vetores do $\mathbb{R}^4$ porque $\langle v_1,\ v_2\rangle = \langle v_1,\ v_3\rangle = \langle v_2,\ v_3\rangle = 0$. As normas desses vetores são $\|v_1\| = 3\sqrt{5}$, $\|v_2\| = \sqrt{71}$ e $\|v_3\| = 5\sqrt{1370}$. Logo, se dividirmos cada elemento de S pela sua norma, obtemos um conjunto ortonormal de vetores do $\mathbb{R}^4$:

$$T = \left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ u_2 = \left(-\frac{6}{\sqrt{71}}, \frac{1}{\sqrt{71}}, \frac{3}{\sqrt{71}}, \frac{5}{\sqrt{71}}\right),\right.$$
$$\left. u_3 = \left(\frac{14}{\sqrt{1370}}, \frac{30}{\sqrt{1370}}, -\frac{7}{\sqrt{1370}}, \frac{15}{\sqrt{1370}}\right)\right\}.$$

Teorema 8.8.1. Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos de um espaço V com produto interno. Então, B é um conjunto de vetores linearmente independentes. Além disso, se $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, então $a_i = \dfrac{\langle w,\ v_i\rangle}{\langle v_i,\ v_i\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ escalares tais que $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \mathbf{0}$. Fazendo o produto interno dos dois lados por v_i, obtemos

$$\begin{aligned}
&\langle x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n,\ v_i\rangle = \langle \mathbf{0},\ v_i\rangle \\
&\qquad \Rightarrow x_1\langle v_1,\ v_i\rangle + x_2\langle v_2,\ v_i\rangle + \cdots + x_i\langle v_i,\ v_i\rangle + \cdots + x_n\langle v_n,\ v_i\rangle = 0 \\
&\qquad\qquad \Rightarrow 0 + 0 + \cdots + x_i\langle v_i,\ v_i\rangle + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow x_i = 0,
\end{aligned}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo, B é um conjunto de vetores LI.

Se $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, então

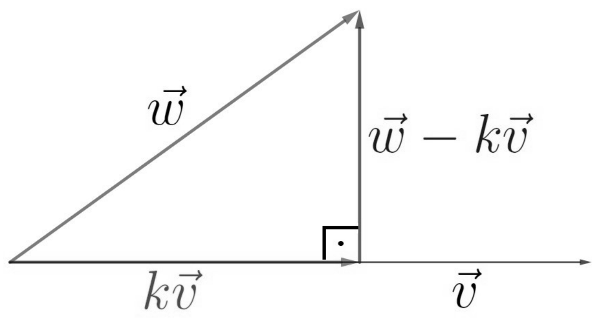
$$\begin{aligned}
&\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n,\ v_i\rangle = \langle w,\ v_i\rangle \\
&\qquad \Rightarrow a_1\langle v_1,\ v_i\rangle + a_2\langle v_2,\ v_i\rangle + \cdots + a_i\langle v_i,\ v_i\rangle + \cdots + a_n\langle v_n,\ v_i\rangle \\
&= \langle w,\ v_i\rangle \Rightarrow 0 + 0 + \cdots + a_i\langle v_i,\ v_i\rangle + \cdots + 0 = \langle w,\ v_i\rangle \Rightarrow a_i = \frac{\langle w,\ v_i\rangle}{\langle v_i,\ v_i\rangle},
\end{aligned}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observação: Se o conjunto B for ortonormal, então $\langle v_i,\ v_i\rangle = 1$, $\forall i$, e a fórmula para a_i é simplificada: $a_i = \langle w,\ v_i\rangle$.

8.9 Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja $\beta = \{\vec{v},\ \vec{w}\}$ uma base de um espaço vetorial V. A partir de β queremos obter uma outra base α para esse mesmo espaço, com a propriedade de que α seja uma base ortogonal. Multiplicamos um dos vetores, $\vec{v}$, por k e subtraímos do outro vetor obtendo como resultado $\vec{w} - k\vec{v}$. Vamos exigir que o vetor obtido dessa forma seja ortogonal a $\vec{v}$, ou seja, que $\langle \vec{w} - k\vec{v},\ \vec{v}\rangle = 0$.



Desenvolvendo $\langle \vec{w} - k\vec{v},\ \vec{v}\rangle = 0$, obtemos $\langle \vec{w},\ \vec{v}\rangle - k\langle \vec{v},\ \vec{v}\rangle = 0$ o que implica $k = \dfrac{\langle \vec{w},\ \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v},\ \vec{v}\rangle}$ e assim concluímos que $\alpha = \left\{\vec{v}, \vec{w} - \dfrac{\langle \vec{w},\ \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v},\ \vec{v}\rangle}\vec{v}\right\}$ é uma base ortogonal do mesmo espaço vetorial V.

Se $\vec{v}$ for unitário, o vetor $\vec{w} - \dfrac{\langle \vec{w},\ \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v},\ \vec{v}\rangle}\vec{v}$ simplifica para $\vec{w} - \langle \vec{w},\ \vec{v}\rangle\vec{v}$.

Esse procedimento de se obter uma base ortogonal (ou ortonormal) a partir de uma base dada é chamado de **ortogonalização**.

O que mostramos anteriormente para 2 vetores, pode ser generalizado para uma quantidade finita qualquer. Se $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de vetores de um espaço com produto interno V, então para qualquer $v \in V$, o vetor

$$w = v - \langle v,\ u_1\rangle u_1 - \langle v,\ u_2\rangle u2 - \cdots - \langle v,\ u_n\rangle u_n$$

é ortogonal a cada um dos u_i porque

$$\begin{aligned}\langle w,\ u_i\rangle = \langle v,\ u_i\rangle - \langle v,\ u_1\rangle \underbrace{\langle u_1,\ u_i\rangle}_{=0} - \langle v,\ u_2\rangle \underbrace{\langle u_2,\ u_i\rangle}_{=0} - \dots \\ - \langle v,\ u_i\rangle \underbrace{\langle u_i,\ u_i\rangle}_{=1} - \cdots - \langle v,\ u_n\rangle \underbrace{\langle u_n,\ u_i\rangle}_{=0} = \langle v,\ u_i\rangle - \langle v,\ u_i\rangle = 0.\end{aligned}$$

Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de um espaço com produto interno V, vamos construir uma base ortonormal $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ para V a partir de β com os seguintes passos:

- $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$,
- $w_2 = v_2 - \langle v_2,\ u_1\rangle u_1,\ u_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|}$,
- $w_3 = v_3 - \langle v_3,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_3,\ u_2\rangle u_2,\ u_3 = \dfrac{w_3}{\|w_3\|}$,
- $w_4 = v_4 - \langle v_4,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_4,\ u_2\rangle u_2 - \langle v_4,\ u_3\rangle u_3,\ u_4 = \dfrac{w_4}{\|w_4\|}$,
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- Em geral, $w_n = v_n - \langle v_n,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_n,\ u_2\rangle u_2 - \cdots - \langle v_n,\ u_{n-1}\rangle u_{n-1}$, $u_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|}$,

Esse procedimento é conhecido pelo nome de Processo de Ortogonalização de Gram[‖]- Schmidt[**].

Exemplo 8.15. Considere a seguinte base de $\mathbb{R}^3$

$$\beta \ = \ \{v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (0, 1, -1),\ v_3 = (0, 0, 2)\}.$$

Obtenha uma base ortonormal $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ construída a partir de β e determine as coordenadas do vetor $u = (5, 4, 3)$ nessa base α.

Solução: Usando o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, vamos aplicar à base β o processo de ortogonalização descrito anteriormente:

[‖] Jorgen Pedersen Gram (1850-1916), matemático dinamarquês

[**] Erhard Schmidt (1876-1959), matemático estoniano

- $w_1 = v_1$,
  $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = (\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}})$;
- $w_2 = v_2 - \langle v_2,\ u_1 \rangle u_1 = (0, 1, -1) - (-\frac{2}{\sqrt{3}})(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}})$
  $= (0, 1, -1) + (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$,
  $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$
- $w_3 = v_3 - \langle v_3,\ u_1 \rangle u_1 - \langle v_3,\ u_2 \rangle u_2$
  $= (0, 0, 2) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}) - (-\frac{2}{\sqrt{6}})(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$
  $= (0, 0, 2) - (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (0, 1, 1)$,
  $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Logo, a base ortonormal procurada é

$$\alpha \ = \ \left\{ u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}),\ u_2 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}),\ u_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}.$$

Agora, vamos determinar escalares x, y, z tais que $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$. Como α é ortonormal, então esses coeficientes são iguais a produtos internos de u pelos vetores da base:

- $x = \langle u,\ u_1 \rangle = \langle (5, 4, 3),\ (\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}) \rangle = \frac{4}{\sqrt{3}}$;
- $y = \langle u,\ u_2 \rangle = \langle (5, 4, 3),\ (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \rangle = \frac{11}{\sqrt{6}}$;
- $z = \langle u,\ u_3 \rangle = \langle (5, 4, 3),\ (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

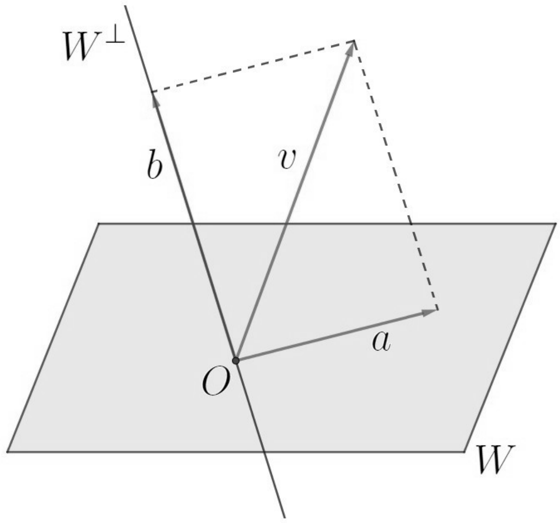
Portanto, as coordenadas de u na base α são $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{6}}, \frac{7}{\sqrt{2}} \right) \ = \ [u]_\alpha$.

Como consequência desse processo de ortogonalização, temos o seguinte teorema:

Teorema 8.9.1. Todo espaço vetorial de dimensão finita possui uma base ortonormal.

Outro resultado importante é conhecido como Teorema da Decomposição Ortogonal:

Teorema 8.9.2. Seja W um subespaço vetorial de um espaço V de dimensão finita com produto interno . Então $V = W \oplus W^\perp$, ou seja, todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único na forma $v = a + b$, onde $a \in W$ e $b \in W^\perp$. Além disso, $\|v\|^2 \ = \ \|a\|^2 + \|b\|^2$.



Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que $W \cap W^{\perp} = \mathbf{0}$. Se $v \in W \cap W^{\perp}$, então $v \in W$ e $v \in W^{\perp} \Rightarrow v$ é ortogonal a $v \Rightarrow \langle v,\ v\rangle = 0 \Rightarrow v = \mathbf{0}$.

Consideremos uma base ortogonal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ de W. Podem ser acrescentados vetores $u_1, u_2, \ldots, u_s$ a essa base β de modo que o conjunto resultante $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ seja uma base de V. Essa base α pode ser submetida a um processo de ortogonalização de modo a resultar em uma base de V ortogonal

$$\gamma = \{\underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_r,}_{\text{base de } W}\underbrace{w_1, w_2, \ldots, w_s}_{\text{base de } W^{\perp}}\}.$$

Como cada vetor v_i é ortogonal a cada vetor w_j, ou seja, $\langle v_i,\ w_j\rangle = 0,\ \forall i, j$, temos que $w_j \in W^{\perp}$, $\forall j$. Se w for um vetor qualquer de $W^{\perp}$, então $w \in V$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} w &= a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1w_1 + \cdots + b_sw_s \\ &\Rightarrow \underbrace{w - b_1w_1 - \cdots - b_sw_s}_{\in W^{\perp}} = \underbrace{a_1v_1 + \cdots + a_rv_r}_{\in W} \in W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow w = b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_sw_s$ e isso significa que todo vetor de $W^{\perp}$ é combinação linear de $w_1, w_2, \ldots, w_s$, logo $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ é uma base para $W^{\perp}$.

Se $v \in V$, então v é combinação linear dos elementos de γ, ou seja, v se escreve na forma

$$v = \underbrace{x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r}_{=\ a\ \in\ W} + \underbrace{y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots y_sw_s}_{=\ b\ \in\ W^{\perp}} = a + b.$$

Como $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, temos que v se escreve de modo único nessa forma. Além disso,

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \langle v,\ v\rangle = \langle a+b,\ a+b\rangle &= \langle a+b,\ a\rangle + \langle a+b,\ b\rangle \\ &= \underbrace{\langle a,\ a\rangle}_{=\|a\|^2} + \underbrace{\langle a,\ b\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle b,\ a\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle b,\ b\rangle}_{\|b\|^2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.\end{aligned}$$

8.10 Exercícios Resolvidos

R1) Usando o seguinte produto interno do $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}&\langle (x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2)\rangle \\ &\quad = 10x_1x_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 5y_1y_2 - 3x_2z_1 - y_2z_1 - 3x_1z_2 - y_1z_2 + 2z_1z_2,\end{aligned}$$

determine a norma de $w = (a, b, c)$, mostre que $\langle w,\ w\rangle \geq 0$ e calcule o ângulo entre os vetores $u = (4, 0, 0)$ e $v = (0, 5, 0)$.

Solução: Se $w = (a, b, c)$, então

$$\|w\| = \sqrt{\langle w,\ w\rangle} = \sqrt{\langle (a, b, c),\ (a, b, c)\rangle} = \sqrt{10a^2 - 4ab + 5b^2 - 6ac - 2bc + 2c^2}.$$

Para mostrar que $\langle w,\ w\rangle = \|w\|^2 \geq 0$, escrevemos o radicando da expressão anterior como uma soma de quadrados:

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= a^2 + 9a^2 - 4ab + b^2 + 4b^2 - 6ac - 2bc + c^2 + c^2 \\ &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + (9a^2 - 6ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= \underbrace{(a-2b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(3a-c)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\geq 0} \geq 0\end{aligned}$$

Usando a fórmula para $\|w\|$ obtida anteriormente, temos:

- $\|u\| = \|(4, 0, 0)\| = \sqrt{10 \cdot 4^2 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 - 6 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

- $\|v\| = \|(0, 5, 0)\| = \sqrt{10 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 5 + 5 \cdot 5^2 - 6 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

- $\langle u,\ v\rangle = 10 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 3 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = -40$

Se θ for a medida do ângulo entre os vetores u e v, então

$$\cos\theta = \frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{-40}{4\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{5}} = -\frac{2}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

Observação 1: θ é aproximadamente igual a $1,857$ radianos ou $106°25'47''$.

Observação 2: Note que os vetores u e v não são ortogonais com o produto interno definido nesse exercício. No entanto, eles são ortogonais se for usado o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.

R2) Usando o produto interno usual, determine uma base para $W^\perp$, sabendo que W é o subespaço de $V = \mathbb{R}^5$ gerado por $v_1 = (1,\ 5,\ -8,\ 4,\ -3)$, $v_2 = (2,\ 2,\ -2,\ 0,\ 9)$ e $v_3 = (4,\ 1,\ 2,\ 5,\ -2)$. Calcule as dimensões de W e $W^\perp$ e verifique que $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Solução: Vamos determinar todos os vetores $w = (x, y, z, s, t) \in \mathbb{R}^5$ tais que

$$\begin{cases} \langle w,\ v_1\rangle = 0 \\ \langle w,\ v_2\rangle = 0 \\ \langle w,\ v_3\rangle = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 5y - 8z + 4s - 3t = 0 \\ \qquad 2x + 2y - 2z + 9t = 0 \\ 4x + y + 2y + 5s - 2t = 0 \end{cases}.$$

Para resolver esse sistema linear homogêneo, escalonamos sua matriz completa:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & -8 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & -8 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 14 & -8 & 15 & 0 \\ 0 & -19 & 34 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & -8 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{4} & 1 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & -19 & 34 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & -8 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{4} & 1 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 8 & -\frac{205}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & -8 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{4} & 1 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{32}{3} & -\frac{205}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada equivale ao sistema $\begin{cases} x + 5y - 8z + 4s - 3t = 0 \\ y - \frac{7z}{4} + s - \frac{15t}{8} = 0 \\ z + \frac{32s}{3} - \frac{205t}{6} = 0 \end{cases}$,

cuja solução é:

- $z = \dfrac{205t}{6} - \dfrac{32s}{3}$,
- $y = \dfrac{7z}{4} - s + \dfrac{15t}{8} = \dfrac{7}{4}\left(\dfrac{205t}{6} - \dfrac{32s}{3}\right) - s + \dfrac{15t}{8} = \dfrac{205t}{6} - \dfrac{32s}{3}$,
- $x = -5y + 8z - 4s + 3t = -5\left(\dfrac{205t}{6} - \dfrac{32s}{3}\right) + 8\left(\dfrac{205t}{6} - \dfrac{32s}{3}\right) - 4s + 3t = 9s - 32t$,

com s e t podendo assumir quaisquer valores reais. Por exemplo, escolhendo $s = 0$ e $t = 6$, obtemos $w_1 = (-192,\ 370,\ 205,\ 0,\ 6) \in W^\perp$ e escolhendo $s = 3$, $t = 0$, obtemos $w_2 = (27,\ -59,\ -32,\ 3,\ 0) \in W^\perp$.

Portanto, a base de $W^\perp$ procurada é

$$\{(-192,\ 370,\ 205,\ 0,\ 6),\ (27,\ -59,\ -32,\ 3,\ 0)\},$$

Concluímos dessa forma que $\dim W^\perp = 2$. As linhas da matriz M foram obtidas a partir dos vetores dados v_1, v_2 e v_3 e, ao ser escalonada, não apareceram linhas nulas. Isso significa que esses vetores são linearmente independentes e, consequentemente, formam uma base para W. Portanto, $\dim W = 3$. Verificamos assim que

$$\dim W + \dim W^\perp = 3 + 2 = 5 = \dim V.$$

Observação 1: Esse tipo de problema tem uma infinidade de respostas válidas. Cada valor escolhido para as variáveis livres s e t, leva a uma base de $W^\perp$ diferente.

Observação 2: Para conferir se a resposta encontrada está correta, devemos calcular os seis produtos $\langle v_1,\ w_1\rangle$, $\langle v_1,\ w_2\rangle$, $\langle v_2,\ w_1\rangle$, $\langle v_2,\ w_2\rangle$, $\langle v_3,\ w_1\rangle$, $\langle v_3,\ w_2\rangle$ e verificar que todos dão iguais a zero. Por exemplo,

$$\langle v_1,\ w_1\rangle = \langle (1,\ 5,\ -8,\ 4,\ -3),\ (-192,\ 370,\ 205,\ 0,\ 6)\rangle$$
$$= 1\cdot(-192) + 5\cdot 370 - 8\cdot 205 + 4\cdot 0 - 3\cdot 6 = -192 + 1850 - 1640 + 0 - 18 = 0.$$

R3) Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado por $v_1 = (1, -2, -1, 2, -3)$, $v_2 = (2, -3, -1, 3, -4)$, $v_3 = (-1, 4, 3, -4, 7)$, $v_4 = (2, -6, -3, 7, -8)$. A partir desses vetores, obtenha uma base ortonormal para W.

Solução: Usando o produto interno usual do $\mathbb{R}^5$, vamos aplicar o processo de ortogonzalização de Gram-Schmidt ao conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

- $w_1 = v_1 \Rightarrow u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{2}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{2}{\sqrt{19}}, -\frac{3}{\sqrt{19}})$;

- $w_2 = v_2 - \langle v_2,\ u_1\rangle u_1 = (2,-3,-1,3,-4) - \frac{27}{\sqrt{19}}(\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{2}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{2}{\sqrt{19}}, -\frac{3}{\sqrt{19}})$
$= (2,-3,-1,3,-4) - (\frac{27}{19}, -\frac{54}{19}, -\frac{27}{19}, \frac{54}{19}, -\frac{81}{19}) = (\frac{11}{19}, -\frac{3}{19}, \frac{8}{19}, \frac{3}{19}, \frac{5}{19})$,
$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (\frac{11}{2\sqrt{57}}, -\frac{3}{2\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{3}{2\sqrt{57}}, \frac{5}{2\sqrt{57}})$;

- $w_3 = v_3 - \langle v_3,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_3,\ u_2\rangle u_2$
$= (-1,4,3,-4,7) - (-\frac{41}{19}, \frac{82}{19}, \frac{41}{19}, -\frac{82}{19}, \frac{123}{19}) - (\frac{22}{19}, -\frac{6}{19}, \frac{16}{19}, \frac{6}{19}, -\frac{10}{19}) = (0,0,0,0,0)$.
Isso significa que v_3 é combinação linear de v_1 e v_2, logo, pode ser retirado do conjunto.

- $w_4 = v_4 - \langle v_4,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_4,\ u_2\rangle u_2$
$= (2,-6,-3,7,-8) - (\frac{55}{19}, -\frac{110}{19}, -\frac{55}{19}, \frac{110}{19}, -\frac{165}{19}) - (-\frac{11}{76}, \frac{3}{76}, -\frac{2}{76}, -\frac{3}{76}, -\frac{5}{76}) =$
$(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}, \frac{3}{4})$,
$u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = (-\frac{3}{2\sqrt{11}}, -\frac{1}{2\sqrt{11}}, 0, \frac{5}{2\sqrt{11}}, \frac{3}{2\sqrt{11}})$

Portanto, uma base ortonormal de W é

$$\alpha = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{2}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{2}{\sqrt{19}}, -\frac{3}{\sqrt{19}}\right), \left(\frac{11}{2\sqrt{57}}, -\frac{3}{2\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{3}{2\sqrt{57}}, \frac{5}{2\sqrt{57}}\right), \left(-\frac{3}{2\sqrt{11}}, -\frac{1}{2\sqrt{11}}, 0, \frac{5}{2\sqrt{11}}, \frac{3}{2\sqrt{11}}\right)\right\}$$

R4) No espaço vetorial $\mathcal{P}_4$, obtenha uma base ortogonal a partir da base $\beta = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$, usando o produto interno $\langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Solução: Com esse produto interno, o cálculo da norma é efetuado através da fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f,\ f\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t}$. Vamos usar o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt:

- $v_1 = 1 \Rightarrow w_1 = v_1 = 1 \Rightarrow \|w_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

- $v_2 = t \Rightarrow w_2 = v_2 - \langle v_2,\ u_1\rangle u_1 = t - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t\right)}_{=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t - 0 = t$,

$\|w_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,
$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$;

- $v_3 = t^2 \Rightarrow w_3 = v_3 - \langle v_3,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_3,\ u_2\rangle u_2 = t^2 - \left(\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} t^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}t\,\mathrm{d}t\right)}_{=0} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}t = t^2 - \frac{1}{3} - 0 = t^2 - \frac{1}{3}$,
  $\|w_3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}(t^2 - \frac{1}{3})^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(t^4 - \frac{2t^2}{3} + \frac{1}{9})\,\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$,
  $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$;
- $v_4 = t^3 \Rightarrow w_4 = v_4 - \langle v_4,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_4,\ u_2\rangle u_2 - \langle v_4,\ u_3\rangle u_3 = t^3 - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t\right)}_{=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^{1} t^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}t\,\mathrm{d}t\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}t$
  $- \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} t^3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}t\right)}_{=0} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = t^3 - 0 - \frac{3}{5} - 0 = t^3 - \frac{3}{5}$,
  $\|w_4\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}(t^3 - \frac{3}{5})^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(t^6 - \frac{6t^3}{5} + \frac{9}{25})\,\mathrm{d}t} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$,
  $u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}\right)$;
- $v_5 = t^4 \Rightarrow w_5 = v_5 - \langle v_5,\ u_1\rangle u_1 - \langle v_5,\ u_2\rangle u_2 - \langle v_5,\ u_3\rangle u_3 - \langle v_5,\ u_4\rangle u_4$
  $= t^4 - \left(\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} t^4 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)\,\mathrm{d}t\right)}_{=0} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)$
  $- \left(\int_{-1}^{1} t^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$
  $- \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} t^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}\right)\right)\,\mathrm{d}t\right)}_{=0} \cdot \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}\right)\right) = t^4 - \frac{6t^2}{7} + \frac{3}{35}$.

Portanto, a base ortogonal procurada é

$$\alpha = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} = \{1,\ \ t,\ \ t^2 - \frac{1}{3},\ \ t^3 - \frac{3}{5},\ \ t^4 - \frac{6t^2}{7} + \frac{3}{35}\}.$$

Observação: Nos cálculos das integrais anteriores, utilizamos várias vezes que $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^n\,\mathrm{d}t = 0$, se n for ímpar, e que $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^n\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1}$, se n for par.

Observação: Esses polinômios ortogonais encontrados são conhecidos como

Polinômios de Legendre†† e têm muitas aplicações na Matemática e na Física. Podemos dar continuidade a essa sequência de polinômios e encontrar $w_6 = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t$, $w_7 = t^6 - \frac{15}{11}t^4 + \frac{5}{11}t^2 - \frac{5}{231}$ etc.

R5) Determine um vetor normalizado (unitário) em $\mathbb{R}^4$ que seja ortogonal aos vetores $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,-1,1)$ e $v_3 = (2,1,1,3)$ de acordo com o produto interno usual.

Solução: Seja $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ que é ortogonal aos vetores v_1, v_2 e v_3. Então,

$$\begin{cases} \langle v,\ v_1\rangle = 0 \\ \langle v,\ v_2\rangle = 0 \\ \langle v,\ v_3\rangle = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \\ 2x+y+z+3t=0 \end{cases}.$$

Para resolver esse sistema linear, escalonamos sua matriz completa:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz escalonada corresponde ao sistema $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$, cuja solução é $x=0,\ \ y=-z,\ \ t=0$, ou seja, $(0,-z,z,0)$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$. Escolhendo $z = 1$, obtemos o vetor $(0,-1,1,0)$. Ao ser dividido pela sua norma, encontramos o vetor normalizado procurado

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0) = (0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0).$$

R6) Seja $V = C([0,1])$, o espaço das funções contínuas no intervalo $[0,1]$, com produto interno definido por $\langle f,\ g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Calcule o ângulo e a distância entre as funções $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x^3$.

††Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês.

Solução: Com o produto interno assim definido, obtemos os seguintes resultados:

- $\|v\| = \sqrt{\langle v,\ v\rangle} = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 [v(x)]^2\,\mathrm{d}x}$;
- $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (3x^2)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 9x^4\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\left.\dfrac{9x^5}{5}\right|_0^1} = \sqrt{\dfrac{9}{5}}$;
- $\|g\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (4x^3)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 16x^6\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\left.\dfrac{16x^7}{7}\right|_0^1} = \sqrt{\dfrac{16}{7}}$;
- $\langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (3x^2)(4x^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 12x^5\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{12x^6}{6}\right|_0^1 = 2.$

  O ângulo entre as funções f e g é

$$\arccos\left(\frac{\langle f,\ g\rangle}{\|f\|\|g\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{9}{5}}\cdot\sqrt{\frac{16}{7}}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$$

e a distância é

$$\begin{aligned}\|f-g\| = \|3x^2-4x^3\| &= \sqrt{\int_0^1 (3x^2-4x^3)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 (9x^4-24x^5+16x^6)\,\mathrm{d}x}\\ &= \sqrt{\left.\left(\frac{9x^5}{5}-4x^6+\frac{16x^7}{7}\right)\right|_0^1} = \sqrt{\frac{9}{5}-4+\frac{16}{7}} = \sqrt{\frac{3}{35}}.\end{aligned}$$

R7) Sejam $\mathbb{R}^3$ com produto interno definido por

$$\langle v,\ w\rangle \ = \ \langle (v_1, v_2, v_3),\ (w_1, w_2, w_3)\rangle \ = \ 5v_1w_1 + v_2w_2 + 4v_3w_3$$

e o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 0\}$. Determine uma base para $S^\perp$.

Solução: Temos que S pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}S \ &= \ \{(\underbrace{-y-3z}_{=x},\ y,\ z) \| \ y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y,\ y,\ 0) + (-3z,\ 0,\ z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{y(-1,\ 1,\ 0) + z(-3,\ 0,\ 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = [(-1,\ 1,\ 0),\ (-3,\ 0,\ 1)].\end{aligned}$$

Se $(a,b,c) \in S^{\perp}$, então $\langle (a,b,c),\ (-1,1,0)\rangle = 0$ e $\langle (a,b,c),\ (-3,0,1)\rangle = 0$ que implica o sistema linear $\begin{cases} -5a+b=0 \\ -15a+4c=0 \end{cases}$, cuja solução é $b = 5a$, $c = \frac{15a}{4}$, ou seja, $(a, 5a, \frac{15a}{4}) = a(1,5,\frac{15}{4})$, para qualquer valor de a.

Concluímos assim que $S^{\perp} = [(1,5,\frac{15}{4})] = [(4,20,15)]$.

R8) Sejam u e v dois vetores de um espaço com produto interno V tais que $\|u\| = 5$, $\|v\| = 6$ e $\|u+v\| = 7$. Determine o valor de $\langle u,\ v\rangle$.

Solução: Como $\|u+v\|^2 = \langle u+v,\ u+v\rangle = \langle u,\ u\rangle + \langle u,\ v\rangle + \langle v,\ u\rangle + \langle v,\ v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,\ v\rangle + \|v\|^2$, temos que

$$\langle u,\ v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{7^2-5^2-6^2}{2} = -6.$$

R9) Mostre que se u e v são vetores quaisquer de um espaço com produto interno, então os vetores $w_1 = \|v\|u + \|u\|v$ e $w_2 = \|v\|u - \|u\|v$ são ortogonais.

Solução: O produto interno entre w_1 e w_2 é igual a

$$\begin{aligned} \langle w_1,\ w_2\rangle &= \langle \|v\|u + \|u\|v,\ \|v\|u - \|u\|v\rangle \\ &= \langle \|v\|u,\ \|v\|u\rangle - \langle \|v\|u,\ \|u\|v\rangle + \langle \|u\|v,\ \|v\|u\rangle - \langle \|u\|v,\ \|u\|v\rangle \\ &= \cancel{\|v\|^2\|u\|^2} - \cancel{\|v\|\|u\|\langle u,\ v\rangle} + \cancel{\|u\|\|v\|\langle v,\ u\rangle} - \cancel{\|u\|^2\|v\|^2} = 0 \end{aligned}$$

Logo, w_1 e w_2 são ortogonais.

R10) Se f é uma função contínua em um intervalo $[a,\ b]$, mostre que

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le (b-a)\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Solução: Consideremos o produto interno $\langle u,\ v\rangle = \displaystyle\int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ no espaço $C([a,\ b])$. Nesse caso, o cálculo da norma de v é $\|v\| = \sqrt{\langle v,\ v\rangle} = \sqrt{\int_a^b [v(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f,\ g\rangle| \le \|f\|\|g\| \Rightarrow (\langle f,\ g\rangle)^2 \le \|f\|^2\|g\|^2.$$

No caso particular em que $g(x) = 1$, temos

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b 1^2\,\mathrm{d}x \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leq (b-a)\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

conforme queríamos mostrar.

R11) Usando o produto interno $\langle A,\ B\rangle = \mathrm{tr}(B^tA)$ em $M(2,3)$, calcule o ângulo e a distância entre as matrizes $U = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{bmatrix}$, com o produto interno assim definido, temos:

$$\begin{aligned}\langle A,\ B\rangle = \mathrm{tr}(B^tA) &= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a_2 & d_2 \\ b_2 & e_2 \\ c_2 & f_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} \boxed{a_2a_1 + d_2d_1} & a_2b_1 + d_2e_1 & a_2c_1 + d_2f_1 \\ b_2a_1 + e_2d_1 & \boxed{b_2b_1 + e_2e_1} & b_2c_1 + e_2f_1 \\ c_2a_1 + f_2d_1 & c_2b_1 + f_2e_1 & \boxed{c_2c_1 + f_2f_1} \end{bmatrix}\right) \\ &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 + e_1e_2 + f_1f_2\end{aligned}$$

e daí,

$$\|A\| = \sqrt{\langle A,\ A\rangle} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + e_1^2 + f_1^2}.$$

Aplicando ao caso das matrizes U e V, temos:

$$\langle U,\ V\rangle = 0\cdot 1 + 8\cdot 1 + 3\cdot(-2) + (-4)\cdot 5 + 2\cdot 7 + 1\cdot 0 = -4$$

$$\|U\| = \sqrt{0^2 + 8^2 + 3^2 + (-4)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{94}$$

$$\|V\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2 + 5^2 + 7^2 + 0^2} = \sqrt{80}$$

O ângulo entre U e V é θ, onde

$$\cos\theta = \frac{\langle U,\ V\rangle}{\|U\|\|V\|} = \frac{-4}{\sqrt{94}\sqrt{80}} \implies \theta = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{94}\sqrt{80}}\right).$$

A distância entre U e V é igual a

$$\begin{aligned}\|U-V\| &= \sqrt{(0-1)^2 + (8-1)^2 + (3-(-2))^2 + (-4-5)^2 + (2-7)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{182}.\end{aligned}$$

8.11 Exercícios Propostos

1) Considerando os vetores $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ de $V = \mathbb{R}^2$. Verifique quais das funções $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ a seguir são produtos internos em V.

a) $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$
b) $f(v_1, v_2) = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$
c) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 - y_1y_2$
d) $f(v_1, v_2) = 4x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$
e) $f(v_1, v_2) = 4x_1x_2$
f) $f(v_1, v_2) = x_1y_2 + x_2y_1 + 1$

Resp.: São produtos internos somente os itens (a), (b), (d).

2) Seja $V = \mathbb{R}^4$ com produto interno usual. Determine o valor de m para o qual os vetores $u = (0, m-1, 1, 4)$ e $v = (5, m+1, 0, -1)$ são ortogonais.
Resp.: $m = \pm\sqrt{5}$

3) Consideremos no $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2)\rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2.$$

Determinar, em relação a esse produto interno, um vetor unitário que simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, -1, 2)$ e $v = (2, 1, 0)$.
Resp.: $u = \pm(\frac{2}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{1}{6})$

4) Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam u e v vetores ortogonais e unitários de V. Calcule $\langle u+v, 2u\rangle$ e determine o valor de $\langle w, u+v\rangle$ para que $u + v$ seja ortogonal a $2u + w$.
Resp.: $\langle u + v,\ 2u\rangle = 2$ e $\langle u + v,\ w\rangle = -2$

5) Suponha u e v ortogonais e $u + v = 0$. Mostre que $u = v = 0$.
Resp.: Use que $\langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = 0$

6) Mostre que se $\|u + v\| = \|u - v\|$, então u e v são ortogonais.
Resp.: Desenvolva $\langle u + v, u + v\rangle = \langle u - v, u - v\rangle$

7) Seja V um espaço com produto interno. Determine o cosseno do ângulo entre os vetores u e v, sabendo que $\|u\| = 3$, $\|v\| = 7$ e $\|u + v\| = 4\sqrt{5}$.
Resp.: $\cos\theta = \frac{11}{21}$

8) Se u e v são vetores ortogonais e unitários de um espaço vetorial V com produto interno, mostre que $\|u - v\| = \sqrt{2}$.
Resp.: Desenvolva $\langle u - v, u - v\rangle$

9) Se u e v são vetores de um espaço vetorial com produto interno, então mostre que:

a) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2+2\|v\|^2$ (conhecido como *Lei do Paralelogramo*)

b) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$

Resp.: Desenvolva $\langle u+v, u+v\rangle$ e $\langle u-v, u-v\rangle$, some e subtraia as respostas encontradas.

10) Em $\mathbb{R}^3$ considere a definição da função

$$\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + z_1z_2,$$

onde $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Mostre que $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno e encontre uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$.
Resp.: $\beta = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0),\ (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0),\ (0,0,1)\}$

11) Seja $M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ com o produto interno

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + bf + cg + dh,$$

e seja $W = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right]$.

a) Determine bases ortogonais para W e $W^\perp$

b) A partir das bases obtidas em (a), encontre uma base ortogonal para $M(2,2)$

c) Calcule o ângulo entre $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Resp.: a) $W = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right]$, $\quad W^\perp = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$
b) $M(2,2) = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$
c) $\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$

12) Considere em $\mathcal{P}_3$ o produto interno $\langle p(x), q(x)\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$. Calcule o ângulo entre os vetores 1 e x e determine $W^\perp$ sabendo que $W = [1,\ x]$.
Resp.: Os vetores 1 e x são ortogonais e $W^\perp = [-\frac{5}{3}x^3 + x,\ -3x^2 + 1]$

13) Considere em $\mathcal{P}_2$ o produto interno $\langle p(x), q(x)\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$. Calcule $\|f\|$, onde $f(x) = x^2$ e determine $W^\perp$ sabendo que $W = [1+x,\ 1-x]$.
Resp.: $\|f\| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $W^\perp = [6x^2 - 6x + 1]$

14) *Generalização do Teorema de Pitágoras*: Seja V um espaço vetorial com produto interno e sejam x, y dois vetores de V. Mostre que x é ortogonal a y se, e somente se, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
Resp.: Desenvolva $\langle x+y,\ x+y\rangle$

15) Seja $V = \mathbb{R}^4$ com produto interno $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + 5u_4v_4$, onde $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Obtenha uma base ortonormal para o seguinte subespaço de V:

$$W \ = \ [(1,0,0,0),\ (0,1,0,1),\ (0,1,1,0)].$$

Resp.: $\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0),\ (0, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ (0, \frac{5}{\sqrt{66}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{66}})\}$

16) O *traço* de uma matriz quadrada A, $\mathrm{tr}(A)$, é definido como sendo a soma dos elementos da sua diagonal principal: $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. Considerando o espaço vetorial $V = M(m,n)$ com produto interno definido por $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^tA)$, calcule:

a) A norma de $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ no espaço $M(2,2)$.

b) Dê exemplo de $Y \in M(2,2)$, $Y \neq 0$, que seja ortogonal a X

c) O ângulo entre $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Resp.: a) $\|X\| = \sqrt{30}$,
b) Várias respostas são possíveis, por exemplo $Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
c) $\theta = \arccos \frac{17\sqrt{2}}{30}$

17) Mostre que $\beta = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ com produto interno usual e determine as coordenadas do vetor $v = (2,4)$ com relação a β.
Resp.: $[v]_\beta = (3\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

18) Sejam $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual e os subespaços $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$ e $S_2 = \{(2t, t, -t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Determine as bases de $S_1^\perp$ e de $S_2^\perp$.
Resp.: $S_1^\perp = [(1, -2, 3)]$, $S_2^\perp = [(1, 0, 2),\ (0, 1, 1)]$

19) Com relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, determine uma base ortogonal para os subespaços:

a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y - 2z = 0\}$

b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$

c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x + y = 0\}$

Resp.: a) $S_1 = [(1, 0, 0), (0, 2, 1)]$ b) $S_2 = [(1, 0, -1), (-1, 2, -1)]$ c) $S_3 = [(0, 0, 1), (1, -5, 0)]$

20) Seja V um espaço vetorial com produto interno e $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base ortonormal de V.

a) Obtenha um vetor unitário de V a partir de $v = 4v_1 - 2v_2 + 2v_3 - v_4$

b) Calcule a norma de $w = \operatorname{sen}^3\theta\, v_1 + \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, v_2 + \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, v_3 + \cos\theta\, v_4$

c) Determine o ângulo entre os vetores $x = \sqrt{7}v_1 + \sqrt{5}v_2 + \sqrt{3}v_3 + v_4$ e $y = \sqrt{7}v_1 + \sqrt{5}v_2$

Resp.: a) $u = \frac{4}{5}v_1 - \frac{2}{5}v_2 + \frac{2}{5}v_3 - \frac{1}{5}v_4$; b) $\|w\| = 1$; c) $\frac{\pi}{6}$

21) Seja $V = \mathcal{P}_2$ com produto interno definido por $\langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Obtenha uma base ortonormal para V a partir da base $\alpha = \{1,\ x,\ x^2\}$.
Resp.: $\beta = \{x^2,\ x - \frac{5}{4}x^2,\ 1 - 4x + \frac{10}{3}x^2\}$

22) Sejam u e v dois vetores quaisquer de um espaço vetorial com produto interno. Mostre que

a) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (conhecido como *desigualdade triangular*)

b) $\|u + v\| \geq \|u\| - \|v\|$

c) $|\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u + v\|$

Resp.: a) Desenvolva $\langle u + v, u + v\rangle$; b) Use o item (a) e que $u = (u + v) - v$; c) Use o item (b) duas vezes.

23) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais, então mostre que

a) $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$
$+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}$

b) $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2) \leq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

Resp.: Use as desigualdades $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$ e $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$ com o produto interno $\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

24) Se f e g são funções contínuas no intervalo $[0,1]$, então mostre que

a) $\sqrt{\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x}$,

b) $\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \geq \frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x}$, se $g(x)\neq 0$ para todo $x\in[0,1]$.

Resp.: Use as desigualdades $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$ e $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$ com o produto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Capítulo 9

Formas bilineares e quadráticas

Neste capítulo fazemos uma breve introdução ao estudo das formas bilineares e quadráticas com algumas aplicações à Geometria Analítica no que se refere à classificação de cônicas e quádricas.

Definição 9.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com conjunto de escalares igual a $\mathbb{R}$. Uma **forma bilinear** em V é uma função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguntes propriedades:

- $f(au_1 + u_2, v) = af(u_1, v) + f(u_2, v)$, ou seja, f é linear na primeira variável;
- $f(u, av_1 + v_2) = af(u, v_1) + f(u, v_2)$, ou seja, f é linear na segunda variável;

para quaisquer $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ e qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9.1. O produto interno usual do $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(u, v) = \langle (u_1, u_2, u_3),\ (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

é uma forma bilinear em $\mathbb{R}^3$. De um modo geral, qualquer produto interno do $\mathbb{R}^n$ é uma forma bilinear em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 9.2. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz qualquer de $M(n, n)$, então A pode ser usada para definir a seguinte forma bilinear em $\mathbb{R}^n$:

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f(X, Y) = XAY^t,$$

onde $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

$$\begin{aligned} & f((x_1, x_2, \ldots x_n),\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

9.1 Matrizes e Formas Bilineares

Seja f uma forma bilinear em V e seja $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Se $u, v \in V$ são tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$, onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n,\ b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) \\ &= a_1b_1f(v_1,v_1) + a_1b_2f(v_1,v_2) + \cdots + a_nb_nf(v_n,v_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_jf(v_i,v_j) \end{aligned}$$

Sendo assim, f é perfeitamente determinada pelos n^2 valores $f(v_i, v_j)$.

Definição 9.2. A matriz $A = (a_{ij})$ em que $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ é denominada a matriz de f com relação à base β.

Pelo que foi definido anteriormente, as coordenadas de u na base β são $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e as coordenadas de v são $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \ldots & f(v_1,v_n) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2) & \ldots & f(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & f(v_n,v_2) & \ldots & f(v_n,v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= [u]_\beta A [v]_\beta^t. \end{aligned}$$

Exemplo 9.3. Considerando f a forma bilinear em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f((x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2,y_3)) \\ &= 4x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 - 11x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - 8x_3y_3. \end{aligned}$$

Então, observando os coeficientes de cada termo, temos que a matriz de f com relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -11 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

e a forma matricial de f é

$$f((x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2,y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -11 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

9.2 Formas Bilineares Simétricas

Definição 9.3. Dizemos que uma forma bilinear f em um espaço vetorial V é **simétrica** quando $f(u,v) = f(v,u),\ \forall u, v \in V$.

Exemplo 9.4. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -8 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\underbrace{(x_1, y_1, z_1)}_{=u}, \underbrace{(x_2, y_2, z_2)}_{=v}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -8 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$
$$= 2x_1x_2 - 8x_1y_2 + 5x_1z_2 - 8y_1x_2 + 6y_1y_2 + 4y_1z_2 + 5z_1x_2 + 4z_1y_2 + 3z_1z_2.$$

Temos que

$$f(\underbrace{(x_2, y_2, z_2)}_{=v}, \underbrace{(x_1, y_1, z_1)}_{=u}) = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -8 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$
$$= 2x_2x_1 - 8x_2y_1 + 5x_2z_1 - 8y_2x_1 + 6y_2y_1 + 4y_2z_1 + 5z_2x_1 + 4z_2y_1 + 3z_2z_1 = f(u,v).$$

Logo, f é uma forma bilinear simétrica.

Note que A é uma matriz simétrica porque $A^t = A$. Isso sempre acontece com formas bilineares simétricas, ou seja, uma forma bilinear simétrica sempre está associada a uma matriz simétrica.

9.3 Formas Quadráticas

Definição 9.4. Uma função $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada **forma quadrática** quando $q(v) = f(v,v)$, $\forall v \in V$, para alguma forma bilinear simétrica f.

Se $V = \mathbb{R}^n$, como consequência dessa definição, temos que toda forma quadrática é uma função $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n), \end{aligned}$$

onde os a_{ij} são constantes reais para quaisquer i, j. Note que essa equação também pode ser escrita na forma de equação matricial:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, toda forma bilinear f pode ser obtida a partir de uma forma quadrática q através da relação

$$f(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

porque

$$\begin{aligned} q(u+v) - q(u) - q(v) &= f(u+v, u+v) - f(u,u) - f(v,v) \\ &= \underbrace{\cancel{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) + \cancel{f(v,v)}}_{=\ f(u+v,u+v)} \cancel{-f(u,u)} \cancel{-f(v,v)} = f(u,v) + f(v,u) \\ &= 2f(u,v). \end{aligned}$$

Note que $f(u+v, u+v)$ é desenvolvido de forma semelhante ao desenvolvimento do produto $(u+v)\cdot(u+v)$.

Exemplo 9.5. Considerando a forma quadrática no $\mathbb{R}^2$ dada por $q(x,y) = 5x^2 - 10xy + 3y^2$. Essa forma quadrátrica é obtida a partir da forma bilinear

$$\begin{aligned} f((x,y),(z,t)) &= \frac{q(x+z, y+t) - q(x,y) - q(z,t)}{2} \\ &= \frac{5(x+z)^2 - 10(x+z)(y+t) + 3(y+t)^2}{2} \\ &= \frac{5(x^2 + 2xz + z^2) - 10(xy + xt + zy + zt) + 3(y^2 + 2yt + t^2)}{2} \\ &= \frac{5x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 3t^2}{2} + 5xz - 5xy - 5xt - 5zy - 5zt + 3yt. \end{aligned}$$

Exemplo 9.6. Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$, $q(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy$, pode ser escrita na forma de equação matricial

$$q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$, pode ser escrita na forma

$$q(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

O teorema a seguir é muito importante para o desenvolvimento dessa teoria. Ele é fundamental na simplificação das equações das formas quadráticas que faremos nas próximas seções.

Teorema 9.3.1. Toda matriz M simétrica de elementos reais é diagonalizável. Isso significa que existe uma matriz P cujas colunas são autovetores de M e que $P^{-1}MP$ é uma matriz diagonal.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na maioria das referências bibliográficas.

9.4 Matrizes Ortogonais

Definição 9.5. Uma matriz quadrada M de elementos reais chama-se **ortogonal** quando sua inversa coincidir com sua transposta, ou seja, $M^{-1} = M^t$.

Por exemplo, $M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ é ortogonal porque $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = M^t$.

Teorema 9.4.1. Se $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço vetorial V de dimensão n, então uma matriz M cujas linhas sejam os vetores da base β é uma matriz ortogonal. O mesmo vale para uma matriz cujas colunas sejam os vetores da base.

Demonstração: Se $u_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $u_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, $u_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$ é um conjunto de n vetores ortonormais, definimos

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e temos:

$$M \cdot M^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 & a_{11}a_{21} + \dots + a_{1n}a_{2n} & \dots & a_{11}a_{n1} + \dots + a_{1n}a_{nn} \\ a_{21}a_{11} + \dots + a_{2n}a_{1n} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2 & \dots & a_{21}a_{n1} + \dots + a_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}a_{1n} + \dots + a_{nn}a_{1n} & a_{n1}a_{21} + \dots + a_{nn}a_{2n} & \dots & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

De modo análogo, temos também $M^t \cdot M = I$ e assim concluímos que $M^t = M^{-1} \Rightarrow M$ é uma matriz ortogonal.

A recíproca desse teorema também é verdadeira. Isso significa que se M é uma matriz ortogonal de ordem $n \times n$, então suas linhas (ou colunas) formam uma base ortonormal do espaço vetorial V de dimensão n.

9.5 Forma canônica de uma forma quadrática

Definição 9.6. Uma forma quadrática $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j$ está na forma canônica quando $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$.

Por exemplo, a forma quadrática $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ está na forma canônica, enquanto que $g(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4yz + z^2$ não está.

A partir de uma forma quadrática $q(v)$ em V é possível fazer uma mudança de variável $v = v'$ de modo que $q(v')$ esteja na forma canônica. Por uma questão de simplicidade, suponhamos $V = \mathbb{R}^3$ e que $q(v) = vAv^t$, onde $v = (x, y, z)$ e $A = (a_{ij})$ seja uma matriz 3×3 de elementos reais.

Como A é uma matriz real simétrica, sabe-se que ela é diagonalizável. Assim, existe uma base de V formada por autovetores de A tal que $P^{-1}AP = B =$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal e P é uma matriz cujas colunas são os elementos da base de autovetores. Se necessário, podemos aplicar um processo de ortogonalização a esses autovetores de forma a obter uma base ortonormal. Logo, a matriz P pode ser escolhida de modo a ser uma matriz ortogonal em que $P^{-1} = P^t$.

Se for utilizada uma mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, então $\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)^t =$ $\left(P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right)^t \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} P^t = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} P^{-1}$.

Na expressão $q = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, substituímos $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} P^{-1}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ por $P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
q = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} P^{-1}AP \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2.
\end{aligned}
$$

E assim, q fica reduzida à forma canônica.

Observação: Foi utilizada anteriormente a seguinte propriedade: $(AB)^t = B^tA^t$.

A seguir, alguns exemplos de como simplificar a equação de uma forma quadrática, ou seja, como obter sua forma canônica.

Exemplo 9.7. Reduzir $q(x, y) = x^2 + y^2 + 8xy$ à forma canônica.

Solução: Essa forma quadrática pode ser escrita na forma

$$q(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores e autovetores de M. Inicialmente, calculamos seu polinômio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 15.$$

Resolvendo a equação do segundo grau $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$ obtemos os autovalores como raízes dessa equação: $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$.

Substituímos cada autovalor encontrado na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$ para encontrar os autovetores.

- Substituindo λ por 5, obtemos

  $$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -4x + 4y = 0 \Rightarrow y = x.$$

  Portanto, (x, x) é um autovetor de M para qualquer x. Escolhendo $x = 1$ e dividindo pela norma, obtemos $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

- Substituindo λ por -3, obtemos

  $$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x + 4y = 0 \Rightarrow y = -x.$$

  Portanto, $(x, -x)$ é um autovetor de M para qualquer x. Escolhendo $x = -1$, obtemos $(-1, 1)$ que ao ser dividido pela sua norma (com produto interno usual), fornece $v_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Definimos agora uma matriz P cujas colunas são os autovetores encontrados: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Realizamos agora a mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ na forma quadrática $q =$

$x^2 + y^2 + 8xy$ e obtemos

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + +8\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{(x')^2 \cancel{-2x'y'} + (y')^2}{2} + \frac{(x')^2 + \cancel{2x'y'} + (y')^2}{2} + 4((x')^2 - (y')^2) \\ &= (x')^2 + (y')^2 + 4(x')^2 - 4(y')^2 = 5(x')^2 - 3(y')^2. \end{aligned}$$

Portanto, a forma canônica encontrada é $q(x', y') = 5(x')^2 - 3(y')^2$.

Observação 1: Todos os cálculos também podem ser efetuados no formato matricial:

$$q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^{-1}MP \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 5(x')^2 - 3(y')^2.$$

Observação 2: Note que as linhas (ou colunas) de P são ortonormais. Como consequência disso, seu determinante é igual a 1 ou -1.

Observação 3: Se $\det P = -1$, a base de autovetores é denominada **base negativa**. Podemos fazer uma troca de linhas (ou de colunas) na matriz P para fazer com que o determinante seja igual a 1. Assim, a base de autovetores passa a ser chamada de **base positiva**.

Exemplo 9.8. Reduzir à forma canônica: $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 16z^2 + 8xz$.

Solução: Essa forma quadrática pode ser escrita na forma

$$q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{bmatrix}}_{= M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores e autovetores de M. Inicialmente, calculamos seu polinômio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 17\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 17).$$

Resolvendo a equação $p(\lambda) = 0$ obtemos os autovalores de M: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 17$ e $\lambda_3 = 1$.

Substituímos cada autovalor na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$ para encontrar os autovetores.

- Substituindo λ por 0, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 4z = 0 \\ y = 0 \\ 4x + 16z = 0 \end{cases}.$$

  A solução desse sistema linear é: $x = -4z$, $y = 0$. Daí, temos que $(-4z, 0, z)$ é autovetor de M, para qualquer valor de z. Escolhendo $z = 1$ e dividindo pela norma, obtemos $v_1 = \left(-\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

- Substituindo λ por 17, obtemos

$$\begin{bmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -16 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -16x + 4z = 0 \\ -16y = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}.$$

  A solução desse sistema linear é: $z = 4x$, $y = 0$. Daí, temos que $(x, 0, 4x)$ é autovetor de M, para qualquer valor de x. Escolhendo $x = 1$ e dividindo pela norma, obtemos $v_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{17}},\ 0,\ \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

- Substituindo λ por 1, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 0 \\ 4x + 15z = 0 \end{cases}.$$

  A solução desse sistema linear é: $x = 0$, $z = 0$ e y livre. Daí, temos que $(0, y, 0)$ é autovetor de M, para qualquer valor de y. Escolhendo $y = 1$, obtemos $v_3 = (0,\ 1,\ 0)$.

Definimos uma matriz $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & 0 \end{bmatrix}$ cujas colunas são os autovetores encontrados.

Fazemos a mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} \frac{-4x'+y'}{\sqrt{17}} \\ z' \\ \frac{x'+4y'}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$ na forma quadrática

$$\begin{aligned}
q &= x^2 + y^2 + 16z^2 + 8xz \\
&= \left(\frac{-4x' + y'}{\sqrt{17}}\right)^2 + (z')^2 + 16\left(\frac{x' + 4y'}{\sqrt{17}}\right)^2 + 8\left(\frac{-4x' + y'}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{x' + 4y'}{\sqrt{17}}\right) \\
&= \frac{\cancel{16(x')^2} \cancel{-8(x')(y')} + (y')^2}{17} + (z')^2 + \frac{\cancel{16(x')^2} + \cancel{128(x')(y')} + 256(y')^2}{17} \\
&\quad + \frac{\cancel{-32(x')^2} \cancel{-120(x')(y')} + 32(y')^2}{17} = \frac{289(y')^2}{17} + (z')^2 = 17(y')^2 + (z')^2.
\end{aligned}$$

Logo, a forma canônica procurada é $q(x',\, y',\, z') \;=\; 17(y')^2 + (z')^2$.

Observação: Esses cálculos também podem ser realizados com a equação no formato matricial:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} P^{-1} M P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\
&= 17(y')^2 + (z')^2.
\end{aligned}$$

9.6 Classificação de Cônicas e Quadráticas

9.6.1 Cônicas

Uma **cônica** é uma curva plana que pode ser descrita por uma equação geral do segundo grau nas variáveis x e y:

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\text{parte quadrática}} + Dx + Ey + F = 0$$

Essa equação também pode ser escrita no formato de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0.$$

Através de uma mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, podemos reduzir a parte quadrátrica dessa equação à forma canônica, eliminando o termo Cxy:

$$A'(x')^2 + B'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

A partir daí, podemos completar os quadrados e identificar qual cônica está relacionada com a equação: parábola, elipse, hipérbole ou um caso degenerado como um ponto, um par de retas etc.

Exemplo 9.9. Identificar a cônica definida pela equação $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

Solução: O formato matricial da equação dessa cônica é

$$[x \;\; y] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{=\,M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [x \;\; y] \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} - 7 = 0.$$

O polinômio característico de M é $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda$ e seus autovalores são 0 e 5. Substituindo cada um desses autovalores na equação $\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtemos:

- $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(2y,\, y)$. Fazendo $y = 1$ e dividindo pela norma, obtemos o autovetor unitário $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

- $\lambda = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$, que tem por solução é $(x,\, -2x)$. Fazendo $x = 1$ e dividindo pela norma desse vetor, obtemos $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$.

Seja $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, a matriz cujas colunas são os autovetores de M. Na equação da cônica, substituímos x por x' e y por y', onde x', y' satisfazem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \\ \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim a equação

$$\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2-4\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{5}}-\frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)$$
$$+4\left(\frac{x'}{\sqrt{5}}-\frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)^2-4\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}}\right)-3\left(\frac{x'}{\sqrt{5}}-\frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)-7=0$$

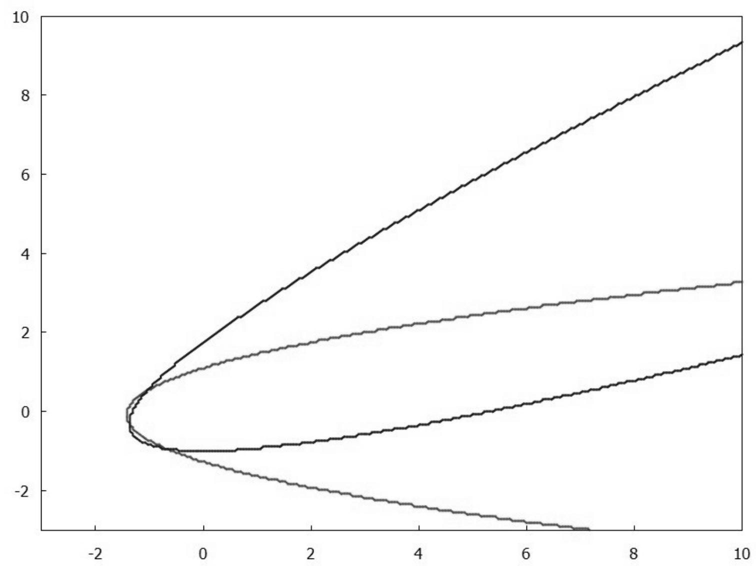
que, ao ser simplificada, resulta em

$$5\sqrt{5}(y')^2+2y'-11x'-7\sqrt{5}=0,$$

ou seja,

$$x'=\frac{5\sqrt{5}(y')^2+2y'-7\sqrt{5}}{11}$$

que é a equação de uma **parábola** cujo gráfico está mostrado a seguir.



Exemplo 9.10. Identificar a cônica definida pela equação

$$9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0.$$

Solução: Essa equação pode ser escrito no formato matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}9 & -2\\ -2 & 6\end{bmatrix}}_{=\,M}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\ -8\end{bmatrix}-2=0$$

O polinômio característico de M é $p(\lambda)=\det(M-\lambda I)=\lambda^2-15\lambda+50$ e seus autovalores são 5 e 10. Substituindo cada um desses autovalores na equação $\begin{bmatrix}9-\lambda & -2\\ -2 & 6-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, obtemos:

- $\lambda = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(x,\, 2x)$. Fazendo $x = 1$ e dividindo pela norma, obtemos o autovetor unitário $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

- $\lambda = 10 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(-2y,\, y)$. Escolhendo $y = 1$ e dividindo pela norma do vetor, obtemos o autovetor $u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Sejam $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, a matriz cujas colunas são os autovetores de M. Na equação da cônica, substituímos x por x' e y por y', onde x', y' satisfazem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim a equação

$$9\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) + 6\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ + 16\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) - 2 = 0$$

que ao ser simplificada fornece o resultado

$$10(y')^2 - 8\sqrt{5}y' + 5(x')^2 - 2 = 0$$

Podemos completar o quadrado de $10(y')^2 - 8\sqrt{5}y'$ da seguinte forma:

$$10(y')^2 - 8\sqrt{5}y' = 10\left[(y')^2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}y'\right]$$

$$= 10\left[(y')^2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}y' + \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2\right] = 10\left[(y')^2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}y' + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\right]$$

$$= 10\left[(y' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - \frac{4}{5}\right] = 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 8.$$

Assim, a equação anterior equivale a

$$5(x')^2 + 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 8 = 2$$

que é o mesmo que

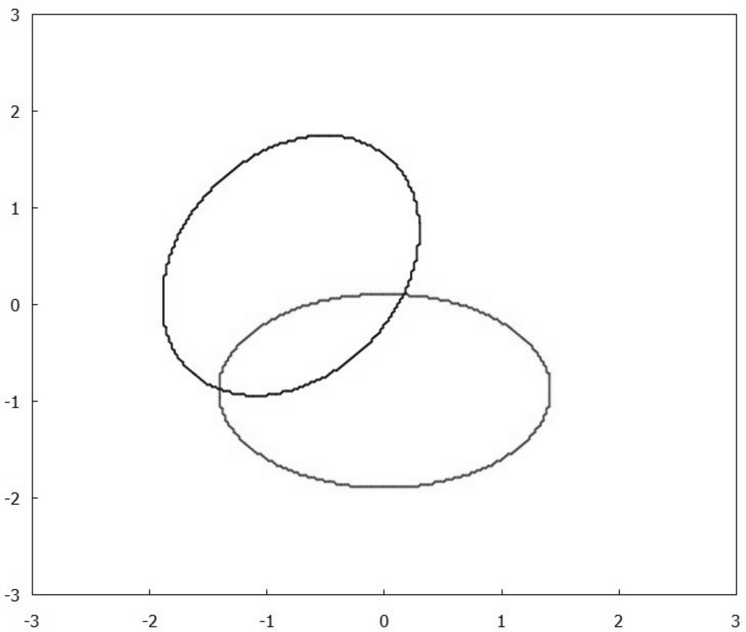
$$5(x')^2 + 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 10.$$

Dividindo por 10

$$\frac{(x')^2}{2} + \left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

que é a equação de uma **elipse** centrada em $(0, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Os gráficos dessas duas equações estão mostrado a seguir.



Observação: Para completar o quadrado de $Y^2 - BY$, somamos e subtraímos $(\frac{B}{2})^2$:

$$Y^2 - BY = Y^2 - BY + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \left(Y - \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2.$$

9.6.2 Quádricas

Uma **quádrica** é uma superfície tridimensional que pode ser descrita por uma equação geral do segundo grau nas variáveis x, y e z:

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz}_{\text{parte quadrática}} + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Essa equação também pode ser escrita em forma de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + J = 0.$$

Através de uma mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, podemos reduzir a parte quadrátrica dessa equação à forma canônica, eliminando os termos Dxy, Exz e Fyz:

$$A'(x')^2 + B'(y')^2 + C'(z')^2 + G'x' + H'y' + I'z' + J' = 0.$$

Depois disso, podemos completar os quadrados e identificar qual é a quádrica relacionada: elipsóide, parabolóide, hipérbolóide, um caso degenerado etc.

Exemplo 9.11. Classificar a quádrica definida pela equação $xy + xz + yz = 3$.

Solução: A equação dessa quádrica pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{=\,M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3$$

O polinômio característico de M é $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}$ cujas raízes são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Substituindo $\lambda = 1$ na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$: $\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = y = z$, ou seja (x, x, x) para todo $x \in \mathbb{R}$. Escolhendo $x = 1$, obtemos um autovetor $v_1 = (1, 1, 1)$ que, ao ser dividido pela sua norma, fornece o autovetor unitário $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Substituindo $\lambda = -\frac{1}{2}$ na equação: $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y + z) = 0$ cuja solução é $z = -x - y$, ou seja $(x, y, -x - y)$ para quaisquer

$x, y \in \mathbb{R}$. Escolhendo $x = 1$ e $y = 0$, obtemos um autovetor $v_2 = (1, 0, -1)$, e escolhendo $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $v_3 = (0, 1, -1)$. Como $\langle v_2,\ v_3\rangle \neq 0$, temos que v_2 e v_3 não são ortogonais, logo, precisamos aplicar um procedimento de ortogonalização:

- $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

- $w_3 = v_3 - \langle v_3,\ u_2\rangle u_2 = (0, 1, -1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$,
  $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$

É claro que u_1 é ortogonal a u_2 e a u_3 porque eles pertencem a autovalores diferentes e M é simétrica.

Obtemos assim a base ortonormal de autovetores de M como sendo $\{u_1, u_2, u_3\}$. Definimos agora P como sendo a matriz cujas colunas são esses autovetores encontrados:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

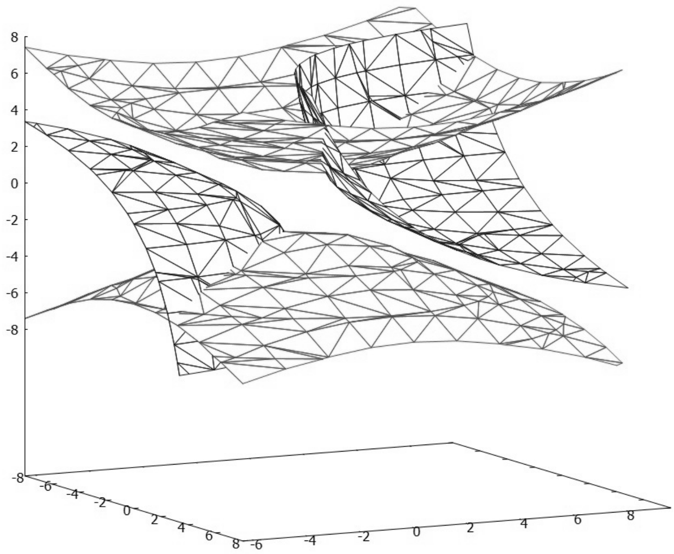
Na equação dada, fazemos a mudança de variável

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{6}} \\ \frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}} \\ \frac{x'}{\sqrt{3}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

de onde obtemos

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{3}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{6}}\right) \\ + \left(\frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{3}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{6}}\right) = 3$$

que, depois de simplificada, leva a $(x')^2 - \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2} = 3$ que é a equação de um **hiperbolóide de duas folhas**. Os gráficos que correspondem a essas equações estão representados a seguir.



Exemplo 9.12. Classificar a quádrica

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0.$$

Solução: Escrita em forma matricial, a equação dessa quádrica é

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{=\,M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 10 = 0$$

O polinômio característico de M é $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36$ cujas raízes são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$.

Substituindo $\lambda = 2$ na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = -z$, $y = 0$, ou seja $(-z, 0, z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Escolhendo $z = -1$, obtemos um autovetor $v_1 = (1, 0, -1)$ que, ao ser dividido pela sua norma, fornece o autovetor unitário $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Substituindo $\lambda = 3$ na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = z$, $y = z$, ou seja (z, z, z) para todo $z \in \mathbb{R}$. Escolhendo $z = 1$, obtemos um autovetor $v_2 = (1, 1, 1)$ que, ao ser dividido pela sua norma, fornece o autovetor unitário $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Substituindo $\lambda = 6$ na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$: $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = z$, $y = -2z$, ou seja $(z, -2z, z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Escolhendo $z = 1$, obtemos $v_3 = (1, -2, 1)$ que, ao ser dividido pela sua norma, fornece o autovetor unitário $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Obtemos assim a base ortonormal de autovetores $\{u_1, u_2, u_3\}$ de M. Definimos agora P como sendo a matriz cujas colunas são os autovetores encontrados: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Na equação dada, fazemos a mudança de variável

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}} \\ \frac{y'}{\sqrt{3}} - \frac{2z'}{\sqrt{6}} \\ -\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

e depois de uma simplificação obtemos o resultado

$$2(x')^2 + 3(y')^2 + 6(z')^2 - 6\sqrt{2}x' - 4\sqrt{3}y' - 2\sqrt{6}z' - 10 = 0.$$

Para completar os cálculos, devemos agora completar os quadrados nas variáveis x', y', z'.

Em geral, para completar o quadrado de uma expressão como $X^2 \pm BX$, devemos somar e subtrair o termo constante $(\frac{B}{2})^2$. Depois disso, usamos que

$$X^2 \pm BX + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \left(X \pm \frac{B}{2}\right)^2$$

Vamos aplicar três vezes esse tipo de procedimento de cálculo com partes da equação obtida anteriormente:

- $2(x')^2 - 6\sqrt{2}x' = 2\left[(x')^2 - 3\sqrt{2}x' + (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2\right]$

$$= 2\left[\underbrace{(x')^2 - 3\sqrt{2}x' + \frac{9}{2}}_{(x'-\frac{3}{\sqrt{2}})^2} - \tfrac{9}{2}\right] = 2\left(x' - \tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 9$$

- $3(y')^2 - 4\sqrt{3}y' = 3[(y')^2 - \frac{4\sqrt{3}y'}{3} + (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2] = 3[\underbrace{(y')^2 - \dfrac{4\sqrt{3}y'}{3} + \dfrac{4}{3}}_{(y'-\frac{2}{\sqrt{3}})^2} - \frac{4}{3} =$

  $3(y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 4$

- $6(z')^2 - 2\sqrt{6}z' = 6[(z')^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}z' + (\frac{\sqrt{6}}{6})^2 - (\frac{\sqrt{6}}{6})^2] = 6\left[\underbrace{(z')^2 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}z' + \dfrac{1}{6}}_{(z'-\frac{1}{\sqrt{6}})^2} - \frac{1}{6}\right]$

  $= 6\left(z' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1$

Com os quadrados completados, a equação fica na forma

$$2(x' - \frac{3}{\sqrt{2}})^2 - 9 + 3(y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 4 + 6(z' - \frac{1}{\sqrt{6}})^2 - 1 = 10,$$

ou seja,

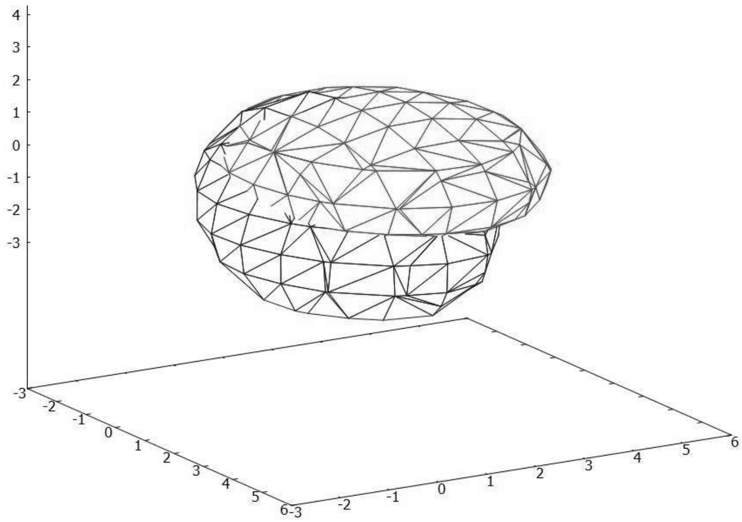
$$2(x' - \frac{3}{\sqrt{2}})^2 + 3(y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 + 6(z' - \frac{1}{\sqrt{6}})^2 = 24$$

Dividindo a equação por 24:

$$\frac{(x' - \frac{3}{\sqrt{2}})^2}{12} + \frac{(y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2}{8} + \frac{(z' - \frac{1}{\sqrt{6}})^2}{4} = 1$$

que é a equação de um **elipsóide** com centro no ponto $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Os gráficos correspondentes às equações estão apresentados na imagem a seguir.



Exemplo 9.13. Identificar a quádrica

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$$

Solução: O formato matricial da equação dessa quádrica é

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix}}_{=\,M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} + 72 = 0.$$

O polinômio característico de M é $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 81\lambda$ e seus autovalores são 0, -9 e 9. Substituindo cada um desses autovalores na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$, obtemos os sistemas lineares

- $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 8z = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(2z,\, 2z,\, z)$. Fazendo $z = 1$ e dividindo pela norma, obtemos o autovetor unitário $u_1 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

- $\lambda = -9 \Rightarrow \begin{cases} 13x - 5y + 2z = 0 \\ -5x + 13y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(-\frac{z}{4},\, -\frac{z}{4},\, z)$. Fazendo $z = 4$ e dividindo pela norma, obtemos o autovetor $u_2 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},\, -\frac{1}{3\sqrt{2}},\, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$.

- $\lambda = 9 \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y + 2z = 0 \\ -5x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 17z = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(x,\, -x,\, 0)$. Fazendo $x = 1$

e dividindo pela norma, obtemos o autovetor $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Seja P a matriz 3×3 cujas colunas são os autovetores de M:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de P, definimos a mudança de variável

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{3} - \frac{y}{3\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{3\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{3} + \frac{4z}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

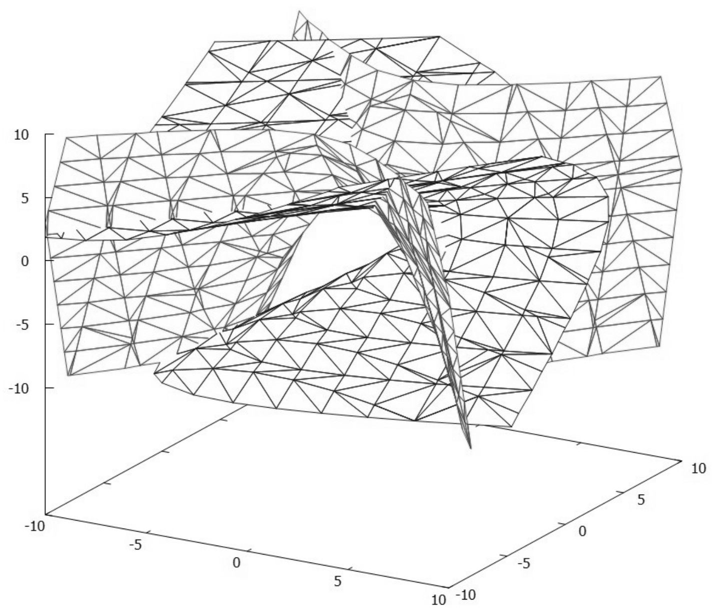
que ao ser substituída na equação da quádrica e simplificado, fornece o resultado

$$9(z')^2 - 9(y')^2 - 24x' + 72 = 0,$$

ou seja,

$$x' - 3 = \frac{3}{8}\left((z')^2 - (y')^2\right).$$

que é a equação de um **parabolóide hiperbólico** (sela), centrado no ponto $(3, 0, 0)$. Os gráficos das equações nas variáveis x, y, z e x', y', z' estão mostrados a seguir.



9.7 Exercícios Resolvidos

R1) Seja $V = C([a,b])$ o espaço vetorial das funções reais contínuas em um intervalo $[a,b]$. Mostre que $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$B(x,y) \;=\; \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

é uma forma bilinear, onde $K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua de duas variáveis.

Solução: Sejam $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} B(cx_1 + x_2, y) &= \int_a^b \int_a^b K(s,t)[(cx_1 + x_2)(s)y(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \int_a^b K(s,t)[cx_1(s) + x_2(s)]y(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \end{aligned}$$

$$\int_a^b \int_a^b [K(s,t)\cdot cx_1(s)y(t) + K(s,t)\cdot x_2(s)y(t)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = c\int_a^b \int_a^b K(s,t)x_1(s)y(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_a^b \int_a^b K(s,t)x_2(s)y(t)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = cB(x_1,y) + B(x_2,y)$$

$$\begin{aligned} B(x, cy_1 + y_2) &= \int_a^b \int_a^b K(s,t)[x(s)(cy_1 + y_2)(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \int_a^b [K(s,t)x(s)\cdot cy_1(t) + K(s,t)x(s)y_2(t)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= c\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y_1(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y_2(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= cB(x,y_1) + B(x,y_2) \end{aligned}$$

Portanto, B é uma forma bilinear.

R2) Determine a forma canônica da forma quadrática do $\mathbb{R}^4$

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; 2x_1x_4 + 6x_2x_3$$

usando um procedimento idêntico ao das formas do $\mathbb{R}^3$.

Solução: A equação da forma quadrática escrita em forma matricial é

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de M é $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9$ e seus autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = -3$. Substituindo λ por cada um desses autovalores na equação $(M - \lambda I)X = \mathbf{0}$, obtemos:

- $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + t = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$
  $\Rightarrow x = t, y = 0, z = 0 \Rightarrow (t, 0, 0, t)$ é autovetor para qualquer valor de $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1$, temos que $w_1 = (1, 0, 0, 1)$ é um autovetor.

- $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$
  $\Rightarrow x = -t, y = 0, z = 0 \Rightarrow (-t, 0, 0, t)$ é autovetor, para todo $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1$, temos o autovetor $w_2 = (-1, 0, 0, 1)$.

- $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + t = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ x - 3t = 0 \end{cases}$
  $\Rightarrow x = 0, y = z, t = 0 \Rightarrow (0, z, z, 0)$ é autovetor para todo z. Escolhendo $z = 1$, temos que $w_3 = (0, 1, 1, 0)$ é um autovetor.

- $\lambda = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + t = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ x + 3t = 0 \end{cases}$
  $\Rightarrow x = 0, y = -z, t = 0 \Rightarrow (0, -z, z, 0)$ é autovetor. Escolhendo $z = 1$, temos o autovetor $w_3 = (0, -1, 1, 0)$.

Dividindo cada w_i pela sua norma, obtemos uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de M:

- $v_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$
- $v_2 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$
- $v_3 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = (0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
- $v_4 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = (0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Seja P a matriz cujas colunas são v_1, v_2, v_3 e v_4, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Usando P, fazemos a seguinte mudança de variável:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y'+x'}{\sqrt{2}} \\ \frac{t'+z'}{\sqrt{2}} \\ \frac{t'-z'}{\sqrt{2}} \\ \frac{y'-x'}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

que substuindo em $q(x_1, x_2, x_3, x_4)$, fornece

$$q = 2\left(\frac{y'+x'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y'-x'}{\sqrt{2}}\right) + 6\left(\frac{t'+z'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{t'-z'}{\sqrt{2}}\right) = -(x')^2 + (y')^2 - 3(z')^2 + 3(t')^2.$$

Portanto, a forma canônica de q é $-(x')^2 + (y')^2 - 3(z')^2 + 3(t')^2$.

Observação 1: Note que os coeficientes da forma canônica são os autovalores de M.

Observação 2: A matriz da forma quadrática do $\mathbb{R}^4$

$q(x_1, x_2, x_3, x_4) =$
$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_4^2 + Ex_1x_2 + Fx_1x_3 + Gx_1x_4 + Hx_2x_3 + Ix_2x_4 + Jx_3x_4$

é

$$M = \begin{bmatrix} A & E/2 & F/2 & G/2 \\ E/2 & B & H/2 & I/2 \\ F/2 & H/2 & C & J/2 \\ G/2 & I/2 & J/2 & D \end{bmatrix}$$

R3) Determine uma mudança de variável que permita obter a forma canônica de

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_4^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3+8x_2x_4+4x_3x_4.$$

Solução: Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, então $q(X) = XMX^t$.

O polinômio característico de M é $p(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 10)$. A partir daí, temos os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$.

Substituindo λ por 0, obtemos $\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x + 4y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x + 4y + z + 2t = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = -2y - z - 2t$ para quaisquer $y, z, t \in \mathbb{R}$. Logo, os autovetores são da forma $(-2y - z - 2t, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-2, 0, 0, 1)$. Obtemos assim os autovetores $w_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $w_2 = (-1, 0, 1, 0)$ e $w_3 = (-2, 0, 0, 1)$. Como o conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ não é ortogonal, devemos aplicar um processo de ortogonalização desses vetores.

- $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0)$
- $v_2 = w_2 - \langle w_2,\ u_1\rangle u_1 = (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0)$, $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, 0)$
- $v_3 = w_3 - \langle w_3,\ u_1\rangle u_1 - \langle w_3,\ u_2\rangle u_2 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$, $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$

Logo, $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto ortonormal de autovetores de M.

Substituindo λ por 10, obtemos $\begin{cases} -9x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x - 6y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2y - 9z + 2t = 0 \\ 2x + 4y + 2z - 6t = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = t/2, y = t, z = t/2$ para qualquer valor de t. Escolhendo $t = 2$, obtemos o autovetor $w_4 = (1,2,1,2)$ que dividido pela sua norma, fornece o autovetor unitário $u_4 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$.

Seja $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ a matriz cujas colunas são os autovetores u_1, u_2, u_3 e u_4. Fazendo a mudança de variável

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{30}}y - \frac{1}{\sqrt{15}}z + \frac{1}{\sqrt{10}}t \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{30}}y - \frac{2}{\sqrt{15}}z + \frac{2}{\sqrt{10}}t \\ \frac{5}{\sqrt{30}}y - \frac{1}{\sqrt{15}}z + \frac{1}{\sqrt{10}}t \\ \frac{3}{\sqrt{15}}z + \frac{2}{\sqrt{10}}t \end{bmatrix}$$

em $q(x_1, x_2, x_3, x_4)$, após a simplificação, obtemos a forma canônica desejada: $q(x, y, z, t) = 10t^2$.

9.8 Exercícios Propostos

1) Se q é a forma quadrática associada a uma forma bilinear simétrica f, então mostre que $f(u, v) = \dfrac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$.
Resp.: Desenvolva $f(u+v, u+v)$ e $f(u-v, u-v)$ e subtraia os resultados.

2) Sejam V um espaço vetorial com escalares reais e f, g funções lineares de V em $\mathbb{R}$. Mostre que $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $B(x,y) = f(x)g(y)$ é uma forma bilinear.
Resp.: Verifique que $B(ax_1 + x_2, y) = aB(x_1, y) + B(x_2, y)$ e $B(x, ay_1 + y_2) = aB(x, y_1) + B(x, y_2)$

3) Sejam $M = \begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{bmatrix}$ e β a base do $\mathbb{R}^3$ cujos vetores são as colunas de M. Mostre que M é uma matriz ortogonal e que β é uma base ortonormal.
Resp.: Verifique que $M.M^t = M^t.M = I$.

4) Para cada um dos itens a seguir, determine a matriz simétrica A da forma quadrática q, seus autovalores, a matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal e a forma canônica de q.

a) $q(x_1,x_2) \;=\; 7x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2$

b) $q(x_1,x_2) \;=\; 6x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$

c) $q(x_1,x_2,x_3) \;=\; 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

d) $q(x_1,x_2,x_3) \;=\; x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

e) $q(x_1,x_2,x_3) \;=\; 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

Resp.: a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$, $P = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $q = -2x^2 + 8y^2$;
b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 2$, $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $q = 7x^2 + 2y^2$;
c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $q = 10x^2 + y^2 + z^2$;
d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $q = 3x^2 - 2y^2$;
e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$, $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $q = x^2 + 4y^2 - 2z^2$;

5) Para cada item a seguir, determine uma matriz ortogonal P e uma mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ de modo a eliminar o termo misto Cxy de cada equação e, por fim, classificar a cônica representada pela equação.

a) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

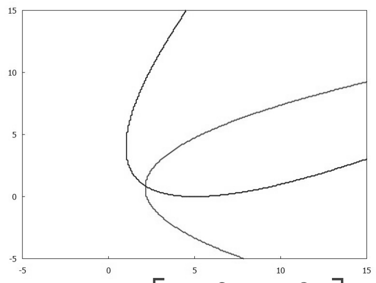
b) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$

c) $27x^2 - 10xy + 3y^2 = 28$

d) $x^2 + y^2 + 8xy - 10x + 20y - 35 = 0$

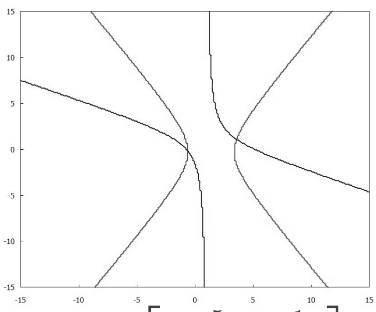
e) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$

Resp.: a) $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $\quad 5(y')^2 - 3\sqrt{5}x' - 4 = 0$



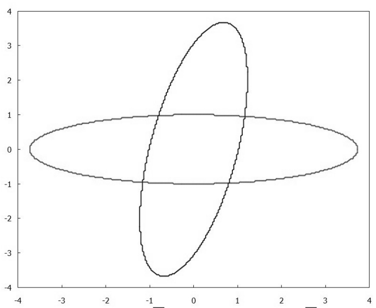
Parábola;

b) $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$, $\quad 9(x')^2 - 4(y')^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' - \frac{8}{\sqrt{13}}y' = 19$



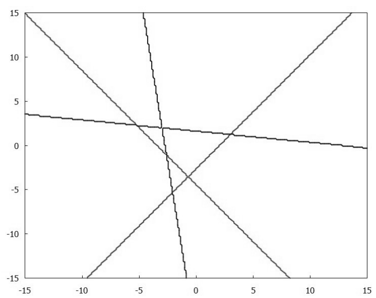
Hipérbole;

c) $P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ -\frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}$, $\quad \frac{(x')^2}{14} + (y')^2 = 1$



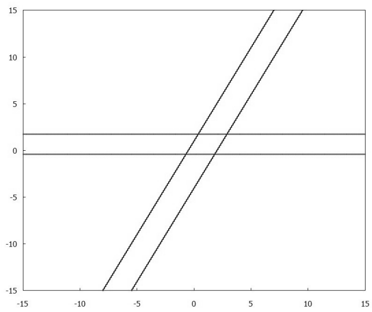
Elipse;

d) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\quad 5(y')^2 + 5\sqrt{2}y' - 3(x')^2 - 15\sqrt{2}x' = 35$



Par de retas concorrentes;

e) $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$, $\quad 9(x')^2 - 4(y')^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' - \frac{8}{\sqrt{13}}y' = 19$



Par de retas paralelas;

6) Para cada item a seguir, determine uma matriz ortogonal P e uma mudança de variável $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ de modo a eliminar os termos mistos Cxy, Dxz e Eyz de cada equação e, finalmente, identificar a quádrica representada pela equação.

a) $xy - xz + yz = 10$

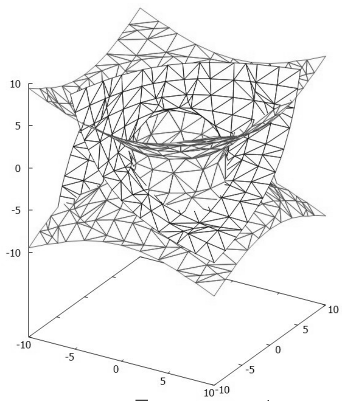
b) $xy + xz + 10 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y + 6z + 8 = 0$

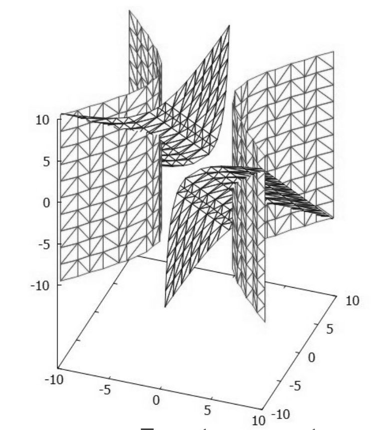
e) $6x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 8yz = 14$

Resp.: a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad -2(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 20$



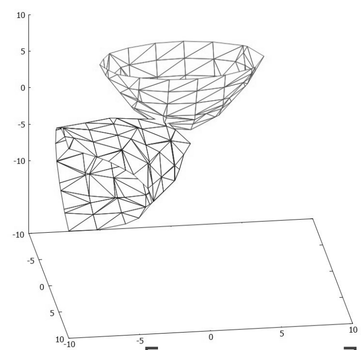
Hiperbolóide de uma folha;

b) $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (z')^2 - (y')^2 = 10\sqrt{2}$



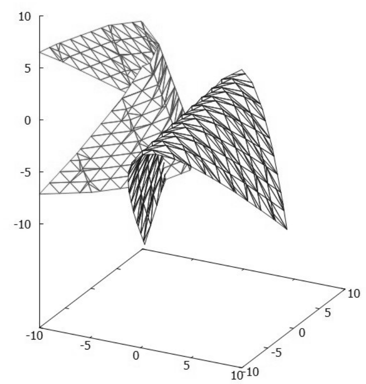
Cilindro hiperbólico;

c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, $\quad 5(z')^2 + 2(y')^2 + \sqrt{6}y' - 5\sqrt{2}x' + 3 = 0$



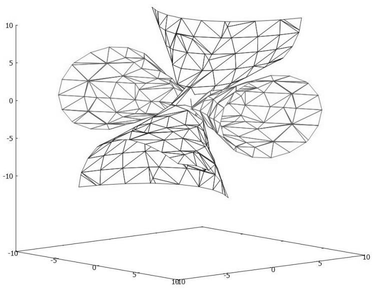
Parabolóide elíptico;

d) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad 2(x')^2 + \sqrt{2}x'2(y')^2 + 6y' + 3\sqrt{2}z' + 8 = 0$



Cilindro parabólico;

e) $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $\quad 7(x')^2 + 7(y')^2 - 2(z')^2 = 14$



Hiperbolóide de uma folha;

7) Dê exemplo da equação de uma quádrica nas variáveis x_1, x_2, x_3, que tenha algum termo misto da forma Dx_1x_2 ou Ex_1x_3 ou Fx_2x_3, cuja forma canônica da parte quadrática seja $x^2 + 4y^2 + 25z^2$.
Resp.: $5x_1^2 + 13x_2^2 + 12x_3^2 - 20x_2x_3 - 12x_1x_3 + 8x_1x_2 = 100$, por exemplo. Escolha uma matriz P de ordem 3×3 que seja ortogonal, por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$, e faça uma mudança de variáveis $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ na equação da quádrica $x^2 + 4y^2 + 25z^2 = 100$.

8) Determine a forma canônica de

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$$

e uma matriz ortogonal P utilizada na mudança de variável que resulta nessa forma.

Resp.: $q = 4x^2 + 8y^2 + 12z^2 - 4t^2$, $P = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9) Determine a forma canônica de

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$$

e uma matriz ortogonal P da mudança de variável que resulta nessa forma.

Resp.: $q = 5x^2 - 5y^2 + 5z^2 - 5r^2 + 5s^2$, $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

10) Dê exemplo de uma forma quadrática do $\mathbb{R}^4$ que tenha algum termo misto da forma Kx_ix_j, $i \neq j$, e cuja forma canônica seja $q(x,y,z,t) = 4x^2 - 6y^2 + 8z^2 - 10t^2$.

Resp.: $q = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 14x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_4 + 14x_3x_4$.

Escolha uma matriz 4×4 ortogonal, por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

e faça uma mudança de variáveis $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ na equação de q.

Apêndice A

Apoio Computacional

A.1 Um programa de Computação Algébrica

O Maxima é um programa que executa cálculos numéricos e simbólicos, em desenvolvimento há mais de 50 anos. Seu nome original era Macsyma e foi elaborado nos laboratórios do MIT, nos Estados Unidos.

É capaz de simplificar expressões algébricas e trigonométricas, efetuar cálculos com matrizes e com números complexos, construir diversos tipos de gráficos, fatorar polinômios, resolver diversos tipos de equações e sistemas, calcular limites, derivadas e integrais, resolver equações diferenciais e muitas outras coisas.

Trata-se de um programa livre. Pode ser copiado, utilizado e distribuído gratuitamente. Isso faz com que o Maxima seja uma excelente ajuda no ensino e aprendizagem dos mais diversos assuntos da Matemática, facilmente acessível a todos.

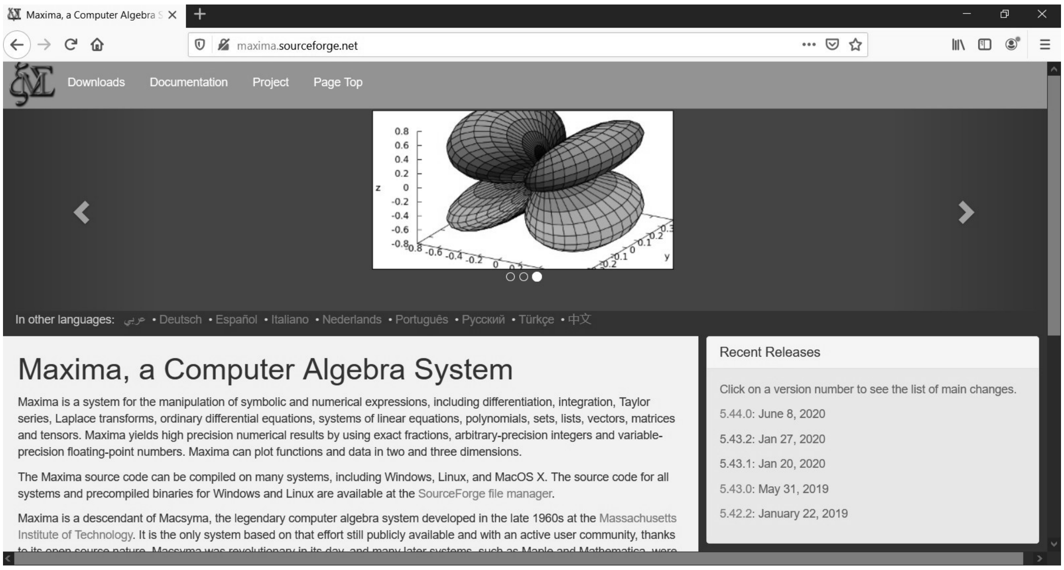
É considerado um Sistema de Computação Algébrica de uso geral, podendo ser usado nos sistemas operacionais Android, Windows, Linux e Mac-OS.

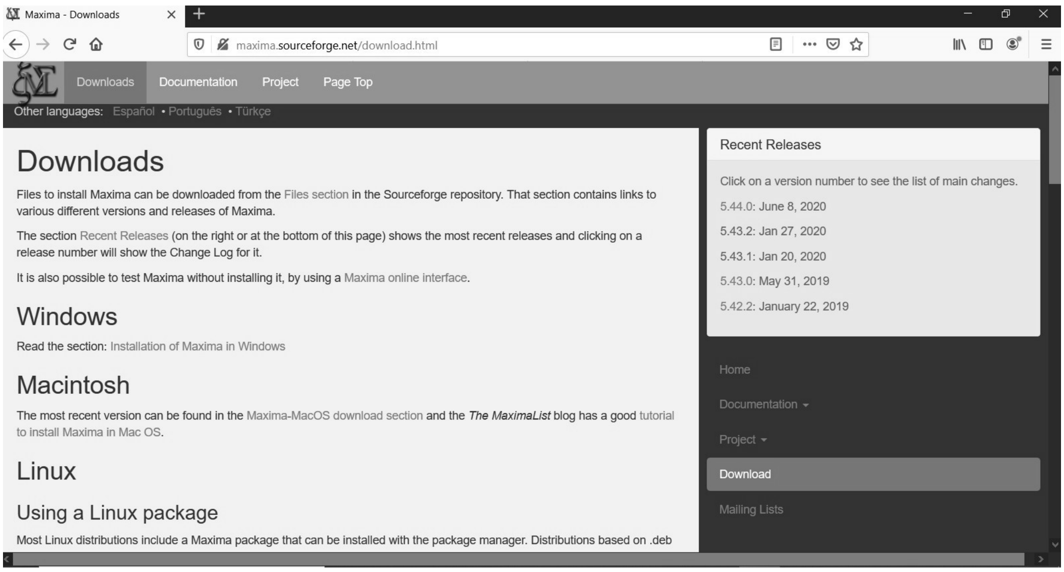
A.2 De onde copiar

O Maxima tem sua própria página na Internet, no endereço

http://maxima.sourceforge.net

É denominada *"Maxima, a Computer Algebra System"* e a partir dela pode-se copiar o programa (cerca de 140 megabytes), além da sua documentaçao em diversos idiomas.

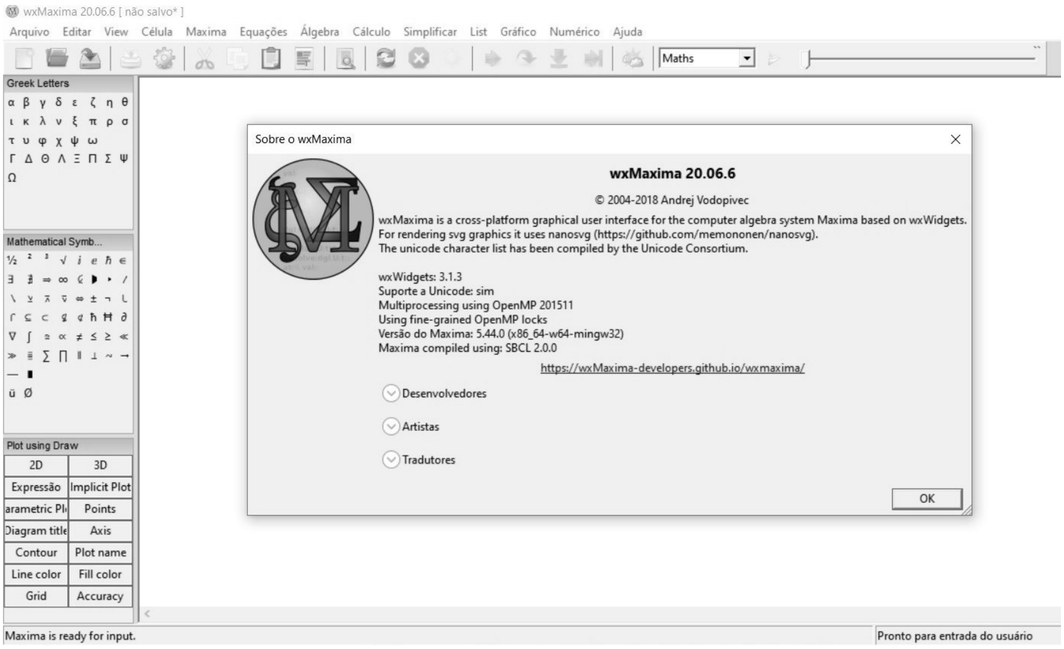




Uma versão para celular pode ser baixada a partir do *Play Store* e chama-se "Maxima on Android".

A.3 Interface wxMaxima

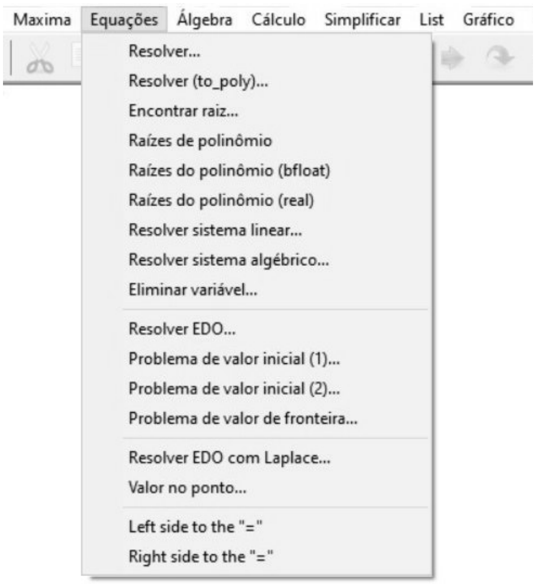
São várias as formas pelas quais o Maxima comunica-se com o usuário. Neste capítulo, citamos apenas a interface denominada wxMaxima, que é bastante amigável, intuitiva e fácil de se usar. Sua tela inicial é parecida com a mostrada a seguir:



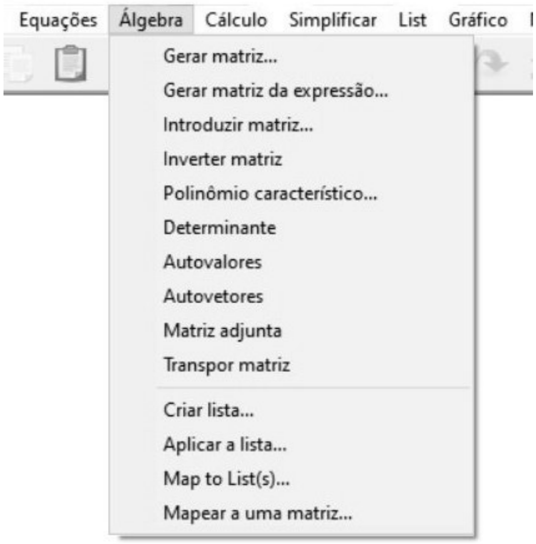
Nessa tela inicial, aparece o menu principal no topo da tela:

"Arquivo Editar View Célula Maxima Equações Álgebra Cálculo Simplificar ..."

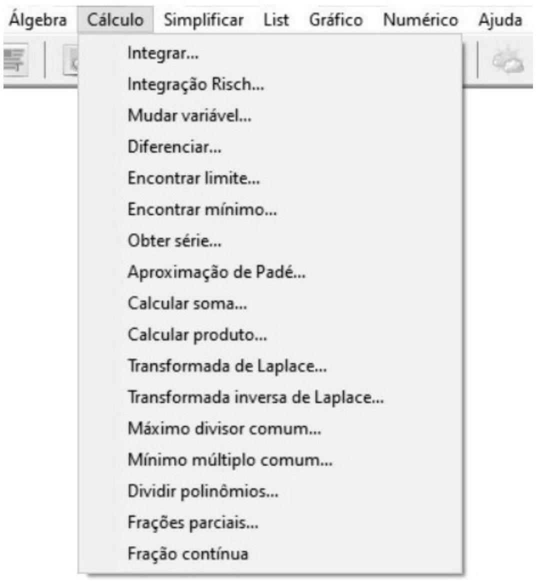
Podemos realizar muitas atividades a partir dos itens desse menu. Por exemplo, o item "Equações" dá acesso aos subitens



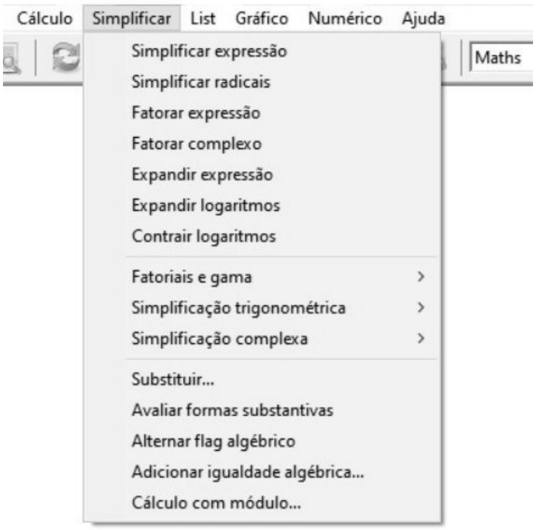
enquanto que o item "Álgebra" dá acesso a



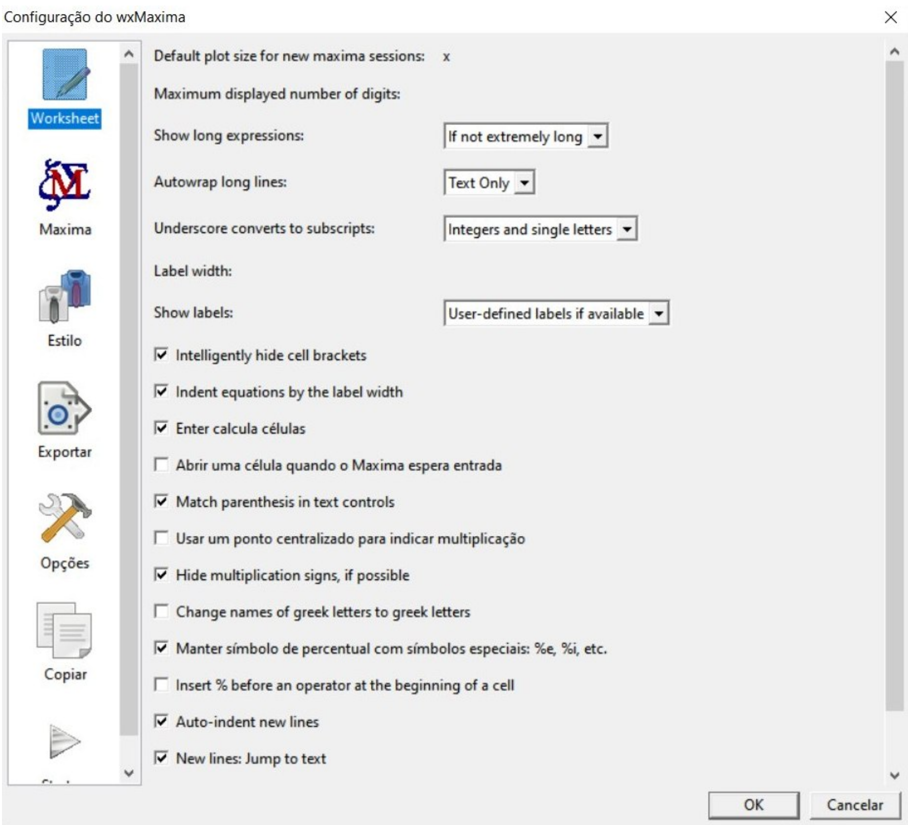
e o item "Cálculo" dá acesso a

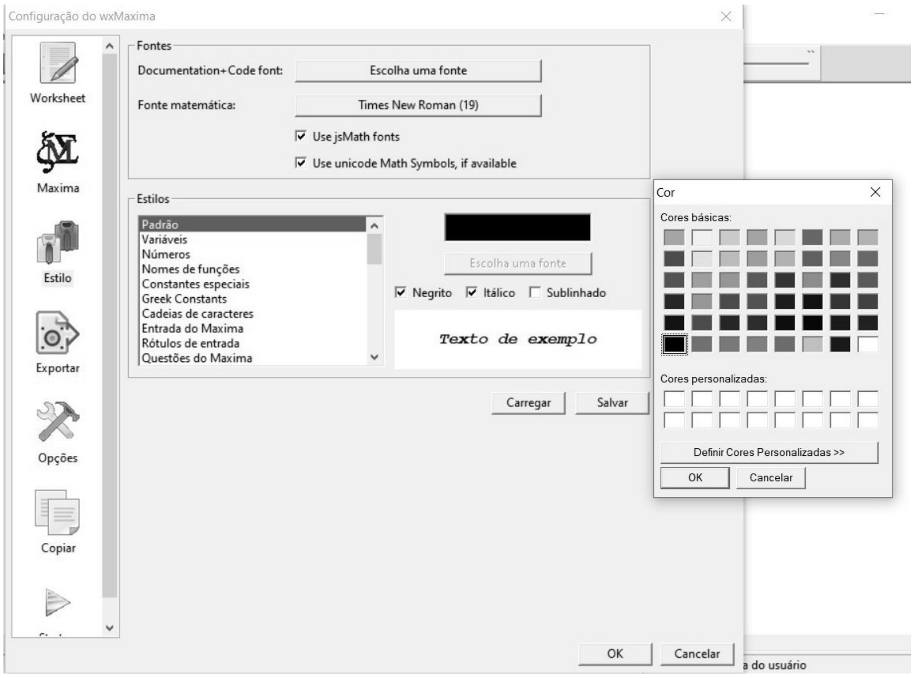


O item "Simplificar" fornece as seguintes opções:



No item "Editar" do menu, tem um subitem chamado "Configurações" onde é feita toda a configuração do programa tais como idioma utilizado, cores do texto, fontes de texto, etc. Certifique-se de que o item "☑ Enter calcula células" está marcado.





A.4 Digitando comandos

Podemos digitar os comandos para o Maxima linha por linha, e observar as respostas dadas pelo programa. Para isso, seguimos as seguintes regras:

- Os comandos vão sendo digitados ao lado de (%i1), (%i2), (%i3) etc. e o Maxima vai dando suas respostas ao lado de (%o1), (%o2), (%o3) etc. Esses são os *inputs* e *outputs*.

- A linha de comando deve ser encerrada com um ponto e vírgula ou com um cifrão. Se for encerrada com um ponto e vírgula, o resultado obtido é mostrado imediatamente. Se for encerrada com um cifrão, o resultado não será mostrado de imediato, ficando guardado internamente.

- As operações aritméticas básicas são indicadas pelos símbolos $+$, $-$, $*$ (multiplicação), / (divisáo) e ˆ (potenciação).

- A raiz quadrada de x é indicada por **sqrt(x)**, a exponencial (de base e) de x é indicada por **exp(x)**, o logaritmo natural de x é **log(x)**, as funções trigonométricas são **sin(x)**, **cos(x)**, **tan(x)**, **sec(x)**, **cot(x)**, **csc(x)** e as trigonométricas inversas são **asin(x)**, **acos(x)**, **atan(x)**.

- Uma variável pode ter seu nome formado por uma única letra como x, y, z, …ou ter um nome longo onde apareçam várias letras, algarismos e caracter de sublinhado como em $expr1$, $expr2$, $result\_1$, $result\_2$, ….

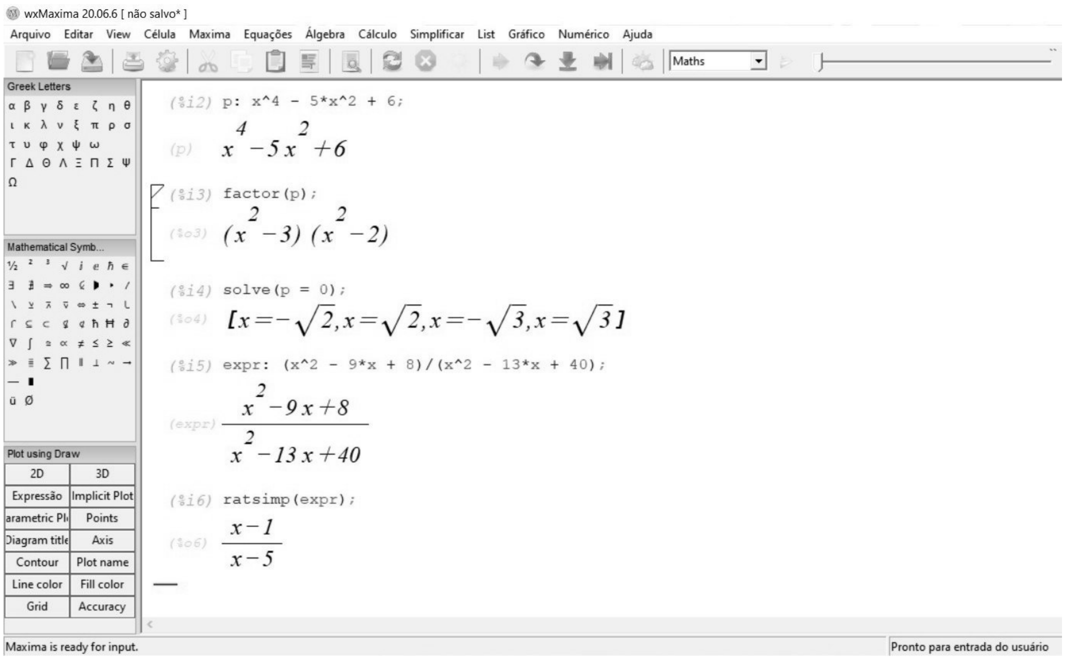
- Podemos atribuir valor a qualquer variável digitando-se o seu nome seguido de dois pontos e do valor da variável como em **x: 2; y: 4; z: -1**. Essas atribuições não devem ser confundidas com $x = 2; y = 4; z = -1$.

- O último resultado calculado pode ser referenciado por um símbolo de porcentagem (%).

- As constantes matemáticas $\pi = 3,14159\ldots$, $e = 2,71828\ldots$, $i = \sqrt{-1}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são representadas por **%pi**, **%e**, **%i** e **%phi**, respectivamente.

- Usamos o comando **float(x)** para obtermos a representação decimal de x.

- Uma função pode ser definida utilizando-se um **:=** , como no exemplo $f(x) := \cos(x) + x/5$.



A seguir, alguns exemplos de comandos digitados no *Maxima* , bem como suas respectivas respostas. Calculamos $30 \times 50 + 8 \times 10$, fatoramos o resultado em produto de potências de primos, calculamos $a = \sqrt{49}$, $b = \frac{\sqrt{81}}{6}$, $a + b$, $x = \ln(\cos(\frac{\pi}{6}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))$ e a sua representação decimal. Se o usuário quiser, pode ser digitado em uma única linha mais de um comando.

(%i1) $30*50 + 8*10;$
(%o1) 1580

(%i2) factor(%);

(%o2) $2^2\ 5\ 79$

(%i3) a: sqrt(49)$ b: sqrt(81)/6$ a+b;
(%o3) $\frac{17}{2}$

(%i4) x: log(cos(%pi/6) + sin(%pi/4)); float(x);
(%o4) $\log(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$

(%o5) 0.45306865422064

A.5 Simplificação e desenvolvimento de expressões

Expressões algébricas podem ser simplificadas com o comando **ratsimp(...)** e desenvolvidas com um comando **expand(...)**. Se houver radicais envolvidos, então a expressão pode ser simplificada com um **radcan(...)** e se houver funções trigonométricas, pode ser simplificada com um **trigsimp(...)** .

(%i6) ex1: a^3/((a-b)*(a-c)) + b^3/((b-c)*(b-a)) + c^3/((c-a)*(c-b));
(%o6) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

(%i7) ratsimp(ex1);
(%o7) $c + b + a$

(%i8) ex2: ((3*x^2+4*x+1)^2 - (3*x^2+10*x+1)^2)/((3*x^2+11*x+1)^2 - (3*x^2+3*x+1)^2);
(%o8) $\frac{(3x^2+4x+1)^2 - (3x^2+10x+1)^2}{(3x^2+11x+1)^2 - (3x^2+3x+1)^2}$

(%i9) ratsimp(ex2);
(%o9) $-\frac{3}{4}$

(%i10) y: (sin(x)^3 - cos(x)^3)/(sin(x) - cos(x));
(%o10) $\frac{\sin(x)^3 - \cos(x)^3}{\sin(x) - \cos(x)}$

(%i11) trigsimp(y);
(%o11) $\cos(x)\sin(x) + 1$

A operação de multiplicação nunca pode ficar subentendida. Por exemplo, um termo como $2xy$ tem que ser digitado como $2*x*y$. O asterisco $*$ não pode ser esquecido.

A.6 Operações com polinômios

Diversas operações com polinômios podem ser efetuadas com o Maxima. A fatoração é realizada com um comando **factor(...)**, o máximo divisor comum entre f e g é feita com um **gcd(f, g)** e a divisão com um **divide(f, g)**. O resultado da divisão é apresentado no formato $[q, r]$ onde q é o quociente e r é o resto da divisão.

Neste exemplo, definimos os polinômios $f = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 84$ e $g = (x + 4)(x^2 + x + 7)^2$, fatoramos e calculamos o MDC entre eles. Por fim, dividimos f por $x^2 + 3x + 7$.

(%i12) f: x^4 + 2*x^3 - 4*x^2 - 5*x - 84;
(%o12) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 84$

(%i13) factor(%);
(%i13) $(x - 3)(x + 4)(x^2 + x + 7)$

(%i14) g: expand((x + 4)*(x^2 + x + 7)^2);
(%o14) $x^5 + 6x^4 + 23x^3 + 74x^2 + 105x + 196$

(%i15) factor(%);
(%o15) $(x + 4)(x^2 + x + 7)^2$

(%i16) gcd(f, g);
(%o16) $x^3 + 5x^2 + 11x + 28$

(%i17) divide(f, x^2 + 3*x + 7);
(%i17) $[x^2 - x - 8,\ 26x - 28]$

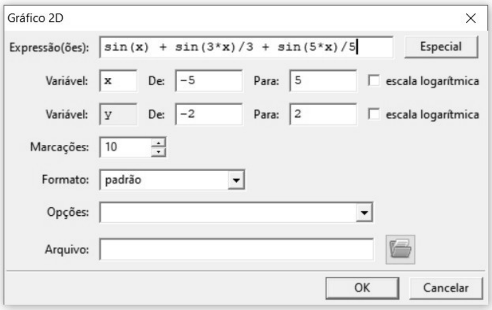
A.7 Gráficos

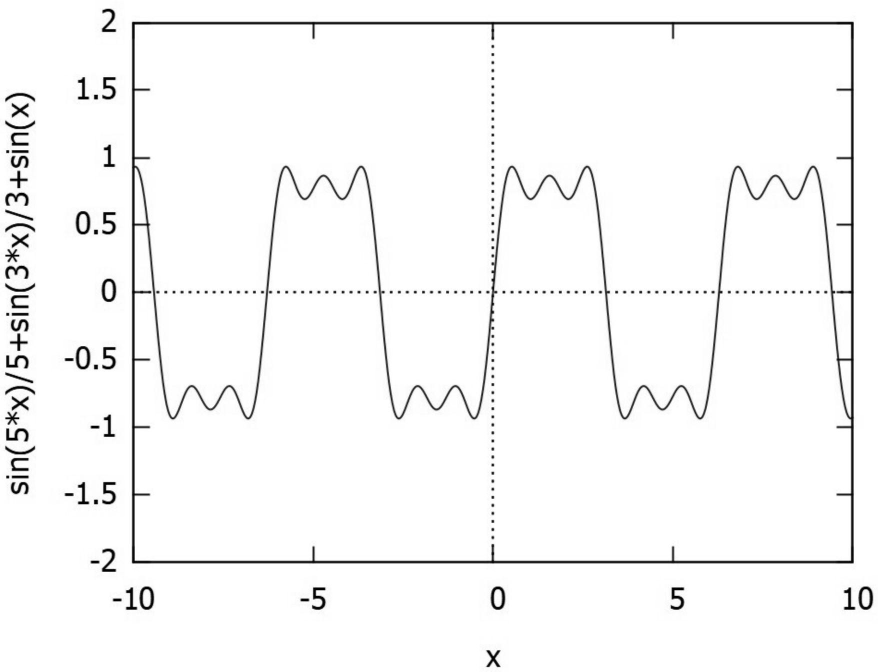
O *Maxima* constrói vários tipos de gráficos planos ou tridimensionais. A construção do mais simples tipo de gráfico plano com $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ pode ser feita com um comando

plot2D(função , [x, a, b], [y, c, d]) .

Neste exemplo construímos o gráfico de $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5}$ com x variando de -10 a 10 e y de -2 a 2. Uma janela exclusiva para a digitação dos dados do gráficos pode ser obtida com a opção "Gráfico→Gráfico2D ..." do menu principal.

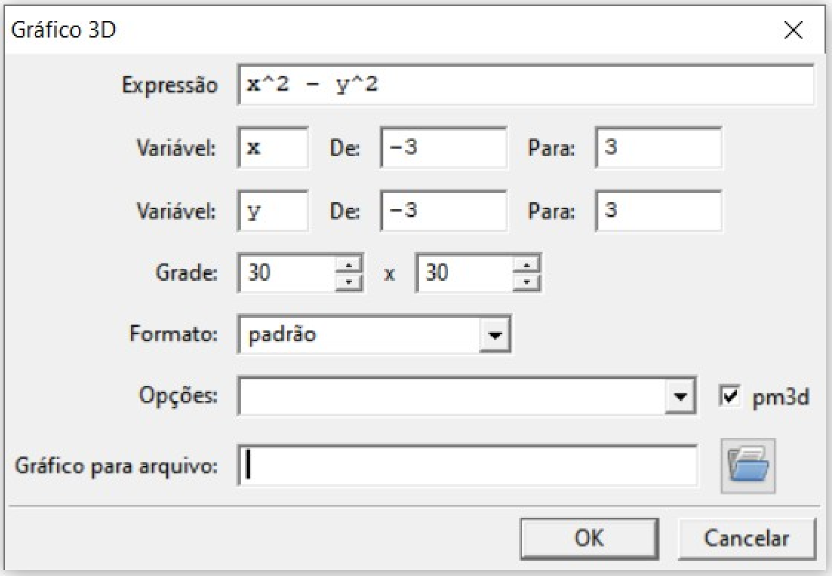
(%i18) plot2D(sin(x) + sin(3*x)/3 + sin(5*x)/5, [x, -10, 10], [y, -2, 2]);

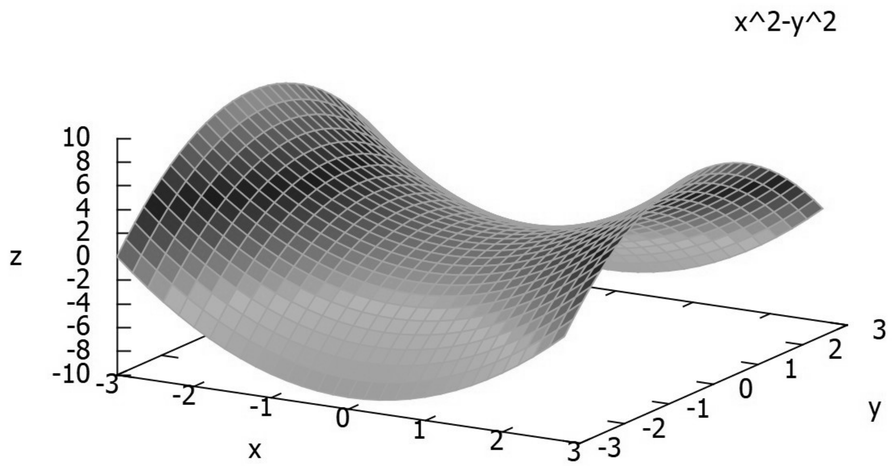




O gráfico tridimensional de uma função $f(x, y)$, com $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ pode ser construído com um comando **plot3d(f(x,y), [x, a, b], [y, a, b])** ou fornecendo-se os dados do gráfico na janela "Gráfico → Gráfico3D ..." no menu principal do programa.

(%i19) plot3d(x^2 - y^2, [x, -3, 3], [y, -3, 3]);





Depois de construído, um gráfico tridimensional construído com a opção padrão pode ser girado pressionando-se o *mouse* e arrastando-o para uma nova posição .

A.8 Gráficos de funções implícitas

O Maxima possui um pacote extra de comandos gráficos chamado **draw**. Para usar os comandos desse pacote, deve-se carregá-lo uma única vez com um comando **load(draw);**.

Entre as várias construções possíveis com o pacote draw, vamos exemplificar apenas a construção de gráficos planos ou tridimensionais definidos implicitamente.

- implicit(equação, x, x_{min}, x_{max}, y, y_{min}, y_{max}, $\ldots$); define implicitamente gráfico plano ou tridimensional, com variáveis dentro dos limites estabelecidos.

- draw2d(gráfico2D, opções2D); desenha gráfico plano usando as opções dadas.

- opções2D podem ser color=... (cor do gráfico), line_width=... (largura do traço), xaxis=true (desenha o eixo dos x), yaxis=true (desenha o eixo dos y), etc.

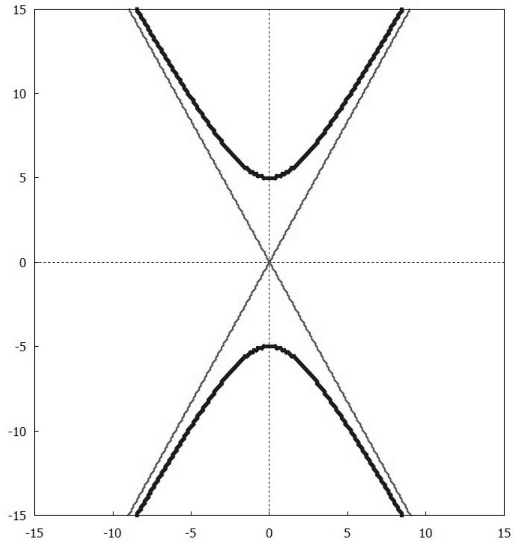
- draw3d(gráfico3D, opções3D); desenha gráfico tridimensional usando as opções dadas.

- opções3D podem ser color=... (cor do gráfico), proportional_axes=xyz (mesma escala nos eixos), surface_hide=true (não mostra parte encoberta do gráfico), etc.

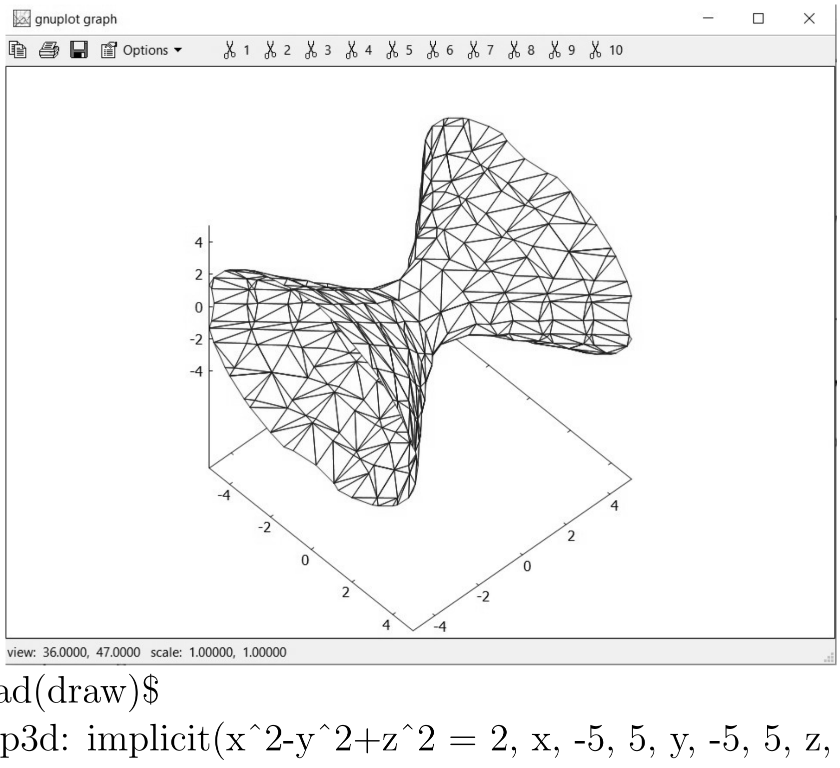
Neste exemplo, construímos a hipérbole definida implicitamente pela equação $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$, $-15 \leq x \leq 15$, $-15 \leq y \leq 15$, e as retas cujas equações são $\frac{y}{5}-\frac{x}{3}=0$ e $\frac{y}{5}+\frac{x}{5}=0$.

(%i20) load(draw)$
(%i21) hip1: implicit(y^2/25 - x^2/9 = 1, x, -15, 15, y, -15, 15)$
(%i22) reta1: implicit(y/5 - x/3 = 0, x, -15, 15, y, -15, 15)$
(%i23) reta1: implicit(y/5 + x/3 = 0, x, -15, 15, y, -15, 15)$
(%i24) draw2d(xaxis=true, yaxis=true, proportional_axes=xy,
line_width=2, color=red, reta1, reta2, line_width=5, color=blue, hip1);

(%o24) $[gr2d(implicit, implicit, implicit)]$



E agora construímos o gráfico do hiperbolóide definido implicitamente por $x^2 - y^2 + z^2 = 2$, $-5 \le x \le 5$ $-5 \le y \le 5$, $-5 \le z \le 5$. As opções de construção do gráfico são: mesma escala nos eixos, superfícies encobertas escondidas e cor azul.



(%i25) load(draw)$

(%i26) sup3d: implicit(x^2-y^2+z^2 = 2, x, -5, 5, y, -5, 5, z, -5, 5)$

(%i27) draw3d(proportional_axes=xyz, surface_hide=true, color=blue, sup3d);

(%o27) $[gr3d(implicit)]$

A.9 Limites

O limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é calculado com um comando **limit(f(x), x, x0)**. O infinito pode ser codificado por **inf** e o menos infinito por **minf**. Se for colocado um apóstrofo antes do comando, ele será apenas mostrado, mas não calculado.

(%i28) limit(sin(4*x)/x, x, 0);
(%o28) 4

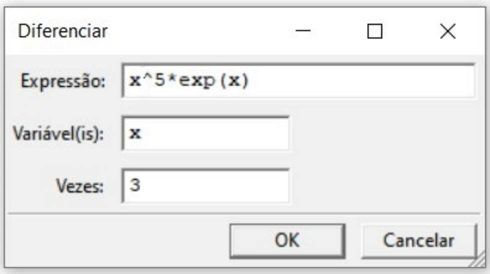
(%i29) limit((1 + 3/n)^n, n, minf);
(%o29) $\%e^3$

(%i30) 'limit(sqrt(x + sqrt(x)) - sqrt(x), x, inf);
(%o30) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

(%i31) limit(sqrt(x + sqrt(x)) - sqrt(x), x, inf);
(%o31) $\frac{1}{2}$

A.10 Derivadas

A derivada de $f(x)$ com relação a x pode ser calculada com um **diff(f(x), x)**. A derivada de ordem n pode ser calculada com um comando do tipo **diff(f(x), x, n)**. A função f pode ter várias variáveis. Se for colocado um apóstrofo antes do nome do comando, ele não será executado.



(%i32) diff(x^7 + 11*sin(x), x);
(%o32) $11\cos(x) + 7x^6$

(%i33) 'diff(cos(x^5), x) = diff(cos(x^5, x);

(%o33) $\frac{d}{dx}\cos(x^5) = -5x^4\sin(x^5)$

(%i34) 'diff(x^5*exp(x), x, 3) = diff(x^5*exp(x), x, 3);

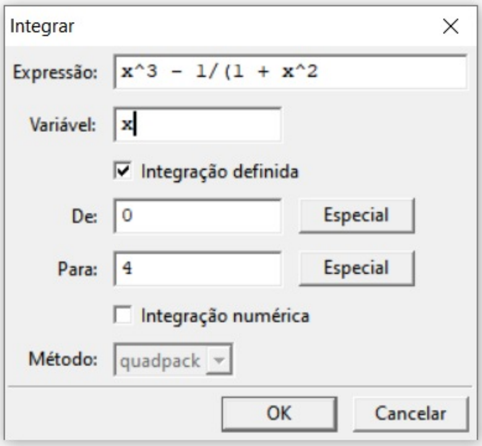
(%o34) $\frac{d^3}{dx^3}\left(x^5\%e^x\right) \;=\; x^5\%e^x + 15x^4\%e^x + 60x^3\%e^x + 60x^2\%e^x$

(%i35) diff((3*x + 5*y^3)^7, y);

(%o35) $105y^2(5y^3+3x)^6$

A.11 Integrais

Integrais indefinidas podem ser calculadas com um comando do tipo **integrate(f(x), x)** e integrais definidas em $[a, b]$ com comando do tipo **integrate(f(x), x, a, b)**. Os limites de integração podem ser infinitos. Um apóstrofo antes do comando faz com ele seja apenas enunciado sem ser calculado.



(%i36) f(x) := x^3 - 1/(1 + x^2)

(%o36) $f(x) := x^3 - \frac{1}{1+x^2}$

(%i37) integrate(f(x), x, 0, 4)

(%o37) $64 \;-\; atan(4)$

(%i38) 'integrate(x^5, x, a, b) = integrate(x^5, x, a, b);

(%o38) $\int_a^b x^5\,\mathrm{d}x = \frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}$

(%i39) 'integrate(x^4*cos(x), x);

(%o39) $\int x^4\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(%i40) integrate(x^4*cos(x), x);

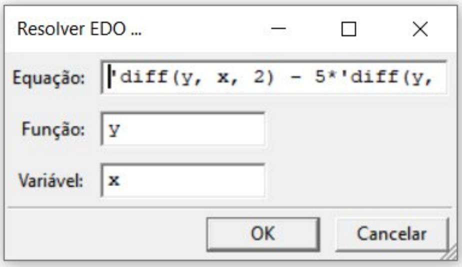
(%o40) $(x^4 - 12x^2 + 24)\sin(x) + (4x^3 - 24x)\cos(x)$

(%i41) 'integrate(%e^(-x^2), x, 0, inf) = integrate(%e^(-x^2), x, 0, inf);

(%o41) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

A.12 Equações diferenciais

O Maxima possui vários comandos para resolução de equações diferenciais. Um deles, o **ode2(EDO, var1, var2)** resolve equações diferenciais ordinárias EDO de primeira ou segunda ordens, com $var1$ sendo a variável dependente e $var2$ a independente. Neste caso, é preciso que se digite um apóstrofo antes das derivadas. Nas respostas obtidas, o *Maxima* apresenta as constantes genéricas como sendo $\%c$, $\%k1$, $\%k2$ etc.



(%i42) eqn1: 'diff(y, x) + 4*y = cos(x);

(%o42) $\frac{d}{dx}y + 4y = \cos(x)$

(%i43) ode2(eqn1, y, x);

(%o43) $y = \%e^{-4x}\left(\frac{\%e^{4x}(\sin(x) + 4\cos(x))}{17} + \%c\right)$

(%i44) eqn2: 'diff(y, x, 2) - 5*'diff(y, x) + 6 = 0;

(%o44) $\frac{d^2}{dx^2}y - 5\left(\frac{d}{dx}y\right) + 6 = 0$

(%i45) ode2(eqn2, y, x);

(%o45) $y = \%k1\%e^{5x} + \frac{30x + 6}{25} + \%k2$

A.13 Séries

Vários comandos podem ser usados para calcular somatórios, somas de séries e expansão em série de potências. Alguns desses comandos são o **sum(f(k), k, n1, n2)** que calcula o somatório de $f(k)$, com k variando de n_1 a n_2, e **taylor(expressão, x, a, n)** que expande a expressão em uma série de Taylor em torno do ponto a, contendo termos até $(x-a)^n$. O comando não é executado se for colocado um apóstrofo antes do seu nome.

(%i46) 'sum(1/(n*(n + 3), n, 1, 100);

(%o46) $\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n(n+3)}\right)$

(%i47) sum(1/(n*(n + 3), n, 1, 100);

(%o47) $\frac{319025}{530553}$

(%i48) taylor(cos(x), x, 0, 8);

(%o48) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}+\ldots$

(%i49) taylor(log(x+1), x, 2, 4);

(%o49) $\log(3)+\frac{x-2}{3}-\frac{(x-2)^2}{18}+\frac{(x-2)^3}{81}-\frac{(x-2)^4}{324}+\ldots$

A.14 Equações

Uma equação pode ser resolvida com um comando **solve(equação, variável)**, ou simplesmente **solve(equação)**. Podemos digitar uma linha de comando ou fornecer a equação em uma janela exclusiva para entrada de equações. Para obter essa janela de equações, escolhemos no menu principal do programa a opção "Equações→Resolver ...".

Neste exemplo, inicialmente, resolvemos a equação $x^4-5x^2+6=0$. Depois, resolvemos $10x^4+13x^3-120x^2-117x+270=0$.

(%i50) solve(x^4 - 5*x^2 + 6 = 0, x);

(%o50) $[x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{3}, y=\sqrt{3}]$

(%i51) eq: 10*x^4 + 13*x^3 - 120*x^2 - 117*x + 270 = 0

(%o51) $10x^4+13x^3-120x^2-117x+270=0$

(%i52) solve(eq);

(%o52) $[x = \frac{6}{5},\ x = -3,\ x = 3,\ x = -\frac{5}{2}]$

A.15 Sistemas de equações

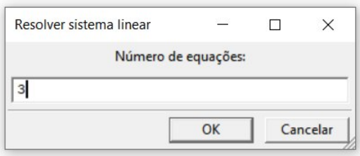
Um sistema de equações pode ser resolvido da mesma forma que uma equação, bastando colocar as equações e as variáveis entre colchetes.

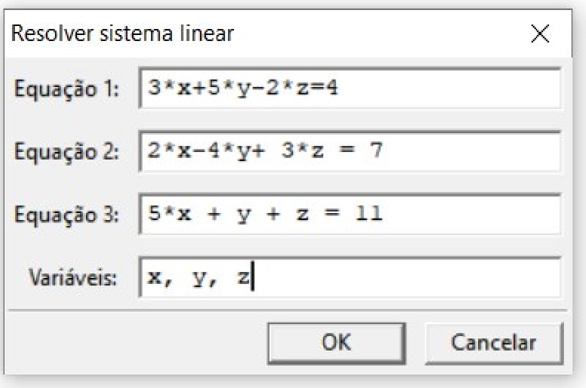
Neste primeiro exemplo, resolvemos o sistema linear $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

(%i53) solve([3*x + 4*y = 2, 2*x - y = 3], [x, y]);

(%o53) $[[x = \frac{14}{11}, y = -\frac{5}{11}]]$

Nosso segundo exemplo é o sistema $\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 4 \\ 2x - 4y + 3z = 7 \\ 5x + y + z = 11 \end{cases}$. Esse é um sistema linear indeterminado, com uma infinidade de soluções. Nesse caso, o Maxima denota as variáveis livres por %r1, %r2, %r3 etc.





(%i54) eq1: 3*x+5*y-2*z=4$

(%i55) eq2: 2*x-4*y+ 3*z = 7$

(%i56) eq3: 5*x + y + z = 11$

(%i57) solve([eq1, eq2, eq3]);

(%o57) $[[z = \frac{22\%r1-51}{7},\ y = -\frac{13\%r1-26}{7},\ x = \%r1]]$

No comando anterior, percebemos que a solução tem uma variável livre %r1. Isso significa que as outras variáveis são dependentes e, por causa disso, podemos explicitar no comando quais são essas variáveis dependentes. Por exemplo, se no sistema anterior quisermos x e y dependentes e z como variável livre, então devemos digitar o seguinte comando:

(%i58) solve([eq1, eq2, eq3], [x, y]);

(%o58) $[[x = \frac{7z-51}{22},\ y = \frac{13z-13}{22}]]$

E mais outro exemplo: resolver o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4s + 5t = 0 \\ x - 3y - z + 2s + 8t = 0 \\ x + 7y + 7z + 6s + 2t = 0 \end{cases}$
.

(%i59) eq1: x + 2*y + 3*z + 4*s + 5*t = 0$

(%i60) eq2: x - 3*y - z + 2*s + 8*t = 0$

(%i61) eq3: x + 7*y + 7*z + 6*s + 2*t = 0$

(%i62) solve([eq1, eq2, eq3], [x, y, z, s, t]);

(%o62) $[[x = -\frac{7\%r3+16\%r2+31\%r1}{5},\ y = \frac{-4\%r3-2\%r2+3\%r1}{5},$
$z = \%r3,\ s = \%r2,\ t = \%r1]]$

Percebemos dessa forma que existem 3 variáveis livres e 2 variáveis dependentes. Se escolhermos as variáveis dependentes como sendo x e y, então devemos digitar:

(%i63) solve([eq1, eq2, eq3], [x, y]);

(%o63) $[[x = -\frac{7z + 31t + 16s}{5},\ y = -\frac{4z - 3t + 2s}{5}]]$

Mas se escolhermos as variáveis dependentes como sendo s e t, então o comando a ser digitado é

(%i64) solve([eq1, eq2, eq3], [s, t]);

(%o64) $[[s = -\frac{29z + 31y + 3x}{22},\ t = \frac{5z + 8y - x}{11}]]$

A.16 Vetores e listas

Os vetores no Maxima são definidos como listas de expressões entre colchetes:

v = [expr1, expr2, expr3, ..., exprN].

As expressões expr1, expr2, ... que aparecem como coordenadas podem ser quaisquer tipos de números, expressões algébricas ou outras listas. A enésima coordenada de uma lista L é referenciada como sendo **L[n]**.

Dadas duas listas U e V, podem ser efetuadas algumas operações pré-definidas tais como adição **U+V**, subtração **U-V**, multiplicação por escalar **k*V** e produto interno **U.V** .

Neste exemplo, definimos dois vetores $u = (-5, 1, 6)$ e $v = (4, 5, -7)$ do $\mathbb{R}^3$, calculamos $u + 8v$ e o seu produto interno $u \cdot v$. Definimos também uma função $norma(x) = \sqrt{x \cdot x}$ e calculamos $norma(v)$.

(%i65) u: [-5, 1, 6];
(%o65) $[-5, 1, 6]$

(%i66) v: [4, 5, -7];
(%o66) $[4, 5, -7]$

(%i67) u + 8*v;
(%o67) $[27, 41, -50]$

(%i68) u.v;
(%o68) -57

(%i69) norma(x) := sqrt(x.x);
(%o69) $norma(x) := \sqrt{x \cdot x}$

(%i70) norma(v);
(%o70) $3\sqrt{10}$

A.17 Operações com matrizes

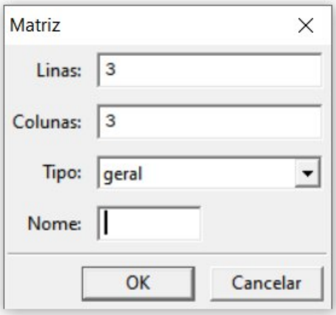
O Maxima possui uma variedade de comandos para cálculo com matrizes e demais conceitos da Álgebra Linear.

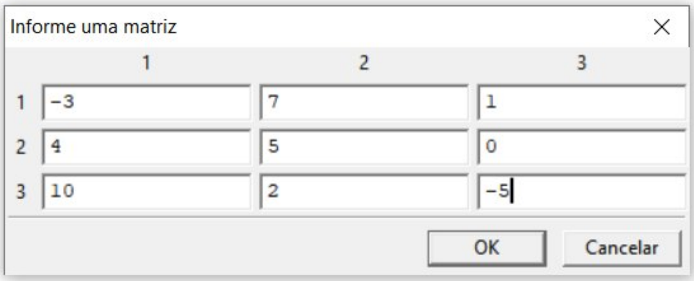
É possível fornecer uma matriz ao Maxima com um comando

matrix([linha 1], [linha 2], [linha 3], ...)

ou através de uma janela específica, obtida no item "Álgebra→Introduzir matriz..." do menu principal. A multiplicação de matrizes pode ser feita com um ponto, como em **A . B**, o determinante com um comando **determinant(...)** e a inversa com um comando **invert(...)**. A potência M^n pode ser calculada com um comando **M^^n** , para qualquer inteiro n. **M^^(-1)** também pode ser usado para calcular a inversa de M.

Definimos neste exemplo uma matriz M e calculamos seu determinante, sua inversa e seu quadrado.





(%i71) M: matrix([-3,7,1], [4,5,0], [10,2,-5]);

(%o71) $$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 10 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i72) determinant(%);

(%o72) 173

(%i73) invert(M);

(%o73) $$\begin{bmatrix} -\frac{25}{173} & \frac{37}{173} & -\frac{5}{173} \\ \frac{20}{173} & \frac{5}{173} & \frac{4}{173} \\ -\frac{42}{173} & \frac{76}{173} & -\frac{43}{173} \end{bmatrix}$$

(%i74) M^^2;

(%o74) $$\begin{bmatrix} 47 & 16 & -8 \\ 8 & 53 & 4 \\ -72 & 70 & 35 \end{bmatrix}$$

A.18 Escalonamento de matrizes

O Maxima escalona matrizes com um comando **echelon(...)** . Neste exemplo, escalonamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ -3 & 4 & -8 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

(%i75) A: matrix([3,-4,8,1], [-3,4,-8,-1], [4,1,5,0], [10,1,1,-5])$

(%i76) echelon(A);

(%o76) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{19} & -\frac{4}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{101}{244} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A.19 Polinômio característico, autovalores e autovetores

O polinômio característico pode ser calculado com um comando **charpoly(matriz, variável)**, os autovalores com **eigenvalues(matriz)**, e os autovetores com **eigenvectors(matriz)**.

(%i77) A: matrix([8,6,6], [5,15,18], [-5,-10,-11]);

(%o77) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 5 & 15 & 18 \\ -5 & -10 & -11 \end{bmatrix}$

(%i78) p: charpoly(A, λ);

(%o78) $((-\lambda-11)(15-\lambda)+180)(8-\lambda)+6(5(15-\lambda)-50)-6(5(-\lambda-11)+90)$

(%i79) q: expand(p);

(%o79) $-\lambda^3+12\lambda^2-47\lambda+60$

(%i80) factor(q);

(%o80) $-(\lambda-5)(\lambda-4)(\lambda-3)$

(%i81) eigenvalues(M);

(%o82) $[[3,4,5],[1,1,1]]$

(%i83) eigenvectors(M);

(%o83) $[[[3,4,5],\ [1,1,1]],\ [[[1,-4,1]],\ [[1,-1,0]],\ [[1,0,0]]]]$

Muitas vezes, é interessante usar um comando **expand(...)** para expandir, ou **factor(...)** para fatorar o polinômio característico.

As respostas dos comandos eigenvalues(...) e eigenvectors(...) são listas de listas que devem ser interpretadas na seguinte ordem: primeiro aparecem os autovalores $[\lambda_1, \lambda_1, \dots]$, depois as multiplicidades desses autovalores $[n_1, n_2, \dots]$ e por último aparecem os autovetores $[v_1, v_2, v_3], [w_1, w_2, w_3], \dots$. No exemplo anterior, os autovalores encontrados foram $3, 4, 5$, com multiplicidades $1, 1, 1$, respectivamente, e autovetores associados $(1, -4, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)$, respectivamente.

A.20 Polinômio mínimo e diagonalização

O cálculo do polinômio mínimo é um pouco mais sofisticado e, por isso, exige que seja carregado um pacote do Maxima chamado "diag" que é dedicado a esse tipo de cálculo. Isso é feito com um comando **load(diag);**. Depois de carregado esse pacote extra, pode ser feita uma chamada a um comando **lista: jordan(matriz);** e, por fim, o polinômio mínimo é mostrado depois de uma chamada a um comando **minimalPoly(matriz, lista);**

Para obter a matriz M diagonalizada, quando for o caso, deve-se chamar **dispJordan(lista);** e para obter P tal que $P^{-1}MP$ é diagonal, executa-se **P: ModeMatrix(M, lista);**

Neste exemplo, definimos uma matriz M, calculamos seu polinômio mínimo $m(x)$ e uma matriz P tal que $P^{-1}MP$ é uma matriz diagonal.

Linhas de comando muito longas podem ser quebradas no meio pressionando-se simultaneamente as teclas **[Shift][Enter]**, dependendo da configuração do programa.

(%i84) M: matrix([-87, 440, -780, 430], [-170, 835, -1476, 814],
[-230, 1128, -2001, 1106], [-260, 1280, -2280, 1263]);

(%o84) $$\begin{bmatrix} -87 & 440 & -780 & 430 \\ -170 & 835 & -1476 & 814 \\ -230 & 1128 & -2001 & 1106 \\ -260 & 1280 & -2280 & 1263 \end{bmatrix}$$

(%i85) load(diag) $

(%i86) j: jordan(M);

(%o86) $[[11, 1],\ [-7, 1],\ [3, 1, 1]]$

(%i87) m: minimalPoly(j);

(%o87) $(x-11)(x-3)(x+7)$

(%i88) D: dispJordan(j);

(%o88) $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(%i89) P: ModeMatrix(M, j);

(%o89) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{19}{10} & \frac{17}{9} & 0 & 1 \\ \frac{13}{5} & \frac{23}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 3 & \frac{26}{9} & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i90) P^^(-1).M.P;

(%o90) $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(%i91) eigenvectors(M);

(%o91) $[[[11, -7, 3],\ [1, 1, 2]],\ [[[1, \frac{19}{10}, \frac{13}{5}, 3]],\ [[1, \frac{17}{9}, \frac{23}{9}, \frac{26}{9}]],$
$[[1, 0, -\frac{2}{3}, -1],\ [0, 1, \frac{5}{3}, 2]]]]$

No final, calculamos os autovalores e autovetores de M para confirmar que os autovalores aparecem na diagonal e os autovetores nas colunas de P.

A.21 Processo de ortogonalização

O comando **gramschmidt(...)** do pacote "eigen" obtém uma base ortogonal a partir de outra base definida como uma lista de listas $[[v_1, v_2, v_3], [w_1, w_2, w_3], ...]$. É conveniente usar o comando **expand(...)** para simplificar os resultados obtidos.

Se o produto interno for definido por uma função f, então esse comando pode ser usado na forma **gramschmidt(B, f)** para ortogonalizar a base B.

Neste exemplo, aplicamos um processo de ortogonalização à base

$$A = \{(4,\ 3,\ 2,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ (5,\ 10,\ 8,\ 1)\}.$$

(%i92) load(eigen) $
(%i93) A: [[4,3,2,1], [1,1,1,1], [5,10,8,1]]$
(%i94) B: gramschmidt(A);
(%o94) $[[4,\ 3,\ 2,\ 1],\ [-\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}],\ [-\frac{31}{2\ 5},\ \frac{3\ 11}{2\ 5},\ \frac{3^3}{2\ 5},\ -\frac{29}{2\ 5}]]$

(%i95) B: expand(B);
(%o95) $[[4,\ 3,\ 2,\ 1],\ [-\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}],\ [-\frac{31}{10},\ \frac{33}{10},\ \frac{27}{10},\ -\frac{29}{10}]]$

E assim, concluímos que a base ortogonal obtida é

$$B \ = \ \left\{(4,\ 3,\ 2,\ 1),\ \left(-\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{31}{10},\ \frac{33}{10},\ \frac{27}{10},\ -\frac{29}{10}\right)\right\}.$$

A partir dessa base ortogonal, podemos obter uma base ortonormal para o mesmo subespaço. Para isso, definimos inicialmente uma função N(v) que calcula a norma do vetor v: $N(v) := \sqrt{v \cdot v}$. Depois disso, dividimos cada vetor da base pela sua norma.

(%i96) N(v) := sqrt(v.v)$
(%i97) u1: B[1]/N(B[1]);
(%o97) $\left[\frac{4}{\sqrt{30}},\ \frac{3}{\sqrt{30}},\ \frac{2}{\sqrt{30}},\ \frac{1}{\sqrt{30}}\right]$

(%i98) u2: B[2]/N(B[2]);
(%o98) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$

(%i99) u3: B[3]/N(B[3]);
(%o99) $\left[-\frac{31}{2\sqrt{5}\sqrt{181}},\ \frac{33}{2\sqrt{5}\sqrt{181}},\ \frac{27}{2\sqrt{5}\sqrt{181}},\ -\frac{29}{2\sqrt{5}\sqrt{181}}\right]$

Se o produto interno não for o usual, digamos que seja algo como

$$\langle u,\ v\rangle \ = \ 2u_1v_1 + 5u_2v_2 + u_3v_3 + 10u_4v_4,$$

então podemos usar os seguintes comandos:

(%i100) f(u, v) := 2*u[1]*v[1] + 5*u[2]*v[2] + u[3]*v[3] + 10*u[4]*v[4];
(%o100) $f(u, v) := 2u_1v_1 + 5u_2v_2 + u_3v_3 + 10u_4v_4;$

(%i101) gramschmidt(A, f);
(%o101) $\left[[4, 3, 2, 1],\ \left[-\frac{7}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13}\right],\ \left[-\frac{2105}{413}, \frac{1118}{413}, \frac{1450}{413}, -\frac{283}{413}\right]\right]$

Outro exemplo: para ortogonalizar a base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ com o produto interno

$$\langle f,\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

podemos usar os comandos:

(%i102) B: [1, x, x^2, x^3] $
(%i103) F(u, v) := integrate(u*v, x, -1, 1) $
(%i104) B: gramschmidt(B, F);
(%o104) $\left[1,\, x,\, \dfrac{3x^2-1}{3},\, \dfrac{x(5x^2-3)}{5}\right]$

A.22 Programação com o Maxima

O Maxima possui comandos que permitem que ele seja usado também como uma linguagem de programação, permitindo que sejam elaborados programas com essa linguagem. Alguns comandos para programação são:

- **if condição then comando1 else comando2**: executa comando1 se a condição for verdadeira ou o comando2 se a condição for falsa.
- **print("mensagem1", variável1, "mensagem2", variável2, ...)**: mostra uma ou várias mensagens entre aspas, seguidas dos valores de uma ou várias variáveis.
- **for variável from início thru término step passo do comando**: o comando fornecido depois do do é executado para cada valor da variável no intervalo [início, término], com passo dado.
- **while condição do comando**: executa o comando enquanto a condição for verdadeira
- **block([variáveis locais], comando1, comando2, ..., return(valor))**: permite construção de um bloco de comandos. Se houver um comando return(valor), então o valor é retornado; senão, é retornado o último valor calculado no bloco.

Exemplos:

- if x > 2 then print("maior do que 2") else print("menor ou igual a 2");

- for k from 1 thru 20 step 2 do print(k);
- f(x) := block(if x < 2 then return(1) else return(x*f(x-1)));
- x: 1; while (x < 30) do (print(factor(x)), x: x+1);

Apêndice B

Testes

Neste capítulo, apresentamos algumas questões do tipo múltipla escolha sobre os mais diversos assuntos. Para cada questão proposta, é apresentada uma lista de alternativas de respostas, identificadas pelas letras A, B, C, D, ... Entre essas alternativas, somente uma delas corresponde à resposta correta do problema.

B.1 Matrizes, determinantes e sistemas lineares

1) Calcule o produto $MNPQ$, sabendo que $M = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

A) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -5 & -5 & -5 \\ -11 & -11 & -11 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 15 & 9 & -11 \\ 9 & -11 & 15 \\ -11 & 9 & 15 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -11 & 33 & 9 \\ 33 & 9 & -11 \\ 9 & -11 & 33 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -11 \\ 9 & 15 & 33 \\ -3 & -5 & -11 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 15 & 15 & 15 \\ -11 & -11 & -11 \end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 \\ -5 & 15 & -5 \\ -11 & 33 & -11 \end{bmatrix}$

2) Sejam a, b, c, d números reais não todos nulos e $M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$.

Calcule $\left(\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right) M \cdot M^t$.

A) $\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} a^2&0&0&0\\0&b^2&0&0\\0&0&c^2&0\\0&0&0&d^2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} a&b&c&d\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a \end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix} a^2&b^2&c^2&d^2\\b^2&a^2&d^2&c^2\\c^2&d^2&a^2&b^2\\d^2&c^2&b^2&a^2 \end{bmatrix}$ G) $\begin{bmatrix} d&0&0&0\\0&c&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&a \end{bmatrix}$ H) $\begin{bmatrix} d^2&0&0&0\\0&c^2&0&0\\0&0&b^2&0\\0&0&0&a^2 \end{bmatrix}$

3) Qual é a inversa da matriz M da questão anterior?

A) $M^{-1} = \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right) M^2$ B) $M^{-1} = M^t$ C) $M^{-1} = -M$
D) $M^{-1} = \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right) M$ E) $M^{-1} = M^2$ F) $M^{-1} = -M^2$
G) $M^{-1} = \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right) (-M)$ H) $M^{-1} = -M^4$ I) $M^{-1} = -M^t$
J) $M^{-1} = \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right) M^t$ K) $M^{-1} = M$ L) $M^{-1} = M^4$

4) Seja $M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4} \end{bmatrix}$. Calcule $M^2 = M \cdot M$.

A) $M^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ B) $M^2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$

C) $M^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{16}&0&0&0\\0&\frac{1}{16}&0&0\\0&0&\frac{1}{16}&0\\0&0&0&\frac{1}{16} \end{bmatrix}$ D) $M^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{16}&\frac{1}{16}&\frac{1}{16}&\frac{1}{16}\\ \frac{1}{16}&\frac{9}{16}&\frac{1}{16}&\frac{1}{16}\\ \frac{1}{16}&\frac{1}{16}&\frac{9}{16}&\frac{1}{16}\\ \frac{1}{16}&\frac{1}{16}&\frac{1}{16}&\frac{9}{16} \end{bmatrix}$

E) $M^2 = \begin{bmatrix} 16&1&1&1\\1&16&1&1\\1&1&16&1\\1&1&1&16 \end{bmatrix}$ F) $M^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$

5) A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -29&-66&-90\\40&89&120\\-20&-44&-59 \end{bmatrix}$ é

A) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 39 & -10 \\ 30 & 19 & 121 \\ -40 & -4 & -29 \end{bmatrix}$ B) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & -66 & 90 \\ -40 & -19 & 12 \\ 2 & -4 & -39 \end{bmatrix}$

C) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -29 & -66 & -90 \\ 40 & 89 & 120 \\ -20 & -44 & -59 \end{bmatrix}$ D) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -19 & -33 & 90 \\ 10 & 39 & 20 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

E) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ F) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -29 & -33 & 90 \\ 30 & 79 & 110 \\ 10 & 14 & 59 \end{bmatrix}$

6) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5r + 3s + 3t + 3u + 3v = 12 \\ 3x + y + 2z + 4r + 2s - 2t + 2u - v = 1 \\ 5x + y + 3z + r + 4s - 3t + 3u - 2v = 2 \\ 5x + 4y + 6z + 9r + 5s + t + 5u + 2v = 13 \\ 7x + 4y + 7z + 6r + 7s + 6u + v = 14 \\ 8x + 2y + 5z + 5r + 6s - 5t + 5u - 3v = 3 \\ x - 2y - 2z - r - s - 5t - u - 4v = -11 \\ -2x - z + 3r - 2s + t - u + v = -1 \end{cases}.$$

Sabendo que sua matriz completa escalonada equivale a

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{7} & 1 & \frac{6}{7} & 1 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{33}{8} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{5}{8} & \frac{9}{8} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

determine a solução geral desse sistema.

A) $x = \dfrac{11 - 13r - s + 7t - u + 4v}{3}$, $y = \dfrac{-14 - 43r - 7s + 7t - u + v}{3}$,
$z = \dfrac{25 + 35r - 8s + 11t - u - 5v}{3}$

B) $x = \dfrac{11 + 13r + s + 7t + u - 4v}{3}$, $y = \dfrac{-14 - 43r + 17s + 17t - u + v}{3}$,
$z = \dfrac{25 + 35r - 8s - 11t - u - 5v}{3}$

C) $x = \dfrac{11+13r+s+7t-u+4v}{3}$, $y = \dfrac{-34-13r-7s+7t+u+v}{3}$,
$z = \dfrac{25+35r-8s-11t-u-5v}{3}$

D) $x = \dfrac{-11-13r+s+7t-u+4v}{3}$, $y = \dfrac{-14-43r+7s+7t-u+v}{3}$,
$z = \dfrac{-15+5r-6s-11t-u+5v}{3}$

E) $x = \dfrac{-11-13r+s+7t-u+4v}{3}$, $y = \dfrac{14+43r-7s+7t-u+v}{3}$,
$z = \dfrac{15-35r-7s+11t-u-5v}{3}$

F) $x = \dfrac{-11-13r+s+7t-u+4v}{3}$, $y = \dfrac{-14-43r+7s+7t-u+v}{3}$,
$z = \dfrac{25+35r-8s-11t-u-5v}{3}$

7) Sabendo que $\begin{bmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 \\ 40 & 56 & 15 & 21 \\ 15 & 20 & 6 & 8 \\ 25 & 35 & 10 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -21 & 12 \\ -10 & 6 & 15 & -9 \\ -35 & 20 & 56 & -32 \\ 25 & -15 & -40 & 24 \end{bmatrix}$, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} 24x+32y+9z+12t &= 1 \\ 40x+56y+15z+21t &= 1 \\ 15x+20y+6z+8t &= 1 \\ 25x+35y+10z+14t &= 1 \end{cases}.$$

A) (1, 1, 1, 1) B) (24, 32, 9, 12) C) (1, −1, −1, 1) D) (−3, 2, 9, −6)
E) (3, 6, 9, 12) F) (4, 2, 9, −6) G) (12, −1, −32, 24) H) (6, −2, 9, −3)

8) Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} x+2y-5z+4r+s=4 \\ 3x+7y-z-3r+2s=10 \\ -y-13z-2r+s=-14 \\ z-16r+2s=-11 \\ 2r+5s=12 \end{cases}.$$

A) (1, 1, 1, 1, 1) B) (1, 1, 1, 1, 2) C) (1, 1, 2, 1, 1) D) (1, 2, 1, 1, 1)
E) (1, 0, 1, 3, 1) F) (1, 1, 0, 1, 2) G) (1, 1, 2, 3, 0) H) (0, 2, 1, 1, 1)

9) Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 \\ 40 & 56 & 15 & 21 \\ 15 & 20 & 6 & 8 \\ 25 & 35 & 10 & 14 \end{vmatrix}.$$

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1 F) 0 G) 1 H) 2 I) 3 J) 4

10) Calcule o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \\ -5 & 0 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 9 & 12 \\ -5 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$.

A) posto$(A) = 0$ B) posto$(A) = 1$ C) posto$(A) = 2$ D) posto$(A) = 3$
E) posto$(A) = 4$ F) posto$(A) = 5$ G) posto$(A) = 6$ H) posto$(A) = 7$

11) Representando um valor numérico qualquer por um "*", ao ser escalonada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

obtemos uma matriz no seguinte formato:

A) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ G) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ H) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

12) Denotando um valor numérico qualquer por um "*", a forma escalonada da matriz

$$\begin{bmatrix}3 & 5 & 2 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 15 & 6 & -6 & 6 & 12 & 20 \\ 6 & 10 & 4 & 0 & 5 & 8 & 11\end{bmatrix}$$

tem o seguinte formato:

A) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & *\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & *\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & *\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix}1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & *\end{bmatrix}$

13) Determine o valor de y que é solução do sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y + 4z = 18 \\ 5z + 6u = 39 \\ 7u + 8v = 68 \\ 9v + 10x = 55 \end{cases}$

.

A) $y = -3$ B) $y = -2$ C) $y = -1$ D) $y = 0$ E) $y = 1$ F) $y = 2$ G) $y = 3$

B.2 Espaços vetoriais e subespaços

14) Calcule o valor de c sabendo que a, b, c são escalares e $\{u, v, w\}$ é uma base de um espaço vetorial V tais que

$$(5a - 10)u + (b - c)v \; + \; (-7a - b - c)w = 0.$$

A) 0	B) 1	C) 2	D) 3	E) 4	F) 5	G) 6	H) 7	I) 8
J) 12	K) -1	L) -2	M) -3	N) -4	O) -5	P) -6	Q) -7	T) -8

15) Considere escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ e um vetor $v = (-4, -3, -2) \in \mathbb{R}^3$. Determine o valor de c para que seja válida a seguinte combinação linear

$$v \;=\; a(4, 10, 2) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, -1).$$

A) 1	B) 7	C) -7	D) 9	E) -9	F) 11	G) -11	H) 13	I) -13
J) -17	K) 0	L) 12	M) -12	N) 16	O) -16	P) 20	Q) -20	R) 24

16) Qual dos conjuntos listados a seguir é subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$?

A) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x + y = 1\}$	B) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x + z = 2\}$
C) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x > 0, y > 0\}$	D) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x \leq 0, z \leq 0\}$
E) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x^2 + y^2 = 1\}$	F) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x^2 - z^2 = 2\}$
G) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert z = x^2 + y^2\}$	H) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \vert x = 2z - 3y\}$

17) Determine um subconjunto A de

$$B \;=\; \{v_1 = (2, 3, 1, 0),\; v_2 = (1, -1, 4, 5),\; v_3 = (4, 1, 9, 10),\; v_4 = (7, 8, 7, 5),$$
$$v_5 = (-1, 2, 0, 0),\; v_6 = (0, -5, 7, 10)\} \subset \mathbb{R}^4$$

que seja inteiramente formado por vetores linearmente independentes.

A) $A \;=\; \{v_2,\; v_3,\; v_4\}$	B) $A \;=\; \{v_2,\; v_4,\; v_6\}$	C) $A \;=\; \{v_2,\; v_4,\; v_5\}$
D) $A \;=\; \{v_1,\; v_2,\; v_6\}$	E) $A \;=\; \{v_1,\; v_2,\; v_4\}$	F) $A \;=\; \{v_1,\; v_2,\; v_5\}$

B.3 Base e dimensão

18) Sendo V e W subespaços do $\mathbb{R}^4$, calcule $\dim(V+W)$ sabendo que

$$V = [(1,2,3,0),\ (-1,-1,-1,0),\ (0,1,2,0)]$$

e

$$W = [(4,4,4,0),\ (0,1,1,0),\ (1,1,2,0)].$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 F) 5 G) 6 H) 7 I) 8 J) 9 K) 10 L) 11

19) Determine uma base para o seguinte subespaço do $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z = y + 4t\}.$$

A) $\{(1,1,0,0),\ (-2,0,-1,0),\ (2,0,0,1)\}$
B) $\{(1,1,0,0),\ (-3,0,-1,0),\ (3,0,0,1)\}$
C) $\{(1,1,0,0),\ (-2,0,1,0),\ (4,0,0,1)\}$
D) $\{(1,1,0,0),\ (2,0,1,0),\ (-4,0,0,1)\}$
E) $\{(1,1,0,0),\ (2,0,1,0),\ (-3,0,0,1)\}$
F) $\{(1,1,0,0),\ (-5,0,1,0),\ (3,0,0,1)\}$
G) $\{(1,1,0,0),\ (-3,0,1,0),\ (4,0,0,1)\}$
H) $\{(1,1,0,0),\ (5,0,1,0),\ (3,0,0,1)\}$

20) Sejam $U = [1,\ e^x]$ e $W = [\operatorname{sen} x,\ \cos x]$ subespaços de $V = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Determine uma base β para $U + W$.

A) $\beta = \{1+e^x, 1+\operatorname{sen} x, 1+\cos x\}$ B) $\beta = \{x\operatorname{sen} x,\ x\cos x\}$ C) $\beta = \{e^x\operatorname{sen} x,\ e^x\cos x\}$
D) $\beta = \{1+e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)\}$ E) $\beta = \{e^{-x}, e^x\operatorname{sen} x, e^x\cos x\}$ F) $\beta = \{e^x,\ \operatorname{sen} x+\cos x\}$
G) $\beta = \{1+\operatorname{sen} x,\ e^x+\cos x\}$ H) $\beta = \{1+e^x+\operatorname{sen} x+\cos x\}$ I) $\beta = \{1,\ e^x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x\}$

21) Determine uma base para o seguinte subespaço de $\mathcal{P}_3$:

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 \mid p(-1) = p(2) = 0\}$$

A) $\{x+1,\ x-2\}$ B) $\{x^2-x-2\}$ C) $\{x^3-x^2-2x,\ x^2-x-2\}$ D) $\{x^2,\ (x-2)^3\}$
E) $\{-2,\ -x,\ x^2\}$ F) $\{1,\ x, x^2-x-2\}$ G) $\{1,\ x,\ x^3-x^2-2x\}$ H) $\{x^3, -x^2, -2x, 1\}$

22) Determine uma base para o seguinte subespaço de $V = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$W = \{f(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{3x} \mid a,b,c \in \mathbb{R}, f(0) = f'(0) = 0\}$$

A) $\{e^x + e^{2x} + e^{3x}\}$ B) $\{2e^x - e^{2x} - e^{3x}\}$ C) $\{xe^x - 2xe^{2x} + xe^{3x}\}$ D) $\{xe^x + xe^{2x} + xe^{3x}\}$
E) $\{e^x - 2e^{2x} + e^{3x}\}$ F) $\{3e^x - 2e^{2x} - e^{3x}\}$ G) $\{2e^x - 2xe^{2x} + xe^{3x}\}$ H) $\{3e^x - e^{2x} - xe^{3x}\}$

23) Calcule a dimensão do subespaço W de $V = [x,\ x^2,\ e^x,\ e^{-x},\ \cos x,\ \operatorname{sen} x]$ contido em $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definido por

$$W = \{f \in V \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

A) $\dim W = 0$ B) $\dim W = 1$ C) $\dim W = 2$ D) $\dim W = 3$ E) $\dim W = 4$ F) $\dim W = 5$
G) $\dim W = 6$ H) $\dim W = 7$ I) $\dim W = 8$ J) $\dim W = 9$ K) $\dim W = 10$ L) $\dim W = \infty$

B.4 Transformações lineares

24) Calcule $T(4,1)$, sabendo que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é linear, $T(5,0) = 2$ e $T(1,1) = 3$.

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1 F) $\frac{5}{3}$ G) $\frac{5}{2}$ H) $\frac{13}{3}$ I) $\frac{13}{2}$ J) $\frac{21}{5}$
K) 0 L) 1 M) 2 N) 3 O) 4 P) 5 Q) $\frac{21}{20}$ R) $\frac{41}{4}$ S) $\frac{41}{5}$ T) $\frac{-41}{4}$

25) Se $T : \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^6$ é linear e $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$, quanto é a dimensão do núcleo de T ?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 F) 5 G) 6 H) 7 I) 8 J) 9 K) 10 L) 11

26) Determine uma base para a imagem de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, 2x - 3z, 4x - 4z).$$

A) $\{(1,1,4),\ (0,2,3)\}$ B) $\{(1,2,4),\ (0,3,4)\}$ C) $\{(1,2,4),\ (0,-3,-4)\}$
D) $\{(1,3,4),\ (0,4,5)\}$ E) $\{(1,3,4),\ (0,4,5)\}$ F) $\{(1,0,-4),\ (0,4,5)\}$
G) $\{(1,0,4),\ (0,3,5)\}$ H) $\{(1,1,4),\ (0,0,5)\}$ I) $\{(1,-2,0),\ (0,2,4)\}$

B.5 Autovalores e autovetores

27) Encontre os autovalores de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

A) $1, -2, -3$ B) $0, 1, 4$ C) $1, 4, 5$ D) $0, 3, 4$ E) $1, 4, 5$ F) $-1, 4, 3$
G) $0, -1, -3$ H) $1, -1, -2$ I) $0, 1, 2$ J) $1, 2, 3$ K) $3, 4, 5$ L) $2, 4, 5$

28) Determine os autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (5x + y,\ x).$$

A) $v_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}), v_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ B) $v_1 = (1, \frac{2+\sqrt{8}}{2}), v_2 = (1, \frac{2-\sqrt{8}}{2})$
C) $v_1 = (1, \frac{4+\sqrt{20}}{2}), v_2 = (1, \frac{4-\sqrt{20}}{2})$ D) $v_1 = (1, \frac{5+\sqrt{29}}{2}), v_2 = (1, \frac{5-\sqrt{29}}{2})$
E) $v_1 = (1, \frac{-4+\sqrt{20}}{2}), v_2 = (1, \frac{-4-\sqrt{20}}{2})$ F) $v_1 = (1, \frac{-5+\sqrt{29}}{2}), v_2 = (1, \frac{-5-\sqrt{29}}{2})$

B.6 Polinômio mínimo e diagonalização

29) Sejam I a matriz identidade e O a matriz nula, ambas de ordem 5×5. Baseado na informação de que o polinômio mínimo de

$$M = \begin{bmatrix} -2575 & -4943 & -6903 & -8294 & -9015 \\ 6355 & 12181 & 16988 & 20392 & 22156 \\ -7435 & -14244 & -19858 & -23834 & -25900 \\ 4905 & 9401 & 13117 & 15760 & 17144 \\ -1570 & -3012 & -4209 & -5066 & -5519 \end{bmatrix}$$

é $m(x) = (x - 2)^2(x + 5)^3$, podemos afirmar que

A) M é diagonalizável B) $(M - 2I)^2 = O$ C) $M + 5I = O$
D) $(M - 2I)^5(M + 5I)^5 = O$ E) $(M - 2I)M^2 = O$ F) $M^3 - 2M = O$
G) $(M - 2I)^2(M + 5I)^2 = O$ H) $(M + 5I)^2 = O$ I) $M - 2I = O$

30) Qual é o traço de uma matriz 4×4 cujo polinômio mínimo é $m(x) = (x^2 - 6)(x^2 - 11)$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 F) 5 G) 6 H) 7 I) 8 J) 9 K) 10

31) O polinômio mínimo de uma matriz 3×3 é $m(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 5)$. Qual é o valor do seu determinante?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 F) 5 G) 6 H) 7 I) 8 J) 9 K) 10 L) 11

32) Determine a matriz inversa de $M = \begin{bmatrix} 703 & -1330 & 1245 & -575 & 105 \\ 1344 & -2547 & 2385 & -1101 & 201 \\ 1876 & -3556 & 3327 & -1534 & 280 \\ 2254 & -4270 & 3990 & -1838 & 336 \\ 2450 & -4640 & 4335 & -2000 & 368 \end{bmatrix}$
sabendo que seu polinômio mínimo é $m(x) = x^2 - 5x + 6$.

A) $M^{-1} = \dfrac{5 \cdot I - M}{6}$ B) $M^{-1} = \dfrac{6 \cdot I - M}{5}$ C) $M^{-1} = \dfrac{5 \cdot I + M}{6}$
D) $M^{-1} = \dfrac{M - 5 \cdot I}{6}$ E) $M^{-1} = \dfrac{M - 6 \cdot I}{5}$ F) $M^{-1} = \dfrac{M - 5 \cdot I}{3}$

33) O polinômio característico de uma matriz A de ordem 10×10 é

$$p(\lambda) = (\lambda + 5)^2(\lambda + 7)^3(\lambda - 8)^3(\lambda + 9)^2.$$

Determine seu polinômio mínimo sabendo que A é diagonálizavel.

A) $m(\lambda) = (\lambda + 5)^2(\lambda + 7)^3(\lambda - 8)^3(\lambda + 9)^2$
B) $m(\lambda) = (\lambda + 5)$
C) $m(\lambda) = (\lambda + 5)^2(\lambda + 7)^2(\lambda - 8)^2(\lambda + 9)^2$
D) $m(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 7)$
E) $m(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 7)^2(\lambda - 8)^2(\lambda + 9)$
F) $m(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 7)(\lambda - 8)$
G) $m(\lambda) = (\lambda + 5)^2(\lambda + 7)(\lambda - 8)(\lambda + 9)^2$
H) $m(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 7)(\lambda - 8)(\lambda + 9)$

34) Uma matriz diagonal que é semelhante a $M = \begin{bmatrix} 3 & -17 & 14 \\ 6 & -34 & 28 \\ 6 & -45 & 39 \end{bmatrix}$ é

A) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

F) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ G) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ H) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ I) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

35) Determine uma matriz diagonal semelhante à matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & 7 & -6 \\ -2 & 1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$.

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ G) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

36) Encontre o polinômio mínimo da matriz $B = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -15 & 0 \\ -1 & 37 & -29 & 0 \\ -1 & 44 & -36 & 0 \\ -1 & 44 & -29 & -7 \end{bmatrix}$.

A) $m(x) = x^2 + 49$ B) $m(x) = x^2 - 49$ C) $m(x) = x - 7$
D) $m(x) = x + 7$ E) $m(x) = x^2 - 98x + 2401$ F) $m(x) = x^4 - x$
G) $m(x) = (x - 7)(x + 7)^2$ H) $m(x) = (x + 7)(x - 7)^2$ I) $m(x) = x^2 - 1$

37) Considere M a seguinte matriz 6×6:

$$M = \begin{bmatrix} 1858 & 3600 & 5136 & 6372 & 7236 & 7680 \\ -9024 & -17516 & -24990 & -30996 & -35190 & -37344 \\ 17807 & 34567 & 49298 & 61124 & 69376 & 73613 \\ -18565 & -36035 & -51380 & -63696 & -72290 & -76705 \\ 11283 & 21903 & 31236 & 38736 & 43978 & 46677 \\ -3355 & -6515 & -9296 & -11536 & -13106 & -13917 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que seu polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda + 3)(\lambda - 4)^3$ e seu polinômio mínimo é $m(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda - 4)$, determine uma matriz A que seja semelhante a M.

A) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ B) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ D) $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

E) $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ F) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

B.7 Espaços com produto interno

38) Sabendo que u e v são vetores de um espaço com produto interno V tais que $\|u\| = 7$, $\|v\| = 8$, $\langle u, v\rangle = -4$, calcule o valor de $\|v - u\|$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 F) 5 G) 6 H) 7 I) 8
J) 11 K) 12 L) 13 M) $\sqrt{2}$ N) $\sqrt{3}$ O) $\sqrt{5}$ P) $\sqrt{6}$ Q) $\sqrt{7}$ R) $\sqrt{8}$

39) Considerando $\mathbb{R}^5$ com produto interno usual

$\langle u, v\rangle = \langle (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5), (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 + u_5v_5$,

calcule o cosseno do ângulo entre $v = (3, 1, 2, 0, 1)$ e $w = (-1, 0, -1, 1, 3)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{10}}$ B) $\frac{-1}{\sqrt{45}}$ C) $\frac{7}{\sqrt{15}}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{2}{\sqrt{35}}$ F) $\frac{2}{\sqrt{45}}$ G) $\frac{3}{\sqrt{105}}$ H) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$ I) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ J) $\frac{-1}{2\sqrt{15}}$
K) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{14}}$ L) $\frac{-1}{\sqrt{21}}$ M) $\frac{4}{\sqrt{21}}$ N) $\frac{-2}{21}$ O) $\frac{1}{\sqrt{21}}$ P) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ Q) $\frac{-2}{\sqrt{105}}$ R) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{101}}$ S) $\frac{1}{3\sqrt{14}}$ U) $\frac{-1}{\sqrt{35}}$

40) Calcule $\|v\|$, sabendo que $v = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \in M(2,2)$ com produto interno

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + bf + cg + dh.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\sqrt{2}$ F) $\sqrt{3}$ G) $\sqrt{5}$ H) $\sqrt{6}$ I) $\sqrt{11}$ J) $\sqrt{12}$ K) $\sqrt{13}$
L) 4 M) 5 N) 6 O) $\sqrt{7}$ P) $\sqrt{8}$ Q) $\sqrt{10}$ R) $\sqrt{17}$ S) $\sqrt{18}$ T) $\sqrt{23}$

41) Sejam $V = \mathbb{R}^4$ com produto interno usual e $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ tais que

- $v_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ e $v_2 = (1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4})$
- $v_3 = \alpha v_1$, para algum escalar α
- v_4 é ortogonal a v_1
- $v_2 = v_3 + v_4$.

Determine o vetor v_4.

A) $v_4 = (\frac{13}{15}, \frac{7}{15}, -\frac{7}{15}, \frac{17}{15})$	B) $v_4 = (-\frac{13}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{7}{15})$	C) $v_4 = (\frac{13}{15}, \frac{7}{30}, -\frac{1}{15}, -\frac{17}{60})$
D) $v_4 = (\frac{13}{30}, \frac{7}{30}, -\frac{7}{30}, \frac{17}{30})$	E) $v_4 = (\frac{1}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{13}{15}, \frac{17}{30})$	F) $v_4 = (\frac{13}{30}, \frac{7}{15}, -\frac{7}{30}, -\frac{17}{15})$
G) $v_4 = (\frac{13}{60}, \frac{7}{60}, -\frac{1}{15}, -\frac{17}{60})$	H) $v_4 = (\frac{1}{60}, \frac{7}{30}, -\frac{1}{30}, \frac{7}{30})$	I) $v_4 = (\frac{7}{60}, \frac{7}{15}, -\frac{7}{15}, \frac{7}{15})$
J) $v_4 = (\frac{7}{60}, \frac{1}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{1}{15})$	K) $v_4 = (\frac{1}{15}, -\frac{7}{60}, \frac{1}{15}, \frac{7}{60})$	L) $v_4 = (-\frac{1}{30}, \frac{7}{60}, -\frac{7}{15}, \frac{1}{30})$

42) Se $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ com produto interno usual, e $v_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})$, $v_3 = (v_{31}, v_{32}, \ldots, v_{3n})$, $\ldots$, $v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})$ são $n-1$ vetores de $\mathbb{R}^n$, então o vetor v_1 definido através do "pseudo-determinante"

$$v_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \cdots & \mathbf{e_n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{32} & \cdots & v_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

é ortogonal a cada um dos vetores $v_2, v_3, \ldots, v_n$. Baseando-se nessa informação, determine um vetor $v_1 \in \mathbb{R}^4$ que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $v_2 = (1, 2, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 4)$ e $v_4 = (0, 5, -3, 2)$.

A) $v_1 = (-24,\ 12,\ -8,\ 6)$	B) $v_1 = (-12,\ -1,\ -18,\ 1)$
C) $v_1 = (24,\ -2,\ -18,\ -1)$	D) $v_1 = (24,\ -12,\ -18,\ 3)$
E) $v_1 = (-2,\ 1,\ 0,\ -4)$	F) $v_1 = (0,\ -4,\ 0,\ -1)$

43) Seja $V = C([0,\ 1])$ um espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$ com produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$. Calcule o ângulo entre os seguintes vetores de V: $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x^3$.

A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{35}}{12}\right)$	B) $\arccos\left(\frac{\sqrt{35}}{8}\right)$	C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$	D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{11}\right)$	E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
F) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$	G) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{35}\right)$	H) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$	I) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$	J) $\arccos\left(\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

44) Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $u \neq \mathbf{0}$ e $v \neq \mathbf{0}$ dois vetores de V cujo ângulo entre eles é igual a θ. Calcule o valor de $\left\| \dfrac{u}{\|u\|} + \dfrac{v}{\|v\|} \right\|$.

A) $\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ B) $\frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}$ C) $\cos\frac{\theta}{2}$ D) $2\cos\frac{\theta}{2}$ E) $4\cos\frac{\theta}{2}$ F) $\cos\theta$ G) $\frac{1}{2}\cos\theta$
H) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ I) $\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ J) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ K) $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ L) $4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ M) $\operatorname{sen}\theta$ N) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$

B.8 Complemento ortogonal e ortogonalização

45) Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (0, -1, 1)$ e $v_2 = (1, 2, 5)$. Determine w sabendo que $\beta = \{w\}$ é uma base do complemento ortogonal $W^{\perp}$.

A) $w = (-2, 1, 1)$ B) $w = (3, -5, 1)$ C) $w = (\frac{-6}{7}, \frac{13}{6}, 1)$ D) $w = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ E) $w = (\frac{2}{5}, \frac{-7}{6}, 1)$
F) $w = (-5, 0, 1)$ G) $w = (4, -2, 1)$ H) $w = (\frac{-6}{5}, \frac{13}{5}, 1)$ I) $w = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, 1)$ J) $w = (\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1)$
K) $w = (-7, 1, 1)$ L) $w = (2, -3, 1)$ M) $w = (\frac{-4}{3}, \frac{-5}{6}, 1)$ N) $w = (\frac{3}{5}, \frac{-14}{5}, 1)$ O) $w = (\frac{3}{2}, \frac{-11}{4}, 1)$

46) Determine u_3 sabendo que $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtida a partir da base $\alpha = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (1, 5, 0)\}$, usando-se o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

A) $u_3 = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ B) $u_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ C) $u_3 = (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$
D) $u_3 = (0, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$ E) $u_3 = (0, \frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}})$ F) $u_3 = (0, \frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{-1}{\sqrt{37}})$
G) $u_3 = (0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$ H) $u_3 = (0, \frac{9}{\sqrt{82}}, \frac{-1}{\sqrt{82}})$ I) $u_3 = (0, \frac{10}{\sqrt{101}}, \frac{-1}{\sqrt{101}})$

47) Usando o produto interno $\langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ do espaço $V = \mathcal{P}_2$, determine uma base para $W^{\perp}$ sabendo que $W = [t^2 - 5t + 6,\ t + 1]$.

A) $\{150t^2 - 840t + 35\}$ B) $\{590t^2 - 584t + 95\}$ C) $\{520t^2 - 504t + 65\}$
D) $\{990t^2 + 184t + 215\}$ E) $\{400t^2 + 123t + 25\}$ F) $\{180t^2 + 284t - 150\}$

48) Seja $V = [1, x, \cos x, \operatorname{sen} x] \subset C([0, \pi])$, com produto interno $\langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Se $W = [x, \operatorname{sen} x]$, determine uma base para $W^{\perp}$.

A) $\{x + \frac{2\pi^3-\pi^2+12\pi}{12}\cos x + 2\pi \operatorname{sen} x,\ 1 + \frac{3\pi^2-24}{26}\cos x - \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} x\}$
B) $\{x - \frac{2\pi^3+\pi^2-12\pi}{12}\cos x - 2\operatorname{sen} x,\ \pi + \frac{3\pi^2-\pi+24}{12}\cos x - \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} x\}$
C) $\{x + \frac{2\pi^3-12\pi}{12}\cos x - 2\operatorname{sen} x,\ 1 + \frac{3\pi^2-24}{12}\cos x - \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} x\}$
D) $\{x - \frac{2\pi^3+\pi^2-12\pi}{12}\cos x + 2\operatorname{sen} x,\ 1 + \frac{3\pi^2-11\pi-24}{12}\cos x - \frac{6}{\pi}\operatorname{sen} x\}$
E) $\{x - \frac{2\pi^3-12\pi}{12}\cos x + 2\operatorname{sen} x,\ \pi + \frac{3\pi^2+\pi-24}{12}\cos x + \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} x\}$
F) $\{x + \frac{2\pi^3+5\pi^2-12\pi}{12}\cos x - 2\pi\operatorname{sen} x,\ 1 + \frac{3\pi^2+5\pi-24}{12}\cos x - \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} x\}$

49) Considerando $W \subset \mathbb{R}^3$ como sendo o plano de equação $2x+5y-11z=0$, determine seu complemento ortogonal $W^\perp$.

A) $W^\perp$ é o plano que tem equação $2x+5y-11z=-14$
B) $W^\perp$ é o conjunto vazio.
C) $W^\perp$ é o conjunto unitário formado só pelo ponto $(0,0,0)$.
D) $W^\perp$ é o plano que tem equação $z=0$
E) $W^\perp$ é a reta que coincide com o eixo dos x
F) $W^\perp$ é a reta que passa pelo $(0,0,0)$ e tem a direção de $\vec{v}=(2,5,-11)$
G) $W^\perp$ é a reta que passa pelo $(0,0,0)$ e tem a direção de $\vec{v}=(2,-11,14)$
H) $W^\perp$ é a reta que passa pelos pontos $(1,1,-11)$ e $(2,5,-11)$.

50) Uma matriz $n \times n$ cujas linhas são os vetores de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ é uma matriz ortogonal. A partir da base $\{(0,1,2),\ (3,4,5),\ (1,2,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$, usando um processo de ortogonalização, obtenha uma matriz M com a propriedade $M^{-1}=M^t$.

A) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$

G) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt2} & \frac{2}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ H) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ I) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{\sqrt7} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{31}} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$

B.9 Formas bilineares e quadráticas

51) Determine qual é a forma bilinear associada à seguinte forma quadrática:

$$q(x,y,z) = 4x^2 + z^2 + 5xy - 10yz$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{A) } f((x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)) & = & 4y_1y_2 + \frac{5x_1z_2}{2} + \frac{5x_2y_1}{2} - 5x_1z_2 - 5y_2z_1 + x_1z_2 \\
\text{B) } f((x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)) & = & 4x_1x_2 + \frac{5x_1z_2}{2} + \frac{5x_2z_1}{2} - 5y_1y_2 - 5x_1z_2 + z_1z_2 \\
\text{C) } f((x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)) & = & 4x_1x_2 + \frac{5x_1y_2}{2} + \frac{5x_2y_1}{2} - 5y_1z_2 - 5y_2z_1 + z_1z_2 \\
\text{D) } f((x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)) & = & 4y_1y_2 + \frac{5x_1z_2}{2} + \frac{5x_2z_1}{2} - 5y_1z_2 - 5y_2z_1 + y_1y_2 \\
\text{E) } f((x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)) & = & 4z_1z_2 + \frac{5x_1y_2}{2} + \frac{5x_2y_1}{2} - 5x_1z_2 - 5y_2z_1 + y_1z_2
\end{array}$$

52) Obtenha a matriz simétrica associada à seguinte forma quadrática do $\mathbb{R}^4$

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) \ = \ x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 24x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 16x_3x_4.$$

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 11 & 8 \\ 2 & 0 & 8 & 24 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 11 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 24 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -11 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & -24 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 11 & 16 \\ 2 & 0 & 16 & -24 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 11 & -16 \\ -4 & 0 & -16 & 24 \end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 11 & -16 \\ -4 & 0 & -16 & 24 \end{bmatrix}$

B.10 Classificação de cônicas e quádricas

Nas quatro questões seguintes, identifique a cônica ou o conjunto de pontos representado pela equação dada.

53) $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 115x - 55y + 150 = 0$

A) Hipérbole B) Elipse C) Parábola D) Duas retas E) Conjunto vazio F) Um ponto

54) $7x^2 - 7y^2 + 48xy - 25x + 75y - 50 = 0$

A) Hipérbole B) Elipse C) Parábola D) Duas retas E) Conjunto vazio F) Um ponto

55) $43x^2 + 57y^2 = 48xy$

A) Hipérbole B) Elipse C) Parábola D) Duas retas E) Conjunto vazio F) Um ponto

56) $189x^2 - 19y^2 + 390xy = 1224$

A) Hipérbole B) Elipse C) Parábola D) Duas retas E) Conjunto vazio F) Um ponto

Nas quatro questões a seguir, identifique a quádrica representada por cada uma das equações dadas.

57) $103x^2 + 125y^2 + 66z^2 + 48xy + 12xz - 60yz - 140x + 14y - 168z + 98 = 0$

A) Hiperbolóide de uma folha B) Hiperbolóide de duas folhas C) Parabolóide elíptico
D) Parabolóide hiperbólico E) Elipsóide F) Cone
G) Cilindro circular H) Cilindro parabólico I) Cilindro hiperbólico

58) $12x^2 + 6y^2 - 18z^2 - 22xy - 30xz + 3yz - 28x - 7y - 63z + 49 = 0$

A) Hiperbolóide de uma folha B) Hiperbolóide de duas folhas C) Parabolóide elíptico
D) Parabolóide hiperbólico E) Elipsóide F) Cone
G) Cilindro circular H) Cilindro parabólico I) Cilindro hiperbólico

59) $xy - yz - xz = 1$

A) Hiperbolóide de uma folha B) Hiperbolóide de duas folhas C) Parabolóide elíptico
D) Parabolóide hiperbólico E) Elipsóide F) Cone
G) Cilindro circular H) Cilindro parabólico I) Cilindro hiperbólico

60) $x^2 + yz = 10$

A) Hiperbolóide de uma folha B) Hiperbolóide de duas folhas C) Parabolóide elíptico
D) Parabolóide hiperbólico E) Elipsóide F) Cone
G) Cilindro circular H) Cilindro parabólico I) Cilindro hiperbólico

B.11 Respostas dos testes

1) **F**	2) **B**	3) **J**	4) **A**	5) **C**	6) **F**	7) **D**	8) **B**	9) **G**	10) **D**
11) **A**	12) **F**	13) **F**	14) **Q**	15) **B**	16) **H**	17) **F**	18) **D**	19) **C**	20) **I**
21) **C**	22) **E**	23) **E**	24) **J**	25) **I**	26) **C**	27) **K**	28) **F**	29) **D**	30) **A**
31) **K**	32) **A**	33) **H**	34) **A**	35) **B**	36) **H**	37) **A**	38) **J**	39) **B**	40) **T**
41) **C**	42) **D**	43) **C**	44) **D**	45) **K**	46) **B**	47) **B**	48) **C**	49) **F**	50) **D**
51) **C**	52) **B**	53) **C**	54) **D**	55) **F**	56) **A**	57) **E**	58) **G**	59) **B**	60) **A**

Referências Bibliográficas

[1] H. Anton, C. Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookman, 2010.

[2] T. M. Apostol, *Cálculo*, volumes 1 e 2, Ed. Reverté, 1978.

[3] P. E. Danko, A. G. Popov, T. Ya. Kozhevnikova, *Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas*, volume 1, Editorial Mir, 1983.

[4] A. V. Efimov, B. P. Demidovich, *Higher Mathematics for Engineering Students*, volume 1, Mir Publishers, 1984.

[5] C. A. Guelli, G. Iezzi, O. Dolce, *Álgebra II – Matrizes, Determinantes, Probabilidades, Sistemas Lineares, Análise Combinatória*, Editora Moderna Ltda, 1972.

[6] H. D. Ikramov, *Linear Algebra Problems Book*, Mir Publishers, 1983.

[7] D. Kreiden, R. C. Kuller, D. R. Ostberg, F. W. Perkins, *Introdução à Análise Linear*, volume 1, Ao Livro Técnico S.A. e Editora da Universidade de Brasília, 1972.

[8] S. Lipschutz, M. Lipson, *Linear Algebra*, 6th edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2018.

[9] I. Proskuriakov, *Problemas de Algebra Lineal*, Editorial Mir, 1986.

[10] M. H. Protter, C. B. Morrey Jr., *Modern Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1964.

Índice Remissivo

Lenimar Nunes de Andrade nasceu no sertão do Rio Grande do Norte no início da década de 60. Descobriu sua vocação para professor de Matemática aos 12 anos de idade, quando dava aulas particulares a muitos colegas do colégio. Obteve o título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba em 1982, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco em 1987 e de Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP em 1998. Em 1984, ingressou como professor de Matemática da Universidade Federal da Paraíba e em 2014 passou a ser Professor Titular. Já teve oportunidade de ministrar mais de 35 disciplinas diferentes, algumas em nível de pós-graduação. Atualmente, é professor de Cálculo Diferencial e Integral I, II, III, Cálculo Numérico, Álgebra Linear, Cálculo Vetorial e Geometria Analítica para alunos de cursos como Engenharia Civil, Engenharia Mecânica, Engenharia Elétrica, Engenharia Química, Engenharia da Computação, Bacharelado em Física, Bacharelado em Matemática, entre outros. Dedicou-se por 9 anos ao ensino a distância através da Universidade Aberta do Brasil, e à programação de computadores a partir de 1988.