

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
JOÃO PITOMBEIRA DE CARVALHO

MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA

- 1) Alberto Azevedo & Renzo Piccinini — Introdução à Teoria dos Grupos
- 2) Nathan M. Santos — Vetores e Matrizes
- 3) Manfredo P. Carmo — Introdução à Geometria Diferencial Global
- 4) Jacob Palis Jr. — Sistemas Dinâmicos
- 5) João Pitombeira de Carvalho — Introdução à Álgebra Linear
- 6) Pedro Fernandez — Introdução à Teoria das Probabilidades

para a Ivânia

PREFÁCIO

Este livro reflete a experiência que adquirimos na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, nos três últimos anos, sobre o ensino da álgebra linear para os alunos dos ciclos básicos dos centros técnico-científicos em nossas universidades.

A matéria aqui tratada é assunto do segundo curso de álgebra linear com a duração de um semestre, reunindo-se três horas por semana, para aulas teóricas e uma hora extra para exercícios.

Queremos deixar bem claro que não se trata de um tratado de álgebra linear, ou de um curso completo destinado a bacharéis em matemática. Ele retrata fielmente, esmeramos, o que a experiência mostrou ser possível ensinar alunos destinados às ciências básicas (matemática, física e química) ou às engenharias. A fim de tornar o livro mais completo e unificado foram incluídos alguns tópicos em geral não cobertos no curso. O livro é auto-suficiente, com a exceção de alguns resultados básicos da teoria dos determinantes e familiaridade com matrizes.

Os pré-requisitos para o livro são cobertos no primeiro curso de álgebra linear, que tem também a duração de um semestre: os espaços R^n , o cálculo matricial, a teoria dos sistemas lineares.

Praticamente todos os colegas do Departamento de Matemática da PUC participaram da confecção deste livro, com sugestões, idéias e encorajamento. Desejo ressaltar, particularmente, a colaboração daqueles junto com os quais fuicionei, durante vários semestres, este curso: Israel

Vaisenchaer, Jair Koiller, João Cândido Portinari, José Carlos de Souza Kihl. Muitos dos exercícios incluídos no capítulo final foram propostos por eles em exames ou tes-tes, cabendo aqui agradecer a permissão para usá-los.

Agradeço ao Prof. Elon Lages Lima o convite para publicar este livro pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Uma primeira versão do livro foi usada na PUC, com sucesso. Queremos externar nossa gratidão a Tânia Regina Vieira d'Ávila que conseguiu, em pouco tempo, decifrar o manuscrito original e datilografá-lo rápida e competente-mente. Wilson Góes, com sua costumeira eficiência, dati-lografou a versão definitiva, pelo que deixo aqui meus a-gradecimentos.

Rio de Janeiro, julho de 1971

João Pitombeira de Carvalho

Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do
Rio de Janeiro

APRESENTAÇÃO

Embora este seja um livro sem nenhuma novidade revolucionária, achamos conveniente apresentar algumas palavras de explicação e justificação.

Em primeiro lugar, trata-se de um livro elementar. Atualmente os cursos de Álgebra Linear começam a ser dados em quase todos os cursos básicos de nossas universidades aos alunos destinados às engenharias e ciências. Como, em muitos casos, esta matéria é ensinada aos alunos logo no primeiro ano do curso, é necessário evitar a tentação de querer ensinar-lhes, em pouco tempo, aquilo que ainda não estão em condições de assimilar. Por isso, nada de teoria dos polinômios ou formas canônicas, que devem vir, para os alunos de fato interessados em Matemática, num estágio posterior. É necessário manter, durante todo este curso introdutório, uma base geométrica e intuitiva. Achamos mesmo que, neste estágio, é às vezes bem mais eficiente descrever geométricamente um teorema e fazer alguns exemplos do que se preocupar com a compreensão perfeita de sua demonstração formal. Um caso típico é o processo de Gram-Schmidt, fácil de vizualização e de aplicação mas para o qual os alunos, em geral, não percebem a necessidade de uma demonstração correta.

Tratamos, exclusivamente, de espaços vetoriais de dimensão finita. Por isso, base, para nós, é base finita. A idéia de apresentar a noção de dependência e independência linear em termos de equações vetoriais com soluções escalares tem funcionado muito bem na prática (agradecemos essa sugestão a Henrique Browne).

Concordamos plenamente com a idéia de S. Lang, expressa em seu livro "Linear Algebra", de que, em um primeiro curso, os corpos considerados devem ser corpos numéricos, i.e., sub-corpos dos números complexos. Assim, neste livro, corpo quer sempre dizer corpo numérico.

Achamos o segundo capítulo importantíssimo. Em primeiro lugar, ataca um tópico difícil, a noção de função ou transformação e que não deve ser abordada dentro de um espírito de rigor lógico e formal: as definições básicas devem ser apresentadas simplesmente, limitadas ao mínimo indispensável e seguidas de inúmeros exemplos. Convém frizar que a maioria dos alunos só encontrou até aqui funções reais de uma variável real.

A segunda parte deste capítulo serve de preparação e motivação para tudo o que vem depois. Algumas vezes, quando o curso foi dado sem esta parte, notou-se que os alunos dificilmente se habituaram ao conceito de transformação linear e eram incapazes de apresentar exemplos concretos, geométricos, como cisalhamentos, dilatações, etc. Uma experiência também feita com sucesso foi dar em primeiro lugar o capítulo 2, e sómente em seguida estudar o capítulo 1.

De posse dos conceitos do segundo capítulo, é fácil motivar o estudo das transformações lineares; em alguns casos, as demonstrações apresentadas no capítulo 3 são simples repetições do que foi feito no capítulo 2. Demos grande ênfase ao teorema do núcleo e da imagem, que pode ser aplicado com sucesso para um estudo completo e geométrico dos sistemas lineares. O método aqui empregado, usando as colunas da matriz do sistema foi preferido por seu conteúdo extremamente geométrico. Da mesma maneira, quando tratamos das transformações lineares inversíveis, embora de-

mos demonstrações (desenvolvidas ou propostas como exercícios) usando o teorema do núcleo e da imagem, voltamos a apresentar os mesmos teoremas com demonstrações geométricas.

Ao tratar os produtos internos, o objetivo foi chegar o mais rápido possível ao teorema de representação dos funcionais lineares, para o qual são também dadas duas demonstrações, uma delas de caráter bem geométrico. Sempre que possível, consideramos os espaços vetoriais sobre um corpo numérico K , que pode ser o corpo real ou complexo. Nesta parte e na seguinte, que trata da definição de adjunta de uma transformação linear, é essencial apresentar exemplos concretos, fazer contas. Aliás, um outro princípio básico por trás de todo o livro é que a compreensão de um teorema só pode ser testada por sua aplicação a exemplos. Isso tem a vantagem extra de exigir um bom domínio da teoria dos sistemas lineares, visto que quase todos os cálculos de álgebra linear recaem na solução de um tal sistema.

Podemos agora passar para a parte seguinte do livro, que é um coroamento de tudo o que foi feito antes. Geralmente, em nosso curso, nos limitamos a cobrir os §5.1 e 5.2, culminando com o teorema espectral para transformações auto-adjuntas. Em alguns casos, dependendo do nível da turma e da disponibilidade de tempo, foi possível abordar as transformações unitárias e normais ou as formas quadráticas. Achamos que estes tópicos apresentam a transição entre o presente curso e um curso mais avançado: talvez somente após um estudo das formas canônicas verá o aluno o interesse em caracterizar as transformações diagonalizáveis em base ortonormal.

Estas notas foram, naturalmente, muito influenciadas pelos livros onde primeiro estudamos o assunto: Birkhoff and MacLane, "A Survey of Modern Algebra"; E.L. Lima, "Cálculo Tensorial"; Gelfand, "Linear Algebra"; P.R. Halmos, "Finite Dimensional Vector Spaces". O curso de álgebra linear da PUC do Rio de Janeiro no qual este livro se baseou foi originalmente estruturado segundo o livro "Linear Algebra" de S. Lang o qual também, por isso, nos influenciou, ditando a ordem geral da apresentação dos assuntos.

Apresentamos, agora, o currículo que temos em geral seguido em nosso curso de aproximadamente 45 horas de aulas teóricas e umas 12 horas de exercícios: Capítulo 1: §§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5; Capítulo 2: §§ 2.1 e 2.2; Capítulo 3: §§ 3.1, 3.2 e 3.3; Capítulo 4: §§ 4.1, 4.2 e 4.3; Capítulo 5: §§ 5.1 e 5.2.

Algumas vezes, no livro, um conceito novo é primeiramente definido em casos particulares, e sómente posteriormente definido em toda sua generalidade. Por vezes, apresentamos uma definição em exercícios ou exemplos, antes de dá-la formalmente no texto, ou repetimos uma definição, a fim de torná-la mais familiar.

Gostaríamos que críticas, sugestões e comunicações de erros ou enganos nos fossem enviados por todos os que usarem este livro.

Ao estudante

Os exercícios e exemplos intercalados no texto do livro fazem parte integrante do curso. Caso você tente estudar sómente a teoria verá que em pouco tempo o assunto se tornará mais e mais difícil, até ser impossível assimilá-lo. Resolva os exercícios à medida que fôr estudando. Se, de repente, você não é capaz de resolver a maior parte dos exercícios propostos, aconselhamos que volte atrás e faça uma revisão cuidadosa dos exercícios passados, da teoria e dos exemplos. Um esforço considerável foi feito para colocar os exercícios e exemplos no local apropriado, de maneira a que se integrem naturalmente no texto.

No fim do livro, encontra-se um capítulo de exercícios e problemas propostos em testes e exames, muitos deles do tipo múltipla escolha.

ÍNDICE

	pag.
CAPÍTULO 1 - ESPAÇOS VETORIAIS	1
§1.1 - Corpos numéricos	1
§1.2 - Espaços vetoriais	3
§1.3 - A noção de subespaço vetorial.....	14
§1.4 - Dependência e Independência Linear.....	20
§1.5 - Espaços Vetoriais de dimensão finita - bases	30
 CAPÍTULO 2 - TRANSFORMAÇÕES DO PLANO	 43
§2.1 - Funções ou transformações	43
§2.2 - Transformações do plano	51
 CAPÍTULO 3 - TRANSFORMAÇÕES LINEARES	 69
§3.1 - Definição e generalidades	69
§3.2 - Imagem e núcleo de uma transformação linear	83
§3.3 - Transformações lineares inversíveis	89
§3.4 - Os sistemas lineares	94
§3.5 - Soma de transformações lineares. O espaço vetorial das transformações lineares..	108
 CAPÍTULO 4 - PRODUTOS INTERNOS	 115
§4.1 - A definição de produto interno; generalidades	115
§4.2 - Funcionais lineares e sua representação..	132
§4.3 - A adjunta de uma transformação linear....	138
 CAPÍTULO 5 - TIPOS ESPECIAIS DE TRANSFORMAÇÕES....	 145
§5.1 - Auto-valores e auto-vetores de uma transformação linear	145
§5.2 - Transformações auto-adjuntas	151

§5.3 - Transformações Unitárias	159
§5.4 - Movimentos rígidos no plano e no espaço	165
§5.5 - Transformações Normais	168
CAPÍTULO 6 - FORMAS BILINEARES	
§6.1 - Formas bilineares - definição e generalidades.....	171
§6.2 - A equação geral do segundo grau	181
CAPÍTULO 7 - PROBLEMAS E EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES...	

• • •

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS VETORIAIS

1.1 - Corpos Numéricos

No cálculo, estudamos funções reais de uma variável real ou seja, funções cujo domínio é o conjunto dos números reais (ou um subconjunto do mesmo) e cujo contradomínio é também o conjunto dos reais. No entanto, antes de passarmos a estudar as propriedades importantes das funções (continuidade, derivabilidade, etc.) e a trabalhar com estas é necessário ver algumas das propriedades dos números reais. Mas não devemos perder de vista o fato de que o interessante são as funções. Uma situação análoga se nos depara em álgebra linear: os objetos realmente importantes são as transformações lineares, um tipo particular de funções cujos domínios e contradomínios são conjuntos dotados de uma estrutura extremamente importante: os espaços vetoriais. Vamos, portanto, inicialmente, estudar as propriedades básicas dos espaços vetoriais. Antes de definir um espaço vetorial é necessário dizer o que é um corpo numérico: é um subconjunto K dos números comple-

xos fechado em relação às operações elementares; isto é, se efetuarmos somas, subtrações, produtos e divisões (com divisor diferente de zero) com elementos de um corpo K obteremos sempre um elemento de K . Isto pode ser tornado mais preciso como segue:

DEFINIÇÃO 1.1.1 - Um corpo K é um subconjunto dos números complexos tal que:

- 1) $\forall x, y \in K$, então $x+y \in K$ e $x \cdot y \in K$;
- 2) os números 0 e 1 são elementos de K ;
- 3) $\forall x \in K$, então $-x \in K$;
- 4) $\forall x \in K$, com $x \neq 0$, então $1/x \in K$.

Obviamente, como os elementos de K são números complexos, êles gozam das seguintes propriedades:

- 5) a associatividade: $\forall x, y, z \in K$, então $x + (y+z) = (x+y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.
- 6) a comutatividade: $\forall x, y, z \in K$, temos que $x+y = y+x$ e $xy = yx$
- 7) a distributividade: $\forall x, y, z \in K$, vem que $(x+y)z = xz + yz$

EXERCÍCIOS

1.1.2: Um subconjunto finito dos números complexos pode formar um corpo?

1.1.3: Decida, em cada um dos casos abaixo, se o subcon-

junto dado dos complexos forma ou não um corpo:

- a) o conjunto \mathbb{R} dos números reais
- b) o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais
- c) o conjunto \mathbb{C} dos números complexos
- d) o subconjunto dos números complexos formado pelos "imaginários puros"
- e) o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros.

1.1.4: Mostre que, em um corpo K , vale a "lei do cancelamento": se $x, y, z \in K$ e $y \neq 0$ então $xy = zy$ acarreta que $x = z$.

1.1.5: Demonstre que o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b racionais é um corpo.

1.1.6: Verifique se o conjunto $N(\sqrt{2}) = \{n_1 + n_2\sqrt{2} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ é um corpo. Que axiomas são violados?

1.2 - Espaços Vetoriais

DEFINIÇÃO 1.2.1 - Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo K se:

- 1) Existe em V uma operação que a todo par de elementos $u, v \in V$ associa um terceiro elemento de V chamado a "soma" de u com v e denotado por $u+v$.
- 2) Existe uma operação que a todo $x \in K$ e a todo $v \in V$ associa um elemento de V chamado o "produto" de v

por x e denotado por $x \cdot v$ e estas operações satisfazem os axiomas:

- V1) $\forall u, v \in V$ então $u+v = v+u$ (comutatividade da adição de vetores)
- V2) $\forall u, v, w \in V$, então $(u+v) + w = u + (v+w)$ (associatividade da adição de vetores)
- V3) $\forall x, y \in K, \forall v \in V$, então $x(yv) = (xy)v$
- V4) $\forall x, y \in K, \forall v \in V$, temos que $(x+y)v = xv + yv$
- V5) $\forall u, v \in V, \forall x \in K$, $x(u+v) = xu + xv$
- V6) Existe em V um elemento chamado "vetor zero" denotado por 0 e tal que $\forall v \in V$, $0+v = v+0 = v$
- V7) $\forall v \in V$, $1 \cdot v = v$
- V8) $\forall v \in V$, existe $u \in V$ tal que $u+v = v+u = 0$.

Observação sobre os axiomas: Os axiomas V1), V2), V6) e V8) dizem respeito somente à operação de adição de vetores. Dos outros axiomas, V4) e V5) relacionam a adição de vetores com a operação de produto por um número, enquanto V3) e V7) referem-se a esta última operação.

Os elementos de V são chamados de vetores e os elementos do corpo K de escalares.

EXEMPLO

1.2.2: Seja $R^2 = \{(x_1, x_2) \text{ t.q. } x_1, x_2 \in R\}$; isto é,

o conjunto de pares ordenados de números reais. Definiremos a adição de dois elementos $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de \mathbb{R}^2 como segue,

$$u+v = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2).$$

Se r é um número real e $u = (x_1, x_2)$, então definimos

$$ru = r(x_1, x_2) = (rx_1, rx_2).$$

Com estas operações, \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , como mostraremos, em parte, abaixo. O restante da demonstração é deixado como exercício.

- 1) Existência do vetor zero: o par $0 = (0,0)$ é tal que se $u = (x_1, x_2)$, então $u+0 = (x_1, x_2) + (0,0) = (x_1+0, x_2+0) = (0+x_1, 0+x_2) = (0,0) + (x_1, x_2) = 0+u = u$.
- 2) Se $u = (x_1, x_2)$, então $1 \cdot u = 1(x_1, x_2) = u$.

EXERCÍCIOS

- 1.2.3: Se $u = (1,2)$ e $v = (3,-1)$ são elementos de \mathbb{R}^2 , qual o vetor $u+v$? $u-3v$? $2u-7v$? Desenhe, em papel quadriculado, êsses vetores.

- 1.2.4: Que valores devemos atribuir aos números a e b para que $(3,4) = a(1,2) + b(3,-1)$?

- 1.2.5: Desenhe, em uma fôlha de papel quadriculado, os ve-

tores da forma $(2,4) + t(3,-1)$, onde $t \in \mathbb{R}$.

1.2.6: Se definirmos em $V = \{(x_1, x_2) \mid t \text{ s.t. } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ as seguintes operações: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0,0)$ e $r(x_1, x_2) = (0,0)$, verifique se V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Que axiomas são violados? quais são satisfeitos?

1.2.7: Considere $V = \{(x_1, x_2) \mid t \text{ s.t. } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ e se $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ são elementos de V , ponha $u+v = (x_1+y_1, x_2+y_2)$, $r \cdot u = (rx_1, 0)$, $0 = (0,0)$ e $-u = (-x_1, -x_2)$. Será V um espaço vetorial com estas operações? Que axiomas são violados?

1.2.8: Um espaço vetorial sobre um corpo K pode ter um número finito de elementos?

1.2.9: Interprete geométricamente o Exemplo 1.2.2.

1.2.10: Seja $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n\}$ e se $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $r \in \mathbb{R}$, defina $u+v = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$, $ru = r(x_1, x_2, \dots, x_n) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$. Prove que com estas operações \mathbb{R}^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

EXEMPLO

1.2.11: Considere o conjunto S das listas infinitas de números reais $S = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots\}$

Podemos somar duas listas somando as "coordenadas" de mesma ordem e multiplicar uma lista por um número real multiplicando cada "coordenada" pelo número real. É fácil verificar que, com estas operações, S é um espaço vetorial sobre os números reais.

EXERCÍCIOS

1.2.12: Seja S' o subconjunto de S (ver Exemplo 1.2.11) dado pelas listas cujas coordenadas são todas nulas a partir de um certo índice; por exemplo, $(1, 2, 0, 3, 0, 0, \dots, 0, \dots), (1, 3, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in S'$. Mostre que a soma de dois elementos de S' é um elemento de S' e que o produto de um elemento de S' por um número real é um elemento de S' .

EXEMPLO

1.2.13: Tomemos $V = \{f: R \rightarrow R\}$ o conjunto das funções da reta na reta. Dados dois elementos de V , ou seja, duas funções f e g , definiremos sua soma $f+g$ como o seguinte elemento de V :

$$f+g: R \rightarrow R$$

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

e o produto de um elemento f de V por um número real r como sendo a função rf dada por

$$rf: R \rightarrow R$$

$$x \mapsto rf(x)$$

Em primeiro lugar, se $f, g \in V$, $f+g = g+f$, pois se $x \in R$, $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ e assim $f+g = g+f$. Testar a associatividade é igualmente fácil. Seja, por outro lado, a função $f_0: R \rightarrow R$ tal que $f_0(x) = 0, \forall x \in R$. Então, se $f \in V$, vemos imediatamente que $f+f_0 = f_0+f = f$. Além disso, se $f: R \rightarrow R$ considere $h: R \rightarrow R$ tal que $h(x) = -f(x), \forall x \in R$ e resulta que $f+h = h+f = f_0$.

A função f_0 considerada acima e cujo valor é sempre nulo será denotada por 0. A função h será chamada de $(-f)$. Deixamos como exercício verificar os outros axiomas.

EXERCÍCIOS

1.2.14: Verifique completamente os axiomas para o Exemplo
1.2.13.

1.2.15: Se $f: R \rightarrow R$ é dado por $x \mapsto 2x$ e $g: R \rightarrow R$ é definida por $x \mapsto e^x$, qual é a função $f+g$? Qual a função $2f-3g$?

1.2.16: Se $p, q: R \rightarrow R$ são definidas por $x \mapsto 3x^2 + 5x - 3$,
 $x \mapsto 4x + 7$ respectivamente, qual a função $p+q$?

1.2.17: Seja $f: R \rightarrow R$ dada por

$$\begin{array}{ll} x \mapsto 1 & x \text{ racional} \\ x \mapsto 0 & x \text{ irracional} \end{array}$$

e $g: R \rightarrow R$ dada por

$x \mapsto 1$ x irracional

$x \mapsto 0$ x racional.

Qual a função $f+g$? $f-g$? $g-f$?

1.2.18: Interprete, usando os gráficos das funções, as definições do Exemplo 1.2.13.

1.2.19: Dado um corpo K , mostre que o conjunto K é um espaço vetorial sobre K com as operações de soma e produto de números complexos.

1.2.20: Seja K um corpo. Considere $K^2 = \{(k_1, k_2) | k_1, k_2 \in K\}$. Defina as seguintes operações:

1) se $u = (k_1, k_2)$, $v = (k'_1, k'_2)$, $u+v = (k_1+k'_1, k_2+k'_2)$

2) se $k \in K$, $v = (k_1, k_2)$, $kv = (kk'_1, kk'_2)$.

Mostre então que K^2 é um espaço vetorial sobre K .

Generalize este exercício para $K^n = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) | k_i \in K, i=1, 2, \dots, n\}$.

EXEMPLOS

1.2.21: Chame de $M(2 \times 2)$ o conjunto das matrizes quadradas 2×2 com coeficientes reais. É fácil verificar que com as operações de soma de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar, obtemos um espaço vetorial sobre os números reais.

1.2.22: Considere P_n o conjunto dos polinômios reais

$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ de grau $\leq n$. Se $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$, defina a soma $p(t) + q(t) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \dots + (a_n+b_n)t^n$ e se $r \in \mathbb{R}$ ponha $rp(t) = ra_0 + ra_1 t + \dots + ra_n t^n$. Demonstra-se então, sem dificuldades, que com estas operações, P_n é um espaço vetorial sobre os números reais.

EXERCÍCIOS

1.2.23: Demonstre, com detalhes, o Exemplo 1.2.22.

1.2.24: Mostre que o conjunto dos polinômios a coeficientes reais e de grau igual a n não é um espaço vetorial com as operações do Exemplo 1.2.22.

1.2.25: Considere os sistemas lineares abaixo e ache suas soluções:

- a) $3x - 2y = 0$
- b) $2x + 5y = 0$
 $3x - 4y = 0$
- c) $3x - 7y = 0$
 $6x - 14y = 0$
- d) $2x + 4y - 3z = 0$
 $3x - 2y + 2z = 0$

1.2.26: Uma solução do sistema a) acima é um par de números reais. Mostre que se os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são soluções do sistema, então (x_1+x_2, y_1+y_2) e (rx_1, ry_1) também são soluções.

1.2.27: Demonstre afirmações análogas às do exercício anterior para as soluções de b), c) e d).

EXEMPLOS

1.2.28: Dado um sistema linear homogêneo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

suas soluções são n-listas (x_1, x_2, \dots, x_n) de números reais. A soma de duas soluções será uma solução e o produto de uma solução por um número real será também uma solução. Isso mostra que o conjunto das listas soluções será um espaço vetorial sobre \mathbb{R} (faça os detalhes).

1.2.29: Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre um corpo K e considere o conjunto $V = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2\}$. Definamos em V as seguintes operações: $(v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) = (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2)$ e $k(v_1, v_2) = k(v_1, v_2)$. Verifica-se então (faça-o) que, com estas operações, V é um espaço vetorial sobre K , chamado soma direta de V_1 e V_2 e denotado por $V_1 \oplus V_2$.

Vejamos, agora, algumas consequências fáceis dos axiomas. O axioma V6) diz que há um vetor neutro em relação à operação de adição dos vetores; o lema abaixo mostra que ele é único:

LEMA 1.2.30 - Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K e $0, 0' \in V$ são tais que, para todo $v \in V$, $v+0 = 0+v = v+0' = 0'+v = v$, então $0 = 0'$.

Demonstração: Como, para todo $v \in V$, $v+0 = v$, vem que, fazendo $v = 0$, $0'+0 = 0'$, por outro lado, como $v+0' = v$, para todo $v \in V$, obtém-se, fazendo $v=0$, que $0+0' = 0$. Vemos assim que $0' = 0'+0 = 0+0' = 0$.

Outro fato, de fácil demonstração, é o seguinte:

LEMA 1.2.31 - Se $0 \in K$ e $v \in V$, onde V é um espaço vetorial sobre K , então $0.v = 0$ (observe que, nesta igualdade, o zero do lado esquerdo é o número zero, e o zero do lado direito é o vetor zero de V , o elemento neutro em relação à adição de vetores).

Demonstração: Temos que $0.v = (0+0).v = 0.v + 0.v$ pelo axioma V4). Por V8), o vetor $0.v$ tem um negativo, que chamaremos de u . Então, adicionando u a ambos os lados de $0.v = 0.v + 0.v$ obtemos que $0.v + u = (0.v+0.v) + u = 0.v + (0.v+u)$ e como $0.v+u = 0$ vem que $0 = 0.v+0 = 0.v$.

LEMA 1.2.32 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e $k \in K$. Então, $k.0 = 0$.

Demonstração: Temos que $k.0 = k.(0+0) = k.0 + k.0$. Soman-

do a ambos os membros um negativo v de $k.0$, vem que
 $0 = k.0 + v = (k.0+k.0) + v = k.0 + (k.0+v) = k.0+0 = k.0$,
e assim fica concluída a demonstração.

LEMA 1.2.33 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e dados $u, u' \in V$ com $u+v = u'+v = 0$, então $u = u'$.

Demonstração: Se $v+u = 0$, segue-se que $(v+u)+u' = 0+u' = u'$, donde $u' = (v+u)+u' = v+(u+u') = v+(u'+u) = (v+u')+u = 0+u = u$.

Passaremos a denotar o (único) negativo de um vetor u por $-u$. Existe uma maneira fácil de achar o negativo de um vetor qualquer.

LEMA 1.2.34 - Se $v \in V$, então $-v = (-1)v$.

Demonstração: Com efeito, se mostrarmos que $(-1)v+v = 0$, teremos concluído a demonstração, devido à unicidade do negativo; mas $(-1)v+v = (-1)v + 1.v = ((-1)+1)v = 0.v = 0$.

LEMA 1.2.35 - Se $v \in V$ e $a.v = 0$ com $a \neq 0$, então $v = 0$.

Demonstração: Como $a \neq 0$, a admite um inverso a^{-1} ; temos então: $a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1v = v = 0$.

EXERCÍCIO

1.2.36: Indique todos os axiomas dos espaços vetoriais que foram usados nas demonstrações dos lemas.

1.3 - A noção de subespaço vetorial

DEFINIÇÃO 1.3.1 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , e W é um subconjunto não vazio de V ; dizemos que W é um subespaço de V se:

- 1) $0 \in W$
- 2) quaisquer que sejam $u, v \in W$, então $u + v \in W$
- 3) se $a \in K$ e $v \in W$, então $av \in W$.

Vemos assim que um subespaço vetorial de V é um subconjunto de V fechado em relação à operação de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar. Observe que V é um subespaço vetorial de si próprio e que o conjunto formado pelo vetor 0 é também um subespaço de V .

LEMA 1.3.2 - Um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se e somente se, $\forall v_1, v_2 \in W$ e $\forall k_1, k_2 \in K$, então $k_1v_1 + k_2v_2 \in W$.

Demonstração: Com efeito, se W é um subespaço então como $v_1, v_2 \in W$, segue-se que $k_1 v_1, k_2 v_2 \in W$; mas então $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W$. Por outro lado, se $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in W$, temos que $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W$; vemos logo que $0 \in W$, pois $0 = 0.v_1 + 0.v_1$ (W é não vazio) e fazendo $k_1 = k_2 = 1$, segue-se que $v_1 + v_2 \in W$; além disso, fazendo $k_2 = 0$, vem que $k_1 v_1 \in W$.

EXEMPLOS

1.3.3: Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que ou } (x_1, x_2) = (0,0) \text{ ou } x_2/x_1 = a, x_1 \neq 0, a \text{ constante}\}$. Geometricamente, W é o conjunto dos pontos sobre uma mesma reta L passando pela origem e definida por seu coeficiente angular a . É fácil ver que W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 .

1.3.4: Tome V como sendo o espaço vetorial das funções reais de uma variável real e considere $W = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$. Afirmamos que W é um subespaço vetorial de V . De fato, a função 0 (ou seja, a função $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$) é obviamente contínua, logo um elemento de W . Por outro lado, a soma de duas funções contínuas é uma função contínua, e o produto de uma função contínua por um número real é uma função contínua, o que conclui a demonstração.

EXERCÍCIOS

1.3.5: Verifique, em detalhe, o Exemplo 1.3.3.

1.3.6: Determine todos os subespaços do \mathbb{R}^2 .

1.3.7: Ache todos os subespaços do \mathbb{R}^3 .

EXEMPLOS

1.3.8: Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e sejam $v_1 = (1, 3, 0)$ e $v_2 = (-1, 1, 1)$ elementos do \mathbb{R}^3 . O conjunto $[v_1, v_2] = \{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } v = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, a, b \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 . Com efeito, se $w_1, w_2 \in [v_1, v_2]$ então $w_1 = a_1 v_1 + b_1 v_2$ e $w_2 = a_2 v_1 + b_2 v_2$ e assim $w_1 + w_2 = (a_1 + a_2)v_1 + (b_1 + b_2)v_2$ e $aw_1 = aa_1 v_1 + ab_1 v_2$ são elementos de $[v_1, v_2]$. Note que o vetor 0 pertence a $[v_1, v_2]$ pois $0 = 0v_1 + 0v_2$.

1.3.9: Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K , e v_1, v_2 são vetores de V , considere o conjunto $[v_1, v_2] = \{w \in V \text{ tais que } w = k_1 v_1 + k_2 v_2, k_1, k_2 \in K\}$. É fácil ver que $[v_1, v_2]$ é um subespaço vetorial de V . Este subespaço é chamado de subespaço gerado por v_1 e v_2 .

EXERCÍCIO

1.3.10: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , e v_1, v_2, \dots, v_n vetores de V . Defina por analogia com 1.3.8 o subespaço $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ gerado por

v_1, v_2, \dots, v_n e prove que ele é de fato um subespaço. Os elementos de $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ são chamados combinações lineares dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

EXEMPLOS

1.3.11: Considere o espaço vetorial V das funções reais de uma variável real e seja P_n o conjunto dos polinômios a coeficientes reais e de grau $\leq n$, com as operações usuais de adição de polinômios e de multiplicação de polinômios por escalares. É fácil ver que P_n é um subespaço vetorial de V .

1.3.12: Em $M(2 \times 2)$, o espaço vetorial das matrizes 2×2 com coeficientes reais, considere $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tais que } b=0 \right\}$. É imediato verificar que W é um subespaço de $M(2 \times 2)$.

EXERCÍCIOS

1.3.13: Verifique os detalhes dos Exemplos 1.3.11 e 1.3.12.

1.3.14: Mostre que o conjunto $W = \{f: R \rightarrow R \text{ tais que } f(1) = 0\}$ é um subespaço do espaço vetorial das funções reais de uma variável real.

1.3.15: Verifique quais dos conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial das funções reais de uma variável real:

$$W_1 = \{f: R \rightarrow R \text{ tais que } f(0) = f(1) = 0\}$$

$$W_2 = \{f: R \rightarrow R \text{ tais que } f(0) = 1\}$$

$$W_3 = \{f: R \rightarrow R \text{ tais que } \int_0^1 f(t)dt = 0\}$$

$$W_4 = \{f: R \rightarrow R \text{ tais que } \int_0^1 f(t)dt = 1\}$$

EXEMPLOS

1.3.16: Já vimos que as soluções de um sistema linear homogêneo com coeficientes em um corpo K

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

formam um espaço vetorial. É fácil verificar que este espaço vetorial é um subespaço de K^n .

1.1.17: Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K e tome a soma direta $V = V_1 \oplus V_2$ de V_1 e V_2 . Considere os subconjuntos W_1 e W_2 de V dados por

$$W_1 = \{w \in V_1 \oplus V_2 \text{ tais que } w = (v_1, 0), v_1 \in V_1\}$$

$$W_2 = \{w \in V_1 \oplus V_2 \text{ tais que } w = (0, v_2), v_2 \in V_2\}.$$

É então fácil verificar que W_1 e W_2 são subespaços de V .

EXERCÍCIOS

1.3.18: Se $V_1 = R_1$, $V_2 = R$, o que é $V_1 \oplus V_2$?

1.3.19: Se $V_1 = R$, $V_2 = R^2$, o que é $V_1 \oplus V_2$? Descreva,

neste caso, geométricamente, os subespaços W_1 e W_2 definidos em 1.3.17.

Os subespaços de V que são diferentes de V e de 0 são chamados subespaços próprios.

É importante perceber que a união de dois subespaços não é um subespaço; por exemplo se V_1 e V_2 são os subespaços do \mathbb{R}^2 gerados por $(1,2)$ e $(-1,1)$ respectivamente então $V_1 \cup V_2$ é o subconjunto do plano formado por duas retas que se interceptam na origem e não é um subespaço, visto que $(1,2)$ e $(-1,1)$ são elementos de $V_1 \cup V_2$ mas $(1,2) + (-1,1)$ não pertence a $V_1 \cup V_2$. O lema seguinte descreve a situação referente à intersecção de subespaços vetoriais:

LEMA 1.3.21 - Se V_1 e V_2 são subespaços vetoriais de V , então $V_1 \cap V_2$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração: Sejam $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$. Devemos provar que $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in V_1 \cap V_2$, $\forall k_1, k_2 \in K$. Com efeito, como $v_1, v_2 \in V_1$, temos que $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in V_1$, $\forall k_1, k_2 \in K$; de maneira análoga $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in V_2$ e assim $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in V_1 \cap V_2 \quad \forall k_1, k_2 \in K$.



1.4 - Dependência e Independência linear

No Exemplo 1.3.9 os elementos do subespaço $[v_1, v_2]$ gerado por v_1 e v_2 são da forma $k_1 v_1 + k_2 v_2$, onde $k_1, k_2 \in K$. Dizemos então que eles são combinações lineares de v_1 e v_2 . Da mesma maneira, em 1.3.10, os elementos de $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ são combinações lineares dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n . A definição formal é a seguinte:

DEFINIÇÃO 1.4.1 - Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K , e v_1, v_2, \dots, v_n são vetores de V , dizemos que $u \in V$ é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n se existem $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ tais que $u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$.

No espaço \mathbb{R}^3 , que vetores são combinação linear de $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_2 = (-1, 1, 1)$? Pela própria definição são os elementos $u \in \mathbb{R}^3$ tais que existem $r_1, r_2 \in R$ com $u = r_1 v_1 + r_2 v_2$; ou seja se $u = (x_1, x_2, x_3)$ devemos ter:

$$(x_1, x_2, x_3) = r_1(1, 2, 0) + r_2(-1, 1, 1)$$

ou ainda

$$x_1 = r_1 - r_2$$

$$x_2 = 2r_1 + r_2$$

$$x_3 = r_2$$

Desta maneira para testar se um vetor $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$ combinação linear de \bar{v}_1 e \bar{v}_2 é suficiente testar se sistema acima tem ou não solução; por exemplo se $\bar{u} = (1, 11, 3)$ de:

$$1 = r_1 - r_2$$

$$11 = 2r_1 + r_2$$

$$3 = r_2$$

remos que $r_2 = 3$, $r_1 = 4$ e enfim, $(1, 11, 3) = 4(1, 2, 0) + 3(-1, 1, 1)$. Por outro lado, dado $\bar{v} = (1, -1, 4)$; vejamos se \bar{v} é combinação linear de \bar{v}_1 e \bar{v}_2 ; para isso, deve nos resolver o sistema

$$1 = r_1 - r_2$$

$$-1 = 2r_1 + r_2$$

$$4 = r_2$$

que não tem solução (por quê?). Assim $\bar{v} = (1, -1, 4)$ não é combinação linear de \bar{v}_1 e \bar{v}_2 .

EXERCÍCIOS

1.4.2: Verifique se o vetor $(3, 5, 7) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores $(2, 1, 3)$ e $(3, -2, 2)$. Interprete geométricamente.

1.4.3: Escreva o vetor $(1, 3) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear de $(2, 5)$ e $(3, 7)$. Interprete geométricamente.

1.4.4: É possível escrever o vetor $(10, 15) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear de $(2, 3)$ e $(4, 6)$? Por quê? Interprete

te geométricamente.

1.4.5: É possível escrever o vetor $(5, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear de $(2, 1, 4)$, $(3, -2, -1)$ e $(-2, 3, 4)$?

Por quê? Interprete geométricamente.

1.4.6: É possível escrever o vetor $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear de $(1, 2)$ e $(-1, 1)$?

1.4.7: No exercício anterior, mostre que se $(0, 0) = r_1(1, 2) + r_2(-1, 1)$ e $(0, 0) = r'_1(1, 2) + r'_2(-1, 1)$, então $r_1 = r'_1$ e $r_2 = r'_2$. Ou seja, $(0, 0)$ se exprime de maneira única, como combinação linear de $(1, 2)$ e $(-1, 1)$.

1.4.8: Mostre que o vetor $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito de duas maneiras distintas como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(-2, -4)$. Interprete geométricamente.

1.4.9: Mostre que no espaço vetorial \mathbb{R}^2 qualquer vetor pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(5, 0)$. Interprete geométricamente.

1.4.10: Considere mais uma vez o espaço vetorial \mathbb{R}^2 e sejam dois vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Mostre que se um vetor qualquer do \mathbb{R}^2 pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 , então v_1 não pertence ao subespaço gerado por v_2 . Interprete geométricamente este resultado.

Pela definição de combinação linear, vemos que os

elementos do subespaço gerado por $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são exatamente os vetores que se escrevem como combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n . Podemos mesmo ir mais longe e dar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.4.11 - Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V . O subespaço [S] gerado por S é o conjunto dos vetores que se escrevem como combinação linear de elementos de S . Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$ ou seja, se $v \in [S]$, existem vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ e escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ tais que $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = \sum_{i=1}^n k_i v_i$.

EXEMPLO

1.4.12: Considere P o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais e seja S o subconjunto de P formado pelos polinômios $t^0, t^2, t^4, t^8, \dots, t^{2i}, \dots, i$ qualquer. Então $[S]$ será constituído pelos polinômios onde t só aparece com a potência par; por exemplo os polinômios $1 + t^4 + 3t^32 + 9t^{296}$, $11t^{24} + t^{108} - 18t^{1000}$, $1 + t^2 + t^4$, $4, 28 - 2t^2$, são elementos de $[S]$.

Uma observação importante é que o conjunto $[S]$ é de fato um subespaço vetorial. A demonstração de tal fato é um exercício fácil.

DEFINIÇÃO 1.4.13 - Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, são linearmente dependentes se existem escalares a_1, a_2, \dots, a_n , onde pelo menos um não é nulo, e tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$. O Exercício 1.4.8 mostra que os vetores $(1, 2)$ e $(-2, -4)$ do \mathbb{R}^2 são linearmente dependentes; por 1.4.7 o mesmo não acontece com $(1, 2)$ e $(-1, 1)$.

Se os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente dependentes dizemos, também, que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente.

EXEMPLOS

1.4.14: Dado um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ onde $v_1 = 0$, então os vetores deste conjunto são linearmente dependentes (por quê?).

1.4.15: Se v é um elemento não nulo de V , então o conjunto formado pelo vetor v não é linearmente dependente.

1.4.16: Considere um conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linearmente dependente. Mostre que se $S' \subseteq V$ e $S \subseteq S'$ então S' é linearmente dependente.

1.4.17: Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, onde $v_1 = v_2$. Mostre então que S é linearmente dependente.

EXERCÍCIO

1.4.16: Dois vetores v_1, v_2 , não nulos de um espaço vetorial V , são linearmente dependentes se e somente se um pode ser escrito como múltiplo do outro.

DEFINIÇÃO 1.4.17 - Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são linearmente independentes se não existem escalares a_1, a_2, \dots, a_n , com pelo menos um deles não nulo, e que façam a soma $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ser o vetor zero.

Uma formulação equivalente é dizer que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes se, dada uma combinação linear nula dos mesmos $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$, então forçosamente $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Se v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente.

Ainda, outra maneira de interpretar o conceito de dependência e independência linear é introduzindo a noção de "equação vetorial":

DEFINIÇÃO 1.4.18 - Se v_1, v_2, \dots, v_n, u são elementos de um espaço vetorial sobre um corpo K , uma equação vetorial em v_1, v_2, \dots, v_n e termo independente u é uma expressão da forma $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = u$, onde $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$. A lista (x_1, x_2, \dots, x_n) é

uma solução da equação. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a equação vetorial diz-se homogênea.

Com esta noção podemos dizer que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ são linearmente independentes se a única solução da equação vetorial homogênea $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ é a lista $(0,0,\dots,0)$. Se a equação vetorial $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ admite soluções diferentes de $(0,0,\dots,0)$, então dizemos que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes.

EXERCÍCIOS

1.4.19: Se $\mathbf{v}_1 = (1,3,5)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-1,3)$ e $\mathbf{v}_3 = (-3,2,-4)$ são vetores do \mathbb{R}^3 , resolva a equação vetorial $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ e decida se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são linearmente dependentes ou independentes.

1.4.20: Resolva a equação vetorial $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ onde $\mathbf{v}_1 = (2,3,5)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,4)$, $\mathbf{v}_3 = (-2,2,3)$ e $\mathbf{u} = (10,1,4)$ são vetores do \mathbb{R}^3 .

EXEMPLOS

1.4.20: Tome o espaço vetorial V das funções reais de uma variável real e considere as funções f_1 e f_2 dadas por $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$ que são linearmente independentes; com efeito, suponha que existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1f_1 + a_2f_2 = 0$. Mas isso quer dizer que,

para todo número real t , $a_1 e^t + a_2 e^{2t} = 0$ e isso implica em particular, que $a_1 e + a_2 e^2 = 0$ (fazendo $t = 1$) e $a_1 + a_2 = 0$ (fazendo $t = 0$) e a única solução deste sistema é $a_1 = a_2 = 0$.

1.4.21: Consideremos mais uma vez o espaço P_n formado pelos polinômios reais de grau $\leq n$ e sejam os polinômios $p_0(t) = 1, p_1(t) = t, \dots, p_n(t) = t^n$. Afirmando que estes polinômios são linearmente independentes: de fato se $a_0 p_0 + a_1 p_1 + \dots + a_n p_n = 0$ (onde 0 é o polinômio idênticamente nulo), segue-se que $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = 0$, mas como um polinômio real é idênticamente nulo se e só se seus coeficientes são nulos, vem que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

EXERCÍCIOS

1.4.22: Se $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, ache um vetor $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que v_1 e v_2 sejam linearmente independentes.

1.4.23: Se $v_1 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, ache um vetor $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

1.4.24: Tome os vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ do Exercício 1.4.23 e ache um vetor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que v_1, v_2 e v_3 sejam linearmente independentes.

1.4.25: Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ são os vetores do Exercício 1.4.22, prove que é impossível encontrar um vetor $v_3 \in \mathbb{R}^2$

tal que v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes.

1.4.26: Tome os vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ do Exercício

1.4.24 e demonstre que é impossível encontrar um vetor $v_4 \in \mathbb{R}^3$ tal que v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

1.4.27: Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios reais

de grau $\leq n$. Mostre que é possível encontrar um polinômio $p_1(t)$ tal que os polinômios 1 e $p_1(t)$ são linearmente independentes.

1.4.28: Mostre que existem em P_n polinômios $p_1(t),$

$p_2(t), p_3(t), \dots, p_n(t)$ tais que para $i=1, 2, \dots, n$, os polinômios 1, $p_1(t), \dots, p_n(t)$ são linearmente independentes.

1.4.29: Mostre que em \mathbb{R}^2 é impossível encontrar três vetores linearmente independentes.

1.4.30: Mostre que em \mathbb{R}^3 é impossível encontrar quatro vetores linearmente independentes.

1.4.31: Mostre que em P_n é impossível encontrar $(n+2)$ vetores linearmente independentes.

1.4.32: Se P é o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais, demonstre que existem polinômios $p_0, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$, tais que p_0, p_1, \dots, p_i são linearmente independentes, qualquer que seja i .

DEFINIÇÃO 1.4.33 - Um conjunto finito $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ onde $v_i \in V$, $i=1, \dots, n$ é linearmente independente maximal se:

- 1) os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes
- 2) qualquer que seja o vetor $v \in V$, os vetores v_1, v_2, \dots, v_n, v são linearmente dependentes.

EXERCÍCIOS

1.4.34: Exiba em \mathbb{R}^2 , um conjunto que não é linearmente independente maximal e um que é linearmente independente maximal.

1.4.35: Encontre no \mathbb{R}^3 , um conjunto que não é linearmente independente maximal e um que é linearmente independente maximal.

1.4.36: Mesmas perguntas para o espaço vetorial P_n .

EXEMPLO

1.4.37: Os exercícios anteriores mostram que \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e P_n possuem conjuntos linearmente independentes maximais. Tal não acontece com P , o espaço vetorial de todos os polinômios a coeficientes reais. Com efeito, se S é um conjunto linearmente independente maximal de vetores de P , seja $N = \text{máximo grau } p_i(t)$ onde $p_i(t) \in S$. Tome um polinômio de grau $N+1$; seja $p(t)$ este polinômio. O conjunto S' cujos elementos são os elementos de S e o

polinômio $p(t)$ é formado por vetores linearmente independentes (por quê?) e como S está estritamente contido em S' , não é maximal, uma contradição.

1.5 - Espaços vetoriais de dimensão finita - bases

DEFINIÇÃO 1.5.1 - Um espaço vetorial V sobre um corpo K é dito de dimensão finita se existe um inteiro positivo N tal que dados $N+1$ vetores quaisquer do espaço eles são linearmente dependentes.

É fácil ver que esta definição é equivalente a dizer que existe N tal que qualquer conjunto com N ou mais elementos é linearmente dependente.

Os exemplos e exercícios do §1.4 mostram, por exemplo, que os espaços vetoriais \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e P_n são de dimensão finita, mas o mesmo não acontece com o espaço P .

EXERCÍCIOS

1.5.2: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e W é um subespaço vetorial de V , então W é de dimensão finita.

1.5.3: Mostre que o espaço vetorial das funções reais de uma variável real não é de dimensão finita.

1.5.4: Seja V um espaço vetorial e $v \in V$. Mostre que o subespaço gerado por v , $[v]$, é de dimensão finita.

EMA 1.5.5 - Em um espaço vetorial V de dimensão finita, existem conjuntos linearmente independentes maximais.

Demonstração: Seja N o inteiro referido na Definição

1.5.1. Tome $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$. O conjunto formado por v_1 é linearmente independente; se ele for maximal, a demonstração está concluída; se não, seja $v_2 \in V$ tal que os vetores v_1, v_2 sejam linearmente independentes. Considere agora o conjunto $\{v_1, v_2\}$; se for linearmente independente maximal, a demonstração está concluída; se não, existe $v_3 \in V$ tal que os vetores v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes. Continuando com este processo, chegaremos a um vetor v_n tal que v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes mas $\forall v \in V, v_1, v_2, \dots, v_n, v$ são linearmente dependentes (por quê? use a Definição 1.5.1). Então, o conjunto v_1, v_2, \dots, v_n será linearmente independente maximal.

DEFINIÇÃO 1.5.6 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Os vetores v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base finita para V sobre K se o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente maximal. Ou seja, base é outra denominação para um conjunto linearmente independente maximal.

Sempre que empregarmos a palavra base, fica desde já convencionado que queremos dizer base finita.

LEMA 1.5.7 - Todo espaço vetorial de dimensão finita tem uma base finita.

Demonstração: É uma consequência trivial de 1.5.5.

EXERCÍCIOS

1.5.8: Dê uma base para o espaço vetorial \mathbb{R}^2 .

1.5.9: Mesma pergunta para os espaços \mathbb{R}^3 e P_n .

1.5.10: Mostre que o vetor 0 não pode ser elemento de uma base e que uma base não pode ter dois vetores iguais.

1.5.11: Dê duas bases distintas para os espaços \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e P_n .

O nosso objetivo agora é demonstrar que, se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos, então qualquer outra base terá também n elementos; assim, o número de elementos que aparecem em uma base é um invariante numérico de V . Antes, no entanto, veremos alguns resultados também importantes:

LEMA 1.5.12 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Então, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, ou seja, V é o espaço gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Demonstração: Se $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, nada há a demonstrar. Suponhamos, portanto, que v_1, v_2, \dots, v_n está estritamente contido em V , e seja $v \in V$ tal que $v \notin [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Afirmamos então que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ é linearmente independente. Com efeito, seja a equação vetorial $\sum_{i=1}^n a_i v_i + bv = 0$. e suponhamos que ela tenha uma solução diferente de $(0, 0, \dots, 0)$; então $b \neq 0$. (por quê? o que é uma base?); mas assim

$$v = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \dots - \frac{a_n}{b} v_n$$

e portanto $v \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$, contradição.

Este resultado mostra que os vetores de uma base são vetores linearmente independentes que geram o espaço. A-recíproca é válida, e demonstrada a seguir.

LEMA 1.5.13 - Se V é um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são vetores linearmente independentes que geram V , então v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base para V .

Demonstração: Suponha que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ não é linearmente independente maximal; então existe $v \in V$ tal que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n, v são linearmente independentes; logo v não é combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n (por quê?) e assim v_1, v_2, \dots, v_n não geram V , contradição.

De maneira que as bases de um espaço vetorial V são exatamente os conjuntos de vetores linearmente independentes que geram V .

Uma das razões que tornam as bases importantes é a seguinte:

- TEOREMA 1.5.14 - Se V é um espaço vetorial e v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base para V , então, dado um vetor arbitrário $v \in V$, v escreve-se de maneira única como combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .

Demonstração: Já sabemos que $[v_1, v_2, \dots, v_n] = V$. Assim,

dado $v \in V$, existem $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ tais que $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$. Suponha então que existam $k'_1, k'_2, \dots, k'_n \in K$ com $v = \sum_{i=1}^n k'_i v_i$ onde, para algum $1 \leq i \leq n$, $k_i \neq k'_i$; vemos assim que $0 = v - v = \sum (k_i - k'_i) v_i$ e como os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes, concluimos que, para todo $i, 1 \leq i \leq n$, $k_i = k'_i$.

Podemos agora demonstrar que o número de elementos de uma base qualquer de V é constante.

TEOREMA 1.5.15 - Duas bases quaisquer v_1, v_2, \dots, v_s e u_1, u_2, \dots, u_n de um espaço vetorial V têm o mesmo número de elementos, isto é, $s = n$.

OBSERVAÇÃO: Sentimo-nos tentados a fazer a seguinte demonstração: por definição as duas bases são

conjuntos linearmente independentes maximais logo $s = n$, mas este raciocínio é falso; com efeito, se $S_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ o fato de que tanto S_1 como S_2 são maximais quer dizer que, se S'_1 e S'_2 são subconjuntos de V que contêm propriamente S_1 e S_2 , então S'_1 e S'_2 são linearmente dependentes, mas não há implicação nenhuma sobre o número de elementos de S_1 e S_2 . Passamos, agora, a uma demonstração correta:

Demonstração: Considere o conjunto $\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e observe que ele é linearmente dependente, pois $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é linearmente independente maximal. Note que $\{v_1\}$ é linearmente independente. Relativamente ao conjunto $\{v_1, u_1\}$, duas coisas podem ocorrer: ou v_1, u_1 são linearmente independentes, ou v_1, u_1 são linearmente dependentes. Se v_1, u_1 são linearmente independentes, formemos o conjunto $\{v_1, u_1, u_2\}$ e novamente as duas hipóteses podem ocorrer. Prossigamos desta maneira enquanto obtivermos conjuntos de vetores linearmente independentes e seja u_i o primeiro vetor para o qual o conjunto $\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_i\}$ não é linearmente independente, isto é, $\{v_1, u_1\}, \{v_1, u_1, u_2\}, \{v_1, u_1, u_2, u_3\}, \dots, \{v_1, u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\}$ são linearmente independentes mas $\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_i\}$ não é (note que $i \geq 1$, se $i=1$ ponha $u_0 = v_1$).

Como $\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_i\}$ é linearmente dependente, a equação vetorial homogênea $y_0 v_1 + y_1 u_1 + \dots + y_i u_i = 0$ tem pelo menos uma solução não trivial. Nesta solução, o coeficiente y_i é não nulo (por quê? os vetores $v_1, u_1, u_2, \dots, u_i$ são linearmente dependentes ou independentes?) e assim temos que:

$$u_i = -\frac{y_0}{y_i} v_1 - \frac{y_1}{y_i} u_1 - \dots - \frac{y_{i-1}}{y_i} u_{i-1}$$

ou seja, u_i é uma combinação linear de v_1, u_1, \dots, u_{i-1} .

Afirmamos então que $v_1, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n$ geram V . Com efeito, se $v \in V$, então

$$v = \sum_{j=1}^n x_j u_j = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n ,$$

mas

$$u_i = -\frac{y_0}{y_i} v_1 - \frac{y_1}{y_i} u_1 - \dots - \frac{y_{i-1}}{y_i} u_{i-1}$$

de maneira que

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{i-1} x_j u_j + x_i \left\{ \sum_{\ell=1}^{i-1} \left(-\frac{y_\ell}{y_i} \right) u_\ell - \frac{y_0}{y_i} v_1 \right\} + \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n x_j u_j \end{aligned}$$

e mostramos que v é uma combinação linear de $v_1, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ conforme desejado.

Agora, a partir de $\{v_1, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$

formemos o conjunto $\{v_2, v_1, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ e apliquemos a ele o mesmo raciocínio; obtemos, assim, após retirar dentre os vetores $v_2, v_1, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ o primeiro que é combinação linear dos precedentes, um conjunto do tipo $\{v_2, v_1, u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ onde $k \geq 1$ (se $k=1$, ponha $u_{k-1} = v_1$) e que gera V. Este processo pode ser repetido até obtermos um conjunto da forma

$$\{v_s, v_{s-1}, \dots, v_2, v_1, u_{\alpha(1)}, u_{\alpha(2)}, \dots, u_{\alpha(s)}\}$$

onde $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(s)$ são inteiros e $1 \leq \alpha(1) < \alpha(2) \dots < \alpha(s) \leq n$. Mas então $s \leq n$ (por quê?).

Invertendo agora os papéis de $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ obtemos, de maneira análoga, que $n \leq s$. Logo $n = s$.

Um exame atento da demonstração de 1.5.15 mostrará que o realmente demonstrado (duas vezes) foi o seguinte:

LEMA 1.5.16 - Se v_1, v_2, \dots, v_n são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V, gerado pelos vetores u_1, u_2, \dots, u_s , então $n \leq s$.

Já vimos que os espaços vetoriais de dimensão finita admitem sempre uma base (finita!). Podemos também demonstrar que se V admite uma base é de dimensão finita: com efeito, dada uma base de V com s elementos, 1.5.16

mostra imediatamente que qualquer conjunto linearmente independente de V tem no máximo s elementos, logo V é de dimensão finita, e fica assim demonstrado o teorema abaixo:

TEOREMA 1.5.17 - Um espaço vetorial V tem dimensão finita se e só se admite uma base finita.

Outro fato é a seguinte consequência trivial da definição de base mas que, por sua utilidade, merece destaque:

LEMA 1.5.18 - Se v_1, v_2, \dots, v_s são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V de dimensão finita, podemos então encontrar vetores $v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n$ de V tais que $v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ constituem uma base para V .

EXERCÍCIOS

1.5.19: Demonstre o Lema 1.5.18.

1.5.20: Seja $V = \mathbb{R}^3$ e a base dada por $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ e $u_3 = (0,0,1)$; considere o subespaço W gerado pelo vetor $w = (1,1,1)$. Há algum vetor da base u_1, u_2, u_3 no subespaço W ?

O exercício acima mostra que, dada uma base de V e um subespaço W de V , não se segue forçosamente que algum vetor da base pertença a W . Temos, no entanto o se

quinte resultado:

LEMMA 1.5.21 - Se W é um subespaço de um espaço vetorial V , e u_1, u_2, \dots, u_s uma base de W , então existem vetores $u_{s+1}, \dots, u_n \in V$ tais que $u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_n$ formam uma base de V .

EXERCÍCIOS

1.5.22: Demonstre o Lema 1.5.21 (use 1.5.18).

1.5.23: Se V_1 e V_2 são espaços vetoriais e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, $\beta' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ são bases de V_1 e V_2 respectivamente, mostre que $\beta \oplus \beta' = \{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_s, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_n)\}$ é uma base para $V_1 \oplus V_2$.

Já mostramos que duas bases quaisquer de um espaço vetorial possuem o mesmo número de elementos. Por outro lado, espaços vetoriais de dimensão finita sempre têm bases. A seguinte definição faz, portanto, sentido:

DEFINIÇÃO 1.5.24 - Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. A dimensão de V (sobre K) é o número de vetores de uma base qualquer de V sobre K . Se V não é de dimensão finita diremos que V tem dimensão infinita.

EXERCÍCIOS

1.5.25: Dê um espaço vetorial de dimensão infinita.

1.5.26: Se V_1 , tem dimensão s e V_2 dimensão n, qual a dimensão de $V_1 \oplus V_2$?

LEMA 1.5.27 - Se a dimensão de V é n e os vetores

v_1, v_2, \dots, v_n geram V então v_1, v_2, \dots, v_n constituem uma base para V .

Demonstração: Já sabemos que se v_1, v_2, \dots, v_n geram V e são linearmente independentes formam uma base para V . Suponhamos, por absurdo, que v_1, v_2, \dots, v_n não são linearmente independentes. É então verdade que um dos vetores v_2, \dots, v_n é combinação linear dos que o precedem (por quê?). Seja v_i o primeiro vetor que é combinação linear dos precedentes. Como na demonstração de 1.5.15, o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ gera V . Se este conjunto não é linearmente independente, repitamos o processo. Eventualmente, chegaremos a um conjunto formado por vetores linearmente independentes que geram V . O número de elementos deste conjunto será estritamente menor que n, uma contradição.

LEMA 1.5.28 - Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Se os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes então formam uma base para V .

Demonstração: Se v_1, v_2, \dots, v_n não formam uma base para V , como uma base é um conjunto linearmente

independente maximal, vem que existe $v_{n+1} \in V$ tal que v_1, v_2, \dots, v_{n+1} são linearmente independentes, mas isso contradiz o Lema 1.5.16.

EXERCÍCIO

1.5.29: Seja $V = \mathbb{R}^3$ e W o subespaço gerado por $(1,1,4)$.

A partir da base de W formada por $(1,1,4)$ ache uma base para \mathbb{R}^3 .

CAPÍTULO 2

TRANSFORMAÇÕES DO PLANO

2.1 - Funções ou transformações

DEFINIÇÃO 2.1.1 - Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma lei de correspondência (uma regra) que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x) \in B$. O conjunto A é chamado domínio da função f e B contra-domínio de f. As funções são também chamadas de aplicações ou transformações.

EXEMPLOS

2.1.2: Seja A o conjunto dos números reais, B também o conjunto dos reais e $f:A \rightarrow B$ dada por $f(x) = x^2$, $\forall x \in A$; ou seja, f é a função que a cada número real associa o seu quadrado.

2.1.3: Tomemos A como sendo o plano \mathbb{R}^2 , onde escolhemos um ponto fixo 0. Seja B o conjunto dos números reais e $f:A \rightarrow B$ a função tal que $f(P) = \text{distância de } 0 \text{ a } P$, $\forall P \in A$.

2.1.4: Seja f a função que a cada ponto do globo terrestre associa, em um certo momento fixo, a sua tempe-

ratura e pressão atmosférica. Se fixarmos unidades para a medida da temperatura e pressão, f será uma função cujo domínio é o conjunto dos pontos da superfície terrestre e cujo contra-domínio será o conjunto dos pares ordenados de números reais.

2.1.5: Dado um conjunto A qualquer, temos a função identidade em A : é a função i_A cujo domínio é A , o contra-domínio também é A e tal que $i_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

2.1.6: Se A e B são conjuntos, e $p \in B$, temos a função constante de valor p , f_p : é a função de domínio A , contra-domínio B e tal que $f_p(x) = p$, $\forall x \in A$.

DEFINIÇÃO 2.1.7 - Duas funções $f:A \rightarrow B$ e $g:C \rightarrow D$ são iguais se $A = C$, $B = D$ e $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.

EXEMPLO

2.1.8: Seja $f:R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^2$.

Se $R^+ = \{x \in R \text{ t.q. } x \geq 0\}$, seja $g:R \rightarrow R^+$ dada por $g(x) = x^2$. Vemos, por nossa definição, que a função f é diferente da função g.

DEFINIÇÃO 2.1.9 - Dada uma função $f:A \rightarrow B$ e $x \in A$, dizemos que o ponto $f(x) \in B$ é a imagem, por f , do ponto x . O conjunto de valores de f é o subconjunto de B formado pelos pontos que são imagens, por

, dos pontos de $A: \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ com } f(x) = y\}$. Dando um subconjunto C de A diremos que sua imagem pela aplicação f é o conjunto $f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C \text{ com } f(x) = y\}$. Assim, $f(A)$ é o conjunto dos valores de f .

EXEMPLO

2.1.10: Tome $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$; então o conjunto de valores de f é \mathbb{R}^+ .

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, denotamos também que $y = f(x)$ por $x \mapsto y$. Assim a função do Exemplo 2.1.10 fica caracterizada por sua lei de correspondência $x \mapsto x^2$.

DEFINIÇÃO 2.1.11 - Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se,

$$\forall x, y \in A, x \neq y, \text{ então } f(x) \neq f(y).$$

Ou seja, uma função injetora transforma pontos distintos em pontos distintos.

EXERCÍCIOS

2.1.12: Dê um exemplo de uma função injetora.

2.1.13: Dê um exemplo de uma função que não é injetora.

2.1.14: Mostre que uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se e somente se, dados $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ acarreta que $x = y$.

DEFINIÇÃO 2.1.15 - Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se o conjunto de valores de f é igual a B ; ou seja, se $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $x \mapsto y$.

A função $f:R \rightarrow R$ dada por $x \mapsto x^2$ não é sobrejetora. A função identidade $l_A:A \rightarrow A$ é sempre sobrejetora (e também injetora). Uma função que é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora recebe um nome especial:

DEFINIÇÃO 2.1.16 - Uma função $f:A \rightarrow B$ é bijetora se é injetora e sobrejetora.

Se $f:A \rightarrow B$ é bijetora, então, dado $y \in B$, arbitrário, existe um e sómente um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

EXEMPLOS

2.1.17: Sejam $A = B = R^2$ e $f:R^2 \rightarrow R^2$ dada por $(x,y) \mapsto (\sin x, \cos y)$. Então f não é injetora pois $f(x,y) = f(x+2K\pi, y+2K\pi)$ onde K é um inteiro qualquer; por outro lado, f também não é sobrejetora, pois note que $|(\sin x, \cos y)| \leq 1$ portanto o conjunto de valores de f está contido na circunferência com centro na origem e raio 1.

2.1.17: Considere a função $f:R^2 \rightarrow R$ dada por $(x,y) \mapsto x+y$.

Esta função é sobrejetora (demonstre isso) mas não é injetora (por quê?).

2.1.18: Se $f:R^2 \rightarrow R^3$ é a função $(x,y) \mapsto (1, x, 2y)$, então f é injetora; com efeito, se $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, então $(1, x_1, 2y_1) = (1, x_2, 2y_2)$ logo $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. No entanto, f não é sobre: o ponto $(2, 3, 5)$ não é imagem,

por f , de nenhum ponto do \mathbb{R}^2 (Obs.: sobre = sobrejetora).

2.1.19: Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (2x+5, 3y+2)$.

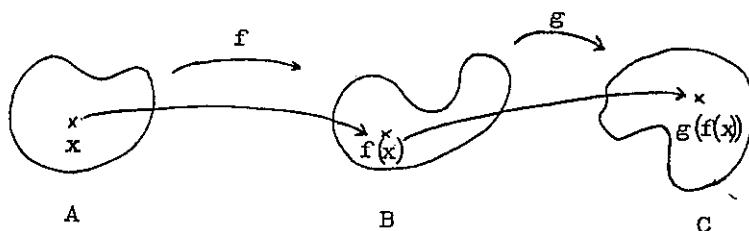
Esta função é bijetora. Com efeito, se

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, então $(2x_1+5, 3y_1+2) = (2x_2+5, 3y_2+2)$
 → assim $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, e dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, o ponto
 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 = \frac{a-5}{2}$, $y_0 = \frac{b-2}{3}$ goza da pro-
 priidade de que $f(x_0, y_0) = (a, b)$.

DEFINIÇÃO 2.1.20 - Sejam $f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$ funções. A

composta de f com g , $g \circ f$, é a fun-
 ção de domínio A e contra-domínio C definida por
 $\mapsto g(f(x))$, $\forall x \in A$; ou seja $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

A fim de poder compor duas funções $f:A \rightarrow B$, $g:C \rightarrow D$,
 exigimos que $B = C$, ou seja, o contra-domínio da primeira
 deve ser igual ao domínio da segunda. A operação de compor
 funções pode ser melhor entendida com o auxílio da figura:



KEMPLoS

.1.21: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ são dadas por $f(x) = x+5$, $g(x) = (x, e^x)$ então $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada

por $x \mapsto (x+5, e^{x+5})$.

2.1.22: Sejam $f:R \rightarrow R$, $g:R \rightarrow R$ dadas por $f(x) = x^2$,

$g(x) = x + \cos x$, então $(g \cdot f):R \rightarrow R$ é dada por $x \mapsto x^2 + \cos(x^2)$, enquanto $f \cdot g:R \rightarrow R$ será dada por $x \mapsto (x + \cos x)^2$.

É fácil ver que se $f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$ e $h:C \rightarrow D$ são funções, então $h(g \cdot h) = (h \cdot g)f$. (A composição de funções é associativa).

EXEMPLO

2.1.23: Se $T, S:R^2 \rightarrow R^2$ são dadas por $T(x,y) = (\cos x, \operatorname{sen} y)$ e $S(x,y) = (e^x, y)$, então $(T \cdot S)(x,y) = (\cos e^x, \operatorname{sen} y)$ e $(S \cdot T)(x,y) = (e^{\cos x}, \operatorname{sen} y)$. Vemos assim que $T \cdot S \neq S \cdot T$. (A composição de funções não é, em geral, comutativa).

LEMA 2.1.24 - Se $f:A \rightarrow B$ é uma transformação sobrejetora, então existe $g:B \rightarrow A$ tal que $f \cdot g = l_B$. Dizemos que g é uma inversa à direita de f .

Demonstração: Sabemos, como f é sobre, que $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$. Então, dado $y \in B$, defina $g:B \rightarrow A$ por $g(y) = x$, onde x é tal que $f(x) = y$ e é imediato ver que $f \cdot g = l_B$.

EXERCÍCIO

2.1.25: Mostre que, se $f:A \rightarrow B$ é sobrejetora mas não é

injetora, então existem pelo menos duas funções diferentes $g_1, g_2: B \rightarrow A$ tais que $f \cdot g_1 = f \cdot g_2 = l_B$.

LEMA 2.1.26 - Se $f:A \rightarrow B$ é uma transformação injetora, então existe $g:B \rightarrow A$ tal que $g \cdot f = l_A$. A função g é chamada de uma inversa à esquerda de f .

Demonstração: Seja $C \subseteq B$ a imagem de f . Então, se $x \in B$, ou $x \in C$, ou $x \notin C$; caso $x \in C$, existe um único $z \in A$ tal que $f(z) = x$. Definiremos $g:B \rightarrow A$ como segue:

$$g(x) = \begin{cases} z & \text{onde } f(z) = x, \text{ se } x \in C \\ z_0, & z_0 \text{ fixo em } A, \text{ se } x \notin C. \end{cases}$$

Então $g \cdot f(z) = g(f(z)) = z$, como é imediato verificar, para todo $z \in A$.

EXERCÍCIOS

2.1.27: Mostre que se A tem mais de um ponto e $f:A \rightarrow B$ é injetora mas não é sobrejetora, então existem pelo menos duas funções, $g_1, g_2: B \rightarrow A$, distintas, tais que $g_1 \cdot f = g_2 \cdot f = l_A$.

2.1.28: Seja $f:A \rightarrow B$ uma função. Prove que, se existe $g:B \rightarrow A$ tal que $f \cdot g = l_B$, então f é sobrejetora.

2.1.29: Se $f:A \rightarrow B$ é uma função e existe $g:B \rightarrow A$ tal que $g \cdot f = l_A$, então f é injetora.

É fácil ver que há funções injetoras que não são sobrejetoras e funções sobrejetoras que não são injetoras, e portanto há funções que possuem sómente inversas à direita ou sómente inversas à esquerda. As funções que possuem inversa à direita e à esquerda levam um nome especial:

DEFINIÇÃO 2.1.30 - Uma função $f:A \rightarrow B$ é inversível se existe $g:B \rightarrow A$ tal que $f \cdot g = l_B$ e $g \cdot f = l_A$. (Ou seja, g é uma inversa à direita de f e também uma inversa à esquerda de f). A função g é dita ser uma inversa de f . Observe que se f é inversível, então f é injetora e sobrejetora, logo bijetora (isso se segue de 2.1.28 e 2.1.29). A recíproca é verdadeira:

LEMA 2.1.31 - Se f é sobrejetora e injetora, então f é inversível.

Demonstração: Mostraremos que se $f:A \rightarrow B$ possui uma inversa à direita $g:B \rightarrow A$ e uma inversa à esquerda $h:B \rightarrow A$, então $g = h$; com efeito, sabemos que $f \cdot g = l_B$ e $f \cdot g = l_A$, logo $h \cdot (f \cdot g) = h \cdot l_B$, assim $(h \cdot f) \cdot g = h$ e $l_A \cdot g = g = h$.

Se a função $f:A \rightarrow B$ tem uma inversa g (ou seja

$g:B \rightarrow A$ tal que $f \cdot g = 1_B$, $g \cdot f = 1_A$), então g é única, o que é uma consequência trivial de 2.1.31. Podemos, portanto dizer que g é a inversa de f , e denotá-la por f^{-1} .

EXERCÍCIOS

2.1.32: Se $f:A \rightarrow B$ é inversível com inversa $f^{-1}:B \rightarrow A$, mostre que a função f^{-1} é inversível e que sua inversa é f .

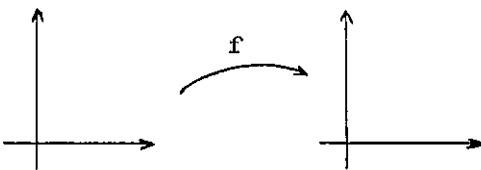
2.1.33: Mostre que se $f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$ são funções inversíveis, então $g \cdot f$ será inversível e $(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$.

2.1.34: Seja $R^{++} = \{x \in R \mid x > 0\}$ e considere as funções $f:R \rightarrow R^{++}$ e $g:R^{++} \rightarrow R$ dadas por $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$. Mostre que f é inversível e que g é a inversa para f .

2.2 - Transformações do plano

Particularizamos, agora, o nosso estudo das funções.

DEFINIÇÃO 2.2.1 - Uma transformação do plano é uma função f cujos domínio e contra-domínio são iguais ao \mathbb{R}^2 .



EXERCÍCIOS

2.2.2: Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação do plano, o que significa:

- a) f é sobrejetora?
- b) f é injetora?
- c) f é inversível?

2.2.3: Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Esta função é sobrejetora? é injetora?

2.2.4: Considere $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (2x+y, 3x-4y)$. Será f injetora? e sobrejetora?

2.2.5: Seja ainda $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (2x+y, 3x-4y)$. Qual o ponto $f(1,0)$? Qual o ponto $f(0,1)$? mostre que $f(5,1) = 5.f(1,0) + 1.f(0,1)$.

2.2.6: Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $(x,y) \mapsto (2x, 3y+x)$, ache $f(3,1)$, $f(5,2)$, $f(4,3)$, $f(-7,1)$, $f(1,0)$ e $f(0,1)$ e, para cada um dos quatro primeiros casos, ache a e b tais que $f(x,y) = a.f(1,0) + b.f(0,1)$.

2.2.7: Considere a transformação do plano dada por $f(x,y) = (x+5, y+7)$ e mostre que ela é inversível.

Ache sua inversa. Ache $f(0,0)$. Seja L a reta $y = 2x$. Se $p \in L$, calcule $f(p)$. Se $p \in L$, qual o lugar geométrico dos pontos da forma $f(p)$? Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, ache o lugar geométrico dos pontos da forma $f(p)$ onde $p \in C$.

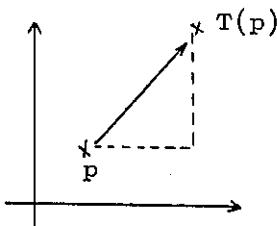
2.2.8: Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x,y) \mapsto (x-y, x+y)$ e calcule o lugar geométrico dos pontos da forma $f(p)$, onde $p \in \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Ache a imagem por f de uma reta passando pela origem. Ache a imagem, por f , de uma reta qualquer.

Passaremos, agora, a estudar vários tipos importantes de transformações do plano. De agora em diante, os pontos do plano serão denotados também por matrizes colunas 2×1 ; escrevemos por exemplo, o ponto $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

DEFINIÇÃO 2.2.9 - Uma translação T do plano é a transformação do plano dada por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$ a e b números reais, os quais são chamados de parâmetros da translação. O Exercício 2.2.7 já apresentou um exemplo de translação.

Uma translação fica perfeitamente determinada se conhecemos seus parâmetros a e b . É fácil ver que uma translação é inversível e sua inversa é uma translação (quais são os parâmetros da inversa?). O seguinte resul-

tado é também de fácil verificação:



LEMA 2.2.10 - Se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma translação, então $\forall p, q \in \mathbb{R}^2, d(p, q) = d(T(p), T(q))$; se L e S são duas retas, suas imagens por T são retas e o ângulo entre as imagens é igual ao ângulo entre L e S. Em particular retas paralelas são transformadas em retas paralelas. Dado um polígono do plano, sua área é preservada por T.

Um outro tipo importante de transformação do plano é o seguinte:

DEFINIÇÃO 2.2.11 - Uma rotação R_θ do plano é a transformação dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

O parâmetro θ é chamado o ângulo da rotação, e uma rotação de ângulo θ é denotada por R_θ .

Observe que, usando a notação matricial, podemos escrever a expressão para R_θ como

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de maneira que se p tem coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ as coordenadas de $R_\theta(p)$ são achadas multiplicando as matrizes acima. Dizemos que $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ é a matriz de R_θ .

Os seguintes fatos são de fácil verificação:

LEMA 2.2.12 - Dadas duas rotações $R_{\theta_1}, R_{\theta_2}$ então

$$R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} = R_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} = R_{(\theta_1 + \theta_2)} \text{ e } R_\theta = I.$$

Uma consequência imediata de 2.2.12 é que as rotações são inversíveis e a inversa de R_θ é $R_{(-\theta)}$; com efeito, pelo lema, $R_\theta \cdot R_{(-\theta)} = R_{(-\theta)} \cdot R_\theta = I$, o que demonstra nossa afirmação.

EXERCICIOS

2.2.13: Mostre que uma rotação transforma retas em retas e círculos em círculos.

2.2.14: Dadas duas retas L_1 e L_2 que fazem entre si um ângulo α , mostre que suas imagens por uma rotação fazem entre si o ângulo α .

2.2.15: Seja C a curva definida por $2xy = a^2$. Se $p \in C$, qual o lugar geométrico dos pontos $R_{(-\pi/4)}(p)$?

Já vimos que $R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} = R_{(\theta_1 + \theta_2)}$ e note também que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

de maneira que para achar a composta de duas rotações é suficiente multiplicar suas matrizes.

Em geral, dada uma matriz arbitrária 2×2 ,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ela define sempre uma transformação T do plano dada por

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO

2.2.16: Tome a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e considere a transformação T_A . Então,

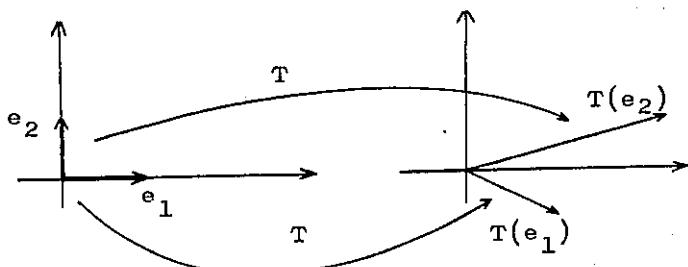
$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ -x + 2y \end{pmatrix}.$$

Em particular, $T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, ou seja, a primeira coluna da matriz A dá as coordenadas do transformado do primeiro vetor da base $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ do plano. Analogamente, a segunda coluna da matriz A dá as coordenadas de $T_A(e_2)$. Observe, também, que

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = x T_A(e_1) + y T_A(e_2).$$

Desta maneira, o valor de T_A para um vetor qualquer $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ do plano fica perfeitamente determinado pelos

valores de T_A nos vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Em verdade, se v_1 e v_2 são vetores do plano, então $T_A(r_1v_1 + r_2v_2) = r_1T_A(v_1) + r_2T_A(v_2)$. Com efeito, se

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad T_A(v_1) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5y_1 \\ -x_1 + 2y_1 \end{pmatrix}, \quad T_A(v_2) = \begin{pmatrix} 2x_2 + 5y_2 \\ -x_2 + 2y_2 \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T_A(r_1v_1 + r_2v_2) &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1x_1 + r_2x_2 \\ r_1y_1 + r_2y_2 \end{pmatrix} = \\ &= (2r_1x_1 + 2r_2x_2 + 5r_1y_1 + 5r_2y_2) \begin{pmatrix} 2x_1 + 5y_1 \\ -x_1 + 2y_1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + r_2 \begin{pmatrix} 2x_2 + 5y_2 \\ -x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} = r_1T_A(v_1) + r_2T_A(v_2) . \end{aligned}$$

Uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz a equação $T(r_1v_1 + r_2v_2) = r_1T(v_1) + r_2T(v_2)$ diz-se linear. Acabamos de ver que a transformação do plano induzida por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é linear. A recíproca também é verdadeira, como demonstrado a seguir:

TEOREMA 2.2.17 - Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função tal que,

$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2, T(r_1v_1 + r_2v_2) = r_1T(v_1) + r_2T(v_2)$. Então, se $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, temos que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :$$

Demonstração: Com efeito $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de maneira que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = xT\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + yT\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS

2.2.18: Mostre que, dadas duas transformações do plano

T_1 e T_2 definidas por matrizes M_1 e M_2 , então a transformação $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ será definida pela matriz $M_2 \cdot M_1$ (Sugestão: faça as contas!).

2.2.19: Mostre que a transformação identidade $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear. Qual a matriz definida por ela?

Uma consequência dos Exercícios 2.2.18 e 2.2.19 é que se a matriz A é inversível, então a transformação T_A será inversível. Com efeito, por 2.2.18 a matriz de $T_A \cdot T_{A^{-1}}$ é a matriz identidade 2×2 (por quê?), logo $T_A \cdot T_{A^{-1}} = I$, e o mesmo ocorre com $T_{A^{-1}} \cdot T_A$ e assim a transformação T_A possui uma inversa, que será $T_{A^{-1}}$.

DEFINIÇÃO 2.2.20 - Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear do plano. O núcleo de T é o subconjunto do plano formado pelos vetores v tais que $Tv = 0$:

$$N(T) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid T(v) = 0\}$$

EXEMPLO

2.2.21: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x,y) \mapsto (x-y, x+y)$. Para achar $N(T)$, se $v = (x,y) \in N(T)$ então

$$T(v) = (x-y, x+y) = (0,0), \text{ ou seja}$$

$$x-y = 0$$

$$x+y = 0$$

e assim $x = y = 0$. Desta maneira, $N(T) = \{(0,0)\}$.

Observe que achar $N(T)$ recai em estudar um sistema linear homogêneo.

EXERCÍCIO

2.2.22: Dada $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear do plano, mostre que o vetor nulo sempre pertence a $N(T)$.

EXEMPLO

2.2.23: Se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $(x,y) \mapsto (x+2y, -2x-4y)$ ache o núcleo de T .

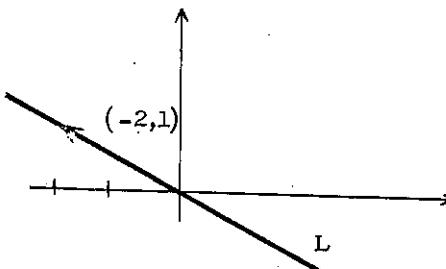
Mais uma vez, se $v = (x,y) \in N(T)$, então

$$T(v) = (x+2y, -2x-4y) = (0,0) \text{ ou seja}$$

$$x + 2y = 0$$

$$2x + 4y = 0$$

e este sistema tem a solução geral $(-2y, y)$; logo,
 $v \in N(T) \Leftrightarrow v = (-2y, y)$, ou seja $v \in N(T)$ se e somente
se v está sobre a reta L definida por $(-2, 1)$.



EXERCÍCIO

2.2.24: Seja $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Verifique se T_A é sobre.

O exercício acima mostra que testar se uma transformação linear do plano é sobre reduz-se a resolver um sistema linear (não homogêneo!).

EXEMPLO

2.2.25: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e calculemos sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

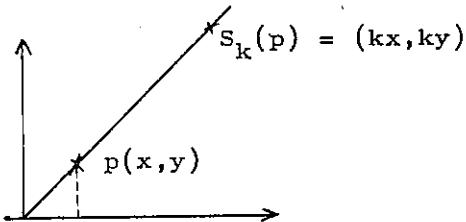
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e assim a matriz de T^{-1} será $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

Tanto as rotações como as translações preservam distâncias entre pontos. Um exemplo importante de transformação que não faz isso é o seguinte:

DEFINIÇÃO 2.2.26 - Uma transformação de semelhança é a transformação S_k definida por

$$S_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \quad k \neq 0$$



Tentemos comparar as propriedades de uma transformação de semelhança (ou, simplesmente, semelhança) com as propriedades que já conhecemos das rotações e das translações. Em primeiro lugar, S não preserva distâncias (exceto se $k=1$). Se $k > 1$, $d(p, q) < d(S_k(p), S_k(q))$ e se $k < 1$, $d(p, q) > d(S_k(p), S_k(q))$. É óbvio que uma reta L passando pela origem é invariante sob S_k (isto é, se $p \in L$, $S_k(p) \in L$). Vejamos como S_k transforma uma reta qualquer:

Seja $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ e tome $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $p \in L$; então, $S_k(p) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ logo $x = \frac{x'}{k}$, $y = \frac{y'}{k}$ e assim $\frac{a}{k}x' + \frac{b}{k}y' + c = 0$ donde

$ax^2 + by^2 + ck = 0$ e provamos que uma semelhança transforma retas em retas.

Deixamos como exercício estudar a ação de uma semelhança sobre círculos.

EXERCÍCIOS

2.2.27: Seja C um círculo de raio r e centro $p_0 = (x_0, y_0)$.

Em que figura a semelhança S_k transforma C ?

2.2.28: Decida se uma semelhança altera ou preserva o ângulo entre duas retas.

2.2.29: Mostre que uma semelhança S_k é inversível e que a inversa é uma semelhança.

DEFINIÇÃO 2.2.30 - A reflexão em torno do eixo O_x é a transformação do plano R_x definida

por

$$R_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} .$$

A reflexão em torno do eixo O_y é a transformação R_y definida por

$$R_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} .$$

EXERCÍCIO

2.2.31: O que é a transformação $R_x \circ R_y$? e $R_y \circ R_x$? Calcule $R_x \circ R_x$ e $R_y \circ R_y$. Prove que R_x e R_y são inversíveis e calcule suas inversas.

DEFINIÇÃO 2.2.32 - Um alongamento paralelo a O_y é a transformação do plano definida por

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad k \neq 0.$$

Se $k < 1$, temos uma compressão ao longo de O_y .

Se $k > 1$, teremos um alongamento propriamente dito ao longo de O_y .

Observe que uma reta passando pela origem é transformada, por um alongamento, em uma reta passando pela origem (como muda o coeficiente angular da reta?).

EXERCÍCIOS

2.2.33: Decida se um alongamento paralelo a O_y transforma retas em retas.

2.2.34: Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, ache a imagem de C por um alongamento paralelo a O_y .

2.2.35: Dadas duas retas L_1 e L_2 , estude como muda o ângulo entre elas após aplicarmos às mesmas um alongamento paralelo à O_y .

2.2.36: Defina, de maneira análoga a 2.2.32, um alongamento paralelo a O_x e resolva os Exercícios 2.2.7,

2.2.28 e 2.2.29 relativamente a esta transformação.

2.2.37: Dado A_k um alongamento ao longo de O_x e A_ℓ um alongamento ao longo de O_y , ache a transformação $A_k \cdot A_\ell$. É verdade que $A_k \cdot A_\ell = A_\ell \cdot A_k$?

DEFINIÇÃO 2.2.38 - Um cisalhamento paralelo a O_x é uma transformação do tipo

$$c_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad k \neq 0 .$$

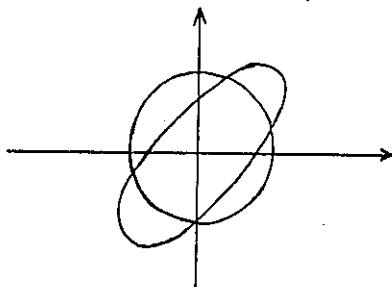
Um cisalhamento paralelo a O_y é uma transformação da forma

$$c_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad k \neq 0 .$$

EXEMPLO

2.2.39: Seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$ e apliquemos a ele um cisalhamento paralelo a O_x . Sabemos que

$c_k(x) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix}$ logo $x' = x + ky$, $y' = y$ e vemos que $(x' - ky)^2 + (y')^2 = (x')^2 + k^2(y')^2 + (y')^2 - 2kx'y' = 1$ que é a equação de um elipse (por quê?).



EXERCÍCIOS

2.2.40: Como se comportam retas sob a ação de um cisalhamento?

2.2.41: Qual é a composta de um cisalhamento paralelo a O_x com um cisalhamento paralelo a O_y ? A ordem da composição afetará o resultado?

É bem sabido que uma matriz quadrada A , $n \times n$, é inversível se e somente se pode ser transformada na matriz identidade $n \times n$ por um número finito de operações elementares sobre suas colunas. As operações elementares são:

- 1) trocar as posições de duas colunas
- 2) multiplicar uma coluna por uma constante não nula
- 3) somar a uma coluna outra coluna.

Estas operações podem ser efetuadas multiplicando A à direita pelas chamadas "matrizes elementares" que, no caso 2×2 são:

- 1) trocar as posições de duas colunas: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 2) multiplicar uma coluna por uma constante não nula:

$$M_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

- 3) somar a uma coluna outra coluna:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } M_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

As matrizes M_3 e M_3' definem cisalhamentos, M_2 e M_2' alongamentos. Quanto a M_1 , é fácil de ver que define uma reflexão em torno da reta $y = x$.

Por outro lado, uma matriz quadrada pode ser transformada na identidade por transformações elementares se e somente é um produto de transformações elementares (por

quê? Quais são as inversas das matrizes elementares?) des-
ta maneira podemos chegar ao seguinte resultado:

TEOREMA 2.2.42 - Seja T uma transformação do plano de-
finida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é inversível. Então T é a com-
posta de cisalhamentos, alongamentos e reflexões.

EXEMPLO

2.2.43: Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, exprima a transformação definida
por A na forma do Teorema 2.2.42.

Temos que

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 6 & -6 \\ 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 6 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 18 & 0 \\ 12 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} \right) & \rightarrow \\ \left(\begin{array}{cc} 18 & 0 \\ 12 & -12 \\ 6 & -8 \\ 0 & 4 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} -18 & 0 \\ 0 & -12 \\ -2 & -8 \\ 4 & 4 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 12 \\ -1/9 & 8 \\ -2/9 & -4 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4/9 & 2/3 \\ -2/9 & -1/3 \end{array} \right) & \end{array}$$

e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/18 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{pmatrix} \quad \text{logo}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ um produc}$$

duto de alongamentos, cisalhamentos e reflexões.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Passamos, agora, ao estudo do que realmente nos interessava, as transformações lineares entre dois espaços vetoriais V e W . Tal estudo já foi preparado pelo material do Capítulo 2, que servirá de exemplo e de motivação.

3.1 - Definição e generalidades

DEFINIÇÃO 3.1.1 - Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K . Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é uma função de V em W que satisfaz às propriedades:

- 1) $\forall u, v \in V, \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$
- 2) $\forall k \in K, \quad v \in V, \quad T(kv) = kT(v)$

O Capítulo 2 nos fornece exemplos de transformações lineares (lá $V = W = \mathbb{R}^2$). Uma maneira bem geral de obter transformações lineares, quando V e W são de dimensão finita é a seguinte:

EXEMPLOS

3.1.2: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita

ta, onde $\dim V = n$, $\dim W = m$. Toda matriz $A_{m \times n}$ com coeficientes em K dá origem a uma transformação linear $T_A: V \rightarrow W$; com efeito, seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ uma base de W . Se $v = \sum x_i v_i$, defina $T_A(v)$ como sendo o vetor de W cujas coordenadas, na base $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são os coeficientes da matriz $m \times 1$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Então $T_A(kv) = kT_A(v)$, pois

$$A \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e $T_A(v_1 + v_2) = T_A(v_1) + T_A(v_2)$ visto que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então, tomando em ambos os espaços as bases canônicas, temos que as coordenadas de $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ serão dadas por:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Veremos, em breve, que o método do Exemplo 3.1.2 nos dá todas as transformações lineares entre dois espa-

ços vetoriais de dimensão finita.

LEMA 3.1.3 - Se $T:V \rightarrow W$ é uma transformação linear, e
0 é o vetor nulo de V, então $T(0)$ será o
vetor nulo de W.

Demonstração: Com efeito, como $0 = 0 \cdot 0$ temos que

$$T(0) = 0 \cdot T(0) \quad \text{e como} \quad 0 \cdot T(0) = 0 \\ \text{segue-se que } T(0) = 0.$$

LEMA 3.1.4 - Uma função $f:V \rightarrow W$ é uma transformação linear se e somente se, $\forall k_1, k_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$, temos que $T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)$.

Demonstração: Pelo Axioma 1, $T(k_1v_1 + k_2v_2) = T(k_1v_1) + T(k_2v_2)$ e usando o Axioma 2 vem que $T(k_1v_1) + T(k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)$. A recíproca segue-se de que $T(k_1v_1) = T(k_1v_1 + 0 \cdot v_2) = k_1T(v_1)$ e $T(1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2) = T(v_1 + v_2) = 1 \cdot T(v_1) + 1 \cdot T(v_2) = T(v_1) + T(v_2)$.

Uma transformação linear fica perfeitamente determinada se conhecemos como ela transforma os vetores de uma base, como é provado a seguir:

LEMA 3.1.5 - Se $T:V \rightarrow W$ é uma transformação linear, e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V, então T

fica perfeitamente determinada pelos vetores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$.

Demonstração: Seja $v \in V$, então $v = \sum x_i v_i$ e assim $T(v) = T(\sum x_i v_i) = \sum x_i T(v_i)$. Por outro lado, se $S: V \rightarrow W$ é tal que $S(v_i) = T(v_i)$, $i=1,2,\dots,n$, vemos que $S(v) = S(\sum x_i v_i) = \sum x_i S(v_i) = \sum x_i T(v_i) = T(\sum x_i v_i) = T(v)$.

É importante frizar que, em geral, os vetores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ não constituem uma base para W e podem mesmo deixar de ser linearmente independentes, como o mostra o exemplo abaixo:

EXEMPLO

3.1.6: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x, x-y+z)$.

Se $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^3 , vemos que $T(e_1) = (2, 1)$, $T(e_2) = (0, -1)$ e $T(e_3) = (0, 1)$ e estes vetores não são linearmente independentes.

Já vimos que dados espaços vetoriais V e W , de dimensão n e m respectivamente, toda matriz $A_{m \times n}$ dá origem a uma transformação linear $T_A: V \rightarrow W$; veremos agora, por outro lado, que toda transformação linear $T: V \rightarrow W$ dá origem a uma matriz $m \times n$.

DEFINIÇÃO 3.1.7 - Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e

$\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bases para V e W respectivamente e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. A matriz de T em relação às bases β, β' , denotada por $[T]_{\beta}^{\beta'}$, é a matriz $m \times n$ cuja j -ésima coluna são as coordenadas de $T(v_j)$ na base β' (ou seja, a_{ij} é a i -ésima coordenada, na base β' , do vetor $T(v_j)$).

Como exemplo, seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x-y, x+2y+z)$ e tomemos β, β' como sendo as bases cônônicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 respectivamente. Temos então que:

$$T(v_1) = (1, 1) = w_1 + w_2$$

$$T(v_2) = (-1, 2) = -w_1 + 2w_2$$

$$T(v_3) = (0, 1) = w_2$$

e assim

$$[T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Convém salientar que a matriz de uma transformação $T: V \rightarrow W$ é sempre tomada em relação a duas bases, uma em V e a outra em W . Mudando as bases mudará a matriz.

EXEMPLOS

3.1.8: Seja mais uma vez, $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$(x, y, z) \mapsto (x-y, 2y+x+z). Tome v_1 = (1, 0, 0),$$

$$v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1) \text{ e } w_1 = (1, 1), w_2 = (1, -1).$$

Se $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\beta' = \{w_1, w_2\}$, achemos a matriz

$$T]_{\beta}^{\beta},$$

Já sabemos que:

$$T(v_1) = (1,1)$$

$$T(v_2) = (-1,2)$$

$$T(v_3) = (0,1)$$

Mas $(1,1) = w_1$, $(0,1) = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$; $(-1,2) = \frac{1}{2}w_1 - 3/2w_2$ e podemos, portanto, escrever:

$$T]_{\beta}^{\beta}, = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.1.9: Tome $V = W = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\}$, $\beta' = \{w_1 = (1,1), w_2 = (1,-1)\}$ e considere a transformação identidade $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Qual a matriz $I]_{\beta}^{\beta},$?

Vemos que $I(v_1) = v_1 = (1,0) = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$

$I(v_2) = v_2 = (0,1) = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$

e assim $I]_{\beta}^{\beta}, = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ o que mostra não ser a matriz da transformação identidade em relação a estas bases a matriz identidade 2×2 .

3.1.10: Seja P_3 o espaço vetorial dos polinômios reais de grau ≤ 3 e consideremos a base $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ deste espaço. Se $D: P_3 \rightarrow P_3$ é a operação linear derivação, a matriz $D]_{\beta}^{\beta}$ é achada como segue:

$$D(1) = 0$$

$$D(t) = 1$$

$$D(t^2) = 2t$$

$$D(t^3) = 3t^2$$

logo

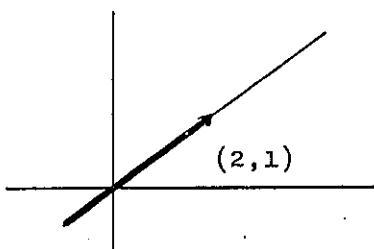
$$[D]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.11: O conjunto dos números reais \mathbb{R} constitui um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Seja $T: P_3 \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) \mapsto a_0$ (isto é, $p(t) \mapsto p(0)$). É fácil verificar que T é de fato uma transformação linear (faça-o!). Uma base para o espaço vetorial real \mathbb{R} é formada pelo vetor $w_1 = 1$. Se β é a base de P_3 constituída por $v_1 = 1, v_2 = t, v_3 = t^2, v_4 = t^3$, vemos que $T(1) = 1, T(t) = 0, T(t^2) = 0, T(t^3) = 0$, e assim

$$[T]_{\beta}^{\beta} = (1, 0, 0, 0).$$

Nem sempre uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é dada por sua matriz em relação a bases que tornam imediato identificar a ação de T . Seja, por exemplo, no espaço \mathbb{R}^2 , a reta L determinada pelo vetor $(2, 1)$ e a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ projeção ortogonal sobre L . Assim, se $u_1 =$

$$= (2,1), \quad u_2 = (-1,2) \quad \text{e} \quad \beta = \{u_1, u_2\}, \quad \text{então} \quad [T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Por outro lado, a matriz de T em relação à base canônica do \mathbb{R}^2 é $= \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$. Fica assim claro que a matriz de T em relação a β permite uma identificação imediata de T , mas o mesmo não acontece com sua matriz em relação a β' .

Ao estudarmos uma transformação linear é assim obviamente interessante procurar bases em relação às quais sua matriz seja o mais simples possível.

Como mais um exemplo neste sentido, sejam $v_1 = (2,3)$, $v_2 = (-1,4) \in \mathbb{R}^2$ e $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $Tv_1 = 2v_1$, $T(v_2) = -4v_2$. Se $\beta = \{v_1, v_2\}$ então $[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. A matriz de T em relação à base canônica $\beta' = \{e_1, e_2\}$ é $= \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -24 & 38 \end{pmatrix}$. Aprendemos, a seguir, como relacionar as matrizes de uma mesma transformação em bases diferentes, a fim de permitir um estudo melhor das transformações lineares.

EXERCÍCIOS

3.1.12: Seja, no \mathbb{R}^3 , o plano que passa pela origem e determinado pelos vetores $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,-1,1)$. Se T é a transformação linear reflexão neste plano, ache a matriz de T em relação à base

$\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_3 = (2,0,-2)$. Qual a matriz de T em relação à base canônica do \mathbb{R}^3 ?

3.1.13: Mostre que se $V = W$ e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

$\beta' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ então a matriz da identidade em relação a estas bases, $[I]_{\beta'}^{\beta}$, é a matriz identidade $n \times n$.

3.1.14: Tome, em P_3 , as bases $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $\beta' = \{1, 1+t, t^2+t, t^3+t^2\}$. Calcule as matrizes $[D]_{\beta'}^{\beta}$, $[D]_{\beta}^{\beta'}$, $[D]_{\beta}^{\beta''}$, onde $D: P_3 \rightarrow P_3$ é o operador linear derivação.

LEMA 3.1.15 - Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear e β, β' bases de V e W respectivamente.

Se $[v]_{\beta}$ designa as coordenadas de v na base β e $[T(v)]_{\beta'}$ as de $T(v)$ na base β' então

$$[T(v)]_{\beta'} = ([T]_{\beta'}^{\beta})[v]_{\beta} .$$

Demonstração: Se $T(v) = \sum_{i=1}^n y_i w_i$, onde $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ e $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, com $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ temos que $T(v) = T(\sum_{j=1}^s x_j v_j) = \sum_{j=1}^s x_j T(v_j)$. Se $T(v_j) =$

= $\sum_{k=1}^n a_{kj} w_k$, vem então que $T(v) = \sum_j x_j (\sum_k a_{kj} w_k) =$
 $= \sum_k (\sum_j x_j a_{kj}) w_k$ e como β' é uma base, $y_k = \sum_j a_{kj} x_j$,
 ou seja, em notação matricial

$$[T(v)]_{\beta'} = ([T]_{\beta'}^{\beta})(v)_{\beta}.$$

Sejam agora $T:V \rightarrow U$, $S:U \rightarrow W$ transformações lineares β, β' e β'' bases de V, U e W respectivamente. Podemos calcular as matrizes $[T]_{\beta'}^{\beta}$, $[S]_{\beta''}^{\beta'}$ e $[S \cdot T]_{\beta''}^{\beta}$. Haverá alguma relação entre estas matrizes? A resposta é dada pelo lema abaixo:

LEMA 3.1.16 - Se V , U e W são espaços vetoriais com bases β , β' e β'' respectivamente, $T:V \rightarrow U$, $S:U \rightarrow W$ transformações lineares, então

$$[S \cdot T]_{\beta''}^{\beta} = ([S]_{\beta''}^{\beta'}) ([T]_{\beta'}^{\beta}).$$

Demonstração: Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\beta' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\beta'' = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$. Se $T(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} u_j$, $S(u_j) = \sum_{s=1}^r b_{sj} w_s$, vem que

$$(S \cdot T)(v_i) = S(T(v_i)) = S(\sum_j a_{ji} u_j) = \sum_j a_{ji} \cdot S(u_j) = \\ = \sum_j a_{ji} (\sum_s b_{sj} w_s) = \sum_s (\sum_j b_{sj} a_{ji}) w_s$$

e pondo

$$(S \cdot T)(v_i) = \sum_s c_{si} w_s$$

vemos que $c_{si} = \sum_j b_{sj} a_{ji}$, o que demonstra o lema.

EXEMPLO

3.1.17: Sejam $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $(x, y, z) \mapsto (x-y, z, y+z)$ e $(x, y, z) \mapsto (2x+y, y+z)$ respectivamente e $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, 1)$. Se $\beta = \beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\beta'' = \{w_1, w_2\}$ vem então que:

$$[T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [S]_{\beta''}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e assim}$$

$$[S \cdot T]_{\beta''}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{como}$$

pode também ser verificado diretamente.

O lema acima permite achar a matriz de uma transformação linear em relação a bases α , α' , uma vez conhecida sua matriz nas bases β , β' .

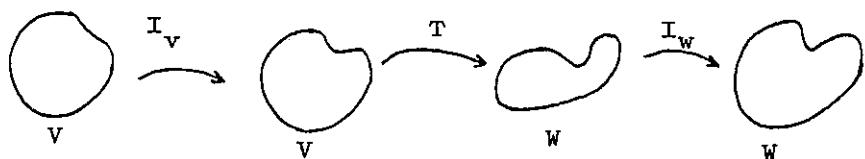
LEMA 3.1.18 - Se α , β são bases de V , α' , β' bases de W e $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então:

$$[T]_{\alpha'}^{\alpha} = ([I_W]_{\alpha'}^{\beta'}) ([T]_{\beta'}^{\beta}) ([I_V]_{\beta}^{\alpha}) \quad \text{onde } I_V: V \rightarrow V \text{ e}$$

$I_W: W \rightarrow W$ são as transformações identidade de V e W respectivamente.

Demonstração: Como $T = I_W \cdot T \cdot I_V$ segue-se que $[T]_{\alpha'}^{\alpha} = ([I_W]^{\beta}_{\alpha'}) ([T]_{\beta'}^{\beta}) ([I_V]^{\alpha}_{\beta}) = ([I_W]_{\alpha'}^{\beta'}) ([T]_{\beta'}^{\beta}) ([I_V]_{\beta}^{\alpha})$,

por uma aplicação dupla do Lema 3.1.17. A figura abaixo ajuda a compreender a demonstração.



DEFINIÇÃO 3.1.19 - Dado um espaço vetorial V e α, β bases de V , a matriz de passagem de α para β é a matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$, onde $I_V:V \rightarrow V$ é a transformação identidade de V .

EXEMPLO

3.1.20: Seja $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-2y)$. Se β e β' são as bases canônicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 respectivamente, então

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, agora, os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,0,1)$, $v_3 = (1,-1,0)$ de \mathbb{R}^3 e $w_1 = (1,1)$, $w_2 = (1,-1)$ de \mathbb{R}^2 . Se $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\alpha' = \{w_1, w_2\}$, achemos $[T]_{\alpha'}^{\alpha}$.

$$\text{Sabemos que } [T]_{\alpha'}^{\alpha} = (I_{W'}^{\beta'}) ([T]_{\beta'}^{\beta}) (I_V^{\alpha}).$$

Para achar I_V^{α} devemos expressar os vetores da base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ por suas coordenadas em relação à ba-

se β , assim

$$[I_V]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculemos agora $[I_W]_{\alpha}^{\beta}$. Se $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ temos que

$$w_1 = e_1 + e_2$$

$$w_2 = e_1 - e_2$$

onde se segue que

$$e_1 = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$$

$$e_2 = \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2$$

e portanto

$$[I_W]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

como pode ser verificado diretamente.

EXERCÍCIOS

3.1.22: Seja $M(2 \times 2)$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 a coeficientes reais e considere as bases

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ache as matrizes de passagem de β para β' e de β' para β .

3.1.23: Tomemos, mais uma vez, o espaço vetorial P_3 e considere a operação linear $T:P_3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$.

Sejam as bases $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $\beta' = \{1, t+1, t^2+t, t^3+t^2\}$ de P_3 e $\alpha = \{1\}$ de \mathbb{R} . Ache $[T]_{\alpha}^{\beta}$ e $[T]_{\alpha}^{\beta'}$.

Já vimos, no Lema 3.1.15, que as coordenadas de um vetor $v \in V$ na base β , $v]_{\beta}$, do vetor $T(v)$ na base β' , $T(v)]_{\beta'}$, e a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$, estão ligadas pela relação

$$T(v)]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta} \cdot (v]_{\beta}).$$

Se fizermos, nesta fórmula, $T = I_V$, vemos que:

$$v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \cdot (v]_{\beta}).$$

LEMA 3.1.23 - As coordenadas de um vetor $v \in V$ em duas bases β e β' de V estão ligadas entre si pela relação

$$v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \cdot (v]_{\beta})$$

onde $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é a matriz da passagem da base β para a base β' .

EXERCÍCIOS

3.1.24: Se $I:V \rightarrow V$ é a transformação identidade, e α e β são bases de V , demonstre que

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} .$$

3.1.25: Sejam β, β' bases de V e $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que

$$[T]_{\beta'}^{\beta'} = ([I]_{\beta'}^{\beta}) ([T]_{\beta}^{\beta}) ([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} .$$

3.1.26: Seja o espaço P_3 e as bases $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$, $\beta' = \{1, 1-t, 1-t-t^2, 1-t^3\}$. Dado $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, ache suas coordenadas na base β' .

3.2 - Imagem e núcleo de uma transformação linear

DEFINIÇÃO 3.2.1 - Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear.
O núcleo de T , $N(T)$ é o subconjunto de V definido por $N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$.

EXEMPLOS

3.2.2: Se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $(x, y) \rightarrow (x-y, 2x+y)$, temos que $T(x, y) = (0, 0)$ se e somente se $(x-y, 2x+y) = (0, 0)$ ou seja $x-y = 0$, $2x+y = 0$ o que acarreta $x = y = 0$ e assim $N(T) = \{(0, 0)\}$, o subconjunto formado pelo vetor zero do \mathbb{R}^2 .

3.2.3: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y, z) \rightarrow (x-z, y+2x)$.
Então, $T(x, y, z) = (0, 0)$ se e somente se $(x-z, y+2x) = (0, 0)$.

= (0,0) ou equivalentemente

$$x - z = 0$$

$$y + 2x = 0$$

e assim $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=z, y+2x = 0\} = \{r(1, -2, 1), r \in \mathbb{R}\}$.

Estes dois exemplos mostram bem a forte relação existente entre os sistemas de equações lineares e o estudo das transformações lineares.

EXERCÍCIO

3.2.4: Se $D: P_3 \rightarrow P_3$ é o operador linear derivação, determine seu núcleo.

Nos exemplos acima, vimos que os núcleos das transformações são, respectivamente, a origem e uma reta passando pela origem; em geral temos o seguinte resultado:

LEMA 3.2.5 - Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então $N(T)$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração: Em primeiro lugar, $N(T)$ contém pelo menos um vetor, o vetor zero (por quê?). Se $u, v \in N(T)$, $T(u) = T(v) = 0$ e assim $T(au+bv) = aT(v) + bT(v) = 0$, logo $au+bv \in N(T)$.

EXERCÍCIOS

3.2.6: Qual a dimensão do núcleo da transformação linear derivação $D: P_3 \rightarrow P_3$?

3.2.7: Dê um exemplo de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão zero.

3.2.8: Ache uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

3.2.9: Dê uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 2.

3.2.10: Nos Exercícios 3.2.7, 3.2.8 e 3.2.9, determine se as transformações lineares encontradas são sobrejetoras.

Relembreamos a definição de função injetora: $f:A \rightarrow B$ é injetora se e somente se $x \neq y$ acarreta que $f(x) \neq f(y)$. O lema abaixo caracteriza as transformações lineares injetoras em termos de seus núcleos.

LEMA 3.2.11 - Uma transformação linear $T:V \rightarrow W$ é injetora se e somente se $N(T) = \{0\}$; 0 o vetor nulo de V.

Demonstração: Suponha que existem $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$ e tais que $T(v_1) = T(v_2)$ (ou seja, T não é injetora). Mas então $T(v_1 - v_2) = 0$ e se $N(T) = \{0\}$, vem que $v_1 - v_2 = 0$ logo $v_1 = v_2$, um absurdo.

Por outro lado, se $N(T) \neq \{0\}$, seja $v \in N(T)$, $v \neq 0$, então $\underbrace{T(v)}_{T(v) = 0} = \underbrace{T(0)}_{= T(0)} = 0$, e T não é injetora.

$T(v) = 0 = T(0)$ mais lógico.

EXERCÍCIOS

3.2.12: Verifique se a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
 $T(x,y) = (x-2y, 2x-4y)$ é injetora.

3.2.13: Mostre que $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
 $(x,y,z) \mapsto (x-2y, y)$ não é injetora. Determine seu núcleo.

DEFINIÇÃO 3.2.14 - O conjunto de valores da transformação linear $T: V \rightarrow W$ é chamado de imagem de T , e denotado por $I(T)$.

EXEMPLOS

3.2.15: Se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação $(x,y) \mapsto (x,x)$ então T transforma todo o plano na reta $x = y$ e, assim, $(1,2) \notin I(T)$.

3.2.16: Vejamos se o vetor $(1,4) \in I(T)$, onde $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $(x,y) \mapsto (2x-y, x+y)$. Desejamos saber se existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (1,4)$, ou seja $(2x-y, x+y) = (1,4)$. Desta maneira, nosso problema recai em resolver o sistema

$$2x-y = 1$$

$$x+y = 4$$

o qual tem a solução $x = 5/3$, $y = -7/3$, e assim $(1,4) \in I(T)$.

Já mostramos que o núcleo de uma transformação li-

near $T:V \rightarrow W$ é um subespaço de V . A imagem de T , $I(T)$ também é um subespaço (de W , naturalmente), conforme o lema abaixo:

LEMA 3.2.17 - Se $T:V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então $I(T)$ é um subespaço vetorial de W .

Demonstração: $I(T)$ é óbviamente não vazio (por quê?).

Por outro lado, se $w_1, w_2 \in I(T) \exists v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, mas então $T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1w_1 + a_2w_2$ e assim $a_1w_1 + a_2w_2 \in I(T)$.

EXERCÍCIOS

3.2.18: É possível existir uma transformação linear injetora $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Por quê?

3.2.19: Existe uma transformação linear sobrejetora $T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$? Por quê?

3.2.20: Seja $T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Mostre que se T não é sobrejetora, então T não é injetora.

Os exercícios acima fazem ver que a dimensão do domínio de T parece ter influência no fato de a transformação ser ou não injetora ou sobrejetora. A situação exata é descrita a seguir:

TEOREMA 3.2.21 - (Teorema do núcleo e da imagem):

Seja $T:V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Então,

$$\dim N(T) + \dim I(T) = \dim V.$$

Demonstração: Tome v_1, v_2, \dots, v_s uma base para $N(T)$ e seja w_1, w_2, \dots, w_t uma base de $I(T)$. Como $w_1, w_2, \dots, w_t \in I(T)$, podemos encontrar $u_1, u_2, \dots, u_t \in V$ tais que $T(u_i) = w_i$, $1 \leq i \leq t$. Afirmamos que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_s, u_1, u_2, \dots, u_t$ formam uma base de V , o que concluirá a demonstração.

Seja $v \in V$ e consideremos o vetor $T(v) \in W$.

Com $T(v) \in I(T)$, temos que $T(v) = \sum_{i=1}^t x_i w_i$, onde $x_1, x_2, \dots, x_t \in K$. Tomando o vetor $u = v - \sum x_i u_i$ vemos que $T(u) = T(v - \sum x_i u_i) = T(v) - \sum x_i T(u_i) = T(v) - \sum x_i w_i = T(v) - T(v) = 0$, logo $u \in N(T)$ e assim $u = \sum_{j=1}^s y_j v_j$, logo $v - \sum x_i u_i = \sum y_j v_j$ donde $v = \sum x_i u_i + \sum y_j v_j$. Ou seja, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_s, u_1, u_2, \dots, u_t$ geram V . Por outro lado, estes vetores são linearmente independentes: se $\sum a_i u_i + \sum b_j v_j = 0$, vem que $T(\sum a_i u_i + \sum b_j v_j) = T(\sum a_i u_i) + T(\sum b_j v_j) = \sum a_i T(u_i) + \sum b_j T(v_j) = \sum a_i w_i = 0$ e como os vetores w_1, w_2, \dots, w_t formam uma base de $I(T)$, $a_1 = a_2 = \dots = a_t = 0$, logo $\sum b_j v_j = 0$ e como v_1, v_2, \dots, v_s constituem uma base de $N(T)$, $b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$, e assim $u_1, u_2, \dots, u_t, v_1, v_2, \dots, v_s$ são linearmente independentes.

COROLÁRIO 3.2.22 - Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, V e W são espaços de dimensão finita

$\dim(V) > \dim(W)$, T não é injetora.

ROLÁRIO 3.2.23 - Se $T:V \rightarrow W$ é uma transformação linear; V e W são espaços de dimensão finita, e $\dim(V) < \dim(W)$, T não é sobrejetora.

EXERCÍCIO

2.24: Mostre que se V e W são espaços vetoriais da mesma dimensão e $T:V \rightarrow W$ é uma transformação linear então T é injetora $\Leftrightarrow T$ é sobrejetora. (Sugestão: use a fórmula do teorema do núcleo e da imagem).

3 - Transformações lineares inversíveis

Já conhecemos a definição de uma função inversível. Em particular, faz sentido falar em uma transformação linear inversível e vale então o seguinte resultado:

TEOREMA 3.3.1 - Se $T:V \rightarrow W$ é uma transformação linear inversível, sua inversa $S:W \rightarrow V$ será também uma transformação linear.

Prova: Devemos mostrar que $\forall k_1, k_2 \in K$, $w_1, w_2 \in W$ então $S(k_1 w_1 + k_2 w_2) = k_1 S(w_1) + k_2 S(w_2)$.

Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$; então $T(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 w_1 + k_2 w_2$ e assim $S(k_1 w_1 + k_2 w_2) = k_1 v_1 + k_2 v_2$. Mas como $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$, segue-

-se que $S(w_1) = v_1$ e $S(w_2) = v_2$, logo $S(k_1 w_1 + k_2 w_2) = k_1 S(w_1) + k_2 S(w_2)$, o que queríamos demonstrar.

Já vimos que uma função $f:A \rightarrow B$ pode possuir uma inversa à direita sem ser inversível ou uma inversa à esquerda sem ser inversível. Tal não ocorre com as transformações lineares entre espaços vetoriais de mesma dimensão, como visto em 3.2.24. O mesmo resultado se conclui dos teoremas abaixo:

TEOREMA 3.3.2 - Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T:V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então T é inversível se e somente se T transforma uma base de V em uma base de W .

Demonstração: Suponhamos T inversível e seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Consideremos os vetores $w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2), \dots, w_n = T(v_n)$; em primeiro lugar, os vetores w_1, w_2, \dots, w_n são linearmente independentes. Com efeito, se a equação vetorial $0 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ tem uma solução diferente de $(0, 0, \dots, 0)$, vem que, chamando de S a inversa de T , $0 = S(0) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ uma contradição, pois v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes. Além disso, se $w \in W$, então $S(w) \in V$ e assim $S(w) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, logo $w = TS(w) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$, logo os vetores w_1, w_2, \dots, w_n geram W e formam portanto uma base de W .

Por outro lado, se os vetores w_1, w_2, \dots, w_n formam uma base para W , definamos $S: W \rightarrow V$ especificando que $S(w_i) = v_i$, $i=1, 2, \dots, n$ (por quê isso é possível? veja 3.1.5). Então, se $v \in V$, $v = \sum a_i v_i$, vemos que $(S \circ T)(v) = S(T(v)) = S(\sum a_i T(v_i)) = S(\sum a_i w_i) = \sum a_i S(w_i) = \sum a_i v_i = v$ e se $w \in W$, $w = \sum b_i w_i$, $T \circ S(w) = T(S(\sum b_i w_i)) = T(\sum b_i S(w_i)) = T(\sum b_i v_i) = \sum b_i T(v_i) = \sum b_i w_i = w$ e assim T é inversível, com inversa S .

COROLÁRIO 3.3.3 - Se existe uma transformação linear inversível entre dois espaços vetoriais de dimensão finita, suas dimensões coincidem.

TEOREMA 3.3.4 - Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de mesma dimensão. Então, as condições abaixo são equivalentes:

- 1) T é inversível
- 2) T é injetora
- 3) T é sobrejetora
- 4) T transforma bases em bases.

OBSERVAÇÃO: O teorema do núcleo e da imagem permite demonstrar, como pedido em 3.2.24, que 1), 2) e 3) são equivalentes. Apresentamos nova demonstração por ser mais geométrica.

Demonstração: A implicação $1) \rightarrow 2)$ é trivial. Mostremos que $2) \rightarrow 3)$: seja $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ uma base para V . Como T é injetora, os vetores $w_i = T(v_i)$, $i=1, \dots, n$ são linearmente independentes; com efeito, suponha que a equação $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n = 0$ tenha uma solução não trivial (b_1, b_2, \dots, b_n) e consideremos o vetor $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$. É óbvio que v é não nulo (por quê?) e assim o núcleo de T contém um vetor não nulo ($T(v) = 0$), o que é impossível pois T é injetora. Mas se os vetores distintos (por quê?) w_1, w_2, \dots, w_n são linearmente independentes, como a dimensão de W é n , elas formam uma base para W .

Seja $w \in W$; vemos então que $w = \sum a_i w_i$ e assim se $v = \sum a_i v_i$, segue-se que $T(v) = T(\sum a_i v_i) = \sum a_i T(v_i) = \sum a_i w_i = w$, logo T é sobrejetora.

Mostraremos agora que $3) \rightarrow 4)$. Seja, mais uma vez, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Afirmamos que os vetores $w_i = T(v_i)$, $i=1, \dots, n$ geram W . Com efeito, seja $w \in W$ e $v \in V$ tal que $T(v) = w$; mas $v = \sum a_i v_i$ e assim $w = T(v) = T(\sum a_i v_i) = \sum a_i w_i$, o que demonstra a afirmação. Mas como a dimensão de W é n , segue-se que os vetores w_1, w_2, \dots, w_n constituem de fato uma base para W .

A demonstração de $4) \rightarrow 1)$ já foi feita em 3.3.2.

DEFINIÇÃO 3.3.5 - Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear

nversível, diz-se que T é um isomorfismo entre V e W .
os espaços V e W são isomorfos se há um isomorfismo
entre eles.

EOREMA 3.3.6 - Dois espaços vetoriais V e W sobre um
mesmo corpo K são isomorfos se e sómente
e têm a mesma dimensão.

Demonstração: Se V e W têm a mesma dimensão sejam

$\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ba-
ses de V e W respectivamente. Defina $T: V \rightarrow W$ por
 $(v_i) = w_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Por 3.3.4 T é inversível. O
corolário 3.3.3 conclui a demonstração.

XERCÍCIOS

.3.7: Dê um exemplo de uma transformação linear entre es-
paços vetoriais de dimensões diferentes que é injetora mas não é sobrejetora; que é sobrejetora mas não é
injetora.

.3.8: Uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ é inversível se
e sómente se a matriz de T em relação a uma base
qualquer β de V , $[T]_{\beta}^{\beta}$ é inversível.

.3.9: Usando o fato de que um determinante é não nulo se e sómente se suas colunas são linearmente independentes demonstre que $\det([T]_{\beta}^{\beta})$ é não nulo se e sómente se $T: V \rightarrow V$ é inversível.

3.4 - Os sistemas lineares

Neste parágrafo, estudamos os sistemas lineares usando o Teorema do Núcleo e da Imagem.

DEFINIÇÃO 3.4.1 - Dado o sistema linear

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \dots + a_{sn} x_n = b_s \end{array} \quad (I)$$

onde a_{ij} , $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq n$, x_i , $1 \leq i \leq n$, b_j , $1 \leq j \leq s$ são elementos de um corpo K , a matriz do sistema é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz do sistema

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$2x - z = 5$$

$$x + 3y - 2z = 0$$

será

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

DEFINIÇÃO 3.4.2 - O sistema linear (I) diz-se homogêneo

$$\text{se } b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0.$$

Observe que, fazendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

O sistema (I), escreve-se, em notação matricial, como

$$AX = B.$$

EXERCÍCIO

3.4.3: Escreva cada um dos sistemas abaixo em forma matricial indicando, em cada caso, a matriz do sistema

a) $3x+y-5z = -1$
 $x-2y+z = -5$
 $x+5y-7z = 2$

b) $3x-7y+14z-8w = 24$
 $x-4y+3z-w = -2$
 $y+z-w = 6$
 $2x-15y-z+5w = -46$

c) $6x+y+z+w = 0$
 $16x+y-z+5w = 0$
 $7x+2y+3z = 0$

d) $2x-3y+6z = 3$
 $4x-y+z = 1$
 $3x-2y+3z = 4$

O primeiro fato que podemos demonstrar é o seguinte:

TEOREMA 3.4.4 - O sistema linear homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial se e somente se a transformação $T_A: K^n \rightarrow K^s$ induzida pela matriz A tem

núcleo não trivial.

Demonstração: é trivial, e consiste em interpretar as soluções do sistema como vetores de K^n .

COROLÁRIO 3.4.5 - O sistema homogêneo $AX = 0$ de s equações e n incógnitas tem sempre uma solução não trivial, se $n > s$.

Demonstração: Se $n > s$, a transformação $T_A: K^n \rightarrow K^s$ terá núcleo não trivial, pelo teorema do núcleo e da imagem.

DEFINIÇÃO 3.4.6 - Dada uma matriz A $s \times n$, o posto de A, $\rho(A)$, é o número máximo de colunas linearmente independentes de A.

EXEMPLO

3.4.7: Calculemos o posto de $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -11 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 12 & -2 & -11 \\ 9 & -4 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -11 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -1 \\ 9 & 5 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -1 \\ 9 & -5 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e o posto da matriz será 3.}$$

EXERCÍCIO

.4.8: Calcule o posto das matrizes abaixo:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Se A é uma matriz $s \times n$, denotaremos por $A_i \in R^s$
i-ésima coluna de A . Assim se e_1, e_2, \dots, e_n constituem
base canônica do R^n , $A_i = T_A(e_i)$.

EXEMPLO 3.4.9 - Dada uma matriz A $s \times n$ a imagem da transformação T_A é gerada pelos vetores A_i , $i=1, 2, \dots, n$.

PROVA: Se $x \in K^n$, $x = \sum x_i e_i$ e assim $Tx = \sum x_i T e_i = \sum x_i A_i$, logo os A_i geram $I(T_A)$.

TEOREMA 3.4.10 - Dada uma matriz A , então $p(A)$ é a dimensão de $I(T_A)$.

Demonstração: Como os vetores A_i geram $I(T_A)$, podemos extrair deles uma base para $I(T_A)$. O número de elementos desta base será o número máximo de A_i 's linearmente independentes ou seja, $\rho(A)$.

Dado o sistema $AX = 0$, onde A é uma matriz $s \times n$ já sabemos que suas soluções formam um subespaço de K^n , que é exatamente o núcleo da transformação $T_A: K^n \rightarrow K^s$. O subespaço de K^n dado pelas soluções de $AX = 0$ é chamado de espaço solução de $AX = 0$.

COROLÁRIO 3.4.11 - Dado o sistema $AX = 0$ de s equações e n incógnitas, a dimensão do seu espaço solução é $n - \rho(A)$.

Demonstração: é uma consequência do teorema do núcleo e da imagem: $n = \dim I(T_A) + \dim N(T_A) = \rho(A) + \dim N(T_A)$.

EXERCÍCIO

3.4.12: Mostre que o sistema $AX = 0$, onde A é uma matriz $s \times n$, tem solução única se e sómente se $\rho(A) = n$. Qual a solução?

LEMA 3.4.13 - O sistema $AX = B$ tem solução se e sómente se o vetor $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$ pertence à imagem de $T_A: K^n \rightarrow K^s$.

Demonstração: trivial e dispensa comentários.

Consideremos mais uma vez o sistema $AX = B$, definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

formemos a matriz

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

que será chamada de matriz aumentada do sistema.

EXERCÍCIO

3.4.14: Em cada um dos sistemas do Exercício 3.4.3. ache a matriz aumentada do sistema.

TEOREMA 3.4.15 - O sistema $AX = B$ tem solução se e sómente se o posto da matriz A é igual ao posto da matriz A' .

Demonstração: O posto de A , $\rho(A)$, é igual ao posto de A' , $\rho(A')$, se e sómente se o vetor B é combinação linear de A_1, A_2, \dots, A_n (por quê?). Mas B é combinação linear de A_1, A_2, \dots, A_n se e sómente se B pertence ao subespaço gerado por A_1, A_2, \dots, A_n e a demonstração fica concluída se relembrarmos que estes vetores

res geram a imagem de T_A .

EXEMPLO

3.4.16: Considere o sistema

$$x - 2y + 3z = -1$$

$$2x - y + 2z = 2$$

$$3x + y + 2z = 3$$

A matriz A do sistema será $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, que

tem posto 3; a matriz aumentada será

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

que também tem posto 3 e assim o sistema terá solução.

Aprenderemos, em pouco, a achá-la.

Dado o sistema $AX = B$, o sistema homogêneo associado a ele é $AX = 0$.

TEOREMA 3.4.17 - Tôdas as soluções do sistema $AX = B$ são da forma $\bar{X} + X$, onde \bar{X} é uma solução fixa de $AX = B$ (chamada de solução particular) e X é uma solução do sistema homogêneo associado a ele.

Demonstração: Se \bar{X} e \bar{X}' são soluções do sistema $AX=B$ então $A\bar{X} = B$, $A\bar{X}' = B$, logo $A(\bar{X}' - \bar{X}) = 0$ e assim $\bar{X}' - \bar{X}$ é uma solução do sistema homogêneo associado a $AX = B$. Se X é uma dessas soluções, segue-se

ue $\bar{X}' = \bar{X} + X$, o que queríamos demonstrar.

OROLÁRIO 3.4.18 - O sistema $AX = B$ tem solução única se e sómente se $\rho(A') = \rho(A) = n$.

emonstração: Já sabemos que $AX = B$ tem solução se e sómente se $\rho(A') = \rho(A)$. Por outro lado, a dimensão do espaço solução de $AX = 0$ é $n - \rho(A)$. Assim, se $\rho(A) = n$, $AX = 0$ tem sómente a solução trivial e, pelo resultado anterior, todas as soluções de $AX = B$ coincidirão.

Um problema que se nos depara agora é o de achar as soluções do sistema $AX = 0$. Seja r o posto da matriz A do sistema e sejam A_1, A_2, \dots, A_r as colunas linearmente independentes. Então, para $k = r+1, r+2, \dots, n$, temos que

$$A_k = \sum_{i=1}^r y_{ik} A_i$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^r y_{ik} A_i - A_k = 0$$

Mas isso quer dizer que os vetores

$$Y_k = \begin{pmatrix} -y_{1k} \\ -y_{2k} \\ \vdots \\ -y_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$$

k-ésima linha

são soluções do sistema.

Como $Y_{r+1}, Y_{r+2}, \dots, Y_n$ são linearmente independentes e a dimensão do espaço solução é exatamente $n-r$ vemos que estes vetores formam uma base para o espaço solução de $AX = 0$. Por outro lado, se tivermos um vetor da forma

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

k-ésima linha

que é uma solução do sistema, então $X_k = Y_k$ (por quê?). Assim, podemos enunciar

TEOREMA 3.4.19 - Considere o sistema $AX = 0$ e suponha que as colunas linearmente independentes de A são as r primeiras. Então, uma base para o espaço

olução do sistema $AX = 0$ pode ser achada fazendo-se, sucessivamente, $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0; x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0; x_{r+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n = 1.$

Já sabemos, assim, resolver um sistema homogêneo $X = 0$. Assim, para resolver o sistema $AX = B$, resta achar uma de suas soluções. Para isso, note que $AX = B$ pode ser escrito como

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B$$

ainda $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n - B = 0$. Desta maneira, para encontrar uma solução de $AX = B$, é suficiente exprimir B como uma combinação linear de A_1, A_2, \dots, A_n .

KEMPLOS

.4.20: Consideremos o sistema

$$3x + y - 5z = -1$$

$$x - 2y + z = -5$$

$$x + 5y - 7z = 2$$

primeiro lugar, devemos calcular o posto da matriz do sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & -9 \\ -14 & 5 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

Outro lado, consideremos a matriz aumentada do sistema e achemos seu posto

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & -9 & -5 \\ -14 & 5 & 18 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -9 & -7 \\ -14 & 5 & 18 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -11 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Vemos assim que $\rho(A) = 2$ e $\rho(A^T) = 3$, logo o sistema não tem solução.

Seja agora o sistema

$$2x - 3y + 6z = 3$$

$$4x - y + 3z = 1$$

$$3x - 2y + 3z = 4$$

Já sabemos (ver Exemplo 3.4.7) que o posto de $\left(\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$

é três. Achemos agora o posto da matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) :$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Assim, o sistema tem solução. Para achá-lo, consideremos, em primeiro lugar, o sistema homogêneo associado

$$2x - 3y + 6z = 0$$

$$4x - y + z = 0$$

$$3x - 2y + 3z = 0$$

Como sua matriz tem posto 3, ele admite somente a solução trivial. Isso implica que a solução do sistema não-homogêneo será única.

Para achar esta solução, verifiquemos que operações elementares sobre as colunas realizamos para reduzir A^1

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & B \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_2 + B \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ A_2 + B & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ A_1 - 3(\frac{A_2 + B}{2}) & A_2 & (A_3 + 2A_2) & \frac{A_2 + B}{2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_1/2 & A_2 & A_3 & \frac{(A_2 + B)}{2} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3(\frac{A_2 + B}{4}) & A_2 + B & 2A_2 & \frac{(A_2 + B)}{2} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(A_2 + B)}{2} \end{array} \right)$$

onde concluimos que $\frac{A_1}{2} - 3(A_2 + B)/4 + A_2 + (A_2 + B) +$

$$+ 5\{A_3 + 2A_2 + (A_2+B)/2\} = 0 \text{ ou seja } \frac{3}{2}A_1 + \frac{49}{4}A_2 + \\ + 5A_3 + \frac{5}{4}B = 0 \text{ donde} \\ B = -\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}A_1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{49}{4}A_2 - 5 \cdot \frac{4}{5}A_3 = -\frac{6}{5}A_1 - \frac{49}{5}A_2 - 4A_3 \\ \text{e assim a solução (única) do sistema é } (-\frac{6}{5}, -\frac{49}{5}, -4).$$

3.4.21: Resolvamos o sistema

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 = 11$$

$$5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = -5$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 5 & -2 \\ -4 & -4 & 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e assim A tem posto 2.}$$

Por outro lado, calculemos o posto da matriz aumentada A'

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 0 & -3 & -1 & 11 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 5 & 5 & -20 \\ -4 & -4 & 4 & 4 & -16 \end{array} \right]$$

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & B \\ & & & + & + & \\ & & & 5A_5 & 2A_5 & -3A_5 & 11A_5 \end{matrix}$$

assim $\rho(A^*) = \rho(A) = 2$.

Observe que $4A_3 + B + 11A_5 = 0$, logo $B = -4A_3 - 11A_5$ e obtivemos uma solução do sistema. Para achar ôdas suas soluções, resolvemos o sistema homogêneo associado

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

Como $\rho(A) = 2$, vemos que a dimensão do espaço solução é $n - \rho(A) = 3$. Achamos que as duas colunas L.I. são primeira e a quinta; fazendo, sucessivamente, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, obteremos as soluções $(-1, 1, 0, 0, -3)$, $(1, 0, 1, 0, 5)$ $(1, 0, 0, 1, 2)$ que formam uma base para o espaço solução do sistema homogêneo. Assim, a solução geral do sistema

do sistema homogêneo será

$$(0, 0, -4, 0, -11) + t_1(-1, 1, 0, 0, -3) + t_2(1, 0, 1, 0, 5) + t_3(1, 0, 0, 1, 2).$$

OBSERVAÇÃO: Muitas vezes, estudam-se os sistemas lineares realizando operações elementares sobre as linhas da matriz do sistema; os resultados são análogos. Preferimos o método aqui exposto por ter conteúdo bem mais geométrico.

3.5 - Soma de transformações lineares

Já sabemos realizar uma operação sobre transformações lineares: dadas $T:V \rightarrow U$ e $S:U \rightarrow W$, podemos formar a composta $S \circ T:V \rightarrow W$. Aprenderemos agora a efetuar outras operações sobre transformações lineares.

DEFINIÇÃO 3.5.1 - Se $T, S:V \rightarrow U$ são transformações lineares entre espaços vetoriais, a soma de T e S , $T + S$ é a transformação de V em U definida por $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$, $\forall v \in V$.

É imediato verificar que $(T+S)$ é uma transformação linear: se $k_1, k_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$, $(T+S)(k_1v_1 + k_2v_2) = T(k_1v_1 + k_2v_2) + S(k_1v_1 + k_2v_2)$ e como T e S são lineares $T(k_1v_1 + k_2v_2) + S(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + k_1S(v_1) + k_2S(v_2) = k_1(T(v_1) + S(v_1)) + k_2(T(v_2) + S(v_2)) = k_1(T+S)(v_1) + k_2(T+S)(v_2)$.

Além disso, é fácil ver que $T+S = S+T$.

EXERCÍCIO

3.5.2: Mostre que $T+S = S+T$.

Uma outra operação que podemos efetuar com transformações lineares é multiplicá-las por escalares.

DEFINIÇÃO 3.5.3 - Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo K e $T:V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se $k \in K$ a transformação produto de k por T , kT , é definida por $(kT)(v) = kT(v)$, $\forall v \in V$.

É também imediato que kT é uma transformação linear.

Observe que podemos agora somar duas transformações lineares e multiplicar uma transformação linear por um escalar. O fato importante relativo a estas operações está descrito abaixo.

TEOREMA 3.5.4 - Se V e W são espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K , o conjunto das transformações lineares de V em W é um espaço vetorial sobre K , denotado por $L(V,W)$ onde as operações são as descritas em 3.5.1 e 3.5.3.

Demonstração: Deveríamos demonstrar todas as propriedades exigidas em 1.2.1 para definir um espaço vetorial. Faremos sómente algumas, deixando as outras como exercícios.

A comutatividade da adição é o Exercício 3.5.2.

Deixamos a associatividade como exercício, o mesmo acontecendo com as propriedades V3), V4) e V5). O elemento neutro em relação à adição de $L(V,W)$ é a transformação linear $0:V \rightarrow W$ tal que $0(v) = 0$, $\forall v \in V$. Observe que se $T \in L(V,W)$ (ou seja, T é uma transformação linear de V em W) então, $\forall v \in V$ $(1 \cdot T)(v) = 1 \cdot T(v) = T(v)$, isto é $1 \cdot T = T$. Defina $-T:V \rightarrow W$ por $(-T)(v) = -T(v)$, $\forall v \in V$. Vemos então que $-T$ é o negativo de T .

EXERCÍCIO

3.5.5: Complete a demonstração de 3.5.4.

Uma maneira importante de obter espaços vetoriais é a de construir $L(V,W)$, partindo de dois espaços V , W (que podem eventualmente ser iguais).

EXEMPLO

3.5.6: Se $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $L(V,W)$ é o conjunto das transformações lineares de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , que são chamadas de funcionais lineares em \mathbb{R}^2 . Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica do \mathbb{R}^2 e φ_1, φ_2 os funcionais lineares definidos por $\varphi_1(e_i) = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i=2 \end{cases}$, $\varphi_2(e_i) = \begin{cases} 0 & i=1 \\ 1 & i=2 \end{cases}$.

Se $\varphi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é um funcional linear arbitrário, então, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(v) = \varphi(xe_1 + ye_2) = x \varphi(e_1) + y \varphi(e_2)$. Por outro lado, $\varphi_1(v) = \varphi_1(xe_1 + ye_2) = x \varphi_1(e_1) + y \varphi_1(e_2)$.

$x \in \varphi_2(v) = \varphi_2(x e_1 + y e_2) = x \varphi_2(e_1) + y \varphi_2(e_2) =$
 $y \in \text{assim } \varphi(v) = \varphi(e_1)\varphi_1(v) + \varphi(e_2)\varphi_2(v) \text{ ou seja,}$
 $= \varphi(e_1)\varphi_1 + \varphi(e_2)\varphi_2 \text{ e desta maneira os funcionais } \varphi_1$
 $\varphi_2 \text{ geral o espaço } L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}). \text{ Estes dois funcionais são}$
 $\text{linearmente independentes: com efeito, se } k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 = 0$
 $\text{então, } \forall v \in \mathbb{R}^2, k_1\varphi_1(v) + k_2\varphi_2(v) = 0 \text{ e fazendo } v = e_1$
 $\text{vemos que } k_1 = 0; \text{ da mesma maneira, vemos que } k_2 = 0.$
 $\text{Demonstramos assim que } L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ é um espaço vetorial de}$
 dimensão 2.

XERCÍCIO

.5.7: Determine a dimensão de $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, o espaço vetorial dos funcionais lineares em \mathbb{R}^3 .

EXEMPLO

.5.8: Sejam agora V e W espaços de dimensão n e m respectivamente. Tome bases $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de V e W e defina as transformações lineares

$$T_{ij}: V \rightarrow W \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

$$v_k \longmapsto w_i \quad k=j$$

$$v_k \longmapsto 0 \quad k \neq j$$

Assim, por exemplo se $\dim V = 3$, $\dim W = 2$, $T_{12}: V \rightarrow W$ tal que $v_1 \mapsto 0$, $v_2 \mapsto w_1$, $v_3 \mapsto 0$, T_{13} fica definida por

$v_1 \mapsto 0, v_2 \mapsto 0, v_3 \mapsto w_1$, enquanto que T_{21} é tal que
 $v_1 \mapsto w_2, v_2 \mapsto 0, v_3 \mapsto 0$.

Se $T \in L(V, W)$, e $v \in V$, então $T(v) = T\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k T(v_k) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{sk} x_k\right) w_s = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{sk} T_{sk}(v)\right)$ ou seja as aplicações lineares $T_{sk}, s=1, \dots, m, k=1, \dots, n$ geram $L(V, W)$. É fácil ver (faça-o!) que elas são linearmente independentes, e isso mostra que $L(V, W)$ tem dimensão $m \times n$.

EXERCÍCIOS

3.5.9: No exemplo acima, se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, ache as matrizes $[T_{ij}]_{\beta'}^{\beta}$, $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$.

3.5.10: Mostre que as transformações T_{ij} definidas acima são linearmente independentes.

Já sabemos que, dada $T \in L(V, W)$, e fixadas bases β e β' em V e W respectivamente, então T determina uma matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$, com coeficientes em K . Se V tem dimensão n e W dimensão m , obtemos assim uma função de $L(V, W)$ em $M_K(m \times n)$, o conjunto das matrizes $m \times n$ com coeficientes em K . Afirmamos que θ é uma bijecção. Com efeito, qualquer matriz $A \in M_K(m \times n)$ determina uma transformação linear $T_A: V \rightarrow W$ e é imediato ver que $[T_A]_{\beta'}^{\beta} = A$. Por outro lado, se $\theta(T_1) = \theta(T_2)$, então

$T_1]_{\beta'}^{\beta} = T_2]_{\beta'}^{\beta}$, e assim $T_1 = T_2$ (prove isso!).

A função θ acima é mais que uma bijeção: em primeiro lugar, se $T:V \rightarrow U$ e $S:U \rightarrow W$ são transformações lineares, β , β' e β'' são bases em V , U e W com n, m e s elementos respectivamente, então $\theta(S \circ T) = \theta(S) \cdot \theta(T)$ (isso é nada mais nada menos que o Lema 3.1.15). Em verdade, estamos sendo descuidados e usando a mesma letra θ para indicar as funções $L(V,W) \rightarrow M_k(s \times n)$, $L(V,U) \rightarrow M_k(m \times n)$ e $L(U,W) \rightarrow M_k(s \times m)$. Além disso, se $T, S: V \rightarrow W$ são transformações lineares, então $\theta(T+S) = \theta(T) + \theta(S)$ e $\theta(kT) = k \theta(T)$. Assim θ é uma bijeção que preserva as operações de $L(V,W)$ e $M_k(m \times n)$, ou seja, ela respeita as estruturas de espaços vetoriais de $L(V,W)$ e $M_k(m \times n)$ e faz corresponder à composição de funções o produto de matrizes.

EXEMPLOS

3.5.11: Seja V um espaço vetorial, V_1 e V_2 subespaços vetoriais de V tais que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e que se $v \in V$, $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Então, existe um isomorfismo $T:V \rightarrow V_1 \oplus V_2$. Com efeito, se $v = v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$, com $v_1, v'_1 \in V_1$, $v_2, v'_2 \in V_2$ então $v_1 - v'_1 = v'_2 - v_2$ logo $v_1 - v'_1 \in V_1 \cap V_2$ pois $v'_2 - v_2 \in V_2$ e assim $v_1 - v'_1 = 0$ donde $v_1 = v'_1$. Semelhan-

tamente $v_2 = v'_2$ logo todo vetor v de V se escreve de maneira única como uma soma de um vetor de V_1 e de um vetor de V_2 . Definamos, agora, $T: V \rightarrow V_1 \oplus V_2$ como segue. Se $v \in V$, escreva $v = v_1 + v_2$ e ponha $T(v) = T(v_1 + v_2) = (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$. Como a expressão de v como soma de um vetor de V_1 com um vetor de V_2 é única T está bem definida. Se $v' \in V$, $v' = v'_1 + v'_2$, então $T(kv + k'v') = T(kv_1 + kv_2 + k'v'_1 + k'v'_2) = T(kv_1 + k'v'_1 + kv_2 + k'v'_2) = (kv_1 + k'v'_1, kv_2 + k'v'_2) = k(v_1, v_2) + k'(v'_1, v'_2) = kT(v) + k'T(v')$ e isso mostra que T é linear. É fácil ver que $S: V_1 \oplus V_2 \rightarrow V$ dada por $S(v_1, v_2) = v_1 + v_2$ é a transformação inversa de T e o teorema fica demonstrado.

3.5.12: Se $T_1: V_1 \rightarrow W_1$, $T_2: V_2 \rightarrow W_2$ são transformações lineares, podemos definir $T: V_1 \oplus V_2 \rightarrow W_1 \oplus W_2$ pela regra $T(v_1, v_2) = (Tv_1, Tv_2)$. É fácil verificar que T é uma transformação linear, geralmente denotada por $T_1 \oplus T_2$ e chamada de soma direta de T_1 e T_2 .

EXERCÍCIO

3.5.13: Sejam $T_1: V_1 \rightarrow W_1$ e $T_2: V_2 \rightarrow W_2$ transformações lineares. Se α_1 e α_2 são bases de V_1 e V_2 respectivamente, β_1 e β_2 bases de W_1 e W_2 , ache, em função de $T_1]_{\beta_1}^{\alpha_1}$, $T_2]_{\beta_2}^{\alpha_2}$, a matriz de $T_1 \oplus T_2$ em relação às bases $\alpha_1 \oplus \alpha_2$, $\beta_1 \oplus \beta_2$.

CAPÍTULO 4

PRODUTOS INTERNOS

Passamos, neste capítulo, a introduzir mais estrutura nos espaços vetoriais; ensinaremos, agora, como "medir distâncias" neles. Todos os espaços vetoriais considerados serão reais ou complexos.

4.1 - A definição de produto interno. Generalidades

DEFINIÇÃO 4.1.1 - Seja V um espaço vetorial sobre o corpo real ou complexo, denotados por K .

O produto interno sobre V é uma função de $V \times V$ em K , escrita $(,)$ e tal que:

- i) $\forall u, v \in V$, então $(u, v) = (\overline{v}, u)$
- ii) $\forall u, v \in V$, $k \in K$, temos que $(ku, v) = k(u, v)$
- iii) $\forall u, v, w \in V$, tem que $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$.
- iv) $\forall u \in V$, (u, u) é um número real não negativo; além disso, $(u, u) = 0$ se e somente se $u = \mathbf{0}$.

EXEMPLOS

4.1.2: Seja $V = \mathbb{R}^2$ e a função de $V \times V$ em \mathbb{R} definida

por $(u, v) = x_1x_2 + 3y_1y_2$, quando $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$.
 Em primeiro lugar, 1), 2) e 3) são facilmente verificados.
 Para verificar 4) note que se $u = v = (x, y)$, temos que
 $(u, v) = x^2 + 3y^2 \geq 0$ e $x^2 + 3y^2 = 0$ se e sómente se
 $x = y = 0$.

4.1.3: Se $V = \mathbb{R}^3$ e $(,): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $(u, v) =$
 $= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, onde $u = (x_1, x_2, x_3)$,

$v = (y_1, y_2, y_3)$, vemos, também sem dificuldades, que $(,)$
 será um produto interno em \mathbb{R}^3 .

4.1.4: Seja $V = \mathbb{C}^2$ e $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $u, v \in \mathbb{C}^2$.

Defina $(,): V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ por $(u, v) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$.

Observe que $(v, u) = y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2 = (\overline{x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2}) = (\bar{u}, \bar{v})$
 ou seja $(u, v) = (\bar{v}, \bar{u})$. As propriedades 2) e 3) verificam-
 -se sem problemas. Observe, além disso, que $(u, u) =$
 $= (x_1\bar{x}_1 + y_1\bar{y}_1) = |x^2| + |y^2| \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se e
 sómente se $u = 0$.

4.1.5: Considere agora $V = \mathbb{R}^2$ e $(,): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$(u, v) = x_1y_1 - 3x_2y_2$. É fácil ver então que 1), 2)

e 3) são verdadeiros, mas o mesmo não acontece com 4):

com efeito, $(u, u) = x_1^2 - 3x_2^2$ e não podemos garantir que
 $x_1^2 - 3x_2^2 \geq 0$ (por quê? faça $x_1 = x_2 = 1$), logo $x_1y_1 -$
 $- 3x_2y_2$ não define um produto interno em \mathbb{R}^2 .

4.1.6: Tomemos $V = \mathbb{C}^2$ e $(,): V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(u, v) =$

$x_1y_1 + x_2y_2$. Verificam-se, sem problemas, as propriedades 2) e 3), mas 1) e 4) não são verdadeiras (mostre-o!).

.1.7: Já vimos que o conjunto C das funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constitue um espaço vetorial com as operações de soma de funções e de multiplicação de uma função por um número real. Definiremos, neste espaço, um produto interno pondo $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. As propriedades 1), 2) e 3) são fáceis de verificar. Por outro lado, note que $(f, f) = \int_0^1 f(t)f(t)dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt \geq 0$ e esta integral nula se e somente se f é a função constante nula, o que demonstra 4) (você é capaz de demonstrar formalmente), para este caso? lembre-se da definição de função contínua).

.1.8: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, tome u_1, u_2, \dots, u_n uma base para V e definamos $: V \times V \rightarrow C$ por $(u, v) = \sum a_i \bar{b}_i$, onde $u = \sum a_i u_i$ e $v = \sum b_i u_i$. Deixamos a cargo do leitor verificar que isso define um produto interno sobre V .

XERCÍCIO

.1.9: Mostre que, se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então existe sempre um produto interno definido sobre V .

De agora em diante, mesmo sem indicação explícita,

consideraremos todos os espaços vetoriais de dimensão finita dotados de um produto interno.

EXEMPLO

4.1.10: Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica 2×2

(isto é, tal que $a_{12} = a_{21}$) com coeficientes reais, e.g., $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, etc.

Defina $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra $(u, v) \mapsto (x_1, y_1)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}, \text{ onde } u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2).$$

É fácil verificar que (\cdot, \cdot) satisfaz as condições 1), 2), 3). Procuremos condições para que (\cdot, \cdot) seja um produto interno sobre \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \text{Se } u = (x, y), (u, u) &= (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11} \left\{ \left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)y^2}{a_{11}^2} \right\} \text{ donde se segue que } (\cdot, \cdot) \text{ define um} \\ &\text{produto interno se e sómente se } a_{11} > 0 \text{ e } a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < \\ &\quad < 0. \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 4.1.11 - Seja V um espaço vetorial com produto interno (\cdot, \cdot) e $u \in V$. A norma ou módulo de u , $\|u\|$, é o número real não negativo $\sqrt{(u, u)}$.

XERCÍCIOS

4.1.2: Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e considere os produtos internos que estas matrizes definem sobre \mathbb{R}^2 (veja 4.1.10). Ache a norma do vetor $(1, 2)$ em relação a ambos os produtos internos. Este exercício deixaclaro que a norma de um vetor depende do produto interno que estiver sendo usado.

4.1.13: Se V é o espaço vetorial das funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com o produto interno

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ache a norma dos seguintes vetores de V :

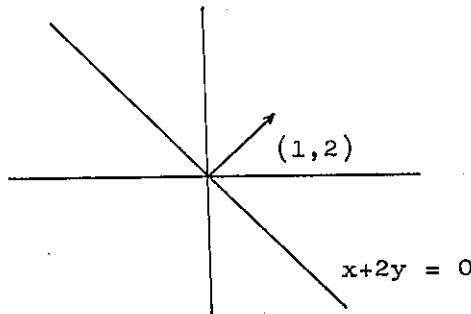
- a) $f(t) = e^t$
- b) $g(t) = \cos t$
- c) $h(t) = \sin t$
- d) $w(t) = 1$
- e) $z(t) = t$

Já introduzimos a noção de comprimento (norma) de um vetor. Ensinamos, agora, a reconhecer vetores ortogonais.

DEFINIÇÃO 4.1.14 - Se V é um espaço vetorial com produto interno (\cdot, \cdot) , dizemos que $u, v \in V$ são ortogonais se e somente se $(u, v) = 0$.

EXEMPLO

4.1.15: Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $u = (1, 2)$. Achemos os vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que $(u, v) = 0$. Se $v = (x, y)$, então $(u, v) = x+2y$ (estamos supondo o produto interno $x_1y_1 + x_2y_2$) e assim v é ortogonal a u se e sómente se $x+2y = 0$.



LEMA 4.1.16 - Se V é um espaço vetorial com produto interno $(,)$ e $v \in V$, o conjunto $\{v\}^\perp = \{u \in V \mid (u, v) = 0\}$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração: Sejam $u_1, u_2 \in \{v\}^\perp$, então $(u_1, v) = (u_2, v) = 0$, logo se $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $(k_1 u_1 + k_2 u_2, v) = (k_1 u_1, v) + (k_2 u_2, v) = 0 + 0 = 0$, o que conclui a demonstração.

DEFINIÇÃO 4.1.18 - Se V é um espaço vetorial e $v \in V$, o complemento ortogonal de v é o subespaço $\{v\}^\perp = \{u \in V \mid (u, v) = 0\}$.

EXERCÍCIOS

4.1.19: Se v_1 e v_2 são vetores ortogonais não nulos de um espaço V com produto interno $(,)$, então v_1 e v_2 são linearmente independentes.

4.1.20: Considere P_n o espaço vetorial dos polinômios reais de grau $\leq n$ e defina $(p(t), q(t)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$; verifique que $(,)$ é um produto interno e ache os complementos ortogonais dos vetores 1 e t respectivamente.

DEFINIÇÃO 4.1.20 - Seja V um espaço vetorial e $u, v \in V$. Os vetores u e v são ortonormais se $\|u\| = \|v\| = 1$ e $(u, v) = 0$.

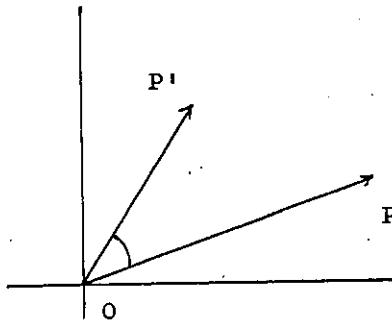
EXERCÍCIO

4.1.21: Mostre que se $v \in V$, então $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$.

Observaremos, de passagem, o seguinte fato relativo ao produto interno usual no \mathbb{R}^2 : se $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, então $x_1y_1 + x_2y_2 = \|u\| \|v\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo formado por u e v .

Com efeito, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OPP', vemos que $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \theta$, mas $\|u-v\|^2 = ((x_1-y_1, x_2-y_2), (x_1-y_1, x_2-y_2)) = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, $\|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\|v\|^2 = y_1^2 + y_2^2$ e assim $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 = x_1^2 + x_2^2 +$

$$+ y_1^2 + y_2^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \theta \quad \text{onde} \quad (u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \\ = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$



É um fato bem conhecido que, no plano, o comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma dos comprimentos dos outros lados. Este fato generaliza-se:

TEOREMA 4.1.22 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz): Se u e v são vetores de um espaço vetorial com produto interno $(,)$ então $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$.

Demonstração: Se $v = 0$, a desigualdade se verifica trivialmente. Suponhamos, portanto, que $v \neq 0$ e vem então que, para $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \|u - (u, v)v\|^2 =$
 $= (u - (u, v)v, u - (u, v)v) = (u, u) - t(\overline{u, v})(u, v) - t(u, v)(v, u) +$
 $+ t^2(u, v)(\overline{u, v})(v, v) = \|u\|^2 - 2t|(u, v)|^2 + |(u, v)|^2 t^2 \|v\|^2$.
 Fazendo agora $t = \frac{1}{\|v\|^2}$, vemos que $0 \leq \|u\|^2 - \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2}$ e assim $|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ donde $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$.

EXEMPLOS

4.1.23: Se $V = \mathbb{R}^2$ e $(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ para

$u = (x_1, x_2)$, $v = (u_1, u_2)$, então $|x_1u_1 + x_2u_2| \leq$
 $(x_1^2 + x_2^2)(u_1^2 + u_2^2)$.

4.1.24: Considere V o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ com as operações usuais e o produto interno dado por

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

então, a desigualdade de Cauchy garante que

$$|\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq (\int_0^1 f^2(t)dt)^{1/2} (\int_0^1 g^2(t)dt)^{1/2}$$

Usando a desigualdade de Cauchy, podemos demonstrar o seguinte:

TEOREMA 4.1.25 - Se $u, v \in V$, então $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Demonastração: $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u, u) + (u, v) + (v, u) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + (u, v) + (v, u) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|(u, v)| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$ e como estamos lidando com números não negativos segue-se que $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

XERCÍCIOS

4.1.26: Se $u, v \in V$, e $(u, v) = 0$, então $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Além disso, se V é um espaço vetorial real, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ implica que $(u, v) = 0$. Mostre, por meio de um exemplo, que a segunda parte do exer-

ício não é verdadeira para espaços complexos.

4.1.27: Se V é um espaço vetorial real e com produto interno $(,)$, então $(u, v) = \frac{1}{2}\{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\}$, para todo u e $v \in V$.

4.1.28: Se $u, v \in V$, então $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. Interprete geométricamente no plano.

4.1.29: Dados $u, v \in V$, defina a distância d entre u e v por $d(u, v) = \|u-v\|$. Mostre que, $\forall u, v, w \in V$, então $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, $d(u, v) = d(v, u)$ e $d(u, u) \geq 0$.

DEFINIÇÃO 4.1.30 - Seja V um espaço vetorial com produto interno. Uma base β de V é dita ortogonal se é constituída por vetores ortogonais entre si; isto é, se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então $(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$.

EXERCÍCIOS

4.1.31: Ache bases ortogonais para o \mathbb{R}^2 e para o \mathbb{R}^3 .

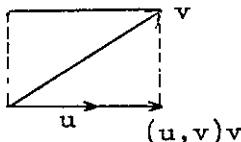
4.1.32: Considere o subespaço V de \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 0)$ e $(0, 0, 3, 4)$. Verifique se estes vetores formam uma base para V . Caso isso aconteça, teste se é uma base ortogonal.

INICIAÇÃO 4.1.33 - Seja V um espaço vetorial com produto interno. Uma base β de V é ortogonal se é constituída por vetores unitários (i.e. de norma 1) e ortogonais entre si.

4.1.34 - Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal para o espaço vetorial V , então $\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$ é uma base ortonormal para V .

construção: Em primeiro lugar, é óbvio que β' é uma base de V (prove isso). Por outro lado, $v \in V$, $v \neq 0$, então o vetor $u = \frac{v}{\|v\|}$ tem norma unidade. Além disso, se $u, v \in V$ e $(u, v) = 0$, então, $k_1, k_2 \in K$ $(k_1 u, k_2 v) = 0$ pois $(k_1 u, k_2 v) = k_1(u, k_2 v) = k_1 \bar{k}_2(u, v) = k_1 \bar{k}_2 0 = 0$ e o lema fica assim demonstrado.

Consideremos o plano R^2 com o produto interno $u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \|u\| \|v\| \cos \theta$, se $\|u\| = 1$, então $\|v\| = \|v\| \cos \theta$ e $(u, v)u$ é a componente de v na direção de u .



serve que v pode ser decomposto na soma de dois vetores ortogonais; um na direção de u , $(u, v)u$, que pertence ao subespaço gerado por u e outro, $v - (u, v)u$, ortogonal a u : com efeito, $(v - (u, v)u, u) = (v, u) - (u, v)(u, u) = 0$.

e v e u são linearmente independentes, então
- $(u, v)u$ é não nulo (por quê?).

No espaço \mathbb{R}^3 , também com o produto interno usual, ejam v_1, v_2 e v três vetores linearmente independentes e tais que $\|v_1\| = 1$, $\|v_2\| = 1$ e $(v_1, v_2) = 0$. Podemos então projetar v sobre v_1 e v_2 . A soma dessas suas projeções, $(v, v_1)v_1 + (v, v_2)v_2$ é a componente de v no plano determinado por v_1 e v_2 . Como anteriormente, o vetor $v - (v, v_1)v_1 - (v, v_2)v_2$ será ortogonal ao subespaço gerado por v_1 e v_2 : $(v, v_i) = (v - (v, v_1)v_1 - (v, v_2)v_2, v_i) = (v, v_i) - (v, v_1)(v_1, v_i) - (v, v_2)(v_2, v_i) = 0$, para $i=1, 2$.

EXERCÍCIO

4.1.35: Seja V um espaço vetorial com produto interno, e U o subespaço de V gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_s . Então, se $v \in V$, v é ortogonal a um vetor qualquer de U se e somente se v é ortogonal a v_1, v_2, \dots, v_s .

4.1.36: Se $u = (1, 2)$, $v = (1, 1)$ ache a projeção de u na direção do subespaço gerado por v .

4.1.37: Seja V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal para V . Então, se $v = \sum x_i v_i$, mostre que $x_i = (v, v_i)$.

Baseados na situação do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 definimos, de maneira geral, a projeção de um vetor sobre um subespaço.

DEFINIÇÃO 4.1.38 - Se V é um espaço vetorial com produto interno e $v_1, v_2, \dots, v_s \in V$ são vetores ortogonais dois a dois, a projeção de $v \in V$ sobre o subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_s é o vetor $v, v_1) \frac{v_1}{\|v_1\|^2} + (v, v_2) \frac{v_2}{\|v_2\|^2} + \dots + (v, v_s) \frac{v_s}{\|v_s\|^2}.$

É trivial obter, a partir de uma base ortogonal de V uma base ortonormal para o mesmo espaço. O seguinte resultado ensina a achar uma base ortogonal em V espaço vetorial com produto interno:

TEOREMA 4.1.39 - (Processo de Gram-Schmidt):

Se V é um espaço vetorial com produto interno e v_1, v_2, \dots, v_s são vetores linearmente independentes em V , é possível achar vetores u_1, u_2, \dots, u_s que são ortogonais dois a dois (isto é, $(u_i, u_s) = 0$ se $i \neq s$) que são também uma base para o subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_s .

Demonstração: A demonstração é análoga ao que fizemos acima para o \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 e se faz por indução: onha $u_1 = v_1$ e suponhamos que já foram encontrados os

ores u_1, u_2, \dots, u_{s-1} ; defina então:

$$u_s = v_s - \sum_{i < s} \frac{(v_s, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i.$$

$\ell < s$, $(u_s, u_\ell) = (v_s, u_\ell) - \sum_{i < j} \frac{(v_s, u_i)}{\|u_i\|^2} (u_i, u_\ell)$ e a hipótese de indução nos garante que $(u_i, u_\ell) = 0$ se $i \neq \ell$, logo $(u_s, u_\ell) = (v_s, u_\ell) - (v_s, u_\ell) = 0$.

Como, por indução, u_1, u_2, \dots, u_{s-1} geram o mesmo subespaço que v_1, v_2, \dots, v_{s-1} e u_s é linearmente independente de v_1, v_2, \dots, v_{s-1} vem que $u_s \neq 0$; é também claro que o subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_s é o mesmo que o subespaço gerado por u_1, u_2, \dots, u_s (você é capaz de provar esta última afirmação?).

COROLÁRIO 4.1.40 - Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, é sempre possível encontrar em V uma base ortonormal.

Demonastração: Tome uma base arbitrária $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V e, usando o teorema, ache uma base ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ para V ; é, então, fácil obter uma base ortonormal, dividindo cada vetor u_i por sua norma.

É importante perceber a necessidade de 4.1.40. Da o um espaço vetorial V nada nos garante, a priori, a existência nele de vetores ortogonais entre si e que formam uma base para V . O corolário serve exatamente para

garantir tal fato.

EXEMPLO

4.1.41: Achar, em \mathbb{R}^4 uma base ortonormal para o subespaço gerado por $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2, 0)$, e $v_3 = (0, 0, 3, 4)$.

Ponha $u_1 = (1, 1, 0, 0)$; então, $u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 =$

$$= (0, 1, 2, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = (-1/2, 1/2, 2, 0).$$

$$u_3 = v_3 - \frac{(v_3, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{(v_3, u_2)}{\|u_2\|^2} u_2 = (0, 0, 3, 4) - \frac{0}{\|u_1\|^2} -$$

$$- \frac{6}{9/2} (-1/2, 1/2, 2, 0) = (0, 0, 3, 4) - (-4/6, 4/6, 8/3, 0) =$$

$$= (2/3, -2/3, 1/3, 4), \text{ e assim}$$

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (-1/2, 1/2, 2, 0), \quad u_3 = (2/3, -2/3, 1/3, 4)$$

4.1.42: Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 e tome o produto interno dado por

$$(p(t), q(t)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt .$$

Podemos achar uma base ortogonal para P_2 como segue:

partimos da base $1, t, t^2$ e pomos $u_1 = 1$; então

$$u_2 = t - \frac{(t, 1)}{\|1\|^2} 1 = t, \text{ pois } (t, 1) = \int_{-1}^1 t dt = 0 \text{ e}$$

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^1 dt = 2. \text{ Por outro lado, } u_3 = t^2 - \frac{(t^2, 1)}{\|1\|^2} 1 -$$

$$- \frac{(t^2, t)}{\|t\|^2} t \text{ e como } (t^2, 1) = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3, \quad (t^2, t) =$$

$$= \int_{-1}^1 t^3 dt = 0, \text{ vem que } u_3 = t^2 - 1/3.$$

Se desejarmos uma base ortonormal para P_2 é suficiente tomar $\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} : \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} (t^2 - 1/3)$.

EXERCÍCIO

4.1.43: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $(,)$ e e_1, e_2, \dots, e_n é uma base ortogonal de V , então $\forall u, v \in V, (u, v) = \sum x_i \bar{y}_i$, onde $u = \sum x_j e_j, v = \sum y_j e_j$.
 A noção de complemento ortogonal estudada em 4.1.17 pode ser generalizada.

DEFINIÇÃO 4.1.44 - Seja $S \subseteq V$ um subconjunto do espaço vetorial V . O complemento ortogonal de S , S^\perp é o conjunto dos vetores de V que são ortogonais aos vetores de S , i.e., $S^\perp = \{v \in V \mid (v, s) = 0, \forall s \in S\}$.
LEMA 4.1.45 - Se $S \subseteq V$, então S^\perp é um subespaço vetorial de V .

Demonstração: Se $v_1, v_2 \in S^\perp$, então $(v_1, s) = (v_2, s) = 0, \forall s \in S$; mas assim $(k_1 v_1 + k_2 v_2, s) = 0, \forall s \in S$. Por outro lado, S^\perp é não vazio, pois $0 \in S^\perp$ e a demonstração fica concluída.

EXEMPLO

4.1.46: Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{v_1, v_2\}$, $v_1 = (1, 1, 1)$ e

$= (1,0,0)$. Vemos então que $v \in S^\perp$ se e sómente se
 $(v, v_1) = (v, v_2) = 0$ ou seja $x+y+z = 0$, $x = 0$.
Assim maneira $S^\perp = \{(0,1,-1)\}$.

EXERCÍCIO

1.47: Se $V = P_3$, ache o complemento ortogonal de
 $S = \{1, t, 1+t^2\}$; o produto interno é $(p(t), q(t)) =$
 $\int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.

EMPLO

1.48: Se $U \subseteq V$ é um subespaço vetorial de V , então
qualquer vetor de V se escreve, de maneira úni-
ca, como soma de um vetor de U e de um vetor de U^\perp .
Em efeito, se $v \in V$, seja v_1 a projeção de v sobre
(o que é essa projeção?) e $v_2 = v - v_1$; vemos então que
 $u \in U$, $(v_2, u) = (v - v_1, u) = (v, u) - (v_1, u) = 0$. (Por
 quê? você seria capaz de demonstrar isso?) logo $v_2 \in U^\perp$
assim $v = v_1 + v_2$. Por outro lado, se $v = v_1' + v_2'$,
com $v_1' \in U$, $v_2' \in U^\perp$ segue-se que $v_1' + v_2' = v_1 + v_2$ donde
 $v_1' - v_1 = v_2 - v_2'$ e como $v_1' - v_1 \in U$, $v_2 - v_2' \in U^\perp$ vem
 $v_1' - v_1 \in U^\perp$ logo $(v_1' - v_1, v_1' - v_1) = 0$ (por quê?) e
isso mostra que $v_1' = v_1$. Da mesma maneira, $v_2' = v_2$. Se
 $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\beta' = \{u_1', u_2', \dots, u_s'\}$ são bases de U
 U^\perp respectivamente, então $\beta'' = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_1', \dots, u_s'\}$
uma base de V . Com efeito, o fato de que os vetores de

β'' geram V segue-se das considerações acima (por quê? dado $v \in V$, escreva $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ e exprima v_1 e v_2 como combinações lineares de elementos de β e β' respectivamente). Como $0 = 0+0$, e $0 \in U$, $0 \in U^\perp$, segue-se que $u_1, u_2, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_s$ são linearmente independentes (por quê? use a unicidade da decomposição de um vetor de V em um elemento de U mais um elemento de U^\perp).

4.2 - Funcionais lineares e sua representação

DEFINIÇÃO 4.2.1 - Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K , um funcional linear $\alpha: V \rightarrow K$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e K , ou seja, é uma função $\alpha: V \rightarrow K$ tal que

- 1) $\forall v_1, v_2 \in V, \alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$
- 2) $\forall k \in K, v \in V, \alpha(kv) = k\alpha(v)$

EXERCÍCIOS

4.2.2: Mostre que se existe $v \in V$ tal que $\alpha(v) = 1$, então o funcional linear α é sobrejetor.

4.2.3: Mostre que a função $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_1(x, y) = x$ é um funcional linear. É sobrejetor? é injetor?

4.2.4: Mostre que se V é de dimensão n , $n > 1$, e
 $\alpha: V \rightarrow K$ é um funcional linear, então α não pode
ser injetor (use o teorema do núcleo e da imagem).

4.2.5: Se V é um espaço vetorial de dimensão n , e
 $\alpha: V \rightarrow K$ é um funcional linear não nulo, então
 $\dim N(\alpha) = (n-1)$ (isto é, a dimensão do núcleo de α é
 $n-1$).

EXEMPLO

4.2.6: Seja V um espaço vetorial e $u \in V$; consideremos
a função $\psi_u: V \rightarrow K$ dada por $\psi_u(v) = (v, u)$. É fá-
cil ver que ψ_u é um funcional linear: $\psi_u(v_1 + v_2) =$
 $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = \psi_u(v_1) + \psi_u(v_2)$ e
 $\psi_u(kv) = k\psi_u(v)$. Observe que se $u \neq 0$, então ψ_u não é
funcional linear nulo, i.e., aquela que toma o valor
zero para todo vetor de V (você é capaz de provar esta
última afirmação?).

Ainda na mesma linha do Exemplo 4.2.6, seja
 $= (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$; então se $v \in \mathbb{R}^3$, $\psi_u(v) = (v, u) =$
 $x + 2y - z$.

Já sabemos que uma transformação linear $T: V \rightarrow W$
onde V é um espaço de dimensão finita fica perfeitamen-
te determinada se conhecemos como T transforma os vete-
res de uma base de V . Este resultado vale óbviamente pa-
ra os funcionais lineares.

EXEMPLO

4.2.7: Seja V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base para V . Representemos um vetor $v \in V$ por suas coordenadas (x_1, x_2, x_3) em relação a β . Considere o funcional $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(v_1) = 2$, $\psi(v_2) = 1$, $\psi(v_3) = -4$. Então, se $v \in V$, $\psi(v) = \psi(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = x_1\psi(v_1) + x_2\psi(v_2) + x_3\psi(v_3) = 2x_1 + x_2 - 4x_3$.

Já vimos também como somar transformações lineares e como multiplicar uma transformação linear por um escalar. Isso vale, é claro, para funcionais lineares, que são um tipo particular de transformações lineares.

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base para V , defina os funcionais lineares $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ por

$$\psi_i(v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Afirmamos que um funcional linear arbitrário ψ é uma combinação linear de $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Com efeito considere os escalares $k_1 = \psi(v_1), \dots, k_n = \psi(v_n)$. Mostraremos que $\psi = \sum_{i=1}^n k_i \psi_i$; já sabemos que é suficiente demonstrar que $\psi(v_j) = (\sum_{i=1}^n k_i \psi_i)(v_j)$, $j=1, 2, \dots, n$ (por quê?). Mas $\psi(v_j) = k_j$ e $(k_1 \psi_1 + \dots + k_n \psi_n)(v_j) = k_1 \psi_1(v_j) + \dots +$

$k_1 \psi_i(v_j) + \dots + k_n \psi_n(v_j) = k_j$ e assim fica demonstrado que desejávamos.

Já vimos que, para $u \in V$, $\psi_u(v) = (v, u)$ determina um funcional linear. O resultado abaixo garante que todos os funcionais lineares $\psi : V \rightarrow K$ podem ser obtidos desta forma.

TEOREMA 4.2.8 (teorema da representação dos funcionais lineares) - Seja V um espaço vetorial com produto interno $(,)$ sobre um corpo K e $\psi : V \rightarrow K$ um funcional linear. Então existe um único vetor $u_\psi \in V$ tal que, para todo $v \in V$, $\psi(v) = (v, u_\psi)$.

Prova: Suponhamos, por um momento, que u_ψ existe e vejamos que vetor deveria ser: tomemos na base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ para V e seja $\psi = \sum x_i e_i$; se $\psi(v) = (v, u_\psi)$, em particular $\psi(e_j) = (e_j, u_\psi) = (e_j, \sum x_i e_i) = \sum x_i (e_j, e_i) = \bar{x}_j$ e assim $x_i = \overline{\psi(e_i)}$, $i=1, 2, \dots, n$. Agora, para provar a existência de u_ψ podemos definir $u_\psi = \sum \overline{\psi(e_i)} e_i$ e segue-se imediatamente que $\psi(v) = (v, u_\psi)$ (prove isso!).

Para a unicidade, note que se $\psi(v) = (v, u_\psi) = (v, u'_\psi)$, com $u_\psi \neq u'_\psi$ vem que $(v, u_\psi - u'_\psi) = 0$, $\forall v \in V$. Em particular, fazendo $v = u_\psi - u'_\psi$, segue-se que $u_\psi - u'_\psi = 0$, logo $u_\psi = u'_\psi$.

EXEMPLO

4.2.9: Daremos, agora, outra demonstração mais geométrica dêste teorema; suponha que ψ não é o funcional nulo e seja N o núcleo de ψ . Como $\dim N = n-1$, segue-se que $\dim N^\perp = 1$ (por quê?). Seja portanto $v_0 \in N^\perp$, $v_0 \neq 0$ e $\|v_0\| = 1$; se $v \in V$, podemos por

$$v = v - \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0 + \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0$$

e note que

$$v_1 = v - \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0 \in N, \quad v_2 = \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0 \in N^\perp.$$

Por outro lado,

$$(v, v_0) = (v_1 + v_2, v_0) = (v_1, v_0) + (v_2, v_0) = \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)}.$$

Assim, se tomarmos para u_ψ o vetor $\overline{\psi(v_0)}v_0$ vemos que $\psi(v) = (v, \overline{\psi(v_0)}v_0)$ e o teorema está demonstrado.

EXERCÍCIO

4.2.10: Se $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $\psi(x, y, z) = 3x + 2y - z$, ache v_0 tal que $\psi(v) = (v, v_0)$.

EXEMPLO

4.2.11: Seja $\psi = P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(p(t)) = p'(1)$; assim por exemplo, $\psi(t^3 + 2t^2 - 4t + 3) = 6$. Se o produto interno em P_2 é dado por $(p(t), q(t)) =$

$$\int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \text{ ache o vetor } v_0 \text{ que representa } \psi.$$

Uma solução para o exemplo é tomar uma base ortogonal para P_2 e aplicar a ela o método usado na demonstração do teorema. Mas o exercício pode ser atacado diretamente como segue: se $v_0 = a_0 t^2 + a_1 t + a_2$, vemos que $(v) = (v, v_0) = a_0(v, t^2) + a_1(v, t) + a_2(v, 1)$. O nosso problema é determinar a_0, a_1, a_2 .

Fazendo v sucessivamente igual a 1, t , t^2 , temos que

$$\psi(1) = a_0(1, t^2) + a_1(1, t) + a_2(1, 1)$$

$$\psi(t) = a_0(t, t^2) + a_1(t, t) + a_2(t, 1)$$

$$\psi(t^2) = a_0(t^2, t^2) + a_1(t^2, t) + a_2(t^2, 1)$$

como $\psi(1) = 0, \psi(t) = 1, \psi(t^2) = 2$ e

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3, \int_{-1}^1 t dt = 0, \int_{-1}^1 dt = 2, \int_{-1}^1 t^3 dt = 0,$$

$$\int_{-1}^1 t^4 dt = 2/5 \text{ obtemos, enfim, que}$$

$$0 = 2/3a_0 + 2a_2$$

$$1 = 2/3a_1$$

$$2 = 2/5a_0 + 2/3a_2$$

resolvendo este sistema vemos que $a_0 = 45/4, a_1 = 3/2, a_2 = -15/4$.

4.3 - A adjunta de uma transformação linear

Seja a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere o vetor $v = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$ e forme a expressão $(T(u), v)$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Se $u = (x, y)$, então $(T(u), v) = ((\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), (1, -2)) = ((2x + 4y, 3x + y), (1, -2))$.
 $2x + 4y - 6x - 2y = -4x + 2y$. Observe que $(T(u_1 + u_2), v) = (T(u_1), v) + (T(u_2), v)$ e $(T(ku), v) = k(T(u), v)$.

Denotemos a expressão $(T(u), v)$ por $\psi_v(u)$, para indicar que depende do vetor v (obviamente dependerá também da transformação linear escolhida). Provamos, acima, que $\psi_v(u_1 + u_2) = \psi_v(u_1) + \psi_v(u_2)$ e $\psi_v(ku) = k\psi_v(u)$, ou seja, ψ_v é um funcional linear.

Mas se ψ_v é um funcional linear, existirá um vetor $v^* \in \mathbb{R}^2$ tal que $\psi_v(u) = (u, v^*)$. Como $\psi_v(u) = -4x + 2y$, segue-se imediatamente que $v^* = (-4, 2)$. Assim $\psi_v(u) = (T(u), v) = (u, v^*) = ((x, y), (-4, 2))$. Recapitulemos o que foi feito: dada uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e fixado $v \in \mathbb{R}^2$, associamos a ele um funcional linear ψ_v definido por $\psi_v(u) = (T(u), v)$. Mas então este funcional linear é representado por um certo vetor $v^* \in \mathbb{R}^2$. Assim, partindo de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ chegamos a um

etor $v^* \in R^2$; note que dado $v \in R^2$, o v^* que satisfaça as condições acima é único (por quê?). Temos assim, $\overset{*}{v}$ função de domínio R^2 e contradomínio R^2 . Esta função será chamada de adjunta de T e denotada por T^* .
Em verdade, T^* é uma transformação linear: provemos que, $v_1, v_2 \in R^2$, $T^*(v_1 + v_2) = T^*(v_1) + T^*(v_2)$. Pela definição de $T^*(v_1 + v_2)$, para todo $u \in R^2$, $(Tu, v_1 + v_2) = (u, T^*(v_1 + v_2)) = (Tu, v_1) + T(u, v_2) = (u, T^*v_1) + (u, T^*v_2) = (u, T^*v_1 + T^*v_2)$; assim, para todo $u \in R^2$, $(u, T^*(v_1 + v_2)) = (u, T^*v_1 + T^*v_2)$, ou seja, $(u, T^*(v_1 + v_2) - T^*v_1 - T^*v_2) = 0$ e em particular fazendo $u = T^*(v_1 + v_2) - T^*v_1 - T^*v_2$ temos que $T^*(v_1 + v_2) = T^*(v_1) + T^*(v_2)$.

A demonstração de que $T^*(kv) = kT^*(v)$ é analóga, deixada como um exercício.

KERCÍCIOS

- 3.1: No exemplo acima, mostre que $T^*(kv) = kT^*(v)$.
- 3.2: Na demonstração acima foi empregada uma técnica já usada antes: dado $v \in V$, se $(u, v) = 0$ para todo $u \in V$, então $v = 0$. Demonstre isso.
- 3.3: Se você entendeu este exemplo e acredita que T^* é uma transformação linear do plano, então deve ser possível achar sua matriz em relação à base canônica $(0,0), (0,1)$. Ache-a. (Sugestão: é suficiente calcular

$T^*(1,0)$ e $T^*(0,1)$). Você é capaz de perceber alguma relação entre a matriz de T^* e a de T ?

O que acabamos de fazer é inteiramente geral. Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, onde V e W são espaços vetoriais com produto interno, fixe $w \in W$ e considere a expressão (Tv, w) , $\forall v \in V$ (observe que esta expressão faz sentido, pois $Tv \in W$). Chamemos de $\psi_w(v)$ a expressão (Tv, w) , i.e., $\psi_w(v) = (Tv, w)$.

LEMA 4.3.4 - A função $\psi_w: V \rightarrow K$ definida por $\psi_w(v) = (Tv, w)$ é um funcional linear.

Demonstração: $\psi_w(v_1 + v_2) = (T(v_1 + v_2), w) = (Tv_1 + Tv_2, w) = (Tv_1, w) + (Tv_2, w) = \psi_w(v_1) + \psi_w(v_2)$ e $\psi_w(kv) = (T(kv), w) = (kT(v), w) = k(Tv, w) = k\psi_w(v)$.

Se ψ_w é um funcional linear de V , existe um único vetor $w^* \in V$ tal que $\psi_w(v) = (v, w^*)$, $\forall v \in V$.

LEMA 4.3.5 - A correspondência $W \rightarrow V$ definida por $w \rightarrow w^*$ é uma transformação linear.

Demonstração: Por definição, $\forall v \in V$, $(v, (w_1 + w_2)^*) = (Tv, w_1 + w_2) = (Tv, w_1) + (Tv, w_2) = (v, w_1^*) + (v, w_2^*) = (v, w_1^* + w_2^*)$ logo $(w_1 + w_2)^* = w_1^* + w_2^*$. Igualmente demonstra-se que $(kw)^* = kw^*$.

DEFINIÇÃO 4.3.6 - Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow W$,

transformação linear $W \rightarrow V$ definida por $w \rightarrow w^*$ é
chamada de transformação adjunta de T e denotada por T^* .
Assim, T^* é definida pela equação $(Tv, w) = (v, T^*w)$,
 $v \in V$, $w \in W$.

EMPLO

3.7: Seja $D: P_2 \rightarrow P_2$ o operador linear derivação e calculemos $D^*: P_2 \rightarrow P_2$. A transformação D^* fica perfeitamente determinada se conhecermos $D^*(1)$, $D^*(t)$, $D^*(t^2)$; por outro lado, a equação definidora da transformação adjunta nos garante que $(Dp(t), q(t)) = (p(t), D^*q(t))$, para polinômios quaisquer em P_2 . Assim

$$(D(1), 1) = (1, D^*(1))$$

$$(D(1), t) = (1, D^*(t))$$

$$(D(1), t^2) = (1, D^*(t^2))$$

$$(D(t), 1) = (t, D^*(1))$$

$$(D(t), t) = (t, D^*(t))$$

$$(D(t), t^2) = (t, D^*(t^2))$$

$$D^*(1) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$D^*(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

$$D^*(t^2) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

temos

$$0 = (0, 1) = a_0(1, 1) + a_1(1, t) + a_2(1, t^2)$$

$$0 = (0, t) = b_0(1, 1) + b_1(1, t) + b_2(1, t^2)$$

$$0 = (0, t^2) = c_0(1, 1) + c_1(1, t) + c_2(1, t^2)$$

$$(1, 1) = a_0(t, 1) + a_1(t, t) + a_2(t, t^2)$$

$$(1, t) = b_0(t, 1) + b_1(t, t) + b_2(t, t^2)$$

$$(1, t^2) = c_0(t, 1) + c_1(t, t) + c_2(t, t^2)$$

$$z(t, 1) = a_0(t^2, 1) + a_1(t^2, t) + a_2(t^2, t^2)$$

$$z(t, t) = b_0(t^2, 1) + b_1(t^2, t) + b_2(t^2, t^2)$$

$$z(t, t^2) = c_0(t^2, 1) + c_1(t^2, t) + c_2(t^2, t^2)$$

Tomemos o produto interno em P_2 dado por $(p(t), q(t)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$ e temos

$$(1, 1) = 2 \quad (1, t) = 0 \quad (1, t^2) = 2/3, \quad (t, t) = 2/3,$$

$$(t, t^2) = 0 \quad (t^2, t^2) = -2/5$$

e assim vem que

$$0 = 2a_0 + 2/3 a_2$$

$$0 = 2b_0 + 2/3 b_2$$

$$0 = 2c_0 + 2/3 c_2$$

$$2 = 2/3 a_1$$

$$0 = 2/3 b_1$$

$$2/3 = 2/3 c_1$$

$$0 = 2/3 a_0 + 2/5 a_2$$

$$4/3 = 2/3 b_0 + 2/5 b_2$$

$$0 = 2/3 c_0 + 2/5 c_2$$

Logo

$$0 = 2a_0 + 2/3 a_2 \quad a_0 = 0$$

$$2 = 2/3 a_1 \quad a_1 = 3$$

$$0 = 2/3 a_0 + 2/5 a_2 \quad a_2 = 0$$

$$0 = 2 b_0 + 2/3 b_2 \quad b_0 = -5/2$$

$$0 = 2/3 b_1 \quad b_1 = 0$$

$$4/3 = 2/3 b_0 + 2/5 b_2 \quad b_2 = 15/2$$

$$0 = 2 c_0 + 2/3 c_2 \quad c_0 = 0$$

$$2/3 = 2/3 c_1 \quad c_1 = 1$$

$$0 = 2/3 c_0 + 2/5 c_2 \quad c_2 = 0$$

seja, relativa à base $1, t, t^2$ a matriz de D^* é

$$\begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 15/2 & 0 \end{bmatrix}$$

teorema a seguir mostra que nem sempre é tão laborioso calcular a matriz de T^* , conhecendo-se T .

OREMA 4.3.8 - Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita ambos com produtos internos

e $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\beta' = \{e'_1, \dots, e'_s\}$ bases ortonormais de V e W respectivamente. Então a matriz $[T^*]_{\beta}^{\beta'}$ é a transposta conjugada da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

Demonstração: Se $a_{ij} \in [T]_{\beta'}^{\beta}$, então por definição, $a_{ij} = (Te_j, e'_i) = (e_j, T^*e'_i) = \overline{(T^*e'_i, e_j)} = \bar{a}_{ji}^*$ e assim o teorema fica demonstrado.

EXERCÍCIOS

4.3.9: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$, ache, de duas maneiras distintas, $[T^*]_{\beta'}^{\beta}$. (Sugestão: ache $[T^*]_{\beta'}^{\beta}$ diretamente como no Exemplo 4.3.7 e em seguida ache $[T^*]_{\beta}^{\beta}$ e mude então para a base β').

4.3.10: Mostre que se T e S são transformações lineares $T: V \rightarrow W$, $S: W \rightarrow U$, então $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

4.3.11: Demonstre que $I^* = I$.

4.3.12: Mostre, usando 4.3.10, que se T é inversível T^* também o será e que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

4.3.13: Mostre que $(T^*)^* = T$ e que $(T+S)^* = T^*+S^*$.

4.3.14: Demonstre que $(kA)^* = \bar{k}A^*$.

CAPÍTULO 5

TIPOS ESPECIAIS DE TRANSFORMAÇÕES

1 - Auto-valores e auto-vetores de uma transformação linear

Neste capítulo, como no anterior, todos os espaços vetoriais considerados são reais ou complexos e sempre dados de um produto interno.

DEFINIÇÃO 5.1.1 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T:V \rightarrow V$ uma transformação linear. Dado $\lambda \in K$, dizemos que λ é um auto-valor (ou valor próprio) de T se $\exists v \in V, v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.

DEFINIÇÃO 5.1.2 - Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K e $T:V \rightarrow V$ é uma transformação linear, dizemos que $v \in V, v \neq 0$ é um auto-vetor (ou vetor próprio) de T se $\exists \lambda \in K$ tal que $Tv = \lambda v$. Dizemos que λ é auto-valor associado ao auto-vetor v .

Note que o número $0 \in K$ é um auto-valor de T , associado a $v \in V, v \neq 0$, se e somente se $v \in N(T)$. Des-

ta maneira, uma transformação linear $T:V \rightarrow V$ admite o escalar λ como auto-valor se e somente se não é inversível. Observe também que $Tv = \lambda v$ se e somente se $(T-\lambda I)v = 0$ e desta maneira λ é auto-valor de T se e somente se a transformação linear $(T-\lambda I)$ não é inversível.

EXEMPLO

5.1.3: Seja $T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Se $(T-\lambda I)v = 0$, então $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mas a transformação definida por $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ é não inversível se e somente se $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ (por quê? veja 3.3.9) ou seja $(1-\lambda)^2 - 9 = 0$ e assim $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Se $\lambda_1 = 4$, uma solução de $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é $(1,1)$ que será um auto-valor de T associado ao auto-vetor 4. Para $\lambda_2 = -2$ obtemos, por exemplo, o vetor $(1, -1)$.

Note que se v é auto-vetor de T associado ao auto-valor λ e $k \in K$, então kv será também auto-vetor de T associado a λ , pois $T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$. Podemos mesmo demonstrar o que se segue:

TEOREMA 5.1.4 - Dada uma transformação linear $T:V \rightarrow V$, o conjunto $V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração: Em primeiro lugar, V_λ é não vazio, pois

$\in V_\lambda$; se $v_1, v_2 \in V_\lambda$, então $T(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$ e $T(k\lambda) = \lambda(kv)$.

Outro fato importante é demonstrado abaixo.

TEOREMA 5.1.5 - Se $T:V \rightarrow V$ é uma transformação linear e v_1, v_2 são auto-vetores associados aos auto-valores distintos λ_1 e λ_2 , então v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Demonstração: Suponhamos que $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$; então $T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) = x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o sistema de equações vetoriais

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$$

$$x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

tem só a solução $x_1 = x_2 = 0$ (por quê? prove isso).

E EXERCÍCIOS

1.6: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Mostre que esta transformação possui dois auto-valores distintos e ache, para cada um deles, um auto-vetor não nulo. Dê uma base de \mathbb{R}^2 em relação à qual a matriz T é diagonal.

1.7: Ache uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que não possui auto-valores.

5.1.8: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{pmatrix} 14 & -2 & -2 \\ 18 & -1 & -3 \\ 48 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

Determine os auto-valores e os auto-vetores de T e uma base de \mathbb{R}^3 em relação à qual a matriz de T é diagonal.

5.1.9: Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear, V tem dimensão n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são auto-valores distintos de T , com auto-vetores v_1, v_2, \dots, v_n , então estes formam uma base β para V . Ache $[T]_\beta^\beta$.

5.1.10: Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear. Um subespaço U de V é dito invariante sob T se $T(U) \subseteq U$. Mostre que se T admite um auto-valor λ , então V_λ é invariante sob T .

5.1.11: Ache uma transformação linear do plano que não admite nenhum subespaço invariante (exceto, naturalmente, os subespaços triviais 0 e \mathbb{R}^2).

5.1.12: Mostre que se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear e U_1, U_2 são subespaços vetoriais de V invariáveis sob T e tais que $V = U_1 \oplus U_2$, então existem $T_1: U_1 \rightarrow U_1$, $T_2: U_2 \rightarrow U_2$ tais que $T(u_1 \oplus u_2) = T_1(u_1) + T_2(u_2)$, $\forall u = u_1 \oplus u_2 \in V$.

5.1.13: Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ cuja matriz em relação a uma base β de V é diagonal,

re que β é formada por auto-vetores de V . Se β' é tra base de V , segue-se forçosamente que $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é onal?

14: Se $T:V \rightarrow V$ é uma transformação linear, é sempre possível achar uma base β de V em relação à a matriz de T é diagonal? Prove isso ou dê um exemplo.

Toda matriz A $n \times n$ com coeficientes em um corpo ríco K define uma transformação linear $T_A: C^n \rightarrow C^n$. z é uma matriz $n \times 1$ representando um elemento de então $T_A(z) = A.z$.

DEFINIÇÃO 5.1.15 - Dada uma matriz A $n \times n$, um auto-valor de A é um auto-valor da transformação $C^n \rightarrow C^n$ induzida por A . Um auto-vetor de A é um -vetor de T_A (logo, uma n -lista de números comple-

E EXERCÍCIO

16: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Ache seus valores próprios e vetores próprios.

Já vimos que nem sempre uma transformação linear $\rightarrow V$ admite auto-valores e auto-vetores. Por outro lado, uma matriz $n \times n$ com coeficientes em um corpo K sempre tem auto-valores, que serão números complexos,

não necessariamente em K , como mostrado abaixo:

TEOREMA 5.1.17 - Se A é uma matriz $n \times n$, então A possui um auto-valor e um auto-vetor.

Demonstração: Consideremos a transformação $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por A . Se β é a base canônica de \mathbb{C}^n , então $[T_A]_{\beta}^{\beta} = A$. Por outro lado, $T_A(z) = \lambda z$ com $z \neq 0$ se e somente se $(T_A - \lambda I)$ não é inversível e, já sabemos (3.3.9) que $(T_A - \lambda I)$ é não-inversível se e somente se $\Delta = \det((T_A - \lambda I)]_{\beta}^{\beta}) = 0$; mas Δ é um polinômio de grau n^2 em λ o qual possui, pelo teorema fundamental da álgebra, uma raiz complexa e provamos assim que A tem um auto-valor (complexo!), ao qual está associado um auto-vetor $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$.

COROLÁRIO 5.1.18 - Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear e V um espaço vetorial complexo, então T possui um auto-valor e um auto-vetor.

2 - Transformações auto-adjuntas

Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ a sua adjunta T^* será também uma transformação linear de V em V . já sabemos que se β é uma base ortonormal de V , então a matriz de T^* na base β é a transposta conjugada matriz de T .

DEFINIÇÃO 5.2.1 - Uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ é auto-adjunta se $T = T^*$.

Se V é um espaço vetorial sobre os reais, uma transformação auto-adjunta é tradicionalmente chamada de métrica; se V é um espaço complexo, as transformações auto-adjuntas de V em V são também conhecidas por métricas conjugadas ou hermitianas.

Pela definição de adjunta de uma transformação, é auto-adjunta se e somente se, $\forall u, v \in V$, $(Tu, v) = (u, Tv)$.

Uma matriz $A_{n \times n}$ com coeficientes em um corpo (real ou complexo) é auto-adjunta se a transformação $: K^n \rightarrow K^n$ for auto-adjunta.

Um fato de verificação imediata é de que uma transformação $T: V \rightarrow V$ é auto-adjunta se e somente se sua ma-

triz em relação a uma base ortonormal é simétrica conjugada (veja 4.3.8).

Toda transformação linear $T:V \rightarrow V$ onde V é um espaço vetorial complexo possui um auto-valor complexo. Se T é hermitiana, então este auto-valor é real, como provado no teorema abaixo:

TEOREMA 5.2.2 - Se $T:V \rightarrow V$ é uma transformação auto-adjunta sobre um espaço vetorial complexo e λ é um auto-valor de T , então $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Se λ é um auto-valor de T , $\exists v \in V, v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Por outro lado, $\lambda(v, v) = (\lambda v, v) = (Tv, v) = (v, Tv) = (v, \lambda v) = \bar{\lambda}(v, v)$ e como $v \neq 0$, $(v, v) \neq 0$ logo $\lambda(v, v) = \bar{\lambda}(v, v)$ acarreta que $\lambda = \bar{\lambda}$ ou seja, λ é real.

Este teorema mostra que todos os auto-valores de uma transformação $T:V \rightarrow V$ sobre um espaço vetorial complexo são reais. O resultado seguinte é mais forte:

TEOREMA 5.2.3 - Seja $T:V \rightarrow V$ uma transformação auto-adjunta sobre um espaço vetorial real. Então T possui um auto-valor real.

Demonstração: Tomemos a matriz de T em relação a uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ em V e ponhamos $A = [T]_{\beta}^{\beta}$. A matriz A , de coeficientes reais,

é uma transformação linear $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Como A é
étrica (por quê?), T_A será uma transformação auto-adjunta de \mathbb{C}^n , e pelo Teorema 5.2.2 T_A possuirá um auto-
lor real λ . Existe então $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $T_A(z) = \lambda z$.
escrevermos $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, então
 $x+iy) = T_A(x) + iT_A(y) = \lambda(x+iy) = \lambda x + i\lambda y$. Como
 $x), T_A(y)$, λx e λy são vetores do \mathbb{R}^n (matrizes
), então segue-se que $T_A(x) = \lambda x$ e $T_A(y) = \lambda y$. Como
0, temos que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Supondo que $x \neq 0$,
 (x_1, x_2, \dots, x_n) , vem que $v = \sum x_i v_i$ é um auto-valor
de T com auto-valor λ e a demonstração fica concluída.

TEOREMA 5.2.4 - Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear
auto-adjunta e λ_1, λ_2 são auto-valores
distintos de T , aos quais estão associados os auto-vetores
 v_1 e v_2 , então v_1 e v_2 são ortogonais.

Demonstração: Com efeito, usando que $Tv_1 = \lambda_1 v_1$, $Tv_2 =$
 $= \lambda_2 v_2$ obtemos que $\lambda_1(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) =$
 $= v_1, v_2) = (v_1, Tv_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$, pois
 $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Segue-se então que $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$ e como
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos $(v_1, v_2) = 0$, o que conclui a demonstração.

DEFINIÇÃO 5.2.5 - Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear
e $U \subseteq V$ é um subespaço invariante de
 V é dito ser invariante sob T se $T(U) \subseteq U$.

EXEMPLOS

5.2.6: Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear auto-adjunta tal que $T \circ T = T$ e considere $U_1 = \{v \in V \mid T(v) = v\}$. É óbvio que U_1 não é vazio e podemos mostrar que U_1 é um subespaço vetorial de V : se $v, v' \in U_1$, $k, k' \in K$, $T(kv + k'v') = kT(v) + k'T(v') = kv + k'v'$. Por outro lado, seja $U_2 = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$. É fácil também verificar que U_2 é um subespaço de V . Por outro lado, $U_1 \cap U_2 = 0$, pois se $v \in U_1 \cap U_2$, então $v \in U_1$, logo $T(v) = v$ e como $v \in U_2$, $T(v) = 0$, logo $v = 0$. Além disso, se $v \in V$, vem que $v = v - T(v) + T(v)$ com $v - T(v) \in U_2$, pois $T(v - T(v)) = T(v) - T \circ T(v) = T(v) - T(v) = 0$ e $T(v) \in U_1$, visto que $T \circ T(v) = T(v)$. Assim, por 3.5.11, $V = U_1 \oplus U_2$.

Em verdade, $U_2 = U_1^\perp$: se $v \in U_2$, $u \in U_1$, $u = Tu$ e $(u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = (u, 0) = 0$ e se $v \in U_1^\perp$, $u \in V$, então $(v, u) = (v, u - T(u) + T(u)) = (v, u - T(u)) + (v, T(u)) = (v, u - T(u))$, pois $T(u) \in U_1$, mas $(v, u - T(u)) = (v, u) - (v, T(u)) = (v, u) - (T(v), u)$ logo $(T(v), u) = 0$, $u \in V$ e assim $T(v) = 0$, logo $v \in U_2$.

Observe que U_1 e U_2 são invariantes sob T (prove isso!). Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, $\beta' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_t\}$ são bases ortonormais de U_1 e U_2 respectivamente, então $\beta'' = \{v_1, v_2, \dots, v_s, v'_1, v'_2, \dots, v'_t\}$ é uma base ortonormal para V e $[T]_{\beta''}^{\beta''} = [a_{ij}]$ é particularmente simples:

$= 0$, $i \neq j$, $a_{ii} = 1$ se $i \leq s$ e $a_{ii} = 0$, $i > s$. Dizemos que T é a projeção ortogonal sobre U_1 ao longo de U_2 .

.7: Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear e $V_1 \subseteq V$ é um subespaço de V invariante sob T , então $V_1 \subseteq V_1$ e podemos considerar T como uma transformação de V_1 em V_1 , que denotaremos por T_1 . Assim, $V_1 \rightarrow V_1$ e se $v \in V_1$, $T_1(v) = T(v) \in V_1$, pela própria definição de T_1 . Se V_2 é outro subespaço de V também invariante sob T e tal que $V = V_1 \oplus V_2$, podemos então escrever $T = T_1 \oplus T_2: V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$. Dizemos que V_1 e V_2 reduzem T .

REMA 5.2.8 - Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear auto-adjunta e λ um de seus auto-valores. Então o subespaço $(V_\lambda)^\perp$ é invariante sob T .

onstração: Se $v \in (V_\lambda)^\perp$, $(v, u) = 0$, $\forall u \in V_\lambda$ e assim $0 = \lambda(v, u) = (v, \lambda u) = (v, Tu) = Tv, u$, logo $Tv \in (V_\lambda)^\perp$ como queríamos demonstrar.

REMA 5.2.9 - Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear auto-adjunta sobre um espaço vetorial V dimensão n , então existe uma base ortonormal de V mada por auto-vetores de T e em relação à qual a matriz de T é diagonal. Os elementos da diagonal principal

da matriz serão exatamente os auto-valores de T .

Demonstração: A demonstração se faz por indução. Se $\dim V = 1$, o teorema é trivial (por quê?). Suponhamo-lo demonstrado para o caso em que a dimensão de V é estritamente menor que n e provemos que ele vale para o caso em que $\dim V = n$: seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um auto-valor de T e v_1, v_2, \dots, v_n uma base ortonormal para V_λ . Observe que $\dim V_\lambda \geq 1$, logo $\dim V_\lambda^\perp \leq n-1$. Já sabemos que o subespaço V_λ é invariante sob T . Como $\forall u, v \in V$, $(Tu, v) = (u, Tv)$, segue-se que T restrita a V_λ^\perp , $T_{V_\lambda^\perp}$, é uma transformação auto-adjunta. Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal u_1, u_2, \dots, u_t de V_λ^\perp em relação à qual a matriz de $T_{V_\lambda^\perp}$ é diagonal. Então, $\{v_1, v_2, \dots, v_s, u_1, u_2, \dots, u_t\}$ é uma base ortonormal para V (por quê?) em relação à qual a matriz de T goza da propriedade pedida.

DEFINIÇÃO 5.2.10 - Uma transformação $T: V \rightarrow V$, V um espaço vetorial sobre um corpo K é diagonalizável se existe uma base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal com coeficientes em K .

O Teorema 5.2.9 mostra que se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação auto-adjunta de um espaço vetorial real ou complexo então T é diagonalizável.

MPLO

.11: Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear e se $\forall u, v \in V \quad (T(u), v) = 0$, então $T = 0$ (faça $T(u)$). Por outro lado, se V é um espaço vetorial plexo e $(T(v), v) = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$.

efeito, se $c_1, c_2 \in C$ e $u, v \in V$, então

$$c_1 u + c_2 v, c_1 u + c_2 v = (c_1 T(u) + c_2 T(v), c_1 u + c_2 v) = \\ |c_1|^2 (T(u), u) + |c_2|^2 (T(v), v) + c_1 \bar{c}_2 (T(u), v) + \\ c_1 c_2 (T(v), u) \text{ logo, pela hipótese,}$$

$$0 = c_1 \bar{c}_2 (T(u), v) + \bar{c}_1 c_2 (T(v), u)$$

azendo $c_1 = c_2 = 1$ vem que

$$0 = (T(u), v) + (Tv, u) ;$$

$c_1 = i, c_2 = 1$, temos

$$0 = i(Tu, v) - i(Tv, u)$$

estas duas equações, segue-se que $(Tu, v) = 0, \forall u, v \in V$ assim $T = 0$.

Observe que se V é um espaço real, este resulta-
obviamente falso (tome uma rotação de 90° !). Para
cos reais vale o seguinte: se $T: V \rightarrow V$ é auto-adjunta
 $(Tv, v) = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$. Com efeito,
 $(Tu+v, u+v) = (Tu, v) + (Tv, u) + (Tu, u) + (Tv, v)$, logo, pe-
ipótese, $(Tu, v) + (Tv, u) = 0$ e como T é auto-ad-
junta $2(Tu, v) = 0$ e assim $T = 0$.

EXERCÍCIO

5.2.12: Se T_1 e T_2 são transformações auto-adjuntas de um espaço vetorial V é verdade que $T_1 T_2 = T_2 T_1$? Prove isso ou apresente um contra-exemplo.

A situação discutida neste exercício fica perfeitamente esclarecida pelo exemplo abaixo:

EXEMPLO

5.2.13: Sejam T_1 e T_2 transformações auto-adjuntas de um espaço vetorial V . Então, existe uma base orthonormal β de V tal que $[T_1]_\beta^S$ e $[T_2]_\beta^S$ são matrizes diagonais se e somente se $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Com efeito, seja $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ um auto-valor de T_1 . Então, o subespaço V_{λ_1} é invariante sob. T_2 : se $v \in V_{\lambda_1}$, então $T_1(T_2(v)) = T_2(T_1v) = T_2(\lambda_1 v) = \lambda_1(T_2 v)$ logo $T_2 v \in V_{\lambda_1}$. Então, existe $v_1 \in V_{\lambda_1}$ que é auto-vetor de T_2 e como todos os elementos de V_{λ_1} são auto-vetores de T_1 concluimos que T_1 e T_2 possuem um auto-vetor comum, v_1 . Considere agora o subespaço $V_1 = [v_1]^S$ que é invariante sob T_1 e T_2 (por quê?). Podemos, então, como na demonstração de 5.2.9 aplicar indução sobre a dimensão do espaço para concluir que existe uma base orthonormal de V formada por vetores que são auto-vetores de T_1 e T_2 simultaneamente. A afirmação recíproca é trivialmente verificada.

3 - Transformações unitárias

Neste parágrafo estudamos uma generalização das rotações do plano.

DEFINIÇÃO 5.3.1 ~ Seja V um espaço real ou complexo, uma transformação linear $T:V \rightarrow V$ é unitária se $TT^* = T^*T = I$.

Ou seja, uma transformação é unitária se sua adjunta é sua inversa, $T^* = T^{-1}$.

Uma matriz A com coeficientes em um corpo K (reais ou complexos) é unitária se a transformação $:K^n \rightarrow K^n$ for unitária.

EXERCÍCIOS

3.2: Mostre que uma rotação do plano é uma transformação unitária.

3.3: Se $U_1, U_2:V \rightarrow V$ são transformações unitárias mostre que $U_1 \cdot U_2$ é uma transformação unitária.

3.4: Demonstre que a inversa de uma transformação unitária é unitária.

Se V é um espaço vetorial real, as transformações unitárias de V são tradicionalmente conhecidas como ortogonais.

O lema abaixo apresenta várias caracterizações para as transformações unitárias:

MA 5.3.5 - Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear, então as condições abaixo são equivalentes:

- 1) T é unitária
- 2) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais
- 3) T preserva o produto interno, i.e., $\forall u, v \in V, (Tu, Tv) = (u, v)$
- 4) T preserva a norma i.e., $\forall v \in V, \|Tv\| = \|v\|$

Prova: Provemos que 1) \Rightarrow 2): Se $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal, seja

$\beta' = \{Te_1, Te_2, \dots, Te_n\}$; como T é inversível, β' é uma base de V ; de $\|Te_i\|^2 = (Te_i, Te_i) = (e_i, T^*Te_i) = (e_i, e_i) = \|e_i\|^2 = 1$ e $(Te_i, Te_j) = (e_i, T^*Te_j) = (e_i, e_j)$, vemos que β' é ortonormal. Para ver que 2) \Rightarrow 3), sejam $u, v \in V$, $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal e $u = \sum x_i e_i, v = \sum y_j e_j$, donde $Tu = \sum x_i Te_i, Tv = \sum y_j Te_j$, assim $(Tu, Tv) = (\sum x_i Te_i, \sum y_j Te_j) = \sum_{i,j} x_i \bar{y}_j (Te_i, Te_j) = \sum_i x_i \bar{y}_i$, visto que os vetores Te_i são ortonormais. Mas $(u, v) = (\sum x_i e_i, \sum y_j e_j) = \sum x_i \bar{y}_i$, logo T preserva o produto interno. Por outro lado, $\|Tv\|^2 = (Tv, Tv) = (v, v) = \|v\|^2$ o que mostra 3) \Rightarrow 4). Se $\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in V$,

Então $(Tv, Tv) = (v, v)$, $\forall v \in V$, ou seja, $(T^*Tv, v) = (v, v)$
 $v \in V$ ou ainda $((T^*T-I)v, v) = 0$; mas como $(T^*T-I)^* =$
 $I^*(T^*)^* = I^* = T^*T-I$ vemos que (T^*T-I) é auto-adjunta
e podemos aplicar os resultados do Exemplo 5.2.11 para
concluir que $T^*T = I$; como T é linear, $T^* = T^{-1}$, o
é conclui a demonstração.

EXERCÍCIO

3.6: Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação unitária, β é
uma base ortonormal de V , $x_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ é a i -ésima
coluna de $T\beta$, mostre que $(x_i)^t x_i = 1$ e $(x_i)^t x_j =$
 0 , $i \neq j$.

EMPLO

3.7: Seja V um espaço vetorial real ou complexo e
 $T: V \rightarrow V$ uma função (a priori não linear!)
bijetora e tal que $(Tu, Tv) = (u, v)$, $\forall u, v \in V$. Então,
é linear, logo unitária. Em primeiro lugar, T é inversível: se $u \neq v$, $\|Tu - Tv\|^2 = \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - (Tu, Tv) -$
 $(Tv, Tv) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - (u, v) - (v, u) = \|u - v\|^2 \neq 0$.
Assim, T é uma função bijetora, logo inversível. Além
disso, de $(Tu, Tv) = (u, v)$, como $u = T^{-1}u'$, $v = T^{-1}v'$
para $u', v' \in V$, segue-se que, $\forall u', v' \in V$, $(u', v') =$
 $(T^{-1}u', T^{-1}v')$ e vem que $(Tu, v) = (T^{-1}Tu, T^{-1}v) =$
 $(u, T^{-1}v)$. Para provar que T é linear, se $v, u_1, u_2 \in V$

$k_1, k_2 \in K$, $(Tu_1, v) = (u_1, T^{-1}v)$, $(Tu_2, v) = (u_2, T^{-1}v)$ logo
 $(k_1 Tu_1, v) + (k_2 Tu_2, v) = (k_1 u_1 + k_2 u_2, T^{-1}v) = (k_1 u_1 + k_2 u_2, v)$
 $= (T(k_1 u_1 + k_2 u_2), v)$ e assim, $\forall v \in V$, $(k_1 Tu_1 + k_2 Tu_2, v) =$
 $= (T(k_1 u_1 + k_2 u_2), v)$ donde $T(k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 T(u_1) +$
 $+ k_2 T(u_2)$ e fica assim demonstrado que T é uma transformação linear unitária.

Para espaços vetoriais reais podemos dizer algo

mais:

EXEMPLO

5.3.8: Se V é um espaço vetorial real e $T: V \rightarrow V$ é uma função (a priori não linear!) tal que

$T(0) = 0$ e $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$, $\forall u, v \in V$, então T é uma transformação linear ortogonal. Com efeito, como $T0 = 0$, então $\|Tu\| = \|u\|$ e $\|Tu - Tv\|^2 = \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - (Tu, Tv) = (Tv, Tu) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(Tu, Tv)$. Mas como $\|Tu - Tv\|^2 = \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u, v)$, segue-se que $(Tu, Tv) = (u, v)$ $\forall u, v \in V$. Se $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base orthonormal de V , vemos assim que $\beta' = \{Te_1, Te_2, \dots, Te_n\}$ é também uma base orthonormal para V e assim

$Tv = (Tv, Te_i)Te_i = (v, e_i)Te_i$. Se definirmos a transformação linear $U: V \rightarrow V$ por $U(e_i) = T(e_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, U será ortogonal (por quê?) e $Tv = \sum (v, e_i)Te_i = \sum (v, e_i)Ue_i = U(\sum (v, e_i)e_i) = Uv$ $\forall v \in V$, logo $Uv = Tv$ e assim T é uma transformação linear ortogonal.

EXERCÍCIO

5.3.9: Seja V um espaço vetorial real e $T:V \rightarrow V$ uma função tal que, $\forall u, v \in V$, $\|Tu-Tv\| = \|u-v\|$. Então, é uma transformação linear ortogonal seguida de uma translação de V (Sugestão: Considere $S:V \rightarrow V$ definida por $S(v) = T(v) - T(0)$ e aplique 5.3.8).

Já sabemos que uma transformação linear auto-adjunta $T:V \rightarrow V$ em um espaço vetorial real possui auto-valores e existe uma base ortonormal de V formada por auto-vetores de T . É fácil ver que uma transformação linear ortogonal não possui necessariamente auto-valores (considere uma rotação do plano). Passamos agora a estudar as propriedades dos auto-valores e dos auto-vetores de uma transformação unitária.

TEOREMA 5.3.10 - Seja V um espaço vetorial complexo. Se $T:V \rightarrow V$ é uma transformação linear unitária e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de T , então $|\lambda| = 1$.

Prova: Tome $v \neq 0$ um auto-vetor associado a λ e então $(Tv, Tv) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda \bar{\lambda} (v, v)$; mas $(v, v) = 1$, logo $\lambda \bar{\lambda} (v, v) = 1$ e como $(v, v) \neq 0$ temos que $\lambda \bar{\lambda} = 1$ ou seja, $|\lambda| = 1$.

TEOREMA 5.3.11 - Se $T:V \rightarrow V$ é uma transformação linear unitária e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de T ,

Demonstração: Seja $v \in V_\lambda^\perp$, então, se $u \in V_\lambda$, $(v, u) = 0$, logo $(Tv, Tu) = (v, u) = 0$; mas $(Tv, Tu) = (Tv, \lambda u) = \bar{\lambda}(Tv, u)$ e assim, como $\bar{\lambda} \neq 0$, $(Tv, u) = 0$, o que queríamos demonstrar.

Podemos agora demonstrar o teorema que nos interessa:

TEOREMA 5.3.12 - Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear unitária de um espaço vetorial complexo, então existe uma base ortonormal de V formada por auto-vetores de T .

Demonstração: Procederemos, mais uma vez, por indução sobre a dimensão de V : seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um auto-valor de T e tomemos uma base ortonormal

$\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ para V_λ . Como $\dim V_\lambda^\perp < \dim V$ e V_λ^\perp é invariante sob T , a hipótese de indução nos garante que existe uma base ortonormal $\beta' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_t\}$ de V_λ^\perp formada por auto-vetores de T . Então

$e_1, e_2, \dots, e_s, e'_1, e'_2, \dots, e'_t\}$ é uma base ortonormal de V com a propriedade pedida.

4 - Movimentos rígidos no plano e no espaço

Neste parágrafo, daremos uma descrição completa dos movimentos rígidos no plano e no espaço, usando os resultados sobre as transformações unitárias encontrados em

3.

DEFINIÇÃO 5.4.1 - Dado um espaço vetorial V , um movimento rígido em V é uma função $f:V \rightarrow V$ que preserva distâncias, i.e., $\forall u, v \in V$, $\|f(u)-f(v)\| = \|u-v\|$.

Como uma consequência imediata de 5.3.9 temos o resultado abaixo:

TEMA 5.4.2.- Se V é um espaço vetorial real e $f:V \rightarrow V$ é um movimento rígido, então f é uma transformação linear ortogonal seguida de uma translação de $f(0)$.

Desta maneira, o estudo dos movimentos rígidos em um espaço vetorial real V se resume em estudar as transformações lineares ortogonais definidas em V .

EXERCÍCIOS

4.3: Se $V = \mathbb{R}^2$ e T é definida por $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ qual é o determinante da matriz de T ? Sejam as

transformações do plano definidas pelas matrizes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

respectivamente. Identifique-as geométricamente. Quais de
elas são rotações? Quais seus determinantes?

5.4.4: Verifique, dentre as transformações apresentadas
em 5.4.3 quais as que possuem auto-valores e ache
os auto-vetores correspondentes.

Seja agora $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal
do plano. Então, se $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ vem que
 $Tv_1 = (a_1, a_2)$, $Tv_2 = (b_1, b_2)$ e $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$, $\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 1$,
 $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, pois T transforma bases orthonormais em
bases orthonormais. Mas então $|a_1|$, $|a_2|$, $|b_1|$, $|b_2|$ são
números menores ou iguais a 1 e existe $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$
tal que $a_1 = \cos \theta$, $a_2 = \sin \theta$ e vemos que $\frac{b_2}{b_1} = \operatorname{tg} \theta$
onde ou $b_1 = \sin \theta$, $b_2 = -\cos \theta$ ou $b_1 = -\sin \theta$, $b_2 = \cos \theta$.
Assim, há duas possibilidades para T:

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix}$$

Mas

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

uma reflexão seguida de uma rotação.

EXERCÍCIO

4.5: Mostre que as transformações de 5.4.3 se enquadram todas nos dois tipos obtidos acima.

Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação ortogonal, então T possui pelo menos um auto-valor real λ , visto que $\det(T-\lambda I)$ é um polinômio do 3º grau, que sempre tem uma raiz real. Seja v_1 um auto-vetor de norma 1 associado a λ . Já sabemos que $[v_1]^\perp$ é invariante sob T (comparar com 5.3.11), logo T restrita a $[v_1]^\perp$ é uma transformação ortogonal do plano, caso já estudado. Tomando na base ortonormal $\{v_2, v_3\}$ para $[v_1]^\perp$, vem que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal para o \mathbb{R}^3 em relação à qual a matriz de T será

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, |\lambda| = 1,$$

em vista dos resultados para o plano. Observe que

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $|\lambda| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$; é fácil então escrever todas as transformações ortogonais de \mathbb{R}^3 : rotações no espaço em torno de uma reta, reflexão sobre um pla-

no, reflexão sobre um plano seguida de rotação em torno da normal ao plano, reflexão em relação a um ponto.

5.5 - Transformações normais

Neste parágrafo, caracterizamos todas as transformações lineares de um espaço vetorial complexo V para as quais existe uma base ortonormal de V em relação à qual a matriz da transformação é diagonal.

DEFINIÇÃO 5.5.1 - Seja V um espaço complexo; uma transformação $T:V \rightarrow V$ é normal se e somente se $TT^* = T^*T$.

Como exemplo de transformações normais temos as transformações auto-adjuntas e as transformações unitárias.

Uma matriz $A_{n \times n}$ com coeficientes em \mathbb{C} é normal se a transformação $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ for normal.

EXERCÍCIO

5.5.2: Dê um exemplo de uma transformação normal que não é auto-adjunta ou unitária.

LEMA 5.5.3 - Sejam T_1 e T_2 transformações lineares de

em V que comutam, ou seja, $T_1 T_2 = T_2 T_1$, e λ_1 um auto-valor de T_1 . Então V_{λ_1} é invariante sob T_2 .

onstração: Seja $v \in V_{\lambda_1}$; então, $T_1 v = \lambda_1 v$. Por outro lado, $T_1(T_2 v) = T_2(T_1 v) = T_2(\lambda_1 v) = \lambda_1 T_2 v$, seja, $T_2 v \in V_{\lambda_1}$, o que queríamos demonstrar.

OLÁRIO 5.5.4 - Dadas duas transformações lineares

$$T_1, T_2 : V \rightarrow V \quad (V \text{ um espaço complexo})$$

s.t. $T_1 T_2 = T_2 T_1$, as duas possuem um auto-vetor comum, i.e., $\exists v \in V, v \neq 0$ tal que $T_1 v = \lambda_1 v$ e $T_2 v = \lambda_2 v$.

onstração: Com efeito, pelo Lema 5.5.3, dado um auto-valor λ_1 de T_1 , V_{λ_1} é invariante sob T_2 , mas então $\exists v \in V_{\lambda_1}$ que é auto-vetor de T_2 (por quê?) e a demonstração fica concluída (por quê?).

Podemos, agora, passar ao teorema mais importante desse parágrafo:

TEOREMA 5.5.5 - Dada uma transformação normal $T: V \rightarrow V$,

em V complexo, existe uma base ortonormal de V tal que $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal; reciprocamente, se existe uma base ortonormal β de V em relação à qual T é diagonal, então T é normal.

onstração: Seja $T: V \rightarrow V$ normal; como $TT^* = T^*T$, sa-

bemos que T e T^* admitem um auto-vetor comum v_1 . O subespaço $V_1 = [v_1]^\perp$ de V é invariante sob T e T^* ; com efeito, se $v \in V_1$, $(v, v_1) = 0$, mas $T(v, v_1) = (v, T^*v_1) = \bar{\lambda}(v, v_1) = 0$ visto que v_1 é auto-vetor de T^* . Por outro lado, $(T^*v, v_1) = (v, T^*v_1) = \bar{\lambda}^*(v, v_1) = 0$. Assim, T restrito a V_1 é uma transformação normal e podemos agora, como já feito outras vezes, aplicar indução sobre a dimensão do espaço para concluir o teorema.

A afirmação recíproca é de demonstração trivial (faça-a!).

EXERCÍCIO

5.5.6: Na demonstração acima, prove que $\lambda^* = \bar{\lambda}$.

CAPÍTULO 6

FORMAS BILINEARES

Mais uma vez, todos os espaços vetoriais considerados serão reais ou complexos.

- Formas bilineares - definição e generalidades

DEFINIÇÃO 6.1.1 - Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Uma forma bilinear φ em V é uma função $\varphi: V \times V \rightarrow K$ tal que

$$\forall u_1, u_2, v \in V, \varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$$

$$\forall u, v_1, v_2 \in V, \varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$$

$$\forall \lambda \in K, u, v \in V, \varphi(\lambda u, v) = \lambda \varphi(u, v), \varphi(u, \lambda v) = \bar{\lambda} \varphi(u, v)$$

Note que se K é o corpo real, então $\varphi(u, \lambda v) = \varphi(u, \bar{v})$ pois um número complexo é real se e só se é igual ao seu conjugado.

EXERCÍCIOS

2: Um produto interno em V é uma forma bilinear. Se $\varphi: V \times V \rightarrow K$ é uma forma bilinear tal que $\varphi(v, u) \geq 0$,

$\in V$ e $\varphi(v, u) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, dizemos que φ é positiva-definida. Assim, os produtos internos em V são exatamente as formas positiva-definidas em V .

3: Se φ_1, φ_2 são funcionais lineares em V , V real, podemos definir uma forma bilinear $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(u, v) = \varphi_1(u)\varphi_2(v)$. Caso V seja complexo $\varphi(u, v) = \varphi_1(u)\overline{\varphi_2(v)}$ definirá uma forma bilinear em V .

4: O Exemplo 4.1.10 dá um critério para que a forma $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(u, v) = X \cdot AY^t$, onde $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, seja positiva-definida.

5: Seja, mais uma vez, $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e ponha $\varphi(u, v) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2$. Imediato verificar que φ é uma forma bilinear. Por outro lado. $2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} (y_1, y_2)$. A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ é a matriz da forma φ em relação à base canônica de \mathbb{R}^2 .

Se $\varphi: V \times V \rightarrow K$ é uma forma bilinear e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V , $u = \sum x_i v_i$, $v = \sum y_j v_j$, então $\varphi(u, v) = \varphi(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j) = \sum_i x_i \varphi(v_i, \sum_j y_j v_j) = \sum_i x_i (\sum_j \bar{y}_j \varphi(v_i, v_j)) = \sum_{i,j} x_i \bar{y}_j \varphi(v_i, v_j)$. Se $A = (a_{ij})$ a matriz tal que $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

= (y_1, \dots, y_n) , então $\varphi(u, v) = X\bar{Y}^t$. A é chamada de matriz de φ na base β .

Se $T: V \rightarrow V$ é uma transformação linear e $(,)$ é o produto interno em V , então verifica-se, facilmente, que a função $\varphi: V \times V \rightarrow K$ definida por $\varphi(u, v) = (Tu, v)$ é uma forma bilinear. O fato seguinte é mais interessante:

EMA 6.1.6 - Seja $\varphi: V \times V \rightarrow K$ uma forma bilinear. Então, existe uma única transformação linear $\varphi_u: V \rightarrow V$ tal que $\varphi(u, v) = (\varphi_u(u), v)$, $\forall u, v \in V$.

Prova: Fixemos u e consideremos a função

$\varphi_u: V \rightarrow K$ dada por $\varphi_u(v) = \overline{\varphi(u, v)}$. Vemos então que $\varphi_u(v_1 + v_2) = \overline{\varphi(u, v_1 + v_2)} = \overline{\varphi(u, v_1)} + \overline{\varphi(u, v_2)} = \varphi_u(v_1) + \varphi_u(v_2)$ e $\varphi_u(\lambda v) = \overline{\varphi(u, \lambda v)} = \overline{\lambda \varphi(u, v)} = \lambda \overline{\varphi(u, v)} = \lambda \varphi_u(v)$, que mostra ser φ_u um funcional linear. Mas então, pelo teorema de representação dos funcionais lineares, existe um único u' tal que $\varphi_u(v) = (v, u')$, $\forall v \in V$. Mas $\varphi(v) = \overline{\varphi(u, v)}$ e assim $\varphi(u, v) = (\overline{v}, u') = (u', v)$. A função $T: V \rightarrow V$ definida por $u \mapsto u'$ é linear. Para provar isso, devemos mostrar que $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ e $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall \lambda \in K$, $u, u_1, u_2 \in V$. Mas $\varphi(u_1, v) = (Tu_1, v)$, $\varphi(u_2, v) = (Tu_2, v)$ e $\varphi(u_1 + u_2, v) = (T(u_1 + u_2), v)$, $\forall v \in V$. Como $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$, vem que $(T(u_1 + u_2), v) = (T(u_1), v) + (T(u_2), v) = 0$, $\forall v \in V$ ou seja

$\langle u_1 + u_2 \rangle - T(u_1) - T(u_2), v \rangle = 0, \forall v \in V$ e assim
 $(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$. De maneira análoga, vemos que
 $(\lambda u) = \lambda T(u)$ e o teorema fica demonstrado.

Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V
 $u = \sum x_i v_i$, $v = \sum y_j v_j$, então $\varphi(u, v) = X T]_{\beta}^{\beta} Y^t$, com
 $= (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Uma verificação interessante é a seguinte: se β' é outra base ortonormal, X_1 e Y_1 são as matrizes das coordenadas de u e v em relação a β' , então $\varphi(u, v) = X_1 T]_{\beta'}^{\beta'} Y_1^t$. Mas $T]_{\beta'}^{\beta'} = I]_{\beta'}^{\beta} T]_{\beta}^{\beta} I]_{\beta}^{\beta'}$ e assim $\varphi(u, v) = X_1 I]_{\beta'}^{\beta} T]_{\beta}^{\beta} I]_{\beta}^{\beta'} Y_1^t = (X_1 I]_{\beta'}^{\beta}) (T]_{\beta}^{\beta}) I]_{\beta}^{\beta'} Y_1^t$. Como $I]_{\beta}^{\beta} = X$, $Y_1 I]_{\beta'}^{\beta} = Y$ e $I]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz unitária, então $(I]_{\beta'}^{\beta})^{-1} = I]_{\beta'}^{\beta} = (I]_{\beta}^{\beta})^t$ e assim $X_1 I]_{\beta'}^{\beta} (T]_{\beta}^{\beta}) (I]_{\beta}^{\beta} Y_1^t) = X (T]_{\beta}^{\beta}) (I]_{\beta}^{\beta} Y_1^t) = X T]_{\beta}^{\beta} (Y_1 I]_{\beta}^{\beta})^t = X T]_{\beta}^{\beta} Y^t$.

Um raciocínio inteiramente análogo ao de 6.1.6 permite provar o seguinte:

LEMA 6.1.7 - Seja $\varphi: V \times V \rightarrow K$ uma forma bilinear. Então, existe uma única transformação linear $s_{\varphi}: V \rightarrow V$ tal que, $\forall u, v \in V$, $\varphi(u, v) = (u, s_{\varphi}(v))$.

EXERCÍCIO

6.1.8: Demonstre, com detalhes, o Lema 6.1.7.

Mas se $\varphi(u, v) = (T_\varphi(u), v) = (u, S_\varphi(v))$, $\forall u, v \in V$,
tão S_φ é a adjunta de T_φ ou seja, $\varphi(u, v) = (T_\varphi(u, v)) = (u, T_\varphi^*(v)) = (S_\varphi^*(u), v) = (u, S_\varphi(v))$, $\forall u, v \in V$.

DEFINIÇÃO 6.1.9 - Se V é um espaço vetorial real, uma forma bilinear $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica se $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$, $u, v \in V$. Se V é um espaço complexo, e $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é bilinear, φ é hermitiana se $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}$.

EXEMPLO

L.10: Se $V = \mathbb{R}^2$ e $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 4x_1y_2 + 6x_2y_2$, vê-se facilmente que φ é uma forma bilinear simétrica. O mesmo não acontece com a forma bilinear $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_2$.

DEFINIÇÃO 6.1.11 - Seja $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica, então a forma quadrática associada a φ é a função $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(v) = \varphi(v, v)$, $\forall v \in V$.

Por exemplo, se $v = (x_1, x_2)$, a forma quadrática associada com o primeiro exemplo de 6.1.10 é $f(v) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$.

Observe que, para definirmos uma forma quadrática

m um espaço vetorial real partimos de uma forma bilinear simétrica. A razão desta exigência é que, então, podemos reconstruir a forma bilinear original, a partir da forma quadrática associada a ela, como mostrado a seguir:

TEOREMA 6.1.12 - Seja $f:V \rightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica $\varphi:V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Então φ fica univocamente determinada por f .

Demonstração: É fácil ver que $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}[f(u+v)-f(u)-f(v)]$,
pois $f(u+v) = \varphi(u+v, u+v) = \varphi(u, u+v) +$
 $+ \varphi(v, u+v) = \varphi(u, u) + \varphi(v, v) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) = f(u) +$
 $+ \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + f(v)$ e como φ é simétrica segue-se
que $f(u+v) - f(u) - f(v) = 2\varphi(u, v)$ ou seja, o valor de
 $\varphi(u, v)$ fica perfeitamente determinado pelos valores da
forma quadrática associada a φ .

A situação para o caso complexo é ligeiramente diferente, e por isso este caso é tratado em separado:

DEFINIÇÃO 6.1.13 - Se $\varphi:V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma bilinear a forma quadrática associada a φ é a função $f:V \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(v) = \varphi(v, v)$, $v \in V$.

Observe que não exigimos que φ seja hermitiana. Compare o teorema abaixo com seu análogo no caso real:

TEOREMA 6.1.14 - Se $f:V \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma quadrática asso-

ada à forma bilinear $\varphi: V \times V \rightarrow C$, então φ fica univocamente determinada por f .

Prova: Consideremos a expressão

$$B(u, v) = f(u+v) + if(u+iv) - f(u-v) - if(u-iv).$$

Então, $B(u, v) = \varphi(u+v, u+v) + i\varphi(u+iv, u+iv) - \varphi(u-v, u-v) - i\varphi(u-iv, u-iv) = 4\varphi(u, v)$ e, assim, o valor de $\varphi(u, v)$ fica completamente determinado pelos valores da forma quadrática associada a φ .

EXEMPLOS

1.15: Considere a forma quadrática $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(u) = 6x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2 \text{ e as formas bilineares}$$

e φ_2 definidas por

$$\varphi_1(u, v) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_2(u, v) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

emos então que $\varphi_1(u, u) = \varphi_2(u, u) = f(u), \forall u \in \mathbb{R}^2$ e este exemplo mostra a necessidade de exigir que, no caso real, a forma bilinear seja simétrica, de outra maneira a forma quadrática associada a ela.

1.16: Seja, por exemplo, a forma quadrática $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{dada por } f(x, y, z) = 3x^2 + 3xy + 7y^2 - 4yz - z^2.$$

ntão, a forma bilinear simétrica φ de que provém f é dada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{seja } \varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = (x_1, y_1, z_1) A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Em geral, se $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática e

$$= \sum x_i v_i, \text{ então } f(v) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \leq j}} a_{ij} x_i x_j$$

por quê?) e a forma bilinear simétrica à qual f está associada é definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & \cdots & a_{1n}/2 \\ a_{12}/2 & \ddots & & a_{2n}/2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{1n}/2 & a_{2n}/2 & & a_{nn}/2 \end{pmatrix}$$

A reconstituição de uma forma bilinear $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

partir da forma quadrática $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ associada a ela

não apresenta problemas: os coeficientes da matriz são

obtidos imediatamente da expressão $f(v) = f(x_1, \dots, x_n) =$

$$= \sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i \bar{x}_j.$$

Já sabemos que transformações lineares auto-adjun-

são diagonalizáveis em bases ortonormais. Passamos, ora, a ver que contribuição o teorema espectral traz ao estudo das formas quadráticas. Antes, alguns fatos:

DEFINIÇÃO 6.1.17 - Uma forma quadrática $f:V \rightarrow C$ é dita hermitiana se a forma bilinear φ à qual está associada é hermitiana.

LEMMA 6.1.18 - Uma forma quadrática $f:V \rightarrow C$ é hermitiana se e somente se, $\forall v \in V$, $f(v)$ é real.

Prova: Por 6.1.14, usando a identidade acima empregada, vemos imediatamente que $\varphi(u,v) = \overline{\varphi(v,u)}$ (verifique isso!). Por outro lado, se f é hermitiana, então de $\varphi(u,v) = \overline{\varphi(v,u)}$, $\forall u,v \in V$, segue-se que $\varphi(v,v) = \overline{\varphi(v,v)}$ logo $f(v) = \varphi(v,v)$ é real.

EXERCÍCIO

1.19: Complete a demonstração esboçada em 6.1.18.

Serviço: este lema não é necessário na demonstração do teorema seguinte.

Podemos, agora, passar ao teorema importante do parágrafo:

TEOREMA 6.1.20 - Seja $f:V \rightarrow K$ uma forma quadrática qualquer se $K = R$ e hermitiana se $K = C$.
Então existe uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de

tal que, $\forall v \in V$, $v = \sum x_i v_i$, temos $f(v) = \sum \lambda_i x_i \bar{x}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$ (observe que se $K = \mathbb{R}$, $f(v) = \sum \lambda_i x_i^2$).

Demonstração: Se $K = \mathbb{R}$, f provém de uma forma bilinear simétrica φ (por quê?) e assim, se $\varphi(u,v) = (T(u),v)$, $\forall u,v \in V$, então T é auto-adjunta; mas, então, pelo teorema espectral, existe uma base ortonormal $\beta = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ de V formada por auto-vetores de T . Se $v = \sum x_i v_i$ e $Tv_i = \lambda_i v_i$, então $f(v) = \varphi(v,v) = (T(v),v) = (T(\sum x_i v_i), \sum x_j v_j) = \sum_{i,j} \lambda_i x_i x_j (v_i, v_j) = \sum_i \lambda_i x_i^2$, pois β é ortonormal. Se $K = \mathbb{C}$ então f é associada a uma forma hermitiana φ logo se $\varphi(u,v) = (Tu,v)$, $\forall u,v \in V$, então T é auto-adjunta e a demonstração prossegue como antes, e obtemos finalmente que $f(v) = \varphi(v,v) = \sum_i \lambda_i x_i \bar{x}_i$.

EXEMPLO

6.1.21: Considere a forma quadrática $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Achamos facilmente que f provém da forma bilinear simétrica definida por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Uma base ortonormal em relação à qual A se torna diagonal é $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e em relação a esta base f será dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2$.

EXERCÍCIO

22: Complete os detalhes de 6.1.21.

- A equação geral do segundo grau

Passamos, agora, a aplicar os resultados de 6.1
estudo das quádricas e das cônicas.

INTRODUÇÃO 6.2.1 - Uma equação do 2º grau com coeficientes reais é uma expressão da forma

$$x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2b_1 x_1 x_2 + 2b_2 x_1 x_3 + 2b_3 x_2 x_3 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + d = 0.$$

INTRODUÇÃO 6.2.2 - Uma quádriga é o lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^3 cujas coordenadas (x_1, x_2, x_3) satisfazem uma equação do 2º grau.

Observe que nem toda equação do 2º grau determina lugar geométrico não vazio do espaço: por exemplo, $y^2 + z^2 + 1 = 0$; por outro lado, o lugar determinado por $y^2 + z^2 = 0$ é um único ponto, a origem.

EXERCÍCIO (*)

3: Identifique no \mathbb{R}^3 os lugares geométricos definidos pelas equações abaixo:

estes exercícios são exemplos do livro "Vetores e Matrizes" de N.M. dos Santos (IMPA, 1970), a quem agradecemos permissão para usá-los.

a) $x^2 = 4y$

b) $x^2 + y^2 = 4z$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a, b, c > 0$

e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a, b, c > 0$

f) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a, b, c > 0$

g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$

h) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$

i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e v é o vetor de \mathbb{R}^3 cujas coor-

nadas na base canônica β são dadas por X , então pondo

$$f(v) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2b_1 x_1 x_2 + 2b_2 x_1 x_3 + 2b_3 x_2 x_3 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + d,$$

vemos que

$$f(v) = X^t A X + B X + d, \quad \text{onde}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (c_1, c_2, c_3)$$

Por 6.1.20, existe uma base ortonormal β' do \mathbb{R}^3 tal que $P^{-1}AP$ é diagonal, onde $P = [I]_{\beta'}^{\beta}$; se $Y = [v]_{\beta'}$, en-

$Y = P^{-1}X$ donde $X = PY$, $X^t = Y^t P^t$ logo

$$f(v) = Y^t P^t A P Y + B P Y + d$$

e $P^t A P$ é diagonal (lembre-se de que $P^{-1} = P^t$) e
ainda podemos enunciar:

TEOREMA 6.2.4 - Dada uma equação geral do segundo grau
 $X^t AX + BX + d$, existe uma mudança ortogonal de eixos tal que $X^t AX + BX + d = Y^t CY + DY + d$, onde
é uma matriz diagonal.

Observe, além disso que se $X = Z + T$, uma transformação, então $X^t AX + BX + d = (Z^t + T^t)A(Z + T) + B(Z + T) + d =$
 $Z^t AZ + NZ + e$ e assim vemos que uma translação não altera a parte quadrática homogênea da equação do 2º grau
 $X^t AX + BX + d$.

Consideremos agora a equação $Y^t CY + DY + d +$
 $d_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + d$. Se
 $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$, ponhamos $z_i = y_i + \frac{d_i}{2c_i}$ e então
 $z_i^2 + d_i y_i = c_i z_i^2 - \frac{2d_i^2}{4c_i}$ ou seja, se $c_i \neq 0$, é possível
minhar o termo linear em y_i .

Desta maneira, podemos enunciar

TEOREMA 6.2.5 - Toda equação do 2º grau, $X^t AX + BX + d$,
pode ser transformada, por meio de um movimento rígido do \mathbb{R}^3 (uma transformação ortogonal segui-

da de uma translação), em um dos tipos

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 + k = 0 \quad c_1, c_2, c_3 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + d_3x_3 + k = 0 \quad c_1, c_2 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3 + k = 0 \quad c_1 \neq 0$$

Estas equações podem ainda ser simplificadas, de acordo com o lema abaixo:

LEMA 6.2.6 - Dada uma expressão do tipo $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + k$ é possível, por meio de uma transformação orthonormal de bases, levá-la à forma $fy_1 + k = 0$.

Demonstração: Seja $f = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ e P a matriz de uma transformação orthonormal que leva $e_1 = (1, 0, 0)$ em $e_1' = (\frac{d_1}{f}, \frac{d_2}{f}, \frac{d_3}{f})$. Assim, a primeira coluna de P é o vetor e_1' . Como $X = PY$, então $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + k = f e_1' \cdot X + k = f \cdot e_1' \cdot PY + k = f g_1 + k$ (por quê?).

EXERCÍCIO

6.2.7: Interprete, geométricamente, o Lema 6.2.6.

Podemos, enfim, escrever:

TEOREMA 6.2.8 - Toda equação do 2º grau pode ser transformada, por movimentos rígidos do \mathbb{R}^3 , em uma das formas

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 + k = 0 \quad c_1, c_2, c_3 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + d_3x_3 + k = 0 \quad c_1, c_2 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + d_2x_2 + k = 0 \quad c_1 \neq 0$$

$$d_1x_1 + k = 0 \quad d_1 \neq 0$$

Exemplos concretos de aplicação podem ser encontrados no livro "Vetores e Matrizes" de N.M. dos Santos, PA, Rio de Janeiro, 1970.

EXERCÍCIO

- 2.9: Mostre que ao aplicar o processo do Lema 6.2.6 às equações descritas em 6.2.5, a parte quadrática não se altera.

CAPÍTULO 7

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Este capítulo apresenta alguns exercícios dados em vidas, testes ou que merecem destaque por serem interessantes. Os exercícios, propositadamente, não estão organizados por ordem de apresentação do assunto ou por dificuldade crescente.

Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x+4y+6z, 2x+5y, 0)$$

Seja T^* o operador adjunto de T , em relação ao produto interno usual $\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Então $T^*(x, y, z)$ é igual a:

1. $(x+2y, 4x+5y)$
2. $(0, x+2y, 4x+5y)$
3. $(x+4y+6z, 2x+5y, 0)$
4. $(x+2y, 4x+5y, 6x)$
5. $(6x, 4x+5y, x+2y)$

2. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} . Seja φ um funcional linear $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Assinale, dentre as afirmações abaixo, a verdadeira:

1. Todo funcional linear em \mathbb{R}^3 pode ser escrito na forma: $\varphi(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ para $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, onde $(\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Ker } \varphi$.

2. Há uma infinidade de funcionais lineares em \mathbb{R}^3 que se anulam nos vetores $(1,1,1)$ e $(1,2,3)$, e o conjunto destes funcionais é um subespaço.

3. Sejam φ_1 e φ_2 dois funcionais lineares em \mathbb{R}^3 , arbitrários. Então $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\varphi_1 = a\varphi_2$$

4. $\dim \text{Ker } \varphi = 1 \quad \forall \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

5. φ é sempre sobrejetor, mas nunca é injetor.

3. Considere o espaço vetorial sobre \mathbb{R} das funções polinomiais de grau ≤ 2 , munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

e seja o operador linear $T: P_2 \rightarrow P_2$
 $p \mapsto p'$

onde p' é a derivada de p .

Seja T^* o operador adjunto de T em relação ao produto interno definido acima. Se $p_0 \in P_2$ é tal que

$\ell_0(x) = 1$ para $\forall x \in \mathbb{R}$, então T^*p_0 é o vetor $\ell_0 \in P_2$ tal que $\ell_0(x)$, para $\forall x \in \mathbb{R}$, é igual a:

- Zero
- $12x + 6$
- $12x - 6$
- $12x$
- Nenhuma das respostas acima

• - •

ejam V e V' espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K , $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ordenada de V , $\beta' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ uma base ordenada de V' , e uma transformação linear $T: V \rightarrow V'$

$$v \mapsto v' = Tv$$

considere a afirmação \mathcal{A} abaixo:

AFIRMAÇÃO \mathcal{A}

Para $\forall v \in V$, existem funcionais lineares $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m: V \rightarrow K$ tais que:

$$v' = Tv = \varphi_1(v)v'_1 + \varphi_2(v)v'_2 + \dots + \varphi_m(v)v'_m$$

podemos concluir então que:

- \mathcal{A} é falsa porque $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ não são funcionais lineares.
- \mathcal{A} só é verdadeira se β' for ortonormal.

3. A é só é verdadeira se T fôr um isomorfismo.
4. Em relação ao produto interno para o qual β é orthonormal, o vetor que representa o funcional φ_i é a i -ésima coluna da matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$.
5. Os funcionais $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ não dependem da base β escolhida em V .

• - •

5. Considere a transformação:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$$

As dimensões do núcleo e da imagem de T são, respectivamente:

- A) zero e um
- B) dois e três
- C) dois e um
- D) um e dois
- E) um e um

• - •

6. Indique qual das afirmações abaixo é a correta:

- A) Toda transformação linear sobrejetora tem forçosamente núcleo de dimensão zero.

-) Se T é uma transformação linear entre dois espaços V e W e $\dim V < \dim W$, então T não pode ser sobrejetora.
-) Dado um espaço vetorial V de dimensão n , e $n+1$ vetores de V , então é possível achar, entre estes $(n+1)$ vetores, uma base para V .
-) Seja V o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$. A transformação linear $D:V \rightarrow V$ é sobrejetora, mas não é injetora, pois $D(a_0) = 0$.
-) A dimensão de um espaço vetorial V é igual ao número de elementos de um conjunto qualquer de geradores.

.. .

é uma transformação linear $R^2 \rightarrow R^2$ tal que:

$$T(1,1) = (3,4)$$

$$T(1,-1) = (1,-2)$$

Então $T(1,0)$ e $T(0,1)$ são, respectivamente:

-) $(1,0)$ e $(0,1)$
-) $(2,0)$ e $(1,0)$
-) $(2,1)$ e $(1,3)$
-) $(1,0)$ e $(1,3)$
 $(-1,1)$ e $(1,-1)$

.. .

Indique qual das afirmações abaixo é a correta:

- A) O conjunto dos polinômios reais de grau igual a n forma um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .
- B) O conjunto das matrizes 3×3 que têm o determinante não nulo forma um espaço vetorial.
- C) O conjunto das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(0) = f(7)$ forma um espaço vetorial.
- D) O conjunto das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(0) = f(7) = 1$ forma um espaço vetorial.
- E) Todas as afirmações acima estão erradas.

.--.

9. Considere as funções f_1 e f_2 do espaço das funções reais de uma variável real tais que:

$$f_1: x \rightarrow e^x$$

$$f_2: x \rightarrow e^{2x}$$

Quero mostrar que f_1 e f_2 são linearmente independentes. Para isto, formo a combinação linear:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2$$

e tenho que provar que só posso obter a função 0 tomando $a_1 = a_2 = 0$.

Aplico $a_1 f_1 + a_2 f_2$ no ponto $x = 0$ e obtenho $a_1 +$

$$a_2 = 0.$$

Então $a_1 f_1 + a_2 f_2$ no ponto $x = 1$ e obtenho $a_1 +$

$$a_2^2 a_2 = 0.$$

Solve estas duas equações em a_1 e a_2 e vejo que a única solução é $a_1 = a_2 = 0$.

Então entendo que f_1 e f_2 são linearmente independentes.

Qualquer qual das afirmações abaixo é a correta:

A demonstração feita acima é incorreta, porque a combinação linear tem que ser zero para todo valor de x , e só foram considerados os valores particulares $x = 0$ e $x = 1$.

A demonstração feita acima é correta.

A demonstração acima mostra que $\{f_1, f_2\}$ é uma base para o espaço $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

e^x pertence a \mathbb{R} , de modo que $e^x \cdot e^x$ é o produto do "vetor" e^x pelo "escalar" e^x . Então e^{2x} é combinação linear de e^x .

A demonstração acima mostra que $\{f_1, f_2\}$ é uma base para o espaço das funções deriváveis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

10. Seja V o espaço vetorial real dos polinômios de grau ≤ 2 , munido do produto interno $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ e seja $D: V \rightarrow V$ a aplicação linear derivação. $p \mapsto p'$

Dada a base $\beta = \{1, x, x^2\}$,

- Calcule $D]_{\beta}^{\beta}$
- Calcule $D^*]_{\beta}^{\beta}$, sendo D^* o operador adjunto de D .
- Use o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar β' (na ordem dada)
- Calcule $D]_{\beta'}^{\beta'}$ em relação à base ortonormal β' do item anterior.

• - •

11. Seja $A: V \rightarrow V$ um operador linear, e W uma subespaço de V . Diz-se que o subespaço W é invariante por A se $\forall w \in W$, $Aw \in W$. (Por exemplo, qualquer que seja A , $\{0\}$ e V são invariantes por A).

- Se $V = \mathbb{R}^3$, determine os subespaços de V invariantes pelo operador

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 < \theta < \pi$$

$$X \mapsto AX$$

- Se W é um subespaço unidimensional de V , mostre que W é invariante por A se W é gerado por um auto-vetor não nulo de A .

Dada $A = \begin{pmatrix} 41 & 12 & 0 \\ 12 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$,

a) Calcule os auto-valores de A .

b) Determine uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 ,

$\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$, de auto-vetores de A , e uma matriz ortogonal P tal que $P^t A P$ seja diagonal.

Sugestão: $P = I]_{\beta}^{\beta'}$, onde β é a base canônica do \mathbb{R}^3 .

c) Sendo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 41x^2 + 34y^2 + 25z^2 + 24xy$, e $v = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$, calcule $f(v)$ em função de x', y', z' .

• • •

Seja V o espaço vetorial real das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas de todas as ordens, e considere o operador linear $T: V \rightarrow V$

$$f \mapsto f' - f$$

Determine uma base para o núcleo de T .

- A) $\{1, x\}$; B) $\{ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; C) $\{1\}$; D) $\{e^x\}$;
E) Núcleo de $T = \{0\}$.

• • •

14. Considere um espaço vetorial V de dimensão n ($n \geq 1$) sobre um corpo K , e seja W um subespaço de V de dimensão $n-1$. Pode-se afirmar que:

- A) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base de W , e $v_0 \notin W$, então $\{v_0, v_1+v_0, \dots, v_{n-1}+v_0\}$ é uma base de V .
- B) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base de W , e $v_0 \notin W$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_0\}$ não é base de V .
- C) Toda base de V contém, necessariamente, pelo menos um vetor de W .
- D) A transformação $T: W \rightarrow V$ é sobrejetora.
 $v \mapsto v$
- E) Todas as afirmações anteriores são falsas.

15. Considere o operador linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z) \mapsto (5x+2y-z; -8x-3y+2z; -x-2y-3z; 3x-y+5z)$$

e o subespaço W do \mathbb{R}^3 : $W = \{(x, y, z) \mid x+y+z=0\}$.

Sendo $T(W) \subseteq \mathbb{R}^4$ a imagem de W pelo operador T , pode-se afirmar que:

- A) $\dim T(W) = 4$; B) $\dim T(W) = 1$; C) $\dim T(W) = 0$
D) $\dim T(W) = 3$; E) T é injetor; logo, $T(W) = \{0\}$

a) V o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 2; dada a base $\beta = [1; x-3; (x-3)^2]$ de V, determine as coordenadas de $p(x) = ax^2 + bx + c$ na base β .

(c-3, b-3, a-3); B) (4a+2b+c, 4a+b, a)

(ya+3b+c, 6a+b, c); D) (a+b+c, 2a+b, a); NRA.

am $v, w \in \mathbb{R}^n$ (com o produto interno usual) tais

$\|v\| = 1, \|w\| = 1, \|v-w\| = 2$. Calcule $\langle v, w \rangle$.

A) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}$; B) $\langle v, w \rangle = -1$; C) $\langle v, w \rangle = 0$;

D) $\langle v, w \rangle = 2$; E) NRA.

V um espaço vetorial complexo, munido de um produto interno \langle , \rangle , e considere as afirmações

$v \in V$ arbitrários):

aplicação $V \rightarrow \mathbb{C}$, onde $v_0 \in V$ é fixo, é linear.

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

$$3. \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = 2(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2)$$

$$4. \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}-\mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$$

$$5. \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

Conclua que:

- A) 1 e 3 são falsas.
- B) Sómente 2 é falsa.
- C) Sómente 3 é verdadeira.
- D) 1,3 e 5 são verdadeiras.
- E) Todas são falsas.

19. Considere o \mathbb{R}^3 munido de um produto interno \langle , \rangle , em relação ao qual a base $\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ é orthonormal. Dado o vetor $\mathbf{v}_0 = (1,2,2)$ (na base canônica), determine $\{\mathbf{v}_0\}^\perp$.

- A) $\{(x,y,z) | x-y-2z = 0\}$
- B) $\{(x,y,z) | x+2y+2z = 0\}$
- C) $\{(x,y,z) | 2x-3y+z = 0\}$
- D) $\{(x,y,z) | 2x-y = 0\}$
- E) NRA.

nsidere o \mathbb{R}^3 com o produto interno usual; dado o operador linear $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (2x+2y, x+z, x+y)$$

nsidere as afirmações:

A não é inversível

Seja $W = \{(x, y, z) | x+y=0\}$; se $w \in W$, então

$$\langle Aw, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0.$$

Em relação à base $\beta = [(1,1,0), (1,0,0), (0,0,1)]$:

$$[A]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A é auto-adjunto

$A+A^* = I$, onde A^* é o adjunto de A , e I a identidade do \mathbb{R}^3 .

Conclua que:

1,3 e 4 são verdadeiras

1,2 e 3 são verdadeiras

Sòmente 1 e 3 são verdadeiras

Sòmente 2 e 3 são verdadeiras

Sòmente 3 e 5 são falsas.

•••

nsidere as afirmações, onde A, B são matrizes quadradas de ordem n .

Se A é inversível, então $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

2. AA^* é auto-adjunta
3. A auto-adjunta $\Rightarrow (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^n$
4. A, B auto-adjuntas $\Rightarrow AB + BA$ auto-adjunta
5. A, B auto-adjuntas; AB é autoadjunta $\Leftrightarrow AB = BA$.

Conclua que:

- A) Quatro são falsas
- B) Duas são verdadeiras e três são falsas
- C) Três são verdadeiras e duas são falsas
- D) Quatro são verdadeiras e uma é falsa
- E) Todas são verdadeiras.

..

22. Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^3 e $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo. Assinale, dentre as afirmações abaixo, a verdadeira:

- A) Existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \ker \varphi$, tal que $(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- B) $\dim(\ker \varphi) = 1$
- C) é sobrejetor, mas não é injetor
- D) $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$
- E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

..

m as matrizes M, N, P:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

-se afirmar que:

Tôdas são diagonalizáveis

Nenhuma é diagonalizável

Sòmente N e P são diagonalizáveis

Sòmente M é diagonalizável

Sòmente P não é diagonalizável

.. .

idere as afirmações, onde $A: V \rightarrow V$ é um operador
ar, e V um espaço vetorial complexo com um pro-
interno \langle , \rangle :

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de A , então

$v \in V \mid Av = \lambda v$ é um subespaço de V .

$\lambda = 0$ é auto-valor de $A \Leftrightarrow A$ não é inversível.

Se $\dim V = n$, então uma condição suficiente para
que A seja diagonalizável é que A tenha n
auto-valores distintos.

Se A é auto-adjunto, e λ é auto-valor de A ,
então $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se A é auto-adjunto, e v_1, v_2 são auto-vetores

linearmente independentes de A, então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

26.

Conclua que:

- A) Todas são falsas
- B) Todas são verdadeiras
- C) Quatro são verdadeiras e uma é falsa
- D) Três são verdadeiras e duas são falsas
- E) Duas são verdadeiras e três são falsas.

..

5. Sejam $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, -1)$.

- (a) Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do \mathbb{R}^3 .
- (b) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que
 $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = -v_2$, $T(v_3) = 2v_3$
 - i) Calcule $T(E_1)$, $T(E_2)$ e $T(E_3)$, onde $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$.
 - ii) Obtenha uma fórmula para $T(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sugestão: $(x, y, z) = xE_1 + yE_2 + zE_3$
 - iii) Calcule a dimensão do núcleo de T , e decida se T é inversível.

..

27.

Consideremos a aplicação linear $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (u, v, w)$

onde

$$\begin{cases} u = ax + y \\ v = x + ay \\ w = (a+2)x + (1+2a)y \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

e seja W um subespaço próprio do \mathbb{R}^3 , independente de a , que contém $\text{Im } T_a$ para todo valor de a .

- Determine W .
- Mostre que $\text{Im } T_a = W$ para todo valor de a , com exceção de certos valores particulares. Calcule tais valores e determine as dimensões do núcleo e da imagem de T_a para cada um deles.

..

Sejam as bases do \mathbb{R}^3 :

$$\beta = \{(v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (-1, 0, 1))\}$$

$$\beta' = \{(E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1))\}$$

Dado $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, as coordenadas de v em relação a β' são dadas por (onde I é a identidade do \mathbb{R}^3):

A) $I]_{\beta}^{\beta'} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

D) $I]_{\beta}^{\beta'} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

E) NRA

28. Considere o \mathbb{C}^3 com o produto interno usual:

$\langle X, Y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3$ e seja W o subespaço de \mathbb{C}^3 gerado pelos vetores $v_1 = (1; i; 0)$ e $v_2 = (1; 2; 1-i)$. Uma base ortogonal de W é formada pelos vetores:

A) $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{i}{\sqrt{2}}; 0)$ e $(\frac{1+2i}{\sqrt{18}}; \frac{2-i}{\sqrt{18}}; \frac{2-2i}{\sqrt{18}})$

B) $(1; i; 0)$ e $(\frac{1+2i}{2}; \frac{2-i}{2}; 1-i)$

C) $(1; i; 0)$ e $(1; 2; 1-i)$

D) $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{i}{\sqrt{2}}; 0)$ e $(1+2i; \frac{2-i}{2}; \frac{2-2i}{\sqrt{18}})$

E) NRA

• Considere o \mathbb{R}^2 com o produto interno

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2, \text{ onde } X = (x_1, x_2)$$

e $Y = (y_1, y_2)$.

Os vetores de norma igual a $2\sqrt{2}$, ortogonais ao vetor $(6, -3)$, são:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| A) $(2, 0)$ e $(2\sqrt{2}, 0)$ | B) $(2, 2)$ |
| C) $(2\sqrt{2}/5, 4\sqrt{2}/5)$ | D) $(0, 2)$ e $(0, -2)$ |
| E) NRA | |

•••

• Sejam V o espaço real dos polinômios de grau ≤ 3 ,

$D: V \rightarrow V$ a aplicação linear derivada, e as bases

$$\beta = \{1; t; t^2; t^3\} \text{ e } \beta' = \{1; t-1; t^2-t-1; t^3-t^2-t-1\}.$$

Determine $D]_{\beta'}^{\beta}$.

A)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

B)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- E) NRA

•••

1. Sejam A, B matrizes hermitianas. Considere as afirmações:

1. $A + B$ é hermitiana
2. $\forall x \in C, xA$ é hermitiana
3. AB é hermitiana
4. B^* é hermitiana

Conclua que:

- A) Todas são verdadeiras
- B) Sómente 4. é falsa
- C) Sómente 2. é falsa
- D) 1. e 4. são verdadeiras
- E) 1. e 3. são verdadeiras.

32. Seja $T: R^3 \rightarrow R^3$ o operador linear definido por
 $T(x, y, z) = (x+2y, 3x-4z, y)$. Determine $T^*(x, y, z)$, onde $T^*: R^3 \rightarrow R^3$ é o operador adjunto de T .

- A) $T^*(x, y, z) = (x-2y, 3x+4z, -y)$
- B) $T^*(x, y, z) = (x+3y, 2x+z, -4y)$
- C) $T^*(x, y, z) = (x-3y, 2x-z, y)$
- D) $T^*(x, y, z) = (x+2y, 3x-4z, y)$
- E) NRA

A matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b & c & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & d \end{pmatrix}$$

é ortogonal (real unitária). Conclua que:

A) $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B) $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D) $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

E) NRA.

• • •

Seja V o espaço vetorial real dos polinômios de grau ≤ 2 , com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, em relação ao qual os polinômios

$$P_1(t) = 1, \quad P_2(t) = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}, \quad P_3(t) = \frac{6t^2 - 6t + 1}{\sqrt{5}}$$

constituem uma base ortonormal de V . Considere o funcional linear $f: V \rightarrow \mathbb{R}$; dado por $f(p) = p(1)$, $p \in P$; determine $q \in V$ tal que

$f(p) = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in V$.

A) $q(t) = \frac{18t^2 + 2t + 8}{15}$

B) $q(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{5}}t^2$

C) $q(t) = \frac{18t^2 - 8t + 13}{15}$

D) $q(t) = p_1 + p_2(t) + p_3(t)$

E) NRA

35. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, determine uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

A) $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

B) $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

C) $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

D) $P = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

E) NRA.

36. Determine todas as soluções de

$$3x_1 - 7x_2 + 14x_3 - 8x_4 = 24$$

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -2$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$2x_1 - 15x_2 - x_3 + 5x_4 = -46$$

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ e $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
 $(x, y, z) \mapsto (2x+y, x-y+3z)$. Considere em V^* e W^*
 as bases $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $\beta' = \{g_1, g_2\}$ definidas
 por

f_1	f_2	f_3	g_1	g_2
$e_1 \rightarrow 1$	$e_1 \rightarrow 0$	$e_1 \rightarrow 1$	$e_1^1 \rightarrow 1$	$e_1^1 \rightarrow 1$
$e_2 \rightarrow -1$	$e_2 \rightarrow 1$	$e_2 \rightarrow 0$	$e_2^1 \rightarrow 0$	$e_2^1 \rightarrow 2$
$e_3 \rightarrow 0$	$e_3 \rightarrow 2$	$e_3 \rightarrow -1$		

onde $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\alpha' = \{e_1^1, e_2^1\}$ são as bases
 canônicas do \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 respectivamente.

1. Ache $[T^*]_{\beta^*}^{\beta'^*}$
2. Ache $[T^*]_{\alpha^*}^{\alpha'^*}$

•••

Se $U \subseteq V$, U um subconjunto, defina o anulador de
 U , U^0 :

$$U^0 = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \forall v \in U\}$$

1. Mostre que U^0 é um subespaço vetorial de V^* .
2. Se $T: V \rightarrow W$ é linear, mostre que se $g \in W^*$,
 $g \in (I(T))^0 \Leftrightarrow g \in N(T^*)$.

•••

39. Sejam U e V subespaços de W , W de dimensão finita.

Defina $U + V = \{u+v \mid u \in U, v \in V\}$.

1. Mostre que $U+V$ é um subespaço de W .

2. Mostre que $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

40. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K ,

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V , W um subespaço de V , e $\{w_1, \dots, w_r\}$ uma base de W ($r < n$). Pode-se afirmar que:

- A) $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ é base de V .
- B) $\{v_1, \dots, v_r\}$ também é base de W .
- C) Existem r vetores de B que formam uma base de W .
- D) Quaisquer r vetores de B formam uma base de W .
- E) Todas as afirmações anteriores são falsas.

41. Considere um espaço vetorial V , de dimensão n , sobre um corpo K , e seja L um subcorpo de K . Sabemos que K é um espaço vetorial sobre L ; seja r sua dimensão. A dimensão de V , considerado como es-

o vetorial sobre L é igual a:

-) $(n-r) \cdot n$ B) $n+r$ C) nr D) $nr-1$
) Nenhum dos valores anteriores.

Seja V o espaço vetorial real das matrizes $n \times n$ a coeficientes reais, e considere os seguintes subconjuntos de V:

$$W_1 = \{A \in V \mid A \text{ é inversível}\}$$

$$W_2 = \{A \in V \mid A \text{ é simétrica}\}$$

$$W_3 = \{A \in V \mid A^2 = A\}$$

$$W_4 = \{A \in V \mid AB = BA\} \text{ sendo } B \in V \text{ uma matriz fixa.}$$

Conclua que:

I) W_2 e W_3 são subespaços de V.

II) Sómente W_1 é subespaço de V.

III) W_1 , W_2 e W_4 são subespaços de V.

IV) W_2 e W_4 são subespaços de V.

Todos são subespaços de V.

3. Considere as seguintes aplicações:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (\sin x, 2x)$$

$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x+y, x)$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x+5$$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x+1, 2y, x+y)$$

Pode-se afirmar que:

- A) G e H são lineares.
- B) Sómente H é linear.
- C) G e T são lineares.
- D) Sómente F não é linear.
- E) Nenhuma delas é linear.

• • •

44. Seja V o espaço vetorial real das matrizes 2×2 a

coeficientes reais, e W o subespaço de V gerado
por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Considere as afirmações:

- 1. $\dim W = 2$
- 2. Toda matriz simétrica de V pertence a W.
- 3. Toda matriz antisimétrica de V pertence a W.
- 4. A aplicação $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow W$ é um isomorfismo.
 $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$

onclua que:

-) Todas são verdadeiras.
-) Três são verdadeiras e uma é falsa.
-) Duas são verdadeiras e duas são falsas.
-) Sómente 3 é falsa.
-) Todas são falsas.

... .

Insidere a aplicação linear $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $L_A(X) = AX$, onde A é uma matriz fixa $m \times n$, e seguides afirmações:

O núcleo de L_A é o espaço das soluções do sistema $AX = 0$.

Uma conseqüência do teorema do núcleo e da imagem é que, se $m < n$, então $AX = 0$ tem solução não trivial.

O sistema $AX = Y$ tem solução se, e sómente se, $Y \in \text{Im } L_A$.

Para cada $Y \in \mathbb{R}^m$, $X \in L_A^{-1}(Y) \Leftrightarrow X = X_1 + X_2$, onde X_1 é tal que $AX_1 = Y$, e X_2 pertence ao núcleo de L_A .

Se $m = n$, então L_A é um isomorfismo se A é in-

versível.

Conclua que:

- A) Duas são verdadeiras e três são falsas.
- B) Três são verdadeiras e duas são falsas.
- C) Quatro são verdadeiras e uma é falsa.
- D) Sómente 3. é verdadeira.
- E) Todas são verdadeiras.

..

46. Seja V o espaço vetorial real das matrizes simétricas 4×4 a coeficientes reais, e a aplicação linear $\text{Tr}: V \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{Tr}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$. O núcleo de Tr tem dimensão igual a:
- A) 9 B) 16 C) 15 D) 0
 - E) O núcleo de Tr não tem dimensão finita.

..

47. Seja a aplicação linear $F:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (ax,by)$, com a e b constantes não nulas. Pode-se afirmar que:

- A) A imagem da reta $S = \{(x,y) \mid y=x\}$ é a reta S' .
- B) A imagem da circunferência $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

é a elipse $E = \{(u,v) \mid \frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2} = 1\}$.

- 1) A imagem da circunferência $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é a circunferência $E = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$.
- 2) A imagem da circunferência $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é a elipse $E = \{(u,v) \mid \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1\}$.
- 3) Todas as afirmações anteriores são falsas.

Sejam V e U espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K , $\dim V = m$, $\dim U = n$, e $F: V \rightarrow U$, $: U \rightarrow V$ aplicações lineares. Considere as seguintes afirmações:

- Se F é injetora, então $n \geq m$.
- Se G é sobrejetora, então $n = m$.
- Se $m = n$, então F e G são bijeções.
- Se $m = n$, então $G = F^{-1}$.
- Se $m < n$, então G e F não são inversíveis.

Conclua que:

- 1) Sómente 1. e 3. são verdadeiras.
- 2) Sómente 2. é verdadeira.
- 3) Sómente 1. e 5. são verdadeiras.

D) Sómente 4. é falsa.

E) Todas são falsas.

. . .

49. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(5x+y, x+5y). \text{ Então:}$$

A) T é uma rotação no plano.

B) T é sobrejetora, mas não é injetora

C) T é injetora, mas não é sobrejetora.

D) T é invertível.

E) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

. . .

50. Seja V_n o espaço vetorial sobre K dos polinômios a coeficientes no corpo K e de grau $\leq n$ (incluindo o polinômio identicamente nulo). Considere a transformação linear $T: V_n \rightarrow V_n$ onde $q_n(x) = p_n(x+1) - p_n(x)$,
 $p_n \mapsto q_n$

$\forall x \in K$. Então:

A) T é sobrejetora.

B) T é injetora.

C) $\dim N(T) = 1$, $\dim I(T) = n-1$.

- D) Se W_n é o subespaço de V_n formado pelos polinômios que se anulam na origem, então a transformação linear $W_n \rightarrow V_n$ (restrição de T à W_n) é injetora. $P_n \mapsto Q_n$
- E) Todas as afirmações anteriores são falsas.

Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $T(1,0) = (0,-1)$ e $T(0,1) = (1,0)$. Calcule T^{27} .

- A) $-T$ B) T C) I D) $-I$ E) 0

Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear tal que $T^2 = 0$; calcule $T(I+T)^n$, n um inteiro positivo.

- A) I B) T C) $I + nT$ D) 0
E) Nenhuma das respostas anteriores.

Dadas as seguintes transformações lineares do \mathbb{R}^2 no \mathbb{R}^2 :

$$T_1: (x,y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

$$0 \in [0, 2\pi)$$

$$T_2: (x, y) \mapsto (ax, y) \quad (a > 0)$$

$$T_3: (x, y) \mapsto (x, -y)$$

$$T_4: (x, y) \mapsto (-x, y)$$

Considere as afirmações:

1. $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 \quad (a > 0)$

2. $T_3^2 = I$

3. $T_1 = T_3 \circ T_4 \Leftrightarrow 0 = \pi$

4. Não existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, tal que
 $T_1(x, y) = \alpha(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Conclua que:

- A) 2. 3. e 4. são verdadeiras.
- B) Sómente 2. é verdadeira.
- C) Sómente 1. e 4. são falsas.
- D) 2. e 4. são falsas.
- E) Todas são verdadeiras.

54. Considere os operadores lineares $T: V \rightarrow V$, $L: V \rightarrow V$,
e as seguintes afirmações:

1. $T^2 = I \Leftrightarrow T = \pm I$

2. Se $L^2 + L - I = 0$, então $L^{-1} = L + I$

3. Se $T \circ L = 0$, então $T = 0$ ou $L = 0$

4. $(T+L) \circ (T-L) = T^2 - L^2$.

5. Se $T \circ L = 0$, então $L \circ T = 0$.

Conclua que:

- A) Três são verdadeiras e duas são falsas.
- B) Duas são verdadeiras e três são falsas.
- C) Sómente 2. é verdadeira.
- D) Sómente 1. é falsa.
- E) Todas são falsas.

• • •

Sejam os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ e $v_3 = (2, 0, -2)$ do \mathbb{R}^3 . A matriz de reflexão sobre o plano determinado por v_1 e v_2 , tomada em relação à base canônica $\beta' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e

$T]_{\beta'}^{\beta'}$ é:

- A) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$
- B) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$
- C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
- D) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$
- E) NRA.

• • •

56. Considere a transformação linear do plano obtida projetando o vetor $v = (x, y)$ ortogonalmente sobre a reta $L = y - 2x = 0$.

A matriz de T em relação à base $\{ (1, 0), (0, 1) \}$ é tal que

- A) A soma de seus coeficientes é $9/5$.
- B) A soma de seus coeficientes é $8/5$ e todos são positivos.
- C) Os seus coeficientes são todos não nulos e de soma 2.
- D) Somente um dos coeficientes é não nulo e igual a 1 (um).
- E) NRA.

• • •

57. Seja V um espaço vetorial real com produto interno (\cdot, \cdot) .

Assinale qual das afirmações abaixo é falsa.

- A) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, $\forall u, v \in V$
- B) $(u, v) = 0 \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
- C) $(u, v) = \frac{1}{2} (\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$
- D) Se $u, v \in V$, $v \neq 0$ e $c = \frac{(u, v)}{\|v\|^2}$, então $u' = u - c v$ é ortogonal a v .

- E) Se v_1, v_2, \dots, v_n é uma base qualquer de V e
 $v = \sum x_i v_i$ então $\|v\| = \sqrt{\sum x_i^2}$.

Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x, y, z) = (z, y, x)$ então

- A) T é uma rotação em torno do vetor $(2, 0, -2)$
B) T é uma rotação em torno do vetor $(1, 1, 1)$
C) T é uma rotação em torno do vetor $(1, -1, 1)$
D) T é uma reflexão sobre o plano vertical a
($2, 0, -2$) e passando pela origem.
E) NRA.

Seja T a transformação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 definida pe-
la fórmula $T(x, y) = (x+4y, 2x+3y)$.

A transformação é:

- A) Uma reflexão em torno de $y=0$ seguida de uma ro-
tação.
B) Uma reflexão em torno da reta $2x-y=0$ seguida
de uma dilatação de razão 5 ao longo de $y-x=0$.
C) Um cisalhamento paralelo ao eixo Ox .
D) Uma reflexão em torno de $x-y=0$ seguida de uma
dilatação de razão 5 ao longo de $y-x=0$.

E) NRA.

60. Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Suponha que $F(1, 0) = (1, 2)$ e $F(0, 1) = (2, 3)$.

Calcule $F(287, -45)$.

- A) 369
- B) (-315, 287)
- C) Impossível calcular com os dados fornecidos.
- D) (197, 439)
- E) NRA

61. Considere o \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, e seja

$$S = \{(x, y, z) \mid z=4\}; \text{ determine } S^\perp.$$

- A) $S^\perp = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- B) $S^\perp = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
- C) $S^\perp = \{0\}$
- D) $S^\perp = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$
- E) NRA.

• Considere as aplicações

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x+y, z+y-x)$$

$$e \quad G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

- A) $F \circ G(x, y) = (x-y, -y+z-x)$ e $G \circ F$ não está definida.
- B) $F \circ G(x, y) = (x-y, -y+z-x)$ e $G \circ F(x, y, z) = (x-y, z-y, x+z)$.
- C) $F \circ G$ não está definida e $G \circ F(x, y, z) = (-y, x+z)$.
- D) $G \circ F(x, y, z) = (x-y-z, x+y)$.
- E) NRA.

• • •

3. Verifique qual das afirmações abaixo é verdadeira:

- A) Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ duas funções, se $g \circ f: A \rightarrow C$, a função composta é sobrejetora, então f e g são sobrejetoras.
- B) Se $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora, então f e g são injetoras.
- C) Se $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora, então existe $g: B \rightarrow A$ tal que $h = g \circ f: A \rightarrow A$ é a identidade em A , isto é, $h(a) = a, \forall a \in A$.
- D) Se $f: A \rightarrow B$ é injetora, então existe $g: B \rightarrow A$

tal que $h = g \circ f: A \rightarrow A$ é a identidade em A , isto é, $h(a) = a, \forall a \in A$.

E) Todas as afirmações acima são falsas.

• - •

4. Seja $V = \{f: R \rightarrow R\}$ o espaço vetorial das funções da reta na reta. Quais dos subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais de V ?

- ✓ $M = \{f: R \rightarrow R, \text{ tais que } f(1) = 0\}$
N = $\{f: R \rightarrow R, \text{ tais que } f(1) = 1\}$
✓ $P = \{f: R \rightarrow R, \text{ tais que } f(0) = f(5) = 0\}$
Q = $\{f: R \rightarrow R, \text{ tais que } f(x) \geq 0, \forall x\}$
R = $\{f: R \rightarrow R, \text{ tais que } f(1) \geq 0\}$

A) M, P, Q, R

X B) M, P

C) Q, R

D) M, N, P

E) NRA.

• - •

Quais dos conjuntos abaixo são espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais?
(As operações são as usuais).

I = conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo a coeficientes reais.

V = $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ conjunto das funções da reta na reta.

S = conjunto dos números irracionais

L = conjunto das matrizes $m \times n$ a coeficientes reais.

- 1) M, N, P, Q
- 2) M, N, P
- 3) M, N, Q
- 4) M, P, Q
- 5) N, P, Q

• - •

Ache uma base para o subespaço W do \mathbb{R}^4 gerado por

$(2, -2, 2, 6)$, $(-1, 1, -1, -3)$, $(3, 1, 7, 5)$, $(1, 3, 5, -1)$,
 $(1, 1, 3, 1)$

Conclua que $(x, y, z, t) \in W$ se e sómente se

$$z = 2x + y$$

e

$$t = 2x - y$$

• - •

67. 1. Mostre que o conjunto S das soluções $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ do sistema a coeficientes reais

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

•

•

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

é um subespaço vetorial do \mathbb{R}^n .

2. Ache explicitamente uma base para S no caso do sistema

$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$$

$$x_4 - 3x_5 = 0$$

• • •

68. Se $v_1 = (1, 3, 5)$, $v_2 = (2, -1, 3)$ e $v_3 = (-3, 2, -4)$ são vetores do \mathbb{R}^3 resolva a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ e decida se v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes ou independentes.

• • •

69. Prove que:

1) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e

v_1, v_2, \dots, v_n constituem uma base para V , então qualquer vetor $v \in V$ se escreve de maneira única, como combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .

- 2) Prove que $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$ formam uma base para o \mathbb{R}^3 e exprima o vetor $(5,4,2)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .

•••

- 3). Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K . Dizemos que uma função $T: V \rightarrow W$ é linear se, quaisquer que sejam $u, v \in V$, $k \in K$, vale $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $T(kv) = kT(v)$.

Decida, em cada caso deixando escrito seu raciocínio, se as funções abaixo são lineares:

1. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(v) = 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$
2. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(v) = v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$
3. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+y, y-z, xz)$
4. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x-y, 2x-5y)$

•••

Seja V um espaço vetorial. Considere as afirmações:

1. Se os vetores v_1, v_2, \dots, v_m são LD então um deles é combinação linear dos demais.
2. Todo subconjunto de V que contém um conjunto LD é LD.
3. Todo subconjunto de V contido em um conjunto LD é LD.
4. Se $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ são LI e $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ então os coeficientes a_1, \dots, a_m estão univocamente determinados, dado $u \in V$.

Assinale a resposta certa:

- A) Todas as afirmações acima estão corretas.
- B) Apenas uma está incorreta.
- C) Duas estão incorretas.
- D) Apenas uma está correta.
- E) Todas são falsas.

..

72. Determine o número a para que os polinômios abaixo sejam LD.

$$p_1 = 1 + x^2$$

$$p_2 = x + 3x^2 - x^3 + x^4$$

$$p_3 = x^2 + x^4$$

$$p_4 = 3 + ax + 12x^2 - 4x^3 + x^4$$

- A) $a = 12$
B) $a = 4$
C) $a = 3$
D) $a = -4$
E) Impossível - eles são LI para $\forall a \in K$.

• • •

Seja V o espaço das matrizes reais 2×2 e $T: V \rightarrow V$ a aplicação linear definida por $T(A) = P.A$, onde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Considere a base de V :

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

As coordenadas do vetor $T(A)$ com respeito à base β são:

- A) $(a_{11}-a_{21}, a_{12}-a_{22}, a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22})$
B) $(a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, -a_{11}+a_{21}, -a_{12}+a_{22})$
C) $(a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, a_{11}-a_{21}, a_{12}-a_{22})$
D) $(-a_{11}+a_{21}, -a_{12}+a_{22}, a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22})$
E) NRA

• • •

4. Seja V o conjunto das matrizes reais $n \times n$ e

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow V \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

Considere as afirmações:

1. T é linear.
2. $T(AB) = T(A)T(B) = T(B)T(A)$
3. $\text{Ker } T \neq \{\mathbf{0}\}$.
4. $T^2 = I$
5. $T(AB) = T(B).T(A) \neq T(A).T(B)$ em geral.

Então:

- A) 1, 2, 3, 4, 5 todas verdadeiras.
- B) 2 e 3 falsas.
- C) 2 e 4 falsas.
- D) 1 e 5 falsas.
- E) Sómente uma, entre as afirmações 1, 2, 3, 4, 5 é verdadeira.

• • •

75. Dadas as funções 1, $\sin^2 t$, $\cos^2 t$, $\sin 2t$, $\cos 2t$, considere as seguintes afirmações:

1. 1, $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ são LD
2. 1, $\sin 2t$, $\cos 2t$ são LI
3. 1, $\sin^2 t$, $\cos 2t$ são LD
4. 1, $\sin 2t$, $\cos 2t$ são LD

Então:

- A) Todas são verdadeiras.
 - B) Apenas uma é falsa.
 - C) Duas são falsas.
 - D) Apenas uma é verdadeira.
 - E) Todas são falsas.
- • •

Sejam T_1, T_2 e T_3 as aplicações $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que levam o ponto (x, y, z) respectivamente em:

$$(x+y-1, y+z, z), \quad (x-y+1, y, 0) \quad \text{e} \quad (x+1, 2y+z, z).$$

Considere as afirmações:

1. T_1, T_2 e T_3 são lineares.
2. $T_2 \circ T_1$ é linear.
3. $T_1 \circ T_3$ é linear.
4. $T_1 \circ T_2$ é a projeção sobre o plano xOy .

Então:

- A) Todas são verdadeiras.
 - B) Apenas uma é falsa.
 - C) Duas são falsas.
 - D) Apenas uma é verdadeira.
 - E) Todas são falsas.
- • •

77. Se V é o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes reais e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, defina $T:V \rightarrow V$ por $T(A) = AM - MA$.

Assinale a resposta certa:

- A) $\dim \text{Ker } T = 0$
- B) $\dim \text{Ker } T = 1$
- C) $\dim \text{Ker } T = 2$
- D) $\dim \text{Ker } T = 3$
- E) $\dim \text{Ker } T = 4$

• • •

78. Seja $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ a base canônica do \mathbb{R}^4 e $T:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

$$TE_1 = E_3 \quad TE_2 = E_4 \quad TE_3 = E_1 \quad TE_4 = 0$$

Considere as afirmações abaixo:

- 1. $T^4 = 0$
- 2. T isomorfismo
- 3. $I-T$ inversível
- 4. T injetora

Assinale a resposta certa:

- A) Todas estão corretas.
- B) Apenas uma é falsa.
- C) Duas são falsas.

D) Apenas uma é correta.

E) Todas são falsas.

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os seguintes subconjuntos de V

1. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
2. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$
3. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
4. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \text{ e } x_3 \text{ são racionais}\}$
5. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \text{ e } x_3 \text{ são inteiros}\}$

Então:

- A) Todos são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 .
- B) Nenhum é subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .
- C) 1), 3) e 5) são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 .
- D) 2), 3) e 4) são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 .
- E) 1), 2) e 5) são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 .
- F) 1) e 3) são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 .

80. Chame de V o espaço vetorial real das matrizes com coeficientes reais e sejam os seguintes subconjuntos de V :

1. As matrizes cujo determinante é zero.
2. As matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$.
3. As matrizes cujo determinante é 1.
4. As matrizes cujos coeficientes são números racionais.
5. As matrizes cujos coeficientes são números pares.

Então:

- A) Todos são subespaços vetoriais de V .
- B) Nenhum é subespaço vetorial de V .
- C) Sómente um é subespaço vetorial de V .
- D) Sómente dois são subespaços vetoriais de V .
- E) Sómente três são subespaços vetoriais de V .

• • •

81. Seja V o espaço vetorial das funções reais de uma variável real e considere os subconjuntos abaixo de V :

1. $W = \{f \in V \mid f(3) = 1\}$
2. $W = \{f \in V \mid f(n) = 0, \quad \forall n \text{ inteiro}\}$.
3. $W = \{f \in V \mid f(1) = f(-1)\}$.
4. $W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

5. $W = \{f \in V \mid f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$

Então:

- A) Todos são subespaços.
- B) Nenhum é subespaço.
- C) Sómente quatro são subespaços.
- D) Sómente três são subespaços.
- E) Sómente dois são subespaços.

32. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os vetores $u_1 = (0, 1, 1)$,
 $u_2 = (0, 2, -1)$, $u_3 = (0, 1, 2)$, $u_4 = (0, 2, 5)$ e
 $u_6 = (0, 4, 1)$. O subespaço gerado por êles é:

- A) O espaço V .
- B) Um subespaço de dimensão 1.
- C) O plano $y = 0$.
- D) O plano definido pela equação $y = x$.
- E) O plano $x = 0$.

83. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os subconjuntos abaixo:

1. $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$.
2. $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (2, -1, 0), (4, 3, 0)\}$.
3. $\{(2, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 3, -4)\}$.

4. $\{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}$
5. $\{(2,-3,2), (2,-4,1), (1,-5,7)\}.$
6. $\{(3,0,-2), (1,-1,-5)\}.$

Então:

- A) Os vetores de 6) formam uma base para \mathbb{R}^3 .
- B) Os vetores de 3) formam uma base para \mathbb{R}^3 .
- C) Os vetores de 2) geram o \mathbb{R}^3 .
- D) Os vetores de 4) geram um subespaço de \mathbb{R}^3 de dimensão 2.
- E) Todas as respostas acima estão erradas.

• - •

84. Considere as afirmações:

1. No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, o subconjunto formado pelas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(1) = 3 + f(0)$ é um subespaço vetorial.
2. No espaço vetorial das funções reais de uma variável real o subconjunto das $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) \geq 1$ é um subespaço vetorial.
3. No espaço vetorial dos polinômios a coeficientes reais o subconjunto dos polinômios cujos coeficientes são números pares constitue um subespaço vetorial.

4. No espaço vetorial dos polinômios a coeficientes reais o subconjunto dos polinômios da forma
- $$a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + a_{2n} x^{2n}, \quad n \text{ arbitrário, é um subespaço vetorial.}$$

Então:

- A) 1) e 2) estão certas.
- B) 2) está certa e 3) errada.
- C) 1) está certa e 4) errada.
- D) 2) e 4) estão erradas.
- E) 3) está errada e 4) está certa.

• - •

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os subconjuntos:

1. $\{(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)\}.$
2. $\{(1,2,0), (0,1,0), (2,-1,0), (4,3,0)\}.$
3. $\{(2,1,0), (1,-1,2), (0,3,-4)\}.$
4. $\{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}.$
5. $\{(2,-3,2), (2,-4,1), (1,-5,7)\}.$
6. $\{(3,0,-2), (1,-1, 5)\}.$

Então, a dimensão dos espaços gerados por seus vetores é:

1)	2)	3)	4)	5)	6)
A) 2	1	3	3	2	1
B) 3	2	2	3	3	2
C) 2	3	3	1	3	2
D) 2	3	3	3	2	2
E) 3	3	3	3	3	2

.. .

86. Uma matriz $n \times n$ diz-se diagonal se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Mostre que, no espaço vetorial das matrizes $n \times n$ a coeficientes reais, as matrizes diagonais constituem um subespaço vetorial.

.. .

87. Uma matriz $n \times n$ é triangular superior se $a_{ij} = 0$, para $j < i$. Demonstre que, no espaço vetorial das matrizes $n \times n$ a coeficientes reais, as matrizes triangulares superior constituem um subespaço vetorial.

.. .

88. Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes $n \times n$ de coeficientes reais?

Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes diagonais $n \times n$ com coeficientes reais?

.. .

Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes triangulares superiores com coeficientes em um corpo K ?

.. .

Uma matriz $n \times n$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$. É anti-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$. Mostre que as matrizes simétricas $n \times n$ formam um subespaço vetorial do espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com coeficientes em um corpo K . Mostre que o mesmo vale para as matrizes anti-simétricas. Determine as dimensões destes subespaços.

.. .

As matrizes $m \times n$ com coeficientes em um corpo K formam um espaço vetorial? Caso formem, qual é sua dimensão?

.. .

Os polinômios $(t-1)^3$, $(t-1)^2$, $(t-1)$ e 1 são linearmente independentes no espaço P dos polinômios a coeficientes reais?

14. Se V é o espaço vetorial das funções reais de uma variável real, mostre que os subconjuntos abaixo constituem subespaços vetoriais de V :

$$W_1 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

$$W_2 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é derivável}\}.$$

$$W_3 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é derivável e } f'(1) = 0\}.$$

...

95. Seja $u_1 = (1, 3, 5)$ e $u_2 = (2, 4, -3)$ vetores do \mathbb{R}^3 . Determine os valores de K para os quais $(2, 7, k)$ pode ser escrito como combinação linear de u_1 e u_2 .

*

...

96. Mostre que os subconjuntos de \mathbb{R}^3

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 4z = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - 5z = 0\},$$

são subespaços vetoriais. Quais suas dimensões? Ache um vetor $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq 0$.

...

Seja V o espaço das funções polinominais reais de grau menor ou igual a 2, definidas no intervalo $[0,1]$.

Considere em V o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt .$$

Seja B' a base ortonormal obtida a partir de

$B = \{1, t, t^2\}$ pelo processo de Gram Schmidt. A matriz de passagem de B' para B , $[I]_{B'}^B$ é

A) $\begin{pmatrix} 1 & -1/4\sqrt{3} & 1/36\sqrt{5} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & -1/6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/6\sqrt{5} \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2\sqrt{3} & 1/6\sqrt{5} \\ 0 & -1/4\sqrt{3} & -1/6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/36\sqrt{5} \end{pmatrix}$

E) NRA.

• • •

Para cada n , seja P_n o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n . Considere a transformação linear $T: P_2 \rightarrow P_3$ dada por

$$\forall p(t) \in P_2, \quad T(p(t)) = q(t) \in P_3 \quad \text{onde}$$

$$q'(t) = p(t) \quad \text{e} \quad q(0) = 0.$$

A matriz de T em relação a $\beta = \{1, t, t^2\} \subset P_2$ e $\beta' = \{1, t, t^2, t^3\} \subset P_3$ é:

- A)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$
- B)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- C)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- D)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- E)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

• - •

99. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 14x^2 + 11y^2 + 4xy$$

Existe um operador simétrico $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y) = \langle Tv, v \rangle \quad \text{onde } v = (x, y).$$

A matriz de T é:

A) $\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$

B) $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$

C) $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

D) $\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

E) $\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$

•--•

00. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 14x^2 + 11y^2 + 4xy$$

Supondo $\|v\| = 1$, pela desigualdade de Cauchy podemos afirmar que $|f(x, y)|$ é menor ou igual a:

A) $[(14x + 2y)^2 + (2x + 11y)^2]^{1/2}$

B) 1

C) $[(11x + 7y)^2 + (2x + 2y)^2]^{1/2}$

D) $[(14x - 2y)^2 + (11x + 2y)^2]^{1/2}$

E) NRA.

•--•

101. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = 14x^2 + 11y^2 + 4xy$$

Existem dois pontos mutuamente perpendiculares e de norma 1 para os quais vale a igualdade na desigualdade correta do item anterior. Um dos pontos, e o valor de f no segundo ponto são, respectivamente:

- A) $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$ e 10 B) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ e 3
C) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ e 10 D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ e 3
E) NRA.

..

102. Sabe-se de mecânica que um corpo rígido em movimento de rotação em torno de um eixo e com vetor de rotação

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

tem momento angular $\vec{L} = L(\vec{\omega})$ dado por

$$\vec{L}(\omega) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

onde a matriz 3×3 acima é simétrica. (É chamada de tensor de inércia, e só depende da distribuição de massa e da origem do sistema de eixos).

Podemos afirmar que:

- A) \vec{L} e \vec{w} são sempre perpendiculares.
- B) \vec{L} e \vec{w} nunca estão alinhados.
- C) Existem pelo menos três direções mutuamente perpendiculares para as quais \vec{L} e \vec{w} estão alinhados.
- D) Se $\vec{w} \neq 0$ então \vec{w} e $L(\vec{w})$ são linearmente independentes.
- E) NRA.

.. .

13. Considere a transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(x, y, z) \mapsto (-11x+2y+2z, -4x+z, 6x-y-z)$$

Verifique se T é inversível e assinale a alternativa correta.

- A) T não é inversível.
- B) T é inversível e a matriz de T^{-1} é
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$
- C) T é inversível e a matriz de T^{-1} é tal que a soma de seus coeficientes é 20.
- D) T é inversível e todos os coeficientes da matriz de T^{-1} são diferentes de zero.
- E) T é inversível e a matriz de T^{-1} possue exata-

mente dois coeficientes negativos.

• • •

104. Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear, onde V é um espaço complexo com produto interno e considere as afirmações abaixo.

- 1) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de T então $v_\lambda = \{v \in V, Tv = \lambda v\}$ é um subespaço vetorial de V .
- 2) O número $0 \in \mathbb{C}$ é auto-vetor de $T \Leftrightarrow T$ não é inversível.
- 3) Se $\dim V = n$ e T tem n auto-valores distintos então T é diagonalizável.
- 4) Se T é auto-adjunta e λ é auto-vetor de T então $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 5) Se T é auto-adjunta e $v_1, v_2 \in V$ são auto-vetores linearmente independentes de T , então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Então:

- A) Todas são falsas.
- B) Todas são verdadeiras.
- C) Quatro são verdadeiras e uma é falsa.

- D) Três são verdadeiras e duas são falsas.
E) Duas são verdadeiras e três são falsas.

• •

105. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador simétrico cujos auto-valores são 3 e 4.

Sabe-se que $(1,2,3)$ e $(2,1,3)$ são auto-vetores associados ao auto-valor 3.

Podemos afirmar que $T(5,5,-5)$ é

- A) impossível de calcular a partir dos dados.
B) $= (9,9,-9)$.
C) $= (3,3,-3)$.
D) $= (3,3,6)$.
E) NRA.

• •

106. Ache a matriz real tal que $A^5 = \begin{pmatrix} 125 & 62 \\ 186 & -92 \end{pmatrix}$.

(Sugestão: a matriz dada é diagonalizável).

- A) $\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$

• •

107. Quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{15} \\ \sqrt{15} & -3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- A) Todas
- B) Nenhuma
- C) M, N, P
- D) M, N, Q
- E) N, P, Q

108. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador simétrico.

Assinale a afirmação FALSA.

- A) $\langle Tu, v \rangle = \langle Tv, u \rangle$
- B) Sejam v_2, \dots, v_n auto-vetores linearmente independentes de T .
Seja v_1 um vetor perpendicular a cada v_j ,
 $j=2, \dots, n$. Então v_1 é auto-vetor de T .
- C) Se u e v são auto-vetores de T , linearmente independentes e associados a um mesmo auto-vetor, então T possui no máximo $n-1$ auto-valores distintos.
- D) Se a matriz de T em relação a qualquer base é diagonal então todos os auto-valores de T são iguais.

- E) A matriz de T em relação a qualquer base do \mathbb{R}^n é simétrica.

• - •

Considere o \mathbb{R}^2 com o produto interno $\langle X, Y \rangle = 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, onde $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$.

Se $v = (1,1)$, então $(v)^\perp$ é:

- A) $\{(x_1, x_2) | x_1 - x_2 = 0\}$
- B) $\{(x_1, x_2) | 3x_1 + x_2 = 0\}$
- C) $\{(x_1, x_2) | x_1 - 3x_2 = 0\}$
- D) $\{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 0\}$
- E) NRA.

• - •

Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear; sabe-se que $[T]_\beta^\beta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, onde β é a base canônica do \mathbb{R}^3 .

Determine $T(x, y, z)$.

- A) $T(x, y, z) = (x+2y+z, y+z, -x+3y+5z)$.
- B) $T(x, y, z) = (x-z, 2x+y+3z, x+y+5z)$
- C) $T(x, y, z) = (x, y, 5z)$
- D) $T(x, y, z) = (x+2y, y-z, x+5y)$