日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 9 月 19 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

题目 1. 设两个度量空间分别为 $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$，映射 $T:X_1\to X_2$，证明下述两种函数连续性定义是等价的

1. 任意的数列 $\{x_n\}\subset X_1$，若 $\exists x\in X_1$，$\rho_1(x_n,x)\to 0$，则有 $\rho_2(Tx_n,Tx)\to 0$.
2. $\forall\varepsilon>0$，$\forall x_0\in X_1$，$\exists\delta>0$ 使得当 $\rho_1(x,x_0)<\delta$ 时 $\rho_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$.

证明. $(1\Rightarrow 2)$ 反设，$\exists x_0\in X$，$\exists\varepsilon>0$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $\rho_1(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，但 $\rho_2(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$ 则 $\rho_1(x_n,x_0)\to 0$，由原命题假设可知 $\rho_2(Tx_n,Tx_0)\to 0$ 矛盾.

$(2\Rightarrow 1)$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n\geqslant N$ 有 $\rho_1(x,x_0)<\dfrac{1}{n}$，有 $\rho_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$，令 x_n 满足 $\rho_1(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，则由 ε 的任意性可知 $\rho_1(x_n,x_0)\to 0\Rightarrow\rho_2(Tx_n,Tx_0)\to 0$. □

题目 2. 在等距同构的意义下，度量空间的完备化空间是唯一的.

证明. 反设存在 $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$ 为 (X,ρ) 的两个在等距同构下不同的完备化空间，设 $T_1:X\to X_1,T_2:X\to X_2$ 分别为 X 到 X_1 和 X_2 的等距同构映射.

$\forall x_1,x_2\in X_1$，由稠密性可知，存在 Cauchy 列 $\{x_{n1}\},\{x_{n2}\}\subset X$ 使得 $T_1x_{n1}\to x_1,T_2x_{n2}\to x_2$，由等距性可知

$$\rho(x_{n1},x_{n2})=\rho_1(T_1x_{n1},T_2x_{n2})=\rho_1(T_1x_{n1},x_1)+\rho_1(x_1,x_2)+\rho_1(x_2,Tx_{n2})=\rho_1(x_1,x_2),\quad(n\to\infty)$$

由于 $\{x_{n1}\},\{x_{n2}\}$ 均为 Cauchy 列，则存在 $x_1',x_2'\in X_2$，使得 $T_2x_{n1}\to x_1',T_2x_{n2}\to x_2'$，类似地有

$$\rho(x_{n1},x_{n2})=\rho_2(x_1',x_2'),\quad(n\to\infty)$$

于是 $\rho_1(x_1,x_2)=\rho_2(x_1',x_2')$.

由 x_1,x_2 的任意性，可构造等距同构映射 $T'=T_2(T_1^{-1}):X_1\to X_2$，则 $T'^{-1}=T_1(T_2^{-1})$，且 $\forall x_1,x_2\in X_1$ 有 $\rho_1(x_1,x_2)=\rho_2(T'x_1,T'x_2)$. 故度量空间 X_1 与 X_2 在 T' 下等距同构，与假设矛盾. 所以度量空间的完备化空间是唯一的. □

题目 3. 设 $C_0^1(0,1):=\{f\in C^1(0,1):f\text{在0和1的某领域上等于0}\}$，定义

$$\rho(x,y)=\left(\int_0^1\left(|x(t)-y(t)|^2+|x'(t)-y'(t)|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

1. $(C_0^1(0,1),\rho)$ 是一个度量空间，但不完备.
2. 设 X 是 $C_0^1(0,1)$ 在 ρ 下的完备化空间，证明 $X\subset C[0,1]$.

证明. 1. （正定性）$\forall x,y,z\in C_0^1(0,1)$ 在 $(0,1)$ 上有 $|x-y|^2+|x'-y'|^2\geqslant 0$，于是 $\rho(x,y)\geqslant 0$. 又由于 $\rho(x,y)=0\iff x=y,x'=y',a.e.\iff x=y$（连续性）.

（对称性）由于 $|x-y|=|y-x|$，于是 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

（三角不等式）要证 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$，只需证 $\rho(x,y)^2\leqslant\rho(x,z)^2+2\rho(x,z)\rho(z,y)+\rho(z,y)^2$，由于

$$
\begin{aligned}
&\rho(x,z)^2+2\rho(x,z)\rho(z,y)+\rho(z,y)^2\\
=&\int_0^1(|x-z|^2+|x'-z'|^2)\,\mathrm{d}t+2\left(\int_0^1(|x-z|^2+|x'-z'|^2)\,\mathrm{d}t\int_0^1(|z-y|^2+|z'-y'|^2)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
&\qquad+\int_0^1(|z-y|^2+|z'-y'|^2)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

使用两次 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^1(|x-z|^2+|x'-z'|^2)\,\mathrm{d}t\int_0^1(|z-y|^2+|z'-y'|^2)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
\text{（积分形式不等式）}\geqslant&\int_0^1\sqrt{|x-z|^2+|x'-z'|^2}\sqrt{|z-y|^2+|z'-y'|^2}\,\mathrm{d}t\\
\text{（求和形式不等式）}\geqslant&\int_0^1|x-z||z-y|+|x'-z'||z'-y'|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\rho(x,z)^2+2\rho(x,z)\rho(z,y)+\rho(z,y)^2\\
\geqslant&\int_0^1(|x-z|^2+2|x-z||z-y|+|z-y|^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^1(|x'-z'|^2+2|x'-z'||z'-y'|+|z'-y'|^2)\,\mathrm{d}t\\
\geqslant&\int_0^1(|x-z|+|z-y|)^2\,\mathrm{d}t+\int_0^1(|x'-z'|+|z'-y'|)^2\,\mathrm{d}t\\
\geqslant&\int_0^1(|x-y|^2+|x'-y'|^2)\,\mathrm{d}t=\rho(x,y)^2
\end{aligned}
$$

□

题目 4. 证明 $L^\infty[a,b]$ 不可分.

注记. $L^\infty[a,b]:=\{f\text{可测}:\inf\limits_{m(E_0)=0}\sup\limits_{x\in[a,b]-E_0}|f(x)|<\infty\}$）.

证明. $L^\infty[a,b]$ 中测度为 $\rho(f,g):=\inf\limits_{m(E_0)=0}\sup\limits_{x\in[a,b]-E_0}|f(x)-g(x)|$.

不妨令 $a=0,b=1$，类似证明 l^∞ 的思路. 构造不可数集合

$$
S=\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\xi_i\cdot\chi_{[0,\frac{i}{n}]}:\xi_i\in\{0,1\}\right\}
$$

其中 $\chi_{[a,b]}$ 表示在 $[a,b]$ 上取值为 1 其他位置为 0 的函数. 由于 S 与二进制序列等势，则 $\overline{\overline{S}}=\aleph$，且 $\rho(f,g)=1$，$f,g\in S,f\neq g$.

假设 L^∞ 不可分，则存在 $\{h_n\}\subset L^\infty$，使得 $\{h_n\}$ 在 L^∞ 中稠密，于是 $S\subset\bigcup\limits_{n\geqslant1}B(h_n,1/3)$，由于 S 不可数，则必存在正整数 i 和 S 中的两个不同函数 f,g，使得 $f,g\in B(h_i,1/3)$，则 $\rho(f,g)\leqslant2/3$ 与 $\rho(f,g)=1$ 矛盾，故 L^∞ 不可分. □

题目 5. 证明 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 可分.

注记. $l^p := \{数列\{x_n\} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$，其上的度量为 $\rho(\xi, \mu) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$，$(\xi = \{x_n\}, \mu = \{y_n\})$

证明. 设 $S = \{(q_1, q_2, \cdots, q_n, 0, 0, \cdots) : q_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$，则 S 为可数集，下证 S 在 l^p 中稠密.

$\forall \xi \in l^p$，令 $\xi = (x_1, x_2, \cdots)$，由于 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p$，由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，可以取到

$$\eta = (q_1, q_2, \cdots, q_N, 0, 0, \cdots) \in S$$

且满足 $|q_i - x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^i}$，于是

$$\begin{aligned}
\rho(\xi, \eta) &= \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - q_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{2^i} + \varepsilon^p\right)^{1/p} \\
&= (2\varepsilon^p)^{1/p} = 2^{1/p}\varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

说明可数集 S 是 l^p 上的稠密子集，则 l^p 是可分的. □