日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 9 月 29 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第三次作业

题目 1. 在度量空间 l^2 中，证明：$A = \{\xi = \{x_n\} \in l^2 : n|x_n| \leqslant 1\}$ 是 l^2 中的紧集.

证明. 只需证明 A 是自列紧集，设 $\{\xi_n\} \subset A$ 是 Cauchy 列，则 $\rho(\xi_n, \xi_m) \to 0,\ (n, m \to \infty)$，于是 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \to 0$，所以 $\forall i \geqslant 1$，$\{x_i^{(n)}\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，于是 $\exists x_i$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$.

令 $\xi = \{x_1, x_2, \cdots\}$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists n_0 \in \mathbb{N}$，有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n_0)} - x_i|^2 < \varepsilon^2$，则 $|x_i^{(n_0)} - x_i| < \varepsilon$. 又由于 $\xi_{n_0} \in A$，则 $\exists N \geqslant [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ 使得 $\forall k \geqslant N$ 有 $|x_k^{(n_0)}| \leqslant \dfrac{1}{N} < \varepsilon$，于是

$$|x_i| \leqslant |x_i - x_i^{(n_0)}| + |x_i^{(n_0)}| < 2\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi \in A$，所以 A 是自列紧集，故 A 是紧集. □

题目 2. 用闭区间套定理证明压缩映射原理.

证明. 设度量空间为 (X, ρ)，T 为 X 上的压缩映射. 下面证明集列 $A_n = \{x \in X : \rho(x, Tx) < \dfrac{1}{n}\}$ 是单调递减直径趋于 0 的非空闭集列.

单调递减：$\forall x \in A_{n+1}$，则 $\rho(x, Tx) < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$，故 $x \in A_n$.

非空：设 $x_0 \in A_n$ 且 $\rho(x_0, Tx_0) = C$，记 $x_1 = Tx_0, \cdots, x_{n+1} = Tx_n$，则

$$\rho(x_n, Tx_n) \leqslant \alpha\rho(Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n\rho(x_0, Tx_0) = \alpha^n C \to 0,\ (n \to \infty)$$

则 $A_n \neq \varnothing$.

闭集：$\forall m \in \mathbb{N}$，只需证 A_m 的对极限封闭，设 $\{x_n\} \subset A_m$ 收敛于 $x \in X$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$ 有

$$\rho(x, Tx) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, Tx_n) + \rho(Tx_n, Tx) \leqslant (\alpha + 1)\varepsilon + \frac{1}{m}$$

由 ε 的任意性可知 $x \in A_m$，所以 A_m 是闭集.

直径趋于 0：$\forall x, y \in A_n$，则

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, Tx) + \rho(Tx, Ty) + \rho(Ty, y) \leqslant \frac{2}{(1-\alpha)n} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dim A_n = 0$.

综上，$\{A_n\}$ 是直径趋于零的非空闭子集套，所以存在唯一的 $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，则 $\rho(x_0, Tx_0) = 0$，压缩映射原理得证. □