日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 11 月 8 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第八次作业

题目 1. (2.3.1) 设 X 为 B 空间，X_0 是 X 的闭子空间. 映射 $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为 $\varphi : x \mapsto [x]$, $(\forall x \in X)$，其中 $[X]$ 表示 x 的商类. 证明 φ 是开映射.

证明. 由开映射定理可知，只需证 X/X_0 是完备的. 令 $\{[x_n]\} \subset X/X_0$ 是 Cauchy 列，则存在子列 $\{[x_{n_k}]\}$ 使得 $||[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]|| = ||[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]|| \leqslant 1/2^k$，由商空间范数定义可知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists y_k \in X_0$ 使得 $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k|| < ||[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]|| + \varepsilon \leqslant 1/2^k + \varepsilon$，则 $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k|| < 1/2^k$，于是 $\sum\limits_{k=1}^\infty ||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k|| < \sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{1}{2^k} = 1$ 绝对收敛，由于 X 是完备的，则 $\sum\limits_{k=1}^\infty x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k$ 收敛，令部分和 $\{x_{n_{k+1}} + \sum\limits_{i=1}^k y_i\}$ 收敛到 $x + y$, $x \in X, y \in X_0$，由 φ 的连续性可得 $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[x_{n_k} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} y_i\right] = [x+y] = [x] \in X/X_0$，所以 X/X_0 是商空间. □

题目 2. (2.3.2) 设 X, Y 是 B 空间，又设方程 $Ux = y$ 对 $\forall y \in Y$ 有解 $x \in X$，其中 $U \in L(X, Y)$，并且 $\exists m > 0$，使得 $||Ux|| \geqslant m||x||$, $(\forall x \in X)$，求证：U 有连续逆 U^{-1}，并且 $||U^{-1}|| \leqslant 1/m$.

证明. 由条件可知 U 是满射，假设 $\exists x_1, x_2 \in X$ 使得 $Ux_1 = Ux_2$，则 $U(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow x_1 = x_2$，于是 U 是单射，故 U 是双射.

由逆算子定理可知 $U^{-1} \in L(Y, X)$，由于 $||Ux|| \geqslant m||x||$，令 $x = U^{-1}y$ 得 $||y|| \geqslant m||U^{-1}y||$，则 $||U^{-1}y|| \leqslant ||y||/m$, $(\forall y \in Y)$，则 $||U^{-1}|| \leqslant 1/m$. □

题目 3. (2.3.3) 设 H 为 Hilbert 空间，$A \in L(H)$，且 $\exists m > 0$，使得 $|(Ax, x)| \geqslant m||x||^2$, $(\forall x \in H)$. 求证：$\exists A^{-1} \in L(H)$.

证明. 由逆算子定理知，只需证 A 为双射. 假设 $\exists y_1, y_2 \in X$ 使得 $Ay_1 = Ay_2$ 则

$$m||y_1 - y_2||^2 \leqslant |(A(y_1 - y_2), y_1 - y_2)| = |(\theta, (y_1 - y_2))| = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

故 A 是单射.

下证 $R(A) = Y$，只需证 $R(A)$ 是闭的且 $R(A)^\perp = \{\theta\}$. 设 $\{Ax_n\} \subset H$ 收敛于 $y \in H$，由于

$$m||x||^2 \leqslant |(Ax, x)| \leqslant ||Ax|| \cdot ||x|| \Rightarrow m||x|| \leqslant ||Ax||$$

于是 $||x_{n+p} - x_n|| \leqslant ||Ax_{n+p} - Ax_n|| \to 0$, $(n \to \infty, \forall p > 0)$ 则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，由于 H 完备，令其收敛于 x，由 A 的连续性可得 $Ax = y \in R(A)$，所以 A 是闭的. 令 $x_0 \in R(A)^\perp$ 则 $||x_0||^2 \leqslant ||(Ax_0, x_0)||/m = 0 \Rightarrow x_0 = \theta$ 则 $\mathbb{R}(A)^\perp = \{\theta\}$，于是 $\overline{R(A)} = R(A) = Y$. 所以 A 是满射.

综上，A 是双射. □

题目 4. (2.3.4) 设 X, Y 是 B^* 空间，D 是 X 的线性子空间，且 $A: D \to Y$ 是线性映射. 求证：

(1). 若 A 连续且 D 是闭的，则 A 是闭算子.

(2). 若 A 连续且是闭算子，则 Y 完备蕴含 D 是闭的.

(3). 若 A 是单射的闭算子，则 A^{-1} 也是闭算子.

(4). 若 X 完备，A 是单射的闭算子，$R(A)$ 在 Y 中稠密，且 A^{-1} 连续，那么 $R(A) = Y$.

证明. (1). $\forall \{x_n\} \subset D$ 满足 $x_n \to x,\ Ax_n \to y$，由于 D 是闭的可得 $x \in D$，由 A 连续性可得 $Ax_n \to Ax = y$，所以 A 是闭算子.

(2). 反设 D 是开的，则 $\exists x_0 \in X \setminus D,\ \{x_n\} \subset D$ 使得 $x_n \to x_0$，由于

$$||Ax_{n+p} - Ax_n|| \leqslant ||A|| \cdot ||x_{n+p} - x_n|| \to 0,\ (n \to \infty,\ \forall p > 0)$$

则 $\{Ax_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，令 $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$，由于 A 为闭算子，则 $x \in D$，这与 $x \in X \setminus D$ 矛盾. 故 D 是闭的.

(3). 由于 A 是单射，则 A^{-1} 有意义，$\forall \{y_n\} \subset R(A)$ 满足 $y_n \to y,\ A^{-1}y_n \to x$，由 A 是闭算子，则 $A^{-1}y_n \to A^{-1}y,\ y_n \to Ax$ 可得到 $A^{-1}y \in D$ 且 $A(A^{-1}y) = y = Ax$，于是 $y \in R(A)$ 且 $A^{-1}y \in X$.

(4). 由 (3) 可知，A^{-1} 是闭算子，由 (2) 可知 X 完备且 A^{-1} 连续，则 $R(A)$ 是闭的，又由于 $R(A)$ 在 Y 中稠密，则 $R(A) = \overline{R(A)} = Y$. □

题目 5. (2.3.5) 用等价范数定理证明：$(C[0,1], ||\cdot||_1)$ 不是 B 空间.

证明. 若 $(C[0,1], ||\cdot||_1)$ 是 B 空间，由等价模定理可知 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_\infty$ 等价. 令 $x_n = t^{1/n},\ x = 1$ 于是

$$||x_n - x||_1 = \int_0^1 |x^{1/n} - 1|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0,\ (n \to \infty)$$
$$||x_n - x||_\infty = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} 1 - t^{1/n} \geqslant 1 - \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{n-1}{n} \to 1,\ (n \to \infty)$$

于是 $\{x_n\}$ 在 $||\cdot||_1$ 范数下收敛，但在 $||\cdot||_\infty$ 范数下不收敛，则它们不等价，矛盾. 故 $(C[0,1], ||\cdot||_1)$ 不是 B 空间. □

题目 6. (2.3.6) (Gelfand 引理) 设 X 为 B 空间，$p: X \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $p(x) \geqslant 0,\ (\forall x \in X)$;

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x),\ (\forall \lambda > 0, \forall x \in X)$;

(3) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2),\ (\forall x_1, x_2 \in X)$;

(4) 当 $x_n \to x$ 时，$\varliminf\limits_{n\to\infty} p(x_n) \geqslant p(x)$.

求证：$\exists M > 0$，使得 $p(x) \leqslant M||x||,\ \forall x \in X$.

证明. 定义 X 上的范数 $||x||_G = ||x|| + \sup\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha x)$，下面证明 $||\cdot||$ 是 X 上的范数：

正定性：任取 $x_0 \in X$，则 $\dfrac{x_0}{n} \to \theta$，由假设知 $0 \leqslant p(\theta) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(x_0)}{n} = 0$，于是 $p(\theta) = 0$. 故 $||x||_G = 0 \iff x = \theta,\ ||x||_G \geqslant 0.$

齐次性：不妨令 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，$\forall \beta \in \mathbb{K}$，令 $\beta = |\beta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，由于

$$\sup_{|\alpha|=1} p(\alpha\beta x) = |\beta| \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} x) = |\beta| \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x)$$

则 $||\beta x||_G = |\beta| \cdot ||x|| + \sup\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha\beta x) = |\beta| \cdot (||x|| + \sup\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha x)) = |\beta| \cdot ||x||_G$.

三角不等式：由于 $||\cdot||$ 与 $p(x)$ 分别都满足三角不等式，结合线性性知 $||\cdot||_G$ 满足三角不等式.

下证 $(X, ||\cdot||_G)$ 是 B 空间. 令 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列，则

$$||x_n - x_m||_G = ||x_n - x_m|| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha(x_n - x_m)) \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

则 $x_n - x_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$，由于 X 是完备的，则 $x_n \to x \in X$，又由于 $p(x) \geqslant 0$，则 $\sup\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha(x_n - x_m)) \to 0,\ (n, m \to \infty)$ 于是 $\forall |\alpha| = 1$ 有 $p(\alpha(x_n - x_m)) \to 0$，由于 $x_m \to x$，则由假设条件 (4) 可知

$$p(\alpha(x_n - x)) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} p(\alpha(x_n - x_m)) \to 0,\ (n \to \infty, \forall |\alpha| = 1)$$

于是 $\sup\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha(x_n - x)) \to 0,\ (n \to \infty)$.

综上，$||x_n - x||_G \to 0$，则 $(X, ||\cdot||_G)$ 是 B 空间.

由于 $||\cdot||_G \geqslant ||\cdot||$，由等价模定理可知，$||\cdot||_G \leqslant ||\cdot||$，于是 $\exists M > 0$ 使得

$$p(x) \leqslant \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x) \leqslant ||x||_G \leqslant M \cdot ||x||$$

□

题目 7. (2.3.7) 设 X 和 Y 是 B 空间，$A_n \in L(X, Y),\ (n = 1, 2, \cdots)$，且 $\forall x \in X$，$\{A_n x\}$ 在 Y 中收敛. 求证：$\exists A \in L(X, Y)$ 使得

$$A_n x \to Ax,\ (\forall x \in X), \quad 且 \quad ||A|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||A_n||.$$

证明. $\forall x \in X$，令 $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$，由于 A_n 为线性泛函，则 A 也具有线性性，由于 $\forall x \in X$ 有 $A_n x$ 收敛，$\sup\limits_{n\geqslant 1} ||A_n x|| < \infty$，由共鸣定理知，$\exists M > 0$ 使得 $||A_n|| \leqslant M$. 于是

$$||Ax|| = \lim_{n\to\infty} ||A_n x|| = \varliminf_{n\to\infty} ||A_n x|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||A_n|| \cdot ||x|| \leqslant M||x||$$

□

题目 8. (2.3.8) 设 $1 < p < \infty$，并且 $1/p + 1/q = 1$，若序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x \in \{\xi_k\} \in l^p$ 保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 收敛，求证：$\{\alpha_k\} \in l^q$. 又若 $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$，求证：$f$ 作为 l^p 上的线性泛函，有 $||f|| = ||\alpha||_q$.

证明. 令 $f_n(x)=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k\xi_k,\ (\forall x=\{\xi_k\}\in l^p)$，则 $f_n(x)$ 连续，$f_n\in(l^p)^*$，由于 $\{f_nx\}$ 收敛到 $\sum\limits_{k\geqslant 1}\alpha_k\xi_k=:fx$，由题目 2.3.7 可知，$f\in(l^p)^*$，令

$$x_0^n=\{\xi_k^n\},\quad \xi_k^n=\begin{cases}|\alpha_k|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}, & k\leqslant n,\ (\theta_k=\arg\alpha_k)\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

由于 x_0^n 只有有限项不为 0，则 $x_0^n\in l^p$，并且 $1/p+1/q=1\Rightarrow(q-1)p=q$，可得

$$\begin{aligned}f(x_0^n)=&\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|^{q-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}|\alpha_k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|^q\\ &\leqslant|f(x_0^n)|\leqslant||f||\cdot||x_0^n||_p=||f||\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac1p}=||f||\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac1p}\end{aligned}$$

则 $\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|^q\right)^{1-\frac1p}=\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac1q}\leqslant||f||$. 令 $n\to\infty$，可得 $\alpha\in l^q$ 且 $||\alpha||_q\leqslant||f||$.

由 Holder 不等式可得 $|f(x)|=|(\alpha,x)|\leqslant||\alpha||_q||x||_p$，于是 $||f||\leqslant||\alpha||_q$.

综上，$||f||=||\alpha||_q$. □

题目 9. (2.3.9) 若序列 $\{\alpha_k\}$ 使得 $\forall x=\{\xi_k\}\in l^1$，保证 $\sum\limits_{k\geqslant1}\alpha_k\xi_k$ 收敛，求证：$\{\alpha_k\}\in l^\infty$. 若 $f:x\mapsto\sum\limits_{k\geqslant1}\alpha_k\xi_k$ 作为 l^1 上的线性泛函，求证：$||f||=||\alpha||_\infty$.

证明. 令 $f_n=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k\xi_k,\ (\forall x\in\{\xi_k\}\in l^1)$ 则 $f_n\in(l^1)^*$，由题目 2.3.7 可知，$f_n\to f=\sum\limits_{k\geqslant1}\alpha_k\xi_k$ 且 $f\in(l^1)^*$，令 $e_k=\{\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{k个},0,\cdots\}$，则 $|\alpha_k|=|f(e_k)|\leqslant||f||\cdot||e_k||_1=||f||$，则 $|\alpha_k|$ 有界，故 $\alpha\in l^\infty$ 且 $||\alpha||_\infty\leqslant||f||$.

又由于 $\forall n\geqslant1$，$||f_n(x)||\leqslant\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k\cdot|x_k|\leqslant\sup\limits_{k\geqslant1}|\alpha_k|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|\leqslant||\alpha||_\infty||x||_1$，则 $|f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|\leqslant||\alpha||_\infty||x||_1$，于是 $||f||\leqslant||\alpha||_\infty$.

综上，$||f||=||\alpha||_\infty$. □

题目 10. (2.3.10) 用 Gelfand 引理（习题 2.3.6）证明共鸣定理.

证明. 令 $p(x)=\sup\limits_{A\in W}||Ax||$，则 $p(x)\geqslant0$，$\forall\lambda>0$，有 $p(\lambda x)=\sup\limits_{A\in W}||A\lambda x||=\lambda\sup\limits_{A\in W}||Ax||=\lambda p(x)$.

$$p(x_1+x_2)=\sup_{A\in W}||A(x_1+x_2)||=\sup_{A\in W}||Ax_1+Ax_2||\leqslant\sup_{A\in W}||Ax_1||+||Ax_2||=p(x_1)+p(x_2)$$

当 $x_n\to x$ 时，由于 $\sup\limits_{A\in W}||Ax_n||\geqslant||Ax_n||$，则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{A\in W}||Ax_n||\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}||Ax_n||,\ (\forall A\in W)$，于是

$$\varliminf_{n\to\infty}p(x)=\varliminf_{n\to\infty}\sup_{A\in W}||Ax_n||\geqslant\sup_{A\in W}\varliminf_{n\to\infty}||Ax_n||=\sup_{A\in W}||Ax||=p(x)$$

综上 $p(x)$ 满足 Gelfand 引理四个条件，于是 $\exists M>0$，使得 $||Ax||\leqslant p(x)\leqslant M||x||,\ \forall x\in X$，于是 $||A||\leqslant M,\ (\forall A\in W)$. □

题目 11. (2.3.11) 设 X, Y 是 B 空间，$A \in L(X,Y)$ 是满射. 求证：若在 Y 中 $y_n \to y_0$，则 $\exists C > 0$ 与 $x_n \to x_0$，使得 $Ax_n = y_n$，且 $||x_n|| \leqslant C||y_n||$.

证明. **分析:** 由于 A 不一定为单射,但是商空间 $X/N(A)$ 中等价映射是单射,因为如果 $Ax = Ay$，则有 $x, y \in [x]$，因此商空间的等价算子是双射. 从而得到 $||x||$ 大小可被 $||Ax||$ 控制. 再将 y_n 做平移为 $y_n - y_0$ 收敛到 θ，利用开映射定理得到 $||x_n||$ 可被 $||y_n||, ||y_0||$ 控制，由于 $y_n \to y_0$ 所以 $||y_0||$ 大小可被 $||y_n||$ 控制，于是 $||x_n||$ 可被 $||y_n||$ 控制.

下面进行证明: 令 $N(A) = \{x \in X : A(x) = \theta\}$, 由于 A 有界, 则 $N(A)$ 是 X 的闭子空间, 于是商空间 $X/N(A)$ 关于范数 $|||[x]||| = \inf\limits_{y\in[x]} ||y||$ 构成 B 空间. 令 $T : X/N(A) \to Y$ 为 $T[x] = Ax$，由于 $\forall x, y \in [x]$ 有 $x - y \in N(A)$，于是 $A(x-y) = 0 \Rightarrow Ax = Ay \Rightarrow T[x] = T[y]$，所以 T 是一个映射. 下面证明 T 是双射:

单射: $\forall [x], [y] \in X/N(A)$ 且 $T[x] = T[y]$, 则 $Ax = Ay \Rightarrow A(x-y) = \theta \Rightarrow [x-y] = [\theta] \Rightarrow [x] = [y]$.

满射：由于 A 是满射，则 $\forall y \in Y$，$\exists x \in X$ 使得 $Ax = y$，则 $T[x] = y$.

综上 T 是双射，且 $||T[x]|| = ||Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$，则 T 有界，由逆算子定理可知 T^{-1} 有界.

则 $\forall y \in Y$，$\exists [x] \in X/N(A)$，使得 $T[x] = y \Rightarrow |||[x]||| = ||T^{-1}y|| \leqslant ||T^{-1}|| \cdot ||y||$，由于 $|||[x_n]||| = \inf\limits_{z\in[x]} ||z||$，则 $\exists x_0 \in [x]$ 使得 $||x_0|| \leqslant 2|||[x]||| \leqslant 2||T^{-1}|| \cdot ||y||$ 且 $Ax_0 = y$.

若 $y_n = \theta$ 时，取 $x_n = \theta$，所以不妨令下述 $y_n \neq \theta$

令 $z_n = y_n - y_0$，则 $z_n \to \theta$，由开映射定理 $\exists c > 0$，使得 $B_Y(\theta, c) \subset AB_X(\theta, 1)$，则 $B_Y(\theta, 2||z_n||) \subset AB_X(\theta, \frac{2||z_n||}{c})$，则 $\exists x_n' \in X$ 且 $||x_n'|| < \frac{2||z_n||}{c}$ 使得 $z_n = Ax_n'$，取$x_0 \in X$ 使得 $Ax_0 = y_0$ 且 $||x_0|| \leqslant 2||T^{-1}|| \cdot ||y_0||$，令 $x_n = x_n' + x_0$，则 $Ax_n = Ax_n' + Ax_0 = y_n - y_0 + y_0 = y_n$，且

$$||x_n|| = ||x_n' + x_0|| \leqslant \frac{2||y_n - y_0||}{c} + 2||T^{-1}|| \cdot ||y_0|| \leqslant \frac{2}{c}||y_n|| + 2(||T^{-1}|| + 1/c)||y_0||$$

由于 $y_n \to y_0$，则 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geqslant N$ 有

$$||y_0|| - ||y_n|| \leqslant ||y_0 - y_n|| \leqslant \frac{1}{2}||y_0|| \Rightarrow ||y_0|| \leqslant 2||y_n||$$

令 $M = \max\left\{\{||y_0||/||y_n|| : 1 \leqslant n \leqslant N\}, 2\right\}$，则 $||y_0|| \leqslant M||y_n||$，所以

$$||x_n|| \leqslant \left[\frac{2}{c} + 2M(||T^{-1}|| + 1/c)\right]||y_n||$$

□

题目 12. (2.3.12) 设 X, Y 是 B 空间，T 是闭线性算子，$D(T) \in X$，$R(T) \in Y$，$N(T) := \{x \in X : Tx = \theta\}$.

(1) 求证：$N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 求证：$N(T) = \{\theta\}$，$R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件为 $\exists \alpha > 0$，使得

$$||x|| \leqslant ||\alpha||Tx||, (\forall x \in D(T)).$$

(3) 令 $d(x,N(T)):=\inf\limits_{z\in N(T)}||z-x||$. 求证：$R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件为 $\exists\alpha>0$ 使得

$$d(x,N(T))\leqslant\alpha||Tx||,\ (\forall x\in D(T)).$$

证明. (1). $\forall\{x_n\}\subset N(T)$ 收敛于 x，则 $Tx_n=\theta$，于是 $Tx_n\to y=\theta$，由于 T 是闭的，则 $x\in D(T)$ 且 $Tx=y=\theta$，则 $x\in N(T)$. 故 $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2). 必要性：由于 $N(T)=\{\theta\}$，则 T 为单射. 由题目 2.3.4(3) 可知 T^{-1} 是闭算子，由于 $D(T^{-1})=R(T)$ 是闭的，由闭算子定理得 T^{-1} 有界，$\forall x\in D(T)$，$\exists y\in R(T)$ 使得 $x=T^{-1}y$，则

$$||x||=||T^{-1}y||\leqslant||T^{-1}||\cdot||y||=||T^{-1}||\cdot||Tx||,\ (\forall x\in D(T)).$$

充分性: 若 $Tx_1=Tx_2,\ (x_1,x_2\in X)$ 则 $||x_1-x_2||\leqslant\alpha||Tx_1-Tx_2||=0\Rightarrow x_1=x_2$, 则 T 是单射, 则 $N(T)=\{\theta\}$. 令 $\{Tx_n\}$ 为 $R(T)$ 中的收敛列, 则 $||x_n-x_m||\leqslant\alpha||Tx_n-Tx_m||\to0,\ (n,m\to\infty)$，则 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列，由于 X 是完备的，则 $x_n\to x\in X$，则 $Tx_n\to Tx\in R(T)$，故 $R(T)$ 是闭的.

(3). 令 $A:X/N(T)\to Y$，$A[x]=Tx$，则 $d(x,N(T))=||[x]||$，且 A 为单射，因为 $A[x]=A[y]\Rightarrow Tx=Ty\Rightarrow T(x-y)=\theta\Rightarrow[x-y]=[\theta]\Rightarrow[x]=[y]$，由 (2) 可知，只需证 A 是闭算子.

设 $[x_n]\to[x]$, $A[x_n]\to y$, 由于 $||[x]||=\inf\limits_{z\in[x]}||z||$ 则 $\exists x_n\in X$ 使得 $||x_n-x||\leqslant2||[x_n-x]||\to0$ 且 $Tx_n=A[x_n]\to y$，由于 T 是闭算子，则 $x\in D(T),\ y=Tx$，故 A 是闭算子. □

题目 13. (2.3.13) 设 $a(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函，满足:

(1) $\exists M>0$，使得 $|a(x,y)|\leqslant M||x||\cdot||y||,\ (\forall x,y\in H)$;

(2) $\exists\delta>0$，使得 $|a(x,y)|\geqslant\delta||x||^2,\ (\forall x\in H)$.

求证：$\forall f\in H^*$，$\exists!y_f\in H$，使得 $a(x,y_f)=f(x),\ (\forall x\in H)$，而且 y_f 连续地依赖于 f.

证明. 由 Riesz 表示定理可知，$\exists!z_f\in H$ 使得 $f(x)=(x,z_f),\ (\forall x\in H)$，由 Lax-Milgram 定理知 $\exists A\in L(x)$ 且 $A^{-1}\in L(X)$ 使得 $a(x,y)=(x,Ay)$，令 $y_f=A^{-1}z_f$，则

$$f(x)=(x,z_f)=(x,Ay_f)=a(x,y_f)$$

且 y_f 连续地依赖于 f. □