日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 6 月 7 日	复变函数	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第六章 2. 求下列积分: (1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^2-2)}$;

(2) $\displaystyle\int_{|z|=R}\sqrt{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z \quad (a\neq b,\ R>\max(|a|,|b|))$.

解答. (1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^2-2)}=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f,0)=\left(\frac{1}{z^2-2}\right)^{(2)}\Big|_{z=0}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$.

5. 设 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 点解析, $\varphi'(a)\neq 0$, 证明:

$$\frac{A}{\varphi'(a)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\frac{A}{\varphi(z)-\varphi(a)}\,\mathrm{d}z \quad (\rho\text{充分小},A\text{为常数}).$$

证明.

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\frac{A}{\varphi(z)-\varphi(a)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\frac{A}{\frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a}(z-a)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\frac{A}{\varphi'(a)(z-a)}\,\mathrm{d}z=\frac{A}{\varphi'(a)}t$$

□

6. 设 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 点解析, 且 $\varphi'(a)\neq 0$, $\zeta_0=\varphi(a)$ 是函数 $f(\zeta)$ 的简单极点, 其留数为 A, 求 $\mathrm{Res}(f\circ\varphi;a)$.

解答. 由 φ 在 $z=a$ 的邻域内连续, 由反函数求导公式 $\mathrm{d}(\zeta^{-1})(z)=\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\varphi'(\zeta)}$ 可知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}f(\varphi(z))\,\mathrm{d}z\xlongequal{\varphi^{-1}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-\zeta_0|=\rho_1}\frac{f(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{A}{\varphi'(\zeta_0)}.$$

7. 若 $f(z)$ 是偶函数, 且是 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数, 证明:

(1) $\mathrm{Res}(f;a)=-\mathrm{Res}(f;-a)$;

(2) $\displaystyle\int_{|z|=R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$, $f(z)$ 在 $|z|=R$ 上无极点.

证明. (1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;a)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}f(z)\,\mathrm{d}z\xlongequal{z=-\zeta}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z+a|=\rho}f(-z)\,\mathrm{d}z\\&\xlongequal{f\text{为偶函数}}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z+a|=\rho}f(z)\,\mathrm{d}z=-\mathrm{Res}(f;-a).\end{aligned}$$

(2) 由于 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 则 f 在 $|z|=R$ 所围成的区域 D 中的极点个数是有限的, 又由于 f 是偶函数, 所以极点也是对称的, 设极点为 $z_1,z_2,\cdots,z_n,-z_1,-z_2,\cdots,-z_n$, 由留数定理和第一问结论得

$$\int_{|z|=R}f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(f;z_i)+\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(f;-z_i)\xlongequal{(1)}0$$

□

9. 求方程 $x^5+11z+9=0$ 在下列区域内根的个数:

(1) $3/4<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$; (3) $x>0,y>0$; (4) $x<0,y>0$.

解答. (1) (2) 当 $|z|=3/4$ 时, $|z^5+11z|\leqslant 9$, 于是 $z^5+11z+9$ 与 9 在 $|z|\leqslant 3/4$ 上的根数相同;

当 $|z|=1$ 时, $|z^5+9|=10<11=|11z|$, 于是 $z^5+11z+9$ 与 $11z$ 在 $|z|<1$ 上的根数相同, 均为 1 个根;

当 $|z|=2$ 时, $|11z+9|=31<32=|z^5|$, 于是 $z^5+11z+9$ 与 z^5 在 $|z|<2$ 上根数相同均为 5 个根.

综上, $z^5+11z+9$ 在 $3/4<|z|<1$ 上有 1 个根, 在 $1<|z|<2$ 上有 4 个根.

(3) 下面讨论第一象限上的根的个数, 做图 6-2 的曲线 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$, 设 $P(z)=z^5+11z+9$, 则 $P(x)\neq 0$, $(x>0,x\in\mathbb{R})$, 且 $P(iy)=iy^5+11iy+9\neq 0$, 所以当 $R\to\infty$ 时, $P(z)$ 在 γ 上无零点. 于是当 $R\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}(P(z)) &= \mathrm{Arg}(P(R)-P(0))=\mathrm{Arg}(R^5+11R+9)=0\\
\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}(P(z)) &= \Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}(z^5(1+\frac{11z+9}{z^5}))=2\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)\\
\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}(P(z)) &= \mathrm{Arg}(P(0)-P(iR))=-\mathrm{Arg}(9+iR(R^4+11))=-\frac{\pi}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

所以 $\Delta_\gamma=\sum_{k=1}^{3}\Delta_{\gamma_k}\mathrm{Arg}(P(z))=2\pi+o(1)\quad(R\to\infty)$. 由辐角原理知, $P(z)$ 在第一象限上只有一个根.

(4) 由于 $P(z)$ 在第一象限上有一个根, 有共轭性质, 在第四象限上也有一个根, 由 (1) 问可知, $P(z)$ 在 $(-1,-3/4)$ 上有一个根, 且在 $(\infty,-1]$ 上无根 (根据导数恒正易得), 所以 $P(z)$ 在第二和第三象限上各有一个根.

11. 证明方程 $z^8+3z^3+7z+5=0$ 在第一象限恰有两个根.

证明. 做图 6-2 的曲线 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$, 设 $P(z)=z^8+3z^3+7z+5=0$, 则 $P(z)$ 在 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上无根, $P(iy)=y^8+5+i(7y-3y^3)\neq 0$, 所以当 $R\to\infty$ 时, $P(z)$ 在 γ 上无根. 于是当 $R\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}(P(z)) &= \mathrm{Arg}(P(R)-P(0))=\mathrm{Arg}(R^8+3R^3+7R+5)=0\\
\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}(P(z)) &= \Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\left(z^8+\left(1+\frac{3z^3+7z+5}{z^8}\right)\right)=4\pi+o(1)\\
\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}(P(z)) &= \mathrm{Arg}(P(0)-P(iR))=-\mathrm{Arg}\left(1+i\left(\frac{7y-3y^3}{y^8+5}\right)\right)=o(1)
\end{aligned}$$

所以 $\Delta_\gamma=\sum_{k=1}^{3}\Delta_{\gamma_k}\mathrm{Arg}(P(z))=4\pi+o(1)\quad(R\to\infty)$, 由辐角原理知, $P(z)$ 在第一象限上有 2 个根. □

14. 若多项式 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上满足 $|P(z)|\leqslant M$. 证明: 多项式 $P(z)$ 的零点皆位于圆 $|z|<1+M$ 内.

证明. 由于 $|P(z)|\leqslant M\ (|z|\leqslant 1)$, 取 $\xi=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$, 则

$$|P(\xi^k)|=|1+a_1\xi^{-k}+a_2\xi^{-2k}+\cdots+a_{n-1}\xi^{k}+a_n|\leqslant M$$

于是

$$\begin{aligned}nM&\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}|\xi^{-jk}|\cdot|1+a_1\xi^{-k}+a_2\xi^{-2k}+\cdots+a_{n-1}\xi^{k}+a_n|\\&\geqslant\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi^{-jk}+a_1\xi^{-(j+1)k}+a_2\xi^{-(j+2)k}+\cdots+a_{n-1}\xi^{-(j+n-1)k}+a_n\xi^{-jk}\right)\right|\end{aligned}$$

考虑 a_m 的求和, 当 $j+m\neq n$ 时

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_m\xi^{-(j+m)k}=a_m\frac{1-\xi^{-n(j+m)}}{1-\xi^{-(j+m)}}=0.$$

当 $m=n-j$ 时, 则 $nM\geqslant n|a_{n-j}|\Rightarrow|a_{n-j}|$.

于是 $|a_k|\leqslant M(1\leqslant k\leqslant n)$, 所以在 $|z|=1+M$ 上, 有

$$\frac{|a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|}{|z^n|}\leqslant\frac{M((1+M)^{n-1}+\cdots+1)}{(1+M)^n}=\frac{M((1+M)^n-1))}{(1+M)^n((M+1)-1)}=\frac{M((1+M)^n-1)}{M(1+M)^n}<1,$$

由 Rouche 定理可知, 在 $|z|<1+M$ 上 $P(z)$ 与 z^n 均有 n 个根, 所以 $P(z)$ 的所有根均在 $|z|<1+M$ 内. □

15. 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 证明: a 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是 a 为 $F(z)=e^{f(z)}$ 的可去奇点.

证明. 由于 e^x 是解析函数, 当 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在时, 记为 $f(a)$, 则 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=e^{f(a)}$;

当 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=A$ 时, 取主值可得, $\lim\limits_{z\to a}f(z)=|A|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}A$. □

23. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$($n$ 为自然数且 $n\geqslant 3$).

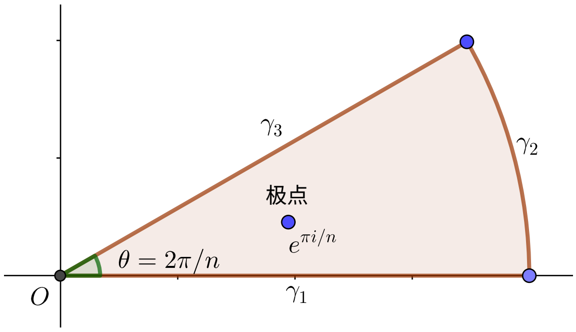
证明. (1) 构造图 6-9 的半圆曲线, 令 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+6z^2+13}$, 则分母的的在正半轴上的零点为 $-\sqrt{-3-2\mathrm{i}}$ 和 $\sqrt{-3+2\mathrm{i}}$. 于是

$$\mathrm{Res}(f(z);-\sqrt{-3-2\mathrm{i}})=\left.\frac{z^2}{4z^3+12z}\right|_{z=-\sqrt{-3-2\mathrm{i}}}=-\frac{\sqrt{3+2\mathrm{i}}}{8},$$

$$\mathrm{Res}(f(z);\sqrt{-3+2\mathrm{i}})=\frac{\sqrt{3-2\mathrm{i}}}{8}$$

$$\int_0^{\infty}f(z)\,\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3+2\mathrm{i}}}{8}+\frac{\sqrt{3-2\mathrm{i}}}{8}\right)=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}.$$

(2) 设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^n}$, 构造如下图所示的曲线 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$, 圆弧半径为 R 辐角为 $\dfrac{2\pi}{2}$.



则 $f(z)$ 在 γ 所围成的区域内只有唯一的极点 $\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}$, 当 $R\to\infty$ 时

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\leqslant \mathcal{O}\left(\frac{1}{|R|}\right)\to 0,$$
$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z=-e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

则

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^n}\,\mathrm{d}z=\left(1-e^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}\right)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x,$$

由于 $\mathrm{Res}\left(f;e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}\right)=\left.\dfrac{1}{nz^{n-1}}\right|_{z=e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}=\left.\dfrac{z}{nz^n}\right|_{z=e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}=-\dfrac{e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}{n}$, 所以

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{-\pi\mathrm{i}e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}{n\left(1-e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}\right)}=\frac{-2\pi\mathrm{i}}{n\left(e^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}-e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}\right)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \qquad (n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}).$$

□

24. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\sin\theta}$ $(|a|>1)$; (2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ $(|a|<1)$.

解答. (1) 设 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, 则 $\sin\theta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$. 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(a-\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}=2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{-z^2+2\mathrm{i}az+1},$$

方程 $-z^2+2\mathrm{i}az+1=0$ 在 $|z|<1$ 内的根为 $\alpha=\mathrm{i}(a-\sqrt{a^2-a})$, 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\sin\theta}=2\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{-z^2+2\mathrm{i}az+1};\alpha\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(2) 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$. 于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2\right)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{-az^2+(1+a^2)z-a},$$

方程 $az^2-(1+a^2)z+a=0$ 的根为 $\alpha=a,\beta=\dfrac{1}{a}$, 则 α 在 $|z|<1$ 内, 由留数定理

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{-az^2+(1+a^2)z-a};\alpha\right)=\frac{1}{1-a^2}.$$

25. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$; (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 构造如图 6-10 的闭合曲线, 令 $f(z)=\dfrac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+a^2}$, 由留数定理

$$\int_{-R}^{R}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\,(f;a\mathrm{i})=\pi\mathrm{i}e^{-a^2},$$

由 Jordan 引理可知, 当 $R\to\infty$ 时, 上式左端第二项为 0, 所以

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-a^2}.$$

(2) 构造如图 6-16 的闭合曲线, 虚轴上的积分为

$$\int_{\mathrm{i}R}^{\mathrm{i}r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}\,\mathrm{d}z\xlongequal{z\to\mathrm{i}x}-\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

设 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}$, 由 Cauchy 定理知

$$\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\gamma_r}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

由于 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=0$, 由引理 1 和引理 2 可知, 当 $R\to\infty,r\to0$ 时, 上式左端第三, 四项为 0, 所以

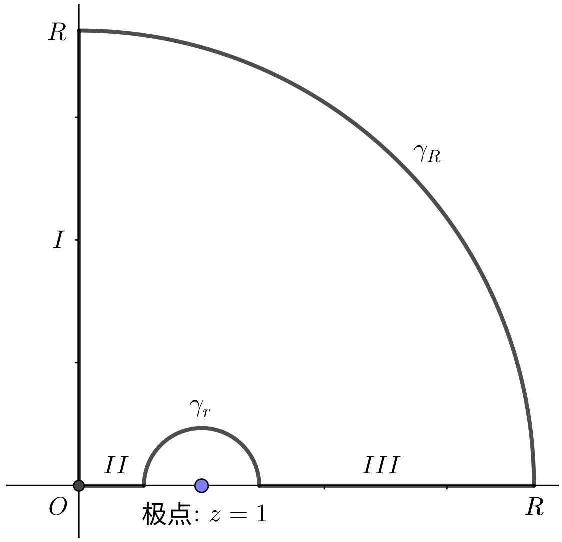
$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-2\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x=0,$$

故 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x=0$.

26. 求下列积分: (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{p-1}\cos x\,\mathrm{d}x\ (0<p<1)$.

解答. (1) 构造如下图所示的闭合曲线 $\gamma=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\gamma_r+\gamma_R$. 设 $f(z)=\dfrac{\log z}{z^2-1}$, 由于 $z=1$ 为 $f(z)$ 的一级极点, 且 $\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)=0$, 由引理 1 可知 $\displaystyle\int_{\gamma_r}f(z)\,\mathrm{d}z=0$; 又由于

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{\log z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\log R}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}-1}\,\mathrm{d}\theta\to0\quad(R\to\infty).$$



在路径 I 上, $z=\mathrm{i}y\ (0\leqslant y\leqslant R)$, 则

$$\int_I \frac{\log z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{2}\int_0^R\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}=-\frac{\pi}{2}\arctan R.$$

于是当 $R\to\infty,\ r\to 0$ 时, 由 Cauchy 定理知

$$\int_{\mathrm{I}} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\mathrm{II}} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\mathrm{III}} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_\mathrm{r}} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_\mathrm{R}} f(z)\,\mathrm{d}z=0$$
$$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=-\int_I f(z)\,\mathrm{d}z=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

(2) 构造如图 6-16 的闭合曲线, 设 $f(z)=z^{p-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, 则在 γ_R 上

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\xlongequal{z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}R^p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\cos\theta}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant R^p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\leqslant R^p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2R^{1-p}}\left(1-\mathrm{e}^{-R}\right)\to 0\quad(R\to\infty).$$

类似地, 在 γ_r 上

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\pi}{2r^{1-p}}\left(\mathrm{e}^{-r}-1\right)\to 0\quad(r\to 0).$$

在虚轴部分上, $z=\mathrm{i}y\ (r\leqslant y\leqslant R)$, 于是

$$\int_R^r(\mathrm{i}y)^{p-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y=-\mathrm{i}^p\int_r^R y^{p-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\xlongequal{\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi p}{2}}\int_r^R y^{p-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y,$$

令 $R\to\infty,\ r\to 0$, 由 Cauchy 定理知

$$\int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi p}{2}}\int_0^\infty y^{p-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}+\mathrm{i}\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2},$$

取实部可得

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos x\,\mathrm{d}x=\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}.$$

27. 计算积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

解答. 构造如图 6-12 的曲线, 其中 $\mathrm{II}=x\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$, 设 $f(z)=\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})z^2}$, 则在 γ_R 上

$$\left|\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})z^2}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{8}}\mathrm{e}^{-R^2(\cos 2\theta+\sin 2\theta)}=R\int_0^{\frac{\pi}{8}}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}R^2\sin(\frac{\pi}{4}+2\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{8}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}R^2}\mathrm{e}^{-\frac{4\sqrt{2}R^2}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}R}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}R^2}\to 0\quad(R\to\infty).$$

在 II 上, $z=x\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$, 于是

$$\int_{\mathrm{II}}f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{i}}}\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

当 $\mathbb{R}\to\infty$ 时, 由 Cauchy 定理知

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-\mathrm{i}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}},$$

取实部可得

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi(1+\sqrt{2})}}{4}.$$