日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 11 月 21 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460	50

第四次作业

题目 1. (22) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来满足参数为 θ 的 Bernoulli 分布的随机样本.

(1). 求解 $\theta(1-\theta)$ 的 C-R 下界.

(2). 若 $\theta(1-\theta)$ 的 UMVUE 存在，对其进行求解.

解答. (1). Bernoulli 分布的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}I_{\{0,1\}}(x)$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta^x(1-\theta^x))=\frac{x}{\theta}-\frac{1-x}{1-\theta},\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log\theta^x(1-\theta)^{1-x})=-\frac{x}{\theta^2}-\frac{1-x}{(1-\theta)^2},$$

则 Fisher 信息量为 $I(\theta)=-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log\theta^x(1-\theta)^{1-x})\right]=\frac{1}{(1-\theta)^2}+\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{(1-\theta)^2}\right)\theta=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$.于是 $\theta(1-\theta)$ 的 C-R 下界为 $\frac{(1-2\theta)^2}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}}=\frac{(1-2\theta)^2\theta(1-\theta)}{n}$.

(2). 由于 $f(x;\theta)=(1-\theta)I_{\{0,1\}}(x)\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}$，令 $a(\theta)=1-\theta, b(x)=I_{\{0,1\}}(x), c(\theta)=\log\frac{\theta}{1-\theta}, d(x)=x$,则该分布属于指数族,于是 $\sum_{i=1}^nX_i$ 为完备的充分统计量,令 $Y=\sum_{i=1}^nX_i,\ Z=\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)^2$，由于

$$\mathbb{E}(Y)=n\theta,\ \mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^nX_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}X_iX_j\right]=n\theta+n(n-1)\theta^2=n(n-1)\left(\frac{\theta}{n-1}+\theta^2\right).$$

则 $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n}\right]=\theta,\ \mathbb{E}\left[\frac{z}{n(n-1)}-\frac{Y}{n(n-1)}\right]=\theta^2$，于是

$$\theta(1-\theta)=\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n}\right]-\mathbb{E}\left[\frac{z}{n(n-1)}-\frac{Y}{n(n-1)}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n-1}-\frac{Z}{n(n-1)}\right],$$

由于 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^nX_i-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)^2$ 是关于完备充分统计量 Y 的函数，且是 $\theta(1-\theta)$ 的无偏估计，所以它是 $\theta(1-\theta)$ 的 UMVUE.

题目 2. (24) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x),\ (\theta>0)$ 的随机样本，

(1). 求解 $\mu=\theta/(1+\theta)$ 的 MLE.

(2). 求解一个充分统计量，并验证其完备性. 判断 $\sum_{i=1}^nX_i$ 是否是充分统计量?

(3). 是否存在一个关于 θ 的函数，使得其存在无偏估计且方差满足 C-R 下界?

(4). 求解 $\theta,1/\theta,\mu=\theta/(1+\theta)$ 的 UMVUE.

解答. (1). 只需求解 θ 的 MLE：$\mathcal{L}(\theta)=\prod_{i=1}^n\theta x_i^{\theta-1}I_{(0,1)}(x_i)$，由

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(n\log\theta+\sum_{i=1}^n(\theta-1)\log(x_i)+\sum_{i=1}^n\log I_{(0,1)}(x_i)\right)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\log(x_i)=0$$

可得 θ 的 MLE 为 $\hat\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n\log(x_i)}$. 则 μ 的 MLE 为

$$\hat\mu=\frac{\hat\theta}{1-\hat\theta}=\frac{n}{n-\sum_{i=1}^n\log(x_i)}.$$

(2). 由于 $f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)=\theta I_{(0,1)}(x)\exp\{(\theta-1)\log x\}$，令 $a(\theta)=\theta,\ b(x)=I_{(0,1)}(x)$, $c(\theta)=\theta-1,\ d(x)=\log x$，于是该分布属于指数族，则 $\sum\limits_{i=1}^n d(x_i)=\sum\limits_{i=1}^n\log x_i$ 是一个完备的充分统计量. 由于 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 不满足因子分解定理，所以不是充分统计量.

(3). 由于 $f_{-\log X}(x)=f_X(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x}=\theta\mathrm{e}^{-(\theta-1)x}\mathrm{e}^{-x}I_{(0,1)}(\mathrm{e}^{-x})=\theta\mathrm{e}^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$. 于是 $-\log X\sim$ $\mathrm{Exp}(\theta)$. 令 $T=-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\log X_i$，则 $nT\sim\Gamma(n,\theta)\Rightarrow\mathbb{E}(T)=\dfrac{1}{\theta}$. 则 T 是 $\dfrac{1}{\theta}$ 的无偏估计，且

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta+(\theta-1)\log x)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\log x_i=-n\left(T-\frac{1}{\theta}\right)$$

所以 C-R 方程取到等号，故 $T=-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\log X_i$ 取到 $\dfrac{1}{\theta}$ 的 C-R 下界.

(4). 由第三小问可知，$-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\log X_i$ 是 $\dfrac{1}{\theta}$ 的 UMVUE.

做待定系数，令 $\dfrac{c}{-\sum_{i=1}^n\log X_i}$ 是 θ 的无偏估计，记 $Y=-\sum\limits_{i=1}^n\log X_i$，则

$$\mathbb{E}\left[\frac{c}{-\sum_{i=1}^n\log X_i}\right]=\int_0^\infty\frac{c}{y}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta y}\,\mathrm{d}y=\frac{c\theta^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}}=\frac{c}{n-1}\theta,$$

所以 $c=n-1$，故 $\dfrac{n-1}{-\sum_{i=1}^n\log X_i}$ 是 θ 的 UMVUE.

$\theta(1-\theta)$ 的一个无偏估计为 X_1，下面计算 $\mathbb{E}\left[X_1\middle|-\sum\limits_{i=1}^n\log X_i\right]$.

令 $Z=-\log X_1$，于是 $X_1=\mathrm{e}^{-Z}$，且 $Z\sim\Gamma(1,\theta)$，令 $S=-\sum\limits_{i=1}^n\log X_i$，则 $S\sim\Gamma(n,\theta)$，于是

$$\mathbb{E}\left[X_1\middle|-\sum_{i=1}^n\log X_i=s\right]=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-Z}\middle|S=s\right]=\int\mathrm{e}^{-z}f(z|s)\,\mathrm{d}z=\int\mathrm{e}^{-z}\frac{f(z,s)}{f_S(s)}\,\mathrm{d}z$$

令 $Y=-\sum\limits_{i=2}^n\log X_i$, 则 $S=Y+Z$ 且 Y,Z 独立, 可求出 Y,Z 的联合分布为 $f(y,z)=f_Y(y)f_Z(z)$, 且变量代换的 Jacobi 行列式 $|J|=1$，于是

$$f(s,z)=f_{Y,Z}(s-z,z)|J|=f_Y(s-z)f_Z(z)=\frac{\theta^n}{\Gamma(n-1)}(s-z)^{n-2}\mathrm{e}^{-\theta s}$$

于是 $f(z|s)=\dfrac{f(z,s)}{f_S(s)}=\dfrac{(n-1)(s-z)^{n-2}}{s^{n-1}}$，则

$$\mathbb{E}\left[X_1|S=s\right]=\int_0^s\mathrm{e}^{-z}\frac{(n-1)(s-z)^{n-2}}{s^{n-1}}\,\mathrm{d}z\xlongequal{s-z=t}\frac{(n-1)\mathrm{e}^{-s}}{s^{n-1}}\int_0^s t^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

由如下两种方法求上述积分：**方法一（分部积分）**

$$
\begin{aligned}
\int_0^s t^{n-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^s t^{n-2}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t = s^{n-2}\mathrm{e}^s - (n-2)\int_0^s t^{n-3}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t \\
&= s^{n-2}\mathrm{e}^s - (n-2)s^{n-3}\mathrm{e}^s + (n-2)(n-3)\int_0^s t^{n-4}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t = \cdots \\
&= s^{n-2}\mathrm{e}^s - (n-2)s^{n-3}\mathrm{e}^s + - \cdots + (-1)^{n-3}(n-2)!s\mathrm{e}^s + (-1)^{n-2}(n-2)!\int_0^s \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^s\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!}(-1)^{n-k}s^k + (-1)^{n-1}(n-2)!
\end{aligned}
$$

方法二（凑 Gamma 函数）

$$
\int_0^s t^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \xlongequal{t\to -t} \int_{-s}^0 \mathrm{e}^{-t}(-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t = (-1)^{n-2}\left[\int_{-s}^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-2}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-2}\,\mathrm{d}t\right] = (-1^{n-2})[I_1+I_2]
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-s}^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{t\to t-s} \mathrm{e}^s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(t-s)^{n-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-s)^k t^{n-k-2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-s)^k\mathrm{e}^s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-k-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k s^k\mathrm{e}^s\Gamma(n-k-1) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!}(-1)^k s^k\mathrm{e}^s \\
I_2 &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-2}\,\mathrm{d}t = -\Gamma(n-1) = -(n-2)!
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_0^s t^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-1)^{n-2}[I_1+I_2] = \mathrm{e}^s\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!}(-1)^{n-k}s^k + (-1)^{n-1}(n-2)!
$$

综上

$$
\mathbb{E}\left[X_1\middle|-\sum_{i=1}^n\log X_i = s\right] = \frac{(n-1)\mathrm{e}^{-s}}{s^{n-1}}\left[\mathrm{e}^s\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!}(-1)^{n-k}s^k + (-1)^{n-1}(n-2)!\right]
$$

题目 3. (29) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\theta,1)$ 的随机样本.

(1). 分别求解关于 $\theta,\theta^2,P(X>0)$ 的 C-R 下界.

(2). 当 $n=1$ 时，是否存在关于 θ^2 的无偏估计？若存在，求解之.

(3). 是否存在关于 $P(X>0)$ 的无偏估计？若存在，求解之.

(4). 求解 $P(X>0)$ 的 MLE.

(5). 是否存在关于 θ^2 的 UMVUE. 若存在，求解之.

(6). 是否存在关于 $P(X>0)$ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

解答. (1). $N(\theta,1)$ 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-\theta)^2}{2}\right\}$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\log 2\pi}{2}-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)=x-\theta,$$

Fisher 信息量为 $I(\theta)=\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right]^2=\mathbb{E}[x^2-2\theta x+\theta^2]$，由于 $\mathbb{E}(x^2)=\mathrm{Var}(X)+[\mathbb{E}(X)]^2=1+\theta^2$，于是 $I(x)=1+\theta^2-2\theta^2+\theta^2=1$.

所以 θ 的 C-R 下界为 $\dfrac{1}{n}$，θ^2 的 C-R 下界为 $\dfrac{4\theta^2}{n}$.

由于 $X-\theta\sim N(0,1)$，则

$$P(x>0)=P(x-\theta>-\theta)=1-P(x-\theta\leqslant-\theta)=1-\Phi(-\theta)=\Phi(\theta),$$

所以 $P(x>0)$ 的 C-R 下界为 $\dfrac{(\Phi'(-\theta))^2}{n}=\dfrac{f(\theta;1)^2}{n}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\theta^2}}{2\pi n}$.

(2). 由于 $\mathbb{E}(X_1^2)=1+\theta^2$，则 X_1^2-1 是 θ^2 的无偏估计.

(3). 由于 $\mathbb{E}(I(X_1>0))=\displaystyle\int_0^\infty f(x;\theta)\,\mathrm{d}x=P(X>0)$，则 $I(X_1>0)$ 是 $P(X>0)$ 的无偏估计.

(4). 只需求解 θ 的 MLE：

$$\log\mathcal{L}(\theta)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta)=\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)=0$$

则 θ 的 MLE 为 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $P(X>0)=1-\Phi(-\theta)=\Phi(\theta)$，则 $P(X>0)$ 的 MLE 为 $\Phi(\bar{X})$.

(5). 由于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)+\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right]^2=\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(X_i)+(n\mathbb{E}(X))^2=n+n^2\theta^2$$

则 θ^2 的 UMVUE 为 $\dfrac{1}{n^2}\left[\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\right)^2-n\right]$.

(6). 令 $S=\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $I(X_1>0)$ 是 $P(X>0)$ 的 UMVUE，则

$$\mathbb{E}\left[I(X_1>0)\middle|\sum_{i=1}^n X_i=s\right]=P(X_1>0|\sum_{i=1}^n X_i=s)=\int_0^\infty f(x|s)\,\mathrm{d}x$$

令 $Y=\displaystyle\sum_{i=2}^n X_i$，则 Y 与 X_1 独立，$f_{X_1,Y}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{n-1}}\exp\left\{-\dfrac{(x-\theta)^2}{2}-\dfrac{(x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)}\right\}$.

变量代换得

$$f_{X_1,S}(x,s)=f_{X,Y}(x,s-x)\cdot 1=\frac{1}{2\pi\sqrt{n-1}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}-\frac{(s-x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)}\right\}$$

于是

$$
\begin{aligned}
f(x|s) = \frac{f(x,s)}{f(s)} &= \sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2} - \frac{(s-x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)} + \frac{(s-n\theta)^2}{2n}\right\} \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}x - \frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2\right\} \mathrm{d}x \\
&= 1 - \Phi(-\frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}) = \Phi(\frac{s}{\sqrt{n(n-1)}})
\end{aligned}
$$

则 $P(X>0)$ 的 UMVUE 为 $\Phi(\frac{n\bar{X}}{\sqrt{n(n-1)}})$.

题目 4. (30) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λ 的 Poisson 分布随机样本，求解关于 $\tau(\lambda)=(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$ 的无偏估计量，MLE 和 UMVUE.

解答. Poisson 分布的概率密度函数为 $f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$.

由于 $\mathbb{E}(I(X_1=0)+I(X_1=1)) = P(X_1=0)+P(X_1=1) = (1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$，所以 $I(X_1=0)+I(X_1=1)$ 是 $(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$ 的无偏估计.

$$
\log\mathcal{L}(\lambda) = \log\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}I_{\{0,1,\cdots\}}(x) = \sum_{i=1}^n x_i\log\lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i! - n\lambda + \sum_{i=1}^n \log I_{\{0,1,\cdots\}}(x).
$$

于是 $\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}=\bar{X}$，则 $\tau(\lambda)$ 的 MLE 为 $(1+\bar{X})\mathrm{e}^{-\bar{X}}$.

由于 $f(x;\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{I_{\{0,1,\cdots\}}(x)}{x!}\exp\{-x\log\lambda\}$，令 $a(\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda}$, $b(x)=\frac{I_{\{0,1,\cdots\}}(x)}{x!}$, $c(\lambda) = -\log\lambda$, $d(x)=x$，则该分布属于指数族，于是 $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ 是完备充分统计量. 则

$$
\mathbb{E}\left[I(X_1=0)+I(X_1=1)|n\bar{X}=s\right] = P\left[X_1=0|n\bar{X}=s\right] + P\left[X_1=1|n\bar{X}=s\right]
$$

由于 $n\bar{X}\sim \mathrm{Poi}(n\lambda)$，于是 $P(n\bar{X}=s) = \frac{(n\lambda)^s}{s!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$，且

$$
P(X_1=0,n\bar{X}=s) = P(X_1=0)P(\sum_{i=2}^n X_i = s) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{((n-1)\lambda)^s}{s!}\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda} = \frac{(n-1)^s\lambda^s}{s!}\mathrm{e}^{-n\lambda}
$$

$$
P(X_1=1,n\bar{X}=s) = P(X_1=1)P(\sum_{i=2}^n X_i = s-1) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{((n-1)\lambda)^{s-1}}{(s-1)!}\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda} = \frac{(n-1)^{s-1}\lambda^s}{(s-1)!}\mathrm{e}^{-n\lambda}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I(X_1=0)+I(X_1=1)|n\bar{X}=s\right] &= \frac{P(X_1=0,n\bar{X}=s)}{P(n\bar{X}=s)} + \frac{P(X_1=1,n\bar{X}=s)}{P(n\bar{X}=s)} \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^s + \frac{s}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-1}.
\end{aligned}
$$

则 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}+\bar{X}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}-1}$ 是 $\tau(\lambda)$ 的 UMVUE.

题目 5. (31) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\frac{2x}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本.

(1). 求解关于 θ 的 MLE.

(2). $Y_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是充分统计量吗? Y_n 是完备的吗?

(3). 是否存在关于 θ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

解答. (1). 极大似然函数为

$$\mathcal{L}(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x_i)=\frac{2}{\theta^{2n}}I_{[0,y_n]}(y_1)I_{[y_n,\infty)}(\theta)\prod_{i=1}^{n}x_i.$$

则 θ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=Y_n$.

(2). 由于 $\mathcal{L}(\theta)=I_{[0,y_n]}(y_1)\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{2}{\theta^{2n}}I_{[y_n,\infty)}(\theta)=h(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(y_n;\theta)$，所以 Y_n 是充分统计量. 由于 $f_{Y_n}(y)=nF(y)^{n-1}f(y)=n\left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1}\cdot\frac{2y}{\theta^2}=\frac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n-1}$，对于任意的实值函数 $z(\cdot)$，有下式成立

$$0=\mathbb{E}(z(Y_n))=\int_0^\theta z(y)\frac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n-1}\,\mathrm{d}y\Rightarrow\int_0^\theta z(y)y^{2n-1}\,\mathrm{d}y=0$$

对 θ 求导可得 $z(\theta)\theta^{2n-1}=0,\ (\theta>0)$，则 $z(\theta)\equiv 0$，于是 $P(z(Y_n)=0)=1$，故 Y_n 是完备的.

(3). 由于

$$\mathbb{E}(Y_n)=\int_0^\theta y\cdot\frac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n-1}\,\mathrm{d}y=\frac{2n}{2n+1}\theta$$

则 $\frac{2n+1}{2n}Y_n$ 是 θ 的 UMVUE.

题目 6. (32) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}I_{(0,\infty)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本.

(1). 当 $\theta>1$ 时，求解 θ 的矩估计.

(2). 求解 $1/\theta$ 的 MLE.

(3). 如果完备充分统计量存在，对其进行求解.

(4). 求解关于 $1/\theta$ 的 C-R 下界.

(5). 求解关于 $1/\theta$ 的 UMVUE.

(6). 求解关于 θ 的 UMVUE.

解答. (1). $\mathbb{E}(\bar{X})=\mathbb{E}(X)=\int_0^\infty x\theta(1+x)^{-(1+\theta)}\,\mathrm{d}x=\theta\int_1^\infty(x-1)x^{-(1+\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta-1}$，于是 θ 的矩估计为 $\frac{1}{\bar{X}}+1$.

(2). 由于 $\log L(\theta)=\log\theta^n\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-(1+\theta)}=n\log\theta-(1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$, 则 $\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)=0$，于是 θ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$，所以 $1/\theta$ 的 MLE 为 $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}$.

(3). 由于 $f(x;\theta)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}I_{(0,\infty)}(x)=\theta I_{(0,\infty)}(x)\exp\{-(1+\theta)\log(1+x)\}$，令 $a(\theta)=\theta$, $I_{(0,\infty)}(x)=b(x)$, $c(\theta)=-(1+\theta)$, $d(x)=\log(1+x)$，所以该分布属于指数族，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\log(1+X_i)$ 为完备充分统计量.

(4). 由于 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta-(1+\theta)\log(1+x))=\dfrac{1}{\theta}-\log(1+x)$，$\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)=-\dfrac{1}{\theta^2}$，则 Fisher 信息量为 $I(\theta)=-\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]=\dfrac{1}{\theta^2}$，则 $1/\theta$ 的 C-R 下界为 $\dfrac{[(1/\theta)']^2}{nI(\theta)}=\dfrac{1}{n\theta^2}$.

(5). 令 $Y=\log(1+X)$，则 $f_Y(y)=f_X(\mathrm{e}^y-1)\mathrm{e}^y=\theta(\mathrm{e}^y)^{-(1+\theta)}\mathrm{e}^y=\theta\mathrm{e}^{-\theta y}\sim\mathrm{Exp}(\theta)$.则 $\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\log(1+X_i)\right]=n\mathbb{E}(Y)=\dfrac{n}{\theta}$，则 $\dfrac{1}{\theta}$ 的 UMVUE 为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\log(1+X_i)$.

(6).（该过程与 24.(4) 求解 θ 的无偏估计方法完全一致，均为 Gamma 分布的变式）做待定系数，令 $\dfrac{c}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}$ 为 θ 的无偏估计，记 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}\log(1+X_i)$，则 $Y\sim\Gamma(n,\theta)$，且

$$\mathbb{E}\left[\frac{c}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}\right]=\int_0^{\infty}\frac{c}{y}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta y}\,\mathrm{d}y=\frac{c\theta^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}}=\frac{c}{n-1}\theta,$$

所以 θ 的 UMVUE 为 $\dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}$.