日期	科目	姓名，学号
2021 年 12 月 1 日	近世代数	吴天阳 2204210460

习题 1.10

2. 求下列 Abel 群的初等因子:

(1). $(\mathbb{Z}_{10},+)\oplus(\mathbb{Z}_{15},+)\oplus(\mathbb{Z}_{20},+)$;

(2). $(\mathbb{Z}_{28},+)\oplus(\mathbb{Z}_{42},+)$;

(3). $(\mathbb{Z}_{9},+)\oplus(\mathbb{Z}_{14},+)\oplus(\mathbb{Z}_{6},+)\oplus(\mathbb{Z}_{16},+)$.

解答. (1). 由于 $10=2\cdot 5, 15=3\cdot 5, 20=2^2\cdot 5$，则其初等因子为:

$$\{2,2^2,3,5,5,5\}$$

(2). 由于 $28=2^2\cdot 7, 42=2\cdot 3\cdot 7$，则其初等因子为:

$$\{2,2^2,3,7,7\}$$

(3). 由于 $9=3^2, 14=2\cdot 7, 6=2\cdot 3, 16=2^4$，则其初等因子为:

$$\{2,2,2^4,3,3^2,7\}$$

3. 设 G 为 100 阶 Abel 群。

(1). 证明 G 必含有 10 阶元;

(2). G 的初等因子应当怎样才能使 G 不含阶大于 10 的元素?

解答. (1). 由于 $100=2^2\cdot 5$，且 2 的分拆为 $2=1+1$，则 G 的初等因子当且仅有两种:

$$\{4,5\},\{2,2,5\}$$

I. 若 $G\cong\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{20}$，则 $\bar{2}\in\mathbb{Z}_{20}$，且 $|\bar{2}|=10$，故存在 10 阶元。

II. 若 $G\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{10}$，则 $(\bar{0},\tilde{1})\in\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{10}$，且 $|(\bar{0},\tilde{1})|=10$，故存在 10 阶元。

综上，G 必含有 10 阶元。

(2). 当 G 的初等因子为 $\{4,5\}$ 时，$G\cong\mathbb{Z}_{20}$ 为循环群，存在 20 阶元素，舍去。

当 G 的初等因子为 $\{2,2,5\}$ 时，$G\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{10}$，$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{10}$，且

$$(a,b)^{10}=(a^{10},b^{10})=((a^2)^5,b^{10})=(\bar{0},\tilde{0})$$

所以，$|(a,b)|\Big|10 \Rightarrow |(a,b)| \leqslant 10$，满足题意。

综上，G 的初等因子应当为 $\{2,2,5\}$ 才能使 G 不含大于 10 的元素。

5. 证明：如果一个 Abel p-群 恰好含有 $p-1$ 个 p 阶元，那么它一定是循环群。

证明. 设 G 为 Abel p-群，$|G|=p^l$，它的初等因子为：

$$\{p^{k_1}, p^{k_2}, \cdots, p^{k_r}\}$$

其中，$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r \geqslant 1$ 且 $k_1+k_2+\cdots+k_r=l$，则

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_r}}$$

设 $a_1=(\overline{p},\overline{0},\cdots,\overline{0}),\cdots,a_i=(\overline{0},\cdots,\overline{p},\cdots,\overline{0}),\cdots,a_r=(\overline{0},\cdots,\overline{0},\overline{p})$，则 $|a_i|=p, i=1,2\cdots,r$，且每个 a_i 都可以确定 $p-1$ 个 p 阶元，所以一共有 $r(p-1)$ 个 p 阶元，且它们两两不同，又由于 G 中恰好有 $p-1$ 个 p 阶元，所以 $r\equiv 1$，故 $G \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}}=\mathbb{Z}_{p^l}$。

综上，G 为循环群。 □

6. 设 p 是素数，V 是域 $\mathbb{Z}_p$ 上的 n 维线性空间，V 的加法群 $(V,+)$ 是不是初等 Abel p-群？

解答. 是的，因为 V 有 n 个正交的单位向量 $\vec{e}_i, i=1,2,\cdots,n$，且由 $\vec{e}_i$ 生成的子空间 W_i 同构于 $\mathbb{Z}_p$，又由于 $V\cong W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_n$，于是

$$V \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p$$

所以，V 的初等因子为 $\{p,p,\cdots,p\}$，故 $(V,+)$ 是初等 Abel p-群。

习题 2.1

4. 设 R 是一个有单位元 $1(\neq 0)$ 的交换环，证明：如果 R 没有非平凡的理想，那么 R 是一个域。

证明. 反设, R 不是一个域, 则存在 $a\in R$, 使得 a 在 R 中无逆元, 令 $Ra:=\{ra: r\in R\}$, 则

$$r_1a - r_2a = (r_1-r_2)a \in Ra$$

$$r\cdot r_1a = r_1a\cdot r = r_1ra \in Ra$$

所以，Ra 为 R 的一个理想，由于 a 无逆元，则 $1 \notin Ra$，故 Ra 为非平凡理想，与 R 无非平凡理想矛盾，则 R 中每个元素都有逆元，所以 $(R, \cdot)$ 为 Abel 群，则 R 为域。 □

6. 若 R 是有单位元 $1(\neq 0)$ 的交换环，且 R 没有非零的零因子，则 R 称为整环。证明：有限整环一定是域。

证明. 要证有限整环 R 一定是域，只需证明 R 中每一个元素都有逆元，由于 R 有限，令

$$R = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

$\forall a_i \in R \backslash \{0\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，令

$$J_i = \{a_i a_1, a_i a_2, \cdots, a_i a_n\}$$

假设 $a_i a_j = a_i a_k$，$j \neq k$，则 $a_i a_j - a_i a_k = 0 \Rightarrow a_i(a_j - a_k) = 0$，由于 R 中无非零的零因子，且 $a_i \neq 0$，所以 $a_j - a_k = 0 \Rightarrow j = k$ 与 $j \neq k$ 矛盾，所以 J_i 的基数为 n。

又由于 $J_i \subset R$, 则 $J_i = R$, 所以 J_i 为 R 的一个轮换, 则 $\exists j \in [1, n]$, 使得 $a_i a_j = 1$, 则 a_j 为 a_i 的逆元。

综上，有限整环一定是域。 □

8. 若 R 是一个有单位元 $1(\neq 0)$ 的环，且 R 的每一个非零元都可逆，则 R 称为一个除环或体，令

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

证明：$\mathcal{H}$ 是一个除环，且 $\mathcal{H}$ 与四元数体 $\mathbf{H}$ 环同构。

证明. 减法封闭：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\overline{\beta_1} & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\overline{\beta_2} & \overline{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ -\overline{\beta_1} + \overline{\beta_2} & \overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ -\overline{\beta_1 - \beta_2} & \overline{\alpha_1 - \alpha} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

乘法封闭：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\overline{\beta_1} & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\overline{\beta_2} & \overline{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2} & \alpha_1 \beta_2 + \overline{\alpha_2} \beta_1 \\ -\overline{\alpha_1 \beta_2 + \overline{\alpha_2} \beta_1} & \overline{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2}} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

则 $\mathcal{H}$ 为 $(M_2(\mathbb{C}),+,\cdot)$ 的一个含幺子环。

逆元 ($\mathcal{H}$中非零元 $\iff \alpha\neq 0$ 且 $\beta\neq 0 \iff \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}\neq 0$):

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}}\begin{pmatrix}\bar{\alpha} & -\beta\\ \bar{\beta} & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

综上，$\mathcal{H}$ 为除环。

令 $\alpha=a+bi,\beta=c+di$，则

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a+bi & c+di\\ -c+di & a-bi\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & c\\ -c & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & d\\ d & -b\end{pmatrix}i\\ &= a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

构造映射:

$$\begin{aligned}\psi:\mathbf{H}&\to\mathcal{H}\\ a+bi+cj+dk&\mapsto a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

下面验证 ψ 保乘法运算（只需要验证生成元之间的关系即可）:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}^2=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow \psi(i)^2=\psi(j)^2=\psi(k)^2=-\psi(1)=\psi(-1)=\psi(i^2)=\psi(j^2)=\psi(k^2)\\ &\Rightarrow \psi(i)^2=\psi(i^2),\ \psi(j)^2=\psi(j^2),\ \psi(k)^2=\psi(k^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow \psi(i)\psi(j)=\psi(k)=-\psi(j)\psi(i)\\ &\Rightarrow \psi(i)\psi(j)=\psi(ij),\ -\psi(j)\psi(i)=\psi(-ji)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow \psi(j)\psi(k)=\psi(i)=-\psi(k)\psi(j)\\ &\Rightarrow \psi(j)\psi(k)=\psi(jk),\ -\psi(k)\psi(j)=\psi(-kj)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi(k)\psi(i) = \psi(j) = -\psi(i)\psi(k)$$

$$\Rightarrow \psi(k)\psi(i) = \psi(ki),\ -\psi(i)\psi(k) = \psi(-ik)$$

综上，ψ 保持乘法运算，不难看出，ψ 保持加法运算，根据 ψ 的定义，知 ψ 为满射，所以 ψ 为环同态，故 $\mathbf{H} \cong \mathcal{H}$。 $\square$