日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 3 月 6 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第二次作业

题目 1. 2.2 习题 1 求证本节映射 η 定义合理, 即 $\forall s\in(c,d)$，$\exists ! t=\eta(s)\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^{\eta(s)}||r'(\eta)||_2\,\mathrm{d}\tau=s-c,$$

并且该映射是 C^1 正则参数变换，并且 $\eta'(s)=\dfrac{1}{||r'(t)||_2}$，从而 $||\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)||_2\equiv 1$.

证明. 由于曲线的弧长定义为 $s(t)=\displaystyle\int_a^t||\boldsymbol{r}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau$，则 $s'(t)=||\boldsymbol{r}'(t)||>0$，由反函数定理，则 $\exists ! t=\eta(s)$，且 $\eta\in C^1$，$\eta'(s)=\dfrac{1}{s'(t)}=\dfrac{1}{||\boldsymbol{r}'(t)||}$，而且

$$\int_a^{\eta(s)}||\boldsymbol{r}'(\tau)||\,\mathrm{d}\tau=\int_a^t s'(\tau)\,\mathrm{d}\tau=s(\tau)|_a^t=s-c$$

□

题目 2. 2.2 练习 4 设 $a,b,w>0$，求螺线

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}:(t_0,t_1)&\to\mathbb{R}^3\\ t&\mapsto(a\sin\omega t,a\cos\omega t,bt)\end{aligned}$$

的切向量，并给出一个弧长参数化.

解答. 切向量为 $\boldsymbol{r}'=(a\omega\cos\omega t,-a\omega\sin\omega t,b)$，则

$$s(t)=\int_{t_0}^t||r'(\tau)||_2\,\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^t\sqrt{a^2\omega^2+b^2}\,\mathrm{d}\tau=\sqrt{a\omega^2+b^2}(t-t_0)$$

于是 $t=\dfrac{s}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}+t_0=\eta(s)$，故弧长参数化为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}'\circ\eta=(a\sin\omega\eta(s),a\omega\cos\omega\eta(s),b\eta(s))$$

题目 3. 2.3 练习 1 计算半径为 r 的平面圆周曲率.

解答. 二维平面中圆形在原点，半径为 r 的圆周可以有以下参数化表示方法：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}:[0,2\pi)&\to\mathbb{R}^2\\ \theta&\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{aligned}$$

则$s(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta||\boldsymbol{r}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau=\int_0^\theta r\,\mathrm{d}\tau=r\theta$，则 $\eta(s)=s/r=\theta$，对应的弧长参数化为 $\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{\eta}=(r\sin s/r,r\sin s/r)$，则曲率为

$$\kappa(t)=||\tilde{\boldsymbol{r}}''||=||(-r\cos t,-r\sin t)||=\left|\left|-\frac{1}{r}(\cos s/r,\sin s/r)\right|\right|=\frac{1}{r}$$