日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 11 月 29 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第十次作业

题目 1. (2.4.5) 设 X 为 B^* 空间，$X_0\subset X$ 为闭子空间，证明：

$$\rho(x,X_0)=\sup\{|f(x)|:f\in X^*,||f||=1,f(X_0)=0\}\quad(\forall x\in X),$$

其中 $\rho(x,X_0)=\inf\limits_{y\in X}||x-y||$.

证明. $\forall x\in X$，由于 X_0 为 X 的闭子空间，则由 Hahn-Banach 定理可得 $\exists f\in X^*$，使得 $f(x)=\rho(x,X_0)$ 且 $f|_{X_0}=0$, $||f||=1$.

设 $f\in X^*$, $||f||=1$, $f|_{X_0}=0$，只需证 $|f(x)|\leqslant\rho(x,X_0)$. 由于 $\forall y\in X_0$ 有

$$1=||f||\geqslant\left|\frac{f(x+y)}{||x+y||}\right|=\frac{|f(x)|}{||x+y||}\Rightarrow|f(x)|\leqslant||x+y||\Rightarrow|f(x)|\leqslant\inf_{y\in X_0}||x+y||=\rho(x,X_0)$$

□

题目 2. (2.4.6) 设 X 是 B^* 空间，给定 X 中 n 个线性无关的元素 $x_1,\cdots,x_n$ 与数域 $\mathbb{K}$ 中 n 个数 $C_1,\cdots,C_n$，及 $M>0$. 求证：为了 $\exists f\in X^*$ 使得 $f(x_k)=C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 且 $||f||\leqslant M$，当且仅当，$\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ 有 $\left|\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|\leqslant M\left|\left|\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kx_k\right|\right|$.

证明. 充分性，由于 $f(x_k)=C_k(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|=\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kf(x_k)\right|=\left|f\left(\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right)\right|\leqslant||f||\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right|\right|\leqslant M\left|\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right|\right|$$

必要性，令 $X_0=\text{vspan}\{x_1,\cdots,x_n\}$，令 $f_0\left(\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kx_k\right)=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kC_k$，则 f_0 是线性泛函，$\forall y\in X_0$，有

$$||f_0||\leqslant\left|\frac{f_0(y)}{||y||}\right|=\frac{|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k|}{||\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k||}\leqslant M$$

于是 f_0 有界，则 $f_0\in X_0^*$，由 Hahn-Banach 延拓定理可知，$\exists f\in X^*$ 使得 $||f||=||f_0||\leqslant M$，且 $f|_{X_0}=f_0$，则 $f(x_k)=C_k$. □

题目 3. (2.4.7) 设 X 为 B^* 空间，$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$ 是 n 个线性无关的元素，证明：$\exists f_1,\cdots,f_n\in X^*$，使得 $\langle f_i,x_j\rangle=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$.

证明. 设 $X_0^k=\text{vspan}\{x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n\}$，由于 $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关，则 $x_k\notin X_0^k$，由 Hahn-Banach 定理可得 $\exists f_k'\in X^*$ 使得 $f_k'(x_k)\neq0$, $f_k'|_{X_0^k}=0$，令 $f_k=\dfrac{f_k'(x_k)}{d_k}$，则 $f_k\in X^*$ 且 $f_k(x_k)=1$, $f_k|X_0^k=0$ 即 $f_k(x_j)=\delta_{kj}$. □

题目 4. (2.4.13) 设 M 是（应该加上 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$）B^* 空间 X 中的闭凸集，求证：$\forall x\in X\backslash M$，$\exists f_1\in X^*$，使得 $||f_1||=1$ 且 $\sup\limits_{y\in M} f_1(y)\leqslant f_1(x)-d(x)$，其中 $d(x)=\inf\limits_{z\in M}||x-z||$.

证明. 由于 $d(x)=\inf\limits_{z\in M}||x-z||$ 且 M 为闭集，则 $B(x,d(x))\cap M=\varnothing$，又由于 M 为凸集，由 Hahn-Banach 第一几何形式可得 $\exists f_0\in X^*$ 使得 $\forall y\in M$, $|z|<1$ 有

$$f_0(y)\leqslant f_0(x+d(x)z)=f_0(x)+d(x)f_0(z)$$

令 $f_1=\dfrac{f_0}{||f_0||}$，则有 $f_1(y)\leqslant f_1(x)+d(x)f_1(z)$ 且 $||f_1||=1$，由于 $||f_1||=\sup\limits_{|z|<1}|f_1(z)|=1$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists|z_0|<1$ 使得

$$1-\varepsilon\leqslant|f_1(z_0)|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant f_1(z_0)\leqslant-(1-\varepsilon)\text{或}-1\leqslant f_1(-z_0)\leqslant-(1-\varepsilon)$$

则有 $f_0(y)\leqslant f_0(x)-(1-\varepsilon)d(x)$，由 y 和 ε 的任意性可知 $\sup\limits_{y\in M}f_0(y)\leqslant f_0(x)-d(x)$. □

题目 5. (2.4.14) 设 M 为实 B^* 空间 X 内的闭凸集，求证：

$$\inf_{z\in M}||x-z||=\sup_{\substack{f\in X^*\\ ||f||=1}}\{f(x)-\sup_{z\in M}f(z)\}\quad(\forall x\in X).$$

证明. $\forall f\in X^*$, $||f||=1$ 则

$$f(x)-\sup_{z\in M}f(z)=\inf_{z\in M}\{f(x)-f(z)\}=\inf_{z\in M}f(x-z)\leqslant\inf_{z\in M}||x-z||=d(x)$$

则 $\sup\limits_{\substack{f\in X^*\\ ||f||=1}}\left\{f(x)-\sup\limits_{z\in M}f(z)\right\}\leqslant d(x)$. 由上题可知 $\exists f_0\in X^*$, $||f_0||=1$ 使得 $f_0(x)-\sup\limits_{z\in M}f_0(z)\geqslant d(x)$，则 $\sup\limits_{\substack{f\in X^*\\ ||f||=1}}\{f(x)-\sup\limits_{z\in M}f(z)\}=d(x)=\inf\limits_{z\in M}||x-z||$. □

题目 6. (2.5.1) 求证：$(l^p)^*=l^q$ $\left(1\leqslant p<\infty,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$.

证明. 一方面：令 $\eta=\{y_n\}\in l^q$，则 $\forall\xi=\{x_n\}\in l^p$，定义 $\langle\eta,\xi\rangle=\sum\limits_{n\geqslant1}y_nx_n$，由 **2.3.8, 2.3.9** 可知 $\langle\eta,\xi\rangle\in l^p$，则 $\eta\in(l^p)^*\Rightarrow l^q\subset(l^p)^*$.

另一方面：$\forall f\in(l^p)^*$，$\forall\xi=\{x_n\}\subset l^p$，令 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{个}},0,\cdots)$，则 $\xi=\sum\limits_{n\geqslant1}x_ne_n$，于是 $f(\xi)=f\left(\sum\limits_{n\geqslant1}x_ne_n\right)=\sum\limits_{n\geqslant1}x_nf(e_n)$ 收敛，由于 $\{x_n\}\in l^p$，则由 **2.3.8, 2.3.9** 可知 $\eta=\{f(e_n)\}\in l^q$，且 $||\eta||_q=||f||$，于是 $f(\xi)=\langle\eta,\xi\rangle$.

综上，$l^q=(l^p)^*$. □

题目 7. (2.5.2) 设 C 为收敛数列全体，赋以范数 $||\cdot||:\{\xi_k\}\in C\mapsto\sup\limits_{k\geqslant1}|\xi_k|$，求证：$C^*=l^1$.

证明. 令 $T:l^1\to C^*$, $y=\{\eta_n\}\mapsto f_y(x)=\sum\limits_{n\geqslant1}\xi_n\eta_n=:\langle y,x\rangle$, $(\forall x=\{\xi_n\}\in C)$，则 T 是线性的，先证 f_y 有界，由于 $\forall x\in\{\xi_n\}\in C$ 有

$$|f_y(x)|=\sum_{n\geqslant1}|\xi_n|\,|\eta_n\leqslant\left(\sup_{n\geqslant1}|\xi_n|\right)\sum_{n\geqslant1}|\eta_n|=||x||_\infty\cdot||y||_1$$

则 $||f_y||\leqslant||y||_1$，故 $f_y\in C^*$，T 有意义.

下证 T 为满射，令 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{个}},0,\cdots)$，则 $e_n\in C$，$\forall x\in\{\xi_n\}\in C$ 有 $x=\sum\limits_{n\geqslant1}\xi_ne_n$，于是 $\forall f\in C^*$ 有

$$f(x)=f\left(\sum_{n\geqslant1}\xi_ne_n\right)=\sum_{n\geqslant1}\xi_nf(e_n)$$

下证 $\{f(e_n)\}\in l^1$，令 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}, & k\leqslant n,\theta_k=\arg f(e_k),\\ 0, & k>n.\end{cases}$ 则 $\forall n=1,2,\cdots$ 有

$$|f(x_n)|=\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}f(e_k)=\sum_{k=1}^n|f(e_k)|\leqslant||f||\cdot||x_n||=||f||$$

于是 $\{f(e_k)\}\in l^1$，令 $y=\{f(e_n)\}$，则 $||f_y||\geqslant||y||_1$，故 $||f_y||=||y||_1$，所以 T 是等距映射.

再证明 T 为单射，$\forall y_1,y_2\in l^1$ 满足 $\langle y_1,x\rangle=\langle y_2,x\rangle$，由于 T 的线性性，$\langle y_1-y_2,x\rangle=\langle 0,x\rangle$，则 y_1-y_2 为 C^* 中的零元 θ，由于 T 是等距映射，则 $||y_1-y_2||_1=||\theta||=0\Rightarrow y_1=y_2$.

综上，T 是等距同构映射，则 $C^*=l^1$. □

题目 8. (2.5.3) 设 C_0 是以 0 为极限的数列全体，赋以范数 $||\cdot||:\{\xi_k\}\in C_0\mapsto\sup\limits_{k\geqslant1}|\xi_k|$，求证：$C_0^*=l^1$.

证明. 由于 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{个}},0,\cdots)$，所以 $e_n\in C_0$，其他与上题证明完全相同. □

题目 9. (2.5.4) 求证：有限维 B^* 空间必是自反的.

证明. 令 X 为有限维 B^* 空间，$\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 X 中一组线性无关的基，由 **2.4.7** 可知，$\exists\{f_1,\cdots,f_n\}\subset X^*$ 且 $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则 $\forall f\in X^*,\forall x=\sum\limits_{i=1}^nf_i(x)x_i\in X$ 有 $f(x)=f\left(\sum\limits_{i=1}^nf_i(x)x_i\right)=\sum\limits_{i=1}^nf(x_i)f_i(x)$，于是 $f=\sum\limits_{i=1}^nf(x_i)f_i$，则 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 是 X^* 中的一组基，则 $\dim X^*=\dim X$，同理可证，$\dim X^{**}=\dim X^*$，于是 $\dim X^{**}=\dim X$，由于 $J(X)\subset X^{**}$ 且 J 为等距同构映射，则 $\dim J(X)=\dim X=\dim X^{**}$，故 $J(X)=X^{**}$，X 是自反空间. □

题目 10. (2.5.6) 设 X 为 B^* 空间，T 为 X 到 X^{**} 的自然嵌入映射，证明：$R(T)$ 是闭的充要条件为 X 完备.

证明. 充分性，令 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列，由 T 的定义可知

$$||Tx_n - Tx_m|| = ||T(x_n - x_m)|| = \sup_{\substack{||f||=1 \\ f\in X^*}} |f(x_n - x_m)| \leqslant ||x_n - x_m|| \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

则 $\{Tx_n\}$ 为 X^{**} 中的 Cauchy 列，由于 X^{**} 为 B 空间，则 Tx_n 收敛，由于 $R(T)$ 是闭的，则 $\exists x \in X$ 使得 $Tx_n \to Tx$，由于 $T^{-1} \in L(X^{**}, X)$，则

$$||x_n - x|| = ||T^{-1}T(x_n - x)|| \leqslant c||T(x_n - x)|| = c||Tx_n - Tx|| \to 0$$

于是 $x_n \to x$，故 X 完备.

必要性，$\forall\{x_n\} \in X$，Tx_n 收敛于 $y \in X^{**}$，由 $T^{-1} \in L(X^{**}, X)$，则

$$||x_n - x_m|| \leqslant c||Tx_n - y + y - Tx_m|| \leqslant c||Tx_n - y|| + c||Tx_m - y|| \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

则 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列，$\exists x \in X$，使得 $x_n \to X$，由于 T 连续，则 $Tx = y \Rightarrow y \in R(T)$，故 $R(T)$ 是闭的. □

题目 11. (2.5.7) 在 l^1 中定义算子

$$T : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdot),$$

求证：$T \in L(l^1)$ 并求 T^*.

证明. 由于 $\forall x \in l^1$，$||Tx|| = ||x||$，则 $||T|| = 1$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in l^1$, $T(\alpha x+\beta y) = (0, \alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \cdots) = \alpha Tx+\beta Ty$, 则 $T \in L(l^1)$.

由于 $(l^1)^* = l^\infty$，$\forall f \in (l^1)^*$，令 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots)$，则

$$\langle f, Tx\rangle = (f_1, \cdots, f_n, \cdots) \cdot (0, x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n\geqslant 1} f_{n+1}x_n = (f_2, f_3, \cdots) \cdot (x_1, x_2, \cdots) = \langle T^* f, x\rangle$$

则 $T^* f = (f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots), \quad \forall f = (f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots) \in (l^1)^*$. □

题目 12. (2.5.8) 在 l^2 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right),$$

求证：$T \in L(l^2)$ 并求 T^*.

证明. $\forall \xi=\{x_n\}\in l^2$，$||T\xi||=\left(\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|\frac{x_n}{n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum\limits_{n\geqslant 1}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=||\xi||$，则 $||T||\leqslant 1$.

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，$\xi=\{x_n\},\eta=\{y_n\}\in l^2$，则

$$T(\alpha\xi+\beta\eta)=\left(\alpha x_1+\beta y_1,\frac{\alpha x_2+\beta y_2}{2},\cdots,\frac{\alpha x_n+\beta y_n}{n},\cdots\right) \tag{1}$$
$$=\alpha\left(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots\right)+\beta\left(y_1,\frac{y_2}{2},\cdots,\frac{y_n}{n},\cdots\right) \tag{2}$$
$$=\alpha T\xi+\beta T\eta \tag{3}$$

综上 $T\in L(l^2)$.

$\forall f\in(l^2)^*$，则 $f\in l^2$，令 $f=(f_1,\cdots,f_n,\cdots)$，则 $\forall\xi=\{x_n\}\in l^2$.

$$\langle f,T\xi\rangle=\sum_{n\geqslant 1}f_n\frac{x_n}{n}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{f_n}{n}x_n=\left(f_1,\frac{f_2}{2},\cdots,\frac{f_n}{n},\cdots\right)\cdot(x_1,\cdots,x_n,\cdots)=\langle T^*f,\xi\rangle$$

则 $T^*f=\left(f_1,\frac{f_2}{2},\cdots,\frac{f_n}{n},\cdots\right)$. □

题目 13. (2.5.12) 设 X,Y 为 B 空间，T 为 X 到 Y 的线性算子，$\forall g\in Y^*$，$g(Tx)\in X^*$，证明 T 连续.

证明. 由于 X,Y 为 B 空间，由闭图像定理，只需证 T 为闭算子. 设 $\{x_n\}\in X$ 收敛于 x 且 $Tx_n\to y\in Y$，下证 $Tx=y$.

令 $T^*:Y^*\to X^*$，$\forall g\in Y^*$ 定义 $T^*g(x)=g(Tx)$，则

$$\left.\begin{aligned}T^*g(x_n)=g(Tx_n)&\xrightarrow{g\text{连续}}g(y)\\=(T^*g)(x_n)&\xrightarrow{T^*g\text{连续}}(T^*g)(x)=g(Tx)\end{aligned}\right\}g(y)=g(Tx)\Rightarrow Tx=y$$

□

题目 14. (2.5.15) 设 H 为 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 为 H 的标准正交基，证明 $x_n\rightharpoonup x_0$ 等价于 $||x_n||$ 有界且 $(x_n,e_k)\to(x_0,e_k)$, $(n\to\infty,k=1,2,\cdots)$.

证明. 首先证明充分性，由于 $x_n\rightharpoonup x_0$，则 $\forall f\in H^*$，有 $f(x_n)\to f(x_0)$, $(n\to\infty)$，令由于 e_k 对应有界泛函 $f_{e_k}(x)=(x,e_k)$，则 $(x_n,e_k)\to(x_0,e_k)$, $(n\to\infty,k=1,2,\cdots)$. 由于 $||x||=||J_x||$，而 x_n 弱收敛等价于 J_{x_n}* 弱收敛，由于 H^{**} 为 B 空间，则由孔明定理可知，$||J_{x_n}||$ 有界，故 $||x_n||$ 有界.

由于 $x_n\rightharpoonup x_0$ 等价于 $||x_n||$ 有界且 G 为 X 的稠密子集 $\forall f\in G$ 有 $f(x_n)\to f(x_0)$. 充分性得证. 于是只需证明，$(x_n,e_k)\to(x_0,e_k)$, $(n\to\infty,k=1,2,\cdots)$ 可推出在 $\{e_n\}$ 中有 $f(x_n)\to f(x_0)$, $(f\in H^*)$，不妨令 $x_0=0$，若 $x_0\neq 0$，取 $x_n\leftarrow x_n-x_0$ 即可. 由 Riesz 表示定理可知，

$\forall f \in H^*$，$\exists y \in H$ 使得 $f(x)=(x,y)$，由于 $\{e_n\}$ 为 H 中的一组基，则令 $y=\sum\limits_{k\geqslant 1}\alpha_k e_k$，于是

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= \left(x_n, \sum_{k\geqslant 1}\alpha_k e_k\right) = \sum_{k\geqslant 1}\bar{\alpha}_k (x_n, e_k) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\bar{\alpha}_k(x_n,e_k) \to \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\bar{\alpha}_k(0,e_k) = \lim_{N\to\infty} 0 = f(x_0)
\end{aligned}$$

□

题目 15. (2.5.16) 设 $S_n : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ 满足 $(S_n u)(x) = \begin{cases} u(x), & |x| \leqslant n, \\ 0, & |x| > n. \end{cases}$ 其中 $u \in L^p(\mathbb{R})$ 是任意的，证明：$\{S_n\}$ 强收敛于恒通算子 I，但不一致收敛于 I.

证明. 由于 $S_n u = u \cdot \chi_{[-n,n]}$，于是

$$||S_n u - Iu||_p^p = ||u\chi_{(-\infty,u)\cup(u,\infty)}||_p^p = \int_{-\infty}^{-n} |u|^p \,\mathrm{d}x + \int_n^{\infty} |u|^p \,\mathrm{d}x \to 0, \quad (n\to\infty)$$

所以 $S_n \xrightarrow{s} I$. 由于 $\int_n^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-n}$，令 $u_n(x) = \chi_{[n,\infty)}\left(\mathrm{e}^{n-x}\right)^{\frac{1}{p}}$，则 $||u_n||_p^p = \mathrm{e}^n \int_n^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$，于是

$$||S_n - I|| \geqslant ||S_n u_n - u_n||_p = ||u_n||_p = 1$$

故 $S_n \nrightarrow I$. □

题目 16. (2.5.17) 设 H 为 Hilbert 空间，在 H 中 $x_n \rightharpoonup x_0$ 且 $y_n \to y_0$，证明 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

证明. 由于 $x_n \rightharpoonup x_0$，则 $||x_n||$ 一致有界，$\exists M > 0$ 使得 $||x_n|| \leqslant M$，有 Riesz 表示定理知 $f_y(x) = (x,y) \in H^*$，则

$$\begin{aligned}
|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)| &= |(x_n, y_n - y_0) + (x_n, y_0) - (x_0, y_0)| \\
&\leqslant M\cdot||y_n - y_0|| + ||f_{y_0}(x_n) - f_{y_0}(x_0)|| \to 0
\end{aligned}$$

所以 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. □

题目 17. (2.5.18) 设 $\{e_n\}$ 为 Hilbert 空间空间 H 中的标准正交基，证明：在 H 中 $e_n \rightharpoonup \theta$，但 $e_n \nrightarrow \theta$.

证明. 由 Bessel 不等式可知：$\forall x \in H$，有 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|(x,e_n)|^2 \leqslant ||x||^2$，于是 $|(x,e_n)| \to 0$，由 Riesz 表示定理可知，$\forall f \in H^*$，$\exists y \in H$，使得 $f(x) = (x,y)$，于是 $|f(e_n)| = |(e_n,y)| \to 0,\ (n\to\infty)$，所以 $e_n \rightharpoonup \theta$.

由于 $\{e_n\}$ 为标准正交基，则 $||e_n|| = 1$，故 $e_n \nrightarrow \theta$. □

题目 18. (2.5.19) 设 H 为 Hilbert 空间, 证明: 在 H 中 $x_n \to x$ 充要条件为 $||x_n|| \to ||x||$ 且 $x_n \rightharpoonup x$.

证明. 只需证 H 为一致凸的 B 空间, 由于 H 为 Hilbert 空间, 所以只需证 H 的一致凸性. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in X$, $||x|| \leqslant 1$, $||y|| \leqslant 1$, $||x-y|| > \varepsilon$, 由于 H 中有平行四边形公式成立, 则

$$
\begin{aligned}
&||x+y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) - ||x-y||^2 < 4 - \varepsilon^2 \\
\Rightarrow &\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2 \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} < 1 - \delta
\end{aligned}
$$

故 H 满足一致凸性. □

题目 19. (2.5.21) 证明: B^* 空间 X 中的闭凸集是弱闭的.

证明. 设 M 为 X 中的闭凸子集, $\{x_n\} \subset M$, $x_n \rightharpoonup x$, 则由 Mazur 定理可知, $x \in \overline{\text{co}\{x_n\}}$, 于是只需证 $\overline{\text{co}\{x_n\}} \subset M$, 由于 M 是闭的, 只需证 $\text{co}\{x_n\} \subset M$, 由于 M 为凸的, 则 $\alpha \in (0,1)$, $\forall y_1, y_2 \in \{x_n\}$ 有 $\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in M$, 断言 $\forall y_1, \cdots, y_n \in \{x_n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ 有 $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \in M$. 利用归纳假设当命题在 n 时成立, 下推导在 $n+1$ 时情况, 任意的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$, 由归纳假设可知 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \in M$, 于是由 M 的凸性可知

$$
\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + \alpha_{n+1} y_{n+1} \in M
$$

故 $\overline{\text{co}\{x_n\}} \subset M$. □

题目 20. (2.5.22) 设 X 是自反空间, M 为 X 中的有界闭凸子集, $\forall f \in X^*$, 证明: f 在 M 上达到最大值和最小值.

证明. $\forall f \in X^*$, 由于 M 有界, 则 $\forall x \in M$, $||x|| \leqslant A$, 则 $\sup\limits_{x \in M} ||f(x)|| \leqslant ||f|| \cdot ||x|| \leqslant M||f||$, 于是 f 在 M 上上极限和下极限存在, 令 $d = \sup\limits_{x \in M} f(x)$, 则 $\exists \{x_n\} \in M$ 使得 $d - 1/n \leqslant f(x_n) \leqslant d$, 由于 X 为自反空间且 $\{x_n\} \subset M$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \rightharpoonup x \in X$, 由上题可知, 由于 M 为闭凸集, 则 $x_n \rightharpoonup x \in M$, 于是 $d - 1/n_k \leqslant f(x_{n_k}) \leqslant d$, 令 $k \to \infty$ 可得 $f(x) = d$, 于是 x 是 f 在 M 中的最大值, 同理可证, f 在 M 中可取到最小值. □

题目 21. (2.5.23) 设 X 为自反空间, M 为 X 中的非空闭凸集, 证明 $\exists x_0 \in M$, 使得 $||x_0|| = \inf\{||x|| : x \in M\}$.

证明. 由于 M 非空，则 $\exists x\in M$，取 $M'=\overline{B(\theta,x)}\cap M$，于是 $\inf\{||x||:x\in M'\}=\inf\{||x||:x\in M\}$，下证在有界闭凸集 M' 中能取到 $||\cdot||$ 最小值. 令 $d=\inf\{||x||:x\in M'\}$，则 $\exists\{x_n\}\subset M'$，使得 $||x_n||\to d$，由于 X 自反，则 $\{x_n\}$ 存在弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k}\rightharpoonup x\in X$，由 **2.5.21** 可得 $x_{n_k}\rightharpoonup x\in M'$. 又由 Hahn-Banach 定理可得 $\exists f\in X^*$ 使得 $f(x)=||x||,\ ||f||=1$，于是

$$d\leqslant ||x||=f(x)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\leqslant\lim_{k\to\infty}||x_{n_k}||=d$$

于是 $||x||=\inf\{||x||:x\in M'\}=\inf\{||x||:x\in M\}$. □

题目 22. 证明：设 X 是一致凸空间，则 X 是严格凸空间.

证明. $\forall x,y\in X$，$x\neq y$，$||x||=||y||=1$，$\forall\alpha\in(0,1)$，下证 $\alpha x+(1-\alpha)\beta||<1$. 由于 $||\cdot||$ 连续，只需证存在 $(0,1)$ 的稠密子集 M 使得 $\alpha\in M$，有 $||\alpha x+(1-\alpha)\beta||<1$ 成立.

由于 X 是一致凸空间，又由于 $x\neq y$，则取 $\varepsilon=\dfrac{||x-y||}{2}$，$\exists\delta>0$，使得 $\left|\left|\dfrac{x+y}{2}\right|\right|\leqslant 1-\delta<1$，于是 $\alpha=1/2$ 严格凸性质成立. 由于 $\left|\left|\dfrac{x+y}{2}\right|\right|\leqslant 1$，于是再次使用一致凸性质，可得

$$\left|\left|\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right|\right|<1,\ \left|\left|\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right|\right|<1,$$

于是 $\alpha=1/4,3/4$ 时严格凸性质成立. 同理可得，$\alpha=1/8,3/8,5/8,7/8,\cdots$ 也即

$$M=\left\{\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}:n=1,2,\cdots\right\}$$

上有 $\alpha\in M$ 均满足严格凸性，由于 M 是 $(0,1)$ 的稠密子集，则 $\forall\alpha\in(0,1)$，$\exists\{\alpha_n\}\in M$，使得 $\alpha_n\to\alpha$ 且 $||\alpha_k x+(1-\alpha_k)y||<1$，则 $||\alpha x+(1-\alpha)y||<1$，故 X 是严格凸空间. □

题目 23. 设 X 为 B^* 空间，则 X 是一致凸空间 $\iff$ $||x_n||\to 1,||y_n||\to 1,||x_n+y_n||\to 2$，则 $||x_n-y_n||\to 0$.

证明. 必要性：反设，当 $||x_n||\leqslant 1,||y_n||\leqslant 1$，$\exists\varepsilon>0$，$\forall n\geqslant 1$ 当 $\left|\dfrac{x+y}{2}\right|\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$ 时都有 $||x-y||\geqslant\varepsilon$.

由于 $||x_n||\to 1$ 不一定满足 $||x_n||\leqslant 1$，考虑 $\dfrac{x_n}{||x_n||}$，于是 $\left|\left|\dfrac{x_n}{||x_n||}\right|\right|=\left|\left|\dfrac{y_n}{||y_n||}\right|\right|=1$，则

$$\left|\left|\left|\frac{x_n}{||x_n||}+\frac{y_n}{||y_n||}\right|\right|-||x_n+y_n||\right|\leqslant\left|\left|\frac{x_n}{||x_n||}-x_n+\frac{y_n}{||y_n||}-y_n\right|\right|$$

$$\leqslant\left|\left|\left|\frac{x_n}{||x_n||}-x_n\right|\right|+\left|\left|\frac{y_n}{||y_n||}-y_n\right|\right|\right|\leqslant\big|1-||x_n||\big|+\big|1-||y_n||\big|\to 0,\quad(n\to\infty)$$

于是 $\left|\left|\dfrac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}+\dfrac{y_{n_k}}{||y_{n_k}||}\right|\right|\to 2$ 则存在子列满足 $\left|\left|\dfrac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}+\dfrac{y_{n_k}}{||y_{n_k}||}\right|\right|\geqslant 2-\dfrac{2}{n_k}$，由条件可得 $\left|\left|\dfrac{x_n}{||x_n||}-\dfrac{y_n}{||y_n||}\right|\right|\to 0$ 但与 $\left|\left|\dfrac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}-\dfrac{y_{n_k}}{||y_{n_k}||}\right|\right|\geqslant\varepsilon$ 矛盾，于是原命题成立.

充分性：设 $||x_n||\to 1, ||y_n||\to 1, ||x_n+y_n||\to 2$，由必要性证明可知 $\dfrac{x_n}{||x_n||}\to x_n$，$\dfrac{y_n}{||y_n||}\to y_n$，不妨令 $||x_n||=1, ||y_n||=1$，于是 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 任意 $||x||\leqslant 1, ||y||\leqslant 1$ 满足 $\left|\left|\dfrac{x+y}{2}\right|\right|<1-\delta$ 有 $|x-y|<\varepsilon$. 由于 $||x_n+y_n||\to 2$，则 $\exists N>0$ 使得 $\forall n\geqslant N$ 有 $||x_n+y_n||>2-2\delta$，于是 $||x_n-y_n||<\varepsilon$，由 ε 任意性可知 $||x_n-y_n||\to 0$. □

题目 24. (1). $p\geqslant 2$ 时，$\left|\left|\dfrac{f+g}{2}\right|\right|_p^p+\left|\left|\dfrac{f-g}{2}\right|\right|_p^p\leqslant\dfrac{1}{2}\left(||f||_p^p+||g||_p^p\right),\quad\forall f,g\in L^p.$

(2). $1<p\leqslant 2$ 时，$\left|\left|\dfrac{f+g}{2}\right|\right|_p^q+\left|\left|\dfrac{f-g}{2}\right|\right|_p^q\leqslant\left(\dfrac{1}{2}||f||_p^p+\dfrac{1}{2}||f||_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$，其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

证明. (1). 先证明 $a^p+b^p\leqslant(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}\ (\forall a,b>0)$，不妨令 $b\geqslant a$，令 $t=b/a$，只需证 $x(t)=(1+t^2)^{\frac{p}{2}}-t^p-1\geqslant 0\ (\forall t\geqslant 1)$. 由于 $x'(t)=pt\left((\sqrt{1+t^2})^{p-2}-t^{p-2}\right)\geqslant 0$，所以 $x(t)\geqslant x(1)=2^{\frac{p}{2}}-2\geqslant 0$.

令 $a=\left|\dfrac{f+g}{2}\right|, b=\left|\dfrac{f-g}{2}\right|$，由于 $x^{\frac{p}{2}}\ (p\geqslant 2)$ 为凸函数得

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p+\left|\frac{f-g}{2}\right|^p\leqslant\left(\frac{|f|^2+|g|^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\leqslant\frac{|f|^p+|g|^p}{2}$$

再对其积分可得 $\left|\left|\dfrac{f+g}{2}\right|\right|_p^p+\left|\left|\dfrac{f-g}{2}\right|\right|_p^p\leqslant\dfrac{1}{2}\left(||f||_p^p+||g||_p^p\right).$ □