日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 5 月 29 日	概率论	强基数学 002	吴天阳	2204210460

习题 5.1

1. 甲、乙两队进行篮球比赛, 若有一队胜 4 场比赛就结束, 假设甲、乙两队在每场比赛中获胜的概率都是 $\frac{1}{2}$, 求所需比赛的场数的数学期望.

解答. 设 X 为所需比赛的场数, 由题意可知 $\mathbf{P}(X=k)=b\left(4;k,\frac{1}{2}\right)=\binom{k}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, 于是

$$\mathbf{E}X=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+5\cdot\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5+6\cdot\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^6+7\cdot\binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^7\approx 4.35156$$

3. 假设公共汽车起点站于每时的 10 分、30 分、50 分发车, 某乘客不知发车时间, 在每一小时内任一时刻到达车站是随机的, 求乘客到达车站等车时间的数学期望.

解答. 设 S 为乘客到达车站等车时间, X 为乘客到达车站的事件, 不妨将每个小时从 10 分钟开始计算, 则 $10\leqslant X\leqslant 70$, 则有如下关系式:

$$S=\begin{cases}30-X, & 10\leqslant X<30,\\ 50-X, & 30\leqslant X<50,\\ 70-X, & 50\leqslant X\leqslant 70.\end{cases}$$

且 $\mathbf{P}(x)=\frac{1}{60}$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{E}S&=\int_{10}^{70}y\,\mathrm{d}F(S)=\int_{10}^{30}(30-x)\mathbf{P}(x)\,\mathrm{d}x+\int_{30}^{50}(50-x)\mathbf{P}(x)\,\mathrm{d}x+\int_{50}^{70}(70-x)\mathbf{P}(x)\,\mathrm{d}x\\&=3\int_{10}^{30}\frac{(30-x)}{60}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{(60-x)x}{40}\right|_{10}^{30}=10\end{aligned}$$

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布的 $U(0,1)$ 随机变量, 求

$$\mathbf{E}\min\{X_1,\cdots,X_n\}\qquad\text{和}\qquad\mathbf{E}\max\{X_1,\cdots,X_n\}.$$

解答. 设 $Y_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$, $Y_2=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$, 则 $F_{Y_1}(x)=1-(1-x)^n$, $F_{Y_2}(x)=x^n$, 所以 $\mathbf{P}_{Y_1}(x)=n(1-x)^{n-1}$, $\mathbf{P}_{Y_2}(x)=nx^{n-1}$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Y_1&=\int_0^1 nx(1-x)^{n-1}\,dx=n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1 x^{k+1}\,\mathrm{d}x=n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+2},\\ \mathbf{E}Y_2&=\int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

9. 设 X_1, X_2 相互独立, 均服从 $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, 试证:

$$\mathbf{E}\max\{X_1, X_2\} = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

证明. 由于 $\mathbf{E}\max\{X_1, X_2\} = \mathbf{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + |X_1 - X_2|}{2}\right) = a + \frac{1}{2}\mathbf{E}|X_1 - X_2|$, 又由于 $X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$, 于是 $p_{X_1 - X_2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{x^2}{4\sigma^2}\right\}$, 则

$$\mathbf{E}|X_1 - X_2| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\int_0^{\infty} 2xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

所以 $\mathbf{E}\max\{X_1, X_2\} = a + \frac{1}{2}\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$. □

13. 设随机变量 X 取任意正整数的概率依几何级数减少. 式选择级数的首项 a 及公比 q, 使随机变量的期望等于 10, 并在此条件下, 计算 X 不大于 10 的概率.

解答. 由题可知 $\mathbf{P}(X = k) = aq^{k-1}$, $(k \geqslant 1)$, 于是 $\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot ap^{k-1} = 10$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} ap^{k-1} = 1$, 则 $\frac{a}{1-p} = 1 \Rightarrow a = 1 - p$. 于是 $(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = 10$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(p^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} p^k\right)' = \left(\frac{p}{1-p}\right)' = \frac{1}{(1-p)^2},$$

所以 $\frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} = 10$, 故 $p = \frac{9}{10}, a = \frac{1}{10}$.

$$\mathbf{P}(X \leqslant 10) = a(1 + q^1 + \cdots + q^9) = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}(\frac{9}{10})^k = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}.$$

14. 在长为 a 的线段上相互独立地选取 n 个点, 求相距最远的两点间距离的期望.

解答. n 个点将线段分为的 $n+1$ 段, 长度分别令为 $X_0, X_1, \cdots, X_n$, 且 $\mathbf{E}(X_0 + X_1 + \cdots + X_n) = a$, 有对称性可知, X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 具有相同的分布律, 所以 $\mathbf{E}(X_i) = \frac{a}{n+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 因此

$$\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_{n-1}) = (n-1)\mathbf{E}(X_i) = \frac{n-1}{n+1}a.$$

19. 设 $F(x)$ 为某非负随机变量的分布函数, 试证: 对任意 $s > 0$ 有

$$\int_0^{\infty} x^s\,\mathrm{d}F(x) = s\int_0^{\infty} x^{s-1}(1 - F(x))\,\mathrm{d}x.$$

证明.

$$\int_0^\infty x^s \,\mathrm{d}F(x) = -\int_0^\infty x^s \,\mathrm{d}(1-F(x)) = -x^s(1-F(x))\Big|_0^\infty + \int_0^\infty sx^{s-1}(1-F(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= s\int_0^\infty x^{s-1}(1-F(x))\,\mathrm{d}x.$$

□

26. 现有 n 个袋子, 各装有 a 个白球 b 个黑球, 先从第一个袋子中摸出一球, 几下颜色后把它放入第二个袋子中, 再从第二个袋子中摸出一球, 记下颜色后把它放入第三个袋子中, 照这样的办法一直摸下去, 最后从第 n 个袋子摸出一球并记下颜色, 若在这 n 次模球中所摸得的白球的总数为 S_n, 试求 $\mathbf{E}S_n$.

解答. 设 X_i 为第 i 次摸球的结果, 记 $X_i = 0$ 摸出白球, $X_i = 1$ 摸出黑球, 则

$$\mathbf{P}(X_1=0) = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathbf{P}(X_2=0) = \frac{a+\mathbf{P}(X_1=0)}{a+b+1} = \frac{a+\frac{a}{a+b}}{a+b+1} = \frac{a}{a+b}$$
$$\mathbf{P}(X_i=0) = \frac{a+\mathbf{P}(X_i=0)}{a+b+1} = \frac{a}{a+b}.$$

所以

$$\mathbf{E}S_n = \sum_{i=1}^n 1\cdot\mathbf{P}(X_i=0) = \frac{an}{a+b}.$$

28. 将一枚硬币连续抛掷 n 次, 假设各次抛掷相互独立进行, 每次抛出正面的概率都是 p $(0 < p < 1)$. 如果相继抛掷的两次所抛出的面不同, 则称出现一次转换. 例如: 对 $n=5$, 若抛掷结果为"正正反正反", 则称其中出现 3 次转换. 以 X 表示 n 次抛掷中所出现的转换次数, 求 $\mathbf{E}X$.

解答. 设 X_i 为第 i 次抛掷的结果, 记 $X_i = 1$ 为正面, $X_i = 0$ 为反面. 设 Y_i 为第 i 次抛掷结果和 $i-1$ 次抛掷结果不同的事件, 则 $\mathbf{P}(X_i=1) = p$, $\mathbf{P}(X_i=0) = 1-p$, 于是

$$\mathbf{P}(Y_i) = \mathbf{P}(X_i=1)\mathbf{P}(X_{i-1}=0) + \mathbf{P}(X_i=0)\mathbf{P}(X_{i-1}=1) = 2p(1-p),$$

所以

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=2}^n \mathbf{P}(Y_i) = 2(n-1)p(1-p).$$

29. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

求 $|X|$ 的数学期望和方差.

解答. 由题意可知, $p(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$, 考虑 $|X|$ 的矩母函数

$$f(t)=\mathbf{E}e^{t|X|}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t|x|}\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}e^{(t-1)x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1-t},$$

所以 $\mathbf{E}|X|=f'(0)=1,\ \mathbf{E}|X|^2=f''(0)=2$, 于是 $\mathbf{Var}|X|=\mathbf{E}|X|^2-(\mathbf{E}X)^2=1$.

30. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x)=2(x-1),\quad 1<x<2.$$

求 $Y=e^X$ 与 $Z=\dfrac{1}{X}$ 的数学期望和方差.

解答.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}Y=\int_1^2 2(x-1)e^x\,\mathrm{d}x=2e,\quad \mathbf{E}Y^2=\int_1^2 2(x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e^4+e^2)\\
&\mathbf{Var}Y=\mathbf{E}Y^2-(\mathbf{E}Y)^2=\frac{1}{2}e^2(e^2-7).\\
&\mathbf{E}Z=\int_1^2\frac{2(x-1)}{x}\,\mathrm{d}x=2(1-\log 2),\quad \mathbf{E}Z^2=\int_1^2\frac{2(x-1)}{x^2}\,\mathrm{d}x=2(\log 2+\frac{1}{2})\\
&\mathbf{Var}Z=\mathbf{E}Z^2-(\mathbf{E}Z)^2=10\log 2-4\log^2 2-3.
\end{aligned}$$

习题 5.2

2. 设 X 与 Y 为相互独立的 $U(0,1)$ 随机变量, 证明: 对任何 $a>0$, 都有

$$\mathbf{E}|X-Y|^a=\frac{2}{(a+1)(a+2)}.$$

解答.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X-Y|^a&=\int_0^1\mathbf{E}|X-Y|^a\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1|x-y|^a\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(\int_y^1(x-y)^a\,\mathrm{d}x+\int_0^y(y-x)^a\,\mathrm{d}x\right)a\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\frac{(1-y)^{a+1}+y^{a+1}}{a+1}\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{2}{(a+1)(a+2)}.
\end{aligned}$$

4. 罐中有一个黑球, 每次从中取出一个求, 并随机放入一个新球, 新球为黑球的概率为 p $(0<p<1)$, 为白球的概率为 $1-p$, 一直到罐中没有黑球为止. 将所进行的取球次数记为 X, 求 $\mathbf{E}X$.

解答. 由于 X 服从 $1-p$ 的几何分布, 所以 $\mathbf{E}X=\dfrac{1}{1-p}$.

9. 设 $g(x)$ 为任一可测函数, 证明: 若下列期望均存在, 则

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(Y|X)g(X)] = \mathbf{E}[Yg(X)].$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y|X)g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(Y|X=x)g(x)p_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_1(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y\mathbf{P}(Y=y|X=x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} yg(x)\mathbf{P}(Y=y|X=x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\mathbf{E}(Yg(X)|X=x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{E}(Yg(X)).
\end{aligned}$$

□

10. 设随机向量 (X, Y) 的密度函数为 $p(x, y) = cx(y-x)e^{-y}$, $0 < x < y < \infty$. 试求常数 c, 及条件期望 $\mathbf{E}(X|Y)$ 和 $\mathbf{E}(Y|X)$.

解答.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_x^{\infty} cx(y-x)e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_0^{y} cx(y-x)e^{-y}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{c}{6}y^3e^{-y}\,\mathrm{d}y = c = 1.$$

则 $p(x,y) = x(y-x)e^{-y} \quad (0 < x < y < \infty)$, 于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X|Y) &= \int_0^{\infty} \mathbf{E}(X|Y=y)p_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} p_2(y)\,\mathrm{d}y \int_0^{y} \mathbf{P}(X=x|Y=y)x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_0^{y} x^2(y-x)e^{-y}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{12}y^4e^{-y}\,\mathrm{d}y = 2, \\
\mathbf{E}(Y|X) &= \int_0^{\infty} \mathbf{E}(Y|X=x)p_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} p_1(x)\,\mathrm{d}x \int_x^{\infty} \mathbf{P}(Y=y|X=x)y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_x^{\infty} \left(xy^2e^{-y} - x^2ye^{-y}\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} (x^2+2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 4.
\end{aligned}$$

11. 设随机变量 X, Y 和 Z 相互独立, 且分别服从参数为 λ, μ 和 ν 的指数分布, 试求 $\mathbf{P}(X < Y < Z)$.

解答.

$$\mathbf{P}(X<Y<Z) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu y}\,\mathrm{d}y \int_y^{\infty} \nu e^{-\nu z}\,\mathrm{d}z = \frac{\lambda\mu}{(\mu+\nu)(\lambda+\mu+\nu)}.$$

习题 5.3

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{m+n}$ $(n > m)$ 是独立的, 有相同的分布并且有有限的方差, 试求 $S = X_1 + \cdots + X_n$ 与 $T = X_{m+1} + X_{m+2} + \cdots + X_{m+n}$ 两和之间的相关系数.

解答. 由于 X_i 之间是相互独立的, 所以它们也是不相关的, 又由于它们满足相同的分布, 所以 $\mathbf{Var}(S) = \mathbf{Var}(T) = n\mathbf{Var}(X_1)$, 由于

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(S,T) &= \mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_{m+j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{Cov}\left(X_i, X_{m+j}\right) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n}\mathbf{Cov}(X_i, X_i) = (n-m)\mathbf{Cov}(X_1, X_1) = (n-m)\mathbf{Var}(x).\end{aligned}$$

所以相关系数 $r = \dfrac{\mathbf{Cov}(S,T)}{\sqrt{\mathbf{Var}(S)}\sqrt{\mathbf{Var}(T)}} = \dfrac{n-m}{n}$.

5. 设 $Y_1 = aX_1 + b,\ Y_2 = cX_2 + d$, 其中 $ac > 0$. 证明 Y_1, Y_2 的相关系数等于 X_1, X_2 的相关系数.

证明. 由于

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) &= \mathbf{E}(acX_1X_2 + adX_1 + bcX_2 + cd) - \mathbf{E}(aX_1 + c)\mathbf{E}(cX_2 + d) \\ &= ac[\mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)], \\ \mathbf{Var}(Y_1) &= \mathbf{Var}(aX_1 + b) = \mathbf{Var}(aX_1) = a^2\mathbf{Var}(X_1), \\ \mathbf{Var}(Y_2) &= \mathbf{Var}(aX_2 + b) = \mathbf{Var}(aX_2) = a^2\mathbf{Var}(X_2).\end{aligned}$$

由于 $ac > 0$, 则 $|ac| = ac$, 于是

$$r_{Y_1,Y_2} = \frac{\mathbf{Cov}(Y_1,Y_2)}{\sqrt{\mathbf{Var}(Y_1)}\sqrt{\mathbf{Var}(Y_2)}} = \frac{ac[\mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)]}{|ac|\sqrt{\mathbf{Var}(X_1)}\sqrt{\mathbf{Var}(X_1)}} = \frac{\mathbf{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathbf{Var}(X_1)}\sqrt{\mathbf{Var}(X_2)}} = r_{X_1,X_2}.$$

□

7. 若 X, Y 服从二维正态分布, $\mathbf{E}X = a,\ \mathbf{Var}X = 1,\ \mathbf{E}Y = b, \mathbf{Var}Y = 1$, 证明: X 与 Y 的相关系数 r 等于 $\cos q\pi$, 其中 $q = \mathbf{P}((X-a)(Y-b) < 0)$.

9. 袋中由编号 1 至 n 的 n 张卡片, 现从中任取出 $m(m \leqslant n)$ 张. 试对 (1) 有放回; (2) 不放回两情况求 m 张卡片上编号之和的方差.

解答. 设 X_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为第 i 次取卡时卡片的编号, 则 (1) 有放回时

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n}, \quad \mathbf{E}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}, \\ \mathbf{Var}(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) - (\mathbf{E}(X_i))^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3n}.\end{aligned}$$

由于 X_i 两两之间是不相关的, 所以 $\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i, X_k\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Cov}(X_i, X_k) = 0\ (k = 2, 3, \cdots, m)$, 于是

$$\mathbf{Var}(\sum_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{Var}(X_i) = \frac{mn(n+1)(n-1)}{3n}.$$

(2) 无放回, 设 X_i 为编号为 i 的卡片的示性变量, 则 $S = \sum_{i=1}^{n} i x_i$,

$$\mathbf{Var}(S) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \mathbf{Var}(X_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij \mathbf{Cov}(X_i, X_j),$$

由于 $\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$, 且 $X_i = X_i^2$, 则

$$\mathbf{Var}(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) - (\mathbf{E}(X_i))^2 = \mathbf{E}(X_i) - (\mathbf{E}(X_i))^2 = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} - \left(\frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbf{E}(X_i X_j) - \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j), \\ \mathbf{E}(X_i X_j) &= \mathbf{E}(X_i | X_j = 1) = \frac{\binom{n-2}{n-2}}{\binom{n-1}{m-1}} \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{n-2}{m-2}}{\binom{n}{m}}, \end{aligned}$$

综上

$$\mathbf{Var}(S) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} - \left(\frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}\right)^2 \right) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij \left(\frac{\binom{n-2}{m-2}}{\binom{n}{m}} - \left(\frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}\right)^2 \right).$$

13. 设 $\mathbf{E}X^2 < \infty$, a 是实数, 令

$$Y = \begin{cases} X, & X \leqslant a, \\ a, & X > a, \end{cases}$$

证明: $\mathbf{Var}Y \leqslant \mathbf{Var}X$.

15. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 且其分布函数 $F(x)$ 为连续函数. 若 $\mathbf{E}X$ 存在, 试证明:

$$\mathbf{E}|X - Y| = 4\mathbf{Cov}(X, F(X)).$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X-Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\,\mathrm{d}F(x,y)\\
&\xlongequal{X,Y\text{独立}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}F(x)\int_{-\infty}^{x}(x-y)\,\mathrm{d}F(y)+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}F(x)\int_{x}^{\infty}(y-x)\,\mathrm{d}F(y)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}x\,\mathrm{d}F(x)\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}F(y)-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}F(x)\int_{-\infty}^{x}y\,\mathrm{d}F(y)\\
&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}F(x)\int_{x}^{\infty}y\,\mathrm{d}F(y)-\int_{-\infty}^{\infty}x\,\mathrm{d}F(x)\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}F(y)\\
&\xlongequal[\text{交换积分顺序}]{X,Y\text{同分布}} \int_{-\infty}^{\infty}xF(x)\,\mathrm{d}F(x)-\int_{-\infty}^{\infty}y\,\mathrm{d}F(y)\int_{y}^{\infty}\mathrm{d}F(x)\\
&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}y\,\mathrm{d}F(y)\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}F(x)-\int_{-\infty}^{\infty}x(1-F(x))\,\mathrm{d}F(x)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}xF(x)\,\mathrm{d}F(x)-\int_{-\infty}^{\infty}y(1-F(y))\,\mathrm{d}F(y)\\
&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}yF(y)\,\mathrm{d}F(y)-\int_{-\infty}^{\infty}x(1-F(x))\,\mathrm{d}F(x)\\
&\xlongequal{X,Y\text{同分布}} 4\int_{-\infty}^{\infty}xF(x)\,\mathrm{d}F(x)-2\int_{-\infty}^{\infty}x\,\mathrm{d}F(x)\\
&= 4\mathbf{E}(XF(X))-2\mathbf{E}(X)\\
&\xlongequal[\mathbf{E}(F(X))=\frac{1}{2}]{F(X)\sim U(0,1)} 4\mathbf{E}(XF(X))-4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(F(X))=4\mathbf{Cov}(X,F(X)).
\end{aligned}
$$

□

习题 5.4

1. 求 Pascal 分布 $f(k;r,p)$ 的特征函数, 并用特征函数求其期望.

解答. Pascal 分布即为负二项分布, 表示在第 $k+r$ 次 Bernoulli 试验中, 恰好成功了 r 次, 则第 $k+r$ 次试验必定成功, 于是

$$
\mathbf{P}(X=r+k)=p\binom{r+k-1}{k}p^{r-1}q^k
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}p\binom{r+k-1}{k}p^{r-1}q^k=1\\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}q^k=\frac{1}{p^r}=\frac{1}{(1-q)^r}.
\end{aligned}
$$

所以, 特征函数为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} p\binom{r+k-1}{k} p^{r-1} q^k \mathrm{e}^{it(r+k)} \\
&= p^r \mathrm{e}^{\mathrm{i}tr} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} \left(q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k = \left(\frac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^r .
\end{aligned}
$$

进一步, Pascal 分布的期望为

$$
\mathbf{E}X = \frac{f'(0)}{i} = r\left(1+\frac{q}{p}\right) = \frac{r}{p} .
$$

2. 求 Gamma 分布 $\Gamma(\lambda, r)$ 的特征函数, 并用特征函数求其 k 阶原点矩 m_k.

解答. 设 $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, 则 $p(x) = \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$, 于是

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{itx} &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} e^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r} \int_0^{\infty} \frac{\left(\lambda\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)\right)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \mathrm{e}^{-\lambda\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r} .
\end{aligned}
$$

则 $f^{(k)}(t) = \dfrac{\mathrm{i}^k r(r+1)\cdots(r+k-1)}{\lambda^k}\left(1-\dfrac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r-t}$, 所以

$$
\mathbf{E}X^k = \frac{f^{(k)}(t)}{i^k} = \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{\lambda^k}.
$$

5. 设 $g(u) = 1-|u|,\ |u|<1$.

(1) 求以 $g(x)$ 为密度函数的分布的特征函数;

(2) 用反演公式求以 $g(t)$ 为特征函数的分布的密度函数.

解答. (1) 特征函数为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} (1+x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}t}(-2e^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{\mathrm{i}t}(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t} - 2)).
\end{aligned}
$$

(2) 由反演公式知, 密度函数为

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} (1-|t|)e^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} (1+t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-\mathrm{i}t}\left(-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{-\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 2\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$