日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 16 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第五次作业

题目 1. (1.4.1) 在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中，对每一点 $z=(x,y)$，令

$$||z||_1=|x|+|y|;\quad ||z||_2=\sqrt{x^2+y^2};\quad ||z||_3=\max(|x|,|y|);\quad ||z||_4=(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) 求证 $||\cdot||_i\ (i=1,2,3,4)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的范数.

(2) 画出 $(\mathbb{R}^2,||\cdot||_i)\ (i=1,2,3,4)$ 各空间中的单位球面图形.

(3) 在 $\mathbb{R}^2$ 中取定三点 $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$，试在上述四种不同范数下求出 $\triangle OAB$ 三边的长度.

解答. (1). $\forall x,y\in\mathbb{R}^2$，令 $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$.

正定性：由于 $|x_1|,x_1^2,x_1^4\geqslant 0$，则 $||x||_i\geqslant 0$, $(i=1,2,3,4)$ 且 $||x||_i=0\iff x=(0,0)$, $(i=1,2,3,4)$.

三角不等式：$||x+y||_1=|x_1+y_1|+|x_2+y_2|\leqslant|x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2|=||x||_1+||y||_1$.

下证 p-范数上的三角不等式，$||x||_p=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$

$$||x+y||_p^p=\sum_{i=1}^2|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i|\leqslant\sum_{i=1}^2|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^2|y_i|\cdot|x_i-y_i|^{p-1}$$

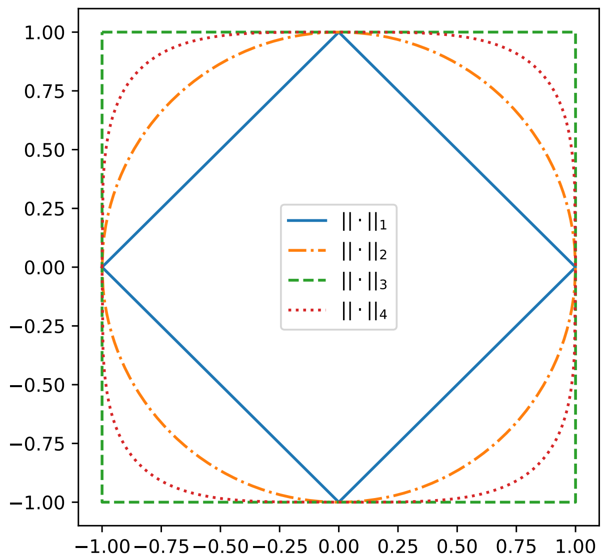
$$(\text{Holder 不等式})\leqslant\left(\left(\sum_{i=1}^2|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^2|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^2|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}=(||x||_p+||y||_p)||x+y||_p^{p-1}$$

则 $||x+y||_p\leqslant||x||_p+||y||_p$，故 $||\cdot||_2$, $||\cdot||_4$ 满足三角不等式.

$||x+y||_3=\max(|x_1+y_1|,|x_2+y_2|)\leqslant\max(|x_1|+|y_1|,|x_2|+|y_2|)\leqslant\max(|x_1|,|x_2|)+\max(|y_1|,|y_2|)=||x||_3+||y||_3$.

齐次型：$\forall\alpha\in\mathbb{K}$，由于 $|\alpha x_1|=|\alpha|\cdot|x_1|$, $\sqrt{\alpha^2}=(\alpha^4)^{\frac{1}{4}}=|\alpha|$，则以上范数均满足齐次性.

(2). 单位球面如右图所示



(3). $||OA||_i=||OB||_i=||(1,0)||_1=||(0,1)||_1=1$.

$||AB||_1=2$, $||AB||_2=\sqrt{2}$, $||AB||_3=1$, $||AB||_4=2^{\frac{1}{4}}$.

题目 2. (1.4.3) 在 $C^1[a,b]$ 中，令

$$||f||_1=\left(\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\quad(\forall f\in C^1[a,b]),$$

(1) 求证 $||\cdot||_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数.

(2) 问 $(C^1[a,b],||\cdot||_1)$ 是否完备?

解答. 由定义易得 $||f||\geqslant 0$，当 $f\equiv 0$ 时，$||f||=0$，反之，当 $||f||=0$ 时，

$$\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow|f|^2\text{在}[a,b]\text{上几乎处处为 }0$$

由于 $f\in C[a,b]$，则 $f\equiv 0$.

三角不等式：

$$\begin{aligned}||f+g||^2 = \int_a^b \left(|f+g|^2+|f'+g'|^2\right)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b \left(|f|\cdot|f+g|+|f'|\cdot|f'+g'|+|g|\cdot|f+g|+|g'|\cdot|f'+g'|\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_a^b \left(\sqrt{|f|^2+|f'|^2}\sqrt{|f+g|^2+|f'+g'|^2}+\sqrt{|g|^2+|g'|^2}\sqrt{|f+g|^2+|f'+g'|^2}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \left(\int_a^b (|f|^2+|f'|)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (|f+g|^2+|f'+g'|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left(\int_a^b (|g|^2+|g'|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (|f+g|^2+|f'+g'|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= (||f||+||g||)\,||f+g||\end{aligned}$$

则 $||f+g||\leqslant ||f||+||g||$.

齐次性：$\forall\alpha\in\mathbb{K}$，则 $||\alpha f||=\int_a^b (|\alpha f|^2+|\alpha f'|^2)\,\mathrm{d}x=|\alpha|\int_a^b (|f|^2+|f'|^2)\,\mathrm{d}x=|\alpha|\cdot||f||$.

(2) 不完备. 令 $\varphi_n(x)=\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}$，则 $\{\varphi_n\}\subset C^1[a,b]$，令 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ 1, & a<x\leqslant b.\end{cases}$ 下证 $\varphi_n\to\varphi$.

$$\begin{aligned}||\varphi_n-\varphi||^2 &= \int_a^b \left\{\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{2}{n}}\,\mathrm{d}x-2\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{d}x+\frac{1}{n^2}\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{2-2n}{n}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{b-a}{\frac{2}{n}+1}-\frac{2(b-a)}{\frac{1}{n}+1}+b-a+\frac{1}{n^2\left(\frac{2-2n}{n}+1\right)}\to b-a-2(b-a)+b-a=0,\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

则 $\varphi_n\to\varphi$, $(n\to\infty)$，而 $\varphi\notin C^1[a,b]$，则 $(C^1[a,b],||\cdot||)$ 不完备.

题目 3. (1.4.4) 在 $C[0,1]$ 中，对每一个 $f\in C[0,1]$，令

$$||f||_1=\left(\int_0^1 |f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\quad ||f||_2=\left(\int_0^1 (1+x)|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

求证：$||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个相等范数.

证明. 由于 $x\in[0,1]$ 时

$$\left(\int_0^1 |f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_0^1 (1+x)|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_0^1 2|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\int_0^1 |f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 等价. □

题目 4. (1.4.6) 设 $BC[0,\infty]$ 表示 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体，对于每个 $f\in BC[0,\infty)$ 及 $a>0$，定义

$$||f||_a=\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) 求证 $|\cdot||_a$ 是 $BC[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 若 $a,b>0,\ a\neq b$，求证 $||\cdot||_a$ 与 $||\cdot||_b$ 作为 $BC[0,\infty)$ 上的范数是不等价的.

证明. 先证明定义 $||\cdot||_a$ 有意义，$\forall f\in BC[0,\infty)$，设 $\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|=M$，则

$$||f||_a=\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant |M|\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{|M|}{\sqrt{a}}.$$

再证明 $||\cdot||_a$ 满足范数定义. 正定性：由于 $|f|^2\geqslant 0$，则 $||f||_a\geqslant 0$，当 $f\equiv 0$ 时，$||f||_a=0$，反之，当 $||f||_a=0$ 时，$|f|^2$ 在 $[0,\infty)$ 上几乎处处为零，又由于 $f\in C[0,\infty)$，则 $f\equiv 0$.

三角不等式：

$$\begin{aligned}
||f+g||_a^2&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f+g|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}|f|\cdot \mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}|f+g|\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}|g|\cdot \mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}|f+g|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f+g|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|g|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f+g|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=(||f||_a+||g||_a)\,||f+g||_a,
\end{aligned}$$

则 $||f+g||_a\leqslant ||f||_a+||g||_a$.

齐次性：$\forall \alpha\in\mathbb{K}$，$||\alpha f||_a=\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|\alpha f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\cdot||f||_a$.

(2) □

题目 5. (1.4.6) 设 X_1,X_2 是两个 B^* 空间，$x_1\in X_1$ 和 $x_2\in X_2$ 的序对 (x_1,x_2) 全体构成空间 $X=X_1\times X_2$，并赋以范数

$$||x||=\max(||x_1||_1,||x_2||_2),$$

其中 $x=(x_1,x_2),\ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\ ||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 分别是 X_1 和 X_2 的范数. 求证：如果 X_1,X_2 是 B 空间，那么 X 也是 B 空间.

证明. 令 $\{x_n\}\subset X$ 是 Cauchy 列，则 $||x_n-x_m||\to 0,\ (n,m\to 0)$，令 $x_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)})$，则

$$\max\left(||x_1^{(n)}-x_1^{(m)}||_1,||x_2^{(n)}-x_2^{(m)}||_2\right)\to 0,\quad (n,m\to 0)$$

则 $||x_i^{(n)}-x_i^{(m)}||_i\to 0,\ (n,m\to\infty,\ i=1,2)$，由于 X_1,X_2 是 B 空间，则 $\exists x_1^{(0)}\in X_1,\ x_2^{(0)}\in X_2$ 使得 $||x_i^{(n)}-x_i^{(0)}||_i\to 0,\ (n\to\infty,\ i=1,2)$，令 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$，则

$$||x_n-x_0||=\max(||x_i^{(n)}-x_1^{(0)}||,||x_2^{(n)}-x_2^{(0)})\to 0,\quad (n\to\infty)$$

所以 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，故 X 是 B 空间. □

题目 6. (1.4.8) 记 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体为 $\mathbb{P}_n$. 求证：$\forall f(x)\in C[a,b],\ \exists P_0(x)\in\mathbb{P}_n$ 使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_0(x)|=\min_{P\in\mathbb{P}_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|.$$

也就是说，如果用所有次数不超过 n 的多项式去对 $f(x)$ 一致逼近，那么 $P_0(x)$ 是最佳的.

证明. 令 $C[a,b]$ 上的范数为 $||f|| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ 则 $(C[a,b],||\cdot||)$ 是 B^* 空间. 由于 $\mathbb{P}_n$ 是 $C[a,b]$ 的真闭子空间且 $\dim\mathbb{P}_n = n+1 < \infty$，则存在最佳逼近，即 $\forall f \in C[a,b]$, $\exists P_0 \in \mathbb{P}_n$ 使得 $||f-P_0|| = \rho(f,\mathbb{P}_n)$，也即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_0(x)| = \min_{P\in\mathbb{P}_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|.$$

□

题目 7. (1.4.9) 在 $\mathbb{R}^2$ 中，对 $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$，定义范数

$$||x|| = \max(|x_1|,|x_2|),$$

并设 $e_1=(1,0)$, $x_0=(0,1)$. 求 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$||x_0-ae_1|| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}}||x_0-\lambda e_1||,$$

并问这样的 a 是否唯一？请对结果做出几何解释.

解答. 不唯一. $||x_0-\lambda e_1|| = ||(-\lambda,1)|| = \max(|\lambda|,1) \geqslant 1$ 当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时取到最小值 1. 则 $a\in[-1,1]$.

若把 $\{\lambda e_1 : \lambda\in\mathbb{R}$ 视为一维平面，则 x_0 到该平面的投影不唯一.

题目 8. (1.4.10) 求证：范数的严格凸性等价于下列条件：

$$||x+y|| = ||x||+||y|\ (\forall x\neq 0, y\neq 0) \Rightarrow x=cy \quad (c>0).$$

证明. 充分性，证明其逆否命题. $\forall x,y\neq\theta$，$x\neq cy\ (c>0)$，只需证 $||x+y|| < ||x||+||y||$，不妨令 $||x||\geqslant||y||$.

(i) 当 $||x||=||y||=: d$ 时，$\left|\left|\frac{1}{2}\frac{x}{d}+\frac{1}{2}\frac{y}{d}\right|\right| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow ||x+y|| < d+d = ||x||+||y||$.

(ii) 当 $||x||\neq||y||$ 时，不妨令 $||x||>||y||$ 则

$$\left|\left|\frac{x}{||x||}+\frac{y}{||x||}\right|\right| - \frac{||y||}{||x||} \leqslant \left|\left|\frac{x}{||x||}+\frac{y}{||x||}-\frac{||y||}{||x||}\right|\right| \leqslant \left|\left|\frac{||x||-||y||}{||x||}\frac{x}{||x||}+\frac{||y||}{||x||}\frac{y}{||y||}\right|\right| < 1$$

左侧不等号是因为 $||x|| = ||x-y+y|| \leqslant ||x-y||+||y||$，所以 $||x||-||y|| \leqslant ||x-y||$，于是

$$\left|\left|\frac{x}{||x||}+\frac{y}{||x||}\right|\right| < 1+\frac{||y||}{||x||} \Rightarrow ||x+y|| < ||x||+||y||$$

必要性，反设 $||\alpha x+\beta y|| = 1 = \alpha||x||+\beta||y||$，则 $\exists c>0$ 使得 $x=cy$，由于 $1=||x||=c||y||=c$，则 $x=y$ 矛盾. □

题目 9. (1.4.13) 设 X 是 B^* 空间，X_0 是 X 的线性子空间，假定 $\exists c \in (0,1)$ 使得

$$\inf_{x\in X_0} ||y-x|| \leqslant c||y|| \quad (\forall y \in X).$$

求证：X_0 在 X 中稠密.

证明. $\forall y \in X$，由下确界定义可知，$\exists \varepsilon > 0$，$\exists x_1 \in X_0$ 使得 $||y-x_1|| \leqslant c||y|| + \varepsilon$;

$\exists x_2 \in X_0$ 使得 $||y-x_1-x_2|| \leqslant c||y-x_1|| + \varepsilon \leqslant c^2||y|| + (1+c)\varepsilon$;

$\exists x_3 \in X_0$ 使得 $||y-x_1-x_2-x_3|| \leqslant c||y-x_1-x_2|| + \varepsilon \leqslant c^3||y|| + (1+c+c^2)\varepsilon$;

$\cdots$

$\exists x_n \in X_0$ 使得 $||y - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i|| \leqslant c^n||y|| + \varepsilon \dfrac{1-c^n}{1-c} \to \varepsilon, \quad (n \to \infty)$

令 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \in X_0$，则 $||y-S_n|| \to 0$, $(n \to \infty)$，由 y 的任意性可知，X_0 在 X 中稠密. $\square$

题目 10. (1.4.14) 设 C_0 表示以 0 为极限的实数列全体，并在 C_0 中赋以范数

$$||\xi|| = \max_{i\geqslant 1} |x_i|, \quad (\forall \xi = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \in C_0)$$

又设 $M := \left\{ \xi = \{x_n\} \in C_0 : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i}{2^i} = 0 \right\}$.

(1) 求证：M 是 C_0 的闭线性子空间.

(2) 设 $\mu_0 = \{2, 0, \cdots, 0, \cdots\}$，求证：$\inf\limits_{z\in M} ||x_0 - z|| = 1$，但 $\forall y \in M$ 有 $||x_0 - y|| > 1$.

证明. (1) $\forall \{\xi_n\} \subset M$ 收敛于 ξ，则 $||\xi_n - \xi|| = \max\limits_{i\geqslant 1} |x_i^{(n)} - x_i| \to 0$，令 $xi_n = \{x_i^{(n)}\}$, $\xi = \{x_i\}$，则 $x_i^{(n)} \to x_i$, $(n \to \infty,\ i \geqslant 1)$. 由于 $\xi_n \in C_0$，则 ξ_n 一致有界，令 $\sup\limits_{i\geqslant 1} |x_i^{(n)}| = M$，则 $\left| \dfrac{x_i^{(n)}}{2^i} \right| \leqslant \dfrac{M}{2^i}$，由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i^{(n)}}{2^i}$ 一致收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i^{(n)}}{2^i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i}{2^i} = 0$，则 $\xi \in M$，故 M 是闭的. 令 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$，$\xi, \eta \in M$，则 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0$，于是 $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha x_i + \beta y_i = \alpha \lim\limits_{i\to\infty} x_i + \beta \lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0$，则 $\alpha\xi + \beta\eta \in M$，其他线性空间性质与 C_0 类似，故 M 是闭线性子空间.

(2) 设 $\mu_0 = (2, 0, \cdots, 0, \cdots)$. 先证明 $\forall \xi \in M$ 有 $||\mu_0 - \xi|| > 1$. 反设，$\exists \xi_0 \in M$ 使得 $||\mu_0 - \xi_0|| \leqslant 1$，令 $\xi_0 = \{x_i^{(0)}\}$，则必有 $x_1^{(0)} \geqslant 1$ 且 $|x_i^{(0)}| \leqslant 1$, $(i \geqslant 2)$，于是

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^{(0)}}{2^i} \geqslant \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i^{(0)}}{2^i} \geqslant \frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 0$$

上式取到等号，当且仅当，$x_i^{(0)} = -1$, $(i \geqslant 2)$. 由于 $\xi_0 \in M$，则上式必取等号，则 $x_i^{(0)} = -1$, $(i \geqslant 2)$ 与 $\xi_0 \in C_0$ 矛盾，则原命题成立.

再证明 $\exists \{\xi_n\} \subset M$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mu_0 - \xi_n|| = 1$，则可说明 $\inf\limits_{\xi\in M} ||\mu_0 - \xi|| = 1$（结合上述证明），构造

$$\xi_1 = \{1, -2, 0, 0, \cdots\}, \quad \xi_2 = \{1, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0, \cdots\}, \cdots, \xi_n = \{1, -a_n, , \cdots, -a_n, 0, \cdots\}$$ (有n+1个非0项)

其中 $a_n = \dfrac{2^n}{2^n-1}$，可以验证 $\xi_n \in M$，则 $||\mu_0 - \xi_n|| = a_n = \dfrac{2^n}{2^n-1} \to 1,\ (n \to \infty)$. □

题目 11. (1.4.15) 设 X 是 B^* 空间，M 是 X 的有限维真子空间. 求证：$\exists y \in X, ||y|| = 1$，使得 $||y-x|| \geqslant 1 \quad (\forall x \in M)$.

证明. $\forall z \in X - X_0$，由于 $\dim X < \infty$，则 $\exists x_0 \in X_0$ 使得 $||z-x_0|| = \rho(z, x_0)$，令 $y = \dfrac{z-x_0}{||z-x_0||}$，则 $\forall x \in X_0$ 有

$$||y-x|| = \left|\left|\frac{z - x_0 - ||z-x_0||x}{||z-x_0||}\right|\right| \geqslant 1.$$

□