| 日期 | 科目 | 姓名，学号 |
|---|---|---|
| 2021 年 11 月 13 日 | 离散数学 | 吴天阳 2204210460 |

**37.**

证明. $S_1$ 的封闭性：$\forall a_1, a_2 \in S_1$，$\exists y_1, y_2 \in S$，使得 $y_1 * a_1 = e, y_2 * a_2 = e$，则

$$(y_2 * y_1) * (a_1 * a_2) = y_2 * (y_1 * a_1) * a_2 = y_2 * e * a_2 = y_2 * a_2 = e$$

所以 $a_1 * a_2 \in S_1$，故 $S_1$ 满足封闭性。

结合律，由于 $S_1$ 是 $S$ 的子集，所以 $S_1$ 具有结合律。

幺元，由于 $e * e = e$，所以 $e \in S_1$，故 $S_1$ 中含有幺元 $e$。

综上，$\langle S_1, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的子含幺半群。 □

**39.**

证明. (1). 由于 $\langle G, * \rangle$ 为群，所以 $G$ 中每个元素都存在唯一的逆元，则 $x = a^{-1} * b$，故 $x$ 是唯一的。

(2). 由于 $\langle G, * \rangle$ 为群，所以 $G$ 中每个元素都存在唯一的逆元，则 $y = b * a^{-1}$，故 $y$ 是唯一的。 □

**40.**

证明. (1). $\exists d \in S$，使得 $d * a = e$，则

$$a * b = a * c$$
$$\Rightarrow d * a * b = d * a * c$$
$$\Rightarrow b = c$$

(2). $\langle S, * \rangle$ 是半群，所以具有结合律。

下证 $S$ 含有幺元，由于 $e * e = e$，则 $\forall a \in G$，有

$$a * e * e = a * e \Rightarrow a * e = a$$

所以 $e$ 也是右幺元，故 $e$ 为 $S$ 中的幺元。

下证 $S$ 中元素都含有逆元，$\forall x \in G$, $\exists y \in G$，使得 $y * x = e$，则

$$y * x * y = e * y = y = y * e = y * y * x$$

对上式同时左乘 $y$ 的逆元，得

$$x * y = y * x = e$$

所以 $y$ 也是 $x$ 的右逆元，故 $y$ 是 $x$ 的逆元。

综上，$\langle S, * \rangle$ 是群。 $\square$

**41.**

*证明.* 反设，$G$ 中不含有二阶元，则 $\forall a \in G, a \neq e$ 都有 $a^{-1} \neq a$，所以 $G$ 中所有的非零元都可以两两配对，设这样的配对一共有 $m$ 对，则 $|G| = 2m + 1$，与 $|G| = 2n$ 矛盾，故 $G$ 中至少有一个二阶元素。 $\square$