日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 4 月 26 日	实变函数	强基数学 002	吴天阳	2204210460	59

习题 1.4

5. 记 $A' = A^{(1)}, (A^{(1)})' = A^{(2)}, \cdots, (A^{(n)})' = A^{(n+1)}, \cdots$. 试作一集 A, 使 $A^{(n)}(n = 1, 2, \cdots)$ 彼此互异.

解答. 设 A_i 为直线上的一孤立点集, 将 A_i 中的元素从小到大排成一行, 即

$$A_i = \{x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots\}$$

记 $d_j = x_{j+1} - x_j$ 即为第 j 个间距的大小. 于是可以做出如下构造

$$A_{i+1} = \left\{x_j + \frac{d_j}{k} : x_j \in A_i,\ k = 2, 3, \cdots\right\}$$

下证 $A_i \cap A_{i+1} = \varnothing$ 且 $(A_{i+1})' = A_i$.

反设 $\exists x_j \in A_i \cap A_{i+1}$, 则由 A_{i+1} 的定义可知, $x_j = x_{j-1} + \frac{d_j}{k} = x_{j-1} + \frac{1}{k}(x_j - x_{j-1})$, 则 $k = 1$, 与 $k \geqslant 2$ 矛盾, 则 $A_i \cap A_{i+1} = \varnothing$.

对于 $\forall x_j \in A_i$, 存在 A_{i+1} 中的点列 $\left\{x_j + \frac{d_j}{2}, x_j + \frac{d_j}{3}, \cdots, x_j + \frac{d_j}{n}, \cdots\right\}$ 收敛于 x_j, 所以 $A_i \subset (A_{i+1})'$. 相应的, 对于 $\forall a \in (A_{i+1})'$, 一定存在 j, 使得 $x_{j-1} \leqslant a < x_j$, 由于 A_{i+1} 在区间 $[x_{j-1}, x_j)$ 中仅有唯一一个收敛子列 $\left\{x_j + \frac{d_j}{2}, x_j + \frac{d_j}{3}, \cdots, x_j + \frac{d_j}{n}, \cdots\right\}$ 收敛于 x_j, 所以 $a = x_j \in A_i$, 于是 $(A_{i+1})' \subset A_i$. 综上 $(A_{i+1})' = A_i$.

取 $A_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$, 则可根据上述构造方法得到一孤立点集列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$, 对于 $\forall i = 1, 2, \cdots$, 满足 $(A_{i+1})' = A_i$ 且 $A_{i+1} \cap A_i = \varnothing$, 于是当 $i \to \infty$ 时, 取 $A = A_\infty$, 满足题目要求.

更严谨地, 由于 $A_i \subset [0, 1)$, 记 $A_i + i = \{a + i : a \in A_i\}$, 则 $\{A_i + i\} \subset [i, i+1)$, 所以 $\{A_i + i\}$ 是一列两两不交的集列, 取 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i + i)$ 即可.

6. 证明直线上的孤立点集必是有限集或可列集.

证明. 设 A 为直线上的孤立点集, 由孤立点集的定义, 不妨令

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

其中 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$, 令 $x_0 = 0$, 对于 $\forall i = 1, 2, \cdots$, 若 x_i 为无理点, 取 x_i' 为 (x_{i-1}, x_i) 中的一个有理点; 若 x_i 为有理点, 取 $x_i' = x_i$, 于是有

$$B = \{x_1', x_2', \cdots, x_n', \cdots\}$$

与 A 一一对应, 由于 $B \subset \mathbb{Q}$, 则 B 为至多可列集, 所以 A 也为至多可列集. □

7. 证明每个闭集必是可列个开集的通集, 每个开集可以表示成可列个闭集的和集.

证明. 设 F 为闭集, 令 $G_n = \bigcup_{x\in F}(x-\dfrac{1}{n}, x+\dfrac{1}{n})$, 则 $F\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. 对于 $\forall x\in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 对于每个 $n=1,2,\cdots$, 一定 $\exists x_n\in F$, 使得 $x\in\left(x_n-\dfrac{1}{n}, x_n+\dfrac{1}{n}\right)$, 则存在 F 的点列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 由于 $F'\subset F$, 则 $x\in F$, 于是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\subset F$. 综上, $F=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

设 G 为开集, 不妨令 G 的构成区间为 $\{(a_i,b_i): i=1,2,\cdots\}$, 根据开集的性质可知 $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$, $(i\neq j)$. 如下定义 a_i', b_i':

$$a_i' = \begin{cases} a_i+\frac{1}{n}, & a_i\neq -\infty, \\ -n, & a_i=-\infty. \end{cases} \qquad b_i' = \begin{cases} b_i-\frac{1}{n}, & b_i\neq \infty, \\ n, & b_i=\infty. \end{cases}$$

设 $F_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i', b_i']$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\subset G$. 对于 $\forall x\in G$, 一定 $\exists i$ 使得 $x\in(a_i,b_i)$, 存在一个尽可能大的 N, 使得 $\forall n\geqslant N$, 有 $x\in[a_i',b_i']\in\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $G\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. 综上, $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. □

10. 证明直线上闭集全体所成的集的势是 $\aleph$, 直线上完全集全体所成的集的势也是 $\aleph$.

证明. 设直线上开集全体所成之集为 A, 闭集全体所成之集为 B, 完全集所成之集为 S.

令 G 为开集, 不妨令 G 的构成区间为 $\{(a_i,b_i): i=1,2,\cdots\}$, 若 a_i,b_i 均为无理数, 则存在有理数列 $\left\{\left(\frac{[na_i]+1}{n}, \frac{[nb_i]}{n}\right)\right\}$ 收敛于 (a_i,b_i), 若 a_i,b_i 中存在无限点, 则只考虑有理点趋于有限点一端. 由于有理点全体的基数为 $\aleph_0$, 所以 $\overline{\overline{A}}=2^{\aleph_0}=\aleph$. 又由于闭集与开集一一对应 (互为余集), 所以 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}=\aleph$.

任一完全集都是自密闭集, 所以 $S\subset B$, 由于将开集的构成区间都加上端点, 可以构成一完全集 $S'\subset S$, 而且 A 可以与 S' 一一对应, 所以

$$\aleph=\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{S'}}\leqslant\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{B}}=\aleph$$

综上可知, $\overline{\overline{S}}=\aleph$. □

15. 定义 1.4.14 设 A 是直线上点集, x 是直线上的一点, 如果在 x 的任何环境中总含有 A 中不可列无限的点, 那么称 x 是 A 的**凝聚点**.

证明: (i) 对任何不可列无限集 A, 必有凝聚点, 而且在 A 中必有一个点是 A 的凝聚点.

(ii) 如果 x 是 A 的凝聚点, 那么 x 是 A 的凝聚点的极限点.

(iii) 直线上闭集 F 的势除了有限、可列外必为 $\aleph$.

证明. (i) 由于 A 为不可列无限集, 则存在 $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$, 使得 $(a_1, b_1) \cap A$ 为不可列无限集, 将开区间 (a_1, b_1) 分为两半 $\left(a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$, 则二者中至少有一个与 A 交集为不可列无限集, 记为 (a_2, b_2). 依此类推, 可得一开区间列 $\{(a_n, b_n)\}$, 满足 $b_n - a_n \leqslant \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, 且 $(a_n, b_n) \cap A$ 为不可列无限集, 由区间套定理可知, 存在唯一的 $x_0 \in E^1$, 使得 $x_0 \in (a_n, b_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 x_0 为 A 的凝聚点.

反设 A 中没有凝聚点, 则 $\forall x \in A$, 存在 x 的邻域 (a_x, b_x), 使得 $(a, b) \cap A$ 为至多可列集, 不妨令 a_x, b_x 均为有限数, 则 $A = \bigcup\limits_{x \in A}((a_x, b_x) \cap A)$, 则 A 为至多可列集, 与 A 为不可列无限集矛盾.

(ii) 记 S 为凝聚点全体, 只需证 S 为自密集, 令 x 为 A 的凝聚点, 下证 $x \in S'$. 对于 $n = 1, 2, \cdots$ 有 $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap A$, 为不可列无限集, 则 $(x - \frac{1}{n}, x) \cap A$ 和 $(x, x + \frac{1}{n}) \cap A$ 中至少有一个是不可列无限集, 有 (i) 可知, 不可列无限集中必存在凝聚点, 记为 x_n, 则 $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) - \{x\}$ 且 $x_n \in S$, 根据上述方法, 可以构造出 S 中一列收敛点列 $\{x_n\}$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, 则 $x \in S'$.

(iii) 设 F 为非空闭集, 则 F 为不可列无限集, 于是存在两个凝聚点 a_1, a_2, 由闭集的性质, 存在 a_1, a_2 的邻域包含于 F, 且也是不可列无限点集, 于是可以找到 a_{11}, a_{12} 属于 a_1 的邻域, a_{21}, a_{22} 属于 a_2 的邻域, 以此类推, 可得 F 的一子集 $F' = \{a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \cdots\}$, 且 $\overline{\overline{F'}} = 2^{\aleph_0} = \aleph$, 又由于全体闭集的势为 $\aleph$, 所以 $\aleph = \overline{\overline{F'}} \leqslant \overline{\overline{F}} \leqslant \aleph$, 故 $\overline{\overline{F}} = \aleph$.

□

18. 直线上的完全集 A, 如果具有如下性质: 任何两个余区间之间必至少夹有一个余区间. 问是否 A 必是疏朗的.

证明. 不一定, 设 C 为 $(0, 1)$ 上的康托集, 取 $A = (-\infty, 0] \cup C \cup [1, \infty)$, 由于康托集的性质, 两个余区间之间必至少夹有一个余区间, 但 $(-\infty, 0]$ 不是疏朗的, 则 A 不是疏朗的. □

22. 证明无理数全体不能表示成可列个闭集的和集.

证明. 反设 $\mathbb{Q}^c$ 可以表示成可列个闭集的和集, 即 $\mathbb{Q}^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, 记 $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \cdots\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} x_j$, 则 $\mathbb{R} = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} x_j\right)$, 由 Baire 定理可知,$\mathbb{R}$ 没有内点, 矛盾. 原命题得证. □