日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 4 月 26 日	概率论	强基数学 002	吴天阳	2204210460

习题 4.1

2. 甲从 $1,2,3,4$ 中任取一数 X，乙再从 $1,\cdots,X$ 中任取一数 Y。试求 (X,Y) 的联合分布。

X \ Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
3	1/16	1/16	1/16	1/16

4. 试问：函数

$$p(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_3^2+\frac{x_1x_2}{3},\quad 0<x_1<1,\ 0<x_2<2, 0<x_3<\frac{1}{2}$$

是否为一随机向量的密度函数?

解答. 由于

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^2\int_0^{1/2}\left(x_1^2+6x_3^2+\frac{x_1x_2}{3}\right)dx_3\,dx_2\,dx_1&=\int_0^1 x_1^2\,dx_1+12\int_0^{1/2}x_3^2\,dx_3+\frac{1}{6}\int_0^1\int_0^2 x_1x_2\,dx_2\,dx_1\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1\end{aligned}$$

所以 $p(x_1,x_2,x_3)$ 是一随机向量的密度函数。

6. 设随机向量 (X,Y) 的密度函数为

$$p(x,y)=ce^{-(3x+4y)},\quad x>0,\ y>0.$$

试求：(1) 常数 c；(2) 联合分布函数 $F(x,y)$；(3) $\mathbf{P}\{0<X\leqslant 1,\ 0<Y\leqslant 2\}$。

解答. (1)

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ce^{-(3x+4y)}\,dy\,dx=c\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-3x}\,dx=\frac{c}{12}=1$$

所以 $c=12$。

(2) $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 12e^{-(3u+4v)\,dv\,du}=\int_0^x -3e^{-3u}(e^{-4y}-1)\,du=(e^{-3x}-1)(e^{-4y}-1)$

(3) $\mathbf{P}\{0<X\leqslant 1,\ 0<Y\leqslant 2\}=F(1,2)-F(0,2)-F(1,0)+F(0,0)=(e^{-3}-1)(e^{-8}-1)$

8. 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=cxy^2,\quad 0<x<2,\quad 0<y<1.$$

试求：(1) 常数 c；(2) X,Y 至少有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。

解答. (1) $\int_0^2 cxy^2\,dy\,dx=\int_0^2 \frac{c}{3}x\,dx=\frac{2}{3}c=1$，则 $c=\frac{3}{2}$。

(2) 由于 $p(x,y)=\frac{3}{2}xy^2$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((X<\frac{1}{2})\cup(Y<\frac{1}{2}))&=1-\mathbf{P}((X\geqslant\frac{1}{2})\cap(Y\geqslant\frac{1}{2}))\\&=1-\int_{1/2}^2\int_{1/2}^1\frac{3}{2}xy^2\,dy\,dx=1-\frac{7}{16}\int_{1/2}^2 x\,dx=\frac{23}{128}\end{aligned}$$

习题 4.2

1. 证明多项分布的边缘分布仍为多项分布.

证明. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim M_n(m;p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 对于任意的 $k=1,2,\cdots,n-1$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_1=m_1,X_2=m_2,\cdots,X_k=m_k)\\=&\sum_{m_{k+1}+\cdots+m_n=m-m_1-\cdots-m_k}\mathbf{P}(X_1=m_1,X_2=m_2,\cdots,X_k=m_k)\\=&\sum_{m_{k+1}+\cdots+m_n=m-m_1-\cdots-m_k}\frac{m!}{m_1!\cdots m_n!}p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n}\\=&\frac{m!\cdot p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}}{m_1!\cdots m_k!(m-m_1-\cdots-m_k)!}\sum_{m_{k+1}+\cdots+m_n=m-m_1-\cdots-m_k}\frac{(m-m_1-\cdots-m_k)!}{m_{k+1}!\cdots m_n!}p_{k+1}^{m_{k+1}}\cdots p_n^{m_n}\\=&\frac{m!}{m_1!\cdots m_k!(m-m_1-\cdots-m_k)!}p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}(p_{k+1}+\cdots+p_n)^{m-m_1-\cdots-m_k}\\=&\frac{m!}{m_1!\cdots m_k!(m-m_1-\cdots-m_k)!}p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}(1-p_1-\cdots-p_k)^{m-m_1-\cdots-m_k}\end{aligned}$$

则 $(X_1,X_2,\cdots,X_k)$ 的边缘分布为 $M_{k+1}(m;p_1,p_2,\cdots,p_k,1-p_1-p_2-\cdots-p_k)$.

同理可证, 对于任意的指标集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ $(1\leqslant i_j\leqslant n)$, 有 $(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})$ 的边缘分布为 $M_{k+1}(m;p_1,p_2,\cdots,p_k,1-p_1-p_2-\cdots-p_k)$. 所以, 多项分布的边缘分布仍为多项分布. □

3. 设随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}e^{-y},$$

其中 $k_1>0,\ k_2>0,\ 0<x\leqslant y<\infty$. 试求 X 与 Y 的边缘分布密度.

解答.

$$
\begin{aligned}
p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,v)\,dv &= \frac{x^{k_1-1}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_x^{\infty} (v-x)^{k_2-1} e^{-v}\,dv \\
&\xlongequal{t=v-x} \frac{x^{k_1-1}e^{-x}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_0^{\infty} t^{k_2-1} e^{-t}\,dt \\
&= \frac{x^{k_1-1}e^{-x}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \Gamma(k_2) = \frac{x^{k_1-1}e^{-x}}{\Gamma(k_1)} \\
p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u,y)\,du &= \frac{e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_0^{y} u^{k_1-1}(y-u)^{k_2-1}\,du \\
&\xlongequal{t=u/y} \frac{e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_0^{1} (yt)^{k_1-1}(y-yt)^{k_2-1} y\,dt \\
&= \frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_0^{1} t^{k_1-1}(1-t)^{k_2-1}\,dt \\
&= \frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} B(k_1,k_2) \\
&= \frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1+k_2)} \\
&= \frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1+k_2)}
\end{aligned}
$$

5. 设 $F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 分别是二维随机向量 (X_1,Y_1) 和 (X_2,Y_2) 的联合分布函数. 记

$$
\bar{F}(x,y) = \mathbf{P}(X_1 > x,\ Y_1 > y), \quad \bar{G}(x,y) = \mathbf{P}(X_2 > x,\ Y_2 > y).
$$

若 (X_1,Y_1) 和 (X_2,Y_2) 具有相同的边缘分布, 这证明 $F(x,y) \leqslant G(x,y)$ 当且仅当 $\bar{F}(x,y) \leqslant \bar{G}(x,y)$.

证明. 由题可知, 边缘分布 $\bar{F}_1(x) = \mathbf{P}(X_1 > x) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x) = 1 - G(X \leqslant x) = \bar{G}_1(x)$, 同理可得, $\bar{F}_2(y) = \bar{G}_2(y)$. 又由于

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= 1 - (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - \bar{F}(x,y)) = \bar{F}(x,y) + 1 - \bar{F}_1(x) - \bar{F}_2(y) \\
G(x,y) &= 1 - (\bar{G}_1(x) + \bar{G}_2(y) - \bar{G}(x,y)) = \bar{G}(x,y) + 1 - \bar{G}_1(x) - \bar{G}_2(y)
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
F(x,y) \leqslant G(x,y) &\iff \bar{F}(x,y) + 1 - \bar{F}_1(x) - \bar{F}_2(y) \leqslant \bar{G}(x,y) + 1 - \bar{G}_1(x) - \bar{G}_2(y) \\
&\iff \bar{F}(x,y) \leqslant \bar{G}(x,y)
\end{aligned}
$$

□

6. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1+xy}{4},\quad |x|<1 \text{ 且 } |y|<1.$$

证明: X 与 Y 不独立, 但 X^2 与 Y^2 是独立的.

证明. X 的边缘密度为 $p_1(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xv}{4}\,dv=\frac{1}{2}$, 由轮换对称性可知, $p_2(y)=\frac{1}{2}$, 则 X 的边缘分布为 $F_1(x)=\int_{-1}^{x}p_1(u)\,du=\frac{x+1}{2}$, 同理 $F_2(y)=\frac{y+1}{2}$, 于是 $F_1(x)F_2(y)=\frac{(x+1)(y+1)}{4}$, 而

$$F(x,y)=\mathbf{P}(X\leqslant x,\ Y\leqslant y)=\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\,du\,dv=\frac{1}{4}(x+1)(y+1)((x-1)(y-1)+1)$$

所以 $F_1(x)F_2(y)\neq F(x,y)$, 于是 X 与 Y 不独立.

X^2 的概率分布为 $F_1'(x)=\mathbf{P}(X^2\leqslant x)=F_1(\sqrt{x})-F_1(-\sqrt{x})=\sqrt{x}$, 同理, Y^2 的概率分布为 $F_2'(y)=\sqrt{y}$, 由于

$$F'(x,y)=\mathbf{P}(X^2\leqslant x,\ Y^2\leqslant y)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1+uv}{4}\,du\,dv=\sqrt{xy}$$

所以 $F_1'(x)F_2'(y)=F'(x,y)$, 于是 X^2 与 Y^2 是独立的. □

7. 若 X,Y 独立, 都服从 -1 与 1 这两点上的等可能分布, 而 $Z=XY$. 证明:X,Y,Z 两两独立但不相互独立.

证明. 不难验证 Z 与 X,Y 服从相同的分布律, 于是

$$\begin{aligned}
F(X\leqslant -1,Z\leqslant -1)&=F(X=-1,Y=1)=\frac{1}{4}=F(X\leqslant -1)F(Z\leqslant -1)\\
F(X\leqslant -1,Z\leqslant 1)&=F(X=-1,Y=\pm 1)=\frac{1}{2}=F(X\leqslant -1)F(Z\leqslant 1)\\
F(X\leqslant 1,Z\leqslant -1)&=\mathbf{P}(X=-1,Y=1)+\mathbf{P}(X=1,Y=-1)=\frac{1}{2}=F(X\leqslant 1)F(Z\leqslant -1)\\
F(X\leqslant 1,Z\leqslant 1)&=\mathbf{P}(X=1,Y=1)=1=F(X\leqslant 1)F(Z\leqslant 1)
\end{aligned}$$

所以 X,Z 独立, 同理可得, Y,Z 独立, 于是 X,Y,Z 两两独立. 由于

$$F(X\leqslant -1,\ Y\leqslant -1,\ Z\leqslant -1)=0\neq F(X\leqslant -1)F(Y\leqslant -1)F(Z\leqslant -1)=\frac{1}{8}$$

所以 X,Y,Z 不相互独立. □

习题 4.3

1. 设随机向量 (X,Y,Z) 服从单位球 $D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<1\}$ 上的均匀分布, (1) 试求 X 的边缘分布; (2) 试求 X 在给定 Y,Z 的条件密度函数.

解答. (1) x 的边缘密度为

$$p_1(x)=\int_{y^2+z^2<1-x^2}\frac{3}{4\pi}\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{2\pi}\frac{3}{4\pi}r\,d\theta\,dr=\frac{3}{4}(1-x^2)$$

则 X 的边缘分布为

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{3}{4}(1-u^2)\,du=\frac{1}{4}(-x^3+3x+2)$$

(2) 给定 y,z 的边缘密度函数为 $p_2(y,z)=\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}}\frac{3}{4\pi}\,dx=\frac{3}{2\pi}\sqrt{1-y^2-z^2}$, 则条件密度函数为

$$p_3(x|y,z)=\frac{p(x,y,z)}{p_2(y,z)}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2-z^2}}$$

3. 若 (X,Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N}(a,b;\sigma_1^2,\sigma_2^2;r)$, 以 $D(\lambda)$ 记下面椭圆的内部

$$\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}=\lambda^2,$$

试求概率 $\mathbf{P}\{(X,Y)\in D(\lambda)\}$.

解答. 做变换 $\varphi(x,y)=(\sigma_1u+a,\sigma_2v+b)$, 则 $|\varphi'(x,y)|=\sigma_1\sigma_2$, 记 Ω 为 $D(\lambda)$ 所围成的区域, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{(X,Y)\in D(\lambda)\}&=\int_{\Omega}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}\right\}dx\,dy\\&\overset{\varphi}{=\!=}\int_{\varphi(\Omega)}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}\right\}\sigma_1\sigma_2\,du\,dv\\&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}\right\}\int_{\varphi(\Omega)}du\,dv\\&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}\right\}S(\sigma(\Omega))\end{aligned}$$

由于 $\sigma(\Omega)$ 是椭圆 $u^2-2ruv+v^2=\lambda^2$ 所围成的区域, 做旋转变换 ψ:

$$\psi\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&\sin\frac{\pi}{4}\\-\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\-x+y\end{bmatrix}$$

于是 $S(\sigma(\Omega))=S(\psi(\sigma(\Omega)))$, 是椭圆 $\frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{2(1+r)}}+\frac{y^2}{\frac{\lambda^2}{2(1-r)}}=1$ 所围成的面积, 所以 $S(\psi(\sigma(\Omega)))=\pi\sqrt{\frac{\lambda^2}{2(1+r)}\frac{\lambda^2}{2(1-r)}}=\pi\frac{\lambda^2}{2\sqrt{1-r^2}}$, 综上

$$\mathbf{P}\{(X,Y)\in D(\lambda)\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}\right\}\frac{\pi\lambda^2}{2\sqrt{1-r^2}}=\frac{\lambda^2}{4(1-r^2)}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}\right\}$$

习题 4.4

1. 设 X, Y 为相互独立的均服从区间 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量, 试求 $Z = X+Y$ 的分布函数密度.

解答. 设 $p(x,y)$ 为 X,Y 的联合密度函数, 则 $p(x,y) = p(x)p(y) = 1,\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1$, 所以

$$p_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-t)p_Y(t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x p(x-t,t)\,dt, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_{x-1}^1 p(x-t,t)\,dt, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_Z(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

2. 设随机变量 X, Y 相互独立, 密度函数均为 $p(x) = e^{-x},\ x > 0$, 试问: $X+Y$ 与 $\dfrac{X}{X+Y}$ 是否相互独立?

解答. 设 $p(x,y)$ 为 X,Y 的联合密度函数, 则 $p(x,y) = e^{-x-y},\ x, y > 0$, 则

$$p_{X+Y}(x) = \int_0^x p(x-t,t)\,dt = \int_0^x e^{-x}\,dt = xe^{-x}$$

设 $U = \dfrac{X}{X+Y},\ V = Y$, 则 $x = \dfrac{uv}{1-u},\ y = v$, 且

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v(1-u)+uv}{(1-u)^2} & \frac{u}{1-u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v}{(1-u)^2}$$

于是 $q(u,v) = p(\dfrac{uv}{1-u}, v)\dfrac{v}{(1-u)^2} = e^{\frac{v}{u-1}}\dfrac{v}{(1-u)^2}$, 所以 $p_U(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{\frac{v}{x-1}}\frac{v}{(1-x)^2}\,dv = 1$, 则 $p_{\frac{X}{X+Y}}(x)$ 为 $[0,1]$ 上的均匀分布.

设 $U = X+Y,\ V = \dfrac{X}{X+Y}$, 则 $x = uv,\ y = u(1-v)$, 且

$$J = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

则 $q(u,v) = p(uv, u(1-v))u = ue^{-u} = p_{X+Y}(u)p_{\frac{X}{X+Y}}(v)$, 所以是相互独立的.

3. 设 $\lambda > 0,\ q = e^{-\lambda},\ p = 1-q$. 随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 服从参数为 p 的几何分布, Y 具有密度函数

$$p_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{1-e^{-\lambda}}, \quad 0 < y < 1.$$

试求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

解答. $p_X(x-t)=pq^{x-t-1}$, $(x<t<1)$; $p_Y(t)=\dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda}}$, $(0<t<1)$, 所以

$$p_Z(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x-t)p_Y(t)\,dt=\int_x^1(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda(x-t-1)}\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda}}\,dt=-\lambda(x-1)e^{-\lambda(x-1)}$$

5. 设 X_1 与 X_2 为随机变量, 记 $Z_1=X_1+X_2$, $Z_2=X_1-X_2$. 证明: 如果 Z_1,Z_2 为相互独立的正态随机变量, 则 X_1 与 X_2 也为正态随机变量.

证明. 由题可知, $x_1=\dfrac{z_1+z_2}{2}$, $x_2=\dfrac{z_1-z_2}{2}$, $|J|=\dfrac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}p(x_1,x_2)\frac{1}{2}&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{\sigma_2^2(x_1+x_2-a_1)^2+\sigma_1^2(x_1-x_2-a_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right\}\\ \Rightarrow p(x_1,x_2)&=\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x_1+x_2-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x_1-x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{X_1}=&\int_{-\infty}^{\infty}p(x,t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x+t-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-t-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dt\\ =&\sqrt{\frac{2}{\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left\{-\frac{2\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(t-a_3)^2\right\}dt\\ =&\sqrt{\frac{2}{\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left\{-\frac{2\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}\end{aligned}$$

其中 $a_3=x+a_2+\dfrac{2x-a_1-a_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, 所以 $X_1\sim N\left(\dfrac{a_1+a_2}{2},\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}p_{X_2}=&\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(t+x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(t-x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dt\\ =&\sqrt{\frac{2}{\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left\{-\frac{2\left(x-\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(t-a_4)^2\right\}dt\\ =&\sqrt{\frac{2}{\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left\{-\frac{2\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}\end{aligned}$$

其中 $a_4=x+a_2+\dfrac{2x-a_1+a_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, 所以 $X_2\sim N\left(\dfrac{a_1-a_2}{2},\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)$. □

7. 设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量, 其密度函数不等于 0 且有二阶导数. 证明: 如果 $X+Y$ 与 $X-Y$ 相互独立, 则随机变量 $X,Y,X+Y,X-Y$ 均服从正态分布.

证明. 令 $p_X(x)=p(x)$, 则 $p_Y(y)=p(y)$. 设 $U=X+Y$, $V=X-Y$, $p_U(x)=f(x)$, $p_V(x)=g(x)$, 则 $x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u-v}{2}$, $J=\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} p(\frac{u+v}{2})p(\frac{u-v}{2})\frac{1}{2} &= f(u)g(v) \\ \Rightarrow\ \ln p(\frac{u+v}{2})+\ln p(\frac{u-v}{2})-\ln 2 &= \ln f(u)+\ln g(v) \\ (\text{分别对}u,v\text{求偏导})\Rightarrow h''(\frac{u+v}{2}) &= h''(\frac{u-v}{2}) \end{aligned}$$

其中 $h(x)=\ln p(x)$, 令 $h''(0)=-\lambda$, 取 $u=v$, 得 $h''(x)=f''(0)=-\lambda$, $h'(x)=-\lambda x+c_1$, $h(x)=-\dfrac{\lambda}{2}x^2+c_1x+c_2=-\dfrac{\lambda}{2}(x-\dfrac{c_1}{\lambda})^2+c_2+\dfrac{c_1^2}{2\lambda}$, 于是

$$p(x)=Ce^{-\frac{\lambda}{2}(x-\frac{c_1}{\lambda})^2}$$

所以 $p(x)$ 服从正态分布, 即 X,Y 服从正态分布, 由**题 5** 可知 $X+Y,X-Y$ 也服从正态分布. □

9. 设 (X_1,X_2,X_3) 为随机向量, 且 X_1,X_2,X_3 相互独立均服从标准正态分布, 试求 $Y=\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$ 的密度函数.

解答. 由卡方分布 $p_{\chi^2(n)}(x)=\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$, 其中 X_i 为相互独立且均服从标准正态分布, 可知 $X_1^2+X_2^2+X_3^2=\chi^2(3)$, 则 $Y=\sqrt{\chi^2(3)}$, 且 $p_{\chi^2(3)}=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}$, 于是根据随机变量变化公式, 可得

$$p_Y(x)=p_{\chi^2(3)}(x^2)\cdot 2x=\frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

10. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, 试求如下各随机变量的密度函数: (1) $Z_1=\max\{X_1,X_2\}$; (2) $Z_2=\min\{X_1,X_2\}$.

解答. 由题意可知, 对于 $x\in[0,1]$ 有

$$F_{Z_1}(x)=\mathbf{P}(X_1\leqslant x,\ X_2\leqslant x)=x^2$$

$$F_{Z_2}(x)=\mathbf{P}((X_1\leqslant x)\cup(X_2\leqslant x))=1-\mathbf{P}((X_1>x)\cap(X_2>x))=1-(1-x)(1-x)=2x-x^2$$

于是 $p_{Z_1}(x)=2x,\qquad p_{Z_2}(x)=2-2x.$

11. 对某种电子装置的输出测量了 5 次, 得到的观察值 $X_1,\cdots,X_5$ 是相互独立的随机变量, 且都服从 $\sigma^2 = 4$ 的 Rayleigh 分布, 即有概率密度 $p(x) = \dfrac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{8}}$, $x > 0$, 试求: (1)$Y = \max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}$ 的分布函数; (2) 概率 $\mathbf{P}(Y > 4)$.

解答. (1) 由于 $p(x) = \dfrac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{8}}$, 于是分布函数为 $F(x) = \displaystyle\int_0^x p(x)\,dx = \int_0^x \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx = 1 - e^{-\frac{x^2}{8}}$, 所以

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x,\ \cdots,\ X_5 \leqslant x) = \prod_{i=1}^{5} F(x) = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{8}}\right)^5$$

(2) $\mathbf{P}(Y > 4) = 1 - \mathbf{P}(Y \leqslant 4) = 1 - F_Y(4) = 1 - (1 - e^{-2})^5 \approx 0.5167$

12. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 服从超立方体 $[0,1]^4$ 上的均匀分布, 试求如下概率:

(1) $\mathbf{P}(X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3,X_4\})$; (2) $\mathbf{P}(X_4 > X_1|X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3\})$; (3)$\mathbf{P}(X_4 > X_2|X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3\})$.

解答.

$$(1)\ \mathbf{P}(X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}) = \int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_1 = \frac{1}{4}$$

$$(2)\ \mathbf{P}(X_4 > X_1|X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3\}) = \frac{\mathbf{P}(X_4 > X_1, X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3\})}{\mathbf{P}(\max\{X_1,X_2,X_3\})}$$

$$= \frac{\int_0^1\int_0^{x_4}\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} dx_2\,dx_3\,dx_1\,dx_4}{\int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} dx_2\,dx_3\,dx_1} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$(3)\ \mathbf{P}(X > X_2|X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3\}) = \frac{\mathbf{P}(X_4 > X_2, X_1 = \max\{X_1,X_2,X_3\})}{\mathbf{P}(\max\{X_1,X_2,X_3\})}$$

$$= \frac{P(X_1 > X_4 > X_2,\cdots) + \mathbf{P}(X_4 > X_1,\cdots)}{\mathbf{P}(\max\{X_1,X_2,X_3\})}$$

$$= \frac{\int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1}\int_0^{x_4} dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_1 + \int_0^1\int_0^{x_4}\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} dx_2\,dx_3\,dx_1\,dx_4}{\int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} dx_2\,dx_3\,dx_1} = \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$$

13. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立, 都服从 Exp(1) 分布. 记

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2},\quad Y_2 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3},\quad Y_3 = X_1+X_2+X_3$$

试求 Y_1,Y_2,Y_3 的联合密度函数, 并证明它们也相互独立.

解答. 由题意可知, $p(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_1-x_2-x_3}$, 且

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \\ y_2 = \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3} \\ y_3 = x_1+x_2+x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1y_2y_3 \\ x_2 = y_2y_3 - y_1y_2y_3 \\ x_3 = y_3 - y_2y_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 \\ -y_2y_3 & (1-y_1)y_3 & (1-y_1)y_2 \\ 0 & -y_3 & 1-y_2 \end{vmatrix} = y_3^2 \begin{vmatrix} y_2 & y_1 & y_1y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2y_3^2$$

所以 $q(y_1,y_2,y_3) = p(y_1y_2y_3,(1-y_1)y_2y_3,(1-y_2)y_3)y_2y_3 = y_2y_3^2e^{-y_3}$, 而且

$$p_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(y_1,y_2,y_3)\,dy_2\,dy_3 = \int_0^1\int_0^{\infty} y_2y_3^2e^{-y_3}\,dy_2\,dy_3 = 1$$
$$p_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(y_1,y_2,y_3)\,dy_1\,dy_3 = \int_0^1\int_0^{\infty} y_2y_3^2e^{-y_3}\,dy_1\,dy_3 = 2y_2$$
$$p_{Y_3}(y_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(y_1,y_2,y_3)\,dy_1\,dy_2 = \int_0^1\int_0^{1} y_2y_3^2e^{-y_3}\,dy_1\,dy_2 = \frac{1}{2}y_3^2e^{-y_3}$$

由于 $q(y_1,y_2,y_3) = y_2y_3^2e^{-y_3} = p_{Y_1}(y_1)p_{Y_2}(y_2)p_{Y_3}(y_3)$, 所以它们都相互独立.

14. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 都服从 Exp(1) 分布. 与上题类似地定义出随机变量 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, 再讨论相应的问题.

解答. 由题意可知, $p(x_1,x_2,\cdots,x_n) = e^{-x_1-x_2-\cdots-x_n}$, 且

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \\ y_2 = \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3} \\ \quad\vdots \\ y_{n-1} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \\ y_n = x_1+x_2+\cdots+x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1\cdots y_n \\ x_2 = y_2\cdots y_n - y_1\cdots y_n \\ \quad\vdots \\ x_n = y_n - y_{n-1}y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{y_1\cdots y_n}{y_1} & \frac{y_1\cdots y_n}{y_2} & \cdots & \frac{y_1\cdots y_n}{y_n} \\ -\frac{y_1\cdots y_n}{y_1} & \frac{y_2\cdots y_n}{y_2} - \frac{y_1\cdots y_n}{y_2} & \cdots & \frac{y_2\cdots y_n}{y_n} - \frac{y_1\cdots y_n}{y_n} \\ 0 & -\frac{y_2\cdots y_n}{y_2} & \cdots & \frac{y_3\cdots y_n}{y_n} - \frac{y_2\cdots y_n}{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{y_n}{y_n} - \frac{y_{n-1}y_n}{y_n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按列提出公共元素}]{r_2+r_1,\cdots,r_n+r_{n-1}} y_1y_2^2\cdots y_n^n \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1} & \frac{y_1}{y_2} & \cdots & \frac{y_1\cdots y_{n-1}}{y_n} \\ 0 & \frac{1}{y_2} & \cdots & \frac{1}{y_2\cdots y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{y_n} \end{vmatrix} \qquad (r_i + r_j\text{表示将第}j\text{行加到第}i\text{行上})$$

$$= y_2y_3^2\cdots y_n^{n-1}$$

所以

$$q(y_1, y_2, \cdots, y_n) = p(y_1 \cdots y_n, y_2 \cdots y_n - y_1 \cdots y_n, \cdots, y_n - y_{n-1} y_n) y_2 y_3^2 \cdots y_n^{n-1} = y_2 y_3^2 \cdots y_n^{n-1} e^{-y_n}$$

计算边缘密度可得:

$$\begin{aligned}
&p_1(y_1) = 1 \\
&p_2(y_2) = 2y_2 \\
&\quad\vdots \\
&p_k(y_k) = ky_k \\
&\quad\vdots \\
&p_{n-1}(y_{n-1}) = (n-1)y_{n-1} \\
&p_n(y_n) = \tfrac{1}{(n-1)!} y_n^{n-1} e^{-y_n}
\end{aligned}$$

综上, $q(y_1, \cdots, y_n) = p_1(y_1) \cdots p_n(y_n)$, 它们相互独立.

15. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立且服从相同的分布 $F(x)$, 试证顺序统计量 $X_{(i)}$ 的分布函数为

$$F_i(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^{F(x)} t^{i-1}(1-t)^{n-i}\,dt, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}
p_{X_i}(x) &= \mathbf{P}(X_{(1)}, \cdots, X_{(i-1)} \leqslant x,\ X_{(i)} = x,\ X_{(i+1)}, \cdots, X_n \geqslant x) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \left(\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt \right)^{i-1} p(x) \left(\int_{x}^{\infty} p(t)\,dt \right)^{n-i} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F^{i-1}(x) p(x) (1 - F(x))^{n-i}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
F_i(x) = \mathbf{P}(X_i \leqslant x) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^{x} (F(s))^{i-1} (1 - F(s))^{n-i}\,dF(s) \\
&\xlongequal{t=F(s)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^{F(x)} t^{i-1}(1-t)^{n-i}\,dt, \quad (i = 1, \cdots, n)
\end{aligned}$$

□