日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 10 月 25 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460	50

第四次作业

题目 1. (22) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来满足参数为 θ 的 Bernoulli 分布的随机样本.

1，求解 $\theta(1-\theta)$ 的 C-R 下界.

2. 若 $\theta(1-\theta)$ 的 UMVUE 存在，对其进行求解.

解答. 1. Bernoulli 分布的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}I_{\{0,1\}}(x)$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta^x(1-\theta^x))=\frac{x}{\theta}-\frac{1-x}{1-\theta},\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log\theta^x(1-\theta)^{1-x})=-\frac{x}{\theta^2}-\frac{1-x}{(1-\theta)^2},$$

则 Fisher 信息量为 $I(\theta)=-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log\theta^x(1-\theta)^{1-x})\right]=\frac{1}{(1-\theta)^2}+\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{(1-\theta)^2}\right)\theta=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$.于是 $\theta(1-\theta)$ 的 C-R 下界为 $\frac{(1-2\theta)^2}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}}=\frac{(1-2\theta)^2\theta(1-\theta)}{n}$.

2. 由于 $f(x;\theta)=(1-\theta)I_{\{0,1\}}(x)\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}$，令 $a(\theta)=1-\theta, b(x)=I_{\{0,1\}}(x), c(\theta)=\log\frac{\theta}{1-\theta}, d(x)=x$,则该分布属于指数族,于是 $\sum_{i=1}^nX_i$ 为完备的充分统计量,令 $Y=\sum_{i=1}^nX_i$, $Z=\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)^2$，由于

$$\mathbb{E}(Y)=n\theta,\ \mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^nX_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}X_iX_j\right]=n\theta+n(n-1)\theta^2=n(n-1)\left(\frac{\theta}{n-1}+\theta^2\right).$$

则 $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n}\right]=\theta$, $\mathbb{E}\left[\frac{z}{n(n-1)}-\frac{Y}{n(n-1)}\right]=\theta^2$，于是

$$\theta(1-\theta)=\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n}\right]-\mathbb{E}\left[\frac{z}{n(n-1)}-\frac{Y}{n(n-1)}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n-1}-\frac{Z}{n(n-1)}\right],$$

由于 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^nX_i-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)^2$ 是关于完备充分统计量 Y 的函数，且是 $\theta(1-\theta)$ 的无偏估计，所以它是 $\theta(1-\theta)$ 的 UMVUE.

题目 2. (24) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本，

1. 求解 $\mu=\theta/(1+\theta)$ 的 MLE.
2. 求解一个充分统计量，并验证其完备性. 判断 $\sum_{i=1}^nX_i$ 是否是充分统计量?
3. 是否存在一个关于 θ 的函数，使得其存在无偏估计且方差满足 C-R 下界?
4. 求解 $\theta,1/\theta,\mu=\theta/(1+\theta)$ 的 UMVUE.

解答. 1. 只需求解 θ 的 MLE：$\mathcal{L}(\theta)=\prod_{i=1}^n\theta x_i^{\theta-1}I_{(0,1)}(x_i)$，由

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(n\log\theta+\sum_{i=1}^n(\theta-1)\log(x_i)+\sum_{i=1}^n\log I_{(0,1)}(x_i)\right)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\log(x_i)=0$$

可得 θ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(x_i)}$. 则 μ 的 MLE 为

$$\hat{\mu}=\frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}}=\frac{n}{n-\sum_{i=1}^n \log(x_i)}.$$

2. 由于 $f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)=\theta I_{(0,1)}(x)\exp\{(\theta-1)\log x\}$，令 $a(\theta)=\theta,\ b(x)=I_{(0,1)}(x)$, $c(\theta)=\theta-1,\ d(x)=\log x$，于是该分布属于指数族，则 $\sum\limits_{i=1}^n d(x_i)=\sum\limits_{i=1}^n \log x_i$ 是一个完备的充分统计量. 由于 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 不满足因子分解定理，所以不是充分统计量.

3. 由于 $f_{-\log X}(x)=f_X(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x}=\theta\mathrm{e}^{-(\theta-1)x}\mathrm{e}^{-x}I_{(0,1)}(\mathrm{e}^{-x})=\theta\mathrm{e}^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$. 于是 $-\log X\sim$ Exp(θ). 令 $T=-\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$，则 $nT\sim\Gamma(n,\theta)\Rightarrow\mathbb{E}(T)=\frac{1}{\theta}$. 则 T 是 $\frac{1}{\theta}$ 的无偏估计，且

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta+(\theta-1)\log x)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\log x_i=-n\left(T-\frac{1}{\theta}\right)$$

所以 C-R 方程取到等号，故 $T=-\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$ 取到 $\frac{1}{\theta}$ 的 C-R 下界.

4. 由第三小问可知，$-\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$ 是 $\frac{1}{\theta}$ 的 UMVUE.

由于 $f(1;\theta)=\theta$（将概率密度函数视为 $\theta x^{\theta-1}I_{(0,1]}(x)$），则 $I(X=1)$ 是 θ 的无偏估计量，于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I(X=1)\middle|-\sum_{i=1}^n\log X_i=s\right]&=\frac{P(X=1,-\sum_{i=1}^n\log X_i=s)}{P\left(-\sum_{i=1}^n\log X_i\right)}=\frac{P(X=1)P(-\sum_{i=2}^n\log X_i=s)}{P\left(-\sum_{i=1}^n\log X_i\right)}\\&=\frac{\theta\cdot\frac{\theta^{n-1}}{\Gamma(n-1)}s^{n-2}\mathrm{e}^{-\theta s}}{\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}s^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta s}}=\frac{n-1}{s}\end{aligned}$$

所以 $\frac{n-1}{-\sum_{i=1}^n\log X_i}$ 是 θ 的 UMVUE.

题目 3. (29) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\theta,1)$ 的随机样本.

1. 分别求解关于 $\theta,\theta^2,P(X>0)$ 的 C-R 下界.
2. 当 $n=1$ 时，是否存在关于 θ^2 的无偏估计？若存在，求解之.
3. 是否存在关于 $P(X>0)$ 的无偏估计？若存在，求解之.
4. 求解 $P(X>0)$ 的 MLE.
5. 是否存在关于 θ^2 的 UMVUE. 若存在，求解之.
6. 是否存在关于 $P(X>0)$ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

解答. 1. $N(\theta,1)$ 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right\}$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\log 2\pi}{2}-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)=x-\theta,$$

Fisher 信息量为 $I(\theta)=\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right]^2=\mathbb{E}[x^2-2\theta x+\theta^2]$，由于 $\mathbb{E}(x^2)=\text{Var}(X)+[\mathbb{E}(X)]^2=1+\theta^2$，于是 $I(x)=1+\theta^2-2\theta^2+\theta^2=1$.

所以 θ 的 C-R 下界为 $\frac{1}{n}$，θ^2 的 C-R 下界为 $\frac{4\theta^2}{n}$.

由于 $X-\theta\sim N(0,1)$，则

$$P(x>0)=P(x-\theta>-\theta)=1-P(x-\theta\leqslant-\theta)=1-\Phi(-\theta)=\Phi(\theta),$$

所以 $P(x>0)$ 的 C-R 下界为 $\frac{(\Phi'(-\theta))^2}{n}=\frac{f(\theta;1)^2}{n}=\frac{\mathrm{e}^{-\theta^2}}{2\pi n}$.

2. 由于 $\mathbb{E}(X_1^2)=1+\theta^2$，则 X_1^2-1 是 θ^2 的无偏估计.

3. 由于 $\mathbb{E}(I(X_1>0))=\int_0^\infty f(x;\theta)\,\mathrm{d}x=P(X>0)$，则 $I(X_1>0)$ 是 $P(X>0)$ 的无偏估计.

4. 只需求解 θ 的 MLE：

$$\log\mathcal{L}(\theta)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta)=\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)=0$$

则 θ 的 MLE 为 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $P(X>0)=1-\Psi(-\theta)=\Phi(\theta)$，则 $P(X>0)$ 的 MLE 为 $\Phi(\bar{X})$.

5. 由于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2=\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)+\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right]^2=\sum_{i=1}^n\text{Var}(X_i)+(n\mathbb{E}(X))^2=n+n^2\theta^2$$

则 θ^2 的 UMVUE 为 $\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2-n\right]$.

6. 令 $S=\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $I(X_1>0)$ 是 $P(X>0)$ 的 UMVUE，则

$$\mathbb{E}\left[I(X_1>0)\Big|\sum_{i=1}^n X_i=s\right]=P(X_1>0|\sum_{i=1}^n X_i=s)=\int_0^\infty f(x|s)\,\mathrm{d}x$$

令 $Y=\sum_{i=2}^n X_i$，则 Y 与 X_1 独立，$f_{X_1,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{n-1}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}-\frac{(x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)}\right\}$.

变量代换得

$$f_{X_1,S}(x,s)=f_{X,Y}(x,s-x)\cdot 1=\frac{1}{2\pi\sqrt{n-1}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}-\frac{(s-x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)}\right\}$$

于是

$$
\begin{aligned}
f(x|s) = \frac{f(x,s)}{f(s)} &= \sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2} - \frac{(s-x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)} + \frac{(s-n\theta)^2}{2n}\right\} \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}x - \frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2\right\} \mathrm{d}x \\
&= 1 - \Phi(-\frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}) = \Phi(\frac{s}{\sqrt{n(n-1)}})
\end{aligned}
$$

则 $P(X>0)$ 的 UMVUE 为 $\Phi(\frac{n\bar{X}}{\sqrt{n(n-1)}})$.

题目 4. (30) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λPoisson 分布的随机样本，求解关于 $\tau(\lambda)=(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$ 的无偏估计量，MLE 和 UMVUE.

解答. Poisson 分布的概率密度函数为 $f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$，则

$$
\log\mathcal{L}(\lambda) = \log\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}I_{\{0,1,\cdots\}}(x) = \sum_{i=1}^n x_i\log\lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i! - n\lambda + \sum_{i=1}^n \log I_{\{0,1,\cdots\}}(x).
$$

于是 $\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$，则 $\tau(\lambda)$ 的 MLE 为 $(1+\bar{X})\mathrm{e}^{-\bar{X}}$.

如何求解无偏估计和 UMVUE?

题目 5. (31) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\frac{2x}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本.

1. 求解关于 θ 的 MLE.
2. $Y_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是充分统计量吗? Y_n 是完备的吗?
3. 是否存在关于 θ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

解答. 1. 极大似然函数为

$$
\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{2}{\theta^{2n}}I_{[0,y_n]}(y_1)I_{[y_n,\infty)}(\theta)\prod_{i=1}^n x_i.
$$

则 θ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=Y_n$.

2. 由于 Y_n 是 θMLE 的参数，所以 Y_n 是充分统计量. **完备性?**

3.

题目 6. (32) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}I_{(0,\infty)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本.

1. 当 $\theta>1$ 时，求解 θ 的矩估计.
2. 求解 $1/\theta$ 的 MLE.
3. 如果完备和充分统计量存在，对其进行求解.
4. 求解关于 $1/\theta$ 的 C-R 下界.

5. 求解关于 $1/\theta$ 的 UMVUE.
6. 求解关于 θ 的 UMVUE.