

第四次作业

题目 1. 在度量空间 l^2 中, 证明: $A = \{\xi = \{x_n\} \in l^2 : n|x_n| \leq 1\}$ 是 l^2 中的紧集.

证明. 只需证明 A 是自列紧集, 设 $\{\xi_n\} \subset A$ 是 Cauchy 列, 则 $\rho(\xi_n, \xi_m) \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$, 于是 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \rightarrow 0$, 所以 $\forall i \geq 1, \{x_i^{(n)}\}$ 为 \mathbb{R} 中的 Cauchy 列, 于是 $\exists x_i$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = x_i$.

令 $\xi = \{x_1, x_2, \dots\}$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, 有 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n_0)} - x_i|^2 < \varepsilon^2$, 则 $|x_i^{(n_0)} - x_i| < \varepsilon$. 又由于 $\xi_{n_0} \in A$, 则 $\exists N \geq [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ 使得 $\forall k \geq N$ 有 $|x_k^{(n_0)}| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, 于是

$$|x_i| \leq |x_i - x_i^{(n_0)}| + |x_i^{(n_0)}| < 2\varepsilon$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \in A$, 所以 A 是自列紧集, 故 A 是紧集. □

题目 2. 用闭区间套定理证明压缩映射原理.

证明. 设度量空间为 (X, ρ) , T 为 X 上的压缩映射. 下面证明集列 $A_n = \{x \in X : \rho(x, Tx) < \frac{1}{n}\}$ 是单调递减直径趋于 0 的非空闭集列.

单调递减: $\forall x \in A_{n+1}$, 则 $\rho(x, Tx) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, 故 $x \in A_n$.

非空: 设 $x_0 \in A_n$ 且 $\rho(x_0, Tx_0) = C$, 记 $x_1 = Tx_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n$, 则

$$\rho(x_n, Tx_n) \leq \alpha \rho(Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(x_0, Tx_0) = \alpha^n C \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

则 $A_n \neq \emptyset$.

闭集: $\forall m \in \mathbb{N}$, 只需证 A_m 的对极限封闭, 设 $\{x_n\} \subset A_m$ 收敛于 $x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n \geq N$ 有

$$\rho(x, Tx) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, Tx_n) + \rho(Tx_n, Tx) \leq (\alpha + 1)\varepsilon + \frac{1}{m}$$

由 ε 的任意性可知 $x \in A_m$, 所以 A_m 是闭集.

直径趋于 0: $\forall x, y \in A_n$, 则

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, Tx) + \rho(Tx, Ty) + \rho(Ty, y) \leq \frac{2}{(1-\alpha)n} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \dim A_n = 0$.

综上, $\{A_n\}$ 是直径趋于零的非空闭子集套, 所以存在唯一的 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 则 $\rho(x_0, Tx_0) = 0$, 压缩映射原理得证. □

题目 3. 设 $K(\cdot; \cdot) \in L^2([a, b] \times [a, b])$, 对于 $f \in L^2[a, b]$, 证明当 λ 充分小时,

$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s) \, ds$ 在 $L^2[a, b]$ 中存在唯一解.

证明. 令 $Tx(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s) \, ds$, 则 $T : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$, 于是

$$\begin{aligned} \rho(Tx_1, Tx_2) &= \left(\int_a^b \left(\lambda \int_a^b k(t, s)(x_1(s) - x_2(s)) \, ds \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| \left(\int_a^b dt \int_a^b k^2(t, s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (x_1(s) - x_2(s))^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

由于 $k(t, s) \in L^2([a, b]^2)$, 则 $\exists M > 0$ 使得 $\left(\int_a^b dt \int_a^b k^2(t, s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq M < \infty$, 取 $\lambda = \frac{1}{2M}$, 所以

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq |\lambda| M \rho(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2} \rho(x_1, x_2)$$

故 T 为 $L^2([a, b])$ 中的压缩映射, 则原方程在 $L^2([a, b])$ 中存在唯一解. \square

题目 4. 设 $K(\cdot; \cdot) \in C([a, b] \times [a, b])$, 对于 $f \in C([a, b])$, 证明 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)x(s) \, ds$ 在 $C([a, b])$ 中存在唯一解.

证明. 做变量代换 $t' = t + a$, 令 $c = b - a$, 只需证明原方程在 $C([0, c])$ 上存在唯一解. 设 $Tx(t) = f(t) + \lambda \int_0^t k(t, x)x(s) \, ds$, 则 $T : C([0, c]) \rightarrow C([0, c])$, 于是

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) = \max_{t \in [a, b]} \lambda^n \int_0^t k(t, t_1) \int_0^{t_1} k(t_1, t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} k(t_{n-1}, t_n)(x_1(t_n) - x_2(t_n)) \, dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 dt$$

由于 $f \in C[0, c]$, 于是存在上界 $M \geq 0$ 使得 $\sup_{t \in [0, c]} |f(t)| \leq M$, 于是

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) \leq \frac{(|\lambda| M t)^n}{n!} \max_{t \in [0, c]} \{x_1(t) - x_2(t)\}$$

由 Stirling 公式可知 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, ($n \rightarrow \infty$), 于是

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e\lambda M t}{n}\right)^n \rightarrow 0^+, \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以 T^n 是 $C([0, c])$ 上的压缩映射, 故原问题存在唯一解. \square

题目 5. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 且 $\dim X < \infty$, 则 X 是 Banach 空间.

证明. 设 $\dim X = N$, 其中的一组基为 $\{l_1, l_2, \dots, l_N\}$, $\forall \{x_n\} \subset X$ 为 Cauchy 列, 令 $x_n = \sum_{i=1}^N x_i^{(n)} l_i$, 则 $\exists c_1 > 0$ 使得

$$c_1 \left(\sum_{i=1}^N (x_i^{(n)} - x_i^{(m)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

则 $|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| \rightarrow 0$, $(n, m \rightarrow \infty, \forall 1 \leq i \leq N)$, 则 $\{x_i^{(n)}\}$ 为 \mathbb{R} 中的 Cauchy 列, 由于 \mathbb{R} 是完备的, 所以 $\{x_i^{(n)}\}$ 收敛, $\exists x_i \in \mathbb{R}$ 使得 $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$, $(n \rightarrow \infty)$, 令 $x = \sum_{i=1}^N x_i l_i$, 又由于 $\exists c_2 > 0$ 使得

$$\|x_n - x\| \leq c_2 \left(\sum_{i=1}^N (x_i^{(n)} - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

则 $\{x_n\}$ 收敛于 x , 则 X 是完备的, 故 X 是 Banach 空间. \square

题目 6. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, X 中的任何有限维子空间都是闭集.

证明. 设 $A \subset X$ 是 N 维子空间 ($N < \infty$), 其中一组基为 $\{l_1, \dots, l_N\}$, $\forall \{x_n\} \in A$ 为收敛列, 令 $x_n = \sum_{i=1}^N x_i^{(n)} l_i$, 则 $\exists x \in X$, 使得 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$. 假设 $x \notin A$, 则 x 与 $\{l_1, \dots, l_N\}$ 线性无关, 则 $\{l_1, \dots, l_N, x\}$ 构成 $N+1$ 维空间的一组基, 由于 $\|\cdot\|$ 与 $N+1$ 维空间坐标对应 2-范数等价, 于是

$$\left(\sum_{i=1}^N (x_i^{(n)})^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

矛盾, 所以 $x \in A$. \square

题目 7. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 且 $\dim X < \infty$, 则 X 中的有界集都是列紧集.

证明. 设 $\dim X = N$, 其中的一组基为 $\{l_1, \dots, l_N\}$, $\forall A \subset X$ 为有界集, 则 $\exists C > 0$, 使得 $\forall x \in A$, $\|x\| < C$, 令 $x = \sum_{i=1}^N x_i l_i$, 则 $\sum_{i=1}^N |x_i| \|l_i\| < C$, 记 $M_1 = \sup_{1 \leq i \leq N} \|l_i\|$, 则 $\sum_{i=1}^N |x_i| \leq C/M_1$, 于是 $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 有界. 任取 A 中的数列 $\{x_n\}$, 令 $x_n = \sum_{i=1}^N x_i^{(n)} l_i$, 记 $S = \{(x_1^{(k)}, \dots, x_N^{(k)}) : x_k \in \{x_n\}\}$, 则 S 必有收敛子列 $\{(x_1^{(n_1)}, \dots, x_N^{(n_1)}), \dots, (x_1^{(n_k)}, \dots, x_N^{(n_k)}), \dots\}$, 由于 $\|\cdot\|$ 与 \mathbb{R}^N 中 2-范数等价, 于是 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列, 所以 A 是列紧集. \square

题目 8. 1. $X = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$, $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, 则 X 是 Banach 空间.

2. $X_0 = \{f \in X : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$, 则 $\dim X_0 = \infty$, 证明 Riesz 引理中 $\varepsilon \neq 0$.

证明. 1. $\forall \{\varphi_n\} \subset X$ 是 Cauchy 列, 则 $\|\varphi_n - \varphi_m\| = \max_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$, $\forall x_0 \in [0, 1]$, 有 $|\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)| \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$. 令 $x_n = \varphi_n(x_0)$, 则 $\{x_n\}$ 是 \mathbb{R} 中的 Cauchy 列, $\exists x \in \mathbb{R}$ 使得 $x_n \rightarrow x, (n \rightarrow \infty)$, 令 $\varphi(x_0) = x$, 由于 x_0 的任意性, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, 下证 φ 的连续性.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall x \in [0, 1]$ 有 $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, 由于 $\varphi_n \in C([0, 1])$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta$ 有 $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ 则

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi_n(x_1)| + |\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| + |\varphi_n(x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

所以 $\varphi \in C([0, 1])$, 且 $\varphi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 0$, 故 $\varphi \in X$, X 是 Banach 空间.

2. 反设, $\exists x_0 \in X, \|x_0\| = 1$ 使得 $\rho(x_0, X_0) \geq 1$, 则 $\exists b = \frac{\int_0^1 x \, dt}{\int_0^1 y \, dt}$ 使得 $x_0 - by \in X_0$, 故

$\|by\| \geq 1 \Rightarrow \left| \int_0^1 y \, dt \right| \leq \|y\| \left| \int_0^1 x \, dt \right|$, 取 $y = t^{\frac{1}{n}}$, 则

$$\left| \int_0^1 y \, dt \right| = \frac{n}{n+1} \leq \left| \int_0^1 x \, dt \right| \Rightarrow \left| \int_0^1 x \, dt \right| \geq 1, \quad (n \rightarrow \infty)$$

与 $\|x_0\| = 1$ 且 $x_0(0) = 0$ 矛盾. □