日期	科目	班级	姓名	学号
2025 年 6 月 17 日	随机过程	人工智能 B2480	吴天阳	4124136039

第三次作业　连续时间的 Markov 链

题目 1. P332 1. 一个有机体的总体由雄性和雌性成员组成. 在一个小的群体中，某个特定的雄性可能与一个特定的雌性以概率 $\lambda h + o(h)$ 在任意长度为 h 的时间区间里交配. 每次交配立即等可能产生一个雄性或雌性后代. 以 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别记在时刻 t 总体中的雄性和雌性的个数. 推导连续时间的 Markov 链 $\{N_1(t), N_2(t)\}$ 的参数，即 6.2 节中的参数 v_i, P_{ij}.

解答. 状态 $i = (n_1, n_2)$，其中 n_1, n_2 分别为雄性和雌性的个数，且 $n_1, \geqslant 0, n_2 \geqslant 0$.

离开状态 i 的速率为每次的交配速率和总交配对数之积，即

$$v_i = v_{(n_1,n_2)} = \lambda n_1 n_2$$

由于是等概率产生一个雄性或雌性后代，因此当 $n_1 > 0, n_2 > 0$ 时

$$P_{(n_1,n_2)\to(n_1+1,n_2)} = P_{(n_1,n_2)\to(n_1,n_2+1)} = \frac{1}{2},$$

当 $n_1 = 0$ 或 $n_2 = 0$ 时

$$P_{(n_1,n_2)\to(n_1,n_2)} = 1.$$

题目 2. P332 6. 考虑一个具有出生率 $\lambda_i = (i+1)\lambda\ (i \geqslant 0)$ 与死亡率 $\mu_i = i\mu\ (i \geqslant 0)$ 的生灭过程.

(a) 确定从状态 0 到状态 4 的期望时间.

(b) 确定从状态 2 到状态 5 的期望时间.

(c) 确定 (a) 和 (b) 中的方差.

解答. 设 m_i 为从状态 i 到状态 $i+1$ 的期望时间，则

$$\begin{aligned}
m_i &= \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} m_{i-1} = \frac{1}{(i+1)\lambda} + \frac{i\mu}{(i+1)\lambda} m_{i-1} = \frac{1}{(i+1)\lambda}\sum_{k=0}^{i} r^k \\
\Rightarrow m_i &= \frac{1}{(i+1)\lambda}\frac{1-r^{i+1}}{1-r} \quad (r \neq 1) \\
\Rightarrow m_i &= \frac{1}{\lambda_i} \quad (r = 1)
\end{aligned}$$

其中 $r = \dfrac{\mu}{\lambda}$

(a)
$$\mathbb{E}[T_{0\to4}] = \sum_{i=0}^{3} m_i = \frac{1}{\lambda(1-r)}\left[\frac{1-r}{1} + \frac{1-r^2}{2} + \frac{1-r^3}{3} + \frac{1-r^4}{4}\right]$$

(b)
$$\mathbb{E}[T_{2\to5}] = \sum_{i=2}^{4} m_i = \frac{1}{\lambda(1-r)}\left[\frac{1-r^3}{3} + \frac{1-r^4}{4} + \frac{1-r^5}{5}\right]$$

(c) 设 T_i 为从状态 i 到状态 $i+1$ 的时间，则

$$\mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+\mu_i)} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}\mathrm{Var}(T_{i-1}) + \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i}(\mathbb{E}[T_{i-1}] + \mathbb{E}[T_i])^2$$

由于当 $r \neq 1$ 时情况过于复杂，下面仅考虑 $r = 1$ 的情况，则

$$\mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda_i^2} + \mathrm{Var}(T_{i-1}) = \frac{i+1}{\lambda_i^2}$$

于是

$$\mathrm{Var}(T_{0\to 4}) = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda^2}\left[1+2+3+4\right] = \frac{10}{\lambda^2}$$
$$\mathrm{Var}(T_{2\to 5}) = \sum_{i=2}^{4} \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda^2}\left[3+4+5\right] = \frac{12}{\lambda^2}$$

题目 3. P333 13. 一个理发师经营的小理发店最多能容纳两个顾客．潜在顾客以每小时 3 个的速度的 Poisson 过程到达，而相继的服务时间是均值为 1/4 小时的独立的指数随机变量．求解下面各项：

(a) 在店中顾客的平均数.

(b) 进入店中的潜在顾客比例.

(c) 如果该理发师工作的速率快至两倍，他将多做多少生意?

解答. (a) 该问题为 $M/M/1$ 的排队系统，到达速率为 $\lambda = 3$，服务速率为 $\mu = 4$，设该随机过程的状态空间为 $S = \{0, 1, 2\}$，P_n 为状态 n 的稳态分布，则

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ \lambda P_0 + \mu P_2 = (\mu+\lambda) P_1 \\ \lambda P_1 = \mu P_2 \\ P_0 + P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}\right) P_0 = 1 \\ P_2 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_1 = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} P_0 \end{cases}$$

设 $\rho = \lambda/\mu = 3/4$ 则

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{1+\rho+\rho^2} = \dfrac{16}{37} \\ P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 = \dfrac{12}{37} \\ P_2 = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} P_0 = \dfrac{9}{37} \end{cases}$$

于是平均顾客数 L 为

$$L = \sum_{n=0}^{2} n P_n = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 = \frac{12}{37} + \frac{18}{37} = \frac{30}{37}$$

(b) 潜在顾客到达当且阶段不在状态 2 下，因此进入系统的顾客比例为

$$1 - P_2 = 1 - \frac{9}{37} = \frac{28}{37}$$

(c) 工作速率加倍后，服务速率变为 $\mu' = 8$，则 $\rho' = \lambda/\mu' = 3/8$，对应的稳态概率变为

$$\begin{cases} P_0' = \dfrac{1}{1+\rho'+\rho'^2} = \dfrac{64}{97} \\ P_1' = \dfrac{\lambda}{\mu'}P_0' = \dfrac{24}{97} \\ P_2' = \dfrac{\lambda^2}{\mu'^2}P_0' = \dfrac{9}{97} \end{cases}$$

进入系统的顾客比例变为

$$1 - P_2' = 1 - \frac{9}{97} = \frac{88}{97}$$

有效到达速率为

$$\lambda'_{effect} = \lambda(1-P_2) = 3 \cdot \frac{88}{97} = \frac{264}{97}$$

原系统的有效到达速率为

$$\lambda_{effect} = \lambda(1-P_2) = 3 \cdot \frac{28}{37} = \frac{84}{37}$$

因此多做的生意为

$$\lambda'_{effect} - \lambda_{effect} = \frac{264}{97} - \frac{84}{37} = \frac{1620}{3589} \approx 0.45$$

即多做了约 0.45 个顾客/小时.

题目 4. P334 19. 一个修理工照看机械 1 和 2. 每次修复后，机器 i 保持正常运行一个速率为 $\lambda_i\ (i=1,2)$ 的指数时间. 当机械 i 失效时需要以速率为 μ_i 的指数分布的工作量完成它的修理. 在机器 1 失效时修理工总是先修理它. 例如，若正在修理机械 2 时机械 1 突然失效，则修理工将立即停止修理机械 2，而开始修理机械 1. 问机械 2 失效的时间比例是多少?

解答. 设状态 $0,1,2,3$ 分别表示：

- 状态 0：两台机械都正常
- 状态 1：机械 1 失效，2 正常
- 状态 2：机械 2 失效，1 正常
- 状态 3：机械 1 失效，2 失效

则有

$$\begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2)P_0 = \mu_1P_1 + \mu_2P_2 \\ (\mu_1+\lambda_2)P_1 = \lambda_1P_0 \\ (\mu_2+\lambda_1)P_2 = \lambda_2P_0 + \mu_1P_3 \\ \mu_1P_3 = \lambda_2P_1 + \lambda_1P_2 \\ P_0+P_1+P_2+P_3 = 1 \end{cases}$$

解得

$$P_0 = \frac{(\mu_1+\lambda_2)\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1) + \lambda_2\mu_1(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)}$$

机械 2 失效的时间比例为

$$
\begin{aligned}
P_2+P_3&=\frac{\lambda_1\lambda_2(2\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_2\mu_1(\lambda_2+\mu_1)}{(\mu_1+\lambda_2)\mu_1\mu_2}P_0\\
&=\frac{\lambda_1\lambda_2(2\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_2\mu_1(\lambda_2+\mu_1)}{\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)+\lambda_2\mu_1(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)}
\end{aligned}
$$

题目 5. P336 35. 考察一个具有无穷小转移速率 q_{ij} 和极限概率 $\{P_i\}$ 的时间可逆的连续时间的 Markov 链. 以 A 记这个链的一个状态集合，并且考虑一个转移速率 q_{ij}^* 为

$$
q_{ij}^*=\begin{cases} cq_{ij}, & \text{if } i\in A, j\notin A\\ q_{ij}, & \text{otherwise}\end{cases}
$$

的新的连续时间的 Markov 链，其中 c 是一个任意的正常数. 证明这个链是时间可逆的，并求它的极限概率.

解答. 首先证明时间可逆，只需证新链的嵌入链是时间可逆的，设新链的嵌入链的平稳概率为

$$
\pi_i^*=k\begin{cases} P_i, & i\in A\\ cP_i, & i\notin A\end{cases}
$$

其中 k 为常数，使得 $\sum\limits_i \pi_i=1$，由于原链的是时间可逆的，因此 $\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}, P_i q_{ij}=P_j q_{ji}$，只需证 $\pi_i^* q_{ij}^*=\pi_j^* q_{ji}^*$，分情况讨论：

1. $i,j\in A$：$\pi_i^*q_{ij}^*=kP_iq_{ij}=(kP_j)q_{ji}=\pi_j^*q_{ji}^*$
2. $i\in A,j\notin A$：$\pi_i^*q_{ij}^*=kP_icq_{ij}=(kP_jc)q_{ji}=\pi_j^*q_{ji}^*$
3. $i\notin A,j\in A$：$\pi_i^*q_{ij}^*=kcP_iq_{ij}=(kP_j)(cq_{ji})=\pi_j^*q_{ji}^*$
4. $i,j\notin A$：$\pi_i^*q_{ij}^*=kcP_jq_{ij}=(kcP_j)q_{ji}=\pi_j^*q_{ji}^*$

综上可知，$\pi_i^*q_{ij}^*=\pi_j^*q_{ji}^*$，因此新链是时间可逆的.

由 $\sum\limits_i \pi_i=1$ 可知

$$
k=\frac{1}{\sum_{i\in A}P_i+c\sum_{i\notin A}P_i}
$$

综上可知，极限概率为

$$
P_i^*=\begin{cases}\dfrac{P_i}{\sum_{i\in A}P_i+c\sum_{i\notin A}P_i}, & i\in A\\ \dfrac{cP_i}{\sum_{i\in A}P_i+c\sum_{i\notin A}P_i}, & i\notin A\end{cases}
$$

题目 6. P338 45. 在例 6.24 中，我们用开始在状态 0 的两状态的连续时间的 Markov 链，计算了直到时刻 t 为止在状态 0 的平均占位时间 $m(t)=\mathbb{E}[O(t)]$. 另一个得到这个量的途径是推导它的一个微分方程.

(a) 证明

$$m(t+h)=m(t)+P_{00}(t)h+o(h)$$

(b) 证明

$$m'(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

(c) 求解 $m(t)$.

解答. (a) 令 $I(s)=\begin{cases}1, & X(s)=0\\ 0, & X(s)=1\end{cases}$，则 $O(t)=\int_0^t I(s)\mathrm{d}s$，于是

$$O(t+h)=\int_0^{t+h} I(s)\mathrm{d}s=O(t)+\int_t^{t+h} I(s)\mathrm{d}s$$

取期望，并令 $h\to 0$ 有

$$m(t+h)=m(t)+I(t)h+o(h)=m(t)+P_{00}(t)h+o(h)$$

(b)

$$m'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P_{00}(t)h+o(h)}{h}=P_{00}'(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

(c) 对上式积分可得

$$m(t)=\int_0^t m'(t)\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\lambda+\mu}t+\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$