日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 9 月 10 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

1. 分别证明 $\rho_1(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$，$\rho_2(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t$ 是 $C[a,b]$ 中的度量.

证明. 任取 $x,y,z\in C[a,b]$.

（正定性）由于 $|x(t)-y(t)|\geqslant 0$，则 $\rho_1(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\geqslant 0$.

若 $\rho_1(x,y)=0$，则 $|x(t)-y(t)|\leqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=0$，则 $x(t)=y(t)$；反之，当 $x(t)=y(t)$，则 $\rho_1(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}0=0$.

设 $\pi: a=a_1<a_2<\cdots<a_n=b$ 为 $[a,b]$ 上的一个划分，$\Delta\pi=\max\limits_{(a_i,a_{i+1})\in\pi}a_{i+1}-a_i$，则

$$\rho_2(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t=\lim_{\Delta\pi\to 0}\sum_{(a_i,a_{i+1})\in\pi}|x(\xi_i)-y(\xi_i)|(a_{i+1}-a_i)$$

其中 $\xi_i\in(a_i,a_{i+1})$. 由于 $|\cdot|$ 和 $(a_{i+1}-a_i)$ 均大于等于 0，则 $\rho_2(x,y)\geqslant 0$.

若 $\rho_2(x,y)=0$，则 $\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t=0$ 则 $|x(t)-y(t)|$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0，又由于连续性可知处处为 0，即 $x(t)=y(t)$；反之，当 $x(t)=y(t)$，则 $\rho_2(x,y)=\int_a^b 0\,\mathrm{d}t=0$.

（对称性）

$$\rho_1(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-x(t)|=\rho_1(y,x)$$
$$\rho_2(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t=\int_a^b|y(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t=\rho_2(y,x)$$

（三角不等式）

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\leqslant\rho_1(x,z)+\rho_1(y,z)\\\rho_2(x,y)&=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_a^b|x(t)-z(t)|\,\mathrm{d}t+\int_a^b|z(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t=\rho_2(x,z)+\rho_2(y,z)\end{aligned}$$

□

2. 证明 $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的度量.

证明.（正定性）由于 $|x-y|,1+|x-y|\geqslant 0$，则 $\rho(x,y)\geqslant 0$.

$\rho(x,y)=0\iff|x-y|=0\iff x=y$.

（交换性）由于 $|x-y|=|y-x|$，则 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

（三角不等式）

$$\begin{aligned}\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{1}{\frac{1}{|x-y|}+1}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{|x-z|+|z-y|}+1}=\frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}\\ \leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}=\rho(x,z)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

□

3. $S[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上几乎处处有取值的可测函数全体，证明 $\rho(f,g)=\int_a^b\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,\mathrm{d}\mu$ 为其上的一个度量.

证明. 由第 **2** 题可知，$\frac{|f-g|}{1+|f-g|}$ 满足正定性、交换性和三角不等式，则 $\rho(f,g)\geqslant 0,\rho(f,g)=\rho(g,f)$，当 $\rho(f,g)=0$ 时，f,g 几乎处处相等. 由积分的线性性可知

$$\begin{aligned}\rho(f,g)&=\int_a^b\frac{f-g}{1+|f-g|}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_a^b\left(\frac{|f-h|}{1+|f-h|}+\frac{|g-h|}{1+|g-h|}\right)\mathrm{d}\mu\\&=\int_a^b\frac{|f-h|}{1+|f-h|}\,\mathrm{d}\mu+\int_a^b\frac{|g-h|}{1+|g-h|}\,\mathrm{d}\mu=\rho(f,h)+\rho(g,h)\end{aligned}$$

□

4. 证明 $\rho(f,g)=\left(\int_a^b|f-g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 是 $L^p[a,b]$, $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 上的一个度量.

证明. $\rho(f,g)=||f-g||_p$，其中 $||f-g||_p$ 为 $f-g$ 的 p-范数.

（正定性）由于 p-范数满足正定性，则 $\rho(f,g)\geqslant 0$，当 $\rho(f,g)=0\iff f=g\quad a.e.$

（交换性）由于 $|f-g|^p=|g-f|^p$，则 $\rho(f,g)=\rho(g,f)$.

（三角不等式）由 Minkowski 不等式知，$||f-g||_p\leqslant||f-h||_p+||g-h||_p$，于是 $\rho(f,g)\leqslant\rho(f,h)+\rho(g,h)$. □

5. 设 (X,ρ) 为度量空间，$A\subset X$，则 A 是闭集 $\iff A$ 包含 A 中所有收敛列的极限点.

证明. "⇒"：当 A 是闭集，则 A^c 为开集. $\forall x\in A^c$，$\exists r>0$ 使得 $B(x,r)\subset A^c$，任取收敛列 $\{x_n\}\subset A$, $x_n\to x$. 假设 $x\notin A$，则 $x\in A^c$. 由于 $\rho(x_n,x)\to 0$，则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall n\geqslant N$ 有 $\rho(x_n,x)<r$，则 $x_n\in B(x,r)\Rightarrow x_n\in A^c$ 与 $x_n\in A$ 矛盾，故 $x\in A$.

"⇐"：$\forall x\in A^c$，假设对 $\forall r>0$ 都有 $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$，则 $\exists\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\to x$，由原命题条件可知 $x\in A$，与 $x\in A^c$ 矛盾，则 $\exists r>0$ 使得 $B(x,r)\cap A=\varnothing$，则 $B(x,r)\subset A^c$，故 A^c 为开集，即 A 为闭集. □

6. 设 (X,ρ) 为度量空间，$A \subset X$，定义 diam $A := \sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y)$，证明：diam $A =$ diam $\bar{A}$.

证明. 只需证 $\sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y) = \sup\limits_{x,y\in \bar{A}} \rho(x,y)$.

设 $\sup\limits_{x,y\in \bar{A}} \rho(x,y) = M$，由于 $\bar{A} = A \cup A'$，则 $\sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y) \leqslant M$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x, y \in \bar{A}$ 使得 $\rho(x,y) > M - \varepsilon$. 于是存在 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$ 使得 $x_n \to x, y_n \to y$. 则 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geqslant N$ 有

$$\rho(x,x_n) \leqslant \varepsilon, \quad \rho(y,y_n) \leqslant \varepsilon, \quad (n \geqslant N)$$

于是

$$\begin{aligned} M - \varepsilon < \rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,y) \leqslant 2\varepsilon + \sup_{x,y\in A} \rho(x,y) \\ \Rightarrow M - 3\varepsilon < \sup_{x,y\in A} \rho(x,y) \leqslant M \quad (n \geqslant N) \end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $\sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y) = M$，即 diam $A =$ diam $\bar{A}$. □

7. 设 (X,ρ) 为度量空间，$E \subset X$，则 E 是疏集 $\iff \forall \overline{B(x,r)} = \{z \in X : \rho(z,x) \leqslant r\}$ 必存在开球 $B(x',r') \subset B(x,r)$ 使得 $\overline{B(x',r')} \cap \bar{E} = \varnothing$.

证明. "$\Rightarrow$"：由于 $\bar{E}$ 无内点，则 $\forall x \in \bar{E}$，$\forall \varepsilon > 0$ 有 $B(x,\varepsilon) \not\subset \bar{E}$，即 $B(x,\varepsilon) - \bar{E} \neq \varnothing$，且 $B(x,\varepsilon) - \bar{E} = B(x,\varepsilon) \cap \bar{E}^c$ 为开集.

取 $x' \in B(x,\varepsilon) - \bar{E}$，则 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(x',\delta) \subset B(x,\varepsilon) - \bar{E}$，则 $B(x',\delta) \cap \bar{E} = \varnothing \Rightarrow \overline{B(x',\delta/2)} \cap \bar{E} = \varnothing$.

"$\Leftarrow$"：假设 $\bar{E}$ 有内点，则 $\exists x \in \bar{E}$，$\exists \varepsilon > 0$，使得 $B(x,\varepsilon) \subset \bar{E}$，则 $\forall B(x',r') \subset B(x,\varepsilon)$，$B(x',r') \cap \bar{E} \neq \varnothing$，与原命题条件矛盾，则 $\bar{E}$ 无内点. □