日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 12 月 26 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第十二次作业

题目 1. 设 X 为 B 空间，$T\in\mathfrak{C}(X)$，则 $\mathrm{Ker}(I-T)=\{\theta\}\Rightarrow R(I-T)=X$.

证明. 反设 $R(I-T)\subsetneqq X$. 则 $\exists x\in X$ 没有 $I-T$ 下的原像，断言 $R(I-T)^2\subsetneqq R(I-T)$，反设 $R(I-T)^2=R(I-T)$，由于 $(I-T)x\in R(I-T)$，则 $\exists y\in X$ 使得 $(I-T)^2y=(I-T)x\Rightarrow (I-T)\big((I-T)y-x\big)=\theta$，由于 $\mathrm{Ker}(I-T)=\{\theta\}$，则 $(I-T)y=x$ 与 x 没有 $I-T$ 下的原像矛盾，则 $R(I-T)^2\subsetneqq R(I-T)$.

依此类推，由 Riesz 引理，$\exists y_n\in R(I-T)^n$ 且 $||y_n||=1$ 使得 $\rho(y_n,R(I-T)^{n+1})>1/2$，于是 $\forall p\geqslant 1,\ n\geqslant 1$ 有

$$||Ty_{n+p}-Ty_n||=||Ty_{n+p}-y_{n+p}+y_{n+p}-y_n+y_n-Ty_n||\geqslant\rho(y_n,R(I-T)^{n+1})>1/2$$

上述第一个不等号是因为：$Ty_{n+p}-y_{n+p}=(T-I)y_{n+p}\in R(I-T)^{n+p+1}\subsetneqq R(I-T)^{n+1}$，$y_{n+p}\in R(I-T)^{n+p}\subsetneqq R(I-T)^{n+1}$，$y_n-Ty_n=(I-T)y_n\in R(I-T)^{n+1}$.

故 $\{Ty_n\}$ 没有收敛子列，与 T 是紧算子矛盾. 所以 $I-T$ 是满射. □

题目 2. $D(\Omega)$ 是序列完备的，即若 $\{\varphi_j\}$ 满足：(1) 存在紧集 $K\subset\Omega$ 使得 $\mathrm{supp}\,\varphi_j\subset K$.
(2) $\forall\varepsilon>0,\forall\alpha$，$\exists N>0$ 使得 $\max\limits_K|\partial^\alpha\varphi_n(x)-\partial^\alpha\varphi_m(x)|<\varepsilon$, $(n,m>N)$，则 $\exists\varphi\in D(\Omega)$ 使得 $\varphi_j\to\varphi$.

证明. 由于 $\{\varphi_j\}$ 满足 $\max\limits_K|\varphi_i-\varphi_j|\to 0,\ (i,j\to\infty)$，由于 $(C,||\cdot||_\infty)$ 是完备的，则存在函数 φ 使得 $\varphi_j\xrightarrow{||\cdot||_\infty}\varphi$.

又由于 $\forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，令 $m=|\alpha|$，有 $\max\limits_K|\partial^\alpha\varphi_i-\partial^\alpha\varphi_j|\to 0,\ (i,j\to\infty)$，由于 $(C^m,||\cdot||)$ 是完备的，其中范数的定义为 $||\varphi||:=\sup\limits_{|\alpha|\leqslant m}\max\limits_K|\partial^\alpha\varphi|$，则存在函数 ψ 使得 $\partial^\alpha\varphi_j\xrightarrow{||\cdot||_\infty}\psi$.

由于收敛极限的导数就是导函数收敛的极限，所以 $\partial^\alpha\varphi=\psi$，由于 α 的任意性可知，φ 的任意阶导数都存在，即 $\varphi\in C_0^\infty$. 故 $\forall\alpha$ 有 $\max\limits_K|\partial^\alpha\varphi_j-\partial^\alpha\varphi|\to 0$，则在 $D(\Omega)$ 中有 $\varphi_j\to\varphi$. □

题目 3. 在 $\mathbb{R}^1$ 中 $f_j(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin jx}{x}$ $(j=1,2,\cdots)$，则 $f_j\to\delta$.

证明. 由于 $\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^1)$ 有

$$|\langle f_j,\varphi\rangle-\langle\delta,\varphi\rangle|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\sin jx}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\varphi(0)\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin jx\,\mathrm{d}x\right|$$

第二个等号是因为可通过留数定理构造挖去原点的围道计算 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\sin jx}{\pi x}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\sin x}{\pi x}\,\mathrm{d}x=1$，又由于 φ 在 0 处导数存在，于是通过 Riemann-Lebesgue 引理可知，当 $j\to\infty$ 时，$|\langle f_j,\varphi\rangle-\langle\delta,\varphi\rangle|\to 0$，故 $f_j\to\delta$. □

题目 4. 设 $T \in D'(\Omega)$，则 $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k}$.

证明.

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \varphi \rangle &= -\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \rangle = \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \rangle \\ &= -\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

□