日期	科目	姓名学号
2021 年 10 月 23 日	近世代数	吴天阳 2204210460

习题 1.3

2. 在 S_n 中，设 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_r)$，证明：对于任意的 $\tau\in S_n$，有

$$\tau\sigma\tau^{-1}=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_r))$$

证明. 在变换 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 下，对于 $\forall 1\leqslant j<r$，有

$$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_j))=\tau\sigma(i_j)=\tau(i_{j+1})$$

则 $\tau(i_j)\mapsto\tau(i_{j+1})$。

当 $j=r$ 时，有

$$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_r))=\tau\sigma(i_r)=\tau(i_1)$$

则 $\tau(i_r)\mapsto\tau(i_1)$。

综上，$\tau\sigma\tau^{-1}=(\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \cdots\ \tau(i_r))$。 □

3. (写错题了)$r-$轮换 是偶置换还是奇置换，与 r 的奇偶性有什么关系?

解答. 令 $r-$轮换 为 $(i_1i_2\cdots i_r)=\sigma$，则 $\sigma=(i_1i_r)(i_1i_{r-1})\cdots(i_1i_2)$，故

$$r-\text{轮换}=\begin{cases}\text{偶置换}, & r\text{为奇数};\\ \text{奇置换}, & r\text{为偶数}.\end{cases}$$

4. 分别写出 A_3,A_4 的所有元素（用轮换分解式表示）。

解答.

$$\begin{aligned}A_3&=\{(1),(12)(13),(13)(12)\}\\ A_4&=\{(1),(12)(13),(13)(12),(12)(14),(14)(12),(13)(14),(14)(13),(23)(24),(24)(23),\\&\qquad(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\end{aligned}$$

5. 证明:

$$(1).\ S_n=\langle(12),(23),\cdots,(n-1,n)\rangle\,;$$

$$(2).\ S_n=\langle(12),(12\cdots n)\rangle$$

证明. (1). 对 $\forall 3\leqslant i\leqslant n$，有 $(1i)=(i-1,i)(1,i-1)(i-1,i)$，由**数学归纳法**知

$$\langle(12),(23),\ldots,(n-1,n)\rangle=\langle(12),(13),\ldots,(1n)\rangle$$

对 $\forall\sigma\in S_n$，令 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_n)=(i_1i_n)(i_1i_{n-1})\cdots(i_1i_2)$。

又 $\forall 2\leqslant j\leqslant n$，有 $(i_1i_j)=(1i_1)(1i_j)(1i_1)$。

则 σ 可由 $\langle(12),(13),\ldots,(1n)\rangle$ 表出，故

$$S_n=\langle(12),(13),\ldots,(1n)\rangle=\langle(12),(23),\ldots,(n-1,n)\rangle$$

(2). 对 $\forall 1\leqslant i\leqslant n-1$，则

$$(i,i+1)=(12\ldots n)(i-1,i)(12\ldots n)^{-1}=(12\ldots n)(i-1,i)(12\ldots n)^{n-1}$$

则通过对 (12) 做**数学归纳法**可以得出 $(23),(34),\cdots,(n-1,n)$，故

$$S_n=\langle(12),(23),\cdots,(n-1,n)\rangle=\langle(12),(123\cdots n)\rangle$$

□

6. 证明：当 $n\geqslant 3$ 时，$A_n=\langle(123),(124),\cdots,(12n)\rangle$。

证明. 令 $M=\langle(123),(124),\cdots,(12n)\rangle$。

由于 $S_n=\langle(12),(13),\ldots,(1n)\rangle$，则 $A_n=\langle(1i)(1j):2\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j\rangle$，故

$$A_n=\langle(1ij):2\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j\rangle$$

只需证 $(1ij)\in\langle(123),(124),\cdots,(12n)\rangle$，下面分为两类讨论:

(1). 当 $i=2$ 或 $j=2$ 时，由于 $(1ij)^2=(1ji)$，不妨令 $i=2$，则 $3\leqslant j\leqslant n$，直接有 $(1ij)=(12j)\in M$。

(2). 当 $i\neq 2$ 且 $j\neq 2$ 时，由于 $(1ij)=(12j)(1i2)=(12j)(12i)^2$，则 $(1ij)\in M$。

综上，$(1ij)\in M$，故

$$A_n=M=\langle(123),(124),\cdots,(12n)\rangle$$

□

习题 1.4

3. 设 H,K 都是群 G（运算为乘法）的子群，证明：HK 为 G 的子群当且仅当

$$HK = KH$$

证明. $\Rightarrow$：由于 $HK < G$，则 $\forall a,b \in HK$。

令 $a = a_1a_2, b = b_1b_2$ $(a_1,b_1 \in H; a_2,b_2 \in K)$，则

$$ab^{-1} \in HK \Rightarrow a_1a_2(b_1b_2)^{-1} \in HK \Rightarrow a_1a_2b_2^{-1}b_1^{-1} \in HK$$

则 $\exists c_1c_2 \in HK$ 使得 $a_1a_2b_2^{-1}b_1^{-1} = c_1c_2$，由于 $HK < G$，则 $(a_1a_2)^{-1} \in HK$，有

$$b_2^{-1}b_1^{-1} = c_1c_2(a_1a_2)^{-1}$$

由 a_1,a_2 的任意性，知 $HK \subset KH$，由 b_1,b_2 的任意性，知 $KH \subset HK$，故

$$HK = KH$$

$\Leftarrow$：$\forall a,b \in HK$，令 $a = a_1a_2, b = b_1b_2$ $(a_1,b_1 \in H; a_2,b_2 \in K)$，则 $ab^{-1} = a_1a_2b_2^{-1}b_1^{-1}$。

由于 $(a_2b_2^{-1})b_1^{-1} \in KH$，则 $\exists c_1 \in H, c_2 \in K$ 使得 $c_1c_2 = (a_2b_2^{-1})b_1^{-1}$，则

$$ab^{-1} = a_1c_1c_2 \in HK \Rightarrow HK < G$$

□

6. 设 H,K 都是群 G 的有限子群，证明：

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H| \cap |K|}$$

证明. 考虑由 K 定义的等价关系 $R : aRb \iff a^{-1}b \in K$，用 R 对 H 做出分划，记

$$H/R := \{\{b : aRb\} : a \in H\} \xlongequal{\text{左陪集性质}} \{aK : a \in H\} = \{a_1K, a_2K, \ldots, a_nK\}$$

则有

$$HK = \bigcup_{a \in H} aK = \bigsqcup_{i=1}^{n} a_ik \Rightarrow |HK| = |H/R| \cdot |K| \tag{1}$$

下证 $H \cap K$ 是 H 的子群：$\forall a,b \in H \cap K$，由于 H,K 均是 G 的子群，则

$$ab^{-1} \in H\text{且}ab^{-1} \in K \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K \subset H$$

则，$H\cap K$ 是 H 的子群。

因为 $a,b\in H\Rightarrow a^{-1}b\in H$，则 $aRb \iff a^{-1}b\in K \iff a^{-1}b\in H\cap K$，则

$$|H/R|=[H:H\cap K]$$

由 *Lagrange* 定理，知 $[H:H\cap K]=\dfrac{|H|}{|H\cap K|}$，代入到 (1) 中，得

$$|HK|=|H/R|\cdot|K|=[H:H\cap K]\cdot|K|=\frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$$

□

12. 写出 A_4 的所有子群。

解答.

$A_4=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\}$

且 $|A_4|=\dfrac{|S_4|}{2}=\dfrac{4!}{2}=12$，12 的正因数有 $\{1,2,3,4,6,12\}$，则

1 阶子群：$\{(1)\}$

2 阶子群：$\{(1),(12)(34)\},\{(1),(13)(24)\},\{(1),(14)(23)\}$

3 阶子群：$\{(1),(123),(132)\},\{(1),(124),(142)\},\{(1),(234),(243)\},\{(1),(134),(143)\}$

4 阶子群：$\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

12 阶子群：A_4

下证 A_4 无 6 阶子群：反设，存在 $H<A_4$ 且 $|H|=6$，则存在 $3-$轮换 属于 H，记为 τ，则 $\tau^{-1}\in H$ 且 τ^{-1} 也为 $3-$轮换，则 H 中 $3-$轮换 的个数为偶数。

1. 有 2 个 $3-$轮换，设 $K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，由于 A_4 中非 $3-$轮换 的元素个数只有 4 个，所以 $K\subset H$。由于 $K<A_4$，则 $K<H\Rightarrow |K|\Big||H|\Rightarrow 4|6$，矛盾。

2. 有 4 个 $3-$轮换，设它们分别为 $\tau,\tau^{-1},\sigma,\sigma^{-1}$，则 $\tau\sigma\neq\tau$且$\tau\sigma\neq\sigma$，则至少有

$$\{(1),\tau,\tau^{-1},\sigma,\sigma^{-1},\tau\sigma,\sigma^{-1}\tau\}\subset H$$

则 $|H|\geqslant 7$，与 $|H|=6$ 矛盾。

综上，A_4 无 6 阶子群。

15. 群 G 中元素 a，如果存在 $b\in G$ 使得 $b^2=a$，那么称 a 是平方元，把 b 称为平方根，证明：奇数阶群 G 的每个元素 a 都是平方元，且 a 的平方根唯一。

证明. 构造 G 上的变换

$$\sigma: G\to G$$
$$a\mapsto a^2$$

下面证明 σ 是双射：

先证明

$$\forall a\in G, a^2=e \iff a=e$$

反设，$\exists a\in G, a\neq e$，有 $a^2=e$，令 G 的子群 $H=\{e,a\}$，由 $Lagrange$ 定理，知

$$H<G\Rightarrow |H|\Big||G|\Rightarrow 2\Big||G|$$

与 $|G|$ 为奇数矛盾，故 $a^2=e \iff a=e$。

下面证明 σ 是**单射**：

$\forall a,b\in G, a\neq b$，反设 $\sigma(a)=\sigma(b) \iff a^2=b^2$，由于 G 的子群的阶都是奇数，所以

$$|b^2|=\frac{|b|}{(2,|b|)}=|b|$$

又 $\langle b\rangle<\langle b^2\rangle$，由循环群同阶子群的唯一性知，$\langle b\rangle=\langle b^2\rangle$，同理有 $\langle a\rangle=\langle a^2\rangle$，又由于 $a^2=b^2$，则

$$\langle b\rangle=\langle b^2\rangle=\langle a^2\rangle=\langle a\rangle$$

说明 a,b 在同一个循环群中，又由于循环群是 $Abel$ 群，则 $ab=ba\Rightarrow b^{-1}a=ab^{-1}$，于是有

$$e=a^2(b^2)^{-1}=(ab^{-1})^2\Rightarrow ab^{-1}=e\Rightarrow a=b$$

与 $a\neq b$ 矛盾，则 $\sigma(a)\neq\sigma(b)$，故 σ 是单射，又由于 σ 是 G 上的变换，则 σ 是双射。

对于 $\forall a\in G$，$\exists!\sigma^{-1}(a)\in G$，使得 $(\sigma^{-1}(a))^2=\sigma(\sigma^{-1}(a))=a$。

故 a 是平方元，且有唯一的平方根 $\sigma^{-1}(a)$。 □