日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 7 日	偏微分方程	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第二章第一次作业

题目 1. 用特征线法求解下述 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = 2 - x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

解答. 令 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2, \\ x(0) = c. \end{cases}$ 则 $x = 2t + c$，$c = x - 2t$，于是原问题等价于

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = xt = (2t + c)t, \\ u(0) = u(x(0), 0) = u(c, 0) = 2 - c. \end{cases}$$

求解一阶线性常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t(2t + c)t \Rightarrow u\mathrm{e}^t = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^\tau(2\tau + c)\tau\,\mathrm{d}\tau + c$，可得

$$u = 2t^2 + (c - 4)t + 4 - c + (2c - 4)e^{-t},$$

代入 $c = x - 2t$，得到原方程解

$$u = 2t^2 + (x - 2t - 4)(t - 1) + 2(x - 2t - 2)\mathrm{e}^{-t}.$$

题目 2. 试证明 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6(x + t), & x \in \mathbb{R}, t > x, \\ u|_{t=x} = 0, u_t|_{t=x} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

有解的充要条件是 $u_1(x) - 3x^2 = \text{const}$（经尝试只能得到 $u_1(x) - 6x^2 = \text{const}$），如果有解，解不唯一. 试问：若把初值给定在直线 $t = ax$ 上，为什么在 $a = \pm 1$ 与 $a \neq \pm 1$ 的情况，关于存在唯一性的结论不一样?

解答. 令 $\begin{cases} \xi = x - t, \\ \eta = x + t \end{cases}$，则 $u_{tt} - u_{xx} = -2u_{\xi\eta} = 6\eta \Rightarrow u_{\xi\eta} = -3\eta$，解得

$$u = -\frac{3}{2}\xi\eta^2 + F(\xi) + G(\eta) = -\frac{3}{2}(x - t)(x + t)^2 + F(x - t) + G(x + t).$$

于是

$$\begin{cases} u|_{t=x} = F(0) + G(2x) = 0 \Rightarrow G'(2x) = 0, \\ u_t = -\dfrac{3}{2}(x - 3t)(x + t) - F'(x - t) + G'(x + t), \\ u_t|_{t=x} = 6x^2 - F'(0) + G'(2x) = u_1(x) \end{cases}$$

则有解的充要条件为 $u_1(x) - 6x^2 = F'(0) = \text{const}$，由于无法确定 F 的具体表达式，故解不唯一. 一般的，令初值为 $t = ax$，可得

$$\begin{cases} u|_{t=ax} = \dfrac{3}{2}(a-1)(a+1)^2x^3 + F((1-a)x) + G((1+a)x) = 0, \\ u_t|_{t=ax} = \dfrac{3}{2}(3a-1)(a+1)x^2 - F'((1-a)x) + G'((1+a)x) = u_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

当 $a = -1$ 时，可得 $F'(2x) = 0,\ -F'(2x) + G'(0) = u_1(x) \Rightarrow u_1(x) = G'(0)$，所以无法确定 G 的具体表达式，故解不唯一.

当 $a \neq \pm 1$ 时，则 (1) 式中函数 F, G 均与 x 相关，可通过对 (1) 中第二式进行积分，然后与第一式进行联立求解得到函数 F, G，所以解唯一存在.

题目 3. 若 $u = u(x, y, z, t)$ 是波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \\ u|_{t=0} = f(x) + g(y), \\ u_t|_{t=0} = \varphi(y) + \psi(z) \end{cases}$$

的解，式求解的表达式.

解答. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，则由三维波动方程解的一般表达式可知

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B(\boldsymbol{x}, at)} (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B(\boldsymbol{x}, at)} (\varphi(y) + \psi(z))\,\mathrm{d}S \\ &\xlongequal{\text{球坐标变换}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x_1 + at\sin\phi\cos\theta) + g(x_2 + at\sin\phi\sin\theta))\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\right) \\ &\quad + \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\varphi(x_2 + at\sin\phi\sin\theta) + \psi(x_3 + at\cos\phi))\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

题目 4. 试利用唯一性结果直接证明：当初值 $\varphi(x), \psi(x)$ 是偶函数，非齐次项 $f(x, t)$ 是 x 的偶函数时，非齐次波动方程初值问题的解 $u(x, t)$ 关于 x 也是偶函数.

根据以上事实，用延拓法求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geqslant 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

并说明当 $f(x, t)$ 满足什么条件时，导出的公式确实是问题的解.

解答. 设 φ, ψ, f 均为关于 x 的偶函数，则一维波动方程初值问题的解满足

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2}(\varphi(-x + at) + \varphi(-x - at)) + \frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} \psi(-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(-\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi = u(x, t), \end{aligned}$$

所以 $u(x,t)$ 也为关于 x 的偶函数.

令 $\bar{f}$ 为 f 关于 x 的偶延拓，则对应波动方程初值问题的解 $\bar{u}$ 也为关于 x 的偶函数，于是 $\bar{u}_x|_{x=0}=0$，满足题目要求，于是半无界问题的解为 $u=\bar{u}|_{x\geqslant 0}$.

当 $x\geqslant at$ 时，有 $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi$.

当 $0\leqslant x<at$ 时，有

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}\tau\int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\\
&+\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}\tau\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

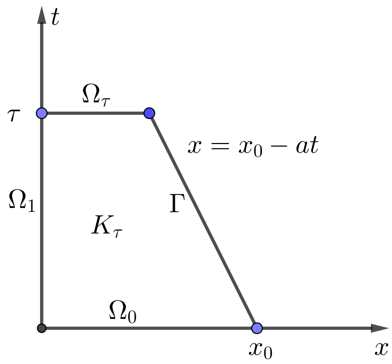
当 $f\in C^2([0,\infty)^2)$ 时，且 $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(0,0)}(\Box u-f)=0\Rightarrow f(0,0)=0$ 导出的公式是原问题的解.

题目 5. 证明半无界问题

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & x>0,t>0,\\
u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\geqslant 0,\\
u|_{x=0}=\mu(t), & t\geqslant 0
\end{cases}
$$

解的唯一性.

解答. 在区域 $\{0\leqslant x\leqslant x_0-at, 0\leqslant t\leqslant \tau\}$, $(0<\tau\leqslant \dfrac{x_0}{a})$ 上考虑唯一性问题，如下图所示，$\Omega_0,\Omega_1,\Gamma,\Omega_\tau$ 构成梯形的边界，K_τ 表示梯形边界及其内部，梯形斜边为 $x=x_0-at$.



考虑对波动方程进行变换

$$
\int_{K_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{K_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
$$

对左式进行化简

$$
\begin{aligned}
\text{左式}&=\int_{K_\tau}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((\frac{\partial u}{\partial t})^2+a^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2\right)-a^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t})\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{Green 公式}}{=\!=\!=}-\int_{\partial K_\tau}\frac{1}{2}\left((\frac{\partial u}{\partial t})^2+a^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2\right)\mathrm{d}x+a^2(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t})\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{\Omega_\tau}\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}\frac{1}{2}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_1}a^2\mu_x\mu_t\,\mathrm{d}t-\int_\Gamma\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x+a^2(u_xu_t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

在 Γ 上有 $\mathrm{d}x=-a\,\mathrm{d}t$，则右式第四项等于 $\displaystyle\int_0^\tau \frac{a}{2}(u_t+au_x)^2\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

由于 $\displaystyle\int_{K_\tau} 2u_t f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant \int_{K_\tau} u_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau} f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$，于是有

$$\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x\leqslant \int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x-2\int_{\Omega_1}a^2\mu_x\mu_t\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}u_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

令 $\displaystyle G(\tau)=\int_{K_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^\tau\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$，所以有 $G(0)=0$ 且

$$\frac{\mathrm{d}G(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\leqslant G(\tau)+F(\tau)$$

其中 $\displaystyle F(\tau)=\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x-2\int_{\Omega_1}a^2\mu_x\mu_t\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. 由 Gronwall 不等式可知 $G(\tau)\leqslant MF(\tau)$，于是可得到类似能量不等式结果

$$\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x\leqslant M_1\left(\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x-2\int_{\Omega_1}a^2\mu_x\mu_t\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)$$

进一步，可得到能量模估计

$$\int_{\Omega_\tau}u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\leqslant M_2\left(\int_{\Omega_0}(\varphi^2+\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x-2\int_{\Omega_1}a^2\mu_x\mu_t\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)$$

不难得到，当 $\varphi=\psi=\mu=f=0$ 时，该问题只有零集，所以上式说明了该问题解的唯一性.

题目 6. 证明以下 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u_t=f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

解的唯一性，其中 $b(x,t),\ c(x,t)$ 都是有界连续函数.

解答. 类似于能量不等式证明，首先对第一式左右同乘 u_t，再在 K_τ 上进行积分可得

$$\int_{K_\tau}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2+a^2u_x^2)-a^2\frac{\partial}{\partial x}(u_xu_t)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}b(x,t)u_xu_t+c(x,t)u_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{K_\tau}u_tf\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

对左式第一项进行变化并使用 Green 公式转化为第二型曲线积分，再证明 $J_3\geqslant 0$，于是可得

$$\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x-2\int_{K_\tau}(b(x,t)u_xu_t+c(x,t)u_t^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}u_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{K_\tau}f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

由于 $b(x,t),\ c(x,t)$ 有界，不妨令 $\displaystyle C=\sup_{(x,t)\in K_\tau}2|b(x,t)|+2|c(x,t)|$，$C_0=\max\{\dfrac{C}{a^2},2C\}$，于是

$$\begin{aligned}-2\int_{K_\tau}(b(x,t)u_xu_t+c(x,t)u_t^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant C\int_{K_\tau}(u_xu_t+u_t^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&\leqslant\int_{K_\tau}C(2u_t^2+u_x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_{K_\tau}C_0(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记 $G(\tau)=\displaystyle\int_{K_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\ F(\tau)=\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,\mathrm{d}x+\int_{K_\tau}f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}G(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\leqslant(C_0+1)G(\tau)+F(\tau)$$

由 Gronwall 不等式可知 $G(\tau)\leqslant MF(\tau)$，于是可以得到能量不等式，进一步，可以得到能量模不等式，从而说明该 Cauchy 问题具有唯一解.

题目 7. 试问下述半无界问题

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}+u_t+u_x=0, & x>0,t>0,\\ u|_{x=0}=0, & t\geqslant 0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\geqslant 0\end{cases}$$

能否直接用对称开拓法求解？为什么？试用特征线法求解.

解答. 通过下属求解解的表达式可知，该问题的解无法保证与 φ,ψ 保持相同的奇偶性，因此无法使用对称开拓法进行求解. 下面使用特征线法进行求解.

由于 $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}+1\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$. 令 $u_t+u_x=v$，则上述半平面问题等价于求解

$$\begin{cases}u_t+u_x=v,\\ u|_{x=0}=0,\\ u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}\quad(1)\qquad\begin{cases}v_t-v_x=-v,\\ v(x,0)=u_t(x,0)+u_x(x,0)=\psi(x)+\varphi'(x).\end{cases}\quad(2)$$

先求解 (2) 式，令 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-1,\\ x(0)=c.\end{cases}$ 则 $x=-t+c,\ c=x+t$，方程 (2) 转化为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v$，于是

$$v=(\psi(c)+\varphi'(c))\mathrm{e}^{-t}=(\psi(x+t)+\varphi'(x+t))\mathrm{e}^{-t},$$

再求解方程 (1)，令 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=1,\\ x(0)=c.\end{cases}$ 则 $x=t+c,\ c=x-t$，方程 (1) 转化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=(\psi(x+t)+\varphi'(x+t))\mathrm{e}^{-t}$，由于 $x>0,t>0$，分两类情况讨论，当 $x\geqslant t$ 时

$$\begin{aligned}u&=\varphi(x(0))+\int_0^t\{\psi(x(\tau)+\tau)+\varphi'(x(\tau)+\tau)\}\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\varphi(c)+\int_0^t\{\psi(c+2\tau)+\varphi'(c+2\tau)\}\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&\xlongequal{\xi=c+2\tau}\varphi(c)+\frac{1}{2}\int_c^{c+2t}\{\psi(\xi)+\varphi'(\xi)\}\mathrm{e}^{-\frac{\xi-c}{2}}\,\mathrm{d}\xi\\&=\varphi(x-t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{\psi(\xi)+\varphi'(\xi)\}\mathrm{e}^{-\frac{\xi-x+t}{2}}\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2}\varphi(x-t)+\frac{1}{2}\varphi(x+t)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{\psi(\xi)+\varphi(\xi)\}\mathrm{e}^{-\frac{\xi-x+t}{2}}\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

当 $0 \leqslant x < t$ 时

$$
\begin{aligned}
u &= \int_{t-x}^{t} \{\psi(x(\tau)+\tau) + \varphi'(x(\tau)+\tau)\} \mathrm{e}^{-\tau} \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t-x}^{t} \{\psi(c+2\tau) + \varphi'(c+2\tau)\} \mathrm{e}^{-\tau} \, \mathrm{d}\tau \\
&\xlongequal[]{\xi=c+2\tau} \frac{1}{2} \int_{c+2t-2x}^{c+2t} \{\psi(\xi) + \varphi'(\xi)\} \mathrm{e}^{-\frac{\xi-c}{2}} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \{\psi(\xi) + \varphi'(\xi)\} \mathrm{e}^{-\frac{\xi-x+t}{2}} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}\varphi(x+t)\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\varphi(t-x)\mathrm{e}^{-t+x} + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} \{\psi(\xi) + \varphi(\xi)\} \mathrm{e}^{-\frac{\xi-x+t}{2}} \, \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

题目 8. 求解古尔沙问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = u_{xx}, & t > |x|, \\
u|_{t=-x} = \varphi(x), & x \leqslant 0, \\
u|_{t=x} = \psi(x), & x \geqslant 0,
\end{cases}
$$

其中 $\varphi(0) = \psi(0)$. 如果 $\varphi(x)$ 给定在 $(-a, 0]$，$\psi(x)$ 给定在 $[0, b]$，指出此定解条件的决定区域.

解答. 使用行波法求解，令 $\begin{cases} \xi = x - t, \\ \eta = x + t. \end{cases}$ 则 $_{tt} = u_{xx} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u = F(\xi) + G(\eta) = F(x-t) + G(x+t)$.

当 $x \leqslant 0$ 时，$u|_{t=-x} = u(x, -x) = F(2x) + G(0) = \varphi(x)$.

当 $x \geqslant 0$ 时，$u|_{t=x} = F(0) + G(2x) = \psi(x)$. 且 $F(0) + G(0) = \varphi(0) = \psi(0)$.

于是 $\begin{cases} F(x) = \varphi(\frac{x}{2}) - G(0), \\ G(x) = \psi(\frac{x}{2}) - F(0). \end{cases} \Rightarrow u = \varphi(\frac{x-t}{2}) + \psi(\frac{x+t}{2}) - \varphi(0)$.

当给定 φ 在 $(-a, 0]$，ψ 在 $[0, b]$，于是决定区域为

$$
\begin{cases}
-a < \dfrac{x-t}{2} \leqslant 0, \\
0 \leqslant \dfrac{x+t}{2} \leqslant b.
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x \leqslant t < x + 2a, \\
-x \leqslant t \leqslant 2b - x.
\end{cases}
$$