日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 4 月 12 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第五次作业

题目 1. 3.7 练习 1. 证明命题 3.6 的逆命题也成立，即如果一条仿射空间中的曲线在其每个点附近都可以被某个广义坐标系的映射映射为 $\mathbb{R}^3$ 中的连续/可微/光滑/正则曲线段，那么该曲线本身也是连续/可微/光滑/正则.

证明. 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathscr{A}^3$ 为 $\mathscr{A}^3$ 中的曲线，$A=\gamma(t_0)$, $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$U$ 为 A 在 $\mathscr{A}^3$ 中的邻域，存在广义坐标系 $\{U,\varphi_U\}$，坐标映射为 $\varphi_U:\mathscr{A}^3\to\{y^i\}$，则存在 ε' 使得

$$(t_0-\varepsilon',t_0+\varepsilon')\xrightarrow{\gamma}U\xrightarrow{\varphi_U}\varphi_U(U)\subset\mathbb{R}^3$$

连续/可微/光滑，且 $\varphi_U\circ\gamma$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的正则曲线.

设 $\mathcal{A}=\{O,\boldsymbol{e}_i\}$ 为仿射坐标系，坐标映射为 $\varphi_{\mathcal{A}}$，则

$$\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma=(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1})\circ(\varphi_U\circ\gamma)$$

由于 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1}$ 是光滑映射，且 $\varphi_U\circ\gamma$ 连续/可微/光滑，于是 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma$ 是连续/可微/光滑映射，所以 γ 在 $\mathscr{A}^3$ 上连续.

由于

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)=\left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_{\varphi_U(\gamma(t))}\frac{\mathrm{d}(\varphi_U\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t),\quad t\in(t_0-\varepsilon',t_0+\varepsilon')$$

其中矩阵 $\left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_{\varphi_U(\gamma(t))}$ 非退化，且 $\frac{\mathrm{d}(\varphi_U\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)\neq 0$，于是 $\frac{\mathrm{d}(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)\neq 0$，故 γ 为正则曲线. □

题目 2. 3.8 练习 1. 证明**定义 3.14** 中引入的关系 $\sim$ 是 $\mathcal{F}_A$ 上的一个等价关系，并证明**定义 3.15** 在 $\mathcal{F}_A/\sim$ 上定义的线性运算的合理性.

证明. 设 A 为 $\mathscr{A}^n$ 中的点，记 $\mathcal{F}_A$ 为定义在 A 附近的光滑函数全体，$\forall f,g,h\in\mathcal{F}_A$，设 D 为定义在 A 的导算子 D，定义关系如下

$$f\sim g\iff Df=Dg,\quad(\forall D\in\mathcal{F}_A)$$

下证其是一个等价关系：

1. 自反性：由于 $Df=Df$，则 $f\sim f$.
2. 对称性：由于 $Df=Dg=Df$，则 $f\sim g\iff g\sim f$.
3. 传递性：由于 $Df=Dg=Dh$，则 $f\sim g,g\sim h\iff f\sim h$.

综上，$f\sim g$ 是一个等价关系.

记 $\mathscr{F}_A=\mathcal{F}_A/\sim$ 为 A 点的余向量空间，函数 f 所在的等价类记为 $\bar f$，定义如下线性运算

$$\alpha\bar f+\beta\bar g=\overline{\alpha f+\beta g},\quad(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})\tag{1}$$

下证明上式与代表元选取无关：设 $\bar{f}_1=\bar{f}_2, f_1\neq f_2$，$\bar{g}_1=\bar{g}_2, g_1\neq g_2$，则

$$D(\alpha f_1+\beta g_1)=\alpha Df_1+\beta Dg_1=\alpha Df_2+\beta Dg_2=D(\alpha f_2+\beta g_2)$$

于是 $\overline{\alpha f_1+\beta g_1}=\overline{\alpha f_2+\beta g_2}$，故 (1) 式结果与代表元选取无关. □

题目 3. 3.8 练习 2. 证明 $\overline{fg}=g(A)\bar{f}+f(A)\bar{g}$.

证明. 由于 $D(fg)=f(A)Dg+Df\cdot g(A)=D(f(A)g+g(A)f)$，于是 $\overline{fg}=\overline{f(A)g+g(A)f}=f(A)\bar{g}+g(A)\bar{f}$. □

题目 4. 3.8 练习 3. 考虑 $\mathbb{R}^3\backslash r=0$ 或 $x^1=x^2=0$ 上的标准柱面坐标系：

$$x^1=r\cos\theta,\ x^2=r\sin\theta,\ x^3=z$$

在每个点写出自然余标架场，表出在 $(\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x^3)$ 这组基下.

解答. 由于

$$\begin{bmatrix}\partial r\\ \partial\theta\\ \partial z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^3}{\partial r}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x^1}{\partial z} & \frac{\partial x^2}{\partial z} & \frac{\partial x^3}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\partial_1+\sin\theta\partial_2\\ -r\sin\theta\partial_1+r\cos\theta\partial_2\\ \partial_3\end{bmatrix}$$

由于 r,θ,z 可以视为 $\mathscr{A}^3$ 中的光滑函数，所以 $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z$ 是余向量空间中的元素，可以在 $\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x^3$ 中线性表出，令 $\mathrm{d}r=a\mathrm{d}x^1+b\mathrm{d}x^2+c\mathrm{d}x^3$，由对偶基的性质可知

$$\begin{cases}\langle\partial r,\mathrm{d}r\rangle=1,\\ \langle\partial\theta,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial z,\mathrm{d}r\rangle=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta a+\sin\theta b=1,\\ -r\sin\theta a+r\cos\theta b=0,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\cos\theta,\\ b=\sin\theta,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow \mathrm{d}r=\cos\theta\mathrm{d}x^1+\sin\theta\mathrm{d}x^2.$$

类似地，可以令 $\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}x^1+b\mathrm{d}x^2+c\mathrm{d}x^3$，由对偶基的性质可知

$$\begin{cases}\langle\partial r,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial\theta,\mathrm{d}r\rangle=1,\\ \langle\partial z,\mathrm{d}r\rangle=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta a+\sin\theta b=0,\\ -r\sin\theta a+r\cos\theta b=1,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\sin\theta/r,\\ b=\cos\theta/,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow \mathrm{d}\theta=\frac{1}{r}(-sin\theta\mathrm{d}x^1+\cos\theta\mathrm{d}x^2).$$

令 $\mathrm{d}z=a\mathrm{d}x^1+b\mathrm{d}x^2+c\mathrm{d}x^3$，由对偶基的性质可知

$$\begin{cases}\langle\partial r,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial\theta,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial z,\mathrm{d}r\rangle=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta a+\sin\theta b=0,\\ -r\sin\theta a+r\cos\theta b=0,\\ c=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=0,\\ c=1.\end{cases}\Rightarrow \mathrm{d}z=\mathrm{d}x^3.$$

题目 5. 3.9 练习 1. 严格证明**引理 3.11**：设 V 为 n 维实线性空间，则 $\dim \mathrm{Sym}_2(V^*) = \dfrac{n(n+1)}{2}$，如果 $\{e_i\}$ 为 V 的一组基，那么

$$e^{*i}e^{*j} = \frac{1}{2}(e^{*i} \otimes e^{*j} + e^{*j} \otimes e^{*i}), \quad i \leqslant j$$

为 $\mathrm{Sym}_2(V^*)$ 的一组基.

证明. 设 V 为有限维实线性空间，$\{e_1, \cdots e_n\}$ 为 V 的一组基，$\forall g \in \mathrm{Sym}_2(V^*)$，则

$$g = \sum_{i \leqslant j} g_{ij} e^{*i} e^{*j}, \quad \text{其中} g_{ij} = g(e_i, e_j)$$

所以 $e^{*i}e^{*j}$ 能够线性表出 $\mathrm{Sym}_2(V^*)$ 上的元素. 令 $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $(i \leqslant j)$ 满足

$$\sum_{i \leqslant j} \lambda_{ij} e^{*i} e^{*j} = 0$$

代入 (e_i, e_j), $(i \leqslant j)$ 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i \leqslant j} \lambda_{ij} e^{*i} e^{*j}(e_i, e_j) = \sum_{i \leqslant j} \frac{\lambda_{ij}}{2}(e^{*i} \otimes e^{*j}(e_i, e_j) + e^{*j} \otimes e^{*i}(e_i, e_j)) = 0 \\ \Rightarrow &\frac{\lambda_{ij}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{ij} = 0, \quad (i \leqslant j) \end{aligned}$$

所以 $e^{*i}e^{*j}$ 在 $V^* \otimes V^*$ 上线性无关.

综上，$\{e^{*i}e^{*j} : i \leqslant j\}$ 是 $\mathrm{Sym}_2(V^*)$ 的一组基. □

题目 6. 3.9 练习 3. 求 $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ 上的球坐标系

$$x^1 = r \sin\theta \cos\varphi, \; x^2 = r \sin\theta \sin\varphi, \; x^3 = r \cos\theta$$

在每个点写出自然余标架场，在 $(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3)$ 下表出.

解答. 由于

$$\begin{bmatrix} \partial r \\ \partial\theta \\ \partial\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix}$$

由于 r, θ, φ 可以视为 $\mathscr{A}^3$ 中的光滑函数，所以 $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z$ 是余向量空间中的元素，可以在 $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3$ 中线性表出，令 $\mathrm{d}r = a\mathrm{d}x^1 + b\mathrm{d}x^2 + c\mathrm{d}x^3$，由对偶基性质可知

$$\begin{cases} \langle \partial r, \mathrm{d}r \rangle = 1, \\ \langle \partial\theta, \mathrm{d}r \rangle = 0, \\ \langle \partial\varphi, \mathrm{d}r \rangle = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta\cos\varphi a + \sin\theta\sin\varphi b + \cos\theta c = 1, \\ r\cos\theta\cos\varphi a + r\cos\theta\sin\varphi b - r\sin\theta c = 0, \\ -r\sin\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi b = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sin\theta\cos\varphi, \\ b = \sin\theta\sin\varphi, \\ c = \cos\theta. \end{cases}$$

于是 $\mathrm{d}r = \sin\theta\cos\varphi \mathrm{d}x^1 + \sin\theta\sin\varphi \mathrm{d}x^2 + \cos\theta \mathrm{d}x^3$；同理，令 $\mathrm{d}\theta = a\mathrm{d}x^1 + b\mathrm{d}x^2 + c\mathrm{d}x^3$，则

$$\begin{cases} \langle \partial r, \mathrm{d}r\rangle = 0, \\ \langle \partial\theta, \mathrm{d}r\rangle = 1, \\ \langle \partial\varphi, \mathrm{d}r\rangle = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta\cos\varphi a + \sin\theta\sin\varphi b + \cos\theta c = 0, \\ r\cos\theta\cos\varphi a + r\cos\theta\sin\varphi b - r\sin\theta c = 1, \\ -r\sin\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi b = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cos\theta\cos\varphi/r, \\ b = \cos\theta\sin\varphi/r, \\ c = -\sin\theta/r. \end{cases}$$

于是 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{r}(\cos\theta\cos\varphi \mathrm{d}x^1 + \cos\theta\sin\varphi \mathrm{d}x^2 - \sin\theta \mathrm{d}x^3)$；令 $\mathrm{d}\varphi = a\mathrm{d}x^1 + b\mathrm{d}x^2 + c\mathrm{d}x^3$，则

$$\begin{cases} \langle \partial r, \mathrm{d}r\rangle = 0, \\ \langle \partial\theta, \mathrm{d}r\rangle = 0, \\ \langle \partial\varphi, \mathrm{d}r\rangle = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta\cos\varphi a + \sin\theta\sin\varphi b + \cos\theta c = 0, \\ r\cos\theta\cos\varphi a + r\cos\theta\sin\varphi b - r\sin\theta c = 0, \\ -r\sin\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi b = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}, \\ b = \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}, \\ c = 0. \end{cases}$$

于是 $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{1}{r\sin\theta}(-\sin\varphi \mathrm{d}x^1 + \cos\varphi \mathrm{d}x^2)$.

题目 7. 3.9 练习 4. 将 $\mathbb{R}^3$ 上的欧几里德度量表出在球坐标系的自然余标架场下.

解答. 由于在 $\mathbb{R}^3$ 的欧式度量可以表示为 $g = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 = g_{rr}\mathrm{d}r\mathrm{d}r + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta + g_{\varphi\varphi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varphi + 2g_{r\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + 2g_{r\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + 2g_{\theta\varphi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，又由于

$$\begin{aligned} g_{rr} = g(\partial_r, \partial_r) &= (\mathrm{d}x^1(\partial_r))^2 + (\mathrm{d}x^2(\partial_r))^2 + (\mathrm{d}x^3(\partial_r))^2 \\ &= \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = 1 \end{aligned}$$

同理可得 $g_{\theta\theta} = r^2, g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta, g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0$.

综上，欧式空间中的度量在球坐标下的表出为

$$g = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2$$