日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 9 月 22 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460

题目 1. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，求样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$ 的期望与方差.

解答. 令 $Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 则 $Y\sim\chi(n-1)$，由于 $S=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\sqrt{Y}$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\sqrt{Y})&=\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\int_0^\infty\sqrt{x}\cdot\frac{\left(\frac12\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}x^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\left(\frac12\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\left(\frac12\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\left(\frac12\right)^{\frac{n}{2}}}=\frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{E}(S)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\mathrm{E}(\sqrt{Y})=\dfrac{\sqrt{2}\sigma\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$.

由样本方差性质可知 $\mathrm{E}(S^2)=\sigma^2$，于是 $\mathrm{Var}(S)=\mathrm{E}(S^2)-\mathrm{E}(S)^2=\sigma^2-\dfrac{\sqrt{2}\sigma\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})}=\sigma^2\left(1-\dfrac{2}{n-1}\cdot\dfrac{\Gamma^2(\frac{n}{2})}{\Gamma^2(\frac{n-1}{2})}\right)$.

题目 2. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自均匀分布总体 $U(0,1)$ 的随机样本，求 $Y=\left(\prod\limits_{i=1}^n X_i\right)^{-\frac{1}{n}}$ 的分布.

解答. 由于 $\log Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n-\log X_i$，令 $Z=-\log X$，则

$$f_Z(z)=f_X(\mathrm{e}^{-z})\cdot|-\mathrm{e}^{-z}|=\mathrm{e}^{-z},$$

则 $-\log X_i=Z\sim\Gamma(1,1)$. 令 $U=\sum\limits_{i=1}^n-\log X_i$，则由 Gamma 函数的可加性可知，$U\sim\Gamma(n,1)$，于是

$$f_{\frac{U}{n}}(x)=f_U(nx)\cdot n=\frac{n}{\Gamma(n)}(nx)^{n-1}\mathrm{e}^{-x}=\frac{n^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x},$$

所以

$$f_Y(y)=f_{\log Y}(e^y)=f_{\frac{U}{n}}(\mathrm{e}^y)\cdot\mathrm{e}^y=\frac{n^n}{\Gamma(n)}\mathrm{e}^{ny}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^y}.$$

题目 3. 设 X_1,X_2 是来自 $N(0,1)$ 的随机样本.

(1) 求 $(X_2-X_1)/\sqrt{2}$ 的分布.

(2) 求 $X_1^2+X_2^2$ 的分布.

(3) 求 $(X_1+X_2)^2/(X_2-X_1)^2$ 的分布.

(4) 求 $(X_2+X_1)/\sqrt{(X_1-X_2)^2}$ 的分布.

(5) 求 X_1^2/X_2^2 的分布.

解答. (1) 由正态分布的线性性可知 $X_2-X_1\sim N(0,2)$，于是 $(X_2-X_1)/\sqrt{2}\sim N(0,1)$.

(2) 由卡方分布性质可知 $X_1^2+X_2^2\sim\chi(2)$.

(3) 由卡方分布性质可知 $(X_1+X_2)^2/2\sim\chi(1)$, $(X_2-X_1)^2/2\sim\chi(1)$，再由 F 分布的性质可知 $(X_1+X_2)^2/(X_2-X_1)^2\sim F(1,1)$.

(4) 由正态分布性质可知 $(X_2+X_1)/\sqrt{2}\sim N(0,1)$，$(X_1-X_2)^2/2\sim\chi(1)$，再由 t 分布的性质可知 $(X_2+X_1)/\sqrt{(X_1-X_2)^2}\sim t(1)$.

(5) 由卡方分布性质可知 $X_1^2,X_2^2\sim\chi(1)$，再由 F 分布可知 $X_1^2/X_2^2\sim F(1,1)$.

题目 4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的随机样本，$\mathrm{E}(X)=\mu$，且 $\mathrm{Var}(X)=0.25$，假设至少以 95% 的概率保证 $|\bar{X}-\mu|<0.001$，问样本量 n 至少应取多大?

解答. 由 Chebyshev 不等式可知

$$\mathrm{P}(|\bar{X}-\mu|>\varepsilon)=\mathrm{P}(|\bar{X}-\mu|^2>\varepsilon^2)\leqslant\frac{|\bar{X}-\mu|^2}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

取 $\varepsilon=0.01$，则 $\dfrac{0.25}{n(0.01)^2}\leqslant 0.05\Rightarrow n\geqslant 500$，则 n 至少为 500.

题目 5. 如果 X 服从自由度为 m 和 n 的 F 分布.

(1) 求 $W=\dfrac{mX/n}{1+mX/n}$ 的分布.

(2) 根据 (1) 的计算结果，计算 X 的期望与方差.

解答. (1) 设两个独立的随机变量 $U\sim\chi^2(m),V\sim\chi^2(n)$，有 F 分布的性质可知，$X=\dfrac{U/m}{V/n}\sim F(m,n)$，于是 $W=\dfrac{U}{U+V}$. 做变量代换如下

$$\begin{cases}x=\dfrac{u}{u+v},\\ u=v.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{xy}{1-x},\\ v=y.\end{cases}\Rightarrow\det(J)=\begin{vmatrix}\dfrac{y}{(1-x)^2} & \dfrac{x}{1-x}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{2-x}{(1-x)^2}y.$$

则

$$p(x,y)=p_{U,V}\left(\frac{xy}{1-x},y\right)=\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1-x)^{\frac{m}{2}+1}}y^{\frac{m+n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2(1-x)}}$$

于是

$$p_W(x)=\int_0^\infty p(x,y)\,\mathrm{d}y\xlongequal{\text{凑}\Gamma\text{函数}}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1-x)^{\frac{m}{2}+1}}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\left(\frac{1}{2(1-x)}\right)^{\frac{m+n}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}$$

所以 $W\sim Beta\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$.

(2) 由于 $W=\dfrac{mX}{n+mX}\Rightarrow X=\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{W}{1-W}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{n}{m}\mathrm{E}\left(\frac{W}{1-W}\right)=\frac{n}{m}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}))}\int_0^1 w^{\frac{m}{2}}(1-w)^{\frac{n}{2}-2}\,\mathrm{d}w\\&\xlongequal{\text{凑}Beta\text{分布}}\frac{n}{m}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}))}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}-1))}{\Gamma(\frac{m+n}{2})}=\frac{n}{m}\frac{m/2}{n/2-1}=\frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \frac{n^2}{m^2}\mathrm{E}\left(\frac{W^2}{(1-W)^2}\right) = \frac{n^2}{m^2}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^1 w^{\frac{m}{2}+1}(1-w)^{\frac{n}{2}-3}\,\mathrm{d}w \\
&\xlongequal{\text{凑}Beta\text{分布}} \frac{n^2}{m^2}\,\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+2)\Gamma(\frac{n}{2}-2)}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} = \frac{n^2(m+2)}{m(n-4)(n-2)}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{n^2(m+2)}{m(n-4)(n-2)} - \frac{n^2}{(n-2)^2} = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-4)(n-2)^2}.
$$