日期	科目	姓名，学号
2021 年 11 月 3 日	近世代数	吴天阳 2204210460

习题 1.5

2. 设 $G = \langle a \rangle$ 是 6 阶循环群，把 G 分解成它的两个非平凡子群的内直积。

解答. 由 Lagrange 定理 知，子群的阶一定是群的阶的因数，且 $|G| = 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$，所以 G 只能分解为两个阶分别为 $2, 3$ 的非平凡子群。

又由于 $\langle a^3 \rangle = \{e, a^3\}, \langle a^2 \rangle = \{e, a^2, a^4\}$，且 $\langle a^3 \rangle \cap \langle a^2 \rangle = \{e\}, G = \langle a^3 \rangle \langle a^2 \rangle$，由循环群的性质知，$G$ 是 Abel 群，群中元素两两可交换，则

$$G = \langle a^2 \rangle \times \langle a^3 \rangle$$

5. 设 G 是 p^m 阶循环群，其中 p 为素数，m 为正整数，证明：G 不能分解成它的一些非平凡子群的内直和。

证明. 若 G 能分解成它的一些非平凡子群的内直和，则

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n = H_1 \oplus K,\ (K = H_2 \oplus \cdots \oplus H_n)$$

所以 G 至少能被分解为它的两个非平凡子群的内直和。

反设 G 可以分解为它的两个非平凡子群的内直和，由于 $p^m = p^n \cdot p^{m-n}$，由循环群子群的性质，设 $G = \langle a \rangle$，令

$$G = \langle a^{p^n} \rangle \times \langle a^{p^{m-n}} \rangle,\ (n = 1, 2, \cdots m-1)$$

不妨令 $n < m - n$，则 $a^{p^n} \in \langle a^{p^{m-n}} \rangle$，与 $\langle a^{p^n} \rangle \cap \langle a^{p^{m-n}} \rangle = \{e\}$ 矛盾。

故 G 不能分解为它的两个非平凡子群的内直和，由上述讨论知，G 更不能分解为它的一些非平凡子群的内直和。 $\square$

8. 证明：$U_1 \cong SO_2$。

证明. 设 $z \in U_1$，由 U_1 的定义知，$\bar{z} \cdot z = 1$，则 z 在复平面的单位圆上，由 Euler 公式知

$$U_1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$$

由于 2 阶特殊正交阵都可以写成

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

所以

$$SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

构造 U_1 到 SO_2 上的映射：

$$\begin{aligned} \sigma : U_1 &\to SO_2 \\ e^{i\theta} &\mapsto \begin{bmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

下证 σ 保运算

$$\begin{aligned} \sigma(e^{i\theta_1})\sigma(e^{i\theta_2}) &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \sigma(e^{i(\theta_1+\theta_2)}) \\ &= \sigma(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}) \end{aligned}$$

由 σ 的定义看出，σ 是满同态，所以 $\mathrm{Im}\sigma = SO_2$，$\mathrm{Ker}\sigma = \{1\}$。

由**群同态基本定理**，知

$$U_1 \cong U_1/\{1\} \cong SO_2$$

□

习题 1.6

1. 设 f 是实数加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 到非零复数乘法群 $\mathbb{C}^*$ 的一个映射：

$$f(x) = e^{2\pi i x}$$

(1). 证明：f 是一个同态。

(2). 求 $\mathrm{Ker}f$ 和 $\mathrm{Im}f$。

解答.

(1). $\forall x, y \in \mathbb{R}$，有

$$f(x)\cdot f(y) = e^{2\pi i x}\cdot e^{2\pi i y} = e^{2\pi i(x+y)} = f(x+y)$$

则 f 是一个 $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$ 上的同态。

(2). $\mathbb{C}^*$ 中的幺元为 1，由 Euler 公式知：$e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i\cdot\sin(2\pi x)$，则

$$\begin{aligned} &1 = \cos(2\pi x) + i\cdot\sin(2\pi x) \\ \Rightarrow &\begin{cases} \cos(2\pi x) = 1 \\ \sin(2\pi x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

则 $\mathrm{Ker}f = \mathbb{Z}$。

由 Euler 公式知，$e^{2\pi i x} = cos(2\pi x) + i\cdot\sin(2\pi x)$ 的周期为 1，故 $\mathrm{Im}f$ 为复平面上的单位元，$\mathrm{Im}f = \{\cos(2\pi x) + i\cdot\sin(2\pi x) : 0 \leqslant x < 1\}$。

5. 设 F 是一个域，σ 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 到 F^* 的行列式映射，即 $\sigma(A) = |A|$。

(1). 证明：σ 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 到 F^* 的一个群同态；

(2). 求 $\mathrm{Ker}\sigma$ 和 $\mathrm{Im}\sigma$；

(3). 证明：$\mathrm{SL}_n(F) \lhd \mathrm{GL}_n(F)$；

(4). 证明：$\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^*$。

解答.

(1). $\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(F)$，有

$$\sigma(A)\sigma(B) = |A|\cdot|B| = |AB| = \sigma(AB)$$

则 σ 是一个同态。

(2). $|A| = 1$，则 $\{A \in \mathrm{GL}_n(F) : |A| = 1\} = \mathrm{SL}_n(F)$，则 $\mathrm{Ker}\sigma = \mathrm{SL}_n(F)$。

对 $\forall a \in F^*$，则

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = a$$

则 $\mathrm{Im}\sigma = F^*$。

(3). 由 (2) 和**群同态基本定理**知：$\mathrm{SL}_n(F) = \mathrm{Ker}\sigma \lhd \mathrm{GL}_n(F)$。

(4). 由 (2) 和**群同态基本定理**知：$\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^*$。

10. 设 G 是一个群，$N \lhd G$，$H < G$，如果 $G = NH$，且 $N \cap H = \{e\}$，那么称 G 可分解成它的正规子群 N 与子群 H 的**半直积**，记做 $G = N \rtimes H$，证明：如果 $G = N \rtimes H$，那么

$$G/H \cong H$$

证明. 由于 $N \lhd G$ 且 $H < G$，由**第一群同构定理**知：

$$H/H \cap N \cong HN/N \Rightarrow H/\{e\} \cong G/N$$

下证 $H \cong H/\{e\}$。

$H/\{e\} = \{h\{e\} : h \in H\} = \{\{h\} : h \in H\}$，构造映射：

$$\sigma : H/\{e\} \to H$$
$$\{h\} \mapsto h$$

由于

$$\sigma(\{h_1\}) = \sigma(\{h_2\}) \iff h_1 = h_2 \iff \{h_1\} = \{h_2\}$$

则 σ 是单射，从 σ 定义看出它是满射，所以 σ 是双射，又由于

$$\sigma(\{h_1\})\sigma(\{h_2\}) = h_1h_2 = \sigma(\{h_1h_2\}) = \sigma(\{h_1\}\{h_2\})$$

则 σ 是 $H/\{e\}$ 到 H 的群同构映射，所以

$$H \cong H/\{e\} \cong G/N$$

□

11. 证明：S_n 可分解成 A_n 与 $\langle(12)\rangle$ 的半直积，其中 $n \geqslant 3$。

证明. 由于 $A_n \lhd S_n, \langle(12)\rangle < S_n$，$A_n \cap \langle(12)\rangle = \{(1)\}$，且

$$A_n \langle(12)\rangle = A_n \sqcup A_n(12)$$

$A_n(12)$ 表示 S_n 中的所有奇置换组成的集合，由于 S_n 中的置换要么是偶置换要么是奇置换，所以 $S_n \subset A_n \langle (12) \rangle$，又因为 $A_n \langle (12) \rangle < S_n$，所以 $S_n = A_n \langle (12) \rangle$，由半直积定义知

$$S_n = A_n \rtimes \langle (12) \rangle$$

□

12. 证明：如果置换群 G 含有奇置换，那么 G 必有指数为 2 的子群。

证明. 由于 G 可能为无限群，所以不能直接使用 11 题结论，模仿**例一**，构造 G 到 $\{-1,1\}$ 对于复数乘法构成的群上的一个映射：

$$\sigma : G \to \{-1,1\}$$
$$\text{奇置换} \mapsto -1$$
$$\text{偶置换} \mapsto 1$$

由**例一**知，σ 是 G 到 $\{-1,1\}$ 上的满同态，且 $\mathrm{Ker}\sigma = \{\text{偶置换}\} = A$ 由**群同态基本定理**知

$$G/A \cong \{-1,1\}$$

所以，$|G/A| = [G:A] = |\{-1,1\}| = 2$，$G$ 上的所有偶置换构成的集合指数为 2。 □

习题 1.7

1. 分别求 D_3, D_4 的换位子群。

解答.

$D_3 = \{\mathrm{I}, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$，$|D_3| = 6$，其非平凡子群的阶数只能为 $2, 3$。

设 $H = \{\mathrm{I}, \sigma, \sigma^2\} = \langle \sigma \rangle$，则 $\forall \tau \in D_3$，有 $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} = \sigma^2 \in H$，则 $H \triangleleft D_3$，且 $|D_3/H| = |D_3|/|H| = 6/3 = 2$，则 $D_3/H \cong \mathbb{Z}_2$ 为 Abel 群，于是 $D_3' \subset H$，又由于 $|H| = 3 = 1 \cdot 3$，则 H 没有非平凡正规子群，故 $D_3' = H$。

$D_4 = \{\mathrm{I}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\} = \langle \sigma \rangle$, $|D_4| = 8$, 其非平凡子群的阶数只能为 $2, 4$。

设 $H = \{\mathrm{I}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$，则 $\forall \tau \in D_4$，有 $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} = \sigma^3$，则 $H \triangleleft D_4$，且 $|D_4/H| = |D_4|/|H| = 8/4 = 2$，则 $D_4/H \cong \mathbb{Z}_2$ 为 Abel 群，于是 $D_4' \subset H$。

又由于 $|H|=4=2\cdot 2$，则 H 的非平凡子群的阶数只能为 2，设 $N=\{\mathrm{I},\sigma^2\}=\langle 2\rangle$，则 N 是 H 的唯一的非平凡子群，由于

$$\sigma\sigma^2\sigma^{-1}=\sigma^3\sigma^2\sigma^{-3}=\sigma^2\in N$$

$$\tau\sigma^2\tau^{-1}=\sigma^{-2}=\sigma^2\in N$$

则 $N\triangleleft D_4$，且 $|D_4/H|=|D_4|/|H|=8/2=4$，由于 4 阶群只能为 Abel 群，故 D_4/H 为 Abel 群，又由于 N 是 D_4 中最小的正规子群，所以 $D_4'=N$。

3.　求 S_n 的换位子群，其中 $n\geqslant 3$。

解答.

由于 $A_n\triangleleft S_n$，且 $|S_n/A_n|=|S_n|/|A_n|=2$，则 $S_n/A_n\cong\mathbb{Z}_2$ 为 Abel 群，则 $S_n'\subset A_n$，由于 A_n 中的元素可以由 $3-$轮换 生成，设 $(ijk)\in A_n$，则

$$(ijk)=(ikj)^{-1}=(ikj)^2=((ij)(ik))^2=(ij)(ik)(ij)(ik)=(ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1}\subset S_n'$$

则 $A_n\subset S_n'$，综上 $S_n'=A_n$。

5.　S_4 是不是可解群?

解答.　S_4 是可解群。

因为 $S_4'=A_4,S_4''=V_4,S_4^{(3)}=\{(1)\}$，所以 S_4 是可解群。

6.　$n\geqslant 5$ 时，S_n 是不可解群么?

解答.　是的。

因为 $S_n'=A_n$，下面证明，当 $n\geqslant 5$ 时，$A_n'=A_n$。

由于 $A_n'\triangleleft A_n$，只需证明 $A_n\subset A_n'$，由于 A_n 可以由 $3-$轮换 生成，所以只需证明 $3-$轮换 都属于 A_n'。

设 $(a_1a_2a_3)\in A_n$，则

$$\begin{aligned}(a_1a_2a_3)&=(a_1a_4a_3)(a_1a_2a_4)=(a_1a_4a_3)(a_1a_4a_2)^{-1}=(a_1a_4a_3)(a_2a_1a_4)^{-1}\\&=(a_5a_2a_1a_4a_3)(a_2a_1a_4)(a_5a_2a_1a_4a_3)^{-1}(a_2a_1a_4)^{-1}\in A_n'\end{aligned}$$

所以 $A_n'=A_n$，则 $S_n^{(m)}=A_n\ (m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1})$，故 $n\geqslant 5$ 时，S_n 是不可解群。