日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 23 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第六次作业

题目 1. (1.6.2) 求证：在 $C[a,b]$ 中不可能引进一种内积 $(\cdot,\cdot)$，使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,\quad (\forall f\in C[a,b]).$$

证明. 令 $f(x)=\dfrac{x-b}{a-b}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x-a}{b-a}$, $g(x)=\dfrac{1}{3}\dfrac{x-a}{b-a}$，则 $||f||=1$, $||g||=\dfrac{1}{3}$，且

$$f+g=\frac{x-b}{a-b}+\frac{2}{3}\frac{x-a}{b-a},\ f-g=\frac{x-b}{a-b},$$

于是 $||f+g||=||f-g||=1$，则 $||f+g||^2+||f-g||^2=2\neq 2(\frac{1}{3^2}+1)=2(||f||^2+||g||^2)$，故范数不满足平行四边形公式，无法构成内积. $\square$

题目 2. (1.6.3) 在 $L^2[0,T]$ 中，求证：函数

$$x\mapsto\left|\int_0^T \mathrm{e}^{-(T-\tau)}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|\quad(\forall x\in L^2[0,T])$$

在单位球面上达到最大值，求出此时的最大值和达到最大值的元素 x.

证明.

$$\left|\int_0^T \mathrm{e}^{-(T-\tau)}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-2(T-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |x|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2T}}{2}}$$

上式取到最大值，当且仅当 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $x=\lambda\mathrm{e}^{-(T-\tau)}$ 且 $\displaystyle\int_0^T|x|^2\,\mathrm{d}\tau=1$，于是

$$\int_0^T|x|^2\,\mathrm{d}\tau=\lambda^2\int_0^T \mathrm{e}^{-2(T-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\lambda^2\int_0^T \mathrm{e}^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau=\lambda^2\frac{1-\mathrm{e}^{-2T}}{2}=1$$

所以 $\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-2T}}}$，故 x 能在单位球面上取到最大值，且当 $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-2T}}}\mathrm{e}^{-(T-\tau)}=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2T}-1}}\mathrm{e}^{\tau}$ 时取到最大值 $\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2T}}{2}}$. $\square$

题目 3. (1.6.5) 设 M 是 Hilbert 空间 X 的子集，求证：$(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\mathrm{span}M}$.

证明. 由于 $\overline{\mathrm{span}M}=((\mathrm{span}M)^{\perp})^{\perp}$，于是只需证 $((\mathrm{span}M)^{\perp})^{\perp}=(M^{\perp})^{\perp}$，只需证 $(\mathrm{span}M)^{\perp}=M^{\perp}$，由于 $M\subset\mathrm{span}M$，则 $(\mathrm{span}M)^{\perp}\subset M^{\perp}$.

$\forall x\in M^{\perp}$，$\forall y\in\mathrm{span}M$，则 $\exists u\in\mathbb{N},\alpha_i\in\mathbb{K},x_i\in M$，使得 $y=\displaystyle\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i$，则

$$(y,x)=(\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i,x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i(x_i,x)=0$$

则 $x\in(\mathrm{span}M)^{\perp}$，则 $(\mathrm{span}M)^{\perp}=M^{\perp}$. $\square$

题目 4. (1.6.6) 在 $L^2[-1,1]$ 中，问偶函数集的正交补是什么?

解答. 偶函数的正交补为奇函数. 令全体偶函数集合为 M ,由于 $\{\sin n\pi x, \cos n\pi x\}_{n\geqslant 0}$ 是 $L^2[-1,1]$ 上的完备标准正交基. $\forall f \in M^T$，则 $(f, \cos n\pi x) = 0$, $(n \geqslant 0)$，于是 $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f, \sin n\pi x)\sin n\pi x$，所以 f 是奇函数，由 f 的任意性可知，M^T 是奇函数集合.

题目 5. (1.6.7) 在 $L^2[a,b]$ 中，考察函数集 $S = \{\mathrm{e}^{2\pi inx}\}$.

(1) 若 $|b-a| \leqslant 1$，求证：$S^\perp = \{\theta\}$.

(2) 若 $|b-a| > 1$，求证：$S^\perp \neq \{\theta\}$.

证明. (1) 当 $b-a=1$ 时，$S^\perp = (\mathrm{span}S)^\perp = L^2[a,b]^\perp = \{\theta\}$.

当 $b-a<1$ 时，$\forall u \in L^2[a,b]$，令 $\bar{u} = \begin{cases} u, & x \in [a,b], \\ 0, & x \in (b, a+1] \end{cases}$ 即为 u 在 $[a,b]$ 上的零延拓. 则 $\bar{u} \in L^2[a,a+1]$. 若 $(u, \mathrm{e}^{2\pi inx}) = 0$，则

$$\int_a^b u\mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+1} \bar{u}\mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x = 0, \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

(2) 当 $b-a>1$ 时，令 $u_n = -\int_{a+1}^b \mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x$，下证 $\{u_n\} \in l^2$.

$$|u_n| = \left|\int_{a+1}^b \mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}n}\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nb} - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n(a+1)}\right)\right| = \frac{1}{2\pi n}\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nb} - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n(a+1)}\right| \leqslant \frac{1}{\pi n}.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^2} < \infty$，则 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|u_n|^2 \leqslant 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 + (b-a-1)^2 < \infty$，所以 $\{u_n\} \in l^2$.

由于 S 在 $L^2[a,a+1]$ 上完备，由 Riesz-Fisher 定理知 $u = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}u_n\mathrm{e}^{2\pi inx} \in L^2[a,a+1]$，则

令 $v = \begin{cases} u, & x \in [a,a+1], \\ 1, & x \in (a+1,b]. \end{cases}$ 于是 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 有

$$(v, \mathrm{e}^{2\pi inx}) = \int_a^b v\mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+1} u\mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x + \int_{a+1}^b \mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x = u_n + \int_{a+1}^b \mathrm{e}^{2\pi inx}\,\mathrm{d}x = 0$$

则 $v \in S^\perp$ 且 $v \neq \theta$，则 $S^\perp \neq \theta$. □

题目 6. (1.6.8) 设 X 表示闭单位园上的解析函数全体，内积定义为

$$(f,g) = \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{f(x)\overline{g(z)}}{z}\,\mathrm{d}z \quad (\forall f,g \in X)$$

求证：$\{z^n/\sqrt{2\pi}\}$ 是一组标准正交系.

证明. 不妨令 $n > m$.

$$(\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}, \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{(z\bar{z})^n}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{|z|^{2n}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 1,$$
$$(\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}, \frac{z^m}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{z^n\bar{z}^m}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}z^{n-1}\bar{z}^m\,\mathrm{d}z = 0.$$

故 $\{z^n/\sqrt{2\pi}\}$ 是一组标准正交系. □

题目 7. (1.6.9) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 X 中的两个规范正交系，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}||e_n - f_n||^2 < 1.$$

求证：$\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备.

证明. 设 $\{e_n\}$ 完备的，由于 X 为 Hilbert 空间，则完备性与完全性等价. 反设，$\exists x_0 \in X$，且 $x_0 \neq 0$，使得 $(x_0, f_n) = 0,\ (n \geqslant 1)$ 则

$$|(x_0, e_n)| = |(x_0, e_n - f_n)| \leqslant ||x_0|| \cdot ||e_n - f_n||$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|(x_0, e_n)| = ||x_0||^2 \leqslant ||x_0||^2\sum_{n=1}^{\infty}||e_n - f_n|| < ||x_0||^2$$

矛盾，故 $\{f_n\}$ 完备. □

题目 8. (1.6.10) 设 X 是 Hilbert 空间，X_0 是 X 的闭线性子空间，$\{e_n\}, \{f_n\}$ 分别是 X_0 和 $X_0^{\perp}$ 的规范正交系. 求证：$\{e_n\} \cup \{f_n\}$ 是 X 的规范正交系.

证明. 由于 $\{e_n\}, \{f_n\}$ 为标准正交系，$\forall n, m \geqslant 1,\ n \neq m$，则 $|(e_n, e_n)| = |(f_n, f_n)| = 1$，$e_n \perp e_m$，$f_n \perp f_m$，由于 $e_n \in X_0$，$f_m \in X_0^{\perp}$，则 $e_n \perp f_m$. 综上 $\{e_n\} \cup \{f_n\}$ 是 X 的标准正交系. □

题目 9. (1.6.12) 设 X 是内积空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的规范正交系，求证：

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \quad (\forall x, y \in X).$$

证明.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(y, e_n)|^2\right) \leqslant ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

于是 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \quad (\forall x, y \in X).$ □

题目 10. (1.6.13) 设 X 是一个内积空间，$\forall x_0 \in X, \forall r > 0$，令

$$C = \{x \in X : ||x - x_0|| \leqslant r\}.$$

(1) 求证：C 是 X 中的闭凸集.

(2) $\forall x \in X$，令

$$y = \begin{cases} x_0 + r\dfrac{x - x_0}{||x - x_0||}, & x \notin C, \\ x, & x \in C. \end{cases}$$

求证：y 是 x 在 C 中的最佳逼近元.

证明. (1) 设 $\{x_n\} \in C$ 收敛于 x，则

$$||x - x_0|| \leqslant ||x - x_n|| + ||x_n - x_0|| \leqslant ||x - x_n|| + r \to r \quad (n \to \infty)$$

则 $x \in C$，由 $\{x_n\}$ 的任意性知 C 是闭的.

$\forall \alpha \in (0,1)$，$x, y \in C$，则 $||x - x_0|| \leqslant r$, $||y - x_0|| \leqslant r$，则

$$||\alpha x + (1-\alpha)y - x_0|| = ||\alpha(x - x_0) + (1-\alpha)(y - x_0)|| \leqslant \alpha||x - x_0|| + (1-\alpha)||y - x_0|| \leqslant r$$

则 $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$，故 C 是 X 的闭凸子集.

(2) 当 $x \in C$ 时，$||y - x|| = 0$，则 y 是 x 的最佳逼近元.

当 $x \notin C$ 时，

$$||x - y|| = \left|\left|x - x_0 - r\frac{x - x_0}{||x - x_0||}\right|\right| = \left|\left|\frac{||x - x_0|| - r}{||x - x_0||}(x - x_0)\right|\right| = ||x - x_0|| - r$$

由于 $\forall z \in C$ 有 $||z-x||+r \geqslant ||z-x||+||z-x_0|| \geqslant ||x-x_0||$，则 $||z-x|| \geqslant ||x-x_0||-r = ||x-y||$，又由于 C 是闭的，则

$$||x - y|| = \inf_{z \in C} ||z - x|| = \rho(x, C)$$

则 y 是 x 在 C 中的最佳逼近元. □

题目 11. (1.6.14) 求 $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$，使得 $\displaystyle\int_0^1 |\mathrm{e}^t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2|^2 \, \mathrm{d}t$ 取最小值.

解答. 等价于 e^t 在空间 $\mathrm{span}\{1, t, t^2\}$ 上的正交投影，即

$$\begin{cases} a_0(1,1) + a_1(t,1) + a_2(t^2,1) = (\mathrm{e}^t, 1), \\ a_0(1,t) + a_1(t,t) + a_2(t^2,t) = (\mathrm{e}^t, t), \\ a_0(1,t^2) + a_1(t,t^2) + a_2(t^2,t^2) = (e^t, t^2). \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} - 1 \\ 1 \\ e - 2 \end{bmatrix}$$

则 $a_0 = 39\mathrm{e} - 105,\ a_1 = 588 - 216\mathrm{e},\ a_2 = 210\mathrm{e} - 570.$

题目 12. (1.6.15) 设 $f(x) \in C^2[a,b]$，满足边界条件

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) = 1,\ f'(b) = 0.$$

求证：

$$\int_a^b |f''(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}.$$

题目 13. 令 $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1(x) + \alpha_2 T_2(x)$，则 $L(X,Y)$ 构成线性空间，证明在算子范数下构成 B^* 空间.

证明. 正定性：$||T|| = \sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \dfrac{||Tx||}{||x||} \geqslant 0$，且 $||T|| = 0 \iff ||Tx|| = 0 \iff Tx = \theta \iff T = \theta.$

齐次性：$\forall \alpha \in \mathbb{K}$，则 $||\alpha T|| = \sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \dfrac{||(\alpha T)(x)||}{||x||} = \sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \dfrac{||\alpha T(x)||}{||x||} = |\alpha| \cdot ||T||.$

三角不等式：

$$||T_1+T_2|| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \frac{||(T_1+T_2)(x)||}{||x||} = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \frac{||T_1(x)+T_2(x)||}{||x||} \leqslant \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \frac{||T_1||}{||x||} + \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}} \frac{||T_2||}{||x||} = ||T_1|| + ||T_2||$$

综上，$L(X,Y)$ 在算子范数系构成 B^* 空间. □

题目 14. 设 X 是 B^* 空间，f 是 X 中的线性泛函. 证明 f 连续 $\iff$ $\mathrm{Ker}f$ 是 X 中的闭子空间.

证明. 必要性：设 $\{x_n\} \subset \mathrm{Ker}f$ 收敛于 x，则 $f(x_n) = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = 0$，则 $x \in \mathrm{Ker}f$，故 $\mathrm{Ker}f$ 是闭的.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathrm{Ker}f$，则 $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$，故 $\alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker}f$. 综上，$\mathrm{Ker}f$ 是 X 的闭子空间.

充分性：由于 f 连续等价于 f 在单位球面上有界，反设 f 在单位球面上无界，则 $\forall n \in \mathbb{N}$，$\exists x_n \in X$ 且 $||x_n|| = 1$，$f(x_n) \geqslant n \Rightarrow \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{f(x_n)}$，令 $y_n = \dfrac{x_n}{f(x_n)} - \dfrac{x_1}{f(x_1)}$，则

$$\left|\left| y_n + \frac{x_1}{f(x_1)} \right|\right| = \left|\left| \frac{x_n}{f_n} \right|\right| = \frac{1}{f(x_n)} \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则 $y_n \to -\dfrac{x_n}{f(x_1)}$，且 $f(y_n) = 0$，则 $\{y_n\} \subset \mathrm{Ker}f$ 收敛，但是 $f(-\dfrac{x_1}{f(x_1)}) = -1 \neq 0$，则 $-\dfrac{x_1}{f(x_1)} \notin \mathrm{Ker}f$ 与 $\mathrm{Ker}f$ 是闭的矛盾. 故 f 在单位球面上有界，f 连续. □