日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 2 月 14 日	算法设计与分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第三次作业

(3-1) 解答. 设序列数组为 $a[n]$，长度为 n，下标从 1 开始.

方法 1（复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$）：设 $dp[i]$ 表示以 $a[i]$ 结尾的前 $a[1\cdots i]$ 中最长的单调递增子序列长度，$fa[i]$ 表示以 i 结尾的最长子序列的前一个下标位置. 初始化：$dp[0]=0$, $a[0]=-\infty$. 则有以下转移方程

$$dp[i]=\max_{\substack{0\leqslant j<i\\a[j]\leqslant a[i]}}dp[j]+1,\ fa[i]=\arg\max_{\substack{0\leqslant j<i\\a[j]\leqslant a[i]}}dp[j].$$

则 $m=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}dp[i]$ 为最长单调子序列的长度，设 $k=\arg\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}dp[i]$，则 k 为最长子序列的结尾对应的下标，令 $x_1=fa[k],x_2=fa[x_1],\cdots,x_{i+1}=fa[x_i],\cdots,x_{m+1}=0$，则最长单调子序列为

$$\{a[x_m],a[x_{m-1}],\cdots,a[x_1]\}.$$

方法 2（复杂度 $\mathcal{O}(n\log n)$）：考虑直接维护前 $a[1\cdots i]$ 中的最长单调子序列，设 b 数组为前 i 个字符构成的最长单调子序列，令 $b=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k}\}$，满足 $a_{n_1}\leqslant a_{n_2}\leqslant\cdots\leqslant a_{n_k}$，且满足 a_{n_i} 是对应为上最小值，即如果有多个相同长度的最长单调子序列，a_{n_i} 一定是所有子序列第 i 位上的最小值.

考虑第 $i+1$ 个元素 a_{i+1}，若 $a_{i+1}\geqslant a_{n_k}$ 则在 b 的尾端加入 a_{i+1}，否则在 b 中从左到右查找第一个大于 a_{i+1} 的位置 j，由于 b 是单增的，所以可以通过二分查找加速，然后令 $a_{n_j}=a_{i+1}$. 如此反复操作 n 次，即可得到整个数组的最长单调子序列 b，且每个元素均为对应位上的最小元.

(3-3) 解答. 设文章单词总共有 n 个，每个长度分别为 $l_1,\cdots,l_n$，打印机每行最多打 M 个字符，不妨令 $M\geqslant\arg\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}l_i$.

设状态数组 $dp[i][j]$ 表示第 i 行放 j 个单词的多余空格的最小立方和，初始化：$dp[0][0]=0$, $dp[i][j]=+\infty,1\leqslant i,j\leqslant n$，则转移方程为

$$dp[i][j]=\min_{0\leqslant k<j}dp[i-1][k]+\left(M-\sum_{t=k+1}^{j}l_t-j+k+1\right)^3,\ fa[i][j]=\text{左式取到最小值时对应的}k\text{值}.$$

则 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}dp[i][n]$ 为最小代价，令 $m=\arg\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}dp[i][n]$ 也就表示最小代价所需的行数. 则对单词下标 $\{1,2,\cdots,n\}$ 按行得到的划分为

$$a_m=n,\ a_{m-1}=fa[m][n],\ a_{m-2}=fa[m-1][a_{m-1}],\ \cdots,\ a_1=fa[2][a_2],\ a_0=fa[1][a_1]=0.$$

第 i 行打印的单词为 $\{l_j:j\in(a_{i-1},a_i]\}$.

总时空复杂度：$\mathcal{O}(n^2)$.