日期	科目	姓名，学号
2021 年 11 月 28 日	离散数学	吴天阳 2204210460

第六章

66. 解答. 方程组：

$$\begin{cases} x \oplus (c \otimes y) = a & (1) \\ (c \otimes x) \oplus y = b & (2) \end{cases}$$

对 (1) 进行变化：

$$x = a \oplus (-c \otimes y) \tag{3}$$

将 (3) 代入 (2) 中，得

$$\begin{aligned} (c \otimes (a \oplus (-c \otimes y))) \oplus y =& b \\ c \otimes a \oplus c \otimes (-c \otimes y) \oplus y =& b \\ c \otimes a \oplus (-c^2 \otimes y) \oplus y =& b \\ (-c^2 \oplus 1) \otimes y =& b \oplus (-c \otimes a) \end{aligned}$$

当 $c = 1$ 时，$a = b$，则 $x \oplus y = a$，无唯一解。

当 $c = -1$ 时，$a = -b$，则 $x \oplus (-y) = a$，无唯一解。

当 $c \neq \pm 1$ 时，则 $y = (b \oplus (-c \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1}$，则有

$$\begin{aligned} x &= a \oplus (-c \otimes (b \oplus (-c \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1}) \\ &= a \oplus (-(b \otimes c \oplus (-c^2 \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1}) \\ &= (a \oplus (-a \otimes c^2) \oplus (-b \otimes c) \oplus (c^2 \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \\ &= (a \oplus (-b \otimes c)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} x = (a \oplus (-b \otimes c)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \\ y = (b \oplus (-c \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \end{cases}$$

67. 解答. 不一定。设域为实数域，$\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$，取

$$R = \{所有偶数\} = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$$

则 $\langle R, +, \times \rangle$ 构成环，所以 $\langle R, +\times \rangle$ 是 $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ 的子环，但 $1 \notin R$，所以 R 中没有幺元，故 R 不是整环。

68. 解答. (1). 不是，因为 $-1 \notin X$，所以 $1 \in X$ 没有关于 $\oplus$ 的逆元，故 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是域。

(2). 是，由上次作业 60.(5) 题知，$\langle X, +, \times \rangle$ 构成整环，则只需证明 $\forall a + b\sqrt{3} \in X$ 都有逆元即可，由于

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{3})\frac{(a-b\sqrt{3})}{a^2-3b^2} &= 1 \\ \frac{(a-b\sqrt{3})}{a^2-3b^2}(a+b\sqrt{3}) &= 1\end{aligned}$$

假设 $a^2 - 3b^2 = 0$，则 $\dfrac{a}{b} = \sqrt{3}$，由于 $a, b \in \mathbb{Q}$，则 $\sqrt{3}$ 是有理数，与 $\sqrt{3}$ 为无理数矛盾，所以 $\forall a, b \in \mathbb{Q}$，$a + b\sqrt{3}$ 都有逆元，故 $\langle X, +, \times \rangle$ 是域。

(3). 不是，由于 $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25} \notin X$，所以 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是域。

(4). 是，证明方式同本题的 (2)。

(5). 不是，因为 $a \neq kb$，所以 $1 \notin X$，则 X 无幺元，故 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是域。

69.

证明. 由于:

1. $S_1 \subset F$ 且$S_2 \subset F$，则 $S_1 \cap S_2 \subset F$
2. $\langle S_1, \oplus \rangle, \langle S_2, \oplus \rangle$ 为 Abel 群，则 $\langle S_1 \cap S_2, \oplus \rangle$ 为 Abel 群
3. $\langle S_1 \backslash \{0\}, \otimes \rangle, \langle S_2 \backslash \{0\}, \otimes \rangle$ 为 Abel 群，则 $\langle S_1 \cap S_2 \backslash \{0\}, \otimes \rangle$ 为 Abel 群
4. $\otimes, \oplus$ 为域 F 中的运算，则满足分配律，所以 $S_1 \cap S_2$ 中的 $\otimes$ 对 $\oplus$ 运算满足分配律。

综上，$\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 的子域。 $\square$

70. 解答. 存在，取素多项式 $f(x) = 1 + x + x^2$ 为模数，可以构造出多项式模环 $\langle R, +, \times\rangle$，$R = \{0, 1, x, 1 + x\}$，$x \in \mathbb{Z}_2$，其中的 $+, \times$ 运算定义如下：

+	0	1	x	1+x
0	0	1	x	1+x
1	1	0	1+x	x
x	x	1+x	0	1
1+x	1+x	x	1	0

×	0	1	x	1+x
0	0	0	0	0
1	0	1	x	1+x
x	0	x	1+x	1
1+x	0	1+x	1	x