日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 4 月 2 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第四次作业

题目 1. 3.4 练习 1 证明**定义 3.7** 中 Jacobi 矩阵可逆这个条件不依赖于仿射坐标系的选取，也就是说如果 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 在 $\varphi_{\mathcal{A}}(U)$ 上逐点可逆，那么在另一个仿射坐标系 $\mathcal{A}'$ 中，$\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}$ 在 $\varphi_{\mathcal{A}'}(U)$ 上也逐点可逆.

证明. 设 $(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})'=J$ 可逆，由于 $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ 均为仿射坐标系，则存在正交阵 T 和常向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}(\boldsymbol{x})=T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$，于是 $\forall\boldsymbol{x}\in\varphi_{\mathcal{A}'}(U)$ 有

$$
\begin{aligned}
\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}(\boldsymbol{x}) &= (\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})(\boldsymbol{x})\\
\Rightarrow(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})'(\boldsymbol{x}) &= ((\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})')^T[(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})'(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})](\boldsymbol{x})\\
&\xlongequal{T^{-1}=T^T} T^{-1}J(T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})
\end{aligned}
$$

令 $F(\boldsymbol{x})=T^{-1}(J^{-1}T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=T^{-1}J^{-1}T\boldsymbol{x}-T^{-1}\boldsymbol{a}$，于是 $F[(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})'(\boldsymbol{x})]=I$，则 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵在 $\boldsymbol{x}$ 处可逆，逆变换为 F，由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性可知 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}$ 在 $\varphi_{\mathcal{A}'}(U)$ 上逐点可逆. □

题目 2. 3.4 练习 4. 证明**命题 3.2**：设 U 为 $\mathscr{A}^n$ 中的开区域，带有广义坐标系 $\{U,\varphi_U\}$，则：

(1) U 中的开子集在 φ_U 下的像是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集. 反之，$\mathbb{R}^n$ 中的开子集在 φ_U 下的原像是 U 中的开子集.

(2) 设 f 为 U 上定义的标量场，则 f 连续等价于 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 是 $\varphi_U(U)$ 上的连续函数.

证明. (1) 由于

$$
\begin{aligned}
\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}:\mathbb{R}^n &\to\mathbb{R}^n\\
\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n) &\mapsto(y^1(\boldsymbol{x}),\cdots,y^n(\boldsymbol{x}))
\end{aligned}
$$

于是 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 对应的 Jacobi 矩阵为 $J=(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})'=[\partial_jy^i(x^1,\cdots,x^n)]_{ij}$，下证多元函数可微可推出连续：$\forall\varphi_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\in U,\ \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$，由 J 的连续性和多元函数微分的定义可知：

$$
|\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x})|=\left||\boldsymbol{h}|\frac{\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x})-J\boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|}+J\boldsymbol{h}\right|\to0,\ (\boldsymbol{h}\to0)
$$

由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性可知 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 在 U 上连续.

由于 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵可逆，等价于，逆映射 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵可逆，所以 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1}$ 连续可微. 设 V 为 U 中的开集，由于 $\varphi_U(V)=(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(\varphi_{\mathcal{A}}(V))$，且 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 是同胚映射，则 $\varphi_{\mathcal{A}}(V)$ 是开集，$(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1})^{-1}$ 将开集映射为开集，所以 $\varphi(V)$ 是开集，于是 φ_U^{-1} 连续.

由于 φ_U^{-1} 连续，又由广义坐标系性质可知 φ_U 可逆，于是 φ_U 连续，所以 φ_U^{-1} 将开集映射为开集. 综上，φ_U 是同胚映射.

(2) 设 W 为 $\varphi_U(U)$ 上的开子集.

"$\Rightarrow$" 由于 $(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)=\varphi_U(f^{-1}(W))$，由于 f 连续，则 $f^{-1}(W)$ 为开集，又由于 φ_U 为同胚映射，所以 $\varphi_U(f^{-1}(W))$ 为开集，所以 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 连续.

"$\Leftarrow$" 由于 $\varphi_U^{-1}((f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}W) = f^{-1}(W)$，由于 φ_U 为同胚映射，$(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)$ 为开集，所以 $f^{-1}(W)$ 为开集，故 f 连续.

下证明，上述命题中与 φ_U 的选取无关，任取广义坐标系 $\{U,\varphi_U'\}$，假设 $f\circ\varphi_U$ 连续，于是 $(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)$ 为开集，由于

$$(f\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(W) = (f\circ\varphi_U^{-1}\circ\varphi_U\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(W) = (\varphi_U\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)$$

由于 $(\varphi_U\circ\varphi_{U'}^{-1})$ 是同胚映射，所以 $(f\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(W)$ 为开集，故 $f\circ\varphi_{U'}^{-1}$ 连续. □

题目 3. 3.5 练习 1. 仍然考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的柱面坐标系，

$$x^1 = r\cos\theta,\ x^2 = r\sin\theta,\ x^3 = z$$

其中，$r>0,\theta\in(0,2\pi),z\in\mathbb{R}$，计算柱面坐标系的自然标架场（在 R^3 的自然坐标系 $\mathcal{A}=\{O=(0,0,0),\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)\}$ 上表出）

解答. 由于

$$T = \begin{bmatrix}\frac{\partial x^i}{\partial r} & \frac{\partial x^i}{\partial\theta} & \frac{\partial x^i}{\partial z}\end{bmatrix}_{i=1}^3 = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

又由自然标架 $(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)$ 的定义可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1\\ \boldsymbol{\sigma}_2\\ \boldsymbol{\sigma}_3\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - r\sin\theta\boldsymbol{e}_2\\ \sin\theta\boldsymbol{e}_1 + r\cos\theta\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_1 = (\cos\theta,-r\sin\theta,0),\\ \boldsymbol{\sigma}_2 = (\sin\theta, r\cos\theta, 0),\\ \boldsymbol{\sigma}_3 = (0,0,1)\end{cases}$$

题目 4. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的球坐标系：

$$x^1 = r\cos\theta\sin\phi,\ x^2 = r\sin\theta\sin\phi,\ x^3 = r\cos\theta$$

计算该坐标系的自然标架（在 $\mathbb{R}^3$ 的自然坐标系 $\mathcal{A}=\{O=(0,0,0),\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)\}$ 上表出）

解答. 由于

$$T = \begin{bmatrix}\frac{\partial x^i}{\partial r} & \frac{\partial x^i}{\partial\theta} & \frac{\partial x^i}{\partial z}\end{bmatrix}_{i=1}^3 = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi\\ -r\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

又由自然标架 $(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)$ 的定义可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1\\ \boldsymbol{\sigma}_2\\ \boldsymbol{\sigma}_3\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_1 + r\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_3\\ r\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_2 + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_3\\ -r\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_1 = (-r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi)\\ \boldsymbol{\sigma}_2 = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi),\\ \boldsymbol{\sigma}_3 = (-r\sin\theta, 0, \cos\theta)\end{cases}$$

题目 5. 3.6 练习 1. 证明引理 3.7

解答. 设 V 是 $A \in \mathscr{A}$ 的一个邻域，$\mathcal{A} = \{O, \boldsymbol{e}_i\}$ 是一个仿射坐标系，$A = v^i \boldsymbol{e}_i$，于是

(1). 局部性，若在邻域 V 上有 $f_{\mathcal{A}} = g_{\mathcal{A}}$，于是 $\nabla f_{\mathcal{A}} = \nabla g_{\mathcal{A}}$，所以

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(A) = \left.\frac{\partial f_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i = \nabla f_{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{v} = \nabla g_{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{v} = \left.\frac{\partial g_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i = \partial_{\boldsymbol{v}} g(A)$$

(2). 线性性，由 $f_{\mathcal{A}}$ 和 $g_{\mathcal{A}}$ 的线性性可知

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{v}}(\alpha f + \beta g)(A) &= \left.\frac{\partial(\alpha f + \beta g)_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i = \left.\frac{\alpha \partial f_{\mathcal{A}} + \beta \partial g_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i \\ &= \alpha \left.\frac{f_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i + \beta \left.\frac{g_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i = \alpha \partial_{\boldsymbol{v}} f(A) + \beta \partial_{\boldsymbol{v}} g(A)\end{aligned}$$

(3). Leibniz 公式，由 $\partial(fg)_{\mathcal{A}} = f_{\mathcal{A}} \partial g_{\mathcal{A}} + g_{\mathcal{A}} \partial f_{\mathcal{A}}$ 可知

$$\partial_{\boldsymbol{v}}(fg)(A) = \left.\frac{\partial_{\boldsymbol{v}}(fg)_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i = \left.\frac{f_{\mathcal{A}} \partial g_{\mathcal{A}} + g_{\mathcal{A}} \partial f_{\mathcal{A}}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_{\mathcal{A}}} v^i = f(A) \partial_{\boldsymbol{v}} g(A) + g(A) \partial_{\boldsymbol{v}} f(A)$$

题目 6. 3.7 练习 2. 设 D 是 $A \in \mathscr{A}^n$ 上的导算子，f 为定义在 A 的一个邻域上的可微函数，并且在 A 的某个邻域 U 上为常数. 求证 $Df = 0$.

解答. 由导算子的 Leibniz 公式 $D(fg) = f(A)Dg + g(A)Df$ 可知，只需令 $f = g = 1$，于是 $D1 = D1 + D1 \Rightarrow D1 = 0$，又由于导算子具有线性性，所以 $DC = 0$，由于 f 在 U 的邻域上是常数，不妨令 $f = C$，于是 $Df = DC = 0$.