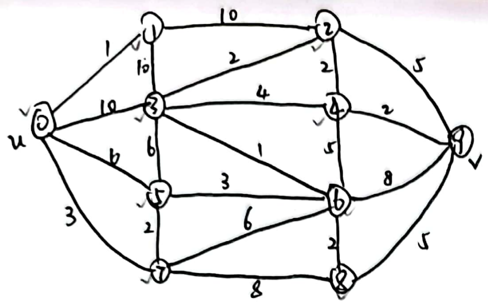
日期	科目	姓名，学号
2021 年 12 月 9 日	离散数学	吴天阳 2204210460

习题八

16. 解答. 如图所示:

~~st dis 0 1 2 3 4~~



st	dis	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1		10		6		3		
1				11							
7							5	9		11	
5								8			
6					9	13				10	16
3				11		13					
8											15
2						13					
4											15

综上．从u到v的最短路径长度为15．最短路径有如下4条：(u,7,5,6,8,v)
(u,7,5,6,4,v)
(u,7,5,6,3,4,v)
(u,7,5,6,3,2,4,v)

20.

证明. 由于图中奇结点的个数一定为偶数个, 设一个连通图中奇结点个数为 $n = 2k > 0$,使用以下方法将 G 中的边划分为多条不交的简单路，考虑以下两种情况：

1. 如果该图 G_i 中 $k = 1$，则存在 $Euler$ 路 C_i 使得 $E(C_i) = E(G_i)$。

2. 如果该图 G_i 中 $k \geqslant 2$，则任取图中两个在同一个连通图中的奇结点分别记为 u, v，由 G_i 的连通性知，至少存在一条以 u, v 作为起终结点的路径 C_i，将 G_i 中所有 C_i 中的边去掉变为 G_{i+1}，则 G_{i+1} 中的奇结点个数为 $2(k-1)$，因为去掉 C_i 中的边，只会导致 u, v 的度数减一（奇偶性改变，均变为偶结点），其他中间结点的度数减二（奇偶性不变）。

如果连通图 G 的奇结点个数为 $2k$，若 k 大于 1，可通过方法 2 减少奇结点的个数，最终化为方法 1，则至多减去 k 条路径，分别记为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，由于

$$
\begin{aligned}
&G = G_1 \\
&E(G_i) = E(G_{i+1}) \cup E(C_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, k-1) \\
&E(G_k) = E(C_k)
\end{aligned}
$$

又由于每次路径中的边都被去掉，所以所选的路径的边互不相交，且

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(C_i)$$

□