| 日期 | 科目 | 姓名，学号 |
|---|---|---|
| 2022 年 3 月 13 日 | 最优化方法 | 吴天阳 2204210460 |

---

**4.** (1) 证明有限个凸集的交集仍然是凸集。

(2) 设 $D_1 = \{x : x_1 + x_2 \leqslant 1, x_1 \geqslant 0\}, D_2 = \{x : x_1 - x_2 \geqslant 0, x_1 \leqslant 0\}$。令 $D = D_1 \cup D_2$。证明 $D_1, D_2$ 均为凸集，但 $D$ 却不是凸的，由此得出凸集的并集未必是凸集。

证明. (1) 设 $n \in \mathbb{N}$，集合类 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$，其中 $D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均为凸集，下面利用数学归纳法证明命题：$\bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i$ 为凸集。

当 $n = 1$ 时，命题显然成立。

假设命题在 $n$ 时成立，下面讨论 $n + 1$ 的情况。

$\forall x, y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} D_i, \lambda \in [0, 1]$，由归纳假设知，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i$ 为凸集，则

$$\begin{aligned}
&\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i=1}^{n} D_i \text{ 且 } \lambda x + (1-\lambda)y \in D_{n+1}\\
\Rightarrow\ &\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i=1}^{n+1} D_i\\
\Rightarrow\ &\bigcap_{i=1}^{n+1} D_i \text{ 为凸集}
\end{aligned}$$

由数学归纳法知，对 $n \in \mathbb{N}$ 该命题成立。

(2) $\forall x, y \in D_1, \lambda \in [0, 1]$，记 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$，则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0 \\ y_1 + y_2 \leqslant 1,\ y_1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{且 } \lambda x + (1-\lambda)y = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 + \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 = \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1 \\ \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in D_1$

$\Rightarrow D_1$ 为凸集

$\forall x, y \in D_2, \lambda \in [0, 1]$，记 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$，则

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1,\ x_1 \leqslant 0 \\ y_1 - y_2 \geqslant 1,\ y_1 \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{且 } \lambda x + (1-\lambda)y = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)$$

所以

$$\begin{cases}\lambda x_1+(1-\lambda)y_1-(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)=\lambda(x_1-x_2)+(1-\lambda)(y_1-y_2)\geqslant 0\\ \lambda x_1+(1-\lambda)y_1\leqslant 0\end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\in D_2$

$\Rightarrow D_2$ 为凸集

取 $x=(0,-1)\in D_1, y=(-1,-1)\in D_2, \lambda=\dfrac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}&z=\lambda x+(1-\lambda)y=(-\frac{1}{2},-1)\\ \Rightarrow\ & z\notin D_1 \text{ 且 } z\notin D_2\\ \Rightarrow\ & z\notin D\\ \Rightarrow\ & D \text{ 不是凸集}\end{aligned}$$

□

**6.** 设 $f(x)$ 为定义在凸集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的凸函数，$\alpha$ 为一个给定的实数，称集合

$$\mathcal{T}=\{x:f(x)\leqslant\alpha\}$$

为函数 $f(x)$ 关于实数 $\alpha$ 的水平集，证明对任意实数 $\alpha$，集合 $\mathcal{T}$ 是凸集。

*证明.* $\forall x,y\in\mathcal{T},\lambda\in[0,1]$，由 $f$ 的凸性知，

$$\begin{aligned}&f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\leqslant\lambda\alpha+(1-\lambda)\alpha=\alpha\\ \Rightarrow\ &\lambda x+(1-\lambda)y\in\mathcal{T}\\ \Rightarrow\ &\mathcal{T} \text{ 为凸集}\end{aligned}$$

□

**14.** 求出函数

$$f(x)=2x_1^3-3x_1^2-6x_1x_2(x_1-x_2-1)$$

的所有稳定点，其中哪一个点是极小值点？哪一个点是极大值点？有没有既不是极大又不是极小的点？

**解答.** $\nabla f = 6((x_1-x_2)(x_1-x_2-1), x_1(-x_1+2x_2+1))^T$，稳定点为所有 $\nabla f = \mathbf{0}$ 的点，即

$$\begin{cases}(x_1-x_2)(x_1-x_2-1)=0\\ x_1(-x_1+2x_2+1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-1\end{cases} \text{或} \begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x_1=0\\ x_2=-1\end{cases}$$

由于

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}2x_1-2x_2-1 & -2x_1+2x_2+1\\ -2x_1+2x_2+1 & 2x_1\end{bmatrix}$$

令 $x^*$ 为稳定点，当 $x^*=(0,0)$ 时，$\nabla^2 f(x^*) = 6\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 为负定矩阵，则 $x^*$ 为极大值点。

当 $x^*=(-1,-1)$ 时，$\nabla^2 f(x^*) = 6\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ 为不定矩阵，则 $x^*$ 既不是极大值又不是极小值。

当 $x^*=(1,0)$ 时，$\nabla^2 f(x^*) = 6\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ 为正定矩阵，则 $x^*$ 为极小值点。

当 $x^*=(0,-1)$ 时，$\nabla^2 f(x^*) = 6\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 为不定矩阵，则 $x^*$ 既不是极大值又不是极小值。

**15.** 确定线性函数 $f(x)=2x_1-x_2+3x_3$ 的所有下降方向。请问这样的下降方向是否同所在点的位置有关？

**解答.** $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3$，设 $s\in\mathbb{R}^3, \alpha>0$，$s$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的下降方向，$\alpha$ 为充分小量，由带 Lagrange 余项的 Taylor 展式，知

$$\begin{aligned}&f(x+\alpha s) = f(x) + \alpha\nabla f(\xi)^T s\\ \Rightarrow\ &\alpha\nabla f(\xi)^T s = f(x+\alpha s) - f(x) < 0\\ \Rightarrow\ &\nabla f(\xi)^T s < 0\end{aligned}$$

其中 $\xi = x_0 + \lambda\alpha s$。当 $\alpha\to 0^+$ 时，$\xi \to x_0$，由 $\nabla f$ 的连续性知，$f(\xi)\to f(x_0)$，则 $\nabla f(x_0)^T s < 0$，故

$$\mathcal{D}(x_0) = \{s : \nabla f(x_0)^T s < 0\} = \{s : (2,-1,3)^T s < 0\}$$

由 $x_0$ 的任意性知，下降方向与所在点的位置无关。