日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 9 日	数学建模	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第二次作业

题目 1. 医生给病人开处方时必须注明两点: 服药的剂量和服药的时间间隔. 超剂量的药品会对身体产生严重不良后果, 甚至死亡, 而剂量不足, 则不能达到治病的目的. 已知患者服药后, 随时间推移, 药品在体内**逐渐被吸收**, 发生生化反应, 也就是体内药品的浓度逐渐降低. **药品浓度降低的速率与体内当时药品的浓度成正比**. 当服药量为 A、**服药间隔**为 T, 试分析体内药的浓度随时间的变化规律.

解答. 设机体体积为 V，药品分解系数为 k_1，机体吸收系数为 k_2，考虑第 n 次服药到 $n+1$ 次服药时间段内药量的变化，即 $(n-1)T\leqslant t<nT$，令 $y_n(t)$, $t\in[0,T]$ 表示第 n 个时间段内药物未分解的量（残量）; $x_n(t)$, $t\in[0,T]$ 为第 n 个时间段内已分解的药物量（分解但未被机体吸收），则有以下方程成立

$$\begin{cases}y_n'=-k_1y_n,\\ y_n(0)=y_{n-1}(T)+A.\end{cases}\qquad\begin{cases}x_n'=-k_2x_n+k_1y_n,\\ x_n(0)=x_{n-1}(T).\end{cases}\qquad \text{且 } x_0(T)=y_0(T)=0.$$

解得当 $n=1$ 时

$$y_1=A\mathrm{e}^{-k_1t},\quad x_1=\frac{k_1A}{k_2-k_1}(\mathrm{e}^{-k_1t}-\mathrm{e}^{-k_2t}),$$

当 $n\geqslant 2$ 时

$$y_n=y_{n-1}(T)\mathrm{e}^{-k_1t}+A\mathrm{e}^{-k_1t},\quad x_n=\frac{k_1(y_{n-1}(T)+A)}{k_2-k_1}(\mathrm{e}^{-k_1t}-\mathrm{e}^{-k_2t})+x_{n-1}(T)\mathrm{e}^{-k_2t}.$$

通过迭代表达式易求 y_n 的显示表达式

$$y_n=\frac{A\mathrm{e}^{k_1(T-t)}(1-\mathrm{e}^{-nk_1T})}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}.$$

且可以发现当 $n\to\infty$ 时 y_n 收敛，记 $y_n\to y$，则 $y(t)=\dfrac{A\mathrm{e}^{k_1(T-t)}}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}$ 且单调递减，则有 $y(0)=\dfrac{A\mathrm{e}^{k_1T}}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}$, $y(T)=\dfrac{A}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}$，所以最终药物残量维持在 $\left[\dfrac{A}{\mathrm{e}^{k_1T}-1},\dfrac{A\mathrm{e}^{k_1T}}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}\right]$.

而 x_n 显示表达式较难求解，我们考虑求解 $n\to\infty$ 时的解. 假设 x_n 收敛于 x，由递推式可知

$$x(t)=\frac{k_1}{k_2-k_1}(y(T)+A)(\mathrm{e}^{-k_1t}-\mathrm{e}^{-k_2t})+x(T)\mathrm{e}^{-k_2t},\tag{1}$$

取 $t=T$ 可得

$$\begin{aligned}x(T)&=\frac{k_1}{k_2-k_1}(y(T)+A)(\mathrm{e}^{-k_1T}-\mathrm{e}^{-k_2T})+x(T)\mathrm{e}^{-k_2T}\\ \Rightarrow x(T)&=\frac{k_1}{k_2-k_1}\frac{A(\mathrm{e}^{k_2T}-\mathrm{e}^{k_1T})}{(\mathrm{e}^{k_1T}-1)(\mathrm{e}^{k_2T}-1)},\end{aligned}$$

带回到 (1) 式中有

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{k_1}{k_2-k_1}\frac{A\mathrm{e}^{k_1T}}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}(\mathrm{e}^{-k_1t}-\mathrm{e}^{-k_2t})+\frac{k_1}{k_2-k_1}\frac{A(\mathrm{e}^{k_2T}-\mathrm{e}^{k_1T})}{(\mathrm{e}^{k_1T}-1)(\mathrm{e}^{k_2T}-1)}\mathrm{e}^{-k_2t}\\
&= \frac{k_1A}{k_2-k_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{k_1(T-t)}}{\mathrm{e}^{k_1T}-1}-\frac{\mathrm{e}^{k_2(T-t)}}{\mathrm{e}^{k_2T}-1}\right).
\end{aligned}
$$

则 $x(0)=\dfrac{k_1}{k_2-k_1}\dfrac{A(\mathrm{e}^{k_2T}-\mathrm{e}^{k_1T})}{(\mathrm{e}^{k_1T}-1)(\mathrm{e}^{k_2T}-1)}=x(T)$，所以当时间充分长时，每两次服药时，机体内药物浓度相同.

下面求解 $x(t)$ 的最大值，先求最值点

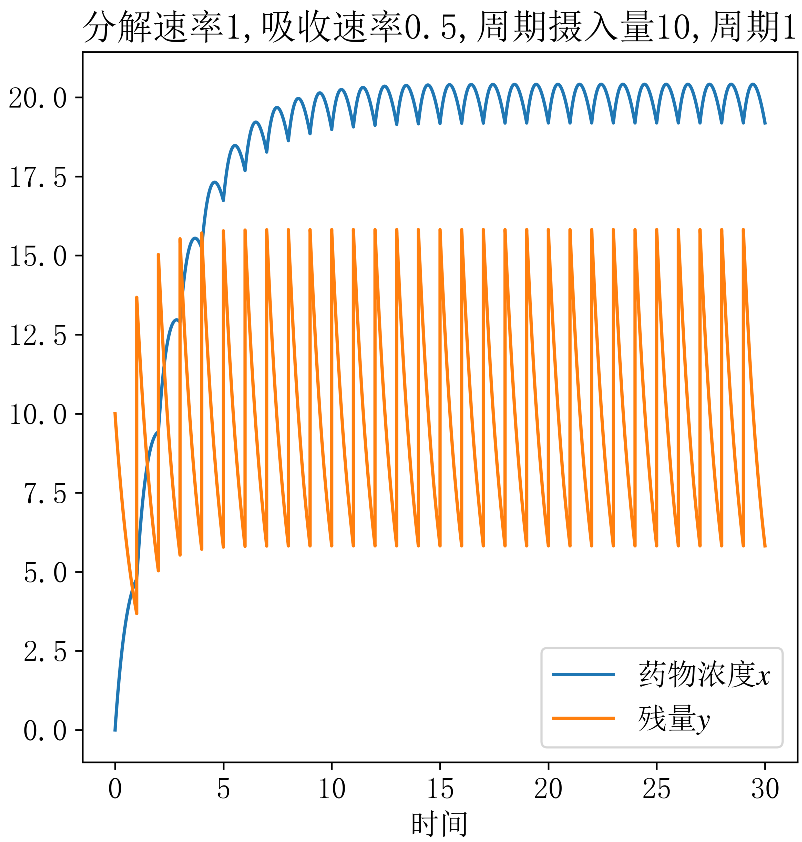
$$
x'(t_0)=0\Rightarrow t_0=T-\frac{1}{k_2-k_1}\log\frac{k_1(\mathrm{e}^{k_2T}-1)}{k_2(\mathrm{e}^{k_1T}-1)},
$$

于是最大值为

$$
x(t_0)=\frac{k_1A}{k_2-k_1}\left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{k_2-k_1}}-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_2}{k_2-k_1}}\right)\frac{(\mathrm{e}^{k_2T}-1)^{\frac{k_1}{k_2-k_1}}}{(\mathrm{e}^{k_1T}-1)^{\frac{k_2}{k_2-k_1}}}.
$$

所以 $\forall k_1,k_2,T,A$，机体内的药物浓度都具有上界，而不是无限增长的.

下面用程序对上述估计结果进行验证，取 $k1=1,k2=0.5,A=10,T=1$，服用 30 个周期，得到如下结果



实际值：$x(0)=19.190338082418194,y(0)=5.8197670686927,x_{max}=20.414854591829517$

估计值：$x(0)=19.190347513349437,y(0)=5.8197670686933,x_{max}=20.414940825367978.$