日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 4 月 11 日	实变函数	强基数学 002	吴天阳	2204210460	59

习题 2.2

2. 设 $\mathbf{P}'$ 为直线上的开区间全体，作 $\mathbf{P}'$ 上的集函数 m' 如下：$m'((\alpha,\beta))=\beta-\alpha$，证明 m' 必可唯一地延拓成 $\mathbf{R}(\mathbf{P}')$ 上的测度。

解答. 由题可知 $\mathbf{P}=\{(a,b):-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty\}$，则对于 $\forall-\infty<a\leqslant b<+\infty$，有

$$(-\infty,+\infty)-(-\infty,a)=[a,+\infty)\in\mathbf{R}(\mathbf{P}')$$
$$(-\infty,+\infty)-(b,+\infty)=(-\infty,b]\in\mathbf{R}(\mathbf{P}')$$
$$[a,+\infty)\cap(-\infty,b]=[a,b]\in\mathbf{R}(\mathbf{P}')$$

则 $\mathbf{R}(\mathbf{P}')$ 包含直线上一切区间和单点，对任意的 $E\in\mathbf{R}(\mathbf{P}')$，可以分解为不交的开区间和单点的并集，即

$$E=\left(\bigcup_{i=1}^n(a_i,b_i)\right)\cup\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$$

令 m' 在 $\mathbf{R}(\mathbf{P}')$ 上的测度为

$$m'(E)=\sum_{i=1}^m((a_i,b_i))+\sum_{j=1}^m m'(\{c_j\})$$

下证 m' 在单点的测度为 0，才能使得 $m'(E)$ 具有唯一性，对于 (a,b) 上的任意的分解，将分解的开区间端点从小到大排序

$$a=a_1<b_1=a_2<b_2=\cdots=a_m<b_m=b$$

则 $b-a=m'((a,b))=\sum_{i=1}^m(b_i-a_i)+\sum_{j=1}^m m'(\{c_j\})=b-a+\sum_{j=1}^m m'(\{c_j\})$，则 $m'(\{c_j\})=0$，由于单点可以任意添加在区间 (a,b) 中，且 a,b 具有任意性，则 $\forall x\in\mathbb{R},m'(x)=0$，且可以类比于 m 是 $\mathbf{R}_0$ 上的测度，证明 m' 在 $\mathbf{R}(\mathbf{P}')$ 上是单值的，则 m' 具有唯一性，再类比地证明 m' 在 $\mathbf{R}(\mathbf{P}')$ 上是可列可加的，即可证明 m' 是 $\mathbf{R}(\mathbf{P}')$ 上的测度。

4. 设 μ 是直线上环 $\mathbf{R}_0$ 上的测度。证明：存在单调增加右连续的函数 $g(x)$，使得 $\mu(E)=\mu_g(E)(e\in\mathbf{R}_0)$ 的充要条件是对一切 $(a,b]\in\mathbf{P},\mu((a,b])<\infty$.（此即说明：对 $\mathbf{P}$ 中每个集都有限的 $\mathbf{R}_0$ 上测度必是 g 测度）

证明. "$\Rightarrow$"：反设 $\exists(a,b]\in\mathbf{P}$，使得 $\mu((a,b])=\infty$，则 $\mu_g((a,b])=g(b)-g(a)=\infty$，所以 $g(b)=\infty$，则 g 函数在 b 处发散到 ∞，与 $g(b)$ 处右连续矛盾。

“$\Leftarrow$”：令 $g(x)=\mu(-\infty,x]$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，使得 $\forall y\in(x,x+\delta)$，有 $g(y)-g(x)\leqslant\mu((x,x+\delta])=\delta=\varepsilon$，则 g 函数在 x 处右连续。

由 μ 具有非负性，则 $\forall y>x$，由 $g(y)-g(x)=\mu((x,y])>0$，则 $g(y)>g(x)$，所以 g 函数单调增加。 □

6. 设 $\{\mu_n\}$ 是环 $\mathbf{R}$ 上一列测度，并且对一切 $E\in\mathbf{R}$，以及任何自然数 n，都有 $\mu_n(E)\leqslant 1$. 证明

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\quad(E\in\mathbf{R}),$$

也是 $\mathbf{R}$ 上测度，并且满足 $\mu(E)\leqslant 1$，$(E\in\mathbf{R})$。

证明. 令 $E=\varnothing$，则 $\mu_n(\varnothing)=0\ (n\geqslant 1)$，所以 $\mu(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(\varnothing)=0$。

由非负性可知 $E\in\mathbf{R}$，有 $\mu_n(E)\geqslant 0$，所以 $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\geqslant 0$。

令 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，$E_i$ 互不相交，则 $\mu(E_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_i)$，由 μ_n 的可列可加性有，$\mu_n(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(E_i)$，则

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_i)\xlongequal[\text{可交换求和顺序}]{\text{正项级数}}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

由于 $\mu_n(E)\leqslant 1$，所以 $\mu(E)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$，则 $\mu(E)\leqslant 1$。 □

9. 设 $\mathbf{R}_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是集 X 上一列环，并且 $\mathbf{R}_1\subset\mathbf{R}_2\subset\cdots\subset\mathbf{R}_n\subset\cdots$. 又设 μ_n 是 $\mathbf{R}_n$ 上的测度，并且对任何 $E\in\mathbf{R}_n$，当 $m\geqslant n$ 时，$\mu_m(E)=\mu_n(E)$（通常称为 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\mathbf{R}_n\}$ 上是**符合**的）。证明 (i) $\mathbf{R}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{R}_n$ 是 X 上的环。(ii) 定义 $\mathbf{R}$ 上函数 μ：对每个 $E\in\mathbf{R}$，必存在某个 n，$E\in\mathbf{R}_n$，规定 $\mu(E)=\mu_n(E)$，证明 μ 是 $\mathbf{R}$ 上非负、空集上取值为 0 的有限可加集函数（μ 未必是 $\mathbf{R}$ 上测度，参见下面习题 10）

证明. (i) 由于 $\{\mathbf{R}_n\}$ 是单增的，所以 $\mathbf{R}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{R}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{R}_n$，由于 R_n 均为环，所以 $\mathbf{R}$ 也是环。

(ii) $\forall E\in\mathbf{R}$，$\exists n$ 使得 $E\in\mathbf{R}_n$，则 $\mu(E)=\mu_n(E)\geqslant 0$，由于 $\varnothing\in\mathbf{R}_1$，则 $\mu(\varnothing)=\mu_1(\varnothing)=0$，对于任意有限长的集列 $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$，令 $E_i\in\mathbf{R}_{n_i}$，取 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{n_i\}$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\mu_M\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu_M(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

所以 μ 具有有限可加性。 □

10. 设 $X=\{x:x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),x_n=\frac{j}{n^2}(j=0,1,2,\cdots,n^2),\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\frac{1}{2}}<\infty\}$，对每个自然数 n，$x\in X$，令 $\widetilde{x}_n=\{y:y\in X,y_1=x_1,\cdots,y_n=x_n\}$（即 $\widetilde{x}_n$ 是 X 中一切前 n 个坐标与 x 相同的 y 全体所成的集），$\mathbf{R}_n$ 是由一切 $\widetilde{x}_n$ 张成的环（显然，$\mathbf{R}_n$ 是有限集）。又在 $\mathbf{R}_n$ 上作 μ_n 如下，对任何 $E\in\mathbf{R}_n$，如果 $E=\bigcup_{l=1}^{k}\widetilde{x}_n^{(l)},x_n^{(l)}\cap x_n^{(m)}=\varnothing(m\neq l)$，那么规定 $\mu_n(E)=k\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+j^2}$，再规定 $\mu_n(\varnothing)=0$。证明：

(i) $\mathbf{R}_1\subset\mathbf{R}_2\subset\cdots\subset\mathbf{R}_n\subset\cdots$，并且 $X\in\mathbf{R}_n(n=1,2,3,\cdots)$。

(ii) μ_n 是 $\mathbf{R}_n$ 上测度，$\mu_n(X)=1$ 并且 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\mathbf{R}_n\}$ 上是符合的（见习题 9）。

(iii) 对每个自然数 n，令 $E_n=\{x:x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots),0<x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n\}$，那么 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$，$\mu(E_n)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+j^2}\right)$，$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)\neq 0$，但是 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$。

证明. (i) $\forall 1\leqslant n\leqslant m$，有 $\widetilde{x}_n=\bigcup\{\widetilde{y}_m:y\in X,y_1=x_1,\cdots,y_n=x_n\}$，则 $\widetilde{x}_n\in\mathbf{R}_m$，由 n,m 的任意性可知

$$R_1\subset R-2\subset\cdots\subset\mathbf{R}_n\subset\cdots$$

令 $x^{(0)}=(0,x_2,x_3,\cdots)$，$x^{(1)}=(1,x_2,x_3,\cdots)$，则 $X=\widetilde{x}_1^{(0)}\cup\widetilde{x}_1^{(1)}$，所以 $X\in\mathbf{R}_1$，则 $X\in\mathbf{R}_n$ $(n=1,2,\cdots)$。

(ii) 根据 μ_n 的定义可知，μ_n 具有非负性，且空集取值为零，由于 $\mathbf{R}_n$ 为有限集，所以只需证明可列可加性，令 $E=\bigcup_{l=1}^{k}\widetilde{x}_n^{(l)}\in\mathbf{R}_n,x_n^{(l)}\cap x_n^{(m)}=\varnothing(m\neq l)$，则

$$\mu_n(E)=\mu_n\left(\bigcup_{l=1}^{k}\widetilde{x}_n^{(l)}\right)=k\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+j^2}=\sum_{l=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+j^2}=\sum_{l=1}^{k}\mu_n(\{\widetilde{x}_n^{(l)}\})$$

下证 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\mathbf{R}_n\}$ 上是符合的，设 $E=\bigcup_{l=1}^{k}\widetilde{x}_n^{(l)}\in\mathbf{R}_n$，$\forall 1\leqslant n\leqslant m$，由于

$$\widetilde{x}_n=\bigcup\{\widetilde{y}_m:y\in X,y_1=x_1,\cdots,y_n=x_n\}=\bigcup_{l=1}^{M}\widetilde{y}_m^{(l)}$$

其中 $M=\prod_{i=n+1}^{m}(i^2+1)$，是由于 y 的 $y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_m$ 具有任意性，总共有 M 中选择，则

$$\mu_m(E)=k\cdot M\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1+j^2}=k\cdot\prod_{i=n+1}^{m}(i^2+1)\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1+j^2}=k\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+j^2}=\mu_n(E)$$

所以 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\mathbf{R}_n\}$ 上是符合的，由 (i) 可知 $X=\widetilde{x}_1^{(0)}\cup\widetilde{x}_1^{(1)}$，所以 $\mu_1(X)=2\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+j^2}=1$，由于 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\mathbf{R}_n\}$ 上是符合的，所以 $\mu_n(X)=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$。

(iii) 由于 $E_n = \{x : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots), 0 < x_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, n\} = \bigcup_{l=1}^{M} x_n^{(l)}$，其中 $M = \prod_{i=1}^{n} i^2$，则

$$\mu(E_n) = \mu_n(E_n) = M \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+j^2} = \prod_{i=1}^{n} i^2 \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+j^2} = \prod_{j=1}^{n} \frac{j^2}{1+j^2} = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+j^2}\right)$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+j^2}\right) \neq 0$，由于

$$\begin{aligned} E_n &= \{x : (x_1, \cdots, x_n, \cdots), 0 < x_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, n\} \\ &= \left\{ x : (x_1, \cdots, x_n, \cdots), x_n = \frac{j}{n^2}\ (j = 1, 2, \cdots, n^2),\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \end{aligned}$$

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n \neq \varnothing$，则对于充分大的 n，$\exists x \in E_n$，令 $x = (\frac{j_1}{1^2}, \cdots, \frac{j_n}{n^2}, \cdots)$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\frac{1}{2}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{j_i}}{i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ 发散,则当 $n \to \infty$ 时,$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\frac{1}{2}} \geqslant \infty$,与 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\frac{1}{2}} < \infty$ 矛盾,所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \varnothing$。

□