日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 12 月 11 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第十二次作业

题目 1. 设 X 为 B 空间，$T\in\mathfrak{C}(X)$，则 $\mathrm{Ker}(I-T)=\{\theta\}\Rightarrow R(I-T)=X$.

证明. 反设 $R(I-T)\subsetneqq X$. 则 $\exists x\in X$ 没有 $I-T$ 下的原像，断言 $R(I-T)^2\subsetneqq R(I-T)$，反设 $R(I-T)^2=R(I-T)$，由于 $(I-T)x\in R(I-T)$，则 $\exists y\in X$ 使得 $(I-T)^2y=(I-T)x\Rightarrow (I-T)\big((I-T)y-x\big)=\theta$，由于 $\mathrm{Ker}(I-T)=\{\theta\}$，则 $(I-T)y=x$ 与 x 没有 $I-T$ 下的原像矛盾，则 $R(I-T)^2\subsetneqq R(I-T)$.

依此类推，由 Riesz 引理，$\exists y_n\in R(I-T)^n$ 且 $||y_n||=1$ 使得 $\rho(y_n,R(I-T)^{n+1})>1/2$，于是 $\forall p\geqslant 1,\ n\geqslant 1$ 有

$$||Ty_{n+p}-Ty_n||=||Ty_{n+p}-y_{n+p}+y_{n+p}-y_n+y_n-Ty_n||\geqslant\rho(y_n,R(I-T)^{n+1})>1/2$$

上述第一个不等号是因为：$Ty_{n+p}-y_{n+p}=(T-I)y_{n+p}\in R(I-T)^{n+p+1}\subsetneqq R(I-T)^{n+1}$, $y_{n+p}\in R(I-T)^{n+p}\subsetneqq R(I-T)^{n+1}$, $y_n-Ty_n=(I-T)y_n\in R(I-T)^{n+1}$.

故 $\{Ty_n\}$ 没有收敛子列，与 T 是紧算子矛盾. 所以 $I-T$ 是满射. $\square$