日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 11 月 4 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第七次作业

题目 1. (2.3.1) 设 X 为 B 空间，X_0 是 X 的闭子空间. 映射 $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为 $\varphi : x \mapsto [x]$, $(\forall x \in X)$，其中 $[X]$ 表示 x 的商类. 证明 φ 是开映射.

证明. 由开映射定理可知，只需证 X/X_0 是完备的. 令 $\{[x_n]\} \subset X/X_0$ 是 Cauchy 列，则存在子列 $\{[x_{n_k}]\}$ 使得 $||[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]|| = ||[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]|| \leqslant 1/2^k$，由商空间范数定义可知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists y_k \in X_0$ 使得 $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k|| < ||[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]|| + \varepsilon \leqslant 1/2^k + \varepsilon$，则 $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k|| < 1/2^k$，于是 $\sum\limits_{k=1}^\infty ||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k|| < \sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{1}{2^k} = 1$ 绝对收敛，由于 X 是完备的，则 $\sum\limits_{k=1}^\infty x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k$ 收敛，令部分和 $\{x_{n_{k+1}} + \sum\limits_{i=1}^k y_i\}$ 收敛到 $x + y$, $x \in X, y \in X_0$，由 φ 的连续性可得 $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[x_{n_k} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} y_i\right] = [x + y] = [x] \in X/X_0$，所以 X/X_0 是商空间. □

题目 2. (2.3.2) 设 X, Y 是 B 空间，又设方程 $Ux = y$ 对 $\forall y \in Y$ 有解 $x \in X$，其中 $U \in L(X, Y)$，并且 $\exists m > 0$，使得 $||Ux|| \geqslant m||x||$, $(\forall x \in X)$，求证：U 有连续逆 U^{-1}，并且 $||U^{-1}|| \leqslant 1/m$.

证明. 由条件可知 U 是满射，假设 $\exists x_1, x_2 \in X$ 使得 $Ux_1 = Ux_2$，则 $U(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow x_1 = x_2$，于是 U 是单射，故 U 是双射.

由逆算子定理可知 $U^{-1} \in L(Y, X)$，由于 $||Ux|| \geqslant m||x||$，令 $x = U^{-1}y$ 得 $||y|| \geqslant m||U^{-1}y||$，则 $||U^{-1}y|| \leqslant ||y||/m$, $(\forall y \in Y)$，则 $||U^{-1}|| \leqslant 1/m$. □

题目 3. (2.3.3) 设 H 为 Hilbert 空间，$A \in L(H)$，且 $\exists m > 0$，使得 $|(Ax, x)| \geqslant m||x||^2$, $(\forall x \in H)$. 求证：$\exists A^{-1} \in L(H)$.

证明. 由逆算子定理知，只需证 A 为双射. 假设 $\exists y_1, y_2 \in X$ 使得 $Ay_1 = Ay_2$ 则

$$m||y_1 - y_2||^2 \leqslant |(A(y_1 - y_2), y_1 - y_2)| = |(\theta, (y_1 - y_2))| = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

故 A 是单射.

下证 $R(A) = Y$，只需证 $R(A)$ 是闭的且 $R(A)^\perp = \{\theta\}$. 设 $\{Ax_n\} \subset H$ 收敛于 $y \in H$，由于

$$m||x||^2 \leqslant |(Ax, x)| \leqslant ||Ax|| \cdot ||x|| \Rightarrow m||x|| \leqslant ||Ax||$$

于是 $||x_{n+p} - x_n|| \leqslant ||Ax_{n+p} - Ax_n|| \to 0$, $(n \to \infty, \forall p > 0)$ 则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，由于 H 完备，令其收敛于 x，由 A 的连续性可得 $Ax = y \in R(A)$，所以 A 是闭的. 令 $x_0 \in R(A)^\perp$ 则 $||x_0||^2 \leqslant ||(Ax_0, x_0)||/m = 0 \Rightarrow x_0 = \theta$ 则 $\mathbb{R}(A)^\perp = \{\theta\}$，于是 $\overline{R(A)} = R(A) = Y$. 所以 A 是满射.

综上，A 是双射. □

题目 4. (2.3.4) 设 X, Y 是 B^* 空间，D 是 X 的线性子空间，且 $A: D \to Y$ 是线性映射. 求证：

(1). 若 A 连续且 D 是闭的，则 A 是闭算子.

(2). 若 A 连续且是闭算子，则 Y 完备蕴含 D 是闭的.

(3). 若 A 是单射的闭算子，则 A^{-1} 也是闭算子.

(4). 若 X 完备，A 是单射的闭算子，$R(A)$ 在 Y 中稠密，且 A^{-1} 连续，那么 $R(A) = Y$.

证明. (1). $\forall \{x_n\} \subset D$ 满足 $x_n \to x$, $Ax_n \to y$，由于 D 是闭的可得 $x \in D$，由 A 连续性可得 $Ax_n \to Ax = y$，所以 A 是闭算子.

(2). 反设 D 是开的，则 $\exists x_0 \in X \setminus D$, $\{x_n\} \subset D$ 使得 $x_n \to x_0$，由于

$$||Ax_{n+p} - Ax_n|| \leqslant ||A|| \cdot ||x_{n+p} - x_n|| \to 0, \ (n \to \infty, \ \forall p > 0)$$

则 $\{Ax_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，令 $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$，由于 A 为闭算子，则 $x \in D$，这与 $x \in X \setminus D$ 矛盾. 故 D 是闭的.

(3). 由于 A 是单射，则 A^{-1} 有意义，$\forall \{y_n\} \subset R(A)$ 满足 $y_n \to y$, $A^{-1}y_n \to x$，由 A 是闭算子，则 $A^{-1}y_n \to A^{-1}y$, $y_n \to Ax$ 可得到 $A^{-1}y \in D$ 且 $A(A^{-1}y) = y = Ax$，于是 $y \in R(A)$ 且 $A^{-1}y \in X$.

(4). 由 (3) 可知，A^{-1} 是闭算子，由 (2) 可知 X 完备且 A^{-1} 连续，则 $R(A)$ 是闭的，又由于 $R(A)$ 在 Y 中稠密，则 $R(A) = \overline{R(A)} = Y$. □