日期	科目	姓名，学号
2021 年 12 月 25 日	近世代数	吴天阳 2204210460

习题 3.1

1. 证明：$\mathbb{Z}[x]$ 是一个整环，并且 x^2+5 是 $\mathbb{Z}[x]$ 的一个素元。

证明. 由于 $\mathbb{Z}[x]$ 为 $\mathbb{Q}[x]$ 的一个子环，则 $\mathbb{Z}[x]$ 对 $+$ 和 $\cdot$ 满足封闭性，分配律和交换律，0 为 $\mathbb{Z}[x]$ 的零元，且 $1\in\mathbb{Z}[x]$，则 $\mathbb{Z}[x]$ 有幺元，由于 $\mathbb{Q}[x]$ 没有非零的零因子，所以 $\mathbb{Z}[x]$ 中也没有非零的零因子，综上 $\mathbb{Z}[x]$ 是一个整环。

由于 x^2+5 中 $(1,5)=1$，所以 x^2+5 是本原多项式，又由于方程 $x^2+5=0$ 的根为 $x=\pm\sqrt{5}\notin\mathbb{Z}$，所以 x^2+5 是不可约多项式，对于不可约的本原多项式，任意的 $f(x),g(x)\in\mathbb{Z}(x)$，有

$$(x^2+5)|f(x)\cdot g(x)\Rightarrow(x^2+5)|f(x)或(x^2+5)|g(x)$$

所以，x^2+5 是 $\mathbb{Z}[x]$ 的一个素元。 □

8. 证明：$\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)\cong\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$。

证明. 证明该命题需要先证明如下的一个**引理**（整多项式环上首一多项式的带余除法）：

引理. 设 $f(x),m(x)\in\mathbb{Z}[x]$，其中 $m(x)$ 为首项系数为 1 的多项式且 $\deg m(x)\geqslant 1$，则存在唯一的一对 $h(x),r(x)\in\mathbb{Z}[x]$，使得

$$f(x)=h(x)m(x)+r(x)\quad \deg r(x)<\deg m(x)$$

下面对 $f(x)$ 的阶用归纳法证明该引理：

当 $\deg f(x)=0$ 时，由于 $\deg m(x)\geqslant 1$，则存在唯一的 $h(x)=0,r(x)=f(x)$，满足命题。

假设命题在 $\deg f(x)=n-1$ 时成立，则当 $\deg f(x)=n$ 时，令

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

若 $\deg m(x)>\deg f(x)$，则存在唯一的 $h(x)=0,r(x)=f(x)$，满足命题。

若 $\deg m(x)\leqslant\deg f(x)$，记 $\deg m(x)=t$，则

$$\deg\left(f(x)-a_nx^tm(x)\right)\leqslant n-1$$

由归纳假设知，存在唯一的一对 $h(x), r(x)$，使得

$$f(x) - a_n x^t m(x) = h(x)m(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < t$$
$$f(x) = (a_n x^t + h(x))m(x) + r(x)$$

满足命题。综上，该引理得证。

构造 $\mathbb{Z}[x]$ 到 C 上的一个同态 σ：

$$\sigma : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{C}$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (\sqrt{5}i)^k =: f(\sqrt{5}i)$$

σ 对 $+$ 和 $\cdot$ 保持运算，且 $\sigma(1) = 1$，所以 σ 为一个环同态。

由于

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k (\sqrt{5}i)^k : a_k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

所以 $\mathrm{Im}\ \sigma = \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$，又由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \sigma =& \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : f(\sqrt{5}i) = 0\} \\ =& \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : \sqrt{5}i \text{为} f(x) \text{的一个复根}\}\end{aligned}$$

下证 $\mathrm{Ker}\ \sigma = (x^2+5)$，假设存在 $f(x) \in \mathrm{Ker}\ \sigma$ 使得 $(x^2+5) \nmid f(x)$，有**引理**知，存在唯一的一对 $h(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$，使得

$$f(x) = (x^2+5)h(x) + r(x) \quad \deg\ r(x) < 2$$

因为 $\deg\ r(x) < 2$ 且 $r(x) \neq 0$，令 $r(x) = ax + b$，$a, b \in \mathbb{Z}$，由于

$$r(x) = f(x) - (x^2+5)h(x)$$

则 $r(\sqrt{5}i) = 0 \Rightarrow a\sqrt{5}i + b = 0 \Rightarrow i = -\dfrac{b}{a\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$ 与 $i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ 矛盾。

于是 $\forall f(x) \in \mathrm{Ker}\ \sigma$，都有 $(x^2+5) | f(x)$，则 $\mathrm{Ker}\ \sigma \subset (x^2+5)$，又因为 $\sqrt{5}i$ 为 $x^2+5=0$ 的根，所以 $x^2+5 \in \mathrm{Ker}\ \sigma \Rightarrow (x^2+5) \subset \mathrm{Ker}\ \sigma$，故 $\mathrm{Ker}\ \sigma = (x^2+\sqrt{5})$。

由环同态基本定理，知

$$\mathbb{Z}[x]/\mathrm{Ker}\ \sigma \cong \mathrm{Im}\ \sigma$$
$$\Rightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^2+5) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$$

□

习题 3.2

3. 证明：$\mathbb{Z}[x]$ 不是主理想整环。

证明. 反设 $\mathbb{Z}[x]$ 为主理想整环，则

$$a\text{为不可约元} \iff (a)\text{为极大理想} \iff \mathbb{Z}[x]/(a)\text{为域}$$

由于 $x \in \mathbb{Z}[x]$，且 x 为不可约本原多项式，所以 x 为 $\mathbb{Z}[x]$ 中的不可约元，则 $\mathbb{Z}[x]/(x)$ 为域，但

$$Z[x]/(x) = \{f(x) + (x) : f(x) \in \mathbb{Z}[x]\} = \{a + (x) : a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

则 $\mathbb{Z}[x]/(x)$ 同构于整环 $\mathbb{Z}$，与 $Z[x]/(x)$ 为域矛盾，故 $\mathbb{Z}[x]$ 不是主理想整环。 □

7. 设 m 是一个不含平方因子的整数，且 $m \neq 0, 1$。证明：$\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ 是一个域，它的元素形如 $a + b\sqrt{m}, a, b \in \mathbb{Q}$。把 $Q[\sqrt{m}]$，称它为 Q 上的一个**二次数域**。

证明. 由于 m 不含平方因子，设它的标准分解式为

$$m = p_1 p_2 \cdots p_s$$

其中 p_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 均为素数，由 Eisenstein 判别法知，素数 p_1 使得多项式 $x^2 - m$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约，且 $\sqrt{m}$ 为该多项式的一个根，所以 $x^2 - m$ 为 $\sqrt{m}$ 的极小多项式，则 $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - m) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ 是一个域，且

$$\mathbb{Q}[\sqrt{m}] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - m) = \{a + bu : a, b \in \mathbb{Q}, u = x + (x^2 - m)\} \cong \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

□