日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 5 月 31 日	实变函数	强基数学 002	吴天阳	2204210460	59

习题 3.1

2. 设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间, $E_1, \cdots, E_n$ 是有限个可测集. 证明: f 在 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ 上是可测的充要条件是 f 在每个 $E_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上是可测的. 再证上述命题对于 $\{E_i\}$ 是一列可测集也是正确的.

证明. 令 $G_i = E_i - \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} E_j$, 则 $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} G_j$. 所以 f 在 E 上可测 $\iff$ f 在 $G_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上可测 $\iff$ f 在 E_i 上可测, 类似可证明 $\{E_i\}$ 是一列可测集也是正确的. □

3. 设 $X, \boldsymbol{R}$ 是可测空间, $E \subset X$. 证明 f 是 E 上可测函数的充要条件是对一切有理数 r, $E(f \geqslant r)$ 是可测集.

证明. f 为 E 上的可测函数 $\iff$ 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$, $E(f \geqslant c)$ 为可测集 $\iff$ $E(f \geqslant c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant \dfrac{[nc]}{n}\right) \in \boldsymbol{R}$. □

4. 设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间, $E \subset X$, f 是 E 上有界可测函数. 证明必存在可测集的特征函数线性组合形式的函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f, 并且 $|f_n(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in E} |f(x)| (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

证明. 类似**定理** 3.1.6 证明: 构造 $f_n = \sum\limits_{j=-n^2}^{n^2-1} \dfrac{j}{n} \chi_{E_j^{(n)}}$, 其中 $E_j^{(n)} = E\left(\dfrac{j}{n} \leqslant f < \dfrac{j+1}{n}\right)$. 令 $M = \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$, 则当 $n > M$ 时, $\forall x \in E$, 总有 $j(x) \in [-n^2, n^2 - 1]$ 使得

$$f_n(x) = \frac{j(x)}{n} \leqslant f(x) < \frac{j(x)+1}{n},$$

于是 $f_n(x) \leqslant \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$, 即 $x \in E_{j(x)}^{(n)}$, 由 f_n 构造法知, $f_n(x) = \dfrac{j(x)}{n}$, 则当 $n \to \infty$ 时, 有

$$|f(x) - f_n(x)| < \left| f(x) - \frac{j(x)}{n} \right| < \frac{1}{n} \to 0 \qquad (\forall x \in E).$$

□

6. 设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间, $E \subset X)$, f 是 E 上可测函数. 又设 h 是直线上 Borel 可测函数, 证明 $h(f)$ 是 E 上可测函数.

证明. 设 $a<b$, 则

$$f^{-1}((a,b))=\{x\in E:a<f(x)<b\}=\{x\in E:f(x)>a\}\cap\{x\in E:f(x)<b\}\in\boldsymbol{R}.$$

设 $\{(a_i,b_i)\}$ 为一列开集族, $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$, 则

$$f^{-1}(G)=f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(a_i,b_i)\in\boldsymbol{R},$$

设 $F=E^1-G$, 则

$$f^{-1}(F)=f^{-1}(E^1-G)=E-f^{-1}(G)\in\boldsymbol{R}.$$

设 $\mathcal{A}=\{A\subset E^1:f^{-1}(A)\text{可测}\}$, 则当 $A_n\in\mathcal{A}, n=1,2,\cdots$ 时

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(A_1-A_2)=f^{-1}(A_1)-f^{-1}(A_2)\in\boldsymbol{R},\\
&f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(A_i)\in\boldsymbol{R},\\
&f^{-1}(E^1)=E\in\boldsymbol{R}.
\end{aligned}$$

由于 Borel 集 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$, 于是任何 Borel 集 M, $f^{-1}(M)\in\boldsymbol{R}$. h 为 Borel 可测函数,

$$h^{-1}([c,\infty))=\{x\in\mathbb{R}:h(x)\geqslant c\}\in\mathcal{B},$$

所以

$$E(h\circ f\geqslant c)=\{x\in E:h(f(x))\geqslant c\}=(h\circ f)^{-1}([c,\infty))=f^{-1}(h^{-1}([c,\infty)))\in\boldsymbol{R}.$$

□

7. 设 $(X,\boldsymbol{R})$ 是可测函数, $E\subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上一列有限的可测函数, 并且 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛 (允许极限值是 $\pm\infty$)f. 证明 $E(f=\infty)$, $E(f=-\infty)$ 是可测集, 并且对任何实数 c, $E(f\geqslant c)$ 也是可测集.

证明. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$, 任意 $k\in\mathbb{N}$, $\exists N$ 使 $\forall n\geqslant N$, 有 $f_n>c-\dfrac{1}{k}$,

$$\begin{aligned}
&E(f\geqslant c)=E\left(\lim_{n\to\infty}f_n\geqslant c\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E(f_n\geqslant c)\in\boldsymbol{R},\\
&E(f=\infty)=\bigcap_{m=1}^{\infty}E(f\geqslant m)\in\boldsymbol{R},\\
&E(f=-\infty)=E(-f=\infty)\in\boldsymbol{R}.
\end{aligned}$$

□