CVPR 第二次作业

强基数学 002　吴天阳　2204210460

1.1　图像参数化几何变换原理

1. 平移变换（自由度为 2）

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 旋转变换（自由度为 1）

$$\boldsymbol{x}' = R_\theta \boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 欧式变化（自由度为 3）

$$\boldsymbol{x}' = [R_\theta|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. 相似变换（自由度为 4）

$$\boldsymbol{x}' = [R_\theta|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} s\cdot\cos\theta & -s\cdot\sin\theta & t_1 \\ s\cdot\sin\theta & s\cdot\cos\theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. 放射变换（自由度为 6）

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.2　前向变换与逆向变换

设变换矩阵为 T，原图像记为 $f(\cdot)$，变换后的图像记为 $g(\cdot)$，则有

$$g(T\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \qquad g(\boldsymbol{x}) = f(T^{-1}\boldsymbol{x}).$$

其中，前者为前向变换（forward warping），后者为逆向变换（inverse warping）.

前向变换中，由于 $\boldsymbol{x}$ 的参数为整数，而 $T\boldsymbol{x}$ 不一定为整数，所以填充时会出现空缺部分；而逆向变换中，计算 $T^{-1}\boldsymbol{x}$ 非整数时，可通过像素插值算法获得该像素处的近似值，可以很好解决空缺问题.

1.3 下抽样原理与内插方法原理

1.3.1 采样定理

下抽样原理即采样定理. 下面定理描述的是对一维信号进行采样的结论，可类比得到二维图像的采样结论.

定理 1.1 (Shannon-Nyquist 定理，采样定理)**.** 设采样频率为 f_s，信号中最大频率为 f_{max}，当 $f_x > 2f_{max}$ 时，采样后的信息完整保留了原始信号的信息，也即可通过采样信息复原出原始信号.（实际引用中一般取采样频率为最大频率的 $2.56 \sim 4$ 倍）

证明. 考虑对原信号做基数为 N 的离散 Fourier 级数展开，将一组 Fourier 基记为（即对复平面单位圆做 N 等分）

$$B_k(x) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi ikx}{N}} = \mathrm{e}\left(\frac{kx}{N}\right), \quad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

其中 $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi ix}$. 于是原始信号可表示为

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k B_k(x).$$

其中 c_k 可通过对原信号进行快速 Fourier 变换得到.

注：由 Euler 公式可知，$B_k(x) = \cos(\frac{2\pi kx}{N}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi kx}{N})$，所以 B_k 在原信号中对应的频率为 $\frac{k}{N}$. 由于单位圆具有对称性，$\forall 0 \leqslant k \leqslant \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$ 有 $B_{N-k} = B_{-k}$，所以 B_k 与 B_{N-k} 具有相同的频率. 这说明，如果 f 为 Fourier 级数中最大的频率，则频域图的周期为 $2f$.

假设采样周期为 P，则采样频率为 $f_s = \frac{1}{P}$，则有

$$B_{k+\frac{N}{P}}(nP) = \mathrm{e}\left(\frac{(k+\frac{N}{P})nP}{N}\right) = \mathrm{e}\left(\frac{knP}{N} + n\right) = \mathrm{e}\left(\frac{knP}{N}\right) = B_k(nP), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

上式说明，若原信号中同时存在频率为 $\frac{k}{N}$ 与 $\frac{k}{N} + \frac{1}{P}$ 的信号，则它们会在 $P, 2P, \cdots, nP$ 处取值相同，则无法通过采样信息将这两种频率的区分开，所以只需保证这两种频率的信号不同时出现在原信号中即可.

设 f_{max} 为原信号中的最大频率，且能通过 Fourier 级数表出，由上述的注释可知，频域的周期为 $2f_{max}$，所以

$$\frac{k}{N} + \frac{1}{P} - \frac{k}{N} > 2f_{max} \Rightarrow f_s > 2f_{max}.$$

□

1.3.2 内插方法原理

内插方法：设原图像大小为 $N\times M$，记为 $f(x,y)$, $x\in[1,N], y\in[1,M]$，考虑二维平面中非整数点 (x^*,y^*)，一种求解 $f(x^*,y^*)$ 的方法.（也即将 f 延拓到 $\mathbb{R}^2$ 中）

近邻插值：使用原图中距离 (x^*,y^*) 最近的像素进行代换. 记

$$(x_0,y_0)=\mathop{\arg\min}_{(x,y)\in[1,N]\times[1,M]\cap\mathbb{N}^2}||(x,y)-(x^*,y^*)||_2,$$

其中 $||\cdot||_2$ 表示 2-范数，则 $f(x^*,y^*)=f(x_0,y_0)$.

双线性插值：将 (x^*,y^*) 与周围整数点所围成的面积反比作为整数点对应像素的加权值，设 $O(x^*,y^*)$ 周围存在四个整数点 $A(x_h,y_h)$, $B(x_h,y_l)$, $C(x_l,y_l)$, $D(x_l,y_h)$，对应的面积分别为 $S_A=S(O,C)$, $S_B=S(O,D)$, $S_C=S(O,A)$, $S_D=S(O,B)$，其中 $S(O,A)$ 表示由点 O,A 所围成的面积，参考图1. 则有

$$f(x^*,y^*)=S_Af(A)+S_Bf(B)+S_Cf(C)+S_Df(D).$$

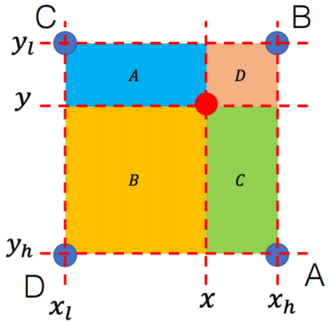

图 1: 双线性插值

1.4 几何变换实验