日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 11 月 17 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460	50

第五次作业

题目 1. (44) 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\mathrm{e}^{-(x-\theta)}I_{[\theta,\infty)}(x)$, $(\theta\in\mathbb{R}^1)$ 的随机样本.

(a). 求解一个充分统计量.

(b). 求出 θ 的 MLE.

(c). 求出 θ 的矩估计.

(d). 求解一个完备充分统计量.

(e). 求解 θ 的 UMVUE.

(f). 求出关于 θ 的 Pitman 估计量.

(g). 使用先验分布 $g(\theta)=\mathrm{e}^{-\theta}I_{(0,\infty)}(\theta)$，求出 θ 的后验 Bayes 估计量.

解答. (a). $\prod\limits_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod\limits_{i=1}^n \mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}I_{[\theta,\infty)}(x_i)=I_{(-\infty,y_1]}(\theta)\mathrm{e}^{n\theta}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^n x_i}$，则 $Y_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是一个充分统计量.

(b). 由于 $\mathcal{L}(\theta)=\prod\limits_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod\limits_{i=1}^n \mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}I_{[\theta,\infty)}(x_i)=\exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^n x_i+n\theta\right\}I_{(-\infty,y_1]}(\theta)$，其中 $Y_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$，则 MLE 为 $\hat{\theta}=Y_1$.

(c). $\mathbb{E}(\bar{X})=\mathbb{E}(X)=\int_\theta^\infty x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty (x+\theta)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(2)}{1^2}+\theta=1+\theta$，于是 θ 的矩估计为 $\tilde{\theta}=\bar{X}-1$.

(d). 下面证明 Y_1 是完备的，$f_{Y_1}=n[1-F_x(y)]^{n-1}f_x(y)=n\mathrm{e}^{-n(y-\theta)}$，令 $z(\cdot)$ 是任意实值函数，满足 $\mathbb{E}(z(Y_1))=0,\ \theta\in\mathbb{R}^1$，于是

$$\mathbb{E}(z(Y_1))=\int_\theta^\infty z(y)n\mathrm{e}^{-n(y-\theta)}\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{-\theta} z(y)\mathrm{e}^{-ny}=0$$

对 $-\theta$ 求导可得 $z(-\theta)\mathrm{e}^{n\theta}=z(-\theta)=0$，由 θ 的任意性可知 $z(\cdot)\equiv 0$，则 $P(z(Y_1)=0)=1$，所以 Y_1 是完备的，结合 (a) 可知 Y_1 是完备充分统计量.

(e). 由于 $\mathbb{E}(Y_1)=\int_\theta^\infty yn\mathrm{e}^{-n(y-\theta)}\,\mathrm{d}y=n\int_0^\infty (y+\theta)\mathrm{e}^{-ny}\,\mathrm{d}y=n\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-ny}+\theta\int_0^\infty n\mathrm{e}^{-ny}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{n}+\theta$. 于是 Y_1-1/n 是 θ 的 UMVUE.

(f). $X-\theta\sim\mathrm{e}^{-x}I_{[0,\infty)}(x)$，于是 θ 为位置参数，则 Pitman 估计量为

$$\frac{\int\theta\mathcal{L}(\theta)\,\mathrm{d}\theta}{\int\mathcal{L}(\theta)\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_{-\infty}^{y_1}\theta\mathrm{e}^{n\theta}\,\mathrm{d}\theta}{\int_{-\infty}^{y_1}\mathrm{e}^{n\theta}\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\left(\frac{y_1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\mathrm{e}^{ny_1}}{\frac{1}{n}\mathrm{e}^{ny_1}}=y_1+\frac{1}{n}$$

(g). 由于 $\mathcal{L}(\theta)=\mathrm{e}^{n\theta-\sum_{i=1}^n x_i}I_{(-\infty,y_1]}(\theta)\propto\mathrm{e}^{n\theta}I_{(-\infty,y_1]}(\theta)$ 且 $f(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\int\mathcal{L}(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{y_1}\mathrm{e}^{(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}{n-1}$, $(y_1>0)$. 则

$$f(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\frac{\mathcal{L}(\theta)g(\theta)}{\int\mathcal{L}(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta}=\frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\mathrm{e}^{(n-1)\theta}I_{(0,y_1]}(\theta).$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\theta|x_1,\cdots,x_n\right] &= \int_0^{y_1} \theta \frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\mathrm{e}^{(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\int_0^{y_1}\theta\mathrm{e}^{-(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\cdot\frac{\Gamma(2)}{(1-n)^2} = \frac{1}{(n-1)(\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1)}
\end{aligned}
$$

则 θ 的后验 Bayes 估计量为 $\dfrac{1}{(n-1)(\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1)}$.

题目 2. (47) 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自离散分布 $f(x;\theta)=\binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}I_{\{0,1,2\}}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机变量.

(a). 是否存在一维的充分统计量，若存在，是否完备?

(b). 求解 $\theta^2=P(X_1=2)$ 的 MLE，并判断是否是无偏的.

(c). 求解一个关于 θ 的无偏统计量，且满足 C-R 下界. 若不存在，证明之.

(d). 求解一个 θ^2 的 UMVUE.

(e). 利用平方损失函数求解 θ 关于先验分布为 Beta 分布的 Bayes 估计. Beta 分布为 $g(\theta)=\dfrac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}I_{(0,1)}(\theta)$.

(f). 使用平方误差损失函数，求解 θ 的极小化极大估计.

(g). 求解 θ^2 均方误差的一致估计.

解答. (a). 由于

$$
f(x;\theta)=\exp\{2\log(1-\theta)\}\binom{2}{x}I_{\{0,1,2\}}(x)\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}
$$

令 $a(\theta)=\exp\{2\log(1-\theta)\}$, $b(x)=\binom{2}{x}I_{\{0,1,2\}}(x)$, $c(\theta)=\log\dfrac{\theta}{1-\theta}$, $d(x)=x$. 则 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 是完备充分统计量.

(b). $\mathcal{L}(\theta)=\prod\limits_{i=1}^n f(x_i;\theta)=(1-\theta)^{2n}\left(\dfrac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left[\prod\limits_{i=1}^n\binom{2}{x_i}I_{\{0,1,2\}}(x_i)\right]$,

$\log\mathcal{L}(\theta) = 2n\log(1-\theta)+\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\theta}{1-\theta}+\sum\limits_{i=1}^n\log\binom{2}{x_i}I_{\{0,1,2\}}(x_i)$，于是 $\dfrac{\partial\log\mathcal{L}(\theta)}{\partial\theta} = -\dfrac{2n}{1-\theta}+\dfrac{1}{\theta(1-\theta)}\sum\limits_{i=1}^n x_i=0$，得到 θ 的 MLE 为 $\hat\theta=\dfrac{\bar X}{2}$，于是 $\widehat{\theta^2}=\dfrac{\bar X^2}{4}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar X^2/4) &= \frac{1}{4n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]^2 = \frac{1}{4n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}X_iX_j\right] \\
&= \frac{1}{4n^2}\left[n\mathbb{E}(X^2)+n(n-1)(\mathbb{E}X)^2\right] = \frac{1}{4n^2}[n(\mathrm{Var}(X)+(\mathbb{E}X)^2)+n(n-1)(\mathbb{E}X)^2] \\
&= \frac{1}{4n^2}[n\mathrm{Var}(X)+n^2(\mathbb{E}X)^2] = \theta^2+\frac{\theta(1-\theta)}{2n}
\end{aligned}
$$

所以 $\widehat{\theta^2}$ 不是无偏估计.

(c). 由上一问可知

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)=\frac{\partial\log L(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{2n}{1-\theta}+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\sum_{i=1}^{n}x_i$$
$$=\frac{2n}{\theta(1-\theta)}\left(\frac{\bar{X}}{2}-\theta\right)$$

又由于 $\mathbb{E}\left[\frac{\bar{X}}{2}\right]=\mathbb{E}(X)/2=\theta$，所以 $\bar{X}/2$ 是 θ 的无偏统计量且满足 C-R 下界.

(d). 由 (b) 小问可知 $\mathbb{E}[\bar{X}^2/4]=\frac{2n-1}{2n}\theta^2+\frac{\theta}{2n}$，于是 $\frac{2n}{2n-1}\left(\frac{\bar{X}^2}{4}-\frac{\bar{X}/2}{2n}\right)=\frac{\bar{X}(n\bar{X}-1)}{2(2n-1)}$ 是 θ^2 的无偏估计，且是关于完备充分统计量 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的函数，于是也是 θ^2 的 UMVUE.

(e). θ 的后验概率密度函数为

$$f(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\frac{\mathcal{L}(\theta)g(\theta)}{\int_0^1\mathcal{L}(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta}\propto(1-\theta)^{2n}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$$
$$\propto\theta^{a-1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{b-1+2n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\sim\text{Beta}\left(a+\sum_{i=1}^{n}x_i,b+2n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

由于平方损失函数下 Bayes 估计就是后验 Bayes 估计，于是 $\mathbb{E}[\theta|X_1,\cdots,X_n]=\frac{a+n\bar{X}}{a+b+2n}$ 是 θ 在先验分布为 Beta 分布时的 Bayes 估计.

(f). 由 (e) 可知，θ 的后验 Bayes 估计为 $\mathbb{E}[\theta|X_1,\cdots,X_n]=\frac{a+n\bar{X}}{a+b+2n}$，由于损失函数为平方损失，则后验 Bayes 估计即为 Bayes 估计. 下面求解风险函数为常数，令 $c=\frac{1}{a+b+2n}$，则

$$\mathcal{R}(\theta)=\mathbb{E}\left[\frac{a+n\bar{X}}{a+b+2n}-\theta\right]^2=\mathbb{E}\left[cn\bar{X}+ac-\theta\right]^2=\mathbb{E}\left[c(n\bar{X}-2n\theta)+(2nc-1)\theta+ac\right]^2$$
$$=c^2\text{Var}(n\bar{X})+[(2nc-1)\theta)+ac]^2=c^2\cdot 2n\theta(1-\theta)+(2nc-1)^2\theta^2+2ac(2nc-1)\theta+a^2c^2$$
$$=[(2nc-1)^2-2nc^2]\theta^2+[2nc^2+2ac(2nc-1)]\theta+a^2c^2$$

上式与 θ 无关，得 $\begin{cases}2nc^2=(1-2nc)^2,\\ 2nc^2=2ac(1-2nc).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{1}{\sqrt{2n}+2n},\\ a=\sqrt{2n}/2\end{cases}$ 于是 $b=\sqrt{2n}/2$，所以 θ 的 Minimax 估计为 $\frac{1+\sqrt{2n}\bar{X}}{2+2\sqrt{2n}}$.

(g). 由于 $I(X_1=2)$ 是 θ^2 的无偏估计，考虑估计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i=2)$，则 T 是 θ^2 的无偏估计，则 MSE 为

$$\text{MSE}_T=\text{Var}(T)=\text{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i=2)\right]=\frac{1}{n^2}n\text{Var}(I(X=2))$$
$$=\frac{1}{n}\left[\mathbb{E}(I^2(X=2))-\mathbb{E}[I(x_i)=2]^2\right]=\frac{1}{n}(\theta^2-\theta^4)\to 0,\quad(n\to\infty)$$

于是 T 是 θ^2 的一致估计.