

## 习题八

32.

证明. 设图  $G$  为小于 30 条边的平面简单图, 含有  $n$  个结点  $m$  条边  $r$  个区域, 由于  $G$  为简单图, 所以没有自环与重边。

反设  $G$  中结点的度数均大于等于 5, 由于一条边含有两个端点, 则

$$m \geq \frac{5}{2}n \quad (1)$$

由于  $G$  为平面图, 由 Euler 公式, 知

$$n - m + r = 2$$

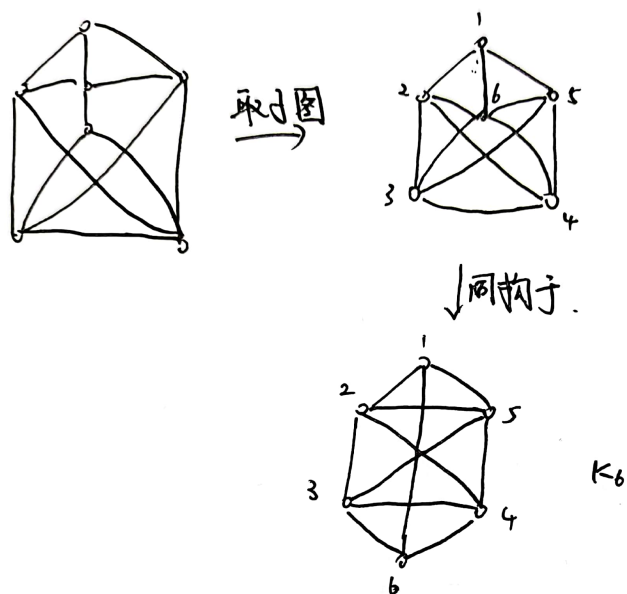
又由于  $G$  不含重边与自环, 所以每个区域至少由三条边围成, 且每一条边至多为两个区域的公共边, 则

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{2}{3}m \\ \Rightarrow m - n + 2 &\leq \frac{2}{3}m \\ \Rightarrow \begin{cases} m \leq 3n - 6 \\ m \geq \frac{5}{2}n \end{cases} &\quad \text{条件(1)} \\ \Rightarrow m &\geq 30 \end{aligned}$$

与  $m < 30$  矛盾, 综上, 一定存在至少一个结点的度数小于等于 4。

□

34. 解答. 如图所示:



由 Kuratowski 定理知 该图为非平面图