日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 9 月 26 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

题目 1. 证明 $(C(M),\rho)$ 为完备的度量空间.（$\rho(f,g)=\max\limits_{x\in M}|f(x)-g(x)|$，列紧集 M 上的度量记为 d）

证明. 首先证明 $(C(M),\rho)$ 为度量空间，由于 ρ 满足度量的基本性质，只需证明 ρ 的定义有意义，也就是证明 $\forall f\in C(M)$，$f(M)$ 能取到最大值和最小值，下证 $f(M)$ 为紧集.

$\forall f\in C(M)$，取点列 $\{y_n\}\subset f(M)$，则 $\exists x_i\in M$ 使得 $f(x_i)=y_i$，则 $\{x_n\}\subset M$，由于 M 为紧集，则存在收敛子列 $x_{n_k}\to x_0\in M$，由 f 的连续性可知，$f(x_{n_k})\to f(x_0)\in f(M)$. 令 $y_0=f(x_0)$，则 $y_{n_k}\to y_0$，则 $f(M)$ 为 $\mathbb{R}$ 中的紧集，蕴含 $f(M)$ 为有界闭集的数集，则 $f(M)$ 能取到最大值和最小值，故 $(C(M),\rho)$ 为度量空间.

其次证明完备性，设 $\{\varphi_n\}$ 为 $C(M)$ 中的 Cauchy 列，则 $\rho(\varphi_n,\varphi_m)=\max\limits_{x\in M}|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|\to 0$, $(n,m\to\infty)$，任取 $x_0\in M$，令 $y_n=\varphi_n(x_0)$，则 $|y_n-y_m|\leqslant\max\limits_{x\in M}|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|\to 0$, $(n,m\to\infty)$，所以 $\{y_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，由于 $\mathbb{R}$ 是完备的，则 $y_n\to y_0\in\mathbb{R}$，令 $\varphi(x_0)=y_0=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)$，由于 x_0 的任意性，$\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$.

下证 $\varphi(x)\in C(M)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\forall n\geqslant N$ 有 $|\varphi(x)-\varphi_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，由 φ_n 的连续性，$\forall x_0\in M$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall d(x,x_0)<\delta$，有 $|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，则

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leqslant|\varphi(x)-\varphi_n(x)|+|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)|+|\varphi_n(x_0)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$$

所以 $\varphi(x)\in C(M)$，故 $(C(M),\rho)$ 为完备的度量空间. □

题目 2. 在度量空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 中，$A\subset l^p$ 是列紧集，当且仅当，A 有界，且 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\xi=\{x_n\}\subset A$.

证明. 充分性，A 为列紧集，则 A 为完全有界集，故 A 有界，且存在 ε-网 $\{\xi_1,\cdots,\xi_{N_\varepsilon}\}$ 使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon}B(\xi_i,\varepsilon)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_i>0$，使得

$$\sum_{j\geqslant N_i}|x_j^{(i)}|^p<\varepsilon,\quad(1\leqslant i\leqslant N_\varepsilon,\xi_i=\{x_n^{(i)}\})$$

取 $N=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N_\varepsilon}N_i$，则 $\sum\limits_{j\geqslant N}|x_j^{(i)}|^p<\varepsilon$, $(\xi_i=\{x_n^{(i)}\})$. $\forall\xi\in l^p$，令 $\xi=\{x_n\}$，则 $\exists 1\leqslant i_0\leqslant N_\varepsilon$ 使得 $\xi\in B(\xi_{i_0},\varepsilon)$ 则

$$\sum_{i=N}^\infty|x_i|^p\leqslant\sum_{i=N}^\infty|x_i-x_i^{(i_0)}|^p+\sum_{i=N}^\infty|x_i^{(i_0)}|^p<\varepsilon^p+\varepsilon$$

必要性，先证明 l^p 是完备的，令 $\{\xi_n\}$ 为 l^p 中的 Cauchy 列，即 $\xi_i=\{x_n^{(i)}$，则 $\rho(\xi_n,\xi_m)=\left(\sum\limits_{i=1}^\infty|x_i^{(n)}+x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$，则 $|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|\to 0$, $(i\geqslant 1,\ n,m\to\infty)$. 由于 $\mathbb{R}$ 是完备的，则 $\exists x_i\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}x_i^{(m)}=x_i$.

令 $\xi=\{x_1,x_2,\cdots\}$，由于 $\{x_n^{(m)}\}\subset l^p$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_m>0$，使得 $\sum\limits_{i\geqslant N_m}|x_i^{(m)}|^p<\varepsilon$，于是有

$$\sum_{i\geqslant N_m}|x_i|^p\leqslant\sum_{i\geqslant N_m}|x_i-x_i^{(m)}|^p+\sum_{i\geqslant N_m}|x_i^{(m)}|^p\to 0,\quad (m\to\infty)$$

所以 $\xi\in l^p$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\forall n\geqslant N$，有 $|x_i^{(n)}-x_i|<\dfrac{\varepsilon^p}{2^{\frac{1}{p}}}$，则

$$\rho(\xi,\xi_n)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-x_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^p}{2^i}\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，故 l^p 是完备的.

下面证明 A 是完全有界集，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\sum\limits_{i\geqslant N}|x_i|^p<\varepsilon,\ (\forall\{x_n\}\subset A)$，记 $S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_N):\{x_n\}\subset A\}\subset\mathbb{R}^n$，由于 A 有界，则 S 有界，由于 $\mathbb{R}^N$ 中有界点列必有收敛子列，则 S 为列紧集，蕴含 S 为完全有界集，存在 ε-网，$\{(x_1^{(1)},\cdots,x_N^{(1)}),\cdots,(x_1^{(N_\varepsilon)},\cdots,x_N^{(N_\varepsilon)})\}$，令 $\{x_n^{(i)}\}$ 为 ξ_i 在前 N 项的截断. 下证 $\{\xi_1,\cdots,\xi_{N_\varepsilon}\}$ 构成 A 的 ε'-网.

$\forall\xi\in A$，令 $\xi=\{x_n\}$，由于 $(x_1,\cdots,x_N)\in S$，则 $\exists i_0\in[1,N_\varepsilon]$，使得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i-x_i^{(i_0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$，令 $\varepsilon'=(\varphi^p+2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$，所以有

$$\rho(\xi,\xi_{i_0})=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-x_i^{(i_0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i-x_i^{(i_0)}|^p+\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p+\sum_{i=N}^{\infty}|x_i^{(i_0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<(\varepsilon^p+2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon'.$$

故 A 为列紧集. □

题目 3. 令 $W_0^{1,2}(0,1)$ 是 $C_0^1(0,1)$ 在 $\rho(f,g)=\left(\int_0^1(|f-g|^2+|f'-g'|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 下的完备化空间. 证明：$S=\{u\in C_0^1(0,1),\rho(u,0)<M<\infty\}$ 是 $C[0,1]$ 中的列紧集.

题目 4. （**1.2.3**）设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体，在 F 上引进距离 $\rho(\xi,\eta)=\sum\limits_{n\geqslant 1}|x_n-y_n|$，其中 $\xi=\{x_n\}\in F,\eta=\{y_n\}\in F$，求证：$(F,\rho)$ 不完备，并指出它的完备化空间.

证明. 令 $\xi_1=(1,0,0,\cdots),\xi_2=(1,\frac{1}{2},0,\cdots),\cdots,\xi_n=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots)$，于是 $\{x_n\}\subset F$，且 $\forall n,m>0$，不妨令 $m>n$，有 $\rho(\xi_n,\xi_m)=\dfrac{1}{n+1}\to 0,\quad (n,m\to\infty)$，所以 $\{\xi_n\}$ 为 Cauchy 列，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n\notin F$，所以 $\{\xi_n\}$ 不收敛，则 F 不完备.

下证 F 的完备化空间为 $G=\{\{x_n\}:\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0\}$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\forall n\geqslant N$ 有 $|x_n|<\varepsilon$，令 $\xi=\{x_1,x_2,\cdots,x_N,0,\cdots\}\in F$，则 $\rho(\xi,\eta)=\sup\limits_{n\geqslant N}|x_n|<\varepsilon$，所以 F 在 G 中稠密.

任取 Cauchy 列 $\{\eta_n\}\subset G$，令 $\eta_i=\{y_n^{(i)}\}$，则 $\rho(\eta_n,\eta_m)=0,\ (n,m\to\infty)$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\forall n,m>N$ 有 $\rho(\eta_n,\eta_m)<\varepsilon$，则 $\forall i\geqslant 1$ 有 $|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon$，有 $\mathbb{R}$ 的完备性可知 $\exists x_i\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$，令 $\eta=\{x_1,x_2,\cdots\}$，存在充分大的 m 使得 $|x_i^{(m)}-x_i|<\varepsilon$，由于 $\eta_m\in G$，

则 $\exists N_m>0$ 使得 $\forall i\geqslant N_m$ 有 $|x_i^{(m)}|<\varepsilon$. 于是 $\forall i\geqslant N_m$ 有 $|x_i|\leqslant|x_i-x_i^{(m)}|+|x_i^{(m)}|<2\varepsilon$，则 $\eta\in G$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\eta$，故 G 为完备空间.

故 F 在恒等变换下同构于完备空间 G 中的稠密子集，所以 G 为 F 的完备化空间. □

题目 **5.** （**1.2.5**）在完备的度量空间 (X,ρ) 中给定点列 $\{x_n\}$，若 $\forall\varepsilon>0$，存在 Cauchy 列 $\{y_n\}$，使得 $\rho(x_n,y_n)<\varepsilon,\ (n\in\mathbb{N})$，求证：$\{x_n\}$ 收敛.

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\forall n,m\geqslant N$ 有 $\rho(y_n,y_m)\leqslant\varepsilon$，由题意可知

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_m)+\rho(y_m,x_m)<3\varepsilon,$$

则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，由 X 的完备性可知 $\{x_n\}$ 收敛. □

题目 **6.** （**1.3.1**）在完备的度量空间 (X,ρ) 中求证：子集 A 列紧的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0$，存在 A 的列紧的 ε-网.

证明. 充分性,$\forall\varepsilon>0$,存在有限 ε-网 $\{x_1,\cdots,x_N\}$,在 $\mathbb{R}$ 中有界闭集即为列紧集,则 $\{x_1,\cdots,x_N\}$ 为列紧的 ε-网.

必要性，$\forall\varepsilon>0$，令 V 为 A 的列紧的 $\dfrac{\varepsilon}{2}$-网，则 $A\subset\bigcup\limits_{y\in V}B(y,\dfrac{\varepsilon}{2})$，由于 V 是列紧的，则 V 是完全有界集，则存在有限的 $\dfrac{\varepsilon}{2}$-网 $\{y_1,\cdots,y_N\}$ 使得 $V\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}B(y_i,\dfrac{\varepsilon}{2})$，则 $\forall a\in A$，$\exists y\in V$ 使得 $\rho(a,y)<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$\exists 1\leqslant i_0\leqslant N$ 使得 $\rho(y,y_{i_0})<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则 $\rho(a,y_{i_0})\leqslant\rho(a,y)+\rho(y,y_{i_0})<\varepsilon$，由 a 的任意性可知 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}B(y_i,\varepsilon)$，则 $\{y_1,\cdots,y_N\}$ 为 A 的有限 ε-网，于是 A 为完全有界集，又由于 X 是完备的，故 A 为列紧集. □

题目 **7.** （**1.3.2**）在度量空间 (X,ρ) 中求证：紧集上的连续函数必是有界的，并且达到它的上、下确界.

证明.（与题目 1 证明完全相同）设 $M\subset X$ 为紧集，$\forall f\in C(M)$，取点列 $\{y_n\}\subset f(M)$，则 $\exists x_i\in M$ 使得 $f(x_i)=y_i$，则 $\{x_n\}\subset M$，由于 M 为紧集，则存在收敛子列 $x_{n_k}\to x_0\in M$，由 f 的连续性可知，$f(x_{n_k})\to f(x_0)\in f(M)$. 令 $y_0=f(x_0)$，则 $y_{n_k}\to y_0$，所以 $f(M)$ 为 $\mathbb{R}$ 中的紧集，蕴含 $f(M)$ 为有界闭集的数集，则 $f(M)$ 能达到它的上、下确界. □

题目 **8.** （**1.3.4**）设 (X,ρ) 为度量空间，F_1,F_2 为它的两个紧子集，求证：$\exists x_i\in F_i(i=1,2)$，使得 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_1,x_2)$，其中

$$\rho(F_1,F_2):=\inf\{\rho(x,y):x\in F_1,y\in F_2\}.$$

证明. 令 $\rho(F_1,F_2)=A$，则存在 $\{(x_n,y_n)\}$ 使得 $\rho(x_n,y_n)\to A$，由于 F_1,F_2 为紧集，则 F_1,F_2 为自列紧集，则存在子列 $x_{n_k}\to x_0\in F_1, y_{n_k}\to y_0\in F_2$，则

$$A\leqslant \rho(x_0,y_0)\leqslant \rho(x_0,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},y_{n_k})+\rho(y_{n_k},y_0)\to A,\quad (k\to\infty)$$

则 $\rho(x_0,y_0)=A$. □

题目 9. （**1.3.6**）$E=\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$，求证：$E$ 在 $C[0,\pi]$ 中不是列紧的.

证明. 只需证明 E 在 $C[0,\pi]$ 中不是等度连续的. 令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, $\delta=\dfrac{2}{n}$, 取 $t_1=0, t_2=\dfrac{\pi}{2n}$, 则 $\forall n>0$, 有 $|t_1-t_2|=\dfrac{\pi}{2n}<\dfrac{2}{n}=\delta$，且 $|\sin nt_2-\sin nt_1|=1>\varepsilon$，所以 E 在 $C[0,1]$ 中不是等度连续，则 E 在 $C[0,\pi]$ 中不是列紧集. □

题目 10. （**1.3.7**）$S=\{\xi=\{x_n\}:x_i\in\mathbb{C},i\geqslant 1\}$，则 S 在度量

$$\rho(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|},\quad (\xi=\{x_n\},\eta=\{y_n\})$$

下是完备的. 设 $A\subset S$，则 A 是列紧的充要条件为：$\forall n\in\mathbb{N},\exists C_n>0$，使得对于 $\forall\xi=\{x_n\}\in A$ 有 $|x_n|\leqslant C_n$.

证明. 充分性，反设，$\exists n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall m>0$，$\exists\xi_m=\{x_n^{(m)}\}\in A$ 有 $|x_{n_0}^{(m)}|=m$，则在点集 $E=\{\xi_n\}$ 中，$\forall n,m\in\mathbb{N}$, $n\neq m$，有

$$\rho(\xi_n,\xi_m)\geqslant\frac{1}{2^{n_0}}\frac{1}{\frac{1}{|m-n|}+1}\geqslant\frac{1}{2^{n_0}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n_0+1}},$$

则点集 E 中无收敛子列，与 A 是列紧集矛盾，故原命题成立.

必要性，由于 (S,ρ) 是完备的，只需证明 A 是完全有界集. $\forall N>0$，令 $E=\{(x_1,\cdots,x_N):\xi=\{x_n\}\in A\}\in\mathbb{R}^N$，由于 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists C_n>0$ 使得 $\forall\xi=\{x_n\}\in A$ 有 $|x_n|\leqslant C_n$，则

$$E\subset[-C_1,C_1]\times[-C_2,C_2]\times\cdots\times[-C_N,C_N],$$

于是 E 为 $\mathbb{R}^N$ 中的有界闭集，则 E 为紧集，$\forall\varepsilon>0$，存在 ε-网 $\{(x_1^{(1)},\cdots,x_N^{(1)}),\cdots,(x_1^{(N_\varepsilon)},\cdots,x_N^{(N_\varepsilon)})\}$，则 $\exists\xi^{(i)}\in A$ 使得 $(x_1^{(i)},\cdots,x_N^{(i)})$ 为 $\xi^{(i)}$ 的前 N 项截断.

$\forall\xi\in S$，令 $\xi=\{x_n\}$，则 $(x_1,\cdots,x_N)\in E$，则 $\exists 1\leqslant i_0\leqslant N_\varepsilon$，使得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-x_i^{(i_0)})\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}\rho(\xi,\xi_{i_0})&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\frac{1}{|x_k-x_k^{(i_0)}|}+1}\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\frac{1}{|x_k-x_k^{(i_0)}|}+1}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\frac{1}{|x_k-x_k^{(i_0)}|}+1}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{2^N-1}{2^N}\varepsilon+\frac{1}{2^N}\to\varepsilon\quad(N\to\infty)\end{aligned}$$

则 E 为 A 的 ε-网，则 A 为完全有界集，故 A 为列紧集. □

题目 11. （**1.3.9**）(M,ρ) 为紧度量空间，$E\subset C(M)$，E 中函数一致有界，且满足下列 Hölder 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^{\alpha},\quad (\forall x\in E,\forall t_1,t_2\in M)$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$, $C>0$. 求证：E 在 $C(M)$ 中是列紧集.

证明. 只需证 E 等度连续的，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta<\left(\dfrac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，使得 $\forall\rho(t_1,t_2)<\delta$，有

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\delta^{\alpha}<\varepsilon,$$

所以 E 是等度连续的，所以 E 在 $C(M)$ 中是列紧集. □