日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 12 月 4 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第十一次作业

题目 1. (2.6.2) 设 A 是闭线性算子，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\sigma_p(A)$ 两两互异，又设 x_i 是对应于 λ_i 的特征元 $(i=1,2,\cdots,n)$. 证明：$\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是线性无关的.

证明. 反设 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 线性相关，不妨令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\alpha_kx_k$ 且 $\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$ 线性无关，则

$$(\lambda_nI-A)x_n=0=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(\lambda_nI-A)x_k=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(\lambda_nx_k-\lambda_kx_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(\lambda_n-\lambda_k)x_k$$

由于 $\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$ 线性无关，则 $\alpha_k(\lambda_n-\lambda_k)=0,\ (k=1,2,\cdots,n-1)$，又由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两互异，则 $\alpha_k=0,\ (k=1,2,\cdots,n-1)$，于是 $x_n=0$ 与 x_n 为特征向量矛盾，故 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 线性无关. □

题目 2. (2.6.3) 在双边 l^2 空间上，考虑右推移算子

$$\begin{aligned}A:x=(\cdots,\xi_{-n},\xi_{-n+1},\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_n,\cdots)\in l^2\\ \mapsto Ax=(\cdots,\eta_{-n},\eta_{-n+1},\cdots,\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},\eta_n,\cdots),\end{aligned}$$

其中 $\eta_m=\xi_{m-1}(m\in\mathbb{Z})$. 求证：$\sigma_c(A)=\sigma(A)=$ 单位圆周.

证明. 设 $x=\{\xi_n\}\in l^2$，满足 $(\lambda I-A)x=0\Rightarrow\lambda x=Ax\Rightarrow\lambda\xi_k=\xi_{k-1},\ (k\in\mathbb{Z})$，则

$$x=\left(\cdots,k^n\xi_0,\cdots,k\xi_0,\xi_0,\frac{\xi_0}{k},\cdots,\frac{\xi_0}{k^n},\cdots\right)$$

由于 $x\in l^2$，则 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|\xi_n|^2=|\xi_0|^2+\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|\dfrac{\xi_0}{\lambda^n}\right|^2+\sum\limits_{n\leqslant 1}|\lambda^{-n}\xi_0|^2<\infty$，则 $|\xi_0|^2\left(1+\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{|\lambda|^{2n}}+|\lambda|^{2n}\right)<\infty$，若第二项为 0，则 $\dfrac{1}{\lambda}\to 0,\ \lambda\to 0$ 矛盾，于是 $\xi_0=0$，则 $x=0$.

综上，$(\lambda I-A)x=0$ 只有零解，故 $\sigma_p(A)=\varnothing$.

下证 $\sigma_r(A)=\varnothing$，只需证 $\overline{R(\lambda I-A)}=l^2$，只需证 $R(\lambda I-A)^\perp=\varnothing$，设 $y\in R(\lambda I-A)^\perp$，则 $((\lambda I-A)x,y)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\lambda\xi_k-\xi_{k-1})z_k=0$，取 $x=e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{个}},0,\cdots)$ 则

$$((\lambda I-A)e_n,z)=\lambda z_n-z_{n+1}=0$$

类似上述证明可知 $z=0$，故 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

所以 $\sigma(A)=\sigma_p(A)+\sigma_c(A)+\sigma_r(A)=\sigma_c(A)$. □

题目 3. (2.6.4) 在 l^2 空间上，考虑左推移算子 $A:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots)$.

证明：$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\},\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，且

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A).$$

证明. 由于 $||Ax||\leqslant||x||$，则 $||A||\leqslant 1$，则 $|\lambda|>1$ 时，$\lambda\in\rho(A)$. 下面讨论 $|\lambda|\leqslant 1$ 的情况.

当 $|\lambda|<1$ 时，$\sum\limits_{n\geqslant 1}|\lambda|^{2n}<\infty$，于是 $(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\in l^2$，则

$$A_n(1,\lambda,\lambda^2)=(\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\cdots)=\lambda(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)$$

则 λ 为特征值，$(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\in l^2$ 是对应的特征向量，故 $\lambda\in\sigma_p(A)$.

当 $|\lambda|=1$ 时，$\forall x=\{\xi_n\}\in l^2$，

$$(I-A)x=0\Rightarrow(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$$

于是 $\xi_k=\lambda^{k-1}\xi_1$，由于 $x\in l^2$，则 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\xi_1|^2<\infty\Rightarrow\xi_1=0$，故 $x=0$.

令 $G=\{\{\xi_n\}\in l^2:\{\xi_n\}\text{中非零项有限}\}$，则 $\forall y=\{\eta_k\}\in G$，不妨令 $\eta_k=0(k>n)$，于是

$$(\lambda I-A)x=y\Rightarrow(\lambda\xi_1-\xi_2,\lambda\xi_2-\xi_3,\cdots)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots)$$

于是

$$\begin{cases}\lambda\xi_1-\xi_2=\eta_1\\ \lambda\xi_2-\xi_3=\eta_2\\ \quad\vdots\\ \lambda\xi_n-\xi_{n+1}=\eta_n\\ \lambda\xi_{n+1}-\xi_{n+2}=0\\ \quad\vdots\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k/\lambda^k\\ \quad\vdots\\ \xi_{n-1}=\eta_{n-1}/\lambda+\eta_n/\lambda\\ \xi_n=\eta_n/\lambda\\ \xi_{k+1}=0,\quad(k\geqslant n)\end{cases}$$

由 y 的任意性可知，对于 $(\lambda I-A)$ 存在逆元，则 $G\subset R(\lambda I-A)$，又由于 $\bar{G}=l^2$，故 $\overline{R(\lambda I-A)}=l^2$，所以 $\lambda\in\sigma_c(A)$.

综上，$\sigma_r(A)=\varnothing$，故 $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)$. □