日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 6 月 12 日	概率论	强基数学 002	吴天阳	2204210460

习题 6.1 **1.** 试证明 (2) $X_n \xrightarrow{p} X,\ X_n \xrightarrow{p} Y \Rightarrow \mathbf{P}\{X=Y\}=1$;

(10) $X_n \xrightarrow{p} X,\ Y$ 是随机变量 $\Rightarrow X_nY \xrightarrow{p} XY$;

(11) $X_n \xrightarrow{p} X,\ Y_n \xrightarrow{p} Y \Rightarrow X_nY_n \xrightarrow{p} XY$.

证明. (1) 对任意的 $\varepsilon,\delta>0$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})\leqslant\frac{\delta}{2},\ \mathbf{P}(|X_n-Y|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})\leqslant\frac{\delta}{2}\\ \Rightarrow\ &\mathbf{P}(|X-Y|\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbf{P}(|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})+\mathbf{P}(|X_n-Y|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})\leqslant\delta\\ \Rightarrow\ &\mathbf{P}(|X-Y|<\varepsilon)>1-\delta.\end{aligned}$$

由 ε,δ 的任意性可知, $\mathbf{P}(X=Y)=1$.

(10) 对任意的 $\varepsilon,\delta>0$, 由于 $\mathbf{P}(Y<\infty)=1$, 于是存在 $M>0$ 使得 $\mathbf{P}(|Y|\geqslant M)\leqslant\frac{\delta}{2}$, 且有

$$\mathbf{P}(|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{M})\leqslant\frac{\delta}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_nY-XY|\geqslant\varepsilon)&=\mathbf{P}(|Y||X_n-X|\geqslant\varepsilon)\\&=\mathbf{P}\left(|Y||X_n-X|\geqslant\varepsilon\middle||Y|\geqslant M\right)+\mathbf{P}\left(|Y||X_n-X|\geqslant\varepsilon\middle||Y|<M\right)\\&=\frac{\delta}{2}+\mathbf{P}\left(|Y||X_n-X|\geqslant\varepsilon\middle||Y|<M\right)\\&\leqslant\frac{\delta}{2}+\mathbf{P}\left(|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{M}\right)\leqslant\delta.\end{aligned}$$

所以 $X_nY \xrightarrow{p} XY$.

(11) 对任意的 $\varepsilon,\delta>0$, 由 (10) 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(|X_n(Y_n-Y)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})<\frac{\delta}{2},\ \mathbf{P}(|Y(X_n-X)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})<\frac{\delta}{2}\\ \Rightarrow\ &\mathbf{P}(|X_nY_n-X_nY|+|X_nY-XY|\geqslant\varepsilon)<\delta\\ \Rightarrow\ &\mathbf{P}(|X_nY_n-XY|\geqslant\varepsilon)<\delta.\end{aligned}$$

所以 $X_nY_n \xrightarrow{p} XY$. □

3. 设随机变量 X_n 服从 Cauchy 分布, 其密度函数为

$$p_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)},\quad n\geqslant 1,$$

证明: $X_n \xrightarrow{p} 0$.

证明. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) &= 2\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\arctan(nx)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n\varepsilon)\right) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} 0$. □

7. 设 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ 是独立的随机变量序列, (由于概率之和不为 0, 修改了一下题目)

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \\ &\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = n+1, n+2, \cdots.\end{aligned}$$

试问: $\{X_n : n \geqslant 1\}$ 是否服从弱大数定律?

解答. 服从. 由于 $P(X_n = a) = P(X_n = -a)$, 所以 $\mathbf{E}X_n = 0$,

$$\mathbf{E}X_n^2 = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 1 + \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 7 < \infty.$$

由 Chebyshev 弱大数定律得证.

10. 设在 Bernoulli 试验序列中, 事件 A 出现的概率为 p, 令

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{在第}n\text{次及第}n+1\text{次试验中}A\text{都出现}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 服从弱大数定律.

证明. 由于 X_n 与 X_{n+1} 有相关性, 无法直接使用 Chebyshev 弱大数定理, 每个 X_n 均为参数为 p^2 的 Bernoulli 变量, 所以 $\mathbf{E}X_n = p^2$, $\mathbf{E}X_n^2 = p^2$, $\mathbf{Var}X_n = p^2(1-p^2)$, 且

$$\mathbf{Cov}X_iX_j = \begin{cases} p^3 - p^4, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \geqslant 2. \end{cases}$$

设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 于是

$$\mathbf{Var}S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Var}X_n + 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Cov}(X_i, X_{i+1}) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{Var}S_n}{n^2} = 0$, 由 Markov 弱大数定理得证. □

习题 6.2　4.　若 $\boldsymbol{X}_n$ 为 n 维正态随机向量, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{X}$, 试证 $\boldsymbol{X}$ 为正态向量.

证明. 由于 $X_n \xrightarrow{p} X$, 则 $X_n \xrightarrow{d} X$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, 其中 $F_n(x)$, $F(x)$ 分别为 X_n, X 的分布函数, 由于 X_n 为 n 为正态随机变量, 所以 X 为正态向量. □

6.　设 $\{X_n\}$ 依分布收敛到 X, 设 $\{Y_n\}$ 依分布收敛到常数 a, 证明 $X_n + Y_n$ 依分布收敛到 $X + a$.

解答.　设 $F(x) = \mathbf{P}(X + a \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant x - a)$, 由于 $Y_n \xrightarrow{p} a$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \forall x \in C(F)$, $\exists\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$, 使得 $x \pm \varepsilon_1 \in C(F)$, 令 $T_n = X_n + Y_n$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_n \leqslant x) &= \mathbf{P}(T_n \leqslant x, |Y_n - a| \leqslant \varepsilon_1) + \mathbf{P}(T_n \leqslant x, |Y_n - a| > \varepsilon_1)\\ &\leqslant \mathbf{P}(X_n \leqslant x - a + \varepsilon_1) + \mathbf{P}(|Y_n - a| > \varepsilon_1),\end{aligned}$$

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(T_n \leqslant x) \leqslant F(x + \varepsilon_1)$, 又由于

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n \leqslant x - a - \varepsilon_1) &= \mathbf{P}(X_n \leqslant x - a - \varepsilon_1, |Y_n - a| \leqslant \varepsilon_1) + \mathbf{P}(X_n \leqslant x - a - \varepsilon_1, |Y_n - a| > \varepsilon_1)\\ &\leqslant \mathbf{P}(T_n \leqslant x) + \mathbf{P}(|Y_n - a| > \varepsilon_1),\end{aligned}$$

所以 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(T_n \leqslant x) \geqslant F(x - \varepsilon_1)$. 综上

$$F(x - \varepsilon_1) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(T_n \leqslant x) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(T_n \leqslant x) \leqslant F(x + \varepsilon_1),$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(T_n \leqslant x) = F(x)$, $(x \in C(F))$, 故 $X_n + Y_n = T_n \xrightarrow{d} x + a$.

7.　设 $\{X_k\}$ 为独立随机变量序列, 它们都服从 -1 与 1 两点上的等可能分布. 试证 $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{2^k}$ 依分布收敛到 $U(-1,1)$ 随机变量.

证明. 设 $f_n(t)$ 为 Y_n 的特征函数, 则

$$f_{Y_n}(t) = \mathbf{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}\right\} = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{X_k}{2^k}\right\} = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

对任意 $k \in [1,n]$ 时, 有 $f_{X_k}(t) = \mathbf{E}\exp\{\mathrm{i}tX_k\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}F(X_k) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \cos t$. 于是

$$f_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{t}{2^k}.$$

由于

$$\begin{aligned}2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) f_{Y_n}(t) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{t}{2^k}\sin\frac{t}{2^n} &= 2^n \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cdots\cos\frac{t}{2^n}\sin\frac{t}{2^n}\\ &= 2^{n-1}\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cdots\cos\frac{t}{2^{n-1}}\sin\frac{t}{2^{n-1}}\\ &= \cdots = \sin t,\end{aligned}$$

则 $f_{Y_n}(t)=\dfrac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} f_{Y_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}=\frac{\sin t}{t}.$$

再设 $Y\sim U(-1,1)$, 则

$$f_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}F_Y(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}t}=\frac{\sin t}{t}.$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, 所以 $f(t)$ 在 0 处连续且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{Y_n}(t)=f_Y(t)$, 由连续性定理知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}=Y_n\xrightarrow{d}Y=U(-1,1).$$

□

8. 设 $X_n\xrightarrow{p}X$, 而 g 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 试证 $g(X_n)\xrightarrow{p}g(X)$.

证明. 由 g 的连续性可知, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x_n-x|<\delta$ 时, 有 $|g(x_n)-g(x)|<\varepsilon$, 于是

$$\begin{aligned}
&\{|X_n-X|<\delta\}\subset\{|g(X_n)-g(X)|<\varepsilon\}\\
\Rightarrow\ &\{|g(X_n)-g(X)|\geqslant\varepsilon\}\subset\{|X_n-X|\geqslant\delta\}\\
\Rightarrow\ &\mathbf{P}(|g(X_n)-g(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbf{P}(|X_n-X|\geqslant\delta)\to 0\quad(n\to\infty)\\
\Rightarrow\ &g(X_n)\xrightarrow{p}g(X).
\end{aligned}$$

□

习题 6.3 **1.** 设 $\{X_n:n\geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列, $\mathbf{E}X_1=a$, 则对直线上任一有界连续函数 $f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=f(a).$$

证明. 由 Khinchin 弱大数律可知

$$\begin{aligned}
&\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{p}a\\
\xRightarrow[\text{习题 6.2 8.}]{f\text{连续}}\ &f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\xrightarrow{p}f(a)\\
\xRightarrow[\text{Lebesgue 控制收敛定理}]{f\text{有界}}\ &\mathbf{E}f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\to f(a)\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

□