日期	科目	班级	姓名	学号
2025 年 6 月 16 日	随机过程	人工智能 B2480	吴天阳	4124136039

第三次作业　连续时间的 Markov 链

题目 1. P332 1. 一个有机体的总体由雄性和雌性成员组成. 在一个小的群体中，某个特定的雄性可能与一个特定的雌性以概率 $\lambda h + o(h)$ 在任意长度为 h 的时间区间里交配. 每次交配立即等可能产生一个雄性或雌性后代. 以 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别记在时刻 t 总体中的雄性和雌性的个数. 推导连续时间的 Markov 链 $\{N_1(t), N_2(t)\}$ 的参数，即 6.2 节中的参数 v_i, P_{ij}.

解答. 状态 $i = (n_1, n_2)$，其中 n_1, n_2 分别为雄性和雌性的个数，且 $n_1, \geqslant 0, n_2 \geqslant 0$.

离开状态 i 的速率为每次的交配速率和总交配对数之积，即

$$v_i = v_{(n_1,n_2)} = \lambda n_1 n_2$$

由于是等概率产生一个雄性或雌性后代，因此当 $n_1 > 0, n_2 > 0$ 时

$$P_{(n_1,n_2)\to(n_1+1,n_2)} = P_{(n_1,n_2)\to(n_1,n_2+1)} = \frac{1}{2},$$

当 $n_1 = 0$ 或 $n_2 = 0$ 时

$$P_{(n_1,n_2)\to(n_1,n_2)} = 1.$$

题目 2. P332 6. 考虑一个具有出生率 $\lambda_i = (i+1)\lambda\ (i \geqslant 0)$ 与死亡率 $\mu_i = i\mu\ (i \geqslant 0)$ 的生灭过程.

(a) 确定从状态 0 到状态 4 的期望时间.

(b) 确定从状态 2 到状态 5 的期望时间.

(c) 确定 (a) 和 (b) 中的方差.

解答. 设 m_i 为从状态 i 到状态 $i+1$ 的期望时间，则

$$\begin{aligned}
m_i &= \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} m_{i-1} = \frac{1}{(i+1)\lambda} + \frac{i\mu}{(i+1)\lambda} m_{i-1} = \frac{1}{(i+1)\lambda}\sum_{k=0}^{i} r^k \\
\Rightarrow m_i &= \frac{1}{(i+1)\lambda}\frac{1-r^{i+1}}{1-r} \quad (r \neq 1) \\
\Rightarrow m_i &= \frac{1}{\lambda_i} \quad (r = 1)
\end{aligned}$$

其中 $r = \dfrac{\mu}{\lambda}$

(a)
$$\mathbb{E}[T_{0\to 4}] = \sum_{i=0}^{3} m_i = \frac{1}{\lambda(1-r)}\left[\frac{1-r}{1} + \frac{1-r^2}{2} + \frac{1-r^3}{3} + \frac{1-r^4}{4}\right]$$

(b)
$$\mathbb{E}[T_{2\to 5}] = \sum_{i=2}^{4} m_i = \frac{1}{\lambda(1-r)}\left[\frac{1-r^3}{3} + \frac{1-r^4}{4} + \frac{1-r^5}{5}\right]$$

(c) 设 T_i 为从状态 i 到状态 $i+1$ 的时间，则

$$\mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+\mu_i)} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}\mathrm{Var}(T_{i-1}) + \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i}(\mathbb{E}[T_{i-1}] + \mathbb{E}[T_i])^2$$

由于当 $r \neq 1$ 时情况过于复杂，下面仅考虑 $r = 1$ 的情况，则

$$\mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda_i^2} + \mathrm{Var}(T_{i-1}) = \frac{i+1}{\lambda_i^2}$$

于是

$$\mathrm{Var}(T_{0\to4}) = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda^2}\left[1+2+3+4\right] = \frac{10}{\lambda^2}$$
$$\mathrm{Var}(T_{2\to5}) = \sum_{i=2}^{4} \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{\lambda^2}\left[3+4+5\right] = \frac{12}{\lambda^2}$$

题目 3. P333 13. 一个理发师经营的小理发店最多能容纳两个顾客．潜在顾客以每小时 3 个的速度的 Poisson 过程到达，而相继的服务时间是均值为 1/4 小时的独立的指数随机变量．求解下面各项：

(a) 在店中顾客的平均数.

(b) 进入店中的潜在顾客比例.

(c) 如果该理发师工作的速率快至两倍，他将多做多少生意?

解答.

题目 4. P334 19.

解答.

题目 5. P336 35.

解答.

题目 6. P338 45.

解答.