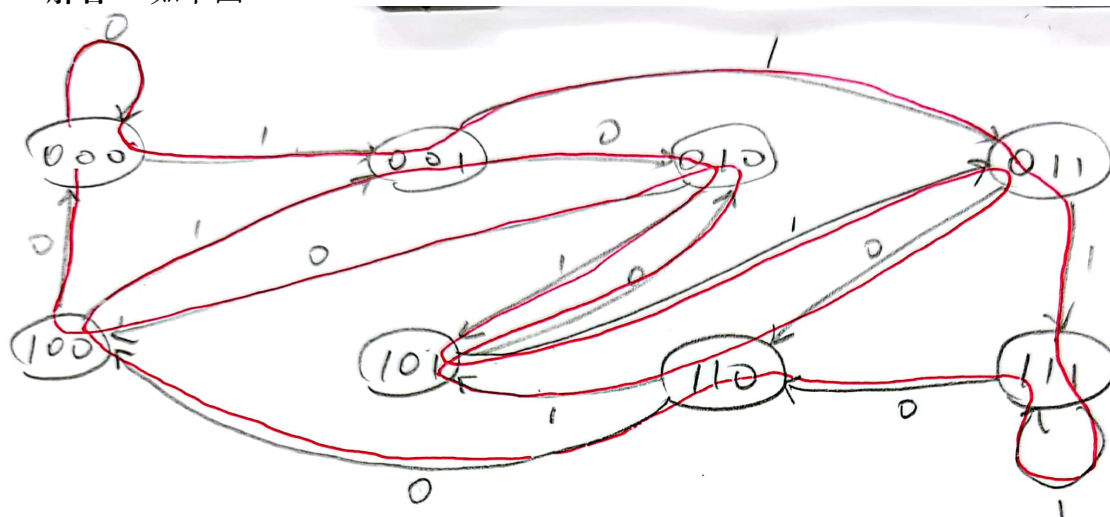


习题八

21. 解答. 如下图



0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0

24. 解答. 如下图, 由于删去 S 集合中的点, 导致 (a) 图中的连通支数为 $5 > |S| = 4$, 所以 (a) 图没有 Hamilton 圈。

由于删去 S 集合中的点, 导致 (b) 图中的连通支数为 $8 > |S| + 1 = 6 + 1$, 所以 (b) 图没有 Hamilton 路。

24. 证明图 8.99 的图示中 (a) 图没有 Hamilton 圈, (b) 图没有 Hamilton 路。

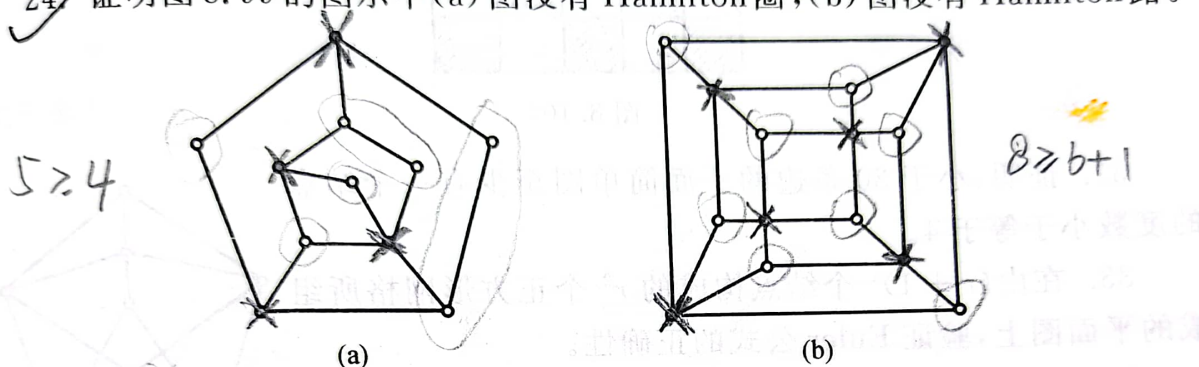


图 8.99

25. 解答. 如下图

英语: A, 汉语: C, 意大利语: I, 俄语: R, 日语: J, 德语: D, 法语: F

A: E

B: E, C

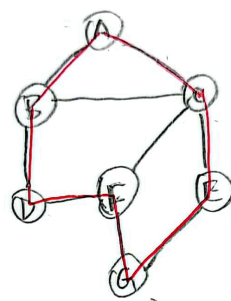
C: E, Y, R

D: C, J

E: Y, D

F: F, J, R

G: D, F



存在:
ABDFGECA

26. 解答. 将每个人视为一个点, 则一共有 n 个点, 如果两个人认识, 则在两个人之间连一条边, 则对任意的两个结点 u, v , 都有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 2$, 下证利用两个人可以认识其他所有人这个条件可以推出 $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$, 讨论 u, v 之间有无边相连,

1. u, v 两个结点间存在连边, 则 $\deg(u) + \deg(v) = n \geq n - 1$, 命题成立。

2. u, v 两个结点间不存在连边, 则存在和 v 连接的结点 w , 使得 w 与 u 之间没有连边, 对于结点 v, w , 由于 u 结点都没有直接连边, 所以他们合起来也不认识 u 与条件矛盾。

综上, 对于任意两个结点 u, v , 有 $\deg(u) + \deg(v) = n \geq n - 1$ 成立, 所以图中存在一个 *Hamilton* 路, 使得所有人按照该路径排成一条, 满足题意。

28.

证明. 设二分图 G 对所有结点划分为 n_1, n_2 个结点, 则 $n_1 + n_2 = n$, 由于 G 为二分图, 则 $m \leq n_1 n_2 = (n - n_2) n_2$, 由于当 $n_2 = \frac{n}{2}$ 时, $(n - n_2) n_2$ 有最大值为 $\frac{n^2}{4}$, 故

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$

□

30. 解答. 不存在完美匹配, 因为总结点数为奇数个, 故不存在匹配 M , 使得 $|M| = |V_1| = |V_2|$ 成立。

利用贪心的思路, 容易看出一个最大匹配:

$$M = \{(v_1, u_2), (v_2, u_1), (v_3, u_4), (v_4, u_3)\}$$

31. 解答. 不存在这样的路线, 因为, 如果走完 25 间房间, 一共移动 24 次, 为偶数次, 由于每移动一次颜色发生变化, 所以入口的颜色与出口的颜色必定相同, 而该题入口与出口颜色不同, 所以一定不存在这样的路径。