日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 4 月 29 日	复变函数	强基数学 002	吴天阳	2204210460

习题 第四章

1. 计算积分

$$(1)\int_{|z|=2}\frac{e^z}{1+z^2}\,dz;\qquad (2)\int_{|z+i|=1}\frac{e^z}{1+z^2}\,dz$$

解答.

$$(1)\quad \int_{|z|=2}\frac{e^z}{1+z^2}\,dz=\frac{1}{2i}\int_{|z|=2}e^z\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}\pi(e^i-e^{-i})=2\pi i\sin 1$$

$$(2)\quad \int_{|z+i|=1}\frac{e^z}{1+z^2}\,dz=\frac{1}{2i}\int_{|z+i|=1}e^z\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz\xlongequal{\text{Cauchy 定理}}\frac{1}{2\pi}\int_{|z+i|=1}-\frac{e^z}{z+i}\,dz\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}-\pi e^{-i}$$

2. 计算积分 $(1)\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^3(z-3)^3}$; $(2)\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, a,b不在圆周$|z|=R$上, $n\in\mathbb{N}$.

解答.

$$(1)\quad \int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^3(z-3)^3}\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z-3)^3}\right)^{(2)}\Bigg|_{z=1}=\pi i\cdot\frac{12}{(-2)^5}=-\frac{3\pi i}{8}$$

(2) 若 a,b 均在 $|z|<R$ 的圆内或圆外，由 Cauchy 定理可知，$\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}=0$；若 a 在圆内，b 在圆外，则

$$\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(\frac{1}{z-b}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=a}=(-1)^{n-1}\frac{2\pi i}{(a-b)^n}=-\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$$

若 b 在圆内，a 在圆外，则 $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$。

3. 计算积分

$$(1)\int_{|z|=2}\bar{z}\,dz;\qquad (2)\int_{|z|=2}\frac{|dz|}{z-1};$$

$$(3)\int_{|z|=1}\frac{\bar{z}^kP_n(z)}{z-z_0}\,dz,\ |z_0|<1,0\leqslant k\leqslant n,P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n.$$

解答. (1) 令 $\gamma(\theta)=2e^{i\theta}$，则 $\displaystyle\int_{|z|=2}\bar{z}\,dz=\int_0^{\pi}2e^{-i\theta}2ie^{i\theta}\,d\theta=8\pi i$

(2) 令 $\gamma(\theta)=2e^{i\theta}$，则 $|dz|=2\,d\theta$，于是 $dz=2ie^{i\theta}\,d\theta=\dfrac{iz|dz|}{2}$，所以

$$\int_{|z|=2}\frac{|dz|}{z-1}=\int_{|z|=2}\frac{2\,dz}{i(z-1)z}\xlongequal{\text{Cauchy 定理}}0$$

$$\begin{aligned}(3)\quad \int_{|z|=1}\frac{\bar{z}^kP_n(z)}{z-z_0}\,dz&=\int_{|z|=1}\frac{P_n(z)}{z^k(z-z_0)}\,dz=\int_{|z|=1}\frac{\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^j}{z^k(z-z_0)}\,dz+\int_{|z|=1}\frac{\sum_{j=k}^{n}a_jz^j}{z^k(z-z_0)}\\&\xlongequal{\text{Cauchy 定理}}\int_{|z|=1}\frac{\sum_{j=k}^{n}a_jz^{j-k}}{z-z_0}\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}2\pi i\sum_{j=k}^{n}a_jz_0^{j-k}\end{aligned}$$

5. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{dz}{z}\quad(|a|<R)$$

求证

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}\,d\theta=1\quad(z=Re^{i\theta})$$

解答.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{2}{z-a}-\frac{1}{z}\right)dz\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}2-1=1$$

由上式可知

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{(z+a)\,dz}{(z-a)z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{(z+a)(\bar{z}-\bar{a})\,dz}{|z-a|^2z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{|z|^2-|a|^2-z\bar{a}+a\bar{z}}{|z-a|^2z}\,dz\\&\xlongequal{\text{Cauchy 定理}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{|z|^2-|a|^2}{|z-a|^2z}\,dz\xlongequal{z=Re^{i\theta}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}\,d\theta\end{aligned}$$

7. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且当 $z\to\infty$ 时，$|f(z)|=O(|z|^k)(k>0)$。证明：$f(z)$ 是一次数 $\leqslant k$ 的多项式。

证明. 由于 $f(z)$ 为整函数，对于充分大的 R，$\exists M$ 使得 $|f(R)|=M\cdot R^k$，由 Cauchy 公式可知

$$|f^{(k+1)}(z)|=\left|\frac{(k+1)}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+2}}\,d\xi\right|\leqslant\frac{(k+1)!}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot R^k}{(R-|z|)^{k+2}}\cdot 2\pi R$$

当 $R\to\infty$ 时，$|f^{(k+1)}(z)|=0$，则 $f(z)$ 是次数 $\leqslant k$ 的多项式。 □

8. 试用 Liouville 定理证明每一多项式 $P(z)$ 至少有一零点。

证明. 反设 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有零点，由于 $|P(z)|$ 一定存在下界 $m>0$ 上界 ∞，则 $\frac{1}{P(z)}$ 有界，即 $|\frac{1}{P(z)}|\leqslant\frac{1}{m}<\infty$，由 Liouville 定理可知，$\frac{1}{P(z)}$ 为常值函数，与 $P(x)$ 为多项式矛盾，所以多项式 $P(x)$ 至少有一零点。 □

10. 若非常数函数 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=f(\infty)$ 存在，证明:

(1) $f(\infty)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\,d\theta$，$R>1$;

(2) 在 $|z|>1$ 上最大模原理成立。

证明.

(1)
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\,d\theta-f(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(Re^{i\theta})-f(\infty))\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)-f(\infty)}{z}\,dz$$
$$\xlongequal[\text{Cauchy 定理}]{\text{充分大的}R_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R_1}\frac{f(z)-f(\infty)}{z}\,dz\leqslant|f(R_1e^{i\theta})-f(\infty)|\to 0$$

所以 $f(\infty)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\,d\theta$，$R>1$

(2) 只需证明最大模原理在 $f(\infty)$ 处成立即可，设 $M=\lim\limits_{1<|z|<\infty}$，由 (1) 可知

$$f(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\,d\theta\leqslant|f(Re^{i\theta})|<M$$

所以最大模原理在 $f(\infty)$ 处同样成立，故在 $|z|>1$ 上最大模原理成立。 □

14. 设函数 $f(z)$ 在园 $|z|<R$ 内解析，且 $|f(z)|\leqslant M, f(0)=0$。证明:

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|,\quad |f'(0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

其中等号仅当 $f(z)=\dfrac{M}{R}e^{i\alpha}z$（$\alpha$ 为实数）时才成立。

证明. 设 $\varphi(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z}, & 0<|z|<R,\\ f'(0), & |z|=0.\end{cases}$，类比 Schwarz 引理可证得 $\varphi(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，对于 $\forall z_0<R$，$\exists|z_0|<r<R$，则

$$|\varphi(z_0)|\leqslant\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{M}{r}$$

令 $r\to R$ 得，且 z_0 具有任意性可知，$|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{R}$，所以 $|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|$ 和 $|f'(0)|\leqslant\frac{M}{R}$。当取到等号时，即 $\exists|z_0|<R$，使得 $\varphi(z_0)=\frac{M}{R}$，由最大模原理可知，$|\varphi(z)|\equiv\frac{M}{R}$，故 $\varphi(z)=\frac{M}{R}e^{i\theta}$，所以 $f(z)=\frac{M}{R}e^{i\theta}z$ $(\theta\in\mathbb{R})$。 □

20. 设 $P_n(z)$ 为 n 次多项式，$|z|\leqslant 1$ 时，$|P_n(z)|\leqslant M$。证明：$|z|\leqslant 1$ 时，$|P'(z)|\leqslant enM$.

证明. 由 Cauchy 公式可知，对 $|z|\leqslant R(R>1)$ 时，有

$$\begin{aligned}|P'(z)|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{P_n(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{|P_n(\xi)|}{|\xi-z|^2}|d\xi|\\&\leqslant\frac{MR^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\,d\theta}{|\xi-z|^2}\quad(\text{由 11 题可知})\\&\leqslant\frac{MR^n}{2\pi}\cdot\frac{R\cdot 2\pi}{|R|^2-|z|^2}\leqslant\frac{MR^{n+1}}{R^2-1}\quad(\text{三角不等式})\end{aligned}$$

令 $n=\dfrac{1}{R^2-1}$，即 $R=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$，则

$$|P'(z)| \leqslant nM\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \leqslant nM\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant enM \quad (\text{由于}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\text{为增函数})$$

$\square$