CVPR 期末复习

强基数学 002 吴天阳

1 图像处理

1.1 卷积与互相关

定义 1. 设 $f\in\mathbb{R}^{M\times N}$ 为灰度图像，用 $f(m,n)$ 表示 f 中 m 行 n 列的像素，**卷积核（滤波核）**为 $w\in\mathbb{R}^{2k+1,2k+1}$，卷积核 w 的下标范围为 $[-k,k]^2$，则 w 与 f 的**互相关**$S[f]$ 在 (m,n), $(1\leqslant m\leqslant M, 1\leqslant n\leqslant N)$ 处的定义为

$$S[f](m,n)=\sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k}w_{ij}f(m+i,n+j)$$

记为 $w\otimes f(m,n):=S[f](m,n)$.

w 与 f 的**卷积**$T[f]$ 在 (m,n), $(1\leqslant m\leqslant M,1\leqslant n\leqslant N)$ 处的定义为

$$T[f](m,n)=\sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k}w_{ij}f(m-i,n-j)$$

记为 $w*f(m,n):=T[f](m,n)$.

注：在卷积或互相关中对于 $f(i,j)$ 未定义的部分，默认使用零进行填补（**零填充**），即 $f(i,j)=0$, $(i\notin[1,N],j\notin[1,M])$，所以上述卷积和互相关的有另一种表示方法，

$$w*f(m,n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}w_{ij}f(m-i,n-j)$$
$$w\oplus f(m,n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}w_{ij}f(m+i,n+j)$$

将结果限制到 $[1,N]\times[1,M]$ 区域上即可得到与上述定义中相同的结果.

卷积与互相关的性质 卷积与互相关可相互转换，将 w 按照上下对称，左右对称（旋转 180°）后得到的结果记为 $\text{rot180}(w)$，则 $w*f=\text{rot180}(w)\otimes f$. 所以卷积与互相关具有很多类似的性质，下面我们仅讨论卷积的性质.

设 $f,g\in\mathbb{R}^{M\times N}$ 为灰度图像，$v,w\in\mathbb{R}^{2k+1,2k+1}$ 为卷积核，$a,b\in\mathbb{R}$ 为常数.

1. 线性性：

$$w*(af+bg)=a(w*f)+b(w*g),$$
$$(aw+bv)*f=a(w*f)+b(v*f).$$

2. 平移等变性：设 f 平移后的图像为 $f'(m,n)=f(m-m_0,n-n_0)$，则

$$(w*f')(m,n)=(w*f)(m-m_0,n-n_0)$$

3. 交换律：$w*f=f*w$.

4. 结合律：$v*(w*f)=(v*w)*f$.

5. 时间复杂度：图像大小为 $M\times N$，滤波核大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$，则直接计算卷积的时间复杂度为 $\mathcal{O}(MN(2k+1)^2)$.

定义 2 (等变性与不变性)**.** 设图像空间 $I=\mathbb{R}^{M\times N}$，作用在图像上的某类变换群 T.

$\forall I_1\in I, T_1\in T$，由于 T 是图像上的变换群，所以 $T_1:\mathbb{R}^{M\times N}\to\mathbb{R}^{M\times N}$，若算子 $\phi:I\to F$ 满足，存在 F 上的变换 $S:F\to F$，使得

$$\begin{aligned} S[\phi(I_1)] &= \phi[T_1(I_1)], \quad (\forall T_1\in T)\\ \text{或当 } I=F \text{ 时，}\quad T_1[\phi(I_1)] &= \phi[T_1(I_1)], \quad (\forall I_1\in I, \forall T_1\in T) \end{aligned}$$

则称 ϕ 具有**等变性 *(Equivariance)***.

等变性的特例，S 为恒等变换时，下式成立，则称 ϕ 具有**不变性 *(Invariance)***，

$$\phi(I_1)=\phi[T_1(I_1)], \quad (\forall I_1\in I, \forall T_1\in T)$$

例 1. 设图像为 $f\in I$，全体平移变换构成平移变换群 T，给定卷积核 w；算子 $\phi:I\to I$ 定义为 $\phi(f)=w*f$，$\forall T_1\in T$，令 $T_1(f)(m,n)=f(m-m_0,n-n_0)$，由卷积性质可知

$$(w*T_1f)(m,n)=(w*f)(m-m_0,n-n_0)=T_1(w*f) \iff \phi(T_1f)=T_1\phi(f)$$

所以称卷积具有平移等变性.

假设算子 $\tau:I\to\{0,1\}$ 表示当图像 $f\in I$ 中存在至少一条边，则 $\tau(f)=1$，否则 $\tau(f)=0$；光强变换群 T，$\forall T_1\in T$，$T_1(f)$ 将图像 f 中的每个像素值做线性变换 $f(m,n)\leftarrow af(m,n)+b$. 我们知道，图像的亮度改变不会对图像中边的位置进行变化，则

$$\tau(f)=\tau[T_1(f)]$$

所以称算子 ϕ 对光强变换具有不变性.

1.2 图像填充

对于图像的边界填充可以使得卷积前后的大小保持一致，如果要求卷积核完全作用在图像内部，即 $\forall i,j\in[-k,k]$ 有 $m-i\in[1,M], n-j\in[1,N]$，则 $m\in[1+k,M-k], n\in[1+k,N-k]$，所以卷积后的图像大小为 $(M-2k)\times(N-2k)$，比原有图像少了 $2k$ 行和 $2k$ 列.

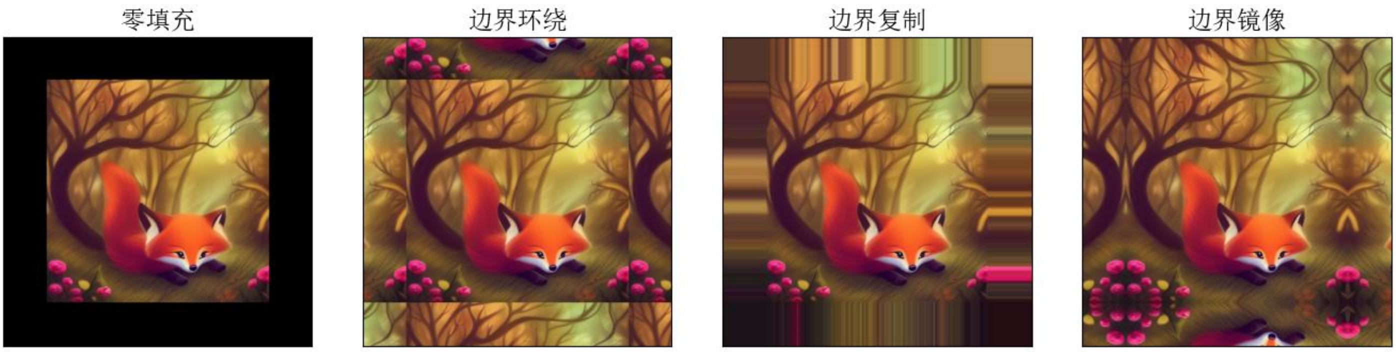
如果我们将原图的上下各加 k 行，左右各加 k 行，则可以使得卷积后的图像大小仍然为 $M\times N$，那么对于增加的像素填充的内容就称为**图像填充 (padding)**，常用填充有以下四种方法：

- 零填充：全部用 0 进行填充.
- 环绕填充：将图像进行平移得到填充结果.
- 边界填充：用图像中距离待填充像素最近的像素值进行填充.
- 镜像填充：以图像边界进行镜像得到填充结果.

1.3 Gauss 滤波器

设一维标准差为 σ，均值为 $\mu=0$ 的 Gauss 函数为 $G_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，则二维各向同性标准差为 σ 且均值 $\mu=(0,0)$ 的 Gauss 函数为

$$G_\sigma(x,y)=G_\sigma(x)G_\sigma(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



Gauss 核的大小与标准差关系 由于一维 Gauss 函数满足 3-σ 原则，也就是指密度函数在 $|x| < \sigma, 2\sigma, 3\sigma$ 上面积分别占比为 $68\%, 95\%, 99.7\%$，一般取 $k = 2\sigma$ 即可，也就是当卷积核大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$ 时，取 $\sigma = k/2$. Gauss 核也就是 Gauss 函数在 $[-k,k]^2$ 中整数点的差值，即二维 Gauss 核为 $w_{ij} = G_{k/2}(i-k-1, j-k-1), (1\leqslant i,j\leqslant 2k+1)$，简记为 G_σ.（注意与 Gauss 函数区分开，一个是 $(2k+1)\times(2k+1)$ 的矩阵，另一个是实值函数）

Gauss 模糊 将 Gauss 核作用在图像上即可得到 Gauss 模糊 (Gaussian Blur) 的效果. 设图像为 f，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 为像素坐标，$f_{\boldsymbol{p}}$ 为图像在 $\boldsymbol{p}$ 处的像素值，卷积核空间为 $S_{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{p} + (i,j) : (i,j) \in [-k,k]^2\}$（PPT 上简记为 S），则 Gauss 模糊在 $\boldsymbol{p}$ 处的值有以下两种表示方法：

$$GB[f]_{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{q}\in S_{\boldsymbol{p}}} G_\sigma(||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||) f_{\boldsymbol{q}} = \sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k} G_\sigma(||(i,j)||) f(\boldsymbol{p}_1 + i, \boldsymbol{p}_2 + j)$$

注：这里 $G_\sigma(\cdot)$ 表示一维 Gauss 函数. 归一化后的 Gauss 滤波器表示为以下形式：

$$H(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{W_{\boldsymbol{p}}} \mathrm{e}^{-\frac{||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||^2}{2\sigma^2}}, \qquad W_{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{q}\in S_{\boldsymbol{p}}} \mathrm{e}^{-\frac{||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}||^2}{2\sigma^2}}$$

Gauss 核的性质

1. **二维 Gauss 核的可分离性**：设 $G_\sigma(x), G_\sigma(x,y)$ 表示一维和二维 Gauss 函数，定义与上文相同. 设 $2k+1$ 维的一维 Gauss 核为

$$u = (G_\sigma(-k), G_\sigma(-k+1), \cdots, G_\sigma(0), \cdots, G_\sigma(k-1), G_\sigma(k))^T$$

则二维 Gauss 核 G_σ 满足 $G_\sigma = u * u^T$. 利用 Gauss 核的可分离性，可以将卷积过程分解为 $G_\sigma * f = (u*u^T)*f = u*(u^T*f)$，从而将时间复杂度由 $\mathcal{O}(MN(2k+1)^2)$ 变为 $\mathcal{O}(2MN(2k+1))$.

2. **两个二维 Gauss 核卷积仍为 Gauss 核**：设 $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$，则 $(G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2})(m,n) = G_\sigma(m,n)$.

Gauss 核具有平滑图像，起到正则化作用，在图像处理中非常常用，下面是三种基于 Gauss 核的滤波算子.

1.3.1 DoG 算子

通过两个不同方差的 Gauss 函数 $G_{\sigma_1}, G_{\sigma_2}$，不妨令 $\sigma_1 < \sigma_2$，则称 $G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}$ 为 *DoG* 算子. *DoG* 算子是一种差分滤波器，本质上是将 G_{σ_1} 作用后的图像与 G_{σ_2} 作用后的图像做差得到的结果：

$$G_{\sigma_1} * f - G_{\sigma_2} * f = (G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}) * f$$

1.3.2 锐化滤波器

锐化滤波的结果如下：

$$
\begin{aligned}
f_{sharp} &= f + \alpha(f - f_{blur}) = (1+\alpha)I \cdot f - \alpha G_\sigma * f \\
&= ((1+\alpha)I - \alpha G_\sigma) * f
\end{aligned}
$$

则 $(1+\alpha)I - \alpha G_\sigma$ 为锐化滤波器，其中 α 为锐化系数，I 表示全通滤波器，3×3 的全通滤波器为

$$
I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

1.3.3 双边滤波器

Guass 模糊只考虑了**像素坐标距离的关系（空间域，space）**，双边滤波器在 Gauss 模糊的基础上加入**像素值的关系（值域，range）**，从而能对图像边界处有较好的处理. 双边滤波器具有**保护边缘**的作用，多次重复使用会产生卡通效果，图像变得更加平滑，产生色块.

记图像为 f，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, f_{\boldsymbol{p}}, S_{\boldsymbol{p}}, G_\sigma$ 的定义和上述 Gauss 模糊处的相同，$||\cdot||$ 表示欧氏距离（ℓ_2 范数），W_p 为归一化系数，则双边滤波器处理图像 f 后在 $\boldsymbol{p}$ 处的结果为

$$
\begin{aligned}
BF[f]_{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{W_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\boldsymbol{q}\in S_{\boldsymbol{p}}} \underbrace{G_{\sigma_s}(||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||)}_{\text{space}} \underbrace{G_{\sigma_r}(|f_{\boldsymbol{p}} - f_{\boldsymbol{q}}|)}_{\text{range}} f_{\boldsymbol{q}} \\
\text{归一化系数：} W_{\boldsymbol{p}} &= \sum_{\boldsymbol{q}\in S_{\boldsymbol{p}}} G_{\sigma_s}(||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||) G_{\sigma_p}(|f_{\boldsymbol{p}} - f_{\boldsymbol{q}}|) \\
\boldsymbol{p}\text{处的双边滤波核：} & \quad \frac{1}{W_{\boldsymbol{p}}} G_{\sigma_s}(||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||) G_{\sigma_r}(|f_{\boldsymbol{p}} - f_{\boldsymbol{q}}|)
\end{aligned}
$$

$G_{\sigma_s}(||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||)$ 就是方差为 σ_s 的 Gauss 核，$G_{\sigma_r}(|f_{\boldsymbol{p}} - f_{\boldsymbol{q}}|)$ 是值域做差后再作用 Gauss 函数得到的核，对于不同的 $\boldsymbol{p}$ 均需要重新计算 $G_{\sigma_r}(|f_{\boldsymbol{p}} - f_{\boldsymbol{q}}|)$，而第一部分 Gauss 核无需重算.

将两个核做内积并归一化处理后，得到在 $\boldsymbol{p}$ 处的双边滤波核，再作用于图像 f 上，即可得到 $\boldsymbol{p}$ 处的双边滤波结果.

1.4 其他非线性滤波器

均值滤波 (Mean) 设滤波核的大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$，滤波结果 $g(m,n)$ 处的值是由图像以 (m,n) 为中心，周围大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$ 区域所有值的均值：

$$
g(m,n) = \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-k}^{k} f(m+i, n+j)
$$

表示为滤波器的形式为（$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, S_{\boldsymbol{p}}$ 的含义与上文相同，$|S_{\boldsymbol{p}}|$ 表示滤波器的大小）

$$
H(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{|S_{\boldsymbol{p}}|}
$$

阈值滤波 (Thresholding) 设定滤波阈值为 A, 则滤波结果为 $g(m,n) = \begin{cases} 255, & f(m,n) > A, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$

整流滤波 (Rectification) 仅保留非负像素，滤波结果为 $g(m,n)=\max(f(m,n),0)$. 常用于卷积神经网络中正则化操作.

中值滤波 (Median) 设滤波核大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$，滤波结果 $g(m,n)$ 处的值是由图像中以 (m,n) 为中心，周围大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$ 区域的所有值的中位数，以 $k=1$ 为例：

$$g(m,n)=\text{中位数}\left(\begin{bmatrix} f(m-1,n-1) & f(m-1,n) & f(m-1,n+1)\\ f(m,n-1) & f(m,n) & f(m,n+1)\\ f(m+1,n-1) & f(m+1,n) & f(m+1,n+1)\end{bmatrix}\right)$$

表示为滤波器的形式为

$$H(\boldsymbol{q})=\begin{cases}1, & f(\boldsymbol{q})=\underset{\boldsymbol{q}\in S_{\boldsymbol{p}}}{median}\{f(\boldsymbol{q})\},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

1.5 Fourier 变换

定义 3 (图像的二维 Fourier 变换与逆变换)**.** *设图像 $f\in\mathbb{R}^{M\times N}$，则*

$$\textit{Fourier 变换：}\ \hat{f}(m,n)=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\left(\frac{mx}{M}+\frac{ny}{N}\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\textit{Fourier 逆变换：}\ \check{f}(m,n)=\frac{1}{MN}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{mx}{M}+\frac{ny}{N}\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Fourier 变换也可记为 $\mathcal{F}(f):=\hat{f}$，Fourier 逆变换 $\mathcal{F}^{-1}(f):=\check{f}$.

注：如果把 $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\left(\frac{mx}{M}+\frac{ny}{N}\right)}$ 视为 x 轴方向频率为 m/M 的正弦波，与 y 轴方向频率为 n/N 的正弦波叠加形成的二维正弦波，则 $\hat{f}(m,n)$ 可以视为图像 f 在复合波上的投影，**Fourier 变换是空域（空间域）到频域的映射**，并且 $\hat{f}(m,n)$ 的辐角表示该种正弦波的相位大小，$|\hat{f}(m,n)|$ 表示该种正弦波辐角大小. **高频**部分（m,n 偏大）存储图像的细节信息，**低频**部分（m,n 偏小）存储图像的轮廓信息.

Fourier 变换关于卷积的性质

设图像 $f,g\in\mathbb{R}^{M\times N}$，在两个图像维数相同前提下，定义图像的**点积（内积）**$f\cdot g$ 为 $(f\cdot g)(m,n):=f(m,n)g(m,n)$，即对应元素相乘. 下面定理说明 **Fourier 变换将空域的卷积转化为频域的点积，Fourier 逆变换将频域的卷积转化为空域的点积**.

1. 空间域卷积定理：$\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}$.
2. 频域卷积定理：$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}*\hat{g})=a(f\cdot g)$，其中常数 $a=MN$.

1.6 图像参数化几何变换

1. 平移变换（自由度为 2）

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}\iff \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\1\end{bmatrix},\ \text{逆矩阵为}\ \begin{bmatrix}1&0&-t1\\0&1&-t2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

2. 旋转变换（自由度为 1）

$$\boldsymbol{x}' = R_\theta \boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{逆矩阵为} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 欧式变化（自由度为 3）

$$\boldsymbol{x}' = [R_\theta|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{逆矩阵为} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -t_1\cos\theta - t_2\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & t_1\sin\theta - t_2\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 相似变换（自由度为 4）

$$\boldsymbol{x}' = [R_\theta|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} s\cdot\cos\theta & -s\cdot\sin\theta & t_1 \\ s\cdot\sin\theta & s\cdot\cos\theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{逆矩阵为} \begin{bmatrix} \frac{1}{2s}\cdot\cos\theta & \frac{1}{2s}\cdot\sin\theta & \frac{-t_1\cos\theta - t_2\sin\theta}{s} \\ -\frac{1}{2s}\cdot\sin\theta & \frac{1}{2s}\cdot\cos\theta & \frac{t_1\sin\theta - t_2\cos\theta}{s} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. 仿射变换（自由度为 6）

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} \iff \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.7 前向变换与逆向变换

设变换矩阵为 T，原图像记为 f，变换后的图像记为 g，则对于图像中每个像素坐标 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$g(T\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \qquad g(\boldsymbol{x}) = f(T^{-1}\boldsymbol{x}).$$

其中，前者为**前向变换（forward warping）**，后者为**逆向变换（inverse warping）**.

前向变换中，由于 $\boldsymbol{x}$ 的参数为整数，而 $T\boldsymbol{x}$ 不一定为整数，所以填充时会出现空缺部分；而逆向变换中，计算 $T^{-1}\boldsymbol{x}$ 非整数时，可通过内插算法获得该像素处的近似值，可以很好解决空缺问题.

1.8 图像内插

注意将图像内插与上采样区分开，图像内插是一种**一般的插值**，可在任意位置处插值，而上采样一般按照 2 的倍数插值.

内插方法：设原图像大小为 $M \times N$，记为 $f(x,y),\ x \in [1,M], y \in [1,N]$，考虑二维平面中非整数点 (x^*,y^*)，一种求解 $f(x^*,y^*)$ 的方法.（也即将 f 延拓到 $\mathbb{R}^2$ 中）

近邻插值：使用原图中距离 (x^*,y^*) 最近的像素进行代换：

$$(x_0,y_0) = \mathop{\arg\min}_{(x,y)\in[1,M]\times[1,N]\cap\mathbb{N}^2} ||(x,y)-(x^*,y^*)||_2,$$

其中 $||\cdot||_2$ 表示 ℓ_2 范数，则 $f(x^*,y^*) = f(x_0,y_0)$.

双线性插值：将 (x^*,y^*) 与周围整数点所围成的面积反比作为整数点对应像素的加权值，设 $O(x^*,y^*)$ 周围存在四个整数点 $A(x_h,y_h),\ B(x_h,y_l),\ C(x_l,y_l),\ D(x_l,y_h)$，对应的面积分别为 $S_A = S(O,C),\ S_B = S(O,D),\ S_C = S(O,A),\ S_D = S(O,B)$，其中 $S(O,A)$ 表示由点 O,A 所围成的面积，参考右图. 则有

$$f(x^*, y^*) = S_A f(A) + S_B f(B) + S_C f(C) + S_D f(D).$$

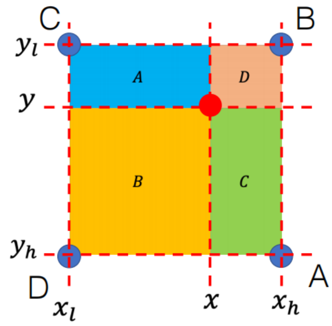


图 1: 双线性插值

1.9 下采样与上采样

1.9.1 下采样 (subsample)

定义 4 (下采样定理，Shannon-Nyquist 定理)**.** 设每隔 p 个像素进行一次采样，则采样频率为 $1/p$，图像中像素的最高频率为 f_{max}，当 $1/p > 2f_{max}$ 时，采样后的图像保留了原始图像的全部信息.

在图像处理中，如果采样频率较低，则会出现混淆的问题，无法保留图像全部特征. 采样定理告诉我们，对于给定的采样频率，可以通过降低图像中的最高频率从而提高采样效果，也就是对原图像做平滑处理，最常用的就是 Gauss 模糊.

下采样步骤 先对原图像做 Gauss 模糊，然后做间距为 p 的等距插值即可获得下采样结果.

Gauss 金字塔 若原图像大小为 $2^k \times 2^k$，间距为 2 的下采样得到的图像大小为 $2^{k-1} \times 2^{k-1}, \cdots, 4 \times 4, 2 \times 2, 1 \times 1$，将其分别记为 $G_0, G_1, \cdots, G_k$，其中 G_0 为原图像，G_i, $(i \geqslant 1)$ 是原图像等距离缩小 2^i 倍的下采样结果，将 $\{G_i\}$ 称为 **Gauss 金字塔**.

Gauss 金字塔的一个应用是**基于滑动窗口的模板匹配**，将每次缩放结果 G_i 中用滑动窗口搜索目标模板，可通过互相关计算相似度，当相似度超过一定阈值时，则认为匹配到目标，然后将匹配到的滑动窗口重新放大 2^i 倍，则可得到原始图像中匹配的滑动窗口位置，对应了原始图像中的目标位置.

1.9.2 上采样 (upsample)

上采样分为以下三步：

1. 用 0 填充图像（若放大倍数为 2，则在每行的左侧用 0 对图像进行填充，列也是相同操作）
2. 在填充后的图像上进行 Gauss 模糊.
3. 由于像素值填充了大量的 0，所以需要对图像亮度进行整体提高.

Laplace 金字塔 记上采样操作为 $\text{expand}(\cdot)$，原图为 G_0，n 次得到的下采样结果为 $\{G_1, \cdots, G_n\}$，则 n 层 Laplace 金字塔构造过程为

$$\begin{aligned} L_0 &= G_0 - \text{expand}(G_1), \\ L_1 &= G_1 - \text{expand}(G_2), \\ &\vdots \\ L_n &= G_n \end{aligned}$$

将 $\{L_i\}$ 称为 **Laplace 金字塔**，$L_i, (i<n)$ 的计算方式为：将原图像 G_i 做下采样得到 G_{i+1}，再与 G_{i+1} 上采样结果 $\text{expand}(G_{i+1})$ 做差，即可得到 L_i.

用途：为了存储图像 G_0，可以仅存储图像内容更少的 $\{L_i\}$，从而节约内存，可通过递归执行上采样获得原始图像：

$$G_0 = L_0 + \text{expand}(L_1 + \text{expand}(L_2 + \text{expand}(\cdots + \text{expand}(L_n))))$$

性质：当图像很小、距离远时，主要观察到**低频信息**；当图像很大、距离近时，同时能观察到**高频和低频信息**.

2 图像特征提取

总共有三种特征：边缘特征，角点特征，斑点特征.

2.1 边缘检测

图像中边缘出现的位置有以下 6 个：

1. 亮度有巨大改变；
2. 角点、交叉点；
3. 景深的不连续处（前景与背景深度的不同）；
4. 曲面法向量的不连续处（例如正方体的棱）；
5. 物体表面反射率不同（例如物体表面有不同的颜色）；
6. 物体阴影边缘.

2.1.1 图像微分

在图像中，用差值近似图像微分，由于存在 x,y 两个方向，所以也就是求图像像素梯度，先要求出每个像素点在 x,y 方向上的偏导数，然后表示为向量的形式：

$$\begin{aligned} x\text{方向偏导数：}\ & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx f(x+1,y) - f(x,y) \\ y\text{方向偏导数：}\ & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \approx f(x,y+1) - f(x,y) \\ \text{图像微分：}\ & \nabla f(m,n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(m,n), \frac{\partial f}{\partial y}(m,n)\right] \end{aligned}$$

则可以计算出每个像素处的幅度（范数）和辐角：

$$||\nabla f||(m,n) = \sqrt{f_x(m,n)^2 + f_y(m,n)^2}, \quad \theta(m,n) = \arctan\left(\frac{f_y(m,n)}{f_x(m,n)}\right).$$

但图像噪声对直接微分的结果影响非常大，所以需要先用 Gauss 模糊对图像进行平滑处理.

Gauss 微分核 对 Gauss 核做微分后得到的结果，相当于先对图像做平滑处理，再求偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}(G_\sigma * f) = (\frac{\partial}{\partial x}G_\sigma) * f$$

各向异性 Gauss 微分核 由于默认的 Gauss 核是各向同性的，也就是在 x,y 方向上的变化率均相同，这是因为将二维 Gauss 分布中 σ_1, σ_2 设置为相同；如果令 $\sigma_1 \gg \sigma_2$，则表示几乎不对 x 方向进行平滑处理，仅对 y 方向进行平滑处理. 再对其求偏导数，得到各向异性 Gauss 微分核.

Sobel 微分核 这是一种各向异性 Gauss 微分核的特例，仅在 y（或者 x）方向上作平滑处理，在 x（或者 y）方向上求偏导：

$$S_x=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\1&0&-1\end{bmatrix},\ S_y=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

2.2 Canny 边缘检测

Canny 边缘检测算法共分为以下三步（PPT 上为四步，将第一步分为求偏导和求梯度两步）：

1. 梯度提取，取方差为 σ 的 Gauss 一阶微分核做卷积，得到幅度图和辐角图.

2. 非极大值像素梯度抑制 (Non-Maximum Suppression,NMS)，对每个像素考虑其梯度方向上的两个临近点，用**双线性插值**获得两点处的梯度值，然后判断中间点的梯度范数是否大于两端的梯度范数，若大于则保留，反之舍弃（归零）.

具体来讲，设当前像素点为 $\boldsymbol{q}=(x,y)$，幅度图记为 $||\nabla f||(x,y)$，$\boldsymbol{q}$ 点处的梯度方向记为 θ，则考虑沿梯度方向上的两点

$$\boldsymbol{r}:(x+\cos\theta,y+\sin\theta),\quad \boldsymbol{p}=(x-\cos\theta,y-\sin\theta)$$

若 $||\nabla f||(\boldsymbol{q})>\max\left\{||\nabla f||(\boldsymbol{r}),||\nabla f||(\boldsymbol{p})\right\}$，则保留该点，否则令 $f(\boldsymbol{q})=0$.

3. 滞后阈值处理，边缘连接 (Hysteresis thresholding, Boundary)，考虑对 NMS 结果进一步处理，设定高阈值和低阈值. 我们称所有幅度值**大于高阈值**的点为**高阈值点**，所有幅度值**大于低阈值**的点为**低阈值点**. 每次从高阈值点开始绘制边缘，寻找周围低阈值点进行连接，若当前点附近仍有低阈值点则继续连接，直到连接完全部的高阈值点后，得到的就是 Canny 边缘处理结果.

2.3 Harris 角点检测

设图像为 $I(\cdot;\cdot)$，考虑一个大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$ 中心位于 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^2$ 的滑动窗口 $W_k(\boldsymbol{x}_0)$，任取一个滑动方向 $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^2$，定义在 $\boldsymbol{t}$ 方向上的**平方误差和 (Sum up Squared Differences, SSD)** 为

$$E_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{t})=\sum_{\boldsymbol{x}\in W_k(\boldsymbol{x}_0)}\left(I(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t})-I(\boldsymbol{x})\right)^2$$

若 $\boldsymbol{x}_0$ 为角点，则 $\forall\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^2$，$E_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{t})$ 都应尽可能大.

记 $\boldsymbol{t}=(u,v)^T$，由 Taylor 公式可知

$$I(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t})=I(\boldsymbol{x})+I_x(\boldsymbol{x})u+I_y(\boldsymbol{x})v+O(||\boldsymbol{t}||_2^2)$$

于是可对 $E_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{t})$ 进行进一步分解

$$\begin{aligned}E_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{t})&\approx\sum_{x\in W_k(\boldsymbol{x}_0)}\left(I(\boldsymbol{x})+I_x(\boldsymbol{x})u+I_y(\boldsymbol{x})v-I(\boldsymbol{x})\right)^2\\&=\sum_{\boldsymbol{x}\in W_k(\boldsymbol{x}_0)}\left(I_x(\boldsymbol{x})u+I_y(\boldsymbol{x})v\right)^2.\end{aligned}$$

更一般的，设图像 I 大小为 $M\times N$，记全体像素点集为 $D:=[1,M]\times[1,N]\cap\mathbb{Z}^2$，则

$$
\begin{aligned}
E_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{t}) &\approx \sum_{\boldsymbol{x}\in D} w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})\,(I_x(\boldsymbol{x})u+I_y(\boldsymbol{x})v)^2\\
&= \sum_{\boldsymbol{x}\in D} w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})I_x^2(\boldsymbol{x})u^2+2w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})I_x(\boldsymbol{x})I_y(\boldsymbol{x})uv+w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})I_y^2(\boldsymbol{x})v^2\\
&= A(\boldsymbol{x}_0)u^2+2B(\boldsymbol{x}_0)uv+C(\boldsymbol{x}_0)v^2.
\end{aligned}
$$

其中 $w_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in W_k(\boldsymbol{x}_0),\\ 0, & \texttt{otherwise}.\end{cases}$ 为 $W_k(\boldsymbol{x}_0)$ 的示性函数，为使其变化更平滑，可取 $w_{\boldsymbol{x}_0}$ 为中心在 $\boldsymbol{x}_0$ 大小为 $(2k+1)\times(2k+1)$ 的 Gauss 核，上式中 A,B,C 定义如下，分别表示将核 w 作用在 I_x^2，I_xI_y，I_y^2 图像上得到的结果

$$
A(\boldsymbol{x_0})=\sum_{x\in D} w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})I_x^2(\boldsymbol{x}),\ B(\boldsymbol{x_0})=\sum_{x\in D} w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})I_x(\boldsymbol{x})I_y(\boldsymbol{x}),\ C(\boldsymbol{x_0})=\sum_{x\in D} w_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})I_y^2(\boldsymbol{x}).
$$

进一步，可使用二次型矩阵表出

$$
E_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^TM_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{t},\quad \text{其中} M_{\boldsymbol{x}_0}=\begin{bmatrix}A(\boldsymbol{x_0}) & B(\boldsymbol{x}_0)\\ B(\boldsymbol{x_0}) & C(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}
$$

称 $M_{\boldsymbol{x}_0}$ 为图像在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**二阶矩矩阵 (Second moment matrix)**.

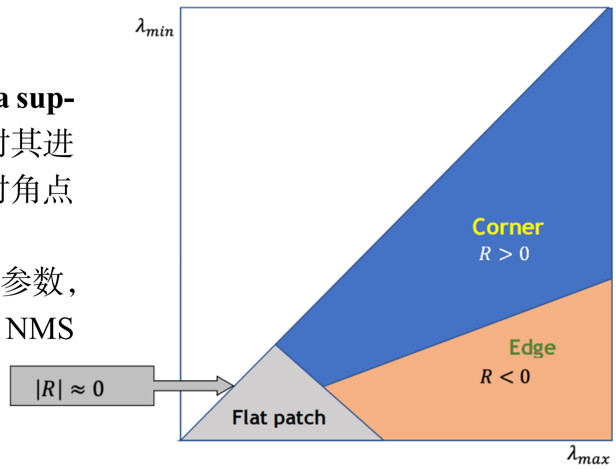
假设 $M_{\boldsymbol{x}_0}$ 的秩为 2，则 $M_{\boldsymbol{x}_0}$ 存在 2 个特征值，记其中较大者为 λ_{max}，较小者为 λ_{min}，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_{max}$，$\boldsymbol{x}_{min}$，由特征向量定义可知，$M_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{x}_{max}=\lambda_{max}\boldsymbol{x}_{max}$ 说明窗口 $W_k(\boldsymbol{x}_0)$ 在沿着 $\boldsymbol{x}_{max}$ 方向上移动单位长度可使得 $E_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{t})$ 达到最大值. 下面对 λ 的大小进行分类讨论

1. 当 λ_{max} 较小时，$E_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{t})$ 沿各个方向变化都较小，则 $\boldsymbol{x}_0$ 处于图像内部平滑区域.
2. 当 λ_{max} 较大且 $\lambda_{max}\approx\lambda_{min}$ 时，$E_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{t})$ 沿各个方向变化都较大，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是角点.
3. 当 λ_{max} 较大且 $\lambda_{max}\gg\lambda_{min}$ 时，$E_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{t})$ 仅沿 $\boldsymbol{x}_{max}$ 方向变化较大，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是边界点.

通过引入**角点响应函数 (Corner response function)** 用于判断角点

$$
\begin{aligned}
R(\boldsymbol{x}_0) =&\ \det(M_{\boldsymbol{x}_0})-\alpha\cdot\mathrm{trace}(M_{\boldsymbol{x}_0})^2=\lambda_1\lambda_2-\alpha(\lambda_1+\lambda_2)^2\\
=&\ A(\boldsymbol{x_0})C(\boldsymbol{x_0})-B^2(\boldsymbol{x_0})-\alpha(A(\boldsymbol{x_0})+C(\boldsymbol{x_0}))
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha\in[0.04,0.06]$ 为超参数. 当 $R(\boldsymbol{x}_0)$ 大于设定阈值时，则判定 $\boldsymbol{x}_0$ 为角点. 响应函数与特征值关系可参考右图：



最后，再使用**非局部极大值抑制 (Non-maxima suppression, NMS)**，若 $\boldsymbol{x}_0$ 是其邻域内的最大值，则对其进行保留，否则删去该点. 通过设定邻域大小，可对角点密度进行调整.

整个 Harris 角点检测算法中，总共存在 4 个超参数，分别为窗口大小 k，响应函数中的 α，响应阈值和 NMS 邻域大小.

Harris 角点检测的等变性、不变性和特异性

角点检测中存在两个讨论对象：一个是**角点位置**，另一个是**角点检测**（是否角点，取决于特征值、响应函数的变换）.

1. 等变性：**角点位置**的平移等变性、旋转等变性、缩放等变性.

2. 不变性：**角点检测**的平移不变性、旋转不变性，**角点位置和角点检测**对整体光强**增加常数**的不变性.

3. 特异性：整体光强**按倍数缩放**会导致角点检测失效（例如修改对比度），**缩放图像**也会导致检测失效.

平移图像：由于平移图像只会导致角点位置发生改变，所以角点位置对平移变换具有等变性；特征值是基于微分计算的，所以平移不会对特征值产生影响，由于响应函数取决于特征值，故角点检测是不变的.

旋转图像：由于旋转图像也会导致角点位置发生改变，所以角点位置对平移变换具有等变性；由于图像旋转，相当于检测框进行了旋转，所以只会对特征向量的方向进行旋转，特征值保持不变，由于响应函数取决于特征值，故角点检测是不变的.

光强缩放导致角点检测失效的原因：设图像为 I，光强变换后为 $I' = aI + b$，将全部像素值缩放 a 倍，增加常数 b，则偏导数会变为 $I'_x = aI_x$, $I'_y = aI_y$，二阶矩矩阵 $M' = a^2M$，则特征值变化为 $\lambda'_i = a^2\lambda'_i$，响应函数变化为 $R' = a^2R$，由于阈值与之前相同，如果 $a < 1$，则原来可检测到的角点，可能因为响应值降低，导致无法检测到，或者 $a > 1$，导致检测到很多错误角点，所以按倍数缩放光强会导致角点检测错误.

缩放导致角点检测失效的原因：将图片放大，而检测窗口大小没有增大，由于所有的角点周围的边都被放大，角点框对应的变化幅度降低，导致**将角点识别为边**，无法检测出角点.

解决图像缩放失效的方案：本质是无法确定图像最适合的检测窗口大小，所以尝试各种不同的检测窗口大小，在人工标定的角点处进行检测，选取响应值最高的窗口大小.

2.4 斑点特征

斑点特征 (blob) 是圆圈形状的**特征区域**，可以通过 **Laplacian 算子：LoG(Laplacian of Gaussian) 核**或者 DoG 核可以找到. LoG 核为

$$\nabla^2 G_\sigma = \frac{\partial G_\sigma^2}{\partial x^2} + \frac{\partial G_\sigma^2}{\partial y^2}$$

LoG 核的效果类似于将 DoG 核取相反数，将标准差大的 Gauss 核与标准差小的 Gauss 核做差得到.

通过对图像作用不同的标准差 σ 大小，取卷积后图像中的**局部极大值或局部极小值**作为斑点圆心 (x, y)，斑点半径 r 与 σ 正相关，一般取为 $\sqrt{3}\sigma$（可通过求 Laplacian 算子的极大值点得到）. 可以将一个斑点记为 (x, y, r)，作为图像的特征区域.

特征尺度：特征区域的大小，可以用斑点半径大小来衡量.

2.5 特征描述子

将图像中的**关键点**（如角点）或**区域**（如边缘、斑点）转换为对应的**特征信息**，对应的关键点的特征信息称为**特征描述子 (Feature descriptor)**，一般为向量形式，特征描述子应该具有以下两个性质：

- **不变性 (Invariance)**：图像变换后，对应关键点的特征描述子之间的距离变换很小.（此处的距离一般指欧氏距离或互相关大小）
- **判别性 (Discriminability)**：每个关键点的特征描述子应具有较高的唯一性.（与其他关键点的特征描述子距离较远）

2.5.1 相似性衡量

设描述子向量为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，则对 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 有如下两种常用的衡量方式：

1. **SSD（欧氏距离，Sum up Squared Different）**：$d(x, y) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2^2$；
2. **NCC（归一化互相关，Normalized Cross Correlation）**：可将归一化分为以下两步
   (a) 减去均值：$x' = x - \text{mean}(x)$；（$\text{mean}(\boldsymbol{x})$ 表示取向量 x 中每个元素的均值）
   (b) 单位化：$x'' = \dfrac{x}{||x||_2}$

   则 $d(x, y) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.（向量的点积就是互相关）

2.5.2 常用特征描述子

（由于在考试内容中未提及，仅列出概述）

1. **MOPS（多尺度定向窗口描述子，Multiscale Oriented PatcheS descriptor）**：以角点作为关键点，采用固定窗口大小搜索角点，并使窗口方向与角点的最大特征值对应的特征向量保持一致，对不同尺度大小的图片得到多个窗口. 由于每个角点对应一个窗口，所以窗口内的信息就是该角点对应的描述子.

缺点：由于角点检测受光强影响，所以无法检测不同光照环境下的物体.

2. **SIFT（尺度不变特征转换，Scale Invariant Feature Transform）**：以斑点作为关键区域，用边的特征构造描述子. 采用 DoG 检测特征尺度，将每个斑点划分为网格状，对每个网格统计全部像素点的梯度直方图（将梯度离散化），确定网格中主要梯度方向，最后将梯度主要梯度方向，网格化梯度信息作为对应斑点的描述子.

优点：由于按照梯度直方图进行划分，所以对于微小形变，描述子在梯度方向上具有不变性；又由于按照网格进行划分，对于微小形变，描述子在空间上也具有不变性.

2.5.3 图像对齐

对于两幅图像 f, g，假设 g 是 f 通过形变 T 得到的，即 $Tf = g$，需要反向求出形变矩阵 T 的具体参数值：

1. 检测图像关键点（区域）；
2. 计算每个关键点（区域）的特征描述子；
3. 选择图 f 中的特征描述子与图 g 中每个特征描述子进行比较，选择最相似的一对；
4. 对于图 f 中每个特征描述子重复上述步骤 3；
5. 对最优点对集合，用最小二乘法求解形变矩阵 T.

其中变换矩阵的参数形式有以下两种：

1. 仿射矩阵（Affine，二维），总计 6 个参数，表示为如下形式：

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 单应性矩阵（Homography，三维），总计 8 个参数，表示为如下形式：

$$H=\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}&h_{13}\\h_{21}&h_{22}&h_{23}\\h_{31}&h_{32}&1\end{bmatrix}$$

构造求解单应性矩阵的参数方程 设一个点对为 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 和 $\boldsymbol{x}''=(x'',y'')$，则

$$\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}&h_{13}\\h_{21}&h_{22}&h_{23}\\h_{31}&h_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\qquad\frac{1}{z'}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x''\\y''\\1\end{bmatrix}$$

用矩阵表示为 $\boldsymbol{x}'=H\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}''=\dfrac{1}{z'}\boldsymbol{x}'$，则对于 H 中的参数应有如下方程满足：

$$\begin{cases}x''=\dfrac{h_{11}x+h_{12}y+h_{13}}{h_{31}x+h_{32}y+1},\\[2ex]y''=\dfrac{h_{21}x+h_{22}y+h_{23}}{h_{31}x+h_{32}y+1},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h_{11}x+h_{12}y+h_{13}-x''h_{31}x-x''h_{32}y-x''=0,\\h_{21}x+h_{22}y+h_{23}-y''h_{31}x-y''h_{32}y-y''=0.\end{cases}$$

描述为矩阵的形式就是（下面虚线部分表示其他点对的数据）

$$\begin{bmatrix}x&y&1&0&0&0&-x''x&-x''y&-x''\\0&0&0&x&y&1&-y''x&-y''y&-y''\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{11}\\h_{12}\\h_{13}\\h_{21}\\h_{22}\\h_{23}\\h_{31}\\h_{32}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\end{bmatrix}$$

由该方程可以发现，一个点对可以确定 2 个方程，总共有 8 个待定参数，所以至少需要 4 个点对才能确定单应性矩阵 H. 当点对数目超过 4 个时，可以使用最小二乘法求解参数.

2.5.4 RANSAC 算法

在上述图像对齐的第 5 步中的最优点对集合中，由于噪声干扰，有可能存在异常值点，通过 RANSAC 算法可以排除掉这些异常值点.

以二维点对集合 S 为例，设 $n=2$ 表示随机选取点的个数，设定可容许范围大小为 ε，假设集合 S 中正常值的占比为 w，迭代算法 k 次，每次迭代具体操作为：

1. 从点集合 S 中随机选取 2 个点，并由这两个点构成直线 l.（高维空间中则是超平面）
2. 将集合 S 中到 l 的距离不超过 ε 的点称为内点 (inlier point)，否则称为外点 (outlier point).
3. 若当前内点数目大于之前迭代的最大内点数目，则将当前的内点集合替换之前的最优内点集合.
4. 重复步骤 1 到 3，总计 k 次.

下面用概率的方式，利用假设的正常值占比 w，可以推导 k 适合的取值大小：

- 随机选的点中全是正常值的概率为 w^n；
- 随机选的点中至少有一个是异常值的概率为 $1-w^n$；
- 进行 k 次迭代，每次选中的点中都至少有一个异常值的概率为 $(1-w^n)^k$；
- 进行 k 次迭代，存在一次选中的点中全为正常值的概率为 $p=1-(1-w^n)^k$.

于是我们取定 $p=0.99$，也就是说由 99% 的把握认为，RANSAC 算法可以取到至少 n 个正常点. 于是可以计算出不同 w 值和 n 下的迭代次数 k 至少取多大（列为异常值占比 $1-w$）：

Sample size	Proportion of outliers						
n	5%	10%	20%	25%	30%	40%	50%
2	2	3	5	6	7	11	17
3	3	4	7	9	11	19	35
4	3	5	9	13	17	34	72
5	4	6	12	17	26	57	146
6	4	7	16	24	37	97	293
7	4	8	20	33	54	163	588
8	5	9	26	44	78	272	1177

迭代 RANSAC(Iteratial RANSAC) 在 RANSAC 得到的最优内点集 D 基础上进一步优化内点集：

1. 用最小二乘法求解通过当前内点集 D 的超平面.
2. 根据超平面重新寻找内点集 D'.
3. 若 $D\neq D'$，则 $D\leftarrow D'$，回到第一步；否则退出迭代，返回最后得到的内点集 D.

估计单应性矩阵 在图像对齐得到的最优点对集合 S 基础上，求解单应性矩阵 H：

1. 随机选取 4 个点对；（求解 H 所需的最少点对数目）
2. 计算单应性矩阵 H；（列出参数方程，最小二乘法求解）
3. 当 $||\boldsymbol{x}_i-H\boldsymbol{x}_i'||_2^2<\varepsilon$, $(\boldsymbol{x}\in S)$ 时，认为 $\boldsymbol{x}$ 是内点；
4. 重复步骤 1 到 3，记录内点数最多的内点集合；
5. 使用迭代 RANSAC 优化后的内点集，求单应性矩阵 H.

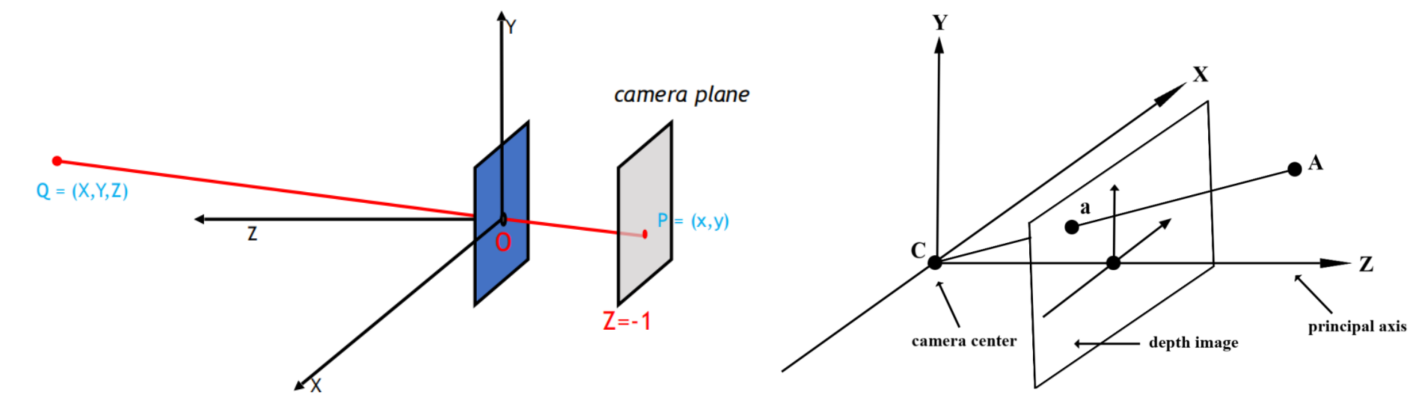
3 视觉几何

3.1 相机成像

3.1.1 针孔相机模型

针孔相机模型也称单点透视模型，将相机的入射瞳孔视为一个小孔，光线只有通过小孔打在相机底片上才能成像，如下图所示. 假设空间中物体位于 $Q(X,Y,Z)$，将相机入射瞳孔视为原点 O，相机底片位于 $z=-1$，则像点为 $Q'(-\frac{X}{Z},-\frac{Y}{Z},-1)$，由于小孔成像是颠倒后的图像，所系调整后的投影点为 $P(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z})$，将 $(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z},1)$ 称为 (X,Y,Z) 的**齐次坐标**.

针孔相机模型有以下两种理解方式，**左图**中投影平面为 $Z=-1$，则还需将成像结果颠倒，与真实相机、视网膜成像原理相同；**右图**中成像平面为 $Z=1$，无需颠倒结果，简化建模；将投影到 $Z=1$ 上的点称为对应空间点的**齐次坐标**，也称为像点、投影点，$Z=1$ 常称为成像平面，全体投影点构成**射影空间**. 将空间中的 Q 转化为投影点 P 的过程称为**透视投影**.



定义 5 (射影空间，齐次坐标)**.** 通过向量空间 V 的原点的直线集合称为射影空间.

在 $\mathbb{R}^3$ 中射影空间可用 $\mathbb{R}^2$ 射影平面表示. 由于三维中通过原点的直线集合可以表示为 $\{\lambda(x, y, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$，所以可以用二维点 $(x, y) \to (x, y, 1)$ 来表示该直线，故一个平面上的二维点集合可以表示整个三维射影空间.

类似地，n 维射影空间为 $n-1$ 维射影平面，$\mathbb{R}^n$ 中欧式坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的**齐次坐标 *(homogenous coordinates)*** 为 $(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1)$，在射影平面 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中表示为 $(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n})$.

由于所有位于同一条投影直线（与相机瞳孔相交的“视线”）上的点被投影到图像上的一点，透视投影中成像平面上的全部点构成射影空间，空间向量为 $\mathbb{R}^3$，相机入射瞳孔位于原点，所以透视模型中**成像平面就是射影平面**，透视投影过程就是**将三维坐标通过齐次坐标转化为二维坐标的过程**.

三维几何变换 三维几何变换十分类似于二维图像参数几何变换1.6，将低维向量 (x, y, z) 升维到齐次坐标 $(x, y, z, 1)$，于是可以通过齐次坐标完成矩阵的平移操作，便于表示. 二维几何变换一般形式如下左式，三维几何变换一般形式为右式：

$$T_2 = \begin{bmatrix} M_2 & \boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_3 = \begin{bmatrix} M_3 & \boldsymbol{t}_3 \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $M_k \in \mathbb{R}^{k\times k}, \boldsymbol{t}_k \in \mathbb{R}^k$. 类似二维，$\boldsymbol{t}_3$ 是平移向量，M_3 用于缩放和旋转.

3.1.2 透视变换

将**三维物体向二维图像的转换**且满足一定的**几何投影关系**，称为**透视关系**.

透视变换是指对三维物体进行空间变换时，使结果满足透视关系的变换. 通常将针孔相机成像过程称为透视变换，具体过程请见下文坐标系系统.

透视关系（透视变换的特点）

1. **近大远小**：设物体的两端空间坐标为 $(X, Y, Z), (X, Y+h, Z)$，则对应的像点为 $(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$，$(\frac{X}{Z}, \frac{Y+h}{Z})$，则成像中物体的高度为 $\frac{Y+h}{Z} - \frac{Y}{Z} = \frac{h}{Z}$，当 Z 增大时，物体变小，反之变大，所以呈现出近大远小的特点.

2. **平行线交于一点（消失点）**：设空间中两条平行线为 $Q(\lambda) = A + \lambda D, R(\lambda) = B + \lambda D$，

则两条线投影后为

$$
\begin{aligned}
q(\lambda) &= \left(\frac{A_x+\lambda D_x}{A_z+\lambda D_z}, \frac{A_y+\lambda D_y}{A_z+\lambda D_z}\right) \to \left(\frac{D_x}{D_z}, \frac{D_y}{D_z}\right), \quad (\lambda\to\infty),\\
r(\lambda) &= \left(\frac{B_x+\lambda D_x}{B_z+\lambda D_z}, \frac{B_y+\lambda D_y}{B_z+\lambda D_z}\right) \to \left(\frac{D_x}{D_z}, \frac{D_y}{D_z}\right), \quad (\lambda\to\infty).
\end{aligned}
$$

当 $D_z\neq 0$ 时，图像中平行线在无限延长后会在 $(\frac{D_x}{D_z}, \frac{D_y}{D_z})$ 处相交，将该点称为**消失点**.

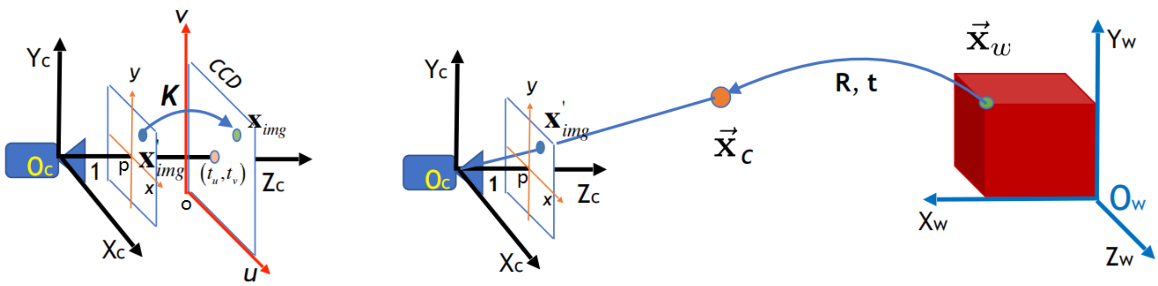
当 $D_z = 0$ 时，图像中平行线不会相交，也就是平行于成像平面的平行线，消失点在 (∞,∞) 处（例如照片中的两个电线杆无限延长后仍然不会相交）.

3. **平面消失于一条线（消失线）**：设空间中的平面为 $N_xX+N_yY+N_zZ=d \Rightarrow N_x\frac{X}{Z}+N_y\frac{Y}{Z}+N_z=\frac{d}{Z}$，则成像平面中为一条和 Z 相关的直线 $N_xx+N_yy+N_z=\frac{d}{Z}$，令 $Z\to\infty$，则 $N_xx+N_yy+N_z=0$，称之为**消失线**. 并且对于空间中平行的平面（改变 d，不改变法向量 $\boldsymbol{N}$），消失线相同，说明平行平面会消失于同一消失线处.

当 $N_x=N_y=0$ 时，平面扩张到无限远处，所以没有消失线.

3.2 相机标定

3.2.1 坐标系系统



1. **世界坐标系**：三维空间中建立的基准坐标系，用于标记空间点和相机位置，如上图中坐标系 O_w-$X_wY_wZ_w$ 所示.

2. **相机坐标系**：以相机中心 O_c 作为原点，从 O_c 出发垂直于成像平面的射线作为主轴 Z_c，从 O_c 出发与像平面水平平行作为 X_c 轴，从 O_c 出发与像平面平行且铅垂直作为 Y_c 轴，如上图中坐标系 O_c-$X_cY_cZ_c$ 所示.

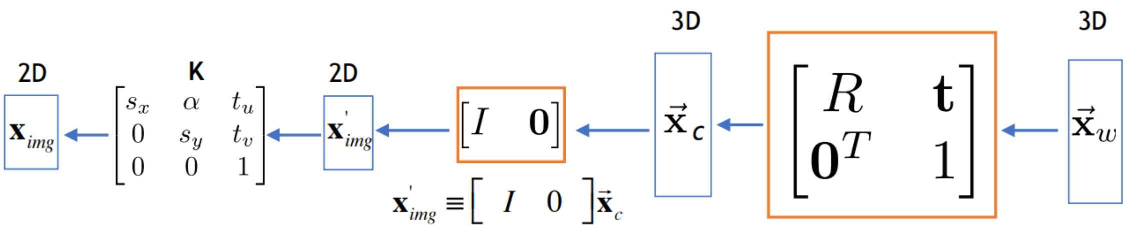
3. **成像平面坐标系（齐次化坐标系，规范化坐标系）**：成像平面为相机坐标系中 $Z_c=1$ 的平面，记成像平面与 Z_c 的交点为原点 p，以像平面水平线和铅垂线分别为 x 轴与 y 轴，上图中坐标系 p-xy 所示.

4. **图像坐标系**：原点 o 位于图像的左下角，平行于 x 轴作为 u 轴，平行于 y 轴作为 v 轴，上图中坐标系 o-uv 所示.

设三维坐标 $\boldsymbol{x}(X,Y,Z)$，则其对应的齐次坐标为四维坐标 $\boldsymbol{x}'(X,Y,Z,1)$，升维以后的齐次坐标能够通过矩阵完成平移操作，便于表示. **以下坐标定义均为齐次坐标.**

我们记三维空间中物体的世界坐标为 $\boldsymbol{x}_w$，相机坐标为 $\boldsymbol{x}_c$（单位：m 或 mm），成像平面坐标为 $\boldsymbol{x}'_{img}$，图像坐标为 $\boldsymbol{x}_{img}$（单位：像素）.

则四个坐标系的转换关系如下图所示



上图变换主要包含三个矩阵：

1. **外参矩阵**：4×4 矩阵，包括 3×3 的旋转矩阵 R 以及一个 3×1 的平移向量 $\boldsymbol{t}$，**将世界坐标系转化为相机坐标系**，该矩阵会随着物体或相机的移动而发生变化.

2. **投影矩阵**：3×4 矩阵，取前三维分量，然后转化为齐次坐标，转化符号记为 $\equiv$. 注意，该过程会产生尺度因子 λ，即缩放比例. 如下式所示

$$[I \quad 0]\boldsymbol{x}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c & Y_c & Z_c \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}'_{img}$$

其中 $[I \quad 0]\boldsymbol{x}_c = \lambda\boldsymbol{x}'_{img}$，$\lambda = 1/Z_c$. 该变换过程就是**透视投影**.

3. **内参矩阵** K：3×3 矩阵，将像素从成像坐标系转化到图像坐标系中，**由相机的自有特性决定**，不随外部物体变化而变化. 其具体表示如下

$$K = \begin{bmatrix} f_x & \alpha & t_u \\ 0 & f_y & t_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 (t_u, t_v) 表示图像坐标系原点在成像坐标系中所处的位置. 由于需要从单位 m 或 mm 转化为像素，所以还需要 f_x，f_y 分别表示沿 x 与 y 轴的缩放比例（相机焦距），由于 o-uv 不一定正交，所以还存在倾斜因子 α.

3.3 相机径向畸变与切向畸变的特点及矫正方法

在实际应用中，由于光学透镜不是完美的，通过透镜边缘的光线会发生偏转，导致偏离成像位置，发生扭曲，称为光学畸变. 光学畸变主要分为两种：

1. 径向畸变：主要由透镜问题产生，是一种非线性扭曲，畸变程度取决于与主点的距离，光线距离透镜中心越远，畸变效果更为严重. 有枕形畸变和桶形畸变两种.

(a) 桶形畸变 (b) 枕形畸变

2. 在相机安装过程中，光轴与成像平面无法完成平行，导致切向畸变.

两种畸变可用如下模型表示：

$$\begin{cases} x_d - x_c = \overbrace{(x_u - x_c)(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \cdots)}^{\text{径向畸变}} + \overbrace{\left[p_1(r^2 + 2(x_u - x_c)^2) + 2p_2(x_u - x_c)(y_u - y_c)\right](1 + p_3 r^2 + \cdots)}^{\text{切向畸变}} \\ y_d - y_c = (y_u - y_c)(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \cdots) + \left[p_2(r^2 + 2(y_u - y_c)^2) + 2p_1(x_u - x_c)(y_u - y_c)\right](1 + p_3 r^2 + \cdots) \end{cases}$$

（下述坐标均在成像坐标系中）其中 (x_u, y_u) 表示理想像素点坐标，(x_d, y_d) 表示畸变图像点坐标，(x_c, y_c) 表示畸变中心，k_n 为镜像畸变系数，p_n 为切向畸变系数，$r^2 = (x_u - x_c)^2 + (y_u - y_c)^2$.

令 $(x_c, y_c) = (0, 0)$，略去部分高阶项，可得简化版畸变模型

$$\begin{cases} x_d = x_u(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_1(r^2 + 2x_u^2) + 2p_2 x_u y_u \\ y_d = y_u(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_2(r^2 + 2y_u^2) + 2p_1 x_u y_u \end{cases} \tag{3.1}$$

通过对畸变参数 k_1, k_2, p_1, p_2 进行求解后，反解求得理想像素点坐标 (x_u, y_u).

3.3.1 张氏标定法

由于世界坐标系可以自由设定，我们不妨取三维平面中的黑白棋盘作为 xOy 平面，则棋盘上的点均有 $Z_w = 0$，由相机成像原理可知

$$x_{img} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \equiv K[R \quad \boldsymbol{t}]x_w = K[\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{r}_3 \quad \boldsymbol{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = K[\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 H 矩阵称为棋盘平面与图像平面之间的**单应性** (Homography) 变换矩阵，由于尺度因子的省略，H 矩阵对应了相机平面到**全体同一偏转角度棋盘平面**的一个同态映射.

通过大量的像素坐标以及对应的棋盘格坐标，可建立多个关于 H 的方程组，H 为 3×3 矩阵，但由于存在一个尺度因子，所以共有 8 个待定参数. 一组对应坐标可以得到两个方程（请见图像对齐2.5.3），所以至少 4 组对应坐标，更多的对应坐标可以通过最小二乘法估计得到 H 矩阵. 下面通过 H 矩阵分别求解内参矩阵 K，外参矩阵以及径向畸变估计.

估计相机内参矩阵

$$H = [\boldsymbol{h}_1 \quad \boldsymbol{h}_2 \quad \boldsymbol{h}_3] = \lambda K[\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{t}] \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \dfrac{1}{\lambda} K^{-1}\boldsymbol{h}_1, \\ \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{1}{\lambda} K^{-1}\boldsymbol{h}_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

由于 $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2$, $||\boldsymbol{r}_1|| = ||\boldsymbol{r}_2||$，于是

$$\begin{cases} \boldsymbol{h}_1^T (K^{-1})^T K^{-1} \boldsymbol{h}_2 = 0, \\ \boldsymbol{h}_1^T (K^{-1})^T K^{-1} \boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_2^T (K^{-1})^T K^{-1} \boldsymbol{h}_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

令

$$B = (K^{-1})^T K^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

由于 B 矩阵是对称阵，所以只需确定下三角部分 6 个参数，令

$$\boldsymbol{b} = [B_{11} \quad B_{12} \quad B_{22} \quad B_{13} \quad B_{23} \quad B_{33}]^T$$

则上述方程3.3可表示为方程 $\begin{cases} \boldsymbol{v}_{12}^T \boldsymbol{b} = 0, \\ [\boldsymbol{v}_{11}^T - \boldsymbol{v}_{22}^T]\boldsymbol{b} = 0. \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{v}_{ij}$ 由 H 矩阵确定，具体形式请见知乎文章[1]. 由于每种不同角度的棋盘图像可以确定不同的 H 矩阵，从而确定 $\boldsymbol{v}_{ij}$，于是每张不同角度的棋盘图像可以确定两个关于 $\boldsymbol{b}$ 的方程，总共有 6 个待定参数，所以需要至少 3 张不同角度的棋盘才能唯一确定内参矩阵.

3.3.2 估计相机外参矩阵

有了内参矩阵 K 以后，我们通过式3.2可知

$$\lambda[\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{t}] = K^{-1}[\boldsymbol{h}_1 \quad \boldsymbol{h}_2 \quad \boldsymbol{h}_3]$$

则

$$\begin{cases} \lambda = ||K^{-1}\boldsymbol{h}_1||_2 = ||K^{-1}\boldsymbol{h}_2||_2, \\ \boldsymbol{t} = K^{-1}\boldsymbol{h}_3/\lambda, \\ \boldsymbol{r}_1 = K^{-1}\boldsymbol{h}_1/\lambda, \\ \boldsymbol{r}_2 = K^{-1}\boldsymbol{h}_2/\lambda, \\ \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2. \end{cases}$$

其中 $||\cdot||_2$ 为 ℓ_2 范数（欧式范数），于是外参矩阵为 $[R \quad \boldsymbol{t}] = [\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{r}_3 \quad \boldsymbol{t}]$.

在实际应用中，由于数据中存在噪音，R 矩阵不一定完全满足旋转矩阵的性质，所以通常使用奇异值分解求解 R.

3.3.3 最大似然估计畸变参数

在实际标定过程中，一般存在大量标定图片同时对参数进行估计，这时可以使用最大似然估计对上述算法进行优化. 假设有 n 张标定图片，每张图片中都有 m 个棋盘格角点，且棋盘格大小一致，棋盘中角点相对位置相同. 利用平方损失函数，构造最小化风险函数如下

$$\min_{K,\boldsymbol{k},R,\boldsymbol{t},\lambda} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}||x_{ij} - x'(K, \boldsymbol{k}, R_i, \boldsymbol{t}_i, \lambda_i, X_j)||^2$$

其中 K 为内参矩阵，$\boldsymbol{k}$ 为径向畸变参数，$[R_i \quad \boldsymbol{t}_i]$ 为第 i 张图像对应的外参矩阵，λ_i 为第 i 张图像对应的尺度因子，第 i 张图像中与棋盘中第 j 个角点坐标 X_j 对应的图像坐标为 x_{ij}，$x'(\cdot)$ 为根据棋盘中角点坐标 X_j 以及由该图片对应的外参数矩阵 $[R_i \quad \boldsymbol{t}_i]$、尺度因子 λ_i 及内参矩阵和径向畸变，预测得到的图像像素坐标.

3.4 双目立体视觉

3.4.1 三角测量

假设有两个内参已知的相机，从两个不同角度拍摄同一物体，物体上的某点 $\boldsymbol{x}_w(X, Y, Z)$，在两个相机拍摄的图像上对应坐标分别为 $\boldsymbol{x}^{(1)}(x_1, y_1), \boldsymbol{x}^{(2)}(x_2, y_2)$，则 $\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(1)} \equiv P^{(1)}\boldsymbol{x}_w \\ \boldsymbol{x}^{(2)} \equiv P^{(2)}\boldsymbol{x}_w \end{cases}$.

[1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/136827980

假设 $P^{(1)}, P^{(2)}$ 已知，求世界坐标 $\boldsymbol{x}_w$，用最小二乘法估计世界坐标 $\boldsymbol{x}_w$，最优化问题如下所示

$$\hat{\boldsymbol{x}}_w = \arg\min_{\boldsymbol{x}_w} \sum_{k=1}^{2} ||\boldsymbol{x}^{(k)} - P^{(k)}\boldsymbol{x}||_2^2$$

其中 $||\boldsymbol{x}^{(k)} - P^{(k)}\boldsymbol{x}_w||_2^2 \equiv \left[x - \frac{P_{11}X + P_{12}Y + P_{13}Z + P_{14}}{P_{31}X + P_{32}Y + P_{33}Z + P_{34}}\right]^2 + \left[y - \frac{P_{21}X + P_{22}Y + P_{23}Z + P_{24}}{P_{31}X + P_{32}Y + P_{33}Z + P_{34}}\right]^2$

上式右边 x, y, P 省略了下标，可以表示 $x_1, y_1, P^{(1)}$ 或者 $x_2, y_2, P^{(2)}$. 称 $||\boldsymbol{x}^{(k)} - P^{(k)}\boldsymbol{x}_w||_2^2$ 为**重建误差 (Reprojection error)**. 推导重建误差的方法就是将世界坐标 $\boldsymbol{x}_w$ 通过 $P^{(k)}$ 转化为齐次坐标，删去第三维分量后，再求与 $\boldsymbol{x}$ 的欧氏距离平方后的结果.

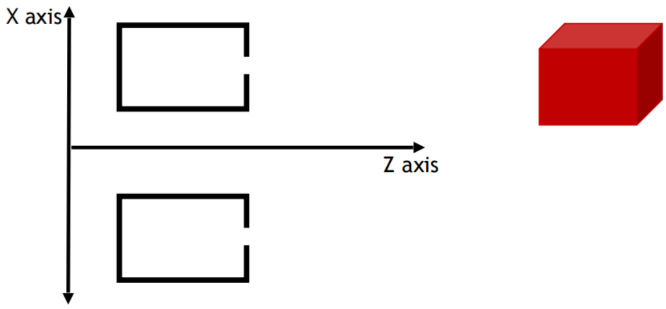
3.5 立体重建（3D 重建）

立体重建 (Stereo reconstruction, 3D reconstruction) 指根据多张不同位置相机的拍摄同一物体的图像，获得该物体的世界坐标.

单目相机也就是相机标定所用的，只需一个相机和标定的点对，可以求出相机的内参与外参，但是无法获得物体相对相机的距离，而通过已知内参的双目相机，可以求出物体到相机的距离，从而求出物体的世界坐标，进行立体重建.

3.5.1 双目相机

双目相机（矫正相机，Rectified cameras）：沿 x 轴方向彼此平行、主轴方向且内参基本相同的两个相机. 若相机内参不同，则需进行**相机校准**，使得两个相机的缩放比例上相同. 如下图所示



设双目相机在 x 轴方向上的距离为 t_x，称为**基线 (baseline)**. 将相机编号为 1,2，以相机 1 作为坐标系原点，空间中物体位于 $\boldsymbol{x}_w(X, Y, Z)$，在两个相机上的像点分别为 $\boldsymbol{x}^{(1)}(x_1, y_1), \boldsymbol{x}^{(2)}(x_2, y_2)$，由成像原理可知：

$$\boldsymbol{x}^{(1)} \equiv [I \quad 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_w \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} \equiv [I \quad \boldsymbol{t}_x] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_w \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + t_x \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

于是 $x_1 = \dfrac{X}{Z}, x_2 = \dfrac{X + t_x}{Z}, y_1 = y_2 = \dfrac{Y}{Z}$，则 $x_2 - x_1 = \dfrac{t_x}{Z} \Rightarrow Z = \dfrac{t_x}{x_2 - x_1} = \dfrac{t_x}{d}$.其中 $d = x_2 - x_1$ 称为**视差 (disparity)** 表示同一物体在两个图像上对应像素点之间的 x 轴方向距离，Z 称为**景深 (depth)** 表示物体距离相机的距离，t_x 为**基线 (baseline)**. 如果我们得到了 d，由于 t_x 已知，于是可得景深 Z.（**上述推导中默认了内参矩阵 K 为单位阵，否则表达式中还需加入焦距** $Z = \dfrac{ft_x}{d}$）

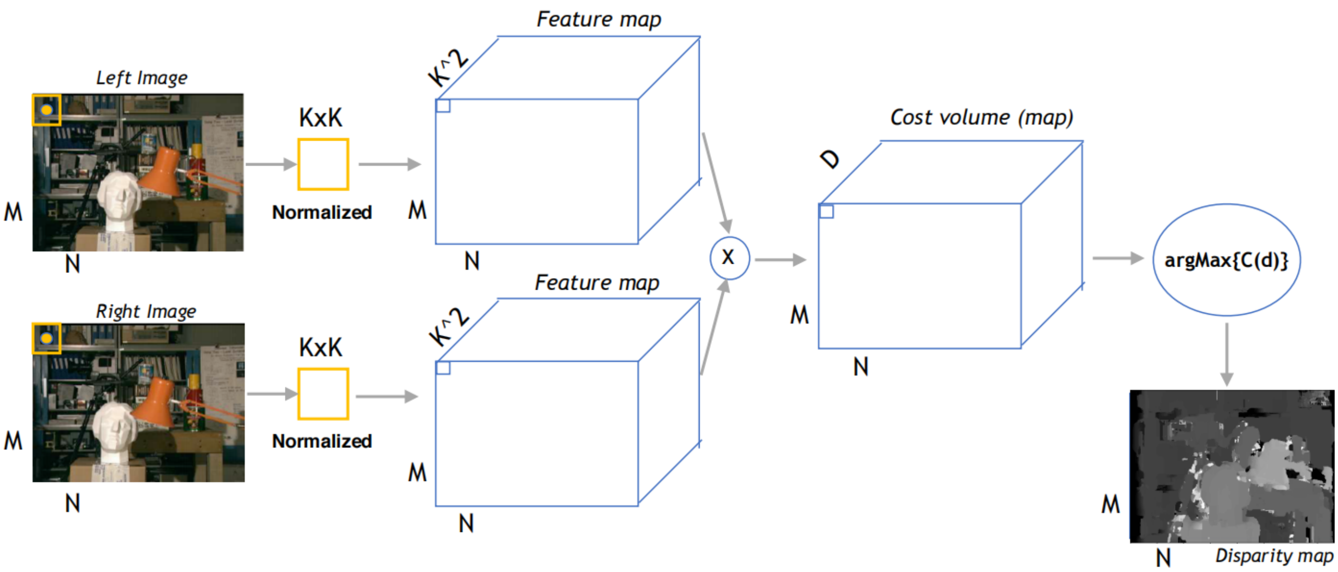
3.5.2 视差估计

由于假设相机位于统一水平面上，所以拍摄出的图像仅在 x 轴方向上发生小范围移动（近处移动大、远处移动小），使用**横向滑动窗口方法匹配相似点**. 设两个相机拍摄统一物体得到的图像分别为 f, g，对于 f 中的像素点 (x_1, y_1)，只需在 g 中 $y = y_1$ 的水平线上寻找相似点，若 (x_1, y_1) 与 $(x_1 + d, y_1)$ 周围图像近似，则可认为 (x_1, y_1) 处的视差为 d. 用 NCC 判断相似性大小.

设总共有 D 种可能的视差，窗口大小为 $k \times k$，具体步骤如下：

1. 考虑 f 中的像素点 (x_1, y_1)，以 (x_1, y_1) 为中心大小为 $k \times k$ 的窗口，以窗口内的像素值集合 X 作为 (x_1, y_1) 处的特征描述子；
2. 选取可能的视差 $d \in D$，取 g 中以 $(x_1 + d, y_1)$ 为中心的大小为 $k \times k$ 的特征描述子 Y；
3. 计算 $NCC(X, Y)$（归一化互相关），若 NCC 相似度大于最优值，记录视差 d；
4. 重复步骤 2,3，知道遍历完所有视差 d.
5. 用最终记录的最优视差 d 作为 (x_1, y_1) 处的视差，计算出该处的景深 $Z = \dfrac{t_c}{d}$.

另一种描述方法：求出特征描述子张量 $M \times N \times K^2$，表示每个像素点对应的窗口特征描述子，**NCC 成本张量（NCC cost volumne）**大小为 $M \times N \times D$，其中 (x, y, d) 表示 $f(x, y), g(x+d, y)$ 对应特征描述子的 NCC 相似度，最后对 NCC 成本张量的第三维求最大值即可得到每个像素点处的视差. 如下图所示：



图像校正 即使两个相机在同一平面上拍摄时，拍摄出的图像仍可能无法保证 x 轴是对齐的，先找到搜索点的**对极线**，将对极线旋转至与 x 轴平行，再做视差估计（对极线内容请见下文）

总的来说，立体重建分为四步：**1. 相机标定；2. 图像校正；3. 计算视差；4. 估计景深**.

3.6 对极几何

3.6.1 基本概念

基线：两个相机入射瞳孔光心构成的连线；

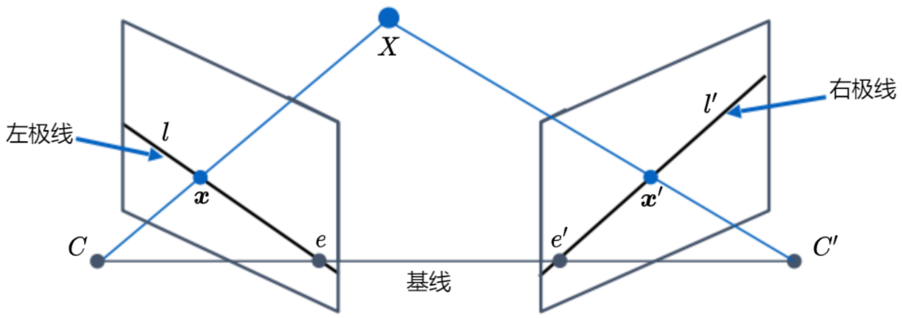
极点：基线与成像平面的交点 e, e'；

对应点：三维空间中点 X 在两个不同成像平面上的像点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$；

极线：像点与极点构成的直线，l 为左极线，l' 为右极线.

对极约束：将对应点搜索问题转化为对极线上搜索问题.（可以解决视差估计中图像不对齐的的搜索问题）

性质：三维空间中物体 X 移动，只有极线和成像点发生变化. 左平面上像点 $\boldsymbol{x}$ 可唯一对应一条右极线 l'，且右像点 $\boldsymbol{x}'$ 一定落在 l' 上（反之亦然）. 固定相机位置，无论如何移动 $\boldsymbol{X}$，均有左极线一定过左极点 e，右极线一定过右极点 e'.



3.6.2 本质矩阵与基础矩阵

设空间中物体位于 $\boldsymbol{x}_w$，由相机成像原理可知

$$\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} \equiv K_1[R \quad \boldsymbol{t}_1]\boldsymbol{x}_w, \quad \boldsymbol{x}_{img}^{(2)} \equiv K_2[R \quad \boldsymbol{t}_2]\boldsymbol{x}_w$$

先假设内参矩阵 K_1, K_2 为单位阵，以相机 1 作为坐标系原点，$\boldsymbol{x}_w'$ 为 $\boldsymbol{x}_w$ 的齐次坐标，则

$$\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} \equiv [I \quad \boldsymbol{0}]\boldsymbol{x}_w' = \boldsymbol{x}_w, \quad \boldsymbol{x}_{img}^{(2)} \equiv [R \quad \boldsymbol{t}]\boldsymbol{x}_w' = R\boldsymbol{x}_w + \boldsymbol{t},$$

双目相机原理式 (3.4) 是上式的特殊形式.

将左式代入右式可得 $\boldsymbol{x}_{img}^{(2)} \equiv R\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} + \boldsymbol{t}$，再左右作外积 $\boldsymbol{x}_{img}^{(2)} \cdot \boldsymbol{t}$ 可得

$$\boldsymbol{x}_{img}^{(2)} \cdot t \times R\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} = \boldsymbol{0}$$

由于外积可写做矩阵乘法形式：$\boldsymbol{t} \times R = [\boldsymbol{t}]_\times R$，其中 $[\boldsymbol{t}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{t}$ 的**反对称矩阵**. 由于向量内积可以表示为矩阵乘法形式 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$，于是可以进一步改写上式：

$$\boldsymbol{x}_{img}^{(2)T}[t]_\times R\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{img}^{(2)T}E\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} = \boldsymbol{0}$$

其中 $E = [t]_\times R$ 称为**本质矩阵**，由相机的相对位置决定.

当 K_1, K_2 为一般情况时，则

$$\boldsymbol{x}_{img}^{(1)} \equiv K_1\boldsymbol{x}_w, \quad \boldsymbol{x}_{img}^{(2)} \equiv K_2[R \quad \boldsymbol{t}]\boldsymbol{x}_w$$

经过上述类似推导可得

$$\boldsymbol{x}_{img}^{(2)T}K_2^{-1}[t]_\times RK_1^{-1}\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}=\mathbf{0}\Rightarrow \boldsymbol{x}_{img}^{(2)T}F\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}=\mathbf{0}$$

其中 $F=K_2^{-1}[t]_\times RK_1^{-1}$ 称为**基础矩阵**.

极线与极点性质解释 以本质矩阵为例，假设固定 $\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}$，令 $\boldsymbol{l}=E\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}$，于是 $\boldsymbol{x}_{img}^{(2)T}\boldsymbol{l}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{l}$ 确定了相机 2 的成像平面上的一条直线，这就是由 $\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}$ 对应的极线 $E\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}$. 类似地，固定 $\boldsymbol{x}_{img}^{(2)}$ 也可以在相机 1 的成像平面上导出对应的极线 $E^T\boldsymbol{x}_{img}^{(2)}$（对极线）.

令 $\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{t}$，则 $\boldsymbol{e}'^TE=\boldsymbol{t}^T[t]_\times R=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}\times R=\mathbf{0}$，于是 $\boldsymbol{e}'^TE\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}=\boldsymbol{e}'^T\boldsymbol{l}=\mathbf{0}$, $(\forall\boldsymbol{l})$，所以相机 2 的全部极线都经过点 $\boldsymbol{e}'$，则 $\boldsymbol{e}'$ 是相机 2 的极点. 类似地，令 $\boldsymbol{e}=R^T\boldsymbol{t}$，可得 $\boldsymbol{e}$ 是相机 1 的极点.

在内参 K_1,K_2 为一般情况下，也就是对于基础矩阵 F，也有对极线 $F\boldsymbol{x}_{img}^{(1)},F^T\boldsymbol{x}_{img}^{(1)}$，极点满足 $e'^TF=\mathbf{0}$, $E\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$，由于 $F\in\mathbb{R}^{3\times3}$，所以 F 的阶数**应该为 2 阶**.（这个性质常用于在计算中校准 F 矩阵）

8 点法估计 F 矩阵 （复习内容中没有包含，大致讲解原理）若不清楚相机内参数 K_1,K_2,R,t 则可通过对应点直接反解 F 矩阵. 对应点满足的方程为 $x'^TFx=0$，其中 x' 与 x 对应. 由于 F 的自由度为 8，每个对应点只能提供一个方程，所以至少需要 8 个对应点. 也可使用最小二乘法或 SVD 分解求解.

求解出的 F 的秩可能不为 2，通过 SVD 分解令第三个特征值为 0，再恢复 F 矩阵.

3.7 运动场与光流场

3.7.1 运动场

令空间中物体位于 $P(X,Y,Z)$，对应的像点为 $p(x,y,f)$，其中 f 表示相机焦距. 由针孔成像原理，有 $p=\dfrac{f}{Z}P$.

考虑物体位置随时间发生变换，则 $P=P(t),p=p(t)$，设空间中物体的位移相对速度为 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=V=-\boldsymbol{t}-\boldsymbol{w}\times P$，其中 $\boldsymbol{t}=(t_x,t_y,t_z)^T$ 为平移向量，$\boldsymbol{w}=(w_x,w_y,w_z)^T$ 为旋转向量. 则空间相对速度的各维度分量为

$$\begin{cases}V_x=-t_x-w_yZ+w_zY,\\ V_y=-t_y-w_zX+w_xZ,\\ V_z=-t_z-w_xY+w_yX.\end{cases}\tag{3.5}$$

像点相对速度为 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\frac{fP}{Z}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{fVZ-fPV_z}{Z^2}=f\dfrac{V}{Z}-p\dfrac{V_z}{Z}$，令

$$\begin{cases}u=\boldsymbol{v}_x=f\dfrac{V_x}{Z}-x\dfrac{V_z}{Z},\\ v=\boldsymbol{v}_y=f\dfrac{V_y}{Z}-y\dfrac{V_z}{Z},\\ \boldsymbol{v}_z=f\dfrac{V_z}{Z}-f\dfrac{V_z}{Z}=0.\end{cases}\tag{3.6}$$

将式 (3.5) 代入式 (3.6) 中，并利用 $Y=\frac{Z}{f}y, X=\frac{Z}{f}x$ 可得**运动场方程 (Motion Field)**

$$\begin{cases} u = \overbrace{\frac{xt_z - ft_x}{Z}}^{\text{平移部分}} + \overbrace{\frac{xy}{f}w_x - (f+\frac{x^2}{f})w_y + yw_z}^{\text{旋转部分}}, \\ v = \frac{yt_z - ft_y}{Z} + (f+\frac{y^2}{f})w_x - \frac{xy}{f}w_y + xw_z. \end{cases}$$

上述方程由两部分构成，一个为平移部分，另一个为旋转部分，注意到旋转部分与深度 Z 无关. 运动场方程还可以写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{Z}\begin{bmatrix} -f & 0 & x \\ 0 & -f & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{xy}{f} & -f-\frac{x^2}{f} & y \\ f+\frac{y^2}{f} & -\frac{xy}{f} & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} =: \frac{1}{Z}A\boldsymbol{t} + B\boldsymbol{w}$$

平移运动场 (Translational field) 只考虑物体做平移运动，令 $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$，当 $t_z \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} u = \frac{t_z}{Z}(x - \frac{ft_x}{t_z}), \\ v = \frac{t_z}{Z}(y - \frac{ft_y}{t_z}). \end{cases}$$

于是上述方程有不动点 $(\frac{ft_x}{t_z}, \frac{ft_y}{t_z})$，该点称为 **FOE(focus of expansion)** 点，表示物体做带有深度变换的平移时，像点运动的相对速度向量 MF 会以 FOE 点作为中心，向外呈放射状，或者向内呈收缩状.

当 $t_z = 0$ 时，有

$$\begin{cases} u = -\frac{ft_x}{Z}, \\ v = -\frac{ft_y}{Z}. \end{cases}$$

于是 FOE 点位于 (∞,∞)，相对速度向量 MF 相互平行.

仅考虑平移运动时，相对速度向量 MF 都与深度 Z 成反比关系.

3.7.2 光流场

定义 6 (光流向量). *光流场是图像中亮度模式的表观运动.*

在理想条件下，光流场与运动场相同. 需要注意的是，如果物体没有运动，光照的变换也有可能使光流场发生变换. 所以需要加入以下三条**光流约束**：

1. **亮度恒常性 (Brightness constancy)**：两个相邻的亮度不会发生变化.
2. **微小运动 (Small motion)**：物体运动距离不大.
3. **空间相关性 (Spatial coherence)**：相邻点具有相同的运动方向.

3.7.3 Lucas-Kanade 光流算法

Lucas-Kanade 光流算法也简称为 L-K 光流算法，设图像为 $I(\cdot)$，由亮度恒常性可得

$$\begin{aligned} &I(x,y,t-1) = I(x+u(x,y), y+v(x,y), t) \approx u(x,y)I_x + v(x,y)I_y + I(x,y,t) \\ \Rightarrow\ & uI_x + vI_y + I_t \approx 0 \end{aligned}$$

令 Ω 为 (x_0, y_0) 的一个小邻域，内部点具有相同的光流向量，定义均方损失函数，则

$$
\begin{aligned}
E(u,v) &= \sum_{(x,y)\in\Omega} w(x,y)(uI_x + vI_y + I_t)^2 \\
&= \sum_{(x,y)\in\Omega} w(x,y)\left(\begin{bmatrix} I_x & I_y & I_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}\right)^2 \\
&= \sum_{(x,y)\in\Omega} w(x,y)\begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_x^2 & I_xI_y & I_xI_t \\ I_yI_x & I_y^2 & I_yI_t \\ I_tI_x & I_tI_y & I_t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $w(x,y)$ 表示 Gauss 核 G_σ，于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E(u,v)}{\partial(u,v)} = 0 \Rightarrow \sum_{(x,y)\in\Omega} w(x,y)\begin{bmatrix} I_x^2 & I_xI_y \\ I_yI_x & I_y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= -\sum_{(x,y)\in\Omega} w(x,y)\begin{bmatrix} I_xI_t \\ I_yI_t \end{bmatrix} \\
\Rightarrow G_\sigma * \begin{bmatrix} I_x^2 & I_xI_y \\ I_yI_x & I_y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= -G_\sigma * \begin{bmatrix} I_xI_t \\ I_yI_t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

通过最小二乘法即可解出 (u,v)，得到 (x_0, y_0) 处的光流向量.

Coarse-to-fine 光流估计　Coarse-to-fine 光流估计是对 L-K 算法的改进，由于需要满足亮度恒常性条件，所以物体的移动不能太大，对两幅图像 $I(x,y,t-1)$ 和 $I(x,y,t)$ 来那个幅图像利用 Gauss 金字塔进行缩放，对每一层处对应图像做 L-K 算法，选取效果最好的一组. 如下图所示：