| 日期 | 科目 | 班级 | 姓名 | 学号 | 序号 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2022 年 10 月 28 日 | 数理统计 | 强基数学 002 | 吴天阳 | 2204210460 | 50 |

# 第四次作业

**题目 1. (22)** 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来满足参数为 $\theta$ 的 Bernoulli 分布的随机样本.

(1). 求解 $\theta(1-\theta)$ 的 C-R 下界.

(2). 若 $\theta(1-\theta)$ 的 UMVUE 存在，对其进行求解.

**解答.** (1). Bernoulli 分布的概率密度函数为 $f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}I_{\{0,1\}}(x)$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta^x(1-\theta^x)) = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log\theta^x(1-\theta)^{1-x}) = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2},$$

则 Fisher 信息量为 $I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log\theta^x(1-\theta)^{1-x})\right] = \frac{1}{(1-\theta)^2} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2}\right)\theta = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$.于是 $\theta(1-\theta)$ 的 C-R 下界为 $\frac{(1-2\theta)^2}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}} = \frac{(1-2\theta)^2\theta(1-\theta)}{n}$.

(2). 由于 $f(x;\theta) = (1-\theta)I_{\{0,1\}}(x)\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}$，令 $a(\theta) = 1-\theta, b(x) = I_{\{0,1\}}(x), c(\theta) = \log\frac{\theta}{1-\theta}, d(x) = x$,则该分布属于指数族,于是 $\sum_{i=1}^n X_i$ 为完备的充分统计量,令 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, $Z = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2$，由于

$$\mathbb{E}(Y) = n\theta,\ \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j\right] = n\theta + n(n-1)\theta^2 = n(n-1)\left(\frac{\theta}{n-1} + \theta^2\right).$$

则 $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n}\right] = \theta,\ \mathbb{E}\left[\frac{z}{n(n-1)} - \frac{Y}{n(n-1)}\right] = \theta^2$，于是

$$\theta(1-\theta) = \mathbb{E}\left[\frac{Y}{n}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{z}{n(n-1)} - \frac{Y}{n(n-1)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{Y}{n-1} - \frac{Z}{n(n-1)}\right],$$

由于 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2$ 是关于完备充分统计量 $Y$ 的函数，且是 $\theta(1-\theta)$ 的无偏估计，所以它是 $\theta(1-\theta)$ 的 UMVUE.

**题目 2. (24)** 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)$, $(\theta > 0)$ 的随机样本，

(1). 求解 $\mu = \theta/(1+\theta)$ 的 MLE.

(2). 求解一个充分统计量，并验证其完备性. 判断 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是否是充分统计量?

(3). 是否存在一个关于 $\theta$ 的函数，使得其存在无偏估计且方差满足 C-R 下界?

(4). 求解 $\theta, 1/\theta, \mu = \theta/(1+\theta)$ 的 UMVUE.

**解答.** (1). 只需求解 $\theta$ 的 MLE：$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1}I_{(0,1)}(x_i)$，由

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(n\log\theta + \sum_{i=1}^n(\theta-1)\log(x_i) + \sum_{i=1}^n \log I_{(0,1)}(x_i)\right) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) = 0$$

可得 $\theta$ 的 MLE 为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(x_i)}$. 则 $\mu$ 的 MLE 为

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} = \frac{n}{n - \sum_{i=1}^n \log(x_i)}.$$

(2). 由于 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) = \theta I_{(0,1)}(x) \exp\{(\theta-1)\log x\}$，令 $a(\theta) = \theta,\ b(x) = I_{(0,1)}(x)$, $c(\theta) = \theta - 1,\ d(x) = \log x$，于是该分布属于指数族，则 $\sum\limits_{i=1}^n d(x_i) = \sum\limits_{i=1}^n \log x_i$ 是一个完备的充分统计量. 由于 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 不满足因子分解定理，所以不是充分统计量.

(3). 由于 $f_{-\log X}(x) = f_X(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x} = \theta \mathrm{e}^{-(\theta-1)x}\mathrm{e}^{-x} I_{(0,1)}(\mathrm{e}^{-x}) = \theta \mathrm{e}^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$. 于是 $-\log X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$. 令 $T = -\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$，则 $nT \sim \Gamma(n,\theta) \Rightarrow \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\theta}$. 则 $T$ 是 $\frac{1}{\theta}$ 的无偏估计，且

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta + (\theta-1)\log x) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log x_i = -n\left(T - \frac{1}{\theta}\right)$$

所以 C-R 方程取到等号，故 $T = -\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$ 取到 $\frac{1}{\theta}$ 的 C-R 下界.

(4). 由第三小问可知，$-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$ 是 $\frac{1}{\theta}$ 的 UMVUE.

做待定系数，令 $\frac{c}{-\sum_{i=1}^n \log X_i}$ 是 $\theta$ 的无偏估计，记 $Y = -\sum\limits_{i=1}^n \log X_i$，则

$$\mathbb{E}\left[\frac{c}{-\sum_{i=1}^n \log X_i}\right] = \int_0^\infty \frac{c}{y}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)} y^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta y}\,\mathrm{d}y = \frac{c\theta^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} = \frac{c}{n-1}\theta,$$

所以 $c = n-1$，故 $\frac{n-1}{-\sum_{i=1}^n \log X_i}$ 是 $\theta$ 的 UMVUE.

$\theta(1-\theta)$ 的一个无偏估计为 $X_1$，可以得到 $\mathbb{E}\left[X_1 \middle| -\sum\limits_{i=1}^n \log X_i\right] = \frac{n-1}{s}\int_0^1 (1 + \frac{\log x}{s})^{n-2}\,\mathrm{d}x$，但是该积分不会计算，就没写了（应该可以换元后凑 Gamma 分布得到积分结果）.

**题目 3. (29)** 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\theta, 1)$ 的随机样本.

(1). 分别求解关于 $\theta, \theta^2, P(X>0)$ 的 C-R 下界.

(2). 当 $n=1$ 时，是否存在关于 $\theta^2$ 的无偏估计？若存在，求解之.

(3). 是否存在关于 $P(X>0)$ 的无偏估计？若存在，求解之.

(4). 求解 $P(X>0)$ 的 MLE.

(5). 是否存在关于 $\theta^2$ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

(6). 是否存在关于 $P(X>0)$ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

**解答.** (1). $N(\theta,1)$ 的概率密度函数为 $f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right\}$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\log 2\pi}{2} - \frac{(x-\theta)^2}{2}\right) = x - \theta,$$

Fisher 信息量为 $I(\theta)=\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right]^2=\mathbb{E}[x^2-2\theta x+\theta^2]$，由于 $\mathbb{E}(x^2)=\mathrm{Var}(X)+[\mathbb{E}(X)]^2=1+\theta^2$，于是 $I(x)=1+\theta^2-2\theta^2+\theta^2=1$.

所以 $\theta$ 的 C-R 下界为 $\frac{1}{n}$，$\theta^2$ 的 C-R 下界为 $\frac{4\theta^2}{n}$.

由于 $X-\theta\sim N(0,1)$，则

$$P(x>0)=P(x-\theta>-\theta)=1-P(x-\theta\leqslant-\theta)=1-\Phi(-\theta)=\Phi(\theta),$$

所以 $P(x>0)$ 的 C-R 下界为 $\frac{(\Phi'(-\theta))^2}{n}=\frac{f(\theta;1)^2}{n}=\frac{\mathrm{e}^{-\theta^2}}{2\pi n}$.

(2). 由于 $\mathbb{E}(X_1^2)=1+\theta^2$，则 $X_1^2-1$ 是 $\theta^2$ 的无偏估计.

(3). 由于 $\mathbb{E}(I(X_1>0))=\int_0^\infty f(x;\theta)\,\mathrm{d}x=P(X>0)$，则 $I(X_1>0)$ 是 $P(X>0)$ 的无偏估计.

(4). 只需求解 $\theta$ 的 MLE：

$$\log\mathcal{L}(\theta)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta)=\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)=0$$

则 $\theta$ 的 MLE 为 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $P(X>0)=1-\Phi(-\theta)=\Phi(\theta)$，则 $P(X>0)$ 的 MLE 为 $\Phi(\bar{X})$.

(5). 由于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)+\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right]^2=\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(X_i)+(n\mathbb{E}(X))^2=n+n^2\theta^2$$

则 $\theta^2$ 的 UMVUE 为 $\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2-n\right]$.

(6). 令 $S=\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $I(X_1>0)$ 是 $P(X>0)$ 的 UMVUE，则

$$\mathbb{E}\left[I(X_1>0)\Big|\sum_{i=1}^n X_i=s\right]=P(X_1>0|\sum_{i=1}^n X_i=s)=\int_0^\infty f(x|s)\,\mathrm{d}x$$

令 $Y=\sum_{i=2}^n X_i$，则 $Y$ 与 $X_1$ 独立，$f_{X_1,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{n-1}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}-\frac{(x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)}\right\}$.

变量代换得

$$f_{X_1,S}(x,s)=f_{X,Y}(x,s-x)\cdot 1=\frac{1}{2\pi\sqrt{n-1}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}-\frac{(s-x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)}\right\}$$

于是

$$
\begin{aligned}
f(x|s) = \frac{f(x,s)}{f(s)} &= \sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2} - \frac{(s-x-(n-1)\theta)^2}{2(n-1)} + \frac{(s-n\theta)^2}{2n}\right\} \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}x - \frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2\right\} \mathrm{d}x \\
&= 1 - \Phi(-\frac{s}{\sqrt{n(n-1)}}) = \Phi(\frac{s}{\sqrt{n(n-1)}})
\end{aligned}
$$

则 $P(X>0)$ 的 UMVUE 为 $\Phi(\frac{n\bar{X}}{\sqrt{n(n-1)}})$.

**题目 4. (30)** 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布随机样本，求解关于 $\tau(\lambda)=(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$ 的无偏估计量，MLE 和 UMVUE.

**解答.** Poisson 分布的概率密度函数为 $f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$.

由于 $\mathbb{E}(I(X_1=0)+I(X_1=1)) = P(X_1=0)+P(X_1=1) = (1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$，所以 $I(X_1=0)+I(X_1=1)$ 是 $(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$ 的无偏估计.

$$
\log\mathcal{L}(\lambda) = \log\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}I_{\{0,1,\cdots\}}(x) = \sum_{i=1}^n x_i\log\lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i! - n\lambda + \sum_{i=1}^n \log I_{\{0,1,\cdots\}}(x).
$$

于是 $\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}=\bar{X}$，则 $\tau(\lambda)$ 的 MLE 为 $(1+\bar{X})\mathrm{e}^{-\bar{X}}$.

由于 $f(x;\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{I_{\{0,1,\cdots\}}(x)}{x!}\exp\{-x\log\lambda\}$，令 $a(\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda}$, $b(x)=\frac{I_{\{0,1,\cdots\}}(x)}{x!}$, $c(\lambda)=-\log\lambda$, $d(x)=x$，则该分布属于指数族，于是 $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ 是完备充分统计量. 则

$$
\mathbb{E}\left[I(X_1=0)+I(X_1=1)|n\bar{X}=s\right] = P\left[X_1=0|n\bar{X}=s\right] + P\left[X_1=1|n\bar{X}=s\right]
$$

由于 $n\bar{X}\sim\text{Poi}(n\lambda)$，于是 $P(n\bar{X}=s)=\frac{(n\lambda)^s}{s!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$，且

$$
P(X_1=0,n\bar{X}=s) = P(X_1=0)P(\sum_{i=2}^n X_i=s) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{((n-1)\lambda)^s}{s!}\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda} = \frac{(n-1)^s\lambda^s}{s!}\mathrm{e}^{-n\lambda}
$$

$$
P(X_1=1,n\bar{X}=s) = P(X_1=1)P(\sum_{i=2}^n X_i=s-1) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{((n-1)\lambda)^{s-1}}{(s-1)!}\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda} = \frac{(n-1)^{s-1}\lambda^s}{(s-1)!}\mathrm{e}^{-n\lambda}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I(X_1=0)+I(X_1=1)|n\bar{X}=s\right] &= \frac{P(X_1=0,n\bar{X}=s)}{P(n\bar{X}=s)} + \frac{P(X_1=1,n\bar{X}=s)}{P(n\bar{X}=s)} \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^s + \frac{s}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-1}.
\end{aligned}
$$

则 $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}} + \bar{X}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}-1}$ 是 $\tau(\lambda)$ 的 UMVUE.

**题目 5. (31)** 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\dfrac{2x}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本.

(1). 求解关于 $\theta$ 的 MLE.

(2). $Y_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是充分统计量吗? $Y_n$ 是完备的吗?

(3). 是否存在关于 $\theta$ 的 UMVUE. 若存在，求解之.

**解答.** (1). 极大似然函数为

$$\mathcal{L}(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x_i)=\frac{2}{\theta^{2n}}I_{[0,y_n]}(y_1)I_{[y_n,\infty)}(\theta)\prod_{i=1}^{n}x_i.$$

则 $\theta$ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=Y_n$.

(2). 由于 $\mathcal{L}(\theta)=I_{[0,y_n]}(y_1)\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\dfrac{2}{\theta^{2n}}I_{[y_n,\infty)}(\theta)=h(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(y_n;\theta)$，所以 $Y_n$ 是充分统计量. 由于 $f_{Y_n}(y)=nF(y)^{n-1}f(y)=n\left(\dfrac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{2y}{\theta^2}=\dfrac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n-1}$，对于任意的实值函数 $z(\cdot)$，有下式成立

$$0=\mathbb{E}(z(Y_n))=\int_0^\theta z(y)\frac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n-1}\,\mathrm{d}y\Rightarrow\int_0^\theta z(y)y^{2n-1}\,\mathrm{d}y=0$$

对 $\theta$ 求导可得 $z(\theta)\theta^{2n-1}=0$, $(\theta>0)$，则 $z(\theta)\equiv 0$，于是 $P(z(Y_n)=0)=1$，故 $Y_n$ 是完备的.

(3). 由于

$$\mathbb{E}(Y_n)=\int_0^\theta y\cdot\frac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n-1}\,\mathrm{d}y=\frac{2n}{2n+1}\theta$$

则 $\dfrac{2n+1}{2n}Y_n$ 是 $\theta$ 的 UMVUE.

**题目 6. (32)** 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}I_{(0,\infty)}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机样本.

(1). 当 $\theta>1$ 时，求解 $\theta$ 的矩估计.

(2). 求解 $1/\theta$ 的 MLE.

(3). 如果完备充分统计量存在，对其进行求解.

(4). 求解关于 $1/\theta$ 的 C-R 下界.

(5). 求解关于 $1/\theta$ 的 UMVUE.

(6). 求解关于 $\theta$ 的 UMVUE.

**解答.** (1). $\mathbb{E}(\bar{X})=\mathbb{E}(X)=\displaystyle\int_0^\infty x\theta(1+x)^{-(1+\theta)}\,\mathrm{d}x=\theta\int_1^\infty(x-1)x^{-(1+\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta-1}$，于是 $\theta$ 的矩估计为 $\dfrac{1}{\bar{X}}+1$.

(2). 由于 $\log L(\theta)=\log\theta^n\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-(1+\theta)}=n\log\theta-(1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$，则 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=\dfrac{n}{\theta}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)=0$，于是 $\theta$ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$，所以 $1/\theta$ 的 MLE 为 $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}$.

(3). 由于 $f(x;\theta)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}I_{(0,\infty)}(x)=\theta I_{(0,\infty)}(x)\exp\{-(1+\theta)\log(1+x)\}$，令 $a(\theta)=\theta$, $I_{(0,\infty)}(x)=b(x)$, $c(\theta)=-(1+\theta)$, $d(x)=\log(1+x)$，所以该分布属于指数族，则 $\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)$ 为完备充分统计量.

(4). 由于 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta-(1+\theta)\log(1+x))=\dfrac{1}{\theta}-\log(1+x)$，$\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)=-\dfrac{1}{\theta^2}$，则 Fisher 信息量为 $I(\theta)=-\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]=\dfrac{1}{\theta^2}$，则 $1/\theta$ 的 C-R 下界为 $\dfrac{[(1/\theta)']^2}{nI(\theta)}=\dfrac{1}{n\theta^2}$.

(5). 令 $Y=\log(1+X)$，则 $f_Y(y)=f_X(\mathrm{e}^y-1)\mathrm{e}^y=\theta(\mathrm{e}^y)^{-(1+\theta)}\mathrm{e}^y=\theta\mathrm{e}^{-\theta y}\sim\mathrm{Exp}(\theta)$.则 $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)\right]=n\mathbb{E}(Y)=\dfrac{n}{\theta}$，则 $\dfrac{1}{\theta}$ 的 UMVUE 为 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)$.

(6).（该过程与 24.(4) 求解 $\theta$ 的无偏估计方法完全一致，均为 Gamma 分布的变式）做待定系数，令 $\dfrac{c}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}$ 为 $\theta$ 的无偏估计，记 $Y=\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)$，则 $Y\sim\Gamma(n,\theta)$，且

$$\mathbb{E}\left[\frac{c}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}\right]=\int_0^{\infty}\frac{c}{y}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta y}\,\mathrm{d}y=\frac{c\theta^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}}=\frac{c}{n-1}\theta,$$

所以 $\theta$ 的 UMVUE 为 $\dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)}$.