日期	科目	班级	姓名	学号
2025 年 6 月 16 日	随机过程	人工智能 B2480	吴天阳	4124136039

第二次作业　Poisson 过程

题目 1. P283 1. 修理一个机器所需的时间 T 是均值为 $1/2$（小时）的指数随机变量.

(a) 问修理时间超过 $1/2$ 小时的概率是多少?

(b) 已知持续时间超过 12 小时，问修理时间至少需要 $12\frac{1}{2}$ 小时的概率是多少?

解答. (a) 由已知有，T 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布，则

$$\mathrm{P}(T>1/2)=e^{-2\cdot\frac{1}{2}}=e^{-1}\approx 0.3679.$$

(b) 指数分布具有无记忆性，则

$$\mathrm{P}\left(T>12+\frac{1}{2}\middle|T>12\right)=\mathrm{P}(T>1/2)=e^{-1}\approx 0.3679.$$

题目 2. P283 10. 令 X 和 Y 是分别有速率 λ 和 μ 的独立指数随机变量. 令 $M=\min(X,Y)$. 求

(a) $\mathbb{E}[MX|M=X]$,

(b) $\mathbb{E}[MX|M=Y]$,

(c) $\mathrm{Cov}(X,M)$.

解答. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[MX|M=X]=\mathbb{E}[X^2|X<Y]&=\int_0^\infty x^2\frac{p(x)P(Y>x)}{P(X<Y)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty x^2\frac{\lambda e^{-\lambda x}e^{-\mu x}}{\lambda/(\lambda+\mu)}\mathrm{d}x\\&=(\lambda+\mu)\int_0^\infty x^2e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^3}\int_0^\infty\frac{(\lambda+\mu)^3}{2!}x^2e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{(\lambda+\mu)^2}\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}[MX|M=Y]=\mathbb{E}[XY|Y<X]=\frac{\int_0^\infty\int_0^x xyf_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{P(Y<X)}$$

其中分母为 $P(Y<X)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$，分子为

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^x xyf_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\int_0^x xy\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \int_0^\infty \lambda\mu xe^{-\lambda x}\int_0^x ye^{-\mu y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \int_0^\infty \lambda\mu xe^{-\lambda x}\left(-\frac{x}{\mu}e^{-\mu x}+\frac{1}{\mu^2}(1-e^{-\mu x})\right)\mathrm{d}x\\
&= -\lambda\int_0^\infty x^2e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{\mu}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\mu}\int_0^\infty xe^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}+\frac{1}{\lambda\mu}-\frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)^2}\\
&= \frac{\mu(3\lambda+\mu)}{\lambda(\lambda+\mu)^3}
\end{aligned}$$

带回可得

$$\mathbb{E}[MX|M=Y]=\frac{\frac{\mu(3\lambda+\mu)}{\lambda(\lambda+\mu)^3}}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}=\frac{3\lambda+\mu}{\lambda(\lambda+\mu)^2}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[MX] &= \mathbb{E}[MX|M=X]P(M=X)+\mathbb{E}[MX|M=Y]P(M=Y)\\
&= \frac{2}{(\lambda+\mu)^2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{3\lambda+\mu}{\lambda(\lambda+\mu)^2}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}\\
&= \frac{2\lambda^2+3\lambda\mu+\mu^2}{\lambda(\lambda+\mu)^3}
\end{aligned}$$

题目 3. P287 36. 以 $S(t)$ 记一种证券在时间 t 的价格. 过程 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 的一个流行的模型假设价格直到一个“冲击”发生前保持不变，在冲击发生时价格乘上一个随机因子. 如果我们以 $N(t)$ 记在时间 t 之前冲击的个数，而以 X_i 记第 i 个乘积因子，那么模型假设了

$$S(t)=S(0)\prod_{i=1}^{N(t)}X_i$$

其中在 $N(t)=0$ 时，$\prod_{i=1}^{N(t)}X_i=1$. 假设 X_i 是速率 μ 的独立指数随机变量，$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程，$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 独立于 X_i，且 $S(0)=s$.

(a) 求 $\mathbb{E}[S(t)]$.

(b) 求 $\mathbb{E}[S^2(t)]$.

解答. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(t)] &= \mathbb{E}\left[s(0)\prod_{i=1}^{N(t)}X_i\right]=s\sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}[X_1]^nP(N(t)=n)\\
&= s\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\mu^n}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\
&= se^{\lambda t(1/\mu-1)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S^2(t)] = \mathbb{E}\left[s^2(0)\prod_{i=1}^{N(t)} X_i^2\right] &= s^2\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[X_1^2]^n P(N(t)=n)\\ &= s^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\mu^2}\right)\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\ &= s^2 e^{\lambda t(2/\mu^2-1)}\end{aligned}$$

题目 4. P287 38. 令 $\{M_i(t), t \geqslant 0\}(i=1,2,3)$ 是速率分别为 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 的独立 Poisson 过程，并且设

$$N_1(t) = M_1(t) + M_2(t), \quad N_2(t) = M_2(t) + M_3(t)$$

随机过程 $\{(N_1(t), N_2(t)), t \geqslant 0\}$ 称为二维 Poisson 过程.

(a) 求 $P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}$.

(b) 求 $\mathrm{Cov}(N_1(t), N_2(t))$.

解答. (a) 设 $M_2(t)=k$，且 $k \geqslant 0, k \leqslant \min(n,m)$，则 $M_1(t)=n-k, M_3(t)=m-k$，于是

$$\begin{aligned}P(N_1(t)=n, N_2(t)=m) &= \sum_{k=0}^{\min(n,m)} P(M_1(t)=n-k)P(M_2(t)=k)P(M_3(t)=m-k)\\ &= \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k\lambda_3^{m-k}t^{n+m-k}}{(n-k)!k!(m-k)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(N_1(t), N_2(t)) &= \mathrm{Cov}(M_1(t)+M_2(t), M_2(t)+M_3(t))\\ &= \mathrm{Cov}(M_1(t), M_2(t)) + \mathrm{Cov}(M_1(t), M_3(t)) + \mathrm{Cov}(M_2(t), M_2(t)) + \mathrm{Cov}(M_2(t), M_3(t))\end{aligned}$$

由于 M_1, M_2, M_3 相互独立，只需考虑 $\mathrm{Cov}(M_2(t), M_2(t)) = \mathrm{Var}(M_2(t), M_2(t)) = \lambda_2 t$，综上

$$\mathrm{Cov}(N_1(t), N_2(t)) = \lambda_2 t.$$

题目 5. P288 40. 证明若 $\{N_i(t), t \geqslant 0\}$ 是速率为 $\lambda_i(i=1,2)$ 的独立 Poisson 过程，则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是速率为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程，其中 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

证明. 1. $N(0) = N_1(0) + N_2(0)$ 2. 由于 $N_1(t), N_2(t)$ 均满足独立增量性，则 $N(t)$ 也满足独立增量性. 3. 由于 $N_1(t), N_2(t)$ 均满足平稳增量性，则 $N(t)$ 也满足平稳增量性. 4. 由于

$$\begin{aligned}P(N(t)=n) = \sum_{k=0}^{n} P(N_1(t)=k)P(N_2(t)=n-k) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}t^k}{i!(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\\ &= \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\end{aligned}$$

则 $N(t)$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布. □

题目 6. P289 53. 某水库的蓄水水平按每天 1000 单位的常数速率损耗．水库水源由随机发生的降雨补给．降雨按每天 0.2 的速率的 Poisson 过程发生．由一次降雨加进水库的水量以概率 0.8 为 5000 单位，而以概率 0.2 为 8000 单位，现在的蓄水水平刚刚稍低于 5000 单位．

(a) 在 5 天后水库空的概率是多少？

(b) 在以后的 10 天中的某个时间水库空的概率是多少？

解答. (a) 设 $N(t)$ 表示 t 天内降雨次数，$N(t) \sim \text{Poisson}(0.2t)$，由于 5 天消耗的水为 $5 \times 1000 = 5000$ 单位，则 5 天后水库空当且仅当没有发生一次降水，则

$$P(5\text{ 天后空}) = P(N(5) = 0) = e^{-0.2 \cdot 5} = e^{-1} \approx 0.3679.$$

(b) 设 T_1 为第一次 5000 单位降雨的发生时间，T_2 为第二次降雨的发生时间，则 $T_1 \sim \text{Exp}(0.16)$，$T_2 \sim \text{Exp}(0.2)$，且 T_1, T_2 独立，10 天中的某天为空，当且仅当，第 5 天为空或第 10 天为空，且二者独立，由 (a) 可知第 5 天为空的概率为 e^{-1}，考虑第 10 天为空的概率

$$\begin{aligned} P(\text{第 10 天空}) &= P(T_1 \leqslant 5, T_2 > 10 - T_1) = \int_0^5 0.16 e^{-0.16t} e^{-0.2(10-t)} \mathrm{d}t \\ &= 0.16 e^{-2} \int_0^5 e^{0.04t} \mathrm{d}t = 4e^{-2}\left(e^{0.2} - 1\right) \end{aligned}$$

综上

$$P(10\text{ 天中某天为空}) = P(\text{第 5 天空}) + P(\text{第 10 天空}) = e^{-1} + 4e^{-2}(e^{0.2} - 1)$$

题目 7. P291 68. 假设有随机振幅的电击发生的时间按速率为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 分布．假设相继的电击的振幅与其他振幅和电击到达的时间都独立，且振幅有一个均值为 μ 的分布 F．再假设电击的振幅对时间按指数速率 α 递减，即一个初始振幅 A 经过一个附加的时间 x 损耗后其值为 $Ae^{-\alpha x}$．以 $A(t)$ 记在时间 t 的所有振幅的和．即

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} A_i e^{-\alpha(t - S_i)}$$

其中 A_i 和 S_i 是初始振幅和电击 i 的到达时间.

(a) 通过取条件于 $N(t)$，求 $\mathbb{E}[A(t)]$.

(b) 不作任何计算，解释为什么 $A(t)$ 与例 5.21 中 $D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_i} C_i$ 有相同的分布.

解答. (a) 由于

$$\mathbb{E}[A(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[A(t) | N(t) = n] P(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[A(t) | N(t) = n] \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

考虑

$$\mathbb{E}[A(t)|N(t)=n]=\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n}A_ie^{-\alpha(t-S_i)}|N(t)=n]=\mu\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[e^{-\alpha(t-S_i)}|N(t)=n]$$

当 $N(t)=n$ 时，$S_i\sim U(0,t)$ 为均匀分布，则

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha(t-S_i)}|N(t)=n]=\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\mathrm{d}s=\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$$

则

$$\mathbb{E}[A(t)|N(t)=n]=\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}=\frac{n\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha t}$$

综上

$$\mathbb{E}[A(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\frac{\lambda\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}$$

(b) 不难看出 A_i 和 C_i 都是均值为 μ 的分布，且都与到达时间独立，又由于当 $N(t)=n$ 时，$t-S_i$ 和 S_i 分布相同，都是服从于 $U(0,t)$，且指数函数为单调变换，因此 $D(t)$ 和 $A(t)$ 中的每一项同分布，故 $D(t)$ 和 $A(t)$ 有相同的分布.

题目 8. P294 85. 某保险公司在寿险项目上按每周速率 $\lambda=5$ 的 Poisson 过程支付理赔件数. 如果每款保险赔付的金额按均值为 \$2000 指数地分布，问在 4 周的范围中，保险公司赔付的金额的均值与方差是多少?

解答. 设 N 为 4 周内的理赔次数，则 $N\sim$ Poisson(20)，设每次的理赔金额为 X_i，则 $X_i\sim$ Exp(1/2000)，设 4 周内的赔付金额为 $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]]=\mathbb{E}[N\mathbb{E}[X_i]]=\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_i]=20\cdot 2000=40000,\\ \mathrm{Var}(S)&=\mathbb{E}[\mathrm{Var}(S|N)]+\mathrm{Var}(\mathbb{E}[S|N])\\ &=\mathbb{E}[N\mathrm{Var}(X_i)]+\mathrm{Var}(N\mathbb{E}[X_i])\\ &=\mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_i)+\mathbb{E}^2[X_i]\mathrm{Var}(N)=\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_i^2]=20\cdot 2\cdot 2000^2=1.6\times 10^8.\end{aligned}$$