日期	科目	姓名，学号
2021 年 11 月 7 日	离散数学	吴天阳 2204210460

习题六

14. 解答.

(1). 不是，因为 $(-1,-2),(2,1)\in R$，但 $(-1+2,1-2)=(1,-1)\notin R$，则 R 不是同余关系。

(2). 不是，因为 $(-5,4)\in R$，但 $(-5-5,4+4)=(-10,8)\notin R$，则 R 不是同余关系。

(3). 不是，因为 $(1,1),(-1,1)\in R$，但 $(1-1,1+1)=(0,2)\notin R$，则 R 不是同余关系。

(4). 不是，因为 $(2,1)\in R$，但 $(1,2)\notin R$，则 R 不是对称的，所以 R 不是等价关系，更不是同余关系。

17. 解答. 构造 $X\to Y$ 上的映射 σ 如下：

$$\sigma:\mathbb{N}\to\{0,1\}$$
$$n\mapsto\begin{cases}0, & n\text{为偶数;}\\ 1, & n\text{为奇数.}\end{cases}$$

下面证明 σ 是 $X\to Y$ 上的满同态。

设 $n_1,n_2,m_1,m_2\in\mathbb{N}$，其中 n_1,n_2 为偶数，m_1,m_2 为奇数，所以

$$\sigma(n_1)\sigma(n_2)=0\times 0=0=\sigma(n_1n_2)$$
$$\sigma(n_1)\sigma(m_1)=0\times 1=0=\sigma(n_1m_1)$$
$$\sigma(m_1)\sigma(m_2)=1\times 1=1=\sigma(m_1m_2)$$

故 σ 保运算，又由于 $\sigma(0)=0,\sigma(1)=1$，所以 σ 是满同态。

综上，Y 是 X 的同态像。

19.

证明. 由于 f_1, f_2 是 $\langle X, *\rangle \to \langle Y, \oplus\rangle$ 的同态函数，且 $*$ 和 $\oplus$ 满足交换律和结合律，则

$$\begin{aligned}
h(x_1) \oplus h(x_2) =& f_1(x_1) \oplus f_2(x_1) \oplus f_1(x_2) \oplus f_2(x_2) \\
\xlongequal{\text{交换律}}& f_1(x_1) \oplus f_1(x_2) \oplus f_2(x_1) \oplus f_2(x_2) \\
\xlongequal{\text{结合律}}& (f_1(x_1) \oplus f_1(x_2)) \oplus (f_2(x_1) \oplus f_2(x_2)) \\
\xlongequal{\text{保运算}}& f_1(x_1x_2) \oplus f_2(x_1x_2) \\
=& h(x_1x_2)
\end{aligned}$$

□

补充题：　解答.

由二元运算表知，$\langle 2^A, \cap, \cup\rangle$, $\langle B, \wedge, \vee\rangle$ 都是 交换群，则

$$h(\varnothing) \wedge h(\varnothing) = 1 \wedge 1 = 1 = h(\varnothing) = h(\varnothing \cup \varnothing)$$

$$h(\varnothing) \vee h(\varnothing) = 1 \vee 1 = 1 = h(\varnothing) = h(\varnothing \cap \varnothing)$$

$$h(\varnothing) \wedge h(A) = 1 \wedge 0 = 0 = h(A) = h(\varnothing \cup A)$$

$$h(\varnothing) \vee h(A) = 1 \vee 0 = 1 = h(\varnothing) = h(\varnothing \cap A)$$

$$h(A) \wedge h(A) = 0 \wedge 0 = 0 = h(A) = h(A \cup A)$$

$$h(A) \vee h(A) = 0 \vee 0 = 0 = h(A) = h(A \cap A)$$

综上，h 是 $\langle 2^A, \cap, \cup\rangle \to \langle B, \wedge, \vee\rangle$ 上的同态函数，并且将运算 $\cap$ 映射为 $\vee$，$\cup$ 映射为 $\wedge$。

23.

证明. 设 $x, y, z \in S$，则

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z =& (x * a * y) \oplus z \\
=& (x * a * y) * a * z \\
\xlongequal{*\ \text{运算具有结合律}}& x * a * (y * a * z) \\
=& x \oplus (y * a * z) \\
=& x \oplus (y \oplus z)
\end{aligned}$$

故 $\oplus$ 运算满足结合律，所以 $\langle S, \oplus\rangle$ 是半群。 □

27.

证明. (1). 反设 $x*x=y$ 且 $y\neq x$，则 $x*y\neq y*x$，但

$$y*x=(x*x)*x=x*(x*x)=x*y$$

与 $x*y\neq y*x$ 矛盾，所以 $x*x=x$。

(2). 反设 $x*y*x=z$ 且 $z\neq x$，则 $x*z\neq z*x$，但

$$x*z=x*(x*y*x)=x*y*x=(x*y*x)*x=z*x$$

与 $x*z\neq z*x$ 矛盾，所以 $x*y*x=x$。

(3). 反设 $x*y*z=a$ 且 $a\neq x*z$，则 $x*z*a\neq a*x*z$，但

$$\begin{aligned}x*z*a=&x*z*(x*y*z)\\=&(x*z*x)*y*z=x*y*z=x*y*(z*x*z)\\=&(x*y*z)*x*z=a*x*z\end{aligned}$$

与 $x*z*a\neq a*x*z$ 矛盾，所以 $x*y*z=x*z$。 □

29.

证明. (1). 反设 $x*y\neq y*x$，不妨令 $x*y=x,y*x=y$，则

$$y=x*x=(x*y)*x=x*(y*x)=x*y=x$$

与 $x\neq y$ 矛盾，另一种情况 $x*y=y,y*x=x$，则

$$y=x*x=x*(y*x)=(x*y)*x=y*x=x$$

也与 $x\neq y$ 矛盾。

综上 $x*y=y*x$。

(2). 反设 $y*y=x$，不妨令 $x*y=y*x=x$，则

$$\begin{aligned}&y*y=x\\\Rightarrow&x*y*y*x=x*x*x\\\Rightarrow&(x*y)*(y*x)=(x*x)*x\\\Rightarrow&x*x=y*x\\\Rightarrow&y=x\end{aligned}$$

与 $x \neq y$ 矛盾，若 $x * y = y * x = y$ 同理可得出 $x = y$ 矛盾。

综上 $y * y = y$。 □

30.

证明. 令 $x = a$，则 $\exists u_0, v_0 \in S$，使得 $a * u_0 = v_0 * a = a$。

当 $x \neq a$，则 $\exists u_1, v_1 \in S$，使得 $a * u_1 = v_1 * a = x$，又有

$$x * u_0 = (v_1 * a) * u_0 = v_1 * (a * u_0) = v_1 * a = x$$

$$v_0 * x = v_0 * (a * u_1) = (v_0 * a) * u_1 = a * u_1 = x$$

故，对于 $\forall x \in S$，都有 $x = x * u_0 = v_0 * x$，分别令 $x = u_0, x = v_0$，得

$$u_0 = v_0 * u_0 = v_0$$

令 $e = u_0$，则 $\forall x \in S$，有 $x * e = e * x = x$，所以 $\langle S, * \rangle$ 是含幺半群。 □