日期	科目	姓名，学号
2022 年 3 月 17 日	概率论	吴天阳 2204210460

习题 2.1

3. 证明：对任意 n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$，都有

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) - n + 1$$

证明. 利用数学归纳法，当 $n=2$ 时，令 $A_1 = A, A_2 = B$，则 $A \cup B$ 可分解为三个集合的不交并，即 $A \cup B = AB \cup AB^c \cup A^cB$，由测度的有限可加性，知

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cup B) &= \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AB^c) + \mathbf{P}(A^cB) \\
&= (\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AB^c)) + (\mathbf{P}(A^cB) + \mathbf{P}(AB)) - \mathbf{P}(AB) \\
&= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)
\end{aligned}$$

所以有 $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$，由于 $\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant 1$，则有

$$\mathbf{P}(AB) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$$

故 $n=2$ 时，该命题成立。假设该命题在 n 时成立，下面讨论 $n+1$ 的情况，令 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A$，$A_{n+1} = B$，则由 $n=2$ 时的不等式，知

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k) &\geqslant \mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - 1 \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) - n + 1 + \mathbf{P}(A_{n+1}) - 1 \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_k) - n
\end{aligned}$$

故该命题在 $n+1$ 时成立。由数学归纳法知，该命题对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 成立。 □

6. 证明：$\mathbf{P}(A \triangle B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)$。

证明. A^cB, AB^c, AB 两两不相交，由测度的有限可加性，知

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \triangle B) &= \mathbf{P}(AB^c \cup A^cB) \\
&= \mathbf{P}(AB^c) + \mathbf{P}(A^cB) \\
&= (\mathbf{P}(AB^c) + \mathbf{P}(AB)) + (\mathbf{P}(A^cB) + \mathbf{P}(AB)) - 2\mathbf{P}(AB) \\
&= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)
\end{aligned}$$

□

11. 设 $\mathscr{O}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的开集的全体，$\mathscr{J}$ 为其上有理顶点开区间全体。证明：$\mathbb{R}$ 中的 Borel 域 $\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{O})=\sigma(\mathscr{J})$。

证明. 设 $\mathscr{A}_1=\{(a,b):-\infty<a<b<+\infty\},\mathscr{A}_2=\{\mathbb{R}\text{中全体开集和闭集}\}$，则 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{O}\subset\mathscr{A}_2$，由**定理 2.1.2** 知，

$$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A}_1)\subset\sigma(\mathscr{O})\subset\sigma(\mathscr{A}_2)=\mathscr{B}$$

$$\Rightarrow\sigma(\mathscr{O})=\mathscr{B}$$

由于无理点可以由有理顶点组成的开区间逼近，所以 $\sigma(\mathscr{J})=\sigma(\mathscr{O})=\mathscr{B}$。 □

12. 证明：事件 σ 域中的事件数目，如果不是有限个，就一定有不可列无限多个。

证明. 假设 σ 域 $\mathscr{F}$ 中的事件数目为可列无限个，记 $\mathscr{F}$ 的基数为 $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$，则 $\overline{\overline{\mathscr{F}}}=\aleph_0$（阿列夫零），由于 $\mathscr{F}$ 所包含的集合个数是无限多个，则一定可以取出两两不相交的集合

$$\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\}\subset\mathscr{F}$$

记 $B=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\}$，由 σ 域的性质知，B 的所有子集组成的集合 $2^B\subset\mathscr{F}$，则 $2^{\aleph_0}\leqslant\overline{\overline{F}}=\aleph_0$，与 $2^{\aleph_0}>\aleph_0$ 矛盾。

故不存在可列无限个事件数目的 σ 域。 □

习题 2.2

2. 提纲中有 25 个问题，某大学生掌握了其中的 20 个问题。试求：所考的 3 个问题恰好都是该大学生已掌握了的问题的概率。

解答. 设 Ω 为所有可能考的 3 个问题，A 为考大学生掌握的 3 个问题，则

$$|\Omega|=\binom{25}{3},|A|=\binom{20}{3}$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\binom{20}{3}}{\binom{25}{3}}=\frac{57}{115}$$

5. 从装有红、白、黑球各一个的袋中任意有放回地取球，直至 3 种颜色的球都取出过为止。试求取球次数 (1) 大于 k；(2) 恰为 k 的概率。

解答. (1). 设事件 E_k 为取球的次数大于 k 次，A_1 为前 k 次取球都没有取过红球，A_2 为前 k 次取球都没有取过白球，A_3 为前 k 次取球都没有取过黑球，则 $E_k=A_1\cup A_2\cup A_3$，由加法定理知，

$$\mathbf{P}(E_k)=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mathbf{P}(A_iA_j)+\mathbf{P}(A_1A_2A_3)$$

由于三种球的对称性知，

$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{2^k}{3^k}, \quad \mathbf{P}(A_iA_j) = \frac{1}{3^k}, \quad \mathbf{P}(A_1A_2A_3) = 0$$

则，

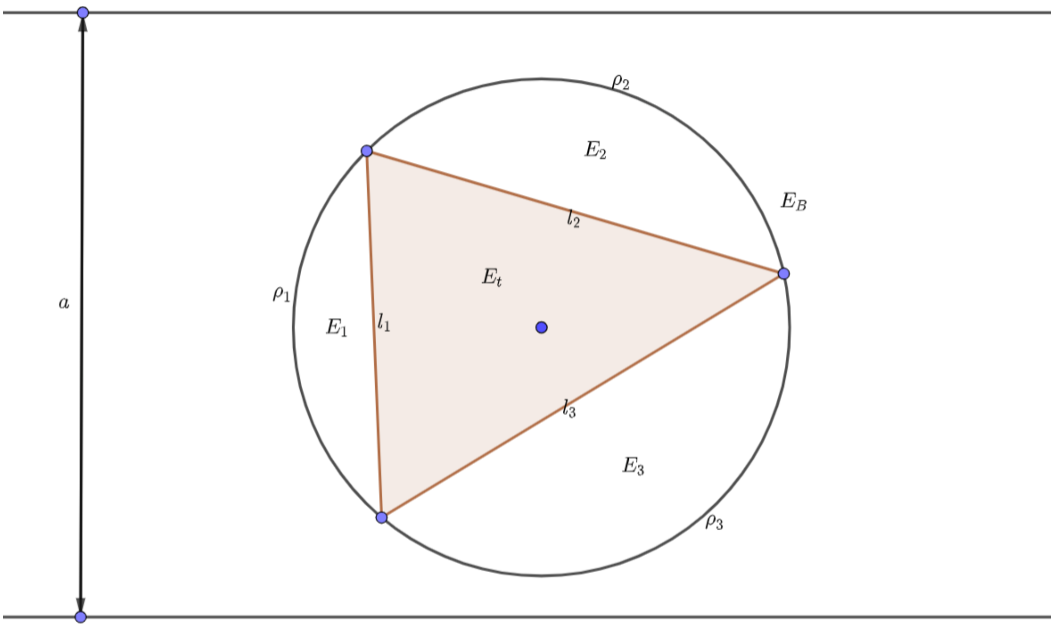
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_k) &= \binom{3}{1}\frac{2^k}{3^k} - \binom{3}{2}\frac{1}{3^k} + 0 \\ &= \frac{2^k - 1}{3^{k-1}}\end{aligned}$$

(2). 设事件 B_k 为取球次数恰好为 k 次，则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_k) &= \mathbf{P}(E_{k-1}) - \mathbf{P}(E_k) \\ &= \frac{2^{k-1} - 1}{3^{k-2}} - \frac{2^k - 1}{3^{k-1}} \\ &= \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}\end{aligned}$$

7. 向画满间隔为 a 的平行直线的桌面上任意投放一个三角形。假定三角形的三条边长 l_1, l_2, l_3 均小于 a。求此三角形与某直线相交的概率。

解答. 取该三角形的外接圆，设 E_t 为三角形内部，E_B 为外接圆的内部，E_1, E_2, E_3 分别为三个半圆部分，如下图所示



则，$E_B = E_t \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$，由加法定理知，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E_B) = \mathbf{P}(E_t \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3) \\
= \quad & \mathbf{P}(E_t) + \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) \\
& - \mathbf{P}(E_tE_1) - \mathbf{P}(E_tE_2) - \mathbf{P}(E_tE_3) - \mathbf{P}(E_1E_2) - \mathbf{P}(E_1E_3) - \mathbf{P}(E_2E_3) \\
& + \mathbf{P}(E_tE_1E_2) + \mathbf{P}(E_tE_2E_3) + \mathbf{P}(E_tE_1E_3) + \mathbf{P}(E_1E_2E_3) \\
& - \mathbf{P}(E_tE_1E_2E_3)
\end{aligned}$$

由之前抛针问题及其推论知，

$$\mathbf{P}(E_B) = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\pi a}, \quad \mathbf{P}(E_i) = \frac{\rho_1 + l_1}{\pi a}, \quad \mathbf{P}(E_tE_i) = \frac{2l_i}{\pi a}$$

$$\mathbf{P}(E_iE_j) = \mathbf{P}(E_tE_iE_j), \quad \mathbf{P}(E_1E_2E_3) = \mathbf{P}(E_tE_1E_2E_3)$$

则，

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\pi a} &= \mathbf{P}(E_t) + \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + l_1 + l_2 + l_3 - 2l_1 - 2l_2 - 2l_3}{\pi a} \\
&= \mathbf{P}(E_t) + \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - l_1 - l_2 - l_3}{\pi a}
\end{aligned}$$

故，

$$\mathbf{P}(E_t) = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\pi a}$$

习题 2.3

5. 一学生接连参加同一课程的两次考试，第一次及格的概率为 p，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$。

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得资格的概率。

(2) 若已知第二次及格，求他第一次及格的概率。

解答. 设 A 为他第一次及格的事件，B 为他第二次及格的事件。

(1) 设 E_1 为至少有一次及格的事件，则 E_1^c 为他全部不及格的事件，

$$\mathbf{P}(E_1) = 1 - \mathbf{P}(E_1^c) = 1 - \mathbf{P}(A^cB^c) = 1 - (1-p)(1-\frac{p}{2}) = \frac{3}{2}p - \frac{p^2}{2}$$

(2) 设 E_2 为第二次及格条件下，第一次及格的事件，则 $\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(A|B)$，由 Bayes 公式知，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(A|B) &= \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B|A^c)} \\
&= \frac{p \cdot p}{p \cdot p + (1-p)\frac{p}{2}} \\
&= \frac{2p}{1+p}
\end{aligned}$$

8. 袋中有 $2n-1$ 个白球和 $2n$ 个黑球，现任意取出 n 个，发现它们是同色的，求同为黑色的概率。

解答. 设 Ω 为任取 n 个球的事件，A 为取 n 个相同颜色球的事件，B_1 为取 n 个黑球的事件，B_2 为取 n 个白球的事件。则 $B_1 \cup B_2 = A, |\Omega| = \binom{4n-1}{n}, |B_1| = \binom{2n}{n}, |B_2| = \binom{2n-1}{n}$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) = \frac{\binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}}{\binom{4n-1}{n}}$$

所以，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(AB_1)}{\mathbf{P}(A)} &= \frac{\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(A)} \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}} \\ &= \frac{(2n)!}{n(2n-1)! + (2n)!}\end{aligned}$$

14. 袋中有 r 个红球与 b 个黑球，现任取一球，添加 s 个同色的球一并放回。再从袋中任取出一球发现是红球，求第一次取出的球是黑球的概率。

解答. 设 E 为题目问题，A 为第一次取出的球是黑球的事件，B 为第二次取出的球是红球的事件，由 Bayes 公式 知，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(A|B) &= \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B|A^c)} \\ &= \frac{\frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b+s}}{\frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b+s} + \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r+s}{r+b+s}} \\ &= \frac{br}{br + r(r+s)} \\ &= \frac{b}{r+b+s}\end{aligned}$$

习题 2.4

3. 掷一枚不均匀的硬币 n 次，第 1 次抛出正面的概率为 c，此后每次掷出与前次相同结果的概率为 p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$。求第 n 次抛出正面的概率，并讨论 $n \to \infty$ 时的极限。

解答. 设 A_n 为第 n 次抛出正面的事件，记 $p_n = \mathbf{P}(A_n)$，由全概率公式知

$$p_n = \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_{n-1})\mathbf{P}(A_n|A_{n-1}) + \mathbf{P}(A_{n-1}^c)\mathbf{P}(A_n|A_{n-1}^c)$$

则

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} \cdot p + (1-p_{n-1})(1-p) = (2p-1)p_{n-1} + 1 - p \\ \Rightarrow p_n - \frac{1}{2} &= (2p-1)(p_{n-1} - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

且 $p_1 = c$，由等比数列通项公式知，

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= (2p-1)^{n-1}(c - \frac{1}{2}) \\ \Rightarrow p_n &= \frac{1}{2} + (2p-1)^{n-1}(c - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

当 $0 < p < 1$ 时，$|2p-1| < 1$，则 $(2p-1)^{n-1} \to 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$；

当 $p = 1$ 时，$p_n = c$；

当 $p = 0$ 时，$p_n = \dfrac{1}{2} + (-1)^{n-1}(c - \dfrac{1}{2})$，发散。

综上，

$$\lim_{n\to 0} p_n = \begin{cases} \text{发散}, & p = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 < p < 1 \\ c, & p = 1. \end{cases}$$

10. 30 个学生参加考试，其中有 5 个学生一贯优秀，有 10 个学生成绩较好，有 15 个学生学业较差。成绩一贯优秀的学生考试中总得“优秀”；成绩较好的学生以相等的概率考得“优秀”和“良好”；学业成绩较差的学生则以相等的概率考得“良好”，“及格”和“不及格”。随机叫出一个学生，试求他的考试结果为：(1) “优秀”；(2) “良好”的概率。

解答. 设 A_1, A_2 分别表示叫出的学生考试成绩为“优秀”，“良好”的事件，B_1, B_2, B_3 分别表示叫出一贯优秀，成绩较好，成绩较差的学生的事件，由全概率公式知，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_1|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A_1|B_2) + \mathbf{P}(B_3)\mathbf{P}(A_1|B_3) \\ &= \frac{5}{30} \cdot 1 + \frac{10}{30} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{30} \cdot 0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_2|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A_2|B_2) + \mathbf{P}(B_3)\mathbf{P}(A_2|B_3) \\
&= \frac{5}{30}\cdot 0 + \frac{10}{30}\cdot\frac{1}{2} + \frac{15}{30}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

17. （选票问题）在一次选举中，候选人 A 得到 n 张选票而候选人 B 得到 m 张选票，其中 $n > m$，假定选票的一切排列次序是等可能的，证明：在计票过程中，A 的票数始终领先的概率为 $\dfrac{n-m}{n+m}$。

证明. 设 E 为候选人 A 的选票一直领先候选人 B 的选票的事件，H 为在计票过程中出现了候选人 B 的票数多于候选人 A 的事件，事件 H 又可以分为两类，第一次计票结果为候选人 B，记为 H_1，第一次计票结果为候选人 A，则为 H_1^c，由反射原理知，$|H_1| = |H_1^c|$，则只需考虑 H_1 中的样本个数。

由于最终一定是候选人 A 的票数多于候选人 B 的票数，所以只需考虑剩余选票的排列即可，则

$$|H_1| = \binom{n+m-1}{n}$$

设样本空间 $|\Omega|$ 为所有的选票排列集合，则 $|\Omega| = \binom{n+m}{n}$，又由于 E 与 H 为对立事件，所以

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(H) = 1 - \frac{|H|}{|\Omega|} &= 1 - \frac{2|H_1|}{|\Omega|} \\
&= 1 - \frac{2\binom{n+m-1}{n}}{\binom{n+m}{n}} = \ 1 - \frac{2\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}}{\frac{(n+m)!}{n!m!}} = 1 - \frac{2m}{n+m} \\
&= \frac{n-m}{n+m}
\end{aligned}
$$

□

习题 2.5

3. 无线电监测站负责监测 n 个目标。假定在监测过程中第 i 个目标消失的概率为 p_i，且各目标是否消失相互独立。求下列事件的概率：(1) 监测过程中没有目标消失；(2) 至少一个目标消失；(3) 不多于一个目标消失。

解答. 设 E_1, E_2, E_3 分别表示题目所问的三个事件，A_i 表示第 i 个目标消失的事件，则 A_i 和 A_i^c $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 均两两独立。

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i^c) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

$$\mathbf{P}(E_2) = 1 - \mathbf{P}(E_1) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

设 B 表示只有一个目标消失的事件，B_i 表示只有第 i 个目标消失的事件，则

$$\mathbf{P}(B_i) = \mathbf{P}(A_1^c A_2^c \cdots A_i \cdots A_n^c) = p(1-p)^{n-1}$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B_i) = np(1-p)^{n-1}$$

$$\mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(B) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) + np(1-p)^{n-1}$$

4. 当开关 K_1 断开，或开关 K_2 与 K_3 同时断开时电路断开。设 K_1, K_2, K_3 断开的概率依次是 $0.4, 0.5, 0.7$，且各开关相互独立。求电路断开的概率。

解答. 设 E 为电路断开的事件，A_i 为开关 K_i 断开的事件 $(i = 1, 2, 3)$，由题意可知

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(A_1 \cup (A_2 A_3)) \\
&= 1 - (1 - \mathbf{P}(A_1))(1 - \mathbf{P}(A_2 A_3)) \\
&= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.5 \cdot 0.7) \\
&= 0.61
\end{aligned}$$

8. 考察正方体各个面的中心。甲、乙二人相互独立地从中分别选取 3 个点连成三角形，试求所得的两个三角形彼此全等的概率。

解答. 设 E 为两个三角形彼此全等的事件，A_1, A_2 分别为甲、乙选到等边三角形的事件。由于正方形一共有 6 个面的中心，则总的三角形选择方法一共有 $|\Omega| = \binom{6}{3} = 20$ 种，且选出的三角形要么是等边三角形要么是直角三角形，且等边三角形的个数等于正方形顶角的个数，即 8 个，所以

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

则

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(A_1 A_2 \cup A_1^c A_2^c) = \mathbf{P}(A_1 A_2) + \mathbf{P}(A_1^c A_2^c) \\
&= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_1^c)\mathbf{P}(A_2^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \\
&= \frac{13}{25}
\end{aligned}$$

12. 在 18 次独立重复的 Bernoulli 试验中，事件 A 发生的概率都等于 0.2，求该事件至少发生 3 次的概率。

解答. 设 E 为题目所问的事件，E_i 表示事件发生 i 次的概率，A_i 为事件 A 在第 i 次重复试验中发生的事件，则

$$\mathbf{P}(E_0) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{18} A_i^c\right) = 0.8^{18}$$

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{18} A_1^c \cdots A_{i-1}^c A_i A_{i+1}^c \cdots A_n^c\right) = 18 \cdot 0.2 \cdot 0.8^{17}$$

$$\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant 18} A_1^c \cdots A_{i-1}^c A_i A_{i+1}^c \cdots A_{j-1}^c A_j A_{j+1}^c \cdots A_n^c\right) = \binom{18}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^{16}$$

所以

$$\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(E_0 \cup E_1 \cup E_2) = 1 - 0.8^{18} - 18 \cdot 0.2 \cdot 0.8^{17} - \binom{18}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^{16} \approx 0.728658$$

18. 证明：如果 $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A|B^c)$，则事件 A 与 B 独立。

证明. 由于 $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AB^c)$，则

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A|B^c) = \frac{\mathbf{P}(AB^c)}{\mathbf{P}(B^c)} &= \frac{\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)}{1 - \mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} \\
&\Rightarrow \mathbf{P}(B)(\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)) = \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(AB) \\
&\Rightarrow \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)
\end{aligned}$$

综上，事件 A 与 B 独立。 □