日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 5 月 13 日	复变函数	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第五章

2. 求下列级数的收敛范围:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n^2};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}.$$

解答. (1) 当 $z\in\mathbb{R}$ 时, 设 $0<\delta<\pi$, $\forall x\in[\delta,2\pi-\delta]$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\left|\frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}}\right|\leqslant\frac{2}{|1-e^{ix}|}=\frac{2}{|e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}|}=\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{\delta}{2}|},$$

由于 $\dfrac{1}{n^2}$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 收敛.

当 $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ 时, 令 $z=iy$, 当 $n\to\infty$ 时, 通项 $\dfrac{\cos nz}{n^2}=\dfrac{e^{-ny}+e^{ny}}{n^2}\to\infty$, 所以级数发散.

综上, 该级数的收敛范围为 $\mathbb{R}$.

(2) 由于级数收敛的充分条件为通项趋于 0, $\dfrac{z^n}{1-z^n}=1-\dfrac{1}{1-z^n}\to 0\Rightarrow z^n\to 0\Rightarrow |z|<1$, 又由于当 $|z|<1$ 时, 有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{z^n}{1-z^n}=n+p-\frac{1}{1-z^n+1}-\cdots-\frac{1}{1-z^{n+p}}\leqslant n+p-\frac{n+p}{1-z^n}=(n+p)(1-\frac{1}{1-z^n})\to 0.$$

所以该级数的收敛范围为 $|z|<1$.

3. 证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$ 在不包含正整数的任意有界闭集上一致收敛.

证明. 令 K 为 $\mathbb{C}$ 中满足题意的任意紧集, 则存在 $R\in\mathbb{R}$ 使得 $|z|<R$ 包住 K, 取 $N>R$, 于是 $\forall n>N$, 有

$$\left|(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{z}{n(z-n)}\right|\leqslant\frac{M}{n^2-Mn}=\frac{1}{n-M}-\frac{1}{n},$$

其中 $M=\left[\sup\limits_{z\in K}|z|\right]+1$, 上式中不等号的原因是

$$|z-n|\geqslant n-\operatorname{Re}z\geqslant n-M.$$

由于级数 $\displaystyle\sum_{k=M+1}^{n}\left(\frac{1}{k-M}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k}-\sum_{k=n-m+1}^{n}\frac{1}{k}$, 当 $n\to\infty$ 时,极限存在, 由 M-判别法可知, 级数在 K 上一致收敛. $\square$

4. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在不包含负整数的任意有界闭集上一致收敛.

证明. 令 K 为 $\mathbb{C}$ 中满足题意的任意紧集, 则存在充分大的 N 使得 $N>|z|+1$, $(z\in K)$, 不妨令 N 为奇数, 对于任意 $n>N$, 由于

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{z+k}\right| &\leqslant \left|\frac{1}{z+N}-\frac{1}{z+N+1}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right| \\ &= \left|\frac{1}{(z+N)(z+N+1)}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)}\right| \\ &= \frac{1}{|z+N||z+N+1|}+\cdots+\frac{1}{|z+2n-1||z+2n|} \\ &\leqslant \frac{1}{N'\cdot(N'+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)} \qquad (1) \\ &= \frac{1}{N'}-\frac{1}{N'+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} \\ &= \sum_{n=N'}^{2n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\to 0, \quad (N'\to\infty)\end{aligned}$$

其中 $N'=[N-|z|]$, $[\cdot]$ 表示向下取整, 由于 $N>|z|+1$, 则 $N'\geqslant 1$. (1) 式的不等号是因为

$$|z+N+k|\geqslant \operatorname{Re} z+N+k\geqslant N-|z|+k\geqslant [N-|z|]+k=N'+k.$$

由 Leibniz 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 所以上式最后一项当 $N\to\infty$ 时, 有 $N'\to\infty$ 该数项级数趋于 0, 由 Cauchy 收敛原理知 S_{2n} 一致收敛, 又由于 $S_{2n+1}\leqslant S_{2n}+\frac{1}{|z+2n+1|}$, 同理可证 S_{2n+1} 一致收敛. 综上, 级数在 K 上一致收敛. □

6. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径 $R>0$, 和函数为 $f(z)$. 证明: 当 $0<r<R$ 时,

(1) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}$;

(2) 若 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内有界, 可设为 $|f(z)|\leqslant M$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2R^{2n}\leqslant M^2$.

证明. (1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_nr\mathrm{e}^{in\theta}\right|^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n\mathrm{e}^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{c}_mr^m\mathrm{e}^{-im\theta}\right)\mathrm{d}\theta,$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n\mathrm{e}^{in\theta}$, $\sum_{m=0}^{\infty}\bar{c}_mr^m\mathrm{e}^{-im\theta}$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 内均一致收敛, 则两级数之积也一致收敛, 则可逐项积分, 当 $n\neq m$ 时, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_n\bar{c}_mr^{n+m}\mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{c_n\bar{c}_mr^{n+1}}{2\pi i(n-m)}\mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0,$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_n\bar{c}_n r^{2n}\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}.$$

(2) 由 (1) 可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M^2\,\mathrm{d}\theta=M^2$, 令 $r\to R$ 得证. □

7. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在单位元 $|z|<1$ 内收敛到有界函数 $f(z)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

证明. 由 6.(2) 可知, 令 $|f(z)|\leqslant M$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\leqslant M^2$, 由于收敛级数通项恒正, 所以通项趋于 0, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. □

8. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|\leqslant R$ 上收敛 $(0<R<+\infty)$, 求证 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n!}z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 且 $|\varphi(z)|\leqslant M\mathrm{e}^{|z|/R}$.

证明. 由收敛半径计算公式知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\dfrac{1}{R}$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{|c_n|}{n!}}=0$, 因此 $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n!}z^n$ 的收敛半径为 $+\infty$, 所以 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛, 则一般项趋于 0, 存在 $M>0$ 使得 $|c_nz^n|\leqslant M$, 令 $z\to R$, 得 $|c_n|R^n\leqslant M$, 则

$$|\varphi(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|}{n!}|z|^n\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|R^n}{n!}\frac{|z|^n}{R^n}\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{|z|^n}{R^n}=M\mathrm{e}^{|z|/R}.$$

□

9. 证明: (1) 对任意的复数 z, $|\mathrm{e}^z-1|\leqslant\mathrm{e}^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}$;

(2) 当 $0<|z|<1$ 时, $\dfrac{1}{4}|z|<|\mathrm{e}^z-1|<\dfrac{7}{4}|z|$.

证明. (1)

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^z-1|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=\mathrm{e}^{|z|}-1\leqslant(1+|z|)(e^{|z|}-1)&=(1+|z|)\mathrm{e}^{|z|}-|z|-1\\&\leqslant(1+|z|)\mathrm{e}^{|z|}-\mathrm{e}^{|z|}=|z|\mathrm{e}^{|z|}.\end{aligned}$$

(2) 由最大模原理可知, $\left|\dfrac{e^z-1}{z}\right|$ 的最大值在 $|z|=0$ 或 $|z|=1$ 上取到, 当 $|z|=0$ 时, $\left|\dfrac{e^z-1}{z}\right|=|e^z|=1$, 满足题意.

当 $|z|=1$ 时,

$$\begin{aligned}
\max_{|z|=1}\left|\frac{e^z-1}{z}\right| &= \max_{|z|=1}|e^z-1| \leqslant e-1<\frac{7}{4},\\
\min_{|z|=1}\left|\frac{e^z-1}{z}\right| &= \min_{|z|=1}|e^z-1| = \min_{|z|=1}\left|1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{(n+1)!}+\cdots\right|\\
&\geqslant 1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots=1-(e-2)=3-e>\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

10. 设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, $0<r<1$. 证明

(1) $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=0 \quad (n\geqslant 1)$;

(2) 设 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 则 $c_n=\displaystyle\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$;

(3) 若 $\mathrm{Re}f(z)=u(z)\geqslant 0,\ f(0)=1$, 则 $|c_n|\leqslant 2$;

(4) $\overline{f(0)}=\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi,\ |z|<r$;

(5) $$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}+\mathrm{i}\mathrm{Im}f(0)\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\mathrm{Im}f(0)\quad(\xi=re^{\mathrm{i}\theta}).\end{aligned}$$

证明. (1) 由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, 设 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$, 则 $\overline{f(z)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\overline{c}_k\overline{z}^k$, 所以

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \xlongequal{\text{逐项积分}} \sum_{k=0}^{\infty}\overline{c}_k\int_{|z|=r}\frac{\overline{z}^k}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{c}_k\int_{|z|=r}\frac{|z|^{2k}}{z^{k+n+1}}\,\mathrm{d}z \xlongequal{\text{Cauchy 公式}} 0.$$

(2) $c_n=\displaystyle\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\xlongequal{(1)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$

(3) $|c_n|=\left|\displaystyle\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{2}{r^n}\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z}\,\mathrm{d}z\right|=\frac{2u(0)}{r^n}=\frac{2}{r^n}=2,\quad(r\to 1)$

(4) 令 $f(z)=\displaystyle\frac{1}{\xi-z}$, 则 $f^{(k)}(z)=k!(\xi-z)^{-(k+1)}$, 所以

$$\frac{1}{\xi-z}=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\xi^{(k+1)}},$$

于是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi^{(k+1)}}\,\mathrm{d}\xi\xlongequal{(1)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi=\overline{f(0)}.$$

$$
\begin{aligned}
(5)\ f(z) &\xlongequal{\text{Cauchy 公式}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{u(\xi)+\mathrm{i}v(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{2u(\xi)-(u(\xi)-\mathrm{i}v(\xi))}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{2}{\xi-z}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{2}{\xi-z}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\overline{f(0)}\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{2}{\xi-z}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi-u(0)+\mathrm{i}v(0)\\
&\xlongequal{\text{Cauchy 公式}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\left(\frac{2}{\xi-z}-\frac{1}{\xi}\right)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{i}v(0)\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}f(0)\\
&\xlongequal{\xi=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi|=r}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}f(0).
\end{aligned}
$$

□

12. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, 在 $|z|\leqslant 1$ 上连续, 则 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上可用多项式一直逼近.

证明. 设 $0<r<1$, 则 $f(rz)$ 在 $|z|<\dfrac{1}{r}$ 内解析, 由 Taylor 展式可知, $f(rz)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(rz)^n$, 取 $r\to 1$, 由于 $f(z)$ 在 $V(0;1)$ 上连续, 则 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 所以 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上可用多项式一直逼近. □

13. 将下列函数在指定域内展为 Laurent 级数.

(1) $\dfrac{3z}{(2-z)(2z-1)},\qquad \dfrac{1}{2}<|z|<2;$

(2) $\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})},\qquad 0<|z-\mathrm{i}|<1;$

(3) $\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)},\qquad 2<|z|<3,\ 3<|z|<+\infty;$

(4) $\dfrac{\sin\alpha z}{z^3\sin\beta z}$ $(\beta>\alpha>0)$, $0<|z|<\dfrac{\pi}{\beta}$ (要求解出负幂项).

解答.

$$
\begin{aligned}
(1)\ \frac{3z}{(2-z)(2z-1)}&=\frac{1}{2z-1}+\frac{2}{2-z}=\frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{-|n|}z^n,
\end{aligned}
$$

$$
(2)\ \frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{-\mathrm{i}z^2(1-\frac{z}{\mathrm{i}})}=\mathrm{i}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^n}=\sum_{n=0}^{\infty}i^{1-n}z^{n-2},
$$

(3) $\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}=(z^2-1)\left(\dfrac{1}{z+2}-\dfrac{1}{z+3}\right)$, 当 $2<|z|<3$ 时

$$\begin{aligned}
原式&=(z^2-1)\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right)=(z^2-1)\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^n}\right)\\
&=(z^2-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^{-n-1}z^n\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^{-n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^{-n-1}z^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^{-n-1}z^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-2)^{n+2}-(-2)^n\right)z^{-n-1}+z-2+\sum_{n=0}^{\infty}\left((-3)^{-n-1}-(-3)^{-n-3}\right)z^{n+2}+\frac{1}{3}-\frac{z}{9}\\
&=3\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^{-n-1}+8\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^{-n-3}z^{n+2}-\frac{5}{3}+\frac{8}{9}z\\
&=3\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^{-n-1}+8\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{-n-1}z^n-\frac{5}{3},
\end{aligned}$$

当 $3<|z|<+\infty$ 时

$$\begin{aligned}
原式&=\frac{z^2-1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}-\frac{1}{1+\frac{3}{z}}\right)=\frac{z^2-1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^n}\right)\\
&=(z-z^{-1})\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^nz^{-n}\right)\\
&=(z-z^{-1})\sum_{n=0}^{\infty}(-1^n)(2^n-3^n)z^{-n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^n+2^{n+2}-3^n-3^{n+2})z^{-n-1}+1\\
&=5\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2^n-2\cdot3^n)z^{-n-1}+1.
\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\sin\alpha z}{z^3\sin\beta z}=\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\alpha z)^{2n-1}}{(2n-1)!}}{z^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\beta z)^{2n-1}}{(2n-1)!}}\xlongequal{\text{多项式除法}}\dfrac{\alpha}{\beta}z^{-3}+\dfrac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{6\beta}z^{-1}+\cdots$

15. 若 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 上解析, 且 $f(z)$ 不恒为 0, 圆环内有一点列 $z_n\to a$, $f(z_n)=0$. 证明: a 是 $f(z)$ 的本性奇点.

证明. 由于 a 的邻域内总存在零点, 则 $\lim\limits_{z\to a}f(z)\neq\infty$, 所以 $f(z)$ 不是极点. 假设 a 为 $f(z)$ 的可去奇点, 补充 $f(z)$ 在 a 处的定义, 使得 $f(z)$ 在圆环 $D:V(a;r)$, $(0<r<R)$ 上解析, 考虑以下两个集合

$$\begin{aligned}
G_1&=\{z\in D:\exists V(z;\delta),f(z)在V(z;\delta)内恒为0\},\\
G_2&=\{z\in D:\exists V(z;\delta),f(z)在V^*(z;\delta)内不为0\},
\end{aligned}$$

由 Taylor 展式可知, $D = G_1 \cup G_2$, 由于 G_1, G_2 均为开集, 则其中至少有一个是空集, 由于 a 为零点且是极限点, 所以 $G_2 = \varnothing$, 于是 $D = G_1$, 所以 $f(z)$ 在 D 上恒为 0, 矛盾.

综上, a 既不是可去奇点, 也不是极点, 所以只能是本性奇点. □

16. 设 $f(z)$ 在圆环 $0 < r < |z-a| < R < +\infty$ 内解析, 在闭圆环 $r \leqslant |z-a| \leqslant R$ 上连续, 且 $f(a + Re^{i\theta}) = 0$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. 证明: $f(z) \equiv 0$ $(r < |z-a| < R)$.

证明. 设 $r < \rho < R$, 考虑 $f(z)$ 的 Laurent 系数的模

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}z\right| \leqslant \rho^{-n} |f(a+\rho e^{i\theta})| \to 0 \quad (\rho \to R)$$

所以 $c_n \equiv 0$, 则 $f(z) \equiv 0$. □

17. 若函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| < R$ 内解析, 且

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

证明: a 是 $f(z)$ 的可去奇点.

证明. 设 $g(z) = (z-a)f(z)$, 由题可知 $\lim\limits_{z \to a} g(z) = 0$, 所以 a 为 $g(z)$ 的可去奇点, 补充定义使 $g(z)$ 在 $|z-a| < R$ 内解析, 则 $g(z)$ 存在 Taylor 展式:

$$(z-a)f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

取 $z = a$, 可得 $g(a) = c_0 = 0$, 所以

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n,$$

于是 $f(z)$ 在 $|z-a| < R$ 内解析, 则 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. □

18. 设函数 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内解析, 且 $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant M$. 试用 $f(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ 的主要部分 $\varphi(z)$ 为常数来证 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

证明. 设 $R < |z| < \rho$, $\rho > R$, 则

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}z,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \overline{f(z)} (z-a)^{-n-1} \,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} \overline{(z-a)^k} (z-a)^{-n-1} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} \int_0^{2\pi} \rho^{k-n} e^{-i(k+n)\theta} \,\mathrm{d}\theta = \overline{c_{-n}} \rho^{-2n},
\end{aligned}$$

于是 $c_n + \overline{c_{-n}} \rho^{-2n} = \dfrac{1}{\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{|z-a|=\rho} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{(z-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}z$, 则 $|c_n + \overline{c_{-n}} \rho^{-2n}| \leqslant 2M \rho^{-n}$, $(n \geqslant 1)$, 取 $\rho \to \infty$, 则 $c_n = 0$, $(n \geqslant 1)$, 所以 $\phi(z) = c_0$ 为常数. □

19. 若函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}-\{a_1,\cdots,a_n\}$ 内解析, 且有界, 证明 $f(z)$ 为常数.

证明. 由于 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}-\{a_1,\cdots,a_n\}$ 内有界, 则 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 均为 $f(z)$ 的可去奇点, 补充定义使 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 又由于 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 令 $|f(z)|\leqslant M$, 对于 $z\in\mathbb{C}$, 取 z 的邻域 $V(z;R)$, 由 Cauchy 不等式可知

$$|f'(z)|\leqslant\frac{M}{R},$$

令 $R\to\infty$, 可得 $|f'(z)|=0\Rightarrow f'(z)=0$, 所以 $f(z)$ 为常数. □

20. 若函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内解析, $f(0)=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(z^n)$ 在圆 $|z|<1$ 内收敛, 且和函数在圆 $|z|<1$ 内解析.

证明. 设 $f(z)$ 的 Taylor 展式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 取 $z=0$, 可得 $c_0=0$, 则 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$, $f(z^n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kz^{nk}$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(z^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^{nk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}c_d\right)z^n,$$

其中 $d|n$ 表示正整数 d 能够整除 n, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 1, 所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=1$, 于是

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\sum_{d|n}c_d\right|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|c_n|}=1\Rightarrow R=\frac{1}{L}=1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(z^n)$ 在圆 $|z|<1$ 内一致收敛, 且和函数在圆 $|z|<1$ 内解析. □