日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 3 月 26 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第四次作业

题目 1. 3.4 练习 1 证明**定义 3.7** 中 Jacobi 矩阵可逆这个条件不依赖于仿射坐标系的选取，也就是说如果 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 在 $\varphi_{\mathcal{A}}(U)$ 上逐点可逆，那么在另一个仿射坐标系 $\mathcal{A}'$ 中，$\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}$ 在 $\varphi_{\mathcal{A}'}(U)$ 上也逐点可逆.

证明. 设 $(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})'=J$ 可逆，由于 $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ 均为仿射坐标系，则存在正交阵 T 和常向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}(\boldsymbol{x})=T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$，于是 $\forall\boldsymbol{x}\in\varphi_{\mathcal{A}'}(U)$ 有

$$
\begin{aligned}
\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}(\boldsymbol{x})&=(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})(\boldsymbol{x})\\
\Rightarrow(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})'(\boldsymbol{x})&=((\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})')^T[(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})'(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})](\boldsymbol{x})\\
&\xlongequal{T^{-1}=T^T}T^{-1}J(T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})
\end{aligned}
$$

令 $F(\boldsymbol{x})=T^{-1}(J^{-1}T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=T^{-1}J^{-1}T\boldsymbol{x}-T^{-1}\boldsymbol{a}$，于是 $F[(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1})'(\boldsymbol{x})]=I$，则 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵在 $\boldsymbol{x}$ 处可逆，逆变换为 F，由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性可知 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}'}^{-1}$ 在 $\varphi_{\mathcal{A}'}(U)$ 上逐点可逆. □

题目 2. 3.4 练习 4. 证明**命题 3.2**：设 U 为 $\mathscr{A}^n$ 中的开区域，带有广义坐标系 $\{U,\varphi_U\}$，则：

(1) U 中的开子集在 φ_U 下的像是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集. 反之，$\mathbb{R}^n$ 中的开子集在 φ_U 下的原像是 U 中的开子集.

(2) 设 f 为 U 上定义的标量场，则 f 连续等价于 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 是 $\varphi_U(U)$ 上的连续函数.

证明. (1) 由于

$$
\begin{aligned}
\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}:\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\
\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)&\mapsto(y^1(\boldsymbol{x}),\cdots,y^n(\boldsymbol{x}))
\end{aligned}
$$

于是 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 对应的 Jacobi 矩阵为 $J=(\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1})'=[\partial_jy^i(x^1,\cdots,x^n)]_{ij}$，下证多元函数可微可推出连续：$\forall\varphi_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\in U,\ \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$，由 J 的连续性和多元函数微分的定义可知：

$$
|\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x})|=\left||\boldsymbol{h}|\frac{\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\boldsymbol{x})-J\boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|}+J\boldsymbol{h}\right|\to0,\ (\boldsymbol{h}\to0)
$$

由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性可知 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 在 U 上连续.

由于 $\varphi_U\circ\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵可逆，等价于，逆映射 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵可逆，所以 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1}$ 连续可微. 设 V 为 U 中的开集，由于 $\varphi_U(V)=(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(\varphi_{\mathcal{A}}(V))$，且 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 是同胚映射，则 $\varphi_{\mathcal{A}}(V)$ 是开集，$(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1})^{-1}$ 将开集映射为开集，所以 $\varphi(V)$ 是开集，于是 φ_U^{-1} 连续.

由于 φ_U^{-1} 连续，又由广义坐标系性质可知 φ_U 可逆，于是 φ_U 连续，所以 φ_U^{-1} 将开集映射为开集. 综上，φ_U 是同胚映射.

(2) 设 W 为 $\varphi_U(U)$ 上的开子集.

“$\Rightarrow$” 由于 $(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)=\varphi_U(f^{-1}(W))$，由于 f 连续，则 $f^{-1}(W)$ 为开集，又由于 φ_U 为同胚映射，所以 $\varphi_U(f^{-1}(W))$ 为开集，所以 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 连续.

“$\Leftarrow$” 由于 $\varphi_U^{-1}((f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}W) = f^{-1}(W)$，由于 φ_U 为同胚映射，$(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)$ 为开集，所以 $f^{-1}(W)$ 为开集，故 f 连续.

下证明，上述命题中与 φ_U 的选取无关，任取广义坐标系 $\{U,\varphi_U'\}$，假设 $f\circ\varphi_U$ 连续，于是 $(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)$ 为开集，由于

$$(f\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(W) = (f\circ\varphi_U^{-1}\circ\varphi_U\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(W) = (\varphi_U\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(f\circ\varphi_U^{-1})^{-1}(W)$$

由于 $(\varphi_U\circ\varphi_{U'}^{-1})$ 是同胚映射，所以 $(f\circ\varphi_{U'}^{-1})^{-1}(W)$ 为开集，故 $f\circ\varphi_{U'}^{-1}$ 连续. $\square$