素数定理的复分析证明

吴天阳

2204210460

西安交通大学, 数学与统计学院, 强基数学 002

2022 年 5 月 24 日

摘要

利用复分析完成素数定理证明, 将其分为以下 5 步完成: 先将素数定理转化为证明其充要条件, 转换到与 ψ_1 相关的证明上; 通过讨论 Dirichlet 级数的性质, 从而引出 Riemann zeta 函数的性质; 利用复积分的方法将 ψ_1 和 zeta 函数联系起来; 对 zeta 函数进行解析延拓, 使其成为在实部大于 0 的半平面上的亚纯函数; 对 $G(s)$ 进行上界估计, 并证明 zeta 在直线 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上无零点; 最终利用留数定理, 完成复分析证明.

关键字: 素数定理; Riemann zeta 函数; 复分析; 留数定理

目录

1 素数定理介绍

素数定理 (Prime number theorem) 描述的是素数在正整数中的渐进分布, 定理如下

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1, \tag{1.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}$, $\pi(x)$ 表示小于等于 x 的素数个数.

Euler 在 1737 年发现了著名的 **Euler 乘积公式**, 即

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Carl Friedrich Gauss 于 1800 年左右提出了有关素数定理的猜想. 在 19 世纪中期, Pafnuty Chebyshev 发表了两篇重要的论文, 利用到了 Euler 乘积公式, 并且证明了如果 (1.1) 的极限存在则一定为 1.

Riemann 在他著名的论文《论小于给定数值的素数个数》中破解了 Euler 乘积公式中与素数分布相关的信息, 为了纪念 Riemann 的贡献, 将 Euler 乘积公式左端的求和式称作 Riemann zeta 函数.

1896 年, Jacques Hadamard 和 Charles Jean de la Vallée Poussin 独立地证明了素数定理, 这两个证明都使用了 zeta 函数和复分析的方法.

1949 年, Atle Selberg 和 Paul Erdős 分别独立地证明了素数定理 [5], 他们的方法除了使用了极限, e^x, $\log x$ 的简单性质外, 没有涉及任何高等数学知识, 可以说是一个完全"初等"的证明.

后来于 1980 年, Donald J. Newman 给出了一个近乎只用到 Cauchy 积分公式的简短证明 [6], 1997 年 Don Zagier 则将这证明压缩到三页纸.

本篇文章证明思路参考 Ciarán O'Rourke 的论文 [3], 该论文中具体介绍了三种证明素数定理的方法.

1.1 一些约定和定义

记 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, 即全体正整数. 对于没有具体声明的变量, 默认在正整数 $\mathbb{N}$ 上取值, 例如 $n\leqslant m$, 则 n 的取值为 $\{1,2,\cdots,m\}$; $n\geqslant m$, 则 n 的取值为 $\{m,m+1,\cdots\}$. 如果没有特殊说明, 默认 p 取值为素数集合 $\{2,3,5,7,\cdots\}$.

在论文中, 对于复数 $s\in\mathbb{C}$, 我们记 $s=\sigma+it$, 其中 $\sigma=\mathrm{Re}(s)$, $t=\mathrm{Im}(s)$, **在文中出现 σ, t 都默认为复数 s 的实部和虚部**. 由 Euler 定理可知

$$|n^s|=|n^{\sigma+it}|=|e^{\sigma\log n}e^{it\log n}|=n^\sigma|e^{it\log n}|=n^\sigma.$$

定义 1.1. 设 $x\in\mathbb{R}$, 函数 $[x]$ 的值为不大于 x 的最大整数, 函数 $\{x\}$ 的值为 $x-[x]$. 我们把 $[x]$ 称为 x 的整数部分, $\{x\}$ 称为 x 的小数部分.

定义 1.2 (整除)**.** *设 n, m 为整数, 若存在整数 k, 使得 $m = kn$, 则称 n 能整除 m, 记为 $n|m$; 否则, 称 n 不能整除 m, 记为 $n \nmid m$.*

定义 1.3 (渐进等价)**.** *设 $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 若*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

则称当 $x \to \infty$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 渐近等价, 记做 $f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty)$.

于是素数定理又可以写为

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty).$$

下面我们会利用其它渐近等价作为素数定理的充要条件, 从而将素数定理转化为与复分析有关的问题.

2 素数定理的充分性条件转化

我们先将素数定理转化为证明其充分性定理, 先定义如下的三个对转化素数定理十分重要的函数.

定义 2.1 (Chebyshev 第一函数)**.** *定义 Chebyshev 第一函数 $\Theta : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 如下*

$$\Theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p.$$

不难发现 $\Theta(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \log p \leqslant \sum\limits_{p \leqslant x} \log x = \pi(x) \log x$, 所以 Θ 函数给出了素数定理的一个显然的下界, 而下面的 Chebyshev 第二函数给出了一个更加精确的下界.

定义 2.2 (von Mangoldt 函数)**.** *定义 von Mangoldt 函数 $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 如下*

$$\Lambda = \begin{cases} \log p, & n = p^r, \\ 0, & \texttt{otherwise}. \end{cases}$$

注意到 Λ 函数是从自然数集映射到复数域的子集, 我们将这样的函数称为 **数论函数**. 这里顺便给出 Λ 函数的性质, 在后文中会用到.

命题 2.1. *任意 $m \in \mathbb{N}$, 有*

$$\sum_{n|m} \Lambda(n) = \log m.$$

证明. 设 m 的标准分解式为 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 于是

$$\begin{aligned} \sum_{n|m} \Lambda(n) &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{\alpha_k} \Lambda(p_k^{\beta}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{\alpha_k} \log p_k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \log p_k = \sum_{k=1}^{r} \log p_k^{\alpha_k} \\ &= \log(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \log m. \end{aligned}$$

□

定义 2.3 (Chebyshev 第二函数)**.** 定义 *Chebyshev* 第二函数 $\psi:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 如下

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p^k\leqslant x}\log p.$$

ψ 函数对素数定理证明起到了至关重要的作用,根据它的定义我们可以对 $\pi(x)\log x$ 给出一个更精确的下界估计

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p^k\leqslant x}\log p=\sum_{p\leqslant x}\log p\sum_{p^k\leqslant x}1=\sum_{p\leqslant x}[\log_p x]\log p=\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p\\&\leqslant\sum_{p\leqslant x}\log x=\pi(x)\log x.\end{aligned}$$

由于 $\psi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}[\log_p x]\log p\geqslant\sum\limits_{p\leqslant x}\log p=\Theta(x)$, 所以 ψ 相对于 Θ 给出了一个更好的下界估计. 下面给出素数定理的一个充分性条件:

命题 2.2. 当 $x\to\infty$ 时, 若 $\psi(x)\sim x$ 成立, 则 $\pi(x)\sim\dfrac{x}{x\log x}$.

证明. 假设 $\psi(x)\sim x$ 成立, 即对任意的 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 x, 使得下式成立

$$1-\varepsilon\leqslant\frac{\psi(x)}{x}\leqslant 1+\varepsilon.$$

取 $\alpha\in(0,1)$, 则

$$\psi(x)\geqslant\Theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\log p\geqslant\sum_{x^\alpha<p\leqslant x}\log p\geqslant\sum_{x^\alpha<p\leqslant x}\log x^\alpha=\alpha(\pi(x)-\pi(x^\alpha))\log x,$$

于是, 当 $x\to\infty$ 时

$$\frac{\pi(x)\log x}{x}\leqslant\frac{\psi(x)}{\alpha x}+\frac{\pi(x^\alpha)\log x}{x}\leqslant\frac{1}{\alpha}(1+\varepsilon)+\frac{x^\alpha\log x}{x}=\frac{1}{\alpha}(1+\varepsilon)+\frac{\log x}{x^{1-\alpha}}\to\frac{1}{\alpha}(1+\varepsilon),$$

其中第二个等号是由 $\pi(x^\alpha)\leqslant x^\alpha$ 这个显然的估计得到的.

令 $\alpha=\dfrac{1}{1+\varepsilon}$, 得

$$1-\varepsilon\leqslant\frac{\psi(x)}{x}\leqslant\frac{\pi(x)\log x}{x}\leqslant(1+\varepsilon)^2,$$

所以 $\pi(x)\sim\dfrac{x}{x\log x}\quad(x\to\infty)$. □

由于 $\psi(x)$ 是非连续函数, 解析性质很差, 所以要引入一个光滑函数, 记

$$\psi_1(x)=\int_0^x\psi(u)\,\mathrm{d}u.$$

若 $\psi(x)\sim x$, 猜测是否有 $\psi_1(x)=\int_0^x\psi(u)\,\mathrm{d}u\sim\int_0^x u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}x^2$, 于是又有以下充分性条件.

命题 2.3. 当 $x \to \infty$ 时, 若 $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ 成立, 则 $\psi(x) \sim x$, 于是素数定理成立.

证明. 由于 $\psi(x)$ 是单调递增的, 对任意 $x > 0,\ \alpha \in (0,1),\ \beta \in (1,\infty)$, 由积分第一中值定理知

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)-\psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2} \leqslant \frac{1}{x(x-\alpha x)}\int_{\alpha x}^{x}\psi(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\psi(x)}{x} \\ \leqslant \frac{1}{x(\beta x - x)}\int_{x}^{\beta x}\psi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\psi_1(\beta x)-\psi_1(x)}{(\beta-1)x^2}.\end{aligned}$$

假设当 $x \to \infty$ 时, $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$, 于是

$$\frac{\psi_1(x)-\psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2} \sim \frac{(1-\alpha^2)x^2}{2(1-\alpha)x^2} = \frac{1+\alpha}{2},$$
$$\frac{\psi_1(\beta x)-\psi_1(x)}{(\beta-1)x^2} \sim \frac{(\beta^2-1)x^2}{2(\beta-1)x^2} = \frac{\beta+1}{2}.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在充分大的 x 使得

$$\frac{1+\alpha}{2}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{\psi_1(x)-\psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2}, \quad \frac{\psi_1(\beta x)-\psi_1(x)}{(\beta-1)x^2} \leqslant \frac{\beta+1}{2}(1+\varepsilon),$$

则有

$$\frac{1+\alpha}{2}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \frac{\beta+1}{2}(1+\varepsilon).$$

取 $\alpha = 1-2\varepsilon,\ \beta = 1+2\varepsilon$, 得

$$(1-\varepsilon)^2 \leqslant \frac{\psi(x)}{x} \leqslant (1+\varepsilon)^2,$$

所以 $\psi(x) \sim x \quad (x \to \infty)$. □

于是我们又得到一个素数定理的充分性条件, 而且 ψ_1 具有很好的解析性质, 我们知道 ψ 和 Λ 有关联, 所以 $\psi_1(x)$ 应该也可与 Λ 找到联系.

命题 2.4. 对任意 $x \geqslant 1$, 有 $\psi_1(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)(x-n)$.

证明. 由于

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \sum_{n\leqslant u}\Lambda(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)f_n(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中 $f_n(u) = \begin{cases} 1, & n \leqslant u, \\ 0, & \texttt{otherwise}. \end{cases}$

则

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_0^x f_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\int_n^x \mathrm{d}u = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)(x-n).$$

□

接下来我们先讨论 Dirichlet 级数性质, 再取其特例得到 Riemann zeta 函数的性质.

3 Dirichlet 级数与 zeta 函数

设 $s \in \mathbb{C}$, 记 $s = \sigma + it$, 其中 $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$.

定义 3.1 (Dirichlet 级数)**.** 设数论函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, 定义 *Dirichlet* 级数如下

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C}).$$

定义 3.2 (Riemann zeta 函数)**.** 一种 *Dirichlet* 级数, 取 $f(n) = 1$, 记

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

其中 σ 为复数 s 的实部. 将 $\zeta(s)$ 称为 *Riemann zeta* 函数, 简称为 *zeta* 函数.

这一节我们将给出 zeta 函数和 Λ 函数的关系, 为下一节建立 ψ_1 和 ζ 函数的关系做准备. 我们先讨论 Dirichlet 级数的性质, 再特值 $f(n) = 1$, 从而转化到 zeta 函数上. 首先给出 Dirichlet 级数收敛性条件, 证明请见 [1] 第 5 章定理 6.

定理 3.1. 任一 *Dirichlet* 级数 $F(s)$ 都有一收敛直线 $\sigma = c$, 满足:

(1) 级数在直线的右半平面收敛, 在直线的左半平面内发散;

(2) 级数在收敛直线的右半平面内内闭一致收敛.

且存在以收敛直线 $\sigma = c' > c$, 使得 *Dirichlet* 级数在直线的右半平面内绝对收敛.

命题 3.1. 假设存在三个 *Dirichlet* 级数

$$F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_j(n)}{n^s} \quad (j = 1, 2, 3),$$

满足任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$f_3(n) = \sum_{m_1 m_2 = n} f_1(m_1) f_2(m_2).$$

设 $F_j(s)$ 分别在 $\sigma > \sigma_j$ $(j = 1, 2)$ 上绝对收敛, 当 $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ 时

$$F_3(s) = F_1(s) F_2(s),$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{f_3(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m_1 m_2 = n} \frac{f_1(m_1) f_2(m_2)}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m_1 m_2 = n} \frac{f_1(m_1)}{m_1^s} \frac{f_2(m_2)}{m_2^s} \\
&= \sum_{m_1 \leqslant N} \sum_{m_2 \leqslant N/m_1} \frac{f_1(m_1)}{m_1^s} \frac{f_2(m_2)}{m_2^s} \\
&= \sum_{m_1 \leqslant \sqrt{N}} \frac{f_1(m_1)}{m_1^s} \sum_{m_2 \leqslant N/m_1} \frac{f_2(m_2)}{m_2^s} + \sum_{\sqrt{N} < m_1 \leqslant N} \frac{f_1(m_1)}{m_1^s} \sum_{m_2 \leqslant N/m_1} \frac{f_2(m_2)}{m_2^s}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{f_3(n)}{n^s}-&\sum_{m_1\leqslant\sqrt{N}}\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\sum_{m_2\leqslant\sqrt{N}}\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\\&=\sum_{m_1\leqslant\sqrt{N}}\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\sum_{\sqrt{N}<m_2\leqslant N/m_1}\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}+\sum_{\sqrt{N}<m_1\leqslant N}\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\sum_{m_2\leqslant N/m_1}\frac{f_2(m_2)}{m_2^s},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{f_3(n)}{n^s}-\sum_{m_1\leqslant\sqrt{N}}\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\sum_{m_2\leqslant\sqrt{N}}\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\right|\\&\leqslant\sum_{m_1\leqslant\sqrt{N}}\left|\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\right|\sum_{\sqrt{N}<m_2\leqslant N/m_1}\left|\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\right|+\sum_{\sqrt{N}<m_1\leqslant N}\left|\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\right|\sum_{m_2\leqslant N/m_1}\left|\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\right|\\&\leqslant\sum_{m_1=1}^{\infty}\left|\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\right|\sum_{m_2>\sqrt{N}}\left|\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\right|+\sum_{m_1>\sqrt{N}}\left|\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\right|\sum_{m_2=1}^{\infty}\left|\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\right|\\&=F_1(s)\sum_{m_2>\sqrt{N}}\left|\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}\right|+F_2(s)\sum_{m_1>\sqrt{N}}\left|\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\right|\to 0\quad(N\to\infty).\end{aligned}$$

由于当 $\sigma>\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$ 时, $F_1(s)$, $F_2(s)$ 均绝对收敛, 所以当 $n\to\infty$ 时, 上式趋于 0.

综上

$$F_1(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{f_3(n)}{n^s}=\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{f_1(m_1)}{m_1^s}\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{f_2(m_2)}{m_2^s}=F_2(s)F_3(s).$$

□

由归纳法不难得出以下推论.

推论 3.1. 假设存在 $k+1$ $(k\geqslant 2)$ 个 *Dirichlet* 级数

$$F_j(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_j(n)}{n^s},$$

且满足对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$f_{k+1}(n)=\sum_{m_1m_2\cdots m_k=n}f_1(m_1)f_2(m_2)\cdots f_k(m_k).$$

设 $F_j(s)$ 分别在 $\sigma>\sigma_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 上绝对收敛, 当 $\sigma>\max\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k\}$ 时

$$F_{k+1}(s)=F_1(s)F_2(s)\cdots F_k(s).$$

命题 3.2. 设函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 是完全积性函数, 即对任意整数 n,m 都有 $f(nm)=f(n)f(m)$ 成立. 若 *Dirichlet* 级数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

绝对收敛, 则

$$F(s)=\prod_{p}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}}.$$

证明. 设 p_j 表示从小到大第 j 个素数, 定义数论函数 $g_j:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 如下

$$g_j(n)=\begin{cases}f(n), & p_j|n \text{ 或 } n=1,\\ 0, & \texttt{otherwise}.\end{cases}$$

由**推论**3.1可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1m_2\cdots m_k=n}g_1(m_1)g_2(m_2)\cdots g_k(m_k)n^{-s}=\prod_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_j(n)}{n^s}, \tag{3.1}$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_j(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=p_j^{\alpha}\\ \alpha\geqslant 0}}\frac{g_j(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=p_j^{\alpha}\\ \alpha\geqslant 0}}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p_j^{\alpha})}{p_j^{\alpha s}}, \tag{3.2}$$

考虑求和式 $S_n=\sum\limits_{m_1m_2\cdots m_k=n}g_1(m_1)g_2(m_2)\cdots g_k(m_k)$, 下面分两种情况讨论 n.

当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $\alpha_k\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,k)$, 令 $m_j=p_j^{\alpha_j}$, 于是 $n=m_1m_2\cdots m_k$, 则

$$S_n=f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\cdots f(p_k^{\alpha_k})=f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=f(n).$$

当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}q^{\beta}\ (p_j\nmid q, j=1,2,\cdots,k,\beta>0)$, 则 $n\neq m_1m_2\cdots m_k$, 所以 $S_n=0$.

因此

$$S_n=\sum_{m_1m_2\cdots m_k=n}g_1(m_1)g_2(m_2)\cdots g_k(m_k)=\theta_k(n)f(n), \tag{3.3}$$

其中 $\theta_k(n)=\begin{cases}1, & n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\geqslant 0,\\ 0, & \texttt{otherwise}.\end{cases}$

由 (3.1), (3.2), (3.3) 式可知

$$\prod_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p_j^{\alpha})}{p_j^{\alpha s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_k(n)\frac{f(n)}{n^s},$$

于是

$$\prod_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p_j^{\alpha})}{p_j^{\alpha s}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}(\theta_k(n)-1)\frac{f(n)}{n^s}.$$

由于 $k\leqslant p_k$, 当 $n\leqslant k$ 时, $n\leqslant p_k$, 于是 $\theta_k(n)-1=0$, 因此

$$\left|\prod_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p_j^{\alpha})}{p_j^{\alpha s}}-F(s)\right|=\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(\theta_k(n)-1)\frac{f(n)}{n^s}\right|\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\to 0\quad(k\to\infty),$$

由于 $F(s)$ 绝对收敛, 所以当 $k\to\infty$ 时, 上式趋于 0.

综上

$$F(s)=\prod_{j=1}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p_j^{\alpha})}{p_j^{\alpha s}}=\prod_{p}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}}.$$

□

命题 3.3. 设函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 是完全积性函数且不为 0, 若 *Dirichlet* 级数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

绝对收敛, 则

$$F(s)=\prod_{s}\frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}}.$$

证明. 考虑级数

$$G_p(s)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}},$$

因此

$$G_p(s)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}}=\sum_{n=p^{\alpha}}\frac{f(n)}{n^s},$$

所以 $G_p(s)$ 是 $F(s)$ 的子序列, 于是 $G(s)$ 绝对收敛.

利用 $f(n)$ 是完全积性函数且不为 0, 知

$$G_p(s)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{f(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^{\alpha}=\frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}}.$$

由**命题**3.2知

$$F(s)=\prod_{p}G_p(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}}.$$

□

注意到 $f(n)=1$ 是完全积性函数, 所以由**命题**3.3, 我们可以得到所谓的 **Euler 乘积公式**

$$\zeta(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\quad(\sigma>1).\tag{3.4}$$

命题 3.4. 当 $\sigma>1$ 时, 即 $\mathrm{Re}(s)>1$, 则 $\zeta(s)\neq 0$.

证明. 由 (3.4) 式可知

$$|\zeta(s)|=\left|\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right|=\prod_{p}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{p^s}\right|},$$

又由于

$$\left|1-\frac{1}{p^s}\right|=|1-p^{-\sigma-it}|\leqslant 1+|p^{-\sigma-it}|=1+p^{-\sigma},$$

于是

$$|\zeta(s)| = \prod_p \frac{1}{\left|1-\frac{1}{p^s}\right|} \geqslant \prod_p \frac{1}{1+p^{-a}} = \prod_p \frac{1-p^{-a}}{1-p^{-2a}} = \prod_p \frac{(1-p^{-2a})^{-1}}{(1-p^{-a})^{-1}} = \frac{\zeta(2a)}{\zeta(a)} > 0. \tag{3.5}$$

□

定理 3.2 (Weierstrass). 若函数序列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区域 D 内解析, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内内闭一致收敛到函数 $f(z)$, 则

(1) 函数 $f(z)$ 在 D 内解析;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 内内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$, $k\in\mathbb{N}$.

证明请见 [1] 第 5 章定理 3.

由于 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 在 $s = x > 1$ $(x\in\mathbb{R})$ 上收敛[1], 由**定理**3.1知, $\zeta(s)$ 在区域 $D = \{\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1\}$ 上一致收敛, 又由于 $\frac{1}{n^s}$ 在 D 上解析, 由**定理**3.2可知, $\zeta(s)$ 在 D 上解析, 且

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}. \tag{3.6}$$

命题 3.5. 设 $\sigma > 1$, 即 $\mathrm{Re}(s) > 1$, 则

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

证明. 设 $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$, 由**命题**3.4知 $\zeta(s)\neq 0$, 注意到**命题**2.1

$$\log_n = \sum_{m|n} \Lambda(m) = \sum_{m_1m_2=n} \Lambda(m_1)\mathbf{1}(m_2), \tag{3.7}$$

其中 $\mathbf{1}(n) = 1$ $(n\in\mathbb{N})$ 为常值函数.

由于

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty \quad (\sigma > 1),$$

于是当 $\sigma > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ 收敛.

由**命题**3.2和 (3.4), (3.6), (3.7) 式知

$$-\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

所以

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

□

[1]证明请见 [2] 第九章例 1.9.

4 $\psi_1(x)$ 的复积分形式

引理 4.1. 设 $a>0$ 且 $c>1$, 则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & 0<a\leqslant 1,\\ 1-\dfrac{1}{a}, & a\geqslant 1.\end{cases}$$

证明. 设 $f(s)=\dfrac{a^s}{s(s+1)}$, 下面分别根据 a 的不同取值范围构造不同的曲线, 再使用留数定理进行证明.

当 $a\geqslant 1$ 时, 构造圆弧 $A(T)=\{s:|s|\leqslant\sqrt{c^2+T^2},\ \sigma<c\}$, 直线段 $B(T)=[c-\mathrm{i}T,c+\mathrm{i}T]$, 设 $\gamma(T)=A(T)\cup B(T)$ 定向为逆时针方向, 则 $\gamma(T)$ 为简单闭合曲线, 且包含 $\dfrac{a^s}{s(s+1)}$ 的两个一级极点 $s=0,-1$. 如图1所示.

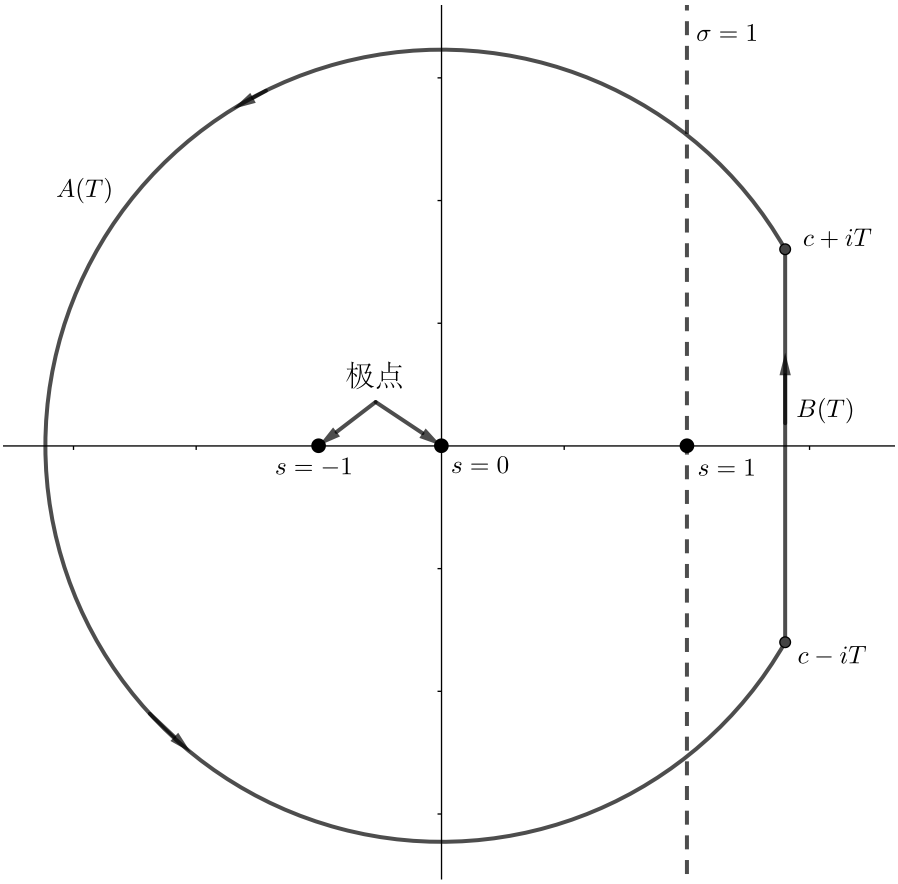


图 1: $a\geqslant 1$ 时构造的曲线

由留数定理知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma(T)}\frac{a^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{A(T)}f(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{B(T)}f(s)\,\mathrm{d}s\\&=\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-1)=1-\frac{1}{a},\end{aligned}\tag{4.1}$$

下面证明当 $T \to \infty$ 时, $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{A(T)} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

设 $s \in A(T)$, 记 $R = \sqrt{c^2+T^2} = |s|$, 由于 $a \geqslant 1$ 且 $\sigma \leqslant c$, 则 $|a^s| = a^\sigma \leqslant a^c$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{A(T)} \frac{a^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{A(T)} \frac{|a^s|}{|s||s+1|}\,|\mathrm{d}s| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{a^c}{R(R-1)} \cdot 2\pi R = \frac{a^c}{R-1} \leqslant \frac{a^c}{T-1} \to 0 \quad (T \to \infty).\end{aligned} \tag{4.2}$$

所以, 当 $T \to \infty$ 时, 由 (4.1) 式可知

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{B(T)} f(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}T} \frac{a^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{a^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s = 1 - \frac{1}{a}.$$

当 $0 < a < 1$ 时, 类似地, 构造圆弧 $C(T) = \{z : |z| \leqslant \sqrt{c^2+T^2}, \sigma > c\}$, 设 $\Gamma(T) = B^-(T) \cup C(T)$ 定向为逆时针方向, 其中 $B^-(T)$ 的定向与 $B(T)$ 的定向相反. 如图2所示.

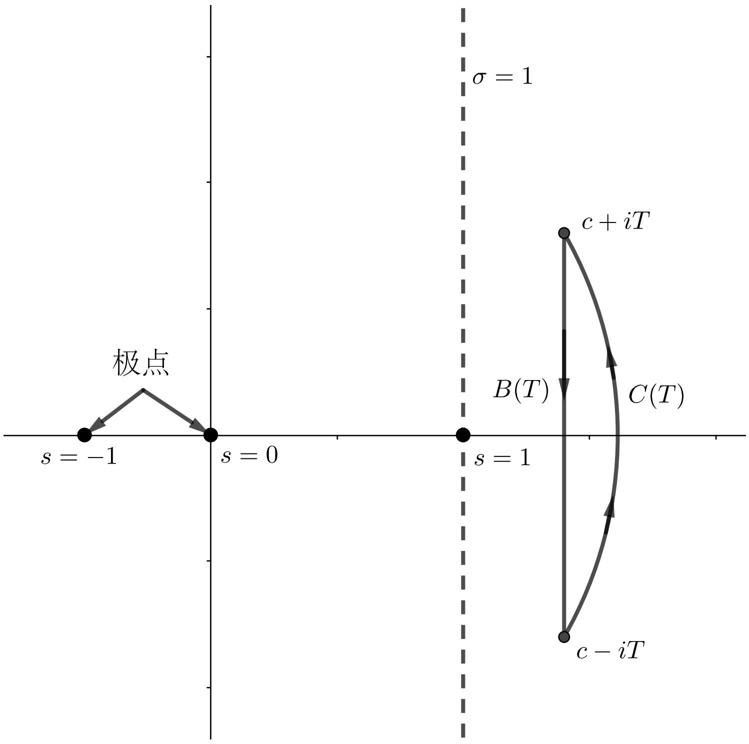


图 2: $0 < a < 1$ 时构造的曲线

由于 $f(s)$ 在 $\Gamma(T)$ 所围成的区域中解析, 由 Cauchy 定理知

$$0 = \int_{\Gamma(T)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{C(T)} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{B^-(T)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{C(T)} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_{B(T)} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.3}$$

由于当 $s \in C(T)$ 时, $0 < a < 1$ 且 $\sigma \geqslant c$, 则 $|a^s| = a^\sigma \leqslant a^c$, 类似 (4.2) 式, 可以证明 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{C(T)} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

所以当 $T \to \infty$ 时, 由 (4.3) 式可知

$$\lim_{T\to\infty} \int_{B(T)} f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{a^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s = 0.$$

□

命题 4.1. 设 $x > 0$, $c > 1$, 则

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \mathrm{d}s,$$

其中积分路线为直线 $\sigma = c$.

证明. 由**引理**4.1, **命题**3.5和**命题**2.4可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) & \xlongequal{\text{命题3.5}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\,\mathrm{d}s \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s \\ & \xlongequal{\text{引理4.1}} x \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right) \\ & \xlongequal{\text{命题2.4}} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(x-n) = \psi_1(x). \end{aligned}$$

□

这样我们就找到了 $\psi_1(x)$ 的复积分形式, 并且积分中含有 $\zeta(s)$ 函数, 进一步得到素数定理的另一充分条件, 也就是我们最终所要证明的.

命题 4.2. 设 $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)} \left(-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$, 当 $x \to \infty$ 时, 若

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} G(s) x^{s-1}\,\mathrm{d}s \sim \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

成立, 则素数定理成立.

证明. 由第二节**命题**2.3知, $\psi_1(x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$ 是素数定理的充要条件, 根据**命题**4.1得

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} G(s) x^{s-1}\,\mathrm{d}s,$$

所以 (4.4) 式成立, 则素数定理成立. □

由于 $\zeta(s)$, $\zeta'(s)$ 在半平面 $\sigma > 1$ 上解析, 且 $\zeta(s)$ 不为 0, 所以 $G(s)$ 在半平面 $\sigma > 1$ 上解析. 我们期望利用留数定理计算 $G(s)x^{s-1}$ 在直线 $\sigma = c$ 上的积分, 发现 $\zeta(s)$ 在 $s = 1$ 处发散, 那么可不可以将 $\zeta(s)$ 延拓到半平面 $\sigma > 0$ 上, 且 $s = 1$ 为 $\zeta(s)$ 的唯一极点, 也就是说将 $\zeta(s)$ 延拓为半平面 $\sigma > 0$ 上的亚纯函数, 于是 $G(s)$ 是否也是 $\sigma > 0$ 上的亚纯函数, 有唯一的极点 $s = 1$. 于是, 我们就可以利用 $s = 1$ 处留数计算 $G(s)x^{s-1}$ 在直线 $\sigma = c$ 上的积分了. 所以, 接下来我们将对 $\zeta(s)$ 进行解析延拓.

5 zeta 函数的解析延拓

定义 5.1 (解析延拓). 设函数 $f(s)$ 为定义在开集 D 上的解析函数, 若存在定义在开集 U 上的解析函数 $F(s)$, 其中 $D \subset U$, 对任意 $s \in D$ 有 $f(s) = F(s)$ 成立, 则称函数 $F(s)$ 为函数 $f(s)$ 的解析延拓.

因此解析延拓就是将一个解析函数延拓到解析域外, 并且使得该函数在更大的区域上保持解析性质. 下面考虑将 $\zeta(s)$ 解析延拓到半平面 $\sigma > 0$ 去掉奇点 $s = 1$, 即在集合 $D := \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0, s \neq 1\}$ 上解析.

引理 5.1. 设可积函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 则

$$\sum_{n=1}^{m} \int_{n}^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{m} n \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明. 设函数 $g_n(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ 1, & k \geqslant n. \end{cases}$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \int_{n}^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=n}^{m} \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x g_n(k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \sum_{n=1}^{m} g_n(k) = \sum_{k=1}^{m} \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \sum_{n=1}^{k} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{m} k \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

上述定理表明整数的积分区间, 可以分为多个长度为 1 的积分累积.

引理 5.2. 对定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$, 任意 $x > 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \int_{n}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{1}^{x} [u] f(u)\,\mathrm{d}u.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \int_{n}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u &= \sum_{n=1}^{[x]-1} \int_{n}^{[x]} f(u)\,\mathrm{d}u + \sum_{n=1}^{[x]} \int_{[x]}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&\overset{\text{引理5.1}}{=\!=} \sum_{n=1}^{[x]-1} n \int_{n}^{n+1} f(u)\,\mathrm{d}u + [x] \int_{[x]}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=1}^{[x]-1} \int_{n}^{n+1} [u] f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{[x]}^{x} [u] f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{1}^{x} [u] f(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

□

引理 5.3. 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的开集, γ 为 $\mathbb{C}$ 中可求长曲线, 函数 $f(s,t): D\times\gamma\to\mathbb{C}$, 对任意 $s\in D$, $f(s,t)$ 在 γ 上连续, 任意 $t\in\gamma$, $f(s,t)$ 在 D 内解析, 则 $F(s)=\displaystyle\int_\gamma f(s,t)\,\mathrm{d}t$ 在 D 内解析.

证明. 由于 $f(s,t)$ 在 γ 上连续, 则 $F(s)$ 有意义. 设 Γ 为 D 内任一可求长简单闭曲线, 其所围成的区域包含于 D, 由 Fubini 定理知

$$\int_\Gamma F(s)\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma \mathrm{d}s\int_\gamma f(s,t)\,\mathrm{d}t=\int_\gamma \mathrm{d}t\int_\Gamma f(s,t)\,\mathrm{d}s.$$

根据 Cauchy 定理 $\displaystyle\int_\Gamma f(s,t)\,\mathrm{d}s=0$, 则 $\displaystyle\int_\Gamma F(s)\,\mathrm{d}s=0$, 由 Morera 定理知, $F(z)$ 在 D 内解析. □

定理 5.1. $\zeta(s)$ 存在 $D=\{s:\sigma>0,s\neq1\}$ 上的解析延拓, 且有唯一的一级极点 $s=1$.

证明. 先考虑 $\zeta(s)$ 的部分和, 对任意 $x\geqslant1$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}-\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{x^s}=\sum_{n\leqslant x}\int_n^x\frac{s}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u\ \overset{\text{引理5.2}}{=\!=}\ s\int_1^x\frac{[u]}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}&=\frac{[x]}{x^s}+s\int_1^x\frac{[u]}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u=\frac{x-\{x\}}{x^s}+s\int_1^x\frac{1}{u^s}\,\mathrm{d}u-s\int_1^x\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{x^{s-1}}-\frac{\{x\}}{x^s}+\frac{s}{s-1}-\frac{s}{(s-1)x^{s-1}}-s\int_1^x\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{5.1}$$

对于 $\sigma>1$ 时

$$\zeta(s)=\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\frac{s}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u.$$

定义函数

$$g(s)=\begin{cases}\dfrac{s}{s-1}-s\displaystyle\int_1^\infty\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u, & s\in D,\\ 0, & s\neq1.\end{cases}\tag{5.2}$$

下面证明 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$ 在 D 上是解析的. 设 $F_n(u)=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$, 则

$$\int_1^\infty\frac{\{u\}}{u^{s+1}}=\sum_{n=1}^\infty F_n(u).$$

注意到

$$F_n(s)=\int_0^1\frac{\{n+t\}}{(n+t)^{s+1}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t}{(n+t)^{s+1}}\,\mathrm{d}t.$$

由**引理**5.3可得 $F_n(s)$ 在 D 上解析.

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\sigma>\sigma$, 则

$$|F_n(s)|\leqslant\int_n^{n+1}\left|\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\right|\mathrm{d}u\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{|u^{s+1}|}\,\mathrm{d}u=\int_n^{n+1}\frac{1}{u^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{n^{\sigma+1}}\leqslant\frac{1}{n^{\varepsilon+1}}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\varepsilon+1}}$ 收敛, 由 M-判别法知, 级数 $F_n(s)$ 一致收敛到 $\int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$, 由 Weierstrass 定理知 $\int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$ 在 D 上解析.

设 $A(s)=s-s(s-1)\int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u,\ B(s)=s-1$, 则

$$g(s)=\frac{A(s)}{B(s)}\quad(s\neq 1),$$

由于 $P(1)=1,\ Q(1)=0,\ Q'(1)=1$, 所以 $s=1$ 是 $g(s)$ 的一级极点.

综上, $g(s)$ 是 $\zeta(s)$ 在 D 上的解析延拓且 $s=1$ 是 $g(s)$ 的一级极点. □

6　G(s) 的上界估计, zeta 的零点

根据**命题**4.2可知, 我们需要对 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s$ 使用留数定理计算, 其中 $G(s)=\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$. 因此我们可能需要 $G(x)$ 的上界估计, **定理**5.1我们通过解析延拓得到了 $\zeta(s)$ 函数在半平面 $\sigma>0$ 除 $s=1$ 上解析, 则 $G(s)$ 在半平面 $\sigma>0$ 除 $s=1$ 和 $\zeta(s)$ 的零点外解析, 由**命题**3.4知, $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>1$ 上无零点, 所以 $G(x)$ 在 $\sigma>1$ 上解析, 我们期望 $G(x)$ 在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 上是亚纯函数且有唯一极点 $s=1$, 这样才能使用留数定理计算积分.

所以接下来, 我们将估计 $G(x)$ 的上界并证明 $\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1$ 上无零点.

定理 6.1 (Cauchy 公式)**.** *设区域 D 是可求长简单闭曲线 γ 所围成的内部, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, $\bar{D}$ 上连续, 对任意 $z\in D$ 有*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{1\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

证明请见 [1] 第四章定理 4.

引理 6.1. *设 $s\in\mathbb{C},\ s=\sigma+\mathrm{i}t,\ \sigma\geqslant 1,\ t\geqslant 2$, 则*

(1) $\zeta(s)=O(\log t)$,

(2) $\zeta'(s)=O(\log^2 t)$,

(3) 设 $\delta\in(0,1)$, 若 $\sigma\geqslant\delta$ 且 $t\geqslant 1$, 则 $\zeta(s)=O_\delta(t^{1-\delta})$, 即 $|\zeta(s)|\leqslant Ct^{1-\delta}$, 其中 C_δ 与 δ 相关.

证明. 由**定理**5.1中 (5.1) 和 (5.2) 式可知, 当 $\sigma>0, t\geqslant 1, s\neq 1$, 对任意 $x\geqslant 1$ 有

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u,\quad \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{x^{s-1}}-\frac{\{x\}}{x^s}+\frac{s}{s-1}-\frac{s}{(s-1)x^{s-1}}-s\int_1^{x}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u,$$

则

$$\zeta(s) - \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} = \frac{\{x\}}{x^s} + \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} - s\int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u, \tag{6.1}$$

注意到

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{x^\sigma}, \qquad \left|\frac{\{x\}}{x^s}\right| \leqslant \frac{1}{x^\sigma}, \qquad \left|\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}\right| \leqslant \frac{1}{tx^{\sigma-1}} \leqslant \frac{1}{x^{\sigma-1}},$$
$$\left|s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \sqrt{\sigma^2+t^2}\int_x^\infty \frac{1}{u^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\sigma+t}{\sigma x^\sigma} = \left(1+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{x^\sigma},$$

由 (6.1) 式知

$$|\zeta(s)| \leqslant \left|\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}\right| + \left|\frac{\{x\}}{x^{s-1}}\right| + \left|\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}\right| + \left|s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{x^{\sigma-1}} + \left(2+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{x^\sigma}. \tag{6.2}$$

若 $\sigma \geqslant 1$, 则

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} + 1 + \frac{2+t}{x} \leqslant \sum_{n=1}^{[x]-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}u + 2 + \frac{2+t}{x}$$
$$\leqslant \int_1^x \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u + 4 + \frac{t}{x} = \log x + 4 + \frac{t}{x},$$

取 $x = t$, 得

$$|\zeta(s)| \leqslant \log t + 5. \tag{6.3}$$

于是 (1) 得证.

任意 $\delta \in (0,1)$, 若 $\sigma > \delta$, 由 (6.2) 式得

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^\delta} + \frac{1}{x^{\delta-1}} + \left(2+\frac{t}{\delta}\right)\frac{1}{x^\delta},$$

由于

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^\delta} = \sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n^\delta} \leqslant \sum_{n=1}^{[x]-1}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^\delta} \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x^\delta} \leqslant \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta}$$

则

$$|\zeta(s)| \leqslant \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta} + x^{1-\delta} + \frac{3t}{\delta x^\delta},$$

取 $x = t$, 得

$$|\zeta(s)| \leqslant t^{1-\delta}\left(\frac{1}{1-\delta} + 1 + \frac{3}{\delta}\right). \tag{6.4}$$

于是 (3) 得证.

任取一点 $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{i}t_0$, $\sigma_0 \geqslant 1,\ t_0 \geqslant 2$, 设 $D = V(s_0;\rho)$, 即以 s_0 为圆心半径为 ρ 的圆围成的区域, 其中 $0 < \rho < \dfrac{1}{2}$, γ 为 D 的边界, 则 $\zeta(s)$ 在 γ 内解析.

于是
$$|\zeta'(s_0)| = \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\zeta(\xi)}{(\xi-s_0)^2}\,\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \frac{M}{\rho},$$
其中 $M=\sup\limits_{s\in D}\xi(s)$, 下面对 M 进行估计.

对于 $s\in D$, 有 $\sigma>\sigma_0-\rho\geqslant 1-\rho>0$, 取 $\delta=1-\rho$, 由 (6.4) 式得
$$|\zeta(s)|\leqslant t^\rho\left(\frac{1}{\rho}+1+\frac{3}{1-\rho}\right),$$
由于 $0<\rho<\dfrac{1}{2}$ 且 $1\leqslant t_0-\rho<t<t_0+\rho<2t_0$, 于是
$$|\zeta(s)|\leqslant (2t_0)^\rho\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}+\frac{3}{\rho}\right)\leqslant\frac{10t_0^\rho}{\rho},$$
则
$$|\zeta'(s)|\leqslant\frac{10t_0^\rho}{\rho^2},$$
取 $\rho=\dfrac{1}{\log t_0+2}$, 则 $\rho<\dfrac{1}{\log t_0}$, $t_0^\rho=e^{\rho\log t_0}<e$, 所以 $|\zeta'(s_0)|\leqslant 10e(\log t_0+2)^2$, 于是 (2) 得证. □

命题 6.1. $\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1$ 上没有零点, 当 $\sigma\geqslant 1$ 时, 有
$$\frac{1}{\zeta(s)}=O(\log^7 t)\quad (t\to\infty).$$

证明. 由于 $\zeta(s)=\prod\limits_p\dfrac{1}{1-p^{-s}}$, 则
$$\log\zeta(s)=\prod_p\log\frac{1}{1-p^{-s}}$$
设 $x=p^{-s}$, 则 $x<1$, 注意到
$$\log\frac{1}{1-x}=\int_0^x\frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u=\int_0^x\sum_{m=0}^\infty u^m\,\mathrm{d}u=\sum_{m=0}^\infty\int_0^x u^m\,\mathrm{d}u=\sum_{m=0}^\infty\frac{x^{m+1}}{m+1}=\sum_{m=1}^\infty\frac{x^m}{m},$$
所以
$$\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{m=1}^\infty\frac{(p^m)^{-s}}{m}=\sum_p\sum_{n=p^m}\frac{n^{-s}}{m}$$
令 $c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & n=p^m,\\ 0, & \texttt{otherwise}.\end{cases}$ 则 $\log\zeta(s)=\sum\limits_{n=2}^\infty c_n n^{-s}$.

注意到, 假设 $\log(a+b\mathrm{i})=c+d\mathrm{i}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{N})$, 则 $a+b\mathrm{i}=e^{c+d\mathrm{i}}$, $|a+b\mathrm{i}|=e^c$, 于是 $\log|a+b\mathrm{i}|=c=\mathrm{Re}(\log(a+b\mathrm{i}))$.

则

$$\log|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)| = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma-\mathrm{i}t}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}\cos(t\log n)$$

又注意到

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta = 3+4\cos\theta+2\cos^2\theta-1 = 2(\cos^2\theta+2\cos\theta+1) = 2(\cos\theta+1)^2 \geqslant 0$$

于是

$$\begin{aligned}&\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+\mathrm{i}t)\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)|\\ =&3\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}+4\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}\cos(t\log n)+\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}\cos(2t\log n)\\ =&\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)) \geqslant 0\end{aligned}$$

所以

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+\mathrm{i}t)\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)| \geqslant 1. \tag{6.5}$$

当 $\sigma>1$ 时

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3\left|\frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)| \geqslant \frac{1}{\sigma-1}, \tag{6.6}$$

假设 $s=1+\mathrm{i}t$ 是 $\zeta(s)$ 的零点, 由于 $\zeta(s)$ 在 $1+\mathrm{i}t, 1+2\mathrm{i}t$ 处解析, 由可微性

$$\lim_{\sigma\to1^+}\frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)-\zeta(1+\mathrm{i}t)}{\sigma-1} = \lim_{\sigma\to0}\frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{\sigma-1} \tag{6.7}$$

存在. 由于 $s=1$ 为 $\zeta(s)$ 的一级极点, 则

$$\lim_{\sigma\to1^+}(\sigma-1)\zeta(\sigma) = \mathrm{Res}(\zeta,1) = 1, \tag{6.8}$$

由连续性知

$$\lim_{\sigma\to1^+}\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t) = \zeta(1+2\mathrm{i}t). \tag{6.9}$$

由于 (6.7), (6.8), (6.9) 式分别对应 (6.6) 式左端三项, 所以当 $\sigma\to1^+$ 时, (6.6) 式左端极限存在, 与右端极限 $\lim\limits_{\sigma\to1^+}\dfrac{1}{\sigma-1}=\infty$ 矛盾.

所以 $\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1$ 上无零点.

由**定理**3.4中 (3.5) 式可知, 当 $\sigma\geqslant2$ 时

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leqslant \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)} < \zeta(\sigma) \leqslant \zeta(2)$$

所以 $\dfrac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7 t)$.

当 $1\leqslant\sigma<2, t>2$ 时, 由 (6.5) 式可知

$$(\sigma-1)^3 \leqslant |(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|^4|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)|$$

由 $\lim\limits_{\sigma\to 1^+}(\sigma-1)\zeta(s)=1$ 且 $(\sigma-1)\zeta(s)$ 在 $1\leqslant\sigma<2$ 上是连续的, 由**引理**6.1(1) 得, 存在正常数 A_1 使得下式成立

$$(\sigma-1)^3\leqslant A_1|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|^4\log 2t\leqslant A_1|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|^4(\log 2+\log t)\leqslant 2A_1|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|^4\log t$$

于是

$$|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|\geqslant\frac{(\sigma-1)^{3/4}}{A_2(\log t)^{1/4}}\tag{6.10}$$

其中 A_2 为正常数.

设 $1<\eta<2$, 若 $\sigma<\eta$ 时, 由**引理**6.1(2), 存在正常数 A_3 使 $\zeta'(s)\leqslant A_3\log^2 t$. 则

$$\begin{aligned}|\zeta(\eta+\mathrm{i}t)|-|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|\leqslant|\zeta(\eta+\mathrm{i}t)-\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|&=\left|\int_\sigma^\eta\zeta'(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant A_3(\eta-\sigma)\log^2 t\leqslant A_3(\eta-1)\log^2 t,\end{aligned}$$

于是

$$|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|\geqslant|\zeta(\eta+\mathrm{i}t)|-A_3(\eta-1)\log^2 t\geqslant\frac{(\eta-1)^{3/4}}{A_2(\log t)^{1/4}}-A_3(\eta-1)\log^2 t.\tag{6.11}$$

若 $\sigma>\eta$ 时, 由 (6.10) 式得

$$|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|\geqslant\frac{(\sigma-1)^{3/4}}{A_2(\log t)^{1/4}}\geqslant\frac{(\eta-1)^{3/4}}{A_2(\log t)^{1/4}}\geqslant\frac{(\eta-1)^{3/4}}{A_2(\log t)^{1/4}}-A_3(\eta-1)\log^3 t,$$

所以对 $1\leqslant\sigma<2$, (6.11) 式成立, 取 $1<\eta<2$ 使下式成立

$$\frac{(\eta-1)^{3/4}}{A_2(\log t)^{1/4}}=2A_3(\eta-1)\log^2 t,$$

则 $\eta=1+\dfrac{1}{(2A_3A_4)^4\log^9 t}$. 于是

$$|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|\geqslant A_3(\eta-1)\log^2 t=\frac{A_4}{\log^7 t},$$

其中 A_4 为正常数.

所以, 当 $\sigma\geqslant 1,\ t\geqslant 2$, 有 $\dfrac{1}{\zeta(s)}=O(\log^7 t)$. □

于是我们可以对 $G(s)$ 进行估计,

命题 6.2. *设 $s=\sigma+\mathrm{i}t$, 当 $\sigma\geqslant 1,\ t\geqslant 2$ 有 $G(s)=O(t^{-\frac{3}{2}})$, 其中 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}\left(-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$.*

证明. 由**引理**6.1(2) 和**命题**6.1和 $\dfrac{1}{s(s+1)}=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, $\log^9 t=O\left(t^{\frac{1}{2}}\right)$, 得

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)=O\left(\frac{\log^9 t}{t^2}\right)=O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right).$$

□

7 完成复分析证明

由**命题**4.2我们知道, 证明 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s \sim \dfrac{1}{2} \quad (x \to \infty)$, 即可完成素数定理证明. 其中 $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}\left(-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$. 在**命题**6.1上没有零点, 由 $\zeta(s)$ 的连续性知, 在 $\sigma = 1$ 的左侧邻域内也没有零点, 于是 $G(s)x^{s-1}$ 在 $\sigma \geqslant 1$ 半平面上除了 $s = 1$ 外解析. 接下来我们将构造一个包含线段 $[c - \mathrm{i}u, c + \mathrm{i}u]$ 和极点 $s = 1$ 的曲线, 用水平线和竖线是最容易做到的.

定理 7.1 (素数定理)**.** 当 $x \to \infty$ 时

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s \sim \frac{1}{2}$$

成立, 则素数定理成立.

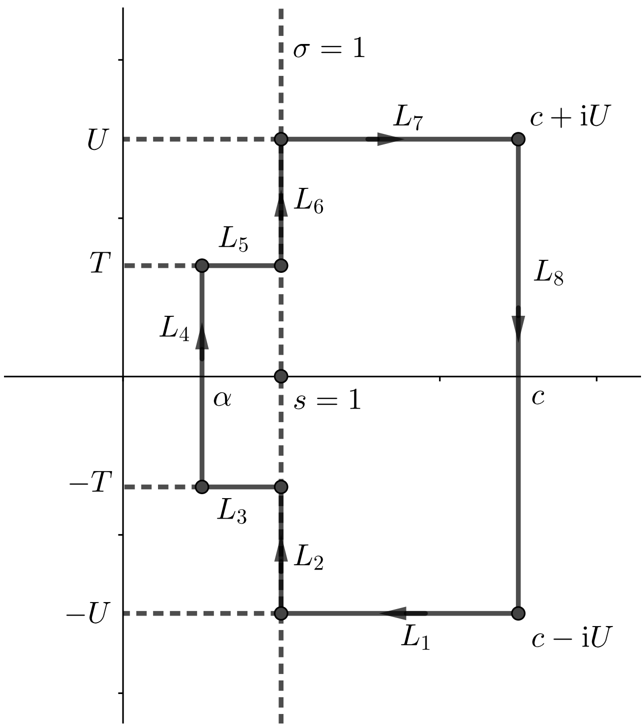
证明. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由**命题**6.2知

$$\int_{c+\mathrm{i}T}^{\infty} |G(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant A\int_{T}^{\infty} t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{A}{2\sqrt{T}} \to 0 \quad (T \to \infty),$$

于是存在充分大的 T 使下式成立

$$\int_{c+\mathrm{i}T}^{\infty} |G(s)|\,\mathrm{d}s < \varepsilon.$$

取 $\alpha \in (0, 1)$ 使 $\zeta(s)$ 在闭区域 $[\alpha, 1] \times [-T, T]$ 上没有零点, 取 $U > T$, 构造如下图的简单闭曲线 γ.



其中

$$\begin{cases} L_1=[c-\mathrm{i}u,1-\mathrm{i}u], & L_2=[1-\mathrm{i}u,1-\mathrm{i}T],\\ L_3=[1-\mathrm{i}T,\alpha-\mathrm{i}T], & L_4=[\alpha+\mathrm{i}T,\alpha+\mathrm{i}T],\\ L_5=[\alpha+\mathrm{i}T,1+\mathrm{i}T], & L_6=[1+\mathrm{i}T,1+\mathrm{i}u],\\ L_7=[1+\mathrm{i}u,c+\mathrm{i}u], & L_8=[c+\mathrm{i}u,c-\mathrm{i}u]. \end{cases}$$

方向为顺时针方向 (方便后面计算).

由解析延拓后的 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>0$ 上除去 $s=1$ 外连续, 则存在包含曲线 γ 的区域 D, 使 $\zeta(s)$ 在 D 上无零点, 则 $G(s)$ 是 D 上的亚纯函数, $s=1$ 为其唯一奇点.

由**定理**5.1知

$$\zeta(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{s-s(s-1)\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u}{s-1}\quad (s\neq 1),$$

则 $A(1)=1,B(1)=0,B'(1)=1$, 于是

$$G(s)x^{s-1}=\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)=\frac{B'(s)A(s)-A'(s)B(s)}{s(s+1)A(s)B(s)}x^{s-1}=:\frac{C(s)}{D(s)},$$

则 $C(1)=B'(1)A(1)=1,D(1)=0,D'(1)=2B'(1)A(1)=2$, 所以 $s=1$ 为 $G(s)x^{s-1}$ 的一级极点, 且

$$\mathrm{Res}(G(s)x^{s-1},1)=\frac{C(1)}{D'(1)}=\frac{1}{2}.$$

由留数定理知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}U}^{c+\mathrm{i}U}G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^{7}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_j}G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}.$$

记 $I_j=\displaystyle\int_{L_j}G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s$, 于是

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}U}^{c+\mathrm{i}U}G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{7}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{L_j}G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s\right|=\sum_{j=1}^{7}\frac{|I_j|}{2\pi}. \tag{7.1}$$

设 $F'(s)=G(s)x^{s-1}$, 则 $F(s)$ 在 D 上解析[2], 则 $F(\overline{s})=\overline{F(s)}$, 观察到

$$\begin{aligned}|I_1|&=\left|\int_{c-\mathrm{i}U}^{1-\mathrm{i}U}F'(s)\,\mathrm{d}s\right|=|F(1-\mathrm{i}U)-F(c-\mathrm{i}U)|=|F(\overline{1+\mathrm{i}U})-F(\overline{c+\mathrm{i}U})|\\ &=|\overline{F(1+\mathrm{i}U)}-\overline{F(c+\mathrm{i}U)}|=|F(1+\mathrm{i}U)-F(c+\mathrm{i}U)|=|I_7|\end{aligned}$$

类比地, 有 $|I_2|=|I_6|,\ |I_3|=|I_5|$.

[2]这样的 $F(s)$ 一定是存在且解析, 证明请见 [4] 第四节命题 4.12.

设 $M = \sup\limits_{s\in L_3\cup L_4\cup L_5} |G(s)|$, 则

$$
\begin{aligned}
|I_1| = |I_7| &= \left|\int_{1+\mathrm{i}U}^{c+\mathrm{i}U} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_1^c G(\sigma+\mathrm{i}U)x^{\sigma+\mathrm{i}U-1}\,\mathrm{d}\sigma\right| \\
&\leqslant AU^{-\frac{3}{2}}\int_1^c x^{\sigma-1}\,\mathrm{d}\sigma \leqslant AU^{-\frac{3}{2}}\frac{x^{c-1}}{\log x}, \\
|I_2| = |I_6| &= \left|\int_{1+\mathrm{i}T}^{1+\mathrm{i}U} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_T^U G(1+\mathrm{i}t)x^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_T^U |G(1+\mathrm{i}t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon, \\
|I_3| = |I_5| &= \left|\int_{\alpha+\mathrm{i}T}^{1+\mathrm{i}T} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_\alpha^1 G(\sigma+\mathrm{i}T)x^{\sigma+\mathrm{i}T-1}\,\mathrm{d}\sigma\right| \\
&\leqslant M\int_\alpha^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{M(1-x^{\alpha-1})}{\log x} \leqslant \frac{M}{\log x}, \\
|I_4| &= \left|\int_{\alpha-\mathrm{i}T}^{\alpha+\mathrm{i}T} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_{-T}^T G(\alpha+\mathrm{i}t)x^{\alpha+\mathrm{i}t-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2TMx^{\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

令 $U\to\infty$, 则 $I_1 = I_7 = 0$, 由 (7.1) 式可知

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}(|I_2|+|I_3|+|I_4|+|I_5|+|I_6|) \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2M}{\log x}+2\varepsilon+2TMx^{\alpha-1}\right) \to 0 \quad (x\to\infty).
\end{aligned}
$$

综上, 当 $x\to\infty$ 时, $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} G(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s \sim \frac{1}{2}$. □

参考文献

[1] 方企勤. 复变函数教程 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1996.12.

[2] 陆亚明. 数学分析入门, 第二册 [M]. 西安: 西安交通大学出版社.

[3] Ciar´an O’ Rourke. The prime number theorem: Analytic and elementary proofs[D]. Ollscoil na h-´Eireann, M´a Nuad, 2013.

[4] JOSEPH BAK, DONALD J. NEWMAN. Complex Analysis[M]. Springer-Verlag, 1995.

[5] Atle Selberg. An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem[C]. Annals of Mathematics, 1949, 305-313.

[6] Donald J. Newman. Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem[C]. American Mathematical Monthly, 1980, 693-696.