日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 5 月 3 日	数值分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460	59

1. 迭代 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$, 若收敛则将收敛于 $x^\bullet=$ $\underline{\sqrt[3]{3}}$, 收敛阶为 $\underline{\ 2\ }$;

解答. 迭代式等价于求解方程 $f(x)=x^3-3=0$, 其根为 $\sqrt[3]{3}$. 令 $\phi(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{x^2}$, 则 $\phi'(x^\bullet)=\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{x^3}\right)\Big|_{x=\sqrt[3]{3}}=0$, $\phi''(x^\bullet)=\dfrac{6}{x^4}\Big|_{x=\sqrt[3]{3}}\neq 0$, 所以该迭代序列为二阶收敛.

2. 已知函数 $f(x,y)$ 计为关于 x 和 y 的非线性函数, 则计算非线性方程组 $\begin{cases}x+f(x,y)=0\\ \ln(x)-y=0\end{cases}$ 的简单迭代格式为 $\underline{\begin{cases}x^{(k+1)}=-f(x^{(k)},y^{(k)})\\ y^{(k+1)}=\ln(x^{(k)})\end{cases}}$. Gauss-Seidel 迭代格式为 $\underline{\begin{cases}x^{(k+1)}=-f(x^{(k)},y^{(k)})\\ y^{(k+1)}=\ln(x^{(k+1)})\end{cases}}$.

3. 用牛顿法解方程组 $\begin{cases}x+y^2=2\\ x^2+2y=3\end{cases}$, 取 $(x^{(0)},y^{(0)})^T=(0,0)^T$, 则 $\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-2\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$.

4. 方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根, 将方程作三种同解变形, 可得三种迭代格式:

(1) $x=1+\dfrac{1}{x^2}$, $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^2}$;

(2) $x^3=1+x^2$, $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$;

(3) $x^2=\dfrac{1}{x-1}$, $x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

判断各迭代格式在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性; 选一种收敛最快的迭代格式, 计算在 $x_0=1.5$ 附近的根, 准确到 4 位小数.

解答. 设 $f(x)=x^3-x^2-1$, 由于 $f(1.5)>0$ 且 $f(1.4)<0$, 则含根区间为 $(1.4,1.5)$, 取 $x\in(1.4,1.5)$.

(1) 设 $\phi_1(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$, 则 $\phi_1'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, 于是 $|\phi_1'(x)|\geqslant \phi_1'(1.5)|\approx 0.59<1$, 由局部收敛定理知该迭代序列收敛.

(2) 设 $\phi_2(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$, 则 $\phi_2'(x)=\dfrac{2x}{3(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$, 于是 $|\phi_2'(x)|\geqslant \phi_2'(1.5)|\approx 0.456<1$, 由局部收敛定理知该迭代序列收敛.

(3) 设 $\phi_3(x)=(x-1)^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\phi_3'(x)=-\dfrac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$, 于是 $|\phi_3'(x)|\geqslant|\phi_3'(1.5)|=\sqrt{2}>1$, 则 $|x^*-x_{k+1}|=|\phi_3(x^*)-\phi_3(x_k)|=|\phi_3'(\xi)|\,|x^*-x_k|\geqslant|x^*-x_k|$ 与方程的根距离更远, 所以该迭代序列发散.

由于 $|\phi_2'(1.5)|\leqslant|\phi_1'(1.5)|$, 所以第二个迭代序列收敛地更快, 按公式 (2) 迭代得

$$
\begin{array}{lllll}
x_0=1.5000 & x_1=1.4812 & x_2=1.4727 & x_3=1.4688 & x_4=1.4670\\
x_5=1.4662 & x_6=1.4659 & x_7=1.4657 & x_8=1.4656=x_9 &
\end{array}
$$

5. 用迭代法的思想证明

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{\text{开方}k\text{次}}=2.$$

证明. 构造迭代序列 $x_{k+1}=2+\sqrt{x_k}=\phi(x)$, 则等价于求解 $f(x)=(x-4)(x-1)=0$, 根为 4 和 1. 设含根区间为 $[1,5]$, 则 $\phi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{2}<1$, 由局部收敛定理知该迭代序列收敛. 取 $x_0=2$, 则 $x_{k+1}=2+\sqrt{x_k}>x_k$, 所以 $\{x_k\}$ 为单增序列, 收敛于 $x^*=4$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{\text{开方}k\text{次}}=4,$$

开更号即可得到原式. □

6. 方程 $2^x-5x+1=0$ 在区间 $[0,1]$ 中有唯一解, 请问

(1) 写出两个收敛的简单迭代计算式;

(2) 证明它们的收敛性;

解答. (1) Newton 法: 设 $f(x)=2^x-5x+1$, 则 $f'(x)=2^x\ln 2-5$, 迭代式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2_k^x-5x_k+1}{2_k^x\ln 2-5}=:\phi_1(x_k)$$

做同解变换, $x=\dfrac{2^x+1}{5}$, 迭代式为 $x_{k+1}=\dfrac{2^{x_k}+1}{5}=:\phi_2(x_k)$.

(2) 由 Newton 法知, $\phi_1(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\leqslant\dfrac{f(0)f''(0)}{f'^2(0)}\approx 0.0518<1$, 由局部收敛定理知该迭代序列收敛.

对于第二个迭代序列, $|\phi'(x)|=\dfrac{2^x\ln 2}{5}\leqslant\dfrac{2\ln 2}{5}<1$, 由局部收敛定理知该迭代序列收敛.

7. 已知方程 $e^x+10x-2=0$ 在区间 $[0,1]$ 内存在唯一根且在 $\bar{x}=0.1$ 附近.

(1) 判断迭代式 $x_{k+1}=\dfrac{1}{10}(2-e^{x_k})$ 的收敛性.

(2) 若上述迭代格式不收敛, 则对其进行改善, 使得改善后的迭代格式收敛; 若收敛, 使改善后的迭代收敛加速.

解答. (1) 设 $f(x)=e^x+10x-2$, 由于 $f(\dfrac{1}{20})=e^{0.05}-1.5<0,\ f(\dfrac{1}{10})=e^{0.1}-1>0$, 则根在区间 $(\dfrac{1}{20},\dfrac{1}{10})$ 中, 令 $\phi(x)=\dfrac{2-e^x}{10}$, 则 $\phi'(x)=-\dfrac{e^x}{10}$, 有 $|\phi'(x)|\leqslant\dfrac{e^{0.1}}{10}<1$, 由局部收敛定理知该迭代序列收敛.

(2) 使用松弛加速法对迭代序列加速, 取 $\omega = \phi'(0.1) = -\dfrac{e^x}{10}$, 则加速后的迭代序列为

$$x_{k+1} = \frac{\phi(x_k) - \omega x_k}{1-\omega} = \frac{2 - e^{x_k} + x_k e^{x_k}}{10 + e^{x_k}}$$

8. 曲线 $y = x^3 - 0.51x + 1$ 与 $y = 2.4x^2 - 1.89$, 在点 $(1.6, 1)$ 附近相切, 写出求切点的横坐标的牛顿迭代格式, 并证明其收敛性.

解答. 设 $f(x) = x^3 - 2.4x^2 - 0.51x + 2.89$, 则牛顿迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2.4x_k^2 - 0.51x_k + 2.89}{3x_k^2 - 4.8x_k - 0.51} = \phi(x).$$

由于 $\phi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$, 设含根区间为 $[1, 2]$, 则 $\phi'(x) < \phi'(2) \approx 0.544 < 1$, 所以牛顿迭代序列收敛.