日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 12 月 2 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460	50

第七次作业

题目 1. (2) 令 X 是来自 $f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)$ 的随机变量.

(a). 设检验 T 是关于 $H_0:\theta\leqslant 1\ vs.\ H_1:\theta>1$，选取样本量为 2，拒绝域 $C=\{(x_1,x_2): 3/4x_1\leqslant x_2\}$. 求 T 的势函数和检验水平.

(b). 当检验量为 2 时，求 $\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$ 时关于 $H_0:\theta=1\ vs.\ H_1:\theta=2$ 的 MPT.

(f). 设检验 T 是样本量为 2 下关于 $H_0:\theta=1\ vs.\ H_1:\theta=2$，令 α,β 分别为第一、二类错误，求检验 T 使得 $\max\{\alpha,\beta\}$ 最小.

解答. (a). 由于 $\pi_T(\theta)=P_\theta(3/4\leqslant x_2/x_1)$，令 $\begin{cases}Y_1=X_1,\\ Y_2=X_2/X_1.\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}X_1=Y_1,\\ X_2=Y_1Y_2.\end{cases}$ 则 $J=Y_1$. 由于 $f_{X_1,X_2}=\theta^2(x_1x_2)^{\theta-1}$，通过变量代换可得

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=P_{X_1,X_2}(y_1,y_1y_2)y_1=\theta^2y_1^{2\theta-1}y_2^{\theta-1}$$

当 $0<y_2\leqslant 1$ 时，$y_1\in(0,1)$，则 $f_{Y_2}(y_2)=\displaystyle\int_0^1\theta^2y_1^{2\theta-1}y_2^{\theta-1}\,\mathrm{d}y_1=\frac{\theta}{2}y_2^{\theta-1}$.

当 $y_2\geqslant 1$ 时，$y_1\in(0,1/y_2)$，则 $f_{Y_2}(y_2)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{y_2}}\theta^2y_1^{2\theta-1}y_2^{\theta-1}\,\mathrm{d}y_1=\frac{\theta}{2}y_2^{-\theta-1}$.

于是检验函数为 $\pi_T(\theta)=P_\theta(Y_2\geqslant 3/4)=\displaystyle\int_{3/4}^1\frac{\theta}{2}y^{\theta-1}\,\mathrm{d}y+\int_1^\infty\frac{\theta}{2}y^{-\theta-1}\,\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^\theta$，检验水平为 $\alpha=\sup\limits_{\theta\leqslant 1}\pi_T(\theta)=\sup\limits_{\theta\leqslant 1}1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^\theta=\dfrac{5}{8}$.

(b). 由于假设为简单假设，MPT 就是 SLR 检验，$L(\theta)=\theta^2(x_1x_2)^{\theta-1}$，于是 $\dfrac{L(1)}{L(2)}=\dfrac{1}{4x_1x_2}$，则

$$\alpha=P_{\theta=1}\left[\frac{L(1)}{L(2)}<k^*\right]=P_{\theta=1}\left[X_1X_2>\frac{1}{4k^*}\right]=P_{\theta=1}[X_1X_2>k']$$

令 $\begin{cases}Y_1=X_1,\\ Y_2=X_1X_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1,\\ x_2=y_2/y_1.\end{cases}$ 则 $J=\dfrac{1}{y_1}$，由于 $\theta=1$，则 $X_1,X_2\overset{iid}{\sim}I_{(0,1)}$，于是 $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\dfrac{1}{y_1}$，则

$$f_{Y_2}(y_2)=\int_{y_2}^1\frac{1}{y_1}\,\mathrm{d}y_1=-\log y_2$$

则

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=\alpha=P_{\theta=1}(x_1x_2>k')=P_{\theta=1}(Y_2>k')=\int_{k'}^1-\log y\,\mathrm{d}y=1+k'\log k'-k'$$

故 $k'=1/2$，MPT 为拒绝 H_0 当且仅当 $X_1X_2>1/2$.

题目 2. (4) 设 X 来自分布 $f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)$，其中 $\theta>0$.

(a). 设假设 $H_0:\theta\leqslant 1\ vs.\ H_1:\theta>1$，求出拒绝域 $C=\{x:x\geqslant 1/2\}$ 的势函数和检验水平.

(b). 求解关于 $H_0:\theta=2\ vs.\ H_1:\theta=1$ 检验水平为 α 的 MPT.

(d). 求解关于 $H_0:\theta\geqslant 2\ vs.\ H_1:\theta<2$ 检验水平为 α 的 UMPT.

(e). 对于所有关于 $H_0:\theta=2\ vs.\ H_1:\theta=1$ 的简单似然比检验，求解检验最小化 $\alpha+\beta$，其中 α,β 为犯第一类和第二类错误的概率.

(f). 求检验水平为 α 的 GLR，关于 $H_0:\theta=1\ vs.\ H_1:\theta\neq 1$.

解答. (a). 势函数：$\pi_T(\theta)j=P_\theta\left[X\geqslant\dfrac{1}{2}\right]=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\theta x^{\theta-1}\,\mathrm{d}x=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\theta}$，

检验水平：$\alpha=\sup\limits_{\theta\leqslant 1}\pi_T(\theta)=\sup\limits_{\theta\leqslant 1}1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\theta}=\dfrac{1}{2}$.

(b). 由于简单假设中 MPT 是 SLR 检验，则 $L(\theta)=f(x)=\theta x^{\theta-1}$，于是 $L_0/L_1=L(2)/L(1)=2x$，则

$$\alpha=P_{\theta=2}\left(\frac{L_0}{L_1}<k^*\right)=P_{\theta=2}(2x<k^*)=P_{\theta=2}(x<k')=\int_0^{k'}2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow k'=\sqrt{\alpha}$$

于是，MPT 的拒绝域为 $C=\{x:x<\sqrt{\alpha}\}$.

(d). 由于 $f(x;\theta)=\theta\exp\{(\theta-1)\log x\}$，于是 $T=\log X$，$c(\theta)=\theta-1$ 是关于 θ 单调函数，则

$$\alpha=P_{\theta=2}[\log x<k^*]=P_{\theta=2}[x<k']=\int_0^{k'}2x\,\mathrm{d}x=k'^2\Rightarrow k'=\sqrt{\alpha}$$

于是 UMPT 的拒绝域为 $C=\{x:x<\sqrt{\alpha}\}$.

(e).

(f). 由于 $L(\theta)=\theta x^{\theta-1}$，$\dfrac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=x^{\theta-1}(1+\theta\log x)$，则 $\theta=-\dfrac{1}{\log x}$ 时取到最大值，则 $\sup\limits_{\theta>0}L(\theta)=-\dfrac{1}{\log x}x^{-\frac{1}{\log x}-1}$，$L(1)=1$，于是

$$\lambda=\frac{L(1)}{\sup_{\theta>0}L(\theta)}=-x^{\frac{1}{\log x}+1}\log x$$

则拒绝 H 当且仅当 $-x^{\frac{1}{\log x}+1}\log x<\lambda_0$，令 $y=-\log x$，则 $x=\mathrm{e}^{-y},\ y\in(0,\infty)$，令

$$g(y)=-x^{\frac{1}{\log x}+1}\log x=-\left(\mathrm{e}^{-y}\right)^{1-\frac{1}{y}}(-y)=y\mathrm{e}^{1-y}$$

则 $g'(y)=(1-y)\mathrm{e}^{1-y}$，当 $y=1$ 时，$g(y)$ 有最大值，分两类情况讨论：

1. $0<y<1$ 即 $\mathrm{e}^{-1}<x<1$ 时，$g(y)$ 单调递增，则 $g(y)<\lambda_0$ 等价于 $y<k$ 则

$$\alpha=P_{\theta=1}[y<k]=\int_0^k\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-k}\Rightarrow k=-\log(1-\alpha)$$

于是该部分的拒绝域为 $C_0=\{y:0<y<\min\{1,k\}\}=\{x:\max\{\mathrm{e}^{-1},1-\alpha\}<x<1\}$.

2. $y>1$ 即 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时，$g(y)$ 单调递减，则 $g(y)<\lambda_0$ 等价于 $y>k$ 则

$$\alpha=P_{\theta=1}[y>k]=\int_k^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-k}\Rightarrow k=-\log\alpha$$

于是该部分的拒绝域为 $C_1 = \{y : y > \max\{1, -\log \alpha\}\} = \{x : 0 < x < \min(\alpha, \mathrm{e}^{-1})\}$.

综上，GLR 检验水平为 α 的拒绝域为 $C = C_0 \cup C_1 = (0, \min\{\alpha, \mathrm{e}^{-1}\}) \cup (\max\{\mathrm{e}^{-1}, 1-\alpha\}, 1)$.

题目 3. (中文书 7) 设样本量为 1，$X \sim \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$，统计假设 $H_0 : \theta = 1 \; vs. H_1 : \theta = 2$，若拒绝域为 $C = \{x : x \geqslant c\}$，确定 c 使得 $\alpha + 2\beta$ 最小，并求出最小值，α, β 为犯第一类和第二类错误的概率.