日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 11 月 19 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第九次作业

题目 1. 设 X 是复 Hilbert 空间，$T\in L(X)$，证明：$T^*=T \iff (Tx,x)\in\mathbb{R},\ (\forall\in X)$.

证明. "⇒"：$(Tx,x)=(x,T^*x)=(x,Tx)=\overline{(Tx,x)}$，则 $(Tx,x)\in\mathbb{R}$.

"⇐"：由于 $(Tx,x)\in\mathbb{R}$ 于是 $(Tx,x)=(x,Tx)=(x,T^*x)$，于是 $(x,(T-T^*)x)=0,\ (\forall x\in X)$，于是 $T-T^*=0\Rightarrow T=T^*$. □

题目 2. 设 X 为 Hilbert 空间，$T_1,T_2\in L(X)$，$T_1^*=T_1, T_2^*=T_2$，证明：$T_1T_2=T_2T_1 \iff T_1T_2=(T_1T_2)^*$.

证明. 由于 $T_1T_2=(T_1T_2)^{**}=(T_2^*T_1^*)^*=(T_2T_1)^*$

"⇒"：由于 $T_1T_2=T_2T_1$，于是 $T_1T_2=(T_1T_2)^*$.

"⇐"：由于 $T_1T_2=(T_1T_2)^*=(T_2T_1)^*$，两边同取共轭可得 $T_1T_2=T_2T_1$. □

题目 3. 设 X 为 Hilbert 空间，$T\in L(X)$，证明 $\mathrm{Ker}(T^*)=R(T)^\perp$.

证明. 一方面，$\forall x\in\mathrm{Ker}(T^*)$，则 $0=(T^*x,y)=(x,Ty),\ (\forall y\in X)$，则 $x\in R(T)^\perp\Rightarrow\mathrm{Ker}(T)\subset R(T)^\perp$. 另一方面，$\forall x\in R(T)^\perp$，则 $0=(x,Ty)=(T^*x,y),\ (\forall y\in X)$，则 $T^*x=0\Rightarrow x\in\mathrm{Ker}(T^*)$.

综上：$\mathrm{Ker}(T^*)=R(T)^\perp$. □

题目 4. 证明 $({}^\perp M)^\perp=\bar{M}$.

证明. $\forall x\in M$，$\forall f\in{}^\perp M$ 有 $\langle f,x\rangle=0$，则 $x\in({}^\perp M)^\perp$，令 $\{x_n\}\subset M$ 且 $x_n\to x\in X$，由于 f 的连续性，则 $\langle f,x\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0\Rightarrow x\in({}^\perp M)^\perp$，于是 $\bar{M}\subset({}^\perp M)^\perp$.

假设 $\bar{M}$ 是 $({}^\perp M)^\perp$ 的真子集，则 $\exists x_0\in({}^\perp M)^\perp-\bar{M}$，且 $d:=\rho(x_0,\bar{M})>0$，由 Hahn-Banach 定理推论可得 $\exists f\in X^*$ 使得 $f(x_0)=d,\ f|_{\bar{M}}=0$，于是 $f\in{}^\perp M$ 且 $f(x_0)=d>0$，则 $x_0\notin({}^\perp M)^\perp$ 与 $x_0\in({}^\perp M)^\perp$ 矛盾. 故 $\bar{M}=({}^\perp M)^\perp$. □

题目 5. 设 X,Y 为 B^* 空间，$T\in L(X,Y)$ 则 $\mathrm{Ker}(T^*)={}^\perp R(T)$，$\mathrm{Ker}(T)=\mathbb{R}(T^*)^\perp$.

证明.

$$\left.\begin{aligned}\forall f\in\mathrm{Ker}(T^*),\ \text{则}\langle f,Tx\rangle=\langle T^*f,x\rangle=0,\ \text{则}f\in{}^\perp R(T)\\ \forall f\in{}^\perp R(T),\ \text{则}\langle T^*f,x\rangle=\langle f,Tx\rangle=0,\ \text{则}f\in\mathrm{Ker}(T^*)\end{aligned}\right\}\mathrm{Ker}(T^*)={}^\perp R(T)$$

$$\left.\begin{aligned}\forall x\in\mathrm{Ker}(T),\ \text{则}\langle T^*f,x\rangle=\langle f,Tx\rangle=f(0)=0,\ \text{则}x\in R(T^*)^\perp\\ \forall x\in R(T^*)^\perp,\ \text{则}\langle f,Tx\rangle=\langle T^*f,x\rangle=0,\ \text{则}x\in\mathrm{Ker}(T)\end{aligned}\right\}\mathrm{Ker}(T)=R(T^*)^\perp$$

□

题目 6. 设 $X=\{\xi=(x_1,\cdots,x_n)\in l^2:\sum\limits_{n\geqslant1}|nx_n|^2<\infty\}$，$||\xi||_X=\sum\limits_{n\geqslant1}|nx_n|^2$，$T:x\to l^2$，$Tx=x$，证明 $\overline{R(T)}=l^2$.

证明. **方法一**: 先证明 X 为 l^2 的子空间, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\forall\xi,\eta\in X$, 令 $\xi=\{x_n\}$, $\eta=\{y_n\}$, $\forall N>0$, 有

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|n(\alpha x_n+\beta y_n)|^2=\alpha^2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}n^2x_n^2+2\alpha\beta\sum_{1\leqslant n\leqslant N}n^2x_ny_n+\beta^2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}n^2y_n^2$$

由于 $\xi,\eta\in X$，于是 $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N}n^2x_n^2$, $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N}n^2y_n^2$ 关于 N 收敛，又由于

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant M}n^2x_ny_n\leqslant\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant M}|nx_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant M}|ny_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|n(\alpha x_n+\beta y_n)|^2=\sum_{n\geqslant 1}|n(\alpha x_n+\beta y_n)|^2<\infty$$

所以 $\alpha\xi+\beta\eta\in X$，X 是 l^2 的闭子空间.

由 Hahn-Banach 定理推论可得，要证 $\overline{R(T)}=l^2$ 即 $R(T)$ 在 l^2 中稠密，只需证：$\forall f\in(l^2)^*, f|_{R(T)}=0\Rightarrow f=\theta$. 反设，存在 $f\neq\theta$ 使得 $f|_{R(T)}=0$，由于 l^2 是 Hilbert 空间，由 Riesz 表示定理可知，存在 $\eta_f\in l^2$, $\eta_f=\{y_n\}$ 使得 $\forall\xi\in X$, $\xi=\{x_n\}$ 有

$$f(\xi)=(\xi,\eta_f)=\sum_{n\geqslant 1}x_n\bar{y}_n=0$$

由于 $f\neq\theta$，于是 $\eta_f\neq\theta$，即 $\exists y_n\neq 0$，令 $\xi=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{个}},0,\cdots)\in X$，则 $f(\xi)=\bar{y}_n\neq 0$ 与 $f(\xi)=0$ 矛盾，则 $f|_{R(T)}=\theta\Rightarrow f=\theta$.

方法二: 由于 $\mathrm{Ker}(T^*)^\perp=\overline{R(T)}$，只需证 T^* 是单射，由于 l^2 是 Hilbert 空间，如果 $(X,||\cdot||_X)$ 也是 Hilbert 空间，则通过 $(Tx,y)_{l_2}=(x,T^*y)_X$ 可以求出 T^* 的具体表达式.

要证 $(X,||\cdot||_X)$ 可构成 Hilbert 空间，只需证 $||\cdot||_X$ 满足平行四边形公式:

$$\begin{aligned}||x+y||_X^2+||x-y||_X^2&=\sum_{n\geqslant 1}|n(x_n+y_n)|^2+\sum_{n\geqslant 1}|n(x_n-y_n)|^2\\&=2\sum_{n\geqslant 1}|nx_n|^2+2\sum_{n\geqslant 1}|ny_n|^2=2(||x||_X^2+||y||_X^2)\end{aligned}$$

则通过极化恒等式定义 X 上的内积是有意义的

$$\begin{aligned}(x,y)_X&=\frac{1}{4}\left(||x+y||_X^2-||x-y||_X^2+\mathrm{i}||x+\mathrm{i}y||_X^2-\mathrm{i}||x-\mathrm{i}y||_X^2\right)\\&=\frac{n^2}{4}\left[\sum_{n\geqslant 1}4\mathrm{Re}(x_n\bar{y}_n)+\mathrm{i}\sum_{n\geqslant 1}4\mathrm{Im}(x_n\bar{y}_n)\right]=\sum_{n\geqslant 1}n^2x_n\bar{y}_n\end{aligned}$$

令 $T^*y=\{z_n\}$，于是

$$\sum_{n\geqslant 1}x_n\bar{y}_n=(Tx,y)_{l_2}=(x,T^*y)_X=\sum_{n\geqslant 1}n^2x_n\bar{z}_n,\quad(\forall x\in X)$$

于是 $n^2\bar{z}_n=\bar{y}_n$，则 $z_n=y_n/n^2$，于是 $T^*y=(y_1,y_2/2^2,\cdots,y_n/n^2,\cdots)$，故 $T^*y=\theta\iff y=\theta$，所以 T^* 为单射. □

题目 7. 设 X 为自反空间，则 X^* 也是自反空间.

证明. 设 J 为 X 上的自然嵌入映射，于是 $J^* \in L(X^{***}, X^*)$，由于 J 是双射，则 $(J^{-1})^* = (J^*)^{-1} \in L(X^*, X^{***})$ 也是双射.

只需证 $(J^{-1})^*$ 是 X^* 到 X^{***} 的自然嵌入映射.

$\forall \psi \in X^{***}$, $x^{**} \in X^{**}$，只需证 $\exists g \in X^*$ 使得 $\langle \psi, x^{**} \rangle = \langle x^{**}, g \rangle$.

只需证 $(J^{-1})^* g = \psi$ 也即 $g = J^* \psi$.

只需证 $\langle \psi, x^{**} \rangle = \langle x^{**}, J^* \psi \rangle$.

由于 X 是自反空间，则 $\exists x \in X$ 使得 $x^{**} = J_x$，于是

$$\langle \psi, x^{**} \rangle = \langle \psi, J_x \rangle = \langle \psi, Jx \rangle = \langle J^* \psi, x \rangle = \langle J_x, J^* \psi \rangle = \langle x^{**}, J^* \psi \rangle$$

□

题目 8. 设 X 为 B 空间，若 X^* 为自反空间，则 X 是自反空间.

证明. 由上题可知，X^{**} 为自反空间，由于 $J(X) \subset X^{**}$，且 J 算子可逆，于是 $\exists c > 0$ 使得 $||Jx|| \geqslant c||x||$，设 $Jx_n \to y$，于是

$$||x_n - x_m|| \leqslant \frac{1}{c} ||Jx_n - Jx_m|| \to 0, \ (n, m \to \infty)$$

由于 X 是 B 空间，则 $x_n \to x \in X$，由 J 的连续性可知 $Jx = \lim\limits_{n\to\infty} Jx_n = y \in J(X)$，则 $J(X)$ 是 X^{**} 的闭子集. 下证 $J(X)$ 在 X^{**} 中稠密.

$\forall g \in X^{***}$，由于 X^* 是自反的，于是 $\exists f \in X^*$ 使得 $\forall x^{**} \in X^{**}$ 有 $\langle g, x^{**} \rangle = \langle x^{**}, f \rangle$. 若 $g|_{J(x)} = 0$，则

$$\langle g, J(X) \rangle = \langle J(X), f \rangle = \langle f, X \rangle = f(X) = 0$$

则 $f \equiv 0 \Rightarrow g \equiv 0$，由 Hahn-Banach 定理推论可得 $J(X)$ 在 X^{**} 中稠密，于是 $J(X) = \overline{J(X)} = X^{**}$，故 X 是自反的. □