| 日期 | 科目 | 姓名，学号 |
| --- | --- | --- |
| 2021 年 11 月 19 日 | 离散数学 | 吴天阳 2204210460 |

**47.** 证明：$\langle H_1H_2, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群 $\iff$ $H_1H_2 = H_2H_1$。

*证明.* $\Rightarrow$：由于 $H_1H_2$ 为 $G$ 的子群。

$\forall h_1*h_2 \in H_1H_2$, 有 $(h_1*h_2)^{-1} \in H_1H_2$, 则 $\exists a_1*a_2 \in H_1H_2$, 使得 $a_1*a_2 = (h_1h_2)^{-1}$, 故

$$h_1 * h_2 = (a_1 * a_2)^{-1} = a_2^{-1} * a_1^{-1} \in H_2H_1$$
$$\Rightarrow H_1H_2 \subset H_2H_1$$

$\forall h_2 * h_1 \in H_2H_1$，由于 $(h_2 * h_1)^{-1} = h_1^{-1} * h_2^{-1} \subset H_1H_2$，则

$$(h_1^{-1} * h_2^{-1})^{-1} \in H_1H_2$$
$$\Rightarrow h_2 * h_1 \in H_1H_2$$
$$\Rightarrow H_2H_1 \subset H_1H_2$$

综上，$H_1H_2 = H_2H_1$。

$\Leftarrow$：$\forall a_1 * a_2, b_1 * b_2 \in H_1H_2$，则 $a_1 * a_2 * (b_1 * b_2)^{-1} = a_1 * a_2 * b_2^{-1} * b_1^{-1}$，由于 $a_2 * b_2^{-1} * b_1^{-1} \in H_2H_1$，且 $H_2H_1 = H_1H_2$，则 $\exists c_1c_2 \in H_1H_2$，使得 $c_1c_2 = a_2 * b_2^{-1} * b_1^{-1}$，故

$$a_1 * a_2 * (b_1 * b_2)^{-1} = a_1 * c_1 * c_2 \in H_1H_2$$

所以 $\langle H_1H_2, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群。 □

**55.**

*证明.* 单射：

$$f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow a * x * a^{-1} = a * y * a^{-1}$$
$$\Rightarrow a^{-1} * a * x * a^{-1} * a = a^{-1} * a * y * a^{-1} * a$$
$$\Rightarrow x = y$$

满射：$\forall x \in G$，有

$$f(a^{-1} * x * a) = a * (a^{-1} * x * a) * a^{-1} = x$$

保运算：$\forall x, y \in G$，有

$$\begin{aligned} f(xy) =& a * x * y * a^{-1} \\ =& a * x * a^{-1} * a * y * a^{-1} \\ =& f(x) * f(y) \end{aligned}$$

综上，$f$ 是 $\langle G, * \rangle$ 上的自同构函数。 □

**57.**

证明. 自反性：$\forall a \in G$，有

$$e * a * e^{-1} = a \Rightarrow (a, a) \in R$$

对称性: $\forall a, b \in G$, 若 $(a, b) \in R$, 则 $\exists x \in G$, 使得 $b = x * a * x^{-1}$, 则 $a = x^{-1} * b * x$, 故 $(b, a) \in R$。

传递性：$\forall a, b, c \in G$，若 $(a, b), (b, c) \in R$，则 $\exists x, y \in G$，使得 $b = x * a * x^{-1}, c = y * b * y^{-1}$，则

$$c = y * (x * a * x^{-1}) * y^{-1} = (y * x) * a * (y * x)^{-1}$$

故 $(a, c) \in R$。

综上，$R$ 是 $G$ 上的等价关系。 □

**59.**

证明. 先证明 $\langle \mathbb{Z}, \oplus \rangle$ 是交换群：

1. $a \oplus b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$，则 $\oplus$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的二元运算。

2. 结合律：

$$\begin{aligned} a \oplus b \oplus c =& (a + b - 1) \oplus c \\ =& a + b - 1 + c - 1 \\ =& a + (b + c - 1) - 1 \\ =& a + (b \oplus c) - 1 \\ =& a \oplus (b \oplus c) \end{aligned}$$

3. 左幺元：$\forall a \in \mathbb{Z}$，则 $1 \oplus a = 1 + a - 1 = a$，所以 1 为 $\langle \mathbb{Z}, \oplus \rangle$ 的左幺元。

4. 左逆元：$\forall a \in \mathbb{Z}$，则 $(-a+2) \oplus a = -a+2+a-1 = 1$，所以 $a$ 的左逆元为 $-a+2$。

5. 交换律：$a \oplus b = a+b-1 = b+a-1 = b \oplus a$。

再证明 $\langle \mathbb{Z}, \otimes \rangle$ 是含幺半群：

1. $a \otimes b = a+b-ab \in \mathbb{Z}$，则 $\otimes$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的二元运算。

2. 结合律：

$$
\begin{aligned}
a \otimes b \otimes c =&(a+b-ab) \otimes c \\
=&(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c \\
=&a+b-ab+c-ac-bc+abc \\
=&a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) \\
=&a \otimes (b+c-bc) \\
=&a \otimes (b \otimes c)
\end{aligned}
$$

3. 幺元：

$$
\begin{aligned}
0 \otimes b = 0+b-0 \cdot b = b \\
b \otimes 0 = b+0-b \cdot 0 = b
\end{aligned}
$$

所以，0 是 $\langle \mathbb{Z}, \otimes \rangle$ 上的幺元。

4. 交换律：$a \otimes b = a+b-ab = b+a-ba = b \otimes a$。

最后证明 $\otimes$ 对 $\oplus$ 满足分配律，$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$，有

$$
\begin{aligned}
a \otimes (b \oplus c) &= a \otimes (b+c-1) \\
&= a+b+c-1-a(b+c-1) \\
&= (a+b-ab)+(a+c-ac)-1 \\
&= (a+b-ab) \oplus (a+c-ac) \\
&= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b \oplus c) \otimes a &= (b+c-1) \otimes a \\
&= (b+c-1)+a-(b+c-1)a \\
&= (b+a-ba)+(c+a-ca)-1 \\
&= (b+a-ba) \oplus (c+a-ca) \\
&= (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)
\end{aligned}
$$

综上，$\langle \mathbb{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ 是有幺元的交换环。

$\square$

**60. 解答.**

(1). 不是，因为 $1 \notin X$，所以 $\times$ 运算没有幺元，故 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是整环。

(2). 不是，因为 $0 \notin X$，所以 $+$ 运算没有幺元（也就是环没有零元），故 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是整环。

(3). 不是, 因为 $1 \in X$, 但是 $-1 \notin X$, 所以 $1$ 在 $+$ 的运算中没有负元, 故 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是整环。

(4). 不是，因为 $\sqrt[4]{5} \in X$，但是 $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt{5} \notin X$，所以 $\times$ 不是 $X$ 上的二元运算，故 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是整环。

(5). 是, 容易验证 $+, \times$ 满足结合律、交换律, $0$ 是环的零元, $1$ 是环的幺元, $a+b\sqrt{3} \in X$，则 $-a-b\sqrt{3}$ 是其负元，$\dfrac{1}{a^2-3b^2}(a-b\sqrt{3})$ 是其逆元。

下面证明 $+, \times$ 满足封闭性，结合律：

$$
\begin{aligned}
a+b\sqrt{3}+c+d\sqrt{3} &= (a+c)+(b+d)\sqrt{3} \\
(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3}) &= (ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3} \\
(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3}+u+v\sqrt{3}) &= ac+au+3(bd+bv)+(ad+av+bc+bu)\sqrt{3} \\
&= (ac+3bd+(ad+bc)\sqrt{3})+(au+3bv+(av+bu)\sqrt{3}) \\
&= (a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})+(a+b\sqrt{3})(u+v\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

假设 $a+b\sqrt{3}$ 没有关于 $\times$ 运算的逆元，也就是 $a^2-3b^2=0 \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$，由于 $\sqrt{3}$ 是无理数，不能表示为既约分数的形式，矛盾，则 $X$ 中每个元素都有逆元，所以满足消去律，故 $\times$ 运算无零因子。

综上，$\langle X, +, \times \rangle$ 是整环。

**61.**

证明. (1). 由于 $\forall x \in R$，有 $x \otimes x = x$，所以

$$\begin{aligned}
& (x \oplus x) \otimes (x \oplus x) = x \oplus x \\
\Rightarrow\ & (x \otimes x) \oplus (x \otimes x) \oplus (x \otimes x) \oplus (x \otimes x) = x \oplus x \\
\Rightarrow\ & x \oplus x \oplus x \oplus x = x \oplus x \\
\Rightarrow\ & x \oplus x = 0
\end{aligned}$$

(2). $\forall a, b \in R$，则

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) &= a \oplus b \\
(a \otimes a) \oplus (a \otimes b) \oplus (b \otimes a) \oplus (b \otimes b) &= a \oplus b \\
a \oplus (a \otimes b) \oplus (b \otimes a) \oplus b &= a \oplus b \\
(a \otimes b) \oplus (b \otimes a) &= 0
\end{aligned}$$

由于 $x \oplus x = 0$, 所以 $x$ 关于 $\oplus$ 的逆元为 $x$, 由于逆元的唯一性, 所以 $a \otimes b = b \otimes a$, 故 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环。 □

**62.** **解答.** 不难验证 $\oplus, \otimes$ 都具有封闭性。

关于 $\oplus$ 运算:

1. 结合律:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \oplus (x_3, y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\
&= (x_1, y_1) \oplus (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1, y_1) \oplus ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3))
\end{aligned}$$

2. 左幺元: $(0, 0) \oplus (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y)$。
3. 左逆元: $(-x, -y) \oplus (x, y) = (-x + x, -y + y) = (0, 0)$。
4. 交换律: $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1)$。

综上, $\langle X, \oplus \rangle$ 构成交换群。

关于 $\otimes$ 运算:

1. 结合律：

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\otimes(x_2,y_2)\otimes(x_3,y_3) &= (x_1x_2,y_1y_2)\otimes(x_3,y_3)\\ &= (x_1x_2x_3,y_1y_2y_3)\\ &= (x_1,y_1)\otimes(x_2x_3,y_2y_3)\\ &= (x_1,y_1)\otimes((x_2,y_2)\otimes(x_3,y_3))\end{aligned}$$

2. 幺元：

$$\begin{aligned}(1,1)\otimes(x,y) =&(1\cdot x,1\cdot y)=(x,y)\\ (x,y)\otimes(1,1) =&(x\cdot 1,y\cdot 1)=(x,y)\end{aligned}$$

所以 $(1,1)$ 是 $\otimes$ 运算的幺元。

3. 分配律：

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\otimes((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3)) &= (x_1,y_1)\otimes(x_2+x_3,y_2+y_3)\\ &= (x_1(x_2+x_3),y_1(y_2+y_3))\\ &= (x_1x_2+x_1x_3,y_1y_2+y_1y_3)\\ &= (x_1x_2,y_1y_2)\oplus(x_1x_3,y_1y_3)\\ &= ((x_1,y_1)\otimes(x_2,y_2))\oplus((x_1,y_1)\otimes(x_3,y_3))\end{aligned}$$

所以，$\langle X,\oplus,\otimes\rangle$ 构成环，且 $\otimes$ 运算有幺元 $(1,1)$。

有零因子：$(1,0),(0,1)\in X$，且 $(1,0)\neq(0,0),(0,1)\neq(0,0)$，但

$$(1,0)\otimes(0,1)=(1\cdot 0,0\cdot 1)=(0,0)$$

则 $\otimes$ 运算有零因子。

逆元：$\forall(x,y)\in X$，$x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 时，$(x,y)$ 有逆元，只需证明左逆元，因为 $\otimes$ 运算具有幺元，

$$(\frac{1}{x},\frac{1}{y})\otimes(x,y)=(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{y}\cdot y)=(1,1)$$

则 $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ 为 $(x,y)$ 的逆元，且当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$(x,y)$ 不存在逆元。