日期	科目	姓名，学号
2022 年 3 月 7 日	概率论	吴天阳 2204210460

习题 1.1

3. 考虑正方形 6 个面的中心，从中任意选择 3 个点连成三角形，把剩下的 3 个点也连成三角形，以 A 表示所得到的两个三角形相互全等的事件，则 A 是一个什么样的事件？

解答. 必然事件。

4. 连续抛掷一枚均匀的骰子，直到六个面都出现为止。以 A 表示所需的抛掷次数不超过 100 的事件，则 A 是一个什么样的事件？

解答. 随机事件。

习题 1.2

4. 设 A 和 B 为两个事件，试求出所有的事件 X，使

$$(X \cup A)^C \cup (X \cup A^C)^C = B$$

解答.

$$\begin{aligned} B = (X \cup A)^C \cup (X \cup A^C)^C &= ((X \cup A)(X \cup A^C))^C \\ &= (X \cup (XA^C) \cup (AX) \cup \varnothing)^C \\ &= X^C \end{aligned}$$

所以，

$$X = B^C$$

9. 市场调查员报道了如下数据：在被询问的 1000 名顾客中，有 811 人喜欢巧克力糖，752 人喜欢夹心糖，418 人喜欢大白兔糖，570 人喜欢巧克力糖和夹心糖，356 人喜欢巧克力糖和大白兔糖，348 人喜欢夹心糖和大白兔糖，以及 297 人喜欢全部三种糖果。证明这一信息有误。

证明. 设事件 A 为喜欢巧克力糖的人，事件 B 为喜欢夹心糖的人，事件 C 为喜欢大白兔糖的人，则

$$|A| = 811, |B| = 752, |C| = 418, |AB| = 570, |AC| = 356, |BC| = 348, |ABC| = 297$$

由容斥原理知，

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - (|AB| + |AC| + |BC|) + |ABC| \\ &= 811 + 752 + 418 - (570 + 356 + 348) + 297 \\ &= 1004 \neq 1000\end{aligned}$$

所以，该调查员信息有误。 □

11. 设事件 $\{A_n\}$ 单调上升，即对任何 $n \in \mathbb{N}$，有 $A_n \subset A_{n+1}$，试用概率论语言证明

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

证明. 由于 $A_n \subset A_{n+1}$，即事件 A_n 蕴涵事件 A_{n+1}，则 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，又由于

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n$$

综上，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

□

12. 进行独立重复的 Bernoulli 试验。以事件 A_n 表示“事件 A 在第 n 次试验时出现”，事件 $B_{n,m}$ 为“事件 A 在前 n 次试验中出现 m 次”。

(1). 试以 A_i 表示 $B_{4,2}$；

(2). 试解释事件 $B_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} (\bigcup_{k=0}^{m} B_{n,k})$；

(3). 记 $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$。试问关系式 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset B^C$ 与 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C \subset B$ 是否成立?

解答. (1). 通过枚举法，知

$$B_{4,2} = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_1A_4 \cup A_2A_3 \cup A_2A_4 \cup A_3A_4$$

(2). 记

$$C_n = \bigcup_{k=0}^{m} B_{n,k}$$

C_n 的含义是："事件 A 在前 n 次中出现的次数小于等于 m 次"，由于

$$B_{n+1,0} \subset B_{n,0}$$

$$B_{n+1,1} \subset B_{n,1}$$

$$\vdots$$

$$B_{n+1,m} \subset B_{n,m}$$

所以，

$$C_{n+1} \subset C_n$$

则 $\{C_n\}$ 是一个不增的集合列，于是

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{m} B_{n,k} \right) = B_m$$

故，B_m 的含义是："事件 A 在前无穷多次试验中，出现的次数小于等于 m 次"。

(3). 由 B_m 的含义知，

$$B_m \subset B_{m+1}$$

所以，$\{B_m\}$ 是一个不降的集合列，则

$$\lim_{m\to\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = B$$

B 的含义是："事件 A 在前无穷多次试验中，出现了有穷多次"。

假设，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$，则存在 m 使得，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset B_m$$

但 $\bigcap_{n=1}^{m+1} A_n$ 表示："事件 A 在前 $m+1$ 次中都出现"，所以 $\bigcap_{n=1}^{m+1} A_n \not\subset B_m$，矛盾。

故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset B^C$$

由于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C$ 表示："事件 A 在无穷多次中没有出现过"，再通过 B 的含义，可知第二个关系式成立。

综上，两个关系式均成立。

13. 盒中盛有许多黑球和白球，从中相继取出 n 个球，以 A_i 表示第 i 个被取出的球是白球的事件 $(1 \leqslant i \leqslant n)$，试用 A_i 表示如下各事件：

(1). 所有 n 个球都是白球；(2). 至少有一个白球；(3). 恰有一个白球；(4). 不多于 k 个白球；(5). 不少于 k 个白球；(6). 恰有 k 个白球；(7). 所有 n 个球同色。

解答. (1). “所有 n 个球都是白球”：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

(2). “至少有一个白球”：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

(3). “恰有一个白球”：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_1^C A_2^C \cdots A_i \cdots A_n^C$$

(4). 构造双射

$$\sigma : \{0,1\}^n \to \Omega$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mapsto A_1^{a_1} A_2^{a_2} \cdots A_n^{a_n}$$

其中，Ω 为样本空间，

$$A_i^j = \begin{cases} A_i, & j = 0; \\ A_i^C, & j = 1. \end{cases}$$

即，A_i^0 代表第 i 位取到白球的情况，A_i^1 代表第 i 位取到黑球的情况。

于是，“不多于 k 个白球”可以表示为

$$\bigcup \sigma \left(\left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n-k \right\} \right)$$

(5). 沿用 (4) 给出的 σ 定义，“不少于 k 个白球”可以表示为

$$\bigcup \sigma \left(\left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n-k \right\} \right)$$

(6). 沿用 (4) 给出的 σ 定义，“恰有 k 个白球”可以表示为

$$\bigcup \sigma \left(\left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} a_i = n-k \right\} \right)$$

(7). “所有 n 个球同色”：

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C\right)$$

习题 1.3

4. 考察正方体各个面的中心（一共 6 个点）。从中任意选择 3 个点连成三角形，试求：(1). 所得的三角形为等边三角形的概率；(2). 所得的三角形为直角等腰三角形的概率。

解答. (1). 设 A 为所得的三角形为等边三角形的事件，由于等边三角形可以通过正方形的一个顶点唯一确定，所以

$$|A| = 8$$

总的样本空间为

$$|\Omega| = \binom{6}{3} = 20$$

所以

$$\mathbf{P}(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(2). 设 B 为所得三角形为直角三角形的事件，由于从正方形各个面中心连接所得的三角形，要么是直角三角形，要么是等边三角形，所以

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(A) = \frac{3}{5}$$

8. 一学生宿舍有 6 名学生，试求如下各事件的概率：(1). 6 个人生日都是在星期天；(2). 6 个人的生日都不在星期天；(3). 6 个人生日不都在星期天。

解答. (1). 设事件 A 为 6 个人生日都在星期天，则 $|A| = 1^6 = 1$，设样本空间为 Ω，则 $|\Omega| = 7^6 = 117649$，则

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{117649}$$

(2). 设事件 B 为 6 个人的生日都不在星期天，则 $|B| = 6^6 = 46656$，则

$$\mathbf{P}(B) = \frac{46656}{117649}$$

(3). 设事件 C 为 6 个人的生日不都在星期天，由于事件 C 与事件 A 成对立事件，则

$$\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(A) = \frac{117648}{117649}$$

10. 从 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 共 10 个数字中不重复地任取 4 个，求它们能排成一个 4 位偶数的概率。

解答. 设事件 A 为排成一个 4 位偶数，先排个位数，再排其他数，且 0 不能在最高位，则 $|A| = 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2296$，样本空间 $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$，则

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2296}{5040} = \frac{287}{630}$$

12. 扔一枚均匀的硬币，直到它连续出现两次相同的结果为止，试描述此样本空间，并求下列事件的概率：(1). 试验在第六次之前结束；(2). 必须扔偶数次才能结束。

解答. 样本空间 $\Omega = \{\{0, 1\}^n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}\}$。

(1). 设事件 A 为试验在第六次之前结束，则

$$\mathbf{P}(A) = 2\left((\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^5\right) = \frac{15}{16}$$

(2). 设事件 B 为扔偶数次结束，则

$$\mathbf{P}(B) = 2\left((\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \cdots + (\frac{1}{2})^{2n} + \cdots\right) = \frac{2}{3}$$

18. 在一个装有 n 个白球、n 个黑球、n 个红球的袋中，不放回地任取 m 个球。求其中白、黑、红球分别为 $m_1, m_2, m_3 (m_1 + m_2 + m_3 = m)$ 个的概率。

解答. 设样本空间为 Ω，满足题意的情况为 A，则

$$|\Omega| = \binom{3n}{n}$$
$$|A| = \binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\binom{n}{m_3}$$

综上，

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\binom{n}{m_3}}{\binom{3n}{n}}$$

习题 1.4

3. 大厅里共有 $n+k$ 个座位，n 个人随意入座，试求某给定的 $m(m\leqslant n)$ 个座位有人入座的概率。

解答. 设 Ω 为所有“入座方式”的集合，A 为“给定的座位有人入座”的情况，则

$$|\Omega|=(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)$$
$$|A|=\binom{n}{m}m!(n+k-m)\cdots(k+1)$$

则

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\binom{n}{m}m!}{(n+k)\cdots(n+k-m+1)}$$

6. 罐中有 a 个白球和 b 个黑球，从中无放回地随意抽取两个球。试求如下事件的概率：(1). 两个球的颜色相同；(2). 两个球的颜色不同。

解答. 设 Ω 为“无放回地取出两个球”的情况，A 为“两个球的颜色相同”的情况，B 为“两个球的颜色不同”的情况，则

$$|\Omega|=\binom{a+b}{2}$$
$$|A|=\binom{a}{2}+\binom{b}{2}$$
$$|B|=\binom{a}{1}\binom{b}{1}$$

则

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\binom{a}{2}+\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}}=\frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$
$$\mathbf{P}(B)=\frac{ab}{\binom{a+b}{2}}=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

9. n 个人随机地坐成一排，试求出两个指定的人相邻而坐的概率。如果 n 个人坐成一圈，再求该概率。

解答. 设 Ω 为“随机坐成一排”的情况，A 为“坐成一排，两个指定的人相邻”的情况，则

$$|\Omega| = n!$$

$$|A| = 2! \cdot 2^{n-2}$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

设 Ω 为“坐成一圈”的情况，B 为“坐成一圈，两个指定的人相邻”的情况，则

$$|\Omega| = \frac{n!}{n}$$

$$|A| = 2!(n-2)!$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{n-1}$$

15. 罐中有 m 个白球和 n 个黑球 $(m > n)$，从中无放回地逐个取出所有的球。试求在某一时刻罐中剩下的白球数目与黑球数目相等的概率。

解答. 设 E 为“剩下的白球和黑球数目相等”，A 为“第一次取出白球”，B 为“第一次取出黑球”，则 $A \subset E$，且 $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n+m}$

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(EB)$$

由**例 1.4.7** 知，EB 的折线和 A 的折线一一对应，所以

$$\mathbf{P}(E) = \frac{2m}{n+m}$$

18. 每一页书都有 N 个符号可能误印，现知全书共有 n 页，r 个印错的符号。证明：第 $1, 2, \cdots, n$ 页分别含有 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 个印错的符号 $\left(\sum_{j=1}^{n} r_j = r\right)$ 的概率为

$$\frac{\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}}{\binom{nN}{r}}$$

证明. 设 Ω 为"印错 r 个符号"的所有情况，A 为题目要求的情况，则

$$|\Omega| = \binom{nN}{r}$$
$$|A| = \binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}$$
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}}{\binom{nN}{r}}$$

□

习题 1.5

2. 甲、乙两船欲停靠在同一码头。假设它们都有可能在某天的一昼夜内任何时刻到达，且甲船与乙船到达后各需在码头停留 3 小时与 4 小时。求有船到达时需等待空出码头的概率。

解答. 设甲到达码头的时间为 x，乙到达码头的时间为 y，则甲需要等待的时间条件为 $0 < x - y \leqslant 4$ 记为事件 A，乙需要等待的时间条件为 $0 < y - x \leqslant 3$ 记为事件 B，由几何概型知，需要空出码头的概率为

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1 - \frac{\frac{21\cdot 21 + 20\cdot 20}{2}}{24 \cdot 24} = \frac{311}{1152}$$

7. 把长为 l 的线段任意折成 3 段，试求如下各事件的概率：(1). 它们可构成一个三角形；(2). 它们中最长的不超过 $\frac{2l}{3}$。

解答. 设三段长度分别为 x, y, z，则构成三角形所需条件为：

$$\begin{cases} x + y + z = l \\ x + y > \frac{l}{2} \\ y + z > \frac{l}{2} \\ x + z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

由**例 1.5.1** 的图像知，构成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$。

最大长度不超过 $\frac{2l}{3}$ 所需条件为：

$$\begin{cases} x+y+z=l \\ x \leqslant \frac{2l}{3} \\ y \leqslant \frac{2l}{3} \\ z \leqslant \frac{2l}{3} \end{cases}$$

由几何概型知，最大长度不超过 $\frac{2l}{3}$ 的概率为：

$$1-\frac{3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}l\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{(\sqrt{2}l)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{2}{3}$$

10. 在平面上画有一些间隔距离均为 a 的平行直线，向该平面投掷一枚直径为 $R(R<a/2)$ 的硬币。试求硬币与任何直线相交的概率。

解答. 考虑两条相邻的直线，由于硬币的半径为 R，所以能覆盖直线的面积为 $2R\cdot x$，总面积为 $a\cdot x$，则相交概率为 $\frac{2R}{a}$。

14. 向一个正方形中随机抛掷 3 个点，试求它们形成下述三角形的顶点的概率：(1). 任一三角形；(2). 正三角形；(3). 直角三角形。

解答. (1). 由于只有三点共线的情况下，不能形成三角形，而线在二维的测度下为 0，由几何概型知，形成任一三角形的概率为 1。

(2). 由于当确定两点后，要满足正三角形的条件下，第三个点的取值只能在一条线上，线在二维测度下为 0，由几何概型知，形成正三角形的概率为 0。

(3). 同理 (2)，形成直角三角形的概率也为 0。