日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 4 月 22 日	数值分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460	59

第六章

6.2 取 $n=8$，用复化梯形、复化辛普森求积公式计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$，保留 7 位小数。

解答.

$$\begin{aligned}
T_8 &= \frac{1}{16}\left(1+2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}}+\frac{1}{1+\frac{2}{8}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right)+\frac{1}{1+2}\right)\\
&= \frac{1}{12}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{15}\right)\approx 0.6837052\\
S_8 &= \frac{1}{48}\left(16T_8+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{16}}+\frac{1}{1+\frac{3}{16}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{15}{16}}\right)\right)\\
&= \frac{T_8}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{31}\right))\approx 0.6896754
\end{aligned}$$

6.4 若用复化梯形求积公式计算积分 $I=\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$，问区间 $[0,1]$ 分成多少等份，才能使截断误差不超过 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-5}$? 若改用复化辛普森求积公式计算，要达到同样的精度，区间 $[0,1]$ 应分成多少等份?

解答. 由于 $\max\limits_{x\in[0,1]}(e^x)^(k)=e\ (\forall k\in\mathbb{N})$，设 $h=\dfrac{1}{n}$，则

$$\begin{aligned}
|R_{T_n}[f]| &= \frac{1}{12}h^2|f''(\eta)|\leqslant\frac{1}{12}h^2e\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}\Rightarrow n\geqslant\left[\left(\frac{e\times 10^5}{6}\right)^{1/2}\right]+1\Rightarrow n\geqslant 213\\
|R_{S_n}[f]| &= \frac{1}{2880}h^4|f''(\eta)|\leqslant\frac{1}{2880}h^4e\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}\Rightarrow n\geqslant\left[\left(\frac{e\times 10^5}{1440}\right)^{1/4}\right]+1\Rightarrow n\geqslant 4
\end{aligned}$$

所以，要使截断误差不超过 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-5}$，复化梯形求积公式至少需要 213 等分，而复化辛普森求积公式只需要 4 等分。

6.7 导出下列求积公式及其截断误差估计式:

(1) $\displaystyle\int_0^h f(x)\,dx\approx A_0f(0)+B_0f'(0)+A_1f(h)+B_1f'(h)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2h} f(x)\,dx\approx A_0f(0)+A_1f(h)+A_2f(2h)$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2f(x)\,dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$.

解答. (1) 取 $f(x)=1,x,x^2,x^3$，可得

$$\begin{cases} h=A_0+A_1 \\ \frac{1}{2}h^2=B_0+A_1h+B_1 \\ \frac{1}{3}h^3=A_1h^2+2B_1h \\ \frac{1}{4}h^4=A_1h^3+3B_1h^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A_0=A_1=\frac{1}{2}h \\ B_0=\frac{1}{12}h^2 \\ B_1=-\frac{1}{12}h^2 \end{cases}$$

则 $\displaystyle\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{12}[6f(0)+hf'(0)+6f(h)-hf'(h)]$，由于

$$I[x^4]=\int_0^h x^4\,dx=\frac{1}{5}h^5,\quad Q[x^4]=\frac{h}{12}[6h^4-4h^4]=\frac{h^5}{6},\quad R[x^4]=I[x^4]-Q[x^4]=\frac{1}{30}h^5\neq 0$$

所以该求积公式的代数精度 $m=3$，令 $e(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-h)^2$，由广义 Peano 定理可知，截断误差为

$$R[f]=R[e]=I[e]-Q[e]=\int_0^h \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-h)^2\,dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{720}h^5,\quad (\eta\in[0,h])$$

(2) 取 $f(x)=1,x,x^2$，可得

$$\begin{cases} 2h=A_0+A_1+A_2 \\ 2h^2=A_1h+2A_2h \\ \frac{8}{3}h^3=A_1h^2+4A_2h^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A_0=A_2=\frac{1}{3}h \\ A_1=\frac{4}{3}h \end{cases}$$

则 $\displaystyle\int_0^{2h} f(x)\,dx=\frac{1}{3}hf(0)+\frac{4}{3}hf(h)+\frac{1}{3}hf(2h)=\frac{h}{3}[f(0)+4f(h)+f(2h)]$，由于

$$I[x^3]=\frac{(2h)^4}{4}=4h^4,\quad Q[x^3]=\frac{h}{3}[4h^3+8h^3]=4h^4,\quad R[x^3]=I[x^3]-Q[x^3]=0$$

$$I[x^4]=\frac{(2h)^5}{5}=\frac{32h^5}{5},\quad Q[x^4]=\frac{h}{3}[4h^4+16h^4]=\frac{20}{3}h^4,\quad R[x^4]=I[x^4]-Q[x^4]=-\frac{4}{15}h^4\neq 0$$

所以该求积公式的代数精度 $m=3$，令 $e(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-h)^2(x-2h)$，由广义 Peano 定理可知，截断误差为

$$R[f]=R[e]=I[e]-Q[e]=\int_0^{2h} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-h)^2(x-2h)=-\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5,\quad (\eta\in[0,2h])$$

(3) 这是 $n=1$ 的高斯型求积公式，其代数精度 $m=2n+1=3$，所以求积公式对 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 准确成立，则

$$\begin{cases} \frac{2}{3}=A_0+A_1 \\ 0=A_0x_0+A_1x_1 \\ \frac{2}{5}=A_0x_0^2+A_1x_1^2 \\ 0=A_0x_0^3+A_1x_1^3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5} \\ x_1=\frac{\sqrt{15}}{5} \\ A_0=A_1=\frac{1}{3} \end{cases}$$

则 $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\left(f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + f(\frac{\sqrt{15}}{5})\right)$，代数精度 $m=3$，取

$$e(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+\frac{\sqrt{15}}{5})^2(x-\frac{\sqrt{15}}{5})^2 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x^2-\frac{3}{5})^2$$

由广义 Peano 定理可知，截断误差为

$$R[f] = R[e] = I[e] - Q[e] = \int_{-1}^{1} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x^2-\frac{3}{5})^2 = \frac{4}{75}f^{(4)}(\eta), \quad (\eta \in [-1,1])$$

6.10 确定下列数值微分公式的系数, 并导出截断误差表示式:

(1) $f'(0) \approx af(-h) + bf(0) + cf(h)$;

(2) $f'(h) \approx af'(0) + b[f(2h) - f(h)]$.

解答. (1) 取 $f(x) = 1, x, x^2$, 则

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 1 = -ah + ch \\ 0 = ah^2 + ch^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2h} \\ b = -\frac{2}{h} \\ c = \frac{1}{2h} \end{cases}$$

则 $f'(0) \approx \frac{1}{2h}(3f(-h) - 4f(0) + f(h))$, 由于 $R[x^3] = 0 - \frac{1}{2h}\left(3(-h)^3 + h^3\right) = h^2 \neq 0$, 所以代数精度 $m = 2$, 令 $e(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x(x+h)(x-h)$, 由广义 Peano 定理可知

$$R[f] = R[e] = e'(0) = -\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi)$$

(2) 取 $f(x) = 1, x, x^2$, 则

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = a + hb \\ 2h = 3h^2 b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3h} \end{cases}$$

则 $f'(h) \approx \frac{1}{3h}[hf'(0) + 2f(2h) - 2f(h)]$, 由于 $R[x^3] = 3h^2 - \frac{1}{3h}(14h^3) = -\frac{5}{3}h^2 \neq 0$, 所以代数精度 $m = 2$, 令 $e(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x(x-2h)(x-h)$, 由广义 Peano 定理可知

$$R[f] = R[e] = e'(h) - \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\frac{2h^2}{3} = -\frac{5h^2}{18}f^{(3)}(\xi)$$