

第二章第二次作业

题目 1. (19) 求解三维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = x^3 + y^2z. \end{cases}$$

解答. 由 Kirchhoff 公式可知:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{B_{at}(x)} x^3 + y^2 z \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{B_{at}} (x + x_1)^3 + (y + x_2)^2 (z + x_3) \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{B_{at}} 2x_1 x^2 + x_3 y^2 \, dS + (x_1^3 + x_2^2 x_3) t \\ &= \frac{a^3 t^4}{15} (2x_1 + x_3) + (x_1^3 + x_2^2 x_3) t. \end{aligned}$$