日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 16 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第四次作业

题目 1. 在度量空间 l^2 中，证明：$A=\{\xi=\{x_n\}\in l^2:n|x_n|\leqslant 1\}$ 是 l^2 中的紧集.

证明. 只需证明 A 是自列紧集，设 $\{\xi_n\}\subset A$ 是 Cauchy 列，则 $\rho(\xi_n,\xi_m)\to 0,\ (n,m\to\infty)$，于是 $\sum\limits_{i=1}^\infty|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|^2\to 0$，所以 $\forall i\geqslant 1$，$\{x_i^{(n)}\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，于是 $\exists x_i$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$.

令 $\xi=\{x_1,x_2,\cdots\}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in\mathbb{N}$，有 $\sum\limits_{i=1}^\infty|x_i^{(n_0)}-x_i|^2<\varepsilon^2$，则 $|x_i^{(n_0)}-x_i|<\varepsilon$. 又由于 $\xi_{n_0}\in A$，则 $\exists N\geqslant[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 使得 $\forall k\geqslant N$ 有 $|x_k^{(n_0)}|\leqslant\dfrac{1}{N}<\varepsilon$，于是

$$|x_i|\leqslant|x_i-x_i^{(n_0)}|+|x_i^{(n_0)}|<2\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi\in A$，所以 A 是自列紧集，故 A 是紧集. □

题目 2. 用闭区间套定理证明压缩映射原理.

证明. 设度量空间为 (X,ρ)，T 为 X 上的压缩映射. 下面证明集列 $A_n=\{x\in X:\rho(x,Tx)<\dfrac{1}{n}\}$ 是单调递减直径趋于 0 的非空闭集列.

单调递减：$\forall x\in A_{n+1}$，则 $\rho(x,Tx)<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$，故 $x\in A_n$.

非空：设 $x_0\in A_n$ 且 $\rho(x_0,Tx_0)=C$，记 $x_1=Tx_0,\cdots,x_{n+1}=Tx_n$，则

$$\rho(x_n,Tx_n)\leqslant\alpha\rho(Tx_{n-1},T^2x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n\rho(x_0,Tx_0)=\alpha^nC\to 0,\ (n\to\infty)$$

则 $A_n\neq\varnothing$.

闭集：$\forall m\in\mathbb{N}$，只需证 A_m 的对极限封闭，设 $\{x_n\}\subset A_m$ 收敛于 $x\in X$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得 $\forall n\geqslant N$ 有

$$\rho(x,Tx)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,Tx_n)+\rho(Tx_n,Tx)\leqslant(\alpha+1)\varepsilon+\frac{1}{m}$$

由 ε 的任意性可知 $x\in A_m$，所以 A_m 是闭集.

直径趋于 0：$\forall x,y\in A_n$，则

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,Tx)+\rho(Tx,Ty)+\rho(Ty,y)\leqslant\frac{2}{(1-\alpha)n}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dim A_n=0$.

综上，$\{A_n\}$ 是直径趋于零的非空闭子集套，所以存在唯一的 $x_0\in\bigcap\limits_{i=1}^\infty A_i$，则 $\rho(x_0,Tx_0)=0$，压缩映射原理得证. □

题目 3. 设 $K(\cdot;\cdot) \in L^2([a,b]\times[a,b])$，对于 $f \in L^2[a,b]$，证明当 λ 充分小时，$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $L^2[a,b]$ 中存在唯一解.

证明. 令 $Tx(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$，则 $T: L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$，于是

$$\begin{aligned}\rho(Tx_1,Tx_2) &= \left(\int_a^b \left(\lambda \int_a^b k(t,s)(x_1(s)-x_2(s))\,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |\lambda| \left(\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b k^2(t,s)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (x_1(s)-x_2(s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由于 $k(t,s) \in L^2([a,b]^2)$，则 $\exists M > 0$ 使得 $\left(\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b k^2(t,s)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M < \infty$，取 $\lambda = \dfrac{1}{2M}$，所以

$$\rho(Tx_1,Tx_2) \leqslant |\lambda| M \rho(x_1,x_2) \leqslant \frac{1}{2}\rho(x_1,x_2)$$

故 T 为 $L^2([a,b])$ 中的压缩映射，则原方程在 $L^2([a,b])$ 中存在唯一解. □

题目 4. 设 $K(\cdot;\cdot) \in C([a,b]\times[a,b])$，对于 $f \in C([a,b])$，证明 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $C([a,b])$ 中存在唯一解.

证明. 做变量代换 $t' = t + a$，令 $c = b - a$，只需证明原方程在 $C([0,c])$ 上存在唯一解. 设 $Tx(t) = f(t) + \lambda \int_0^t k(t,x)x(s)\,\mathrm{d}s$，则 $T: C([0,c]) \to C([0,c])$，于是

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) = \max_{t\in[a,b]} \lambda^n \int_0^t k(t,t_1) \int_0^{t_1} k(t_1,t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} k(t_{n-1},t_n)(x_1(t_n)-x_2(t_n))\,\mathrm{d}t_n \mathrm{d}t_{n-1}\cdots \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t$$

由于 $f \in C[0,c]$，于是存在上界 $M \geqslant 0$ 使得 $\sup\limits_{t\in[0,c]} |f(t)| \leqslant M$，于是

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) \leqslant \frac{(|\lambda| M t)^n}{n!} \max_{t\in[0,c]}\{x_1(t) - x_2(t)\}$$

由 Stirling 公式可知 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, $(n\to\infty)$，于是

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\mathrm{e}\lambda M t}{n}\right)^n \to 0^+,\ (n\to\infty)$$

所以 T^n 是 $C([0,c])$ 上的压缩映射，则存在唯一的 x_0 使得 $T(x_0) = x_0$，故原问题存在唯一解. □

题目 5. 设 $(X, ||\cdot||)$ 为赋范线性空间，且 $\dim X < \infty$，则 X 是 Banach 空间.

证明. 设 $\dim X = N$，其中的一组基为 $\{l_1, l_2, \cdots, l_N\}$，$\forall \{x_n\} \subset X$ 为 Cauchy 列，令 $x_n = \sum_{i=1}^{N} x_i^{(n)} l_i$，则 $\exists c_1 > 0$ 使得

$$c_1 \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i^{(n)} - x_i^{(m)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant ||x_n - x_m|| \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

则 $|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| \to 0,\ (n, m \to \infty,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant N)$，则 $\{x_i^{(n)}\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，由于 $\mathbb{R}$ 是完备的，所以 $\{x_i^{(n)}\}$ 收敛，$\exists x_i \in \mathbb{R}$ 使得 $x_i^{(n)} \to x_i,\ (n \to \infty)$，令 $x = \sum_{i=1}^{N} x_i l_i$，又由于 $\exists c_2 > 0$ 使得

$$||x_n - x|| \leqslant c_2 \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i^{(n)} - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

则 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则 X 是完备的，故 X 是 Banach 空间. □

题目 6. 设 $(X, ||\cdot||)$ 为赋范线性空间，X 中的任何有限维子空间都是闭集.

证明. 设 $A \subset X$ 是 N 维子空间 $(N < \infty)$，其中一组基为 $\{l_1, \cdots, l_N\}$，$\forall \{x_n\} \in A$ 为收敛列，令 $x_n = \sum_{i=1}^{N} x_i^{(n)} l_i$，则 $\exists x \in X$，使得 $||x_n - x|| \to 0,\ (n \to \infty)$. 假设 $x \notin A$，则 x 与 $\{l_1, \cdots, l_N\}$ 线性无关，则 $\{l_1, \cdots, l_N, x\}$ 构成 $N+1$ 维空间的一组基，由于 $||\cdot||$ 与 $N+1$ 维空间坐标对应 2-范数等价，于是

$$\left(\sum_{i=1}^{N} (x_i^{(n)})^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

矛盾，所以 $x \in A$. □

题目 7. 设 $(X, ||\cdot||)$ 为赋范线性空间，且 $\dim X < \infty$，则 X 中的有界集都是列紧集.

证明. 设 $\dim X = N$，其中的一组基为 $\{l_1, \cdots, l_N\}$，$\forall A \subset X$ 为有界集，则 $\exists C > 0$，使得 $\forall x \in A$，$||x|| < C$，令 $x = \sum_{i=1}^{N} x_i l_i$，则 $\sum_{i=1}^{N} |x_i|\, ||l_i|| < C$，记 $M_1 = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} ||l_i||$，则 $\sum_{i=1}^{N} |x_i| \leqslant C/M_1$，于是 $(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 有界. 任取 A 中的数列 $\{x_n\}$，令 $x_n = \sum_{i=1}^{N} x_i^{(n)}$，记 $S = \{(x_1^{(k)}, \cdots, x_N^{(k)}) : x_k \in \{x_n\}\}$，则 S 必有收敛子列 $\{(x_1^{(n_1)}, \cdots, x_N^{(n_1)}), \cdots, (x_1^{(n_k)}, \cdots, x_N^{(n_k)}), \cdots\}$，由于 $||\cdot||$ 与 $\mathbb{R}^N$ 中 2-范数等价，于是 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列，所以 A 是列紧集. □

题目 8. 1. $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$，$||f|| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$，则 X 是 Banach 空间.

2. $X_0 = \{f \in X : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$，则 $\dim X_0 = \infty$，证明 Riesz 引理中 $\varepsilon \neq 0$.

证明. 1. $\forall \{\varphi_n\} \subset X$ 是 Cauchy 列，则 $||\varphi_n - \varphi_m|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \to 0,\ (n, m \to \infty)$，$\forall x_0 \in [0,1]$，有 $|\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)| \to 0,\ (n, m \to \infty)$. 令 $x_n = \varphi_n(x_0)$，则 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，$\exists x \in \mathbb{R}$ 使得 $x_n \to x,\ (n \to \infty)$，令 $\varphi(x_0) = x$，由于 x_0 的任意性，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$，下证 φ 的连续性.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall x \in [0,1]$ 有 $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$，由于 $\varphi_n \in C([0,1])$，则 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta$ 有 $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ 则

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi_n(x_1)| + |\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| + |\varphi_n(x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

所以 $\varphi \in C([0,1])$，且 $\varphi(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 0$，故 $\varphi \in X$，X 是 Banach 空间.

2. 反设，$\exists x_0 \in X$，$||x_0|| = 1$ 使得 $\rho(x_0, X_0) \geqslant 1$，则 $\exists b = \dfrac{\int_0^1 x_0\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 y\,\mathrm{d}t}$ 使得 $x_0 - by \in X_0$，故 $||by|| \geqslant 1 \Rightarrow \left|\displaystyle\int_0^1 y\,\mathrm{d}t\right| \leqslant ||y|| \left|\displaystyle\int_0^1 x_0\,\mathrm{d}t\right|$，取 $y = t^{\frac{1}{n}}$，则

$$\left|\int_0^1 y\,\mathrm{d}t\right| = \frac{n}{n+1} \leqslant \left|\int_0^1 x_0\,\mathrm{d}t\right| \Rightarrow \left|\int_0^1 x_0\,\mathrm{d}t\right| \geqslant 1, \quad (n \to \infty)$$

与 $||x_0|| = 1$ 且 $x_0(0) = 0$ 矛盾. $\square$