日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 2 日	偏微分方程	强基数学 002	吴天阳	2204210460

定理 1 (Gauss-Green 公式)**.** 设 $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 为有界开集，且 $\partial\Omega\in C^1$，若 $U=(u_1,\cdots,u_n)^T:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ 且 $u\in C^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，则

$$\int_\Omega \nabla\cdot U\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}U\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向.

题目 1. 利用 Gauss-Green 公式证明:

(1). 若 $u,v\in C^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，则

$$\int_\Omega u_{x_i}v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}uvn_i\,\mathrm{d}s.$$

(2). 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，则

$$\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\Delta u=\nabla\cdot(\nabla u)=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}=\nabla u\cdot\boldsymbol{n}$.

(3). 若 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，则

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\nabla v\,\mathrm{d}x+\int\partial\Omega u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s.$$

(4). 若 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，则

$$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\,\mathrm{d}s.$$

证明. (1). 令 $U=(0,\cdots,0,uv,0,\cdots,0)^T$，即 $U_j=\begin{cases}uv, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$ 则

$$\left.\begin{aligned}\int_\Omega\nabla\cdot U\,\mathrm{d}x&=\int_\Omega\frac{\partial uv}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=\int_\Omega u_{x_i}v\,\mathrm{d}x+\int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{Gauss-Green}}\int_{\partial\Omega}U\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\int_{\partial\Omega}uvn_i\,\mathrm{d}s\end{aligned}\right.\Rightarrow\int_\Omega u_{x_i}v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}uvn_i\,\mathrm{d}s.$$

(2).

$$\int_\Omega\Delta u\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\nabla\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{Gauss-Green}}\int_{\partial\Omega}\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s.$$

(3). 由 (1) 知，令 $v=\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$，可得

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x_i}n_i\,\mathrm{d}s,\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

对上式左右两端同时对 $i=1,2,\cdots,n$ 求和可得

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s.$$

(4). 由 (3) 知，交换 u,v 可得

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=-\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s,$$

则

$$\int_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\,\mathrm{d}s.$$

□

题目 2. 将下列方程化为标准型：

$$(1)\ \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{x_ix_j}=0,$$

$$(2)\ u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}=0.$$

解答. (1). 该方程的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1\end{bmatrix}$，则 A 的有 $n-1$ 重特征值为 $\lambda_{1,2,\cdots,n-1}=\dfrac{1}{2}$，$\lambda_n=\dfrac{n+1}{2}$，于是该方程为**椭圆形**，通过变量代换

$$\nabla v=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt n}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt n}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt6} & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt n}\\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt n}\end{bmatrix}\nabla u$$

可得标准型为 $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i v_{x_ix_i}=0$.

(2). 该方程的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt5}{2}$，则该方程为**椭圆形**，通过变量代换

$$\nabla v=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}} & \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} & \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\end{bmatrix}\nabla u$$

可得标准型为 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_{x_ix_i}=0$.

题目 3. 设

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla v|^2+v^2)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)v^2\,\mathrm{d}s-\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}gv\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha(x)\geqslant 0$. 考虑一下三个问题：

问题 I（变分问题）：求 $u\in M=C^1(\bar\Omega)$，使得

$$J(u)=\min_{v\in M}J(v).$$

问题 II：求 $u\in M=C^1(\bar\Omega)$，使得它对于任意 $v\in M$，都满足

$$\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v+u\cdot v-fv)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-gv)\,\mathrm{d}s=0.$$

问题 III（第三边值问题）：求 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$，满足以下边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u+u=f, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\vec n}+\alpha(x)u=g, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

(1) 证明问题 I 与问题 II 等价.

(2) 当 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ 时，证明问题 I、II、III 等价.

解答. (1) $\forall v\in M$，$\forall\varepsilon>0$，则 $u+\varepsilon v\in M$，记

$$j(\varepsilon)=J(u+\varepsilon v),$$

则

$$j'(\varepsilon)=\int_\Omega((u_x+\varepsilon v_x)v_x+(u_y+\varepsilon v_y)v_y+(u+\varepsilon v)v)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)(u+\varepsilon v)v\,\mathrm{d}s-\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}gv\,\mathrm{d}s.$$

问题 I 的必要性条件为 $j'(0)=0$，即

$$\begin{aligned}j'(0)&=\int_\Omega(u_xv_x+u_yv_y+uv)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)uv\,\mathrm{d}s-\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}gv\,\mathrm{d}s\\&=\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v+uv-fv)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-gv)\,\mathrm{d}s=0.\end{aligned}\tag{1}$$

由于

$$j''(\varepsilon)=\int_\Omega(v_x^2+v_y^2+v^2)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)v^2\,\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

说明 (1) 式为问题 I 的充要条件，则问题 I 与问题 II 等价.

(2) 由于 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$，由 Guass-Green 公式可知

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega\Delta u\cdot v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\vec n}\,\mathrm{d}s,$$

于是 (1) 式等价于

$$\int_{\Omega}(u-\Delta u-f)v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)u-g\right)v\,\mathrm{d}s=0,$$

取 $v\in C_0^{\infty}(\Omega)$，由**引理 2.1** 可知

$$\begin{cases}u=\Delta u+f, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)u=g, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

综上，问题 I 与问题 III 等价，由 (1) 问可知，问题 I、II、III 等价.

题目 4. (1) 证明在自变量代换

$$\begin{cases}\xi=x-at,\\ \eta=x+at\end{cases}$$

下，波动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 具有的形式

$$u_{\xi\eta}=0,$$

并由此求出波动方程的通解.

(2) 证明在自变量代换

$$\begin{cases}\xi=x-\alpha t,\\ \tau=t\end{cases}$$

下，方程 $u_t+\alpha u_x=a^2u_{xx}$ 具有的形式

$$u_\tau=a^2u_{\xi\xi}.$$

解答. (1) 由于 $\xi_t=-a,\ \xi_x=1,\ \eta_t=a,\ \eta_x=1$，则

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=u_{\xi\eta}\cdot\xi_t\eta_t-a^2u_{\xi\eta}\cdot\xi_x\eta_x=-2a^2u_{\xi\eta}=0$$

则 $u_{\xi\eta}=0$. 对 ξ 进行积分可得 $u_\eta=c+f(\eta)$，对 η 进行积分可得

$$u=c\eta+\int f(\eta)\,\mathrm{d}\eta+f_2(\xi),$$

记 $f_1(\eta)=c\eta+\displaystyle\int f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$，则

$$u(x,y)=f_1(x+at)+f_2(x-at).$$

其中 f_1,f_2 为任意的标量函数.

(2) 由于 $\xi_x = 1$, $\tau_x = 0$, $\tau_t = 1$，则

$$
\begin{aligned}
u_t + \alpha u_x &= u_\tau \tau_t + \alpha u_\tau \tau_x = u_\tau, \\
\alpha^2 u_{xx} &= \alpha^2 u_{\xi\xi} (\xi_x)^2 = \alpha^2 u_{\xi\xi},
\end{aligned}
$$

所以原方程等价于 $u_\tau = \alpha^2 u_{\xi\xi}$.

题目 5. 若 u 是 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的解，如果 $u(x)$ 只是向径 $r = |x|$ 的函数，即 $u(x) = \tilde{u}(r)$，试写出 $\tilde{u}(r)$ 适合的常微分方程.

解答. 设 $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \\
&\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\frac{x_i}{r}) \frac{\partial}{\partial r} + (\frac{x_i}{r})^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = \left(\frac{nr^2 - r^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.
$$