日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 4 月 10 日	概率论	强基数学 002	吴天阳	2204210460

习题 3.1

1. 设 A 和 B 是同一个概率空间中的两个随机事件。证明：(1) $I_{A\triangle B}=(I_A-I_B)^2$; (2) $I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|$; (3) $I_{A\cup B}=\max\{I_A,I_B\}$; (4) $I_{A\cap B}=\min\{I_A,I_B\}$; (5) $I_{A\cap B}=I_A\cdot I_B$。

证明. (1)

$$\begin{aligned}I_{A\triangle B}&=I_{A^cB\cup AB^c}=I_{A^cB}+I_{AB^c}=I_{A^c}I_B+I_AI_{B^c}=(1-I_A)I_B+I_A(1-I_B)\\&=I_A+I_B-2I_AI_B=I_A^2+I_B^2-2I_AI_B=(I_A-I_B)^2\end{aligned}$$

(2)

$$I_{A\triangle B}=(I_A-I_B)^2\xlongequal{\text{由于}(I_A-I_B)^2\text{的值域为}\{0,1\}}|I_A-I_B|$$

(3)

$$\begin{aligned}\omega\in A\vee\omega\in B&\iff I_A(\omega)=I_B(\omega)=1\iff I_{A\cup B}(\omega)=\max\{I_A(\omega),I_B(\omega)\}=1\\\omega\notin A\wedge\omega\notin B&\iff I_A(\omega)=I_B(\omega)=0\iff I_{A\cup B}(\omega)=\max\{I_A(\omega),I_B(\omega)\}=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow I_{A\cup B}=\max\{I_A,I_B\}$

(4)

$$\begin{aligned}\omega\in A\wedge\omega\in B&\iff I_A(\omega)=I_B(\omega)=1\iff I_{A\cap B}(\omega)=\min\{I_A(\omega),I_B(\omega)\}=1\\\omega\notin A\vee\omega\notin B&\iff I_A(\omega)=I_B(\omega)=0\iff I_{A\cap B}(\omega)=\min\{I_A(\omega),I_B(\omega)\}=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow I_{A\cap B}=\min\{I_A,I_B\}$

(5)

$$\begin{aligned}\omega\in A\wedge\omega\in B&\iff I_A(\omega)=I_B(\omega)=1\iff I_{A\cap B}(\omega)=I_A(\omega)\cdot I_B(\omega)=1\\\omega\notin A\vee\omega\notin B&\iff I_A(\omega)=I_B(\omega)=0\iff I_{A\cap B}(\omega)=I_A(\omega)\cdot I_B(\omega)=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow I_{A\cap B}=I_A\cdot I_B$

□

2. C 应取何值才能使下列函数称为概率分布：

$$(1)\ f(k)=\frac{C}{N},\quad k=1,2,\cdots,N;\qquad(2)\ f(k)=C\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=1,2,\cdots,\quad\lambda>0.$$

解答. (1)

$$\sum_{k=1}^N f(k)=\sum_{k=1}^N\frac{C}{N}=C=1$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = C(e^{\lambda}-1) = 1$$
$$\Rightarrow C = \frac{1}{e^{\lambda}-1}$$

5. 若对每个 $n \geqslant 1$,X_n 都是随机变量，证明

$$\sup_{n\geqslant 1} X_n,\quad \inf_{n\geqslant 1} X_n,\quad \limsup_{n\to\infty} X_n,\quad \liminf_{n\to\infty} X_n$$

均为随机变量。

证明. $\forall x \in \mathbb{R}$，则

$$\sup_{n\geqslant 1} X_n \leqslant x = \left\{\omega \in \mathscr{F} : \left(\sup_{n\geqslant 1} X_n(\omega)\right) \leqslant x\right\} = \left\{\omega \in \mathscr{F} : x \in \sup_{n\geqslant 1} x_n(\omega)\right\}$$

所以

$$\omega \in \sup_{n\geqslant 1} X_n \leqslant x \iff \sup_{n\geqslant 1} X_n(\omega) \leqslant x \iff x \in \sup_{n\geqslant 1} X_n(\omega)$$
$$\iff x_1(\omega) \leqslant x \wedge x_2(\omega) \leqslant x \wedge \cdots \wedge x_n(\omega) \leqslant x \wedge \cdots$$
$$\iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\{X_n \leqslant x\}$$
$$\Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} X_n \leqslant x = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{X_n \leqslant x\}$$

由于 $\{X_n \leqslant x\} \subset \mathscr{F}$，且 $\mathscr{F}$ 为一个 σ-域，其子集的交仍为其子集，所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{X_n \leqslant x\} \subset \mathscr{F}$ 为一个事件，故 $\sup\limits_{n\geqslant 1} X_n$ 为随机变量。同理可得，$\inf\limits_{n\geqslant 1} X_n$ 也为随机变量。

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geqslant 1}\left\{\sup_{m\geqslant n} X_m\right\}$$

由上述证明可知，$Y_n = \sup\limits_{m\geqslant n} X_m$ 为随机事件，则 $\inf\limits_{n\geqslant 1} Y_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 也为随机变量。同理可得，$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 也为随机变量。 □

6. 袋中有 5 个同型号的小球，编号为 $1,2,3,4,5$，从袋中任取三个球，用 X 表示取出的球中的最大编号，求 X 的分布律。

解答. 设样本空间 $|\Omega|$ 为取出三种球的全部情况，则 $|\Omega| = \binom{5}{3} = 10$，则

$$\mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{10},\quad \mathbf{P}(X=4) = \frac{3}{10},\quad \mathbf{P}(X=5) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

所以 X 的分布律可以记为

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

9. 从 $1, 2, \cdots, 10$ 十个数中无放回随机地取出五个数字，将这五个数字按由小到大的顺序排成一行：$X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5$。求 X_1 和 X_3 的分布律。如果取数是有放回的（这时 $X_1 \leqslant X_2 \leqslant X_3 \leqslant X_4 \leqslant X_5$，$X_1, X_3$ 和 X_5 的分布律又个为什么？

解答. 无放回时

$$X_1\text{的分布律:}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{\binom{9}{4}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{5}} \end{pmatrix}$$

$$X_3\text{的分布律:}\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{\binom{2}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{3}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{7}{2}\binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} \end{pmatrix}$$

有放回时较为复杂。设共有 i 个数：$1, 2, \cdots, i$ 有放回地取出 j 个，从小到大排序排成一行：$X_1 \leqslant X_2 \leqslant \cdots \leqslant X_i$，将 $X_1 X_2 \cdots X_i$ 的所有可能情况记为事件 B_{ij}，其中 $X_i = 1$ 的情况记为事件 A_{ij}。不难发现

$$B_{ij} = A_{1j} + A_{2j} + \cdots + A_{ij}$$

下面求解 A_{ij}，我们可以将 A_{ij} 分解成两个不交集合的并：$A_{i-1,j} + A_{i,j-1}$，因为可以做出如下构造：

$\forall Y_1 Y_2 \cdots Y_j \in A_{i-1,j}$，有 $X_1(Y_1+1)(Y_2+1)\cdots(Y_{j-1}+1) \in A_{ij}$，

$\forall X_1 X_2 \cdots X_{j-1} \in A_{i,j-1}$，有 $X_1 X_1 X_2 \cdots X_{j-1} \in A_{ij}$，容易证明 A_{ij} 中的元素一定可由这两种方法之一生成，故 $A_{ij} = A_{i-1,j} + A_{i,j-1}$，于是 $|A_{ij}| = |A_{i-1,j}| + |A_{i,j-1}|$，通过制表找规律：

Aij	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	3	6	10	15
4	1	4	10	20	35
5	1	5	15	35	70

可以发现 $|A_{ij}|$ 构成了从左上角开始的一个杨辉三角，则 $|A_{ij}|=\binom{i+j-2}{j-1}$，于是

$$|B_{ij}|=|A_{1j}|+|A_{2j}|+\cdots+|A_{ij}|=\begin{pmatrix}j-1\\j-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}j\\j-1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}i+j-2\\j-1\end{pmatrix}$$
$$\xlongequal{\text{hockey stick identity}}\begin{pmatrix}i+j-1\\j\end{pmatrix}$$

所以，总样本空间 $|\Omega|=|B_{10,5}|=\binom{14}{5}$，且可以直接给出 $(X_i=j)$ 的表达式，由于第 i 位要求为 j，将整个序列分为 $X_1\cdots X_{i-1}$ 和 $X_i\cdots X_5$ 两段，第一段没有对开头元素的限制，所以有 $|B_{j,i-1}|$ 种排法，第二段要求开头元素为 i，所以有 $|A_{11-j,6-i}|$ 种排法，故 $|(X_i=j)|=|B_{j,i-1}|\cdot|A_{11-j,6-i}|=\binom{15-i-j}{5-i}\binom{i+j-2}{i-1}$，于是 X_i 的分布律为

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
\frac{\binom{14-i}{5-i}\binom{i-1}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{13-i}{5-i}\binom{i}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{12-i}{5-i}\binom{i+1}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{11-i}{5-i}\binom{i+2}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{10-i}{5-i}\binom{i+3}{i-1}}{\binom{14}{5}} & & \\
 & & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 & & \frac{\binom{9-i}{5-i}\binom{i+4}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{8-i}{5-i}\binom{i+5}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{7-i}{5-i}\binom{i+6}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{6-i}{5-i}\binom{i+7}{i-1}}{\binom{14}{5}} & \frac{\binom{5-i}{5-i}\binom{i+8}{i-1}}{\binom{14}{5}}
\end{pmatrix}$$

代入 $i=1,3,5$ 即可得到 X_1,X_3,X_5 对应的分布律。

习题 3.2

2. 求 n 次独立重复的 Bernoulli 试验中成功奇数次的概率 p_n。

证明. 设 X 服从参数 n,p 的二项分布，p 为 Bernoulli 试验中成功的概率，即 $X\sim B(n,p)$，则

$$p_n=\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}\binom{n}{2k-1}p^{2k-1}q^{n-2k+1}$$

其中 $[x]$, $(x\in\mathbb{R})$ 为向下取整符号。 □

5. 将 $[0,1]$ 上的均匀分布推广到有限区间 $[a,b]$ 上，写出其分布函数。

解答. 设 $F(x)=U[0,1]$，做线性变换 $\varphi(x)=(b-a)x+a$，则

$$G(x)=F(\varphi(x))=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

为 $[a,b]$ 上的均匀分布。

10. 两名篮球队员轮流投篮，直至某人投中为止，如果甲投中的概率为 0.4，乙投中的概率为 0.6，现在让甲先投，求两球员投篮次数的分布律。

解答. 设随机变量 X 表示两球员的投篮总次数，每一次投篮中甲、乙投不中的概率分别记为 q_1, q_2，投中的概率分别为 p_1, p_2，则该问题可转化为参数为 q_1, q_2 和 n 的几何分布问题，则

$$\mathbf{P}(X=x) = \begin{cases} \binom{2k}{k} q_1^k q_2^k p_1, & x = 2k+1,\ (k=0,1,\cdots), \\ \binom{2k-1}{k} q_1^k q_2^{k-1} p_2, & x = 2k,\ (k=1,2,\cdots). \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{代入数值}}} \begin{cases} \binom{2k}{k} (0.6)^k (0.4)^{k+1}, & x = 2k+1,\ (k=0,1,\cdots), \\ \binom{2k-1}{k} (0.6)^{k+1} (0.4)^{k-1}, & x = 2k,\ (k=1,2,\cdots). \end{cases}$$

12. 设某汽车站在一天的某段时间中有 1000 辆汽车通过，每辆汽车在该段时间出事故的概率为 0.0001，求该段时间出事故的汽车数不小于 2 的概率。

解答. 设 $n = 1000, p = 0.0001$，$X \sim B(n,p)$，则

$$\begin{aligned} \mathbf{X \geqslant 2} &= 1 - \mathbf{X \leqslant 1} \\ &= 1 - \mathbf{X = 0} - \mathbf{X = 1} \\ &= 1 - (1-p)^{1000} - \binom{1000}{1} p(1-p)^{999} \\ &\approx 0.00467 \end{aligned}$$

14. 有甲、乙两种酒各 4 杯，如果从 8 杯中挑 4 杯，能将甲种酒挑出来，叫做试验成功一次。(1) 某人随机地去挑，求试验成功一次的概率；(2) 某人独立试验 10 次，成功了 3 次，问：他是猜对的，还是他确有鉴别能力?

解答. (1) 设事件 A 为一次试验成功，Ω 为一次试验的全部情况，则

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{70}$$

(2) 设 $n = 10, p = \mathbf{P}(A)$，$X \sim B(n,p)$，则

$$\mathbf{P}(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{70}\right)^3 \left(\frac{69}{70}\right)^7 \approx 0.00032 < 0.001$$

由于 $\mathbf{P}(X=3)$ 为小概率事件，所以可以认为他有鉴别能力。

习题 3.3

3. 分子运动速度的绝对值 X 服从 Maxwell 分布，有概率密度函数

$$p(x) = ax^2 \exp\left\{-\frac{x^2}{b}\right\}, \quad x > 0,$$

其中 $b > 0$ 是已知常数，a 是待定常数。求 a。

解答. 由题可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} ax^2 e^{-x^2/b}\,dx = -\frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,d(e^{-x^2/b}) \\ &= \frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/b}\,dx = \frac{ab}{2}\sqrt{\pi b} = 1\end{aligned}$$

所以

$$a = \frac{2}{b\sqrt{\pi b}}$$

4. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

试求：(1) X 的分布函数；(2) 概率 $\mathbf{P}(0.2 < x < 1.3)$。

解答. (1). 由题可得

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 < x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

(2). 由 (1) 可知

$$\mathbf{P}(0.2 < X < 1.3) = F(1.3) - F(0.2) = -\frac{1}{2}(1.3)^2 + 2 \cdot 1.3 - 1 - \frac{1}{2}(0.2)^2 = 0.757$$

6. 设 $p(x) = e^{-e(x-a)}, \quad x > 0$. (1) 求 a 使 $p(x)$ 为密度函数；(2) 若随机变量 X 以此 $p(x)$ 为密度，求 b 使 $\mathbf{P}(X > b) = b$.

解答. (1). 由于 $p(x)$ 为密度函数，则有

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty} e^{-e(x-a)}\,dx = -\frac{1}{e}e^{-e(x-a)}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{e}e^{ea} = 1 \\ &\Rightarrow a = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

(2). 由 (1) 可知，$p(x) = e^{-ex+1}$，则

$$\mathbf{P}(X > b) = \int_b^{+\infty} e^{-ex+1}\, dx = \frac{1}{e}e^{-eb+1} = b$$
$$\Rightarrow e^{-eb+1} = eb \Rightarrow eb = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{e}$$

7. 设连续性随机变量 X 的分布函数在区间 $[0,1]$ 中严格单调，$\mathbf{P}(X \leqslant 0.29) = 0.75$，$Y = 1 - X$，求实数 x，使 $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 0.25$。

解答.

$$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(1 - X \leqslant x) = \mathbf{P}(X \geqslant 1 - x) = 0.25$$

由于 $\mathbf{P}(X \leqslant 0.29) = 0.75$，则 $\mathbf{P}(X \geqslant 0.29) = 0.25$，又由于 X 的分布函数的严格单调性，知 $1 - x = 0.29$，所以 $x = 0.71$。

9. 设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}(1+2x), & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

证明：(1) $F(x)$ 是一个分布函数；(2) $F(x)$ 既不是离散型的也不是连续型的，但它可以写为这两种类型分布函数的线性组合。

证明. (1). 通过 $F(x)$ 的定义式，不难得出 $F(x)$ 具有非降性，规范性，由于 $F(x)$ 只有在 $x = 0$ 处间断，所以考虑该点的右连续性

$$\lim_{t\downarrow 0} F(t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{3}(1+2x) = \frac{1}{3} = F(0)$$

则 $F(x)$ 满足右连续性。综上，$F(x)$ 是一个分布函数。

(2). 由于 $F(x)$ 不是阶梯型函数，所以 $F(x)$ 不是离散型的，又由于 $F(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处间断，所以 $F(x)$ 也不是连续型的。设 $F_1(x)$ 为 $U[0,1]$ 对应的连续型分布函数，$F_2(x)$ 为分布律为 $\mathbf{P}(x = 0) = 1$ 的离散型分布函数，则 $F(x)$ 可以表示为 $F_1(x), F_2(x)$ 的凸组合

$$F(x) = \frac{2}{3}F_1(x) + \frac{1}{3}F_2(x)$$

□

习题 3.4

1. 某电话交换台每分钟收到的呼唤次数服从参数为 4 的 Poisson 分布。(1) 求每分钟恰有 8 次呼唤的概率;(2) 求每分钟的呼唤次数大于 10 的概率。

解答. (1) $\mathbf{P}_1 = p(8;4) = \frac{4^8}{8!}e^{-4} \approx 0.02977$

(2) $\mathbf{P}_2 = \sum\limits_{k=11}^{+\infty} p(k;4) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{10} \frac{4^k}{k!}e^{-4} \approx 0.002839766$

4. 在某 63 年中,某地的夏季 $(5 \sim 9$ 月$)$ 共有 180 天下暴雨,求一个夏季中下暴雨不超过 4 天的概率。

解答. 平均 1 年夏季下暴雨天数为:$\frac{180}{63} = \frac{20}{7}$,由于每一天下是否下暴雨是相互独立地,可以近似认为是满足 $\lambda = \frac{20}{7}$ 的 Poisson 分布,所以,一个夏季中下暴雨不超过 4 天的概率为:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=0}^{4} p(k;\frac{20}{7}) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\left(\frac{20}{7}\right)^k}{k!}e^{-20/7} \approx 0.838669$$

7. 保险公司的资料表明,持某种人寿保险单的人在保险期内死亡的概率为 0.005。现出售这种保单 1200 份,求保险公司至多赔付 10 份的概率。

解答. 设出售 1200 份保单要赔付随机变量 X 份,由于每个人的死亡为独立事件,所以满足二项分布,即 $X \sim B(1200, 0.005)$,由于 n 较大,且 p 较小,所以可以近似视为参数为 $1200 \times 0.005 = 6$ 的 Poisson 分布,则

$$\mathbf{P} = \sum_{k=0}^{10} b(k;1200,0.005) \approx \sum_{k=0}^{10} p(k;6) = \sum_{k=0}^{10} \frac{6^k}{k!}e^{-6} = 0.957379$$

12. 通过一交叉路口的汽车流可以看作一个 Poisson 过程。如果 1 分钟内没有汽车通过的概率是 0.02,求 2 分钟内有多于 1 辆汽车通过的概率。

解答. 设 X_t 为在 t 分钟以前通过交叉路口的汽车数目,则 X_t 可以视为一个 Poisson 分布,则 1 分钟没有汽车通过的概率可以表示为

$$\mathbf{P}(x_1 = 0) = e^{-\lambda} = 0.02$$

所以 2 分钟内有多于 1 辆车通过的概率为

$$\mathbf{P} = 1 - \mathbf{P}(x_2 = 0) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - (0.02)^2 = 0.9996$$

15. 证明非负值随机变量 X 服从指数分布的充分必要条件是它是无记忆性的，即

$$\mathbf{P}\{X > s+t | X > s\} = \mathbf{P}\{X > t\}, \quad \forall s, t > 0.$$

证明. "$\Rightarrow$"：设随机变量 X 服从指数分布，则 $\mathbf{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$，

$$\mathbf{P}(X > s+t | X > s) = \frac{\mathbf{P}(X > s+t)}{\mathbf{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbf{P}(X > t)$$

"$\Leftarrow$"：对于 $\forall s, t > 0$，有 $\mathbf{P}(X > s+t) = \mathbf{P}(X > s) \cdot \mathbf{P}(X > t)$，令 $f(x) = \mathbf{P}(X > x)$，则

$$f(s+t) = f(x) \cdot f(t)$$

对 $\forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，则 $f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$，若 $f(x) \equiv 0$，则与 X 为随机变量，矛盾。所以 $\exists f(x) \neq 0$，则 $f(0) = 1$。

令 $f(1) = a$，对于任意的有理数 $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}$，其中 p, q 互素，则

$$(f(x))^q = \left(f(\frac{p}{q})\right)^q = f(\frac{p}{q} \cdot q) = f(p) = f(1 \cdot p) = (f(1))^p = a^p$$
$$\Rightarrow f(x) = a^{p/q} = a^x$$

对任意的无理数 $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$，由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{[nx]}{n} = x$ 且 $f\left(\frac{[nx]}{n}\right) = a^{[nx]/n}$，当 $n \to \infty$ 时，由 $f(x)$ 的连续性可知，得 $f(x) = a^x$。

所以，$x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，都有 $f(x) = a^x$，不妨令 $a = e^{-\lambda}$，则 $f(x) = e^{-\lambda x}$，满足指数分布。

$\square$

习题 3.5

2. 若 X 的分布函数为 $\mathcal{N}(60, 9)$，求分点 x_1, x_2, x_3, x_4 使 X 若在区间

$$(-\infty, x_1),\ (x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ (x_3, x_4),\ (x_4, \infty)$$

中的概率之比为 $7 : 24 : 38 : 24 : 7$.

解答. 令 $Z = \frac{X-60}{3}$，则 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$，由正态分布的性质可知

$$\mathbf{P}(Z \leqslant z_4) = 1 - \frac{7}{100} = 0.93 \approx 1.48 \Rightarrow x_4 = 3z_4 + 60 = 64.44$$
$$\mathbf{P}(Z \leqslant z_3) = 1 - \frac{24+7}{100} = 0.69 \approx 0.5 \Rightarrow x_3 = 3z_3 + 60 = 61.5$$

由正态分布的对称性可知：$x_2 = 58.5, x_1 = 55.56$。

4. 假定随机变量 X 只取区间 $(0,1)$ 中的值，且对任何 $0<x<y<1$，X 落在子区间 (x,y) 内的概率仅与 $y-x$ 有关。证明：X 服从 $U(0,1)$（即区间 $(0,1)$ 上的均匀分布）。

证明. 对 $\forall 0<x<y<1$，$z=y-x$，根据题意知，存在 $f(z)$，使得 $\int_x^y p(t)\,dt = f(y-x)$，两侧同时对 y 求导，可得 $p(y)=f'(y-x)$，令 $y=1$，由于 x 的任意性，$\forall z\in(0,1)$，都有 $f'(z)=p(1)$，则 $p(y)=f'(y-x)=p(1)$，又由于

$$1=\mathbf{P}(0<X<1)=\int_0^1 p(1)\,dt=p(1)$$

则 $p(x)=1$ $(x\in(0,1))$，服从 $U(0,1)$ 均匀分布。 □

8. 某公司生产的电子管的寿命 X（以小时计）服从正态分布 $\mathcal{N}(160,\sigma^2)$，为了达到要求 $\mathbf{P}(120<X\leqslant 200)\geqslant 0.80$，试问，$\sigma$ 的最大可能值是多少?

解答. 设 $X\sim\mathcal{N}(160,\sigma^2)$，$\mathbf{P}(120<X\leqslant 200)\geqslant 0.8$，由正态分布的对称性可知，$\mathbf{P}(X\leqslant 200)=0.9$，通过查表可知 $\dfrac{200-160}{\sigma}\geqslant 1.28$，则 $\sigma\leqslant\dfrac{200-160}{1.28}=31.25$, 所以 σ 的最大可能值约为 31.25。

9. 设随机变量 X 服从 $\mathcal{N}(0,1)$，$Y=X$ 或 $-X$，视 $|X|\leqslant 1$ 或 $|X|>1$ 而定。求 Y 的分布。

解答. 根据题意可知，且标准正态分布的分布函数满足 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，所以

$$Y=\begin{cases} X, & |X|\leqslant 1, \\ -X, & |X|>1. \end{cases} \quad\Rightarrow F_Y(x)=\begin{cases} \Phi(x), & |x|\leqslant 1, \\ 1-\Phi(x), & |x|>1. \end{cases}$$

习题 3.6

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$\mathbf{P}(X=0)=\frac{1}{4},\quad \mathbf{P}(X=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2},\quad \mathbf{P}(X=\pi)=\frac{1}{4}.$$

求 $\dfrac{2}{3}X+2$ 及 $\cos X$ 的分布律。

解答.

$$(\frac{2}{3}X+2)\sim\begin{pmatrix} 2 & \frac{\pi}{3}+2 & \frac{2}{3}\pi+2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},\quad \cos X\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3. 设 $X \sim U\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，求 $Y = \cos X$ 的分布函数。

解答. (i) $x < 0$，$\mathbf{P}(Y \leqslant X) = 0$;

(ii) $0 \leqslant X < 1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant X) = \mathbf{P}(X \leqslant -\arccos x) + \mathbf{P}(X > \arccos x) = 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos x$;

(iii) $X \geqslant 1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant X) = 1$。

综上

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{2}{\pi}\arccos x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

5. 设 $X \sim U(-2, 3)$，

$$Y = \begin{cases} -1, & X \leqslant -1, \\ X, & -1 < X < 1, \\ 1, & X \geqslant 1, \end{cases}$$

分别求 Y 和 Y^{-2} 的分布函数。

解答. (i) $x < -1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 0$;

(ii) $-1 \leqslant x \leqslant 1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5}$;

(iii) $X > 1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 1$。

综上

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(i) $x < 1$，$\mathbf{P}(Y^2 \leqslant x) = 0$;

(ii) $x \geqslant 1$，$\mathbf{P}(Y^2 \leqslant x) = \mathbf{P}(|X| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}) = 1 - \left(\dfrac{1}{5\sqrt{x}} + \dfrac{2}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5\sqrt{x}} + \dfrac{2}{5}\right) = 1 - \dfrac{2}{5\sqrt{x}}$。

综上

$$F_{Y^2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{2}{5\sqrt{x}}, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

7. 设 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$，分别求 $e^X, 1/X^2, 2X^2+1$ 和 $|X|$ 的概率密度函数。

解答. 设 X 对应的密度函数为 $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，所求的密度函数分别记为 p_i $(i = 1,2,3,4)$，则

$$(1)\ p_1(x) = p(\log|x|)\frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|x|} e^{\frac{-\log^2|x|}{2}};$$

$$(2)\ p_2(x) = p(|x|^{-\frac{1}{2}})(\frac{1}{2}|x|^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}|x|^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2|x|}};$$

$$(3)\ p_3(x) = p(\frac{\sqrt{|x-1|}}{2})\frac{1}{4\sqrt{|x-1|}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi|x-1|}} e^{-\frac{|x-1|}{8}};$$

$$(4)\ p_4(x) = p(|x|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

10. 设随机变量 X 具有密度函数 $p_X(x)$，并设

$$(1)\ g_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leqslant 0; \end{cases} \quad (2)\ g_2(x) = \begin{cases} x, & |x| \geqslant b, \\ 0, & |x| < b; \end{cases} \quad (3)\ g_3(x) = \begin{cases} b, & x \geqslant b, \\ x, & |x| < b, \\ -b, & x \leqslant -b. \end{cases}$$

求 $Y = g_i(X)$ 的分布，$i = 1,2,3$。

解答. (1). (i) $x < -1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 0$；

(ii) $-1 \leqslant x < 1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi$；

(iii) $x \geqslant 1$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 1$.

综上

$$F_{g_1(X)} = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi, & -1 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

(2). (i) $x \leqslant -b$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi$;

(ii) $-b \leqslant x < 0$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant -b) = \int_{-\infty}^{-b} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi$;

(iii) $0 \leqslant x < b$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant b) = \int_{-\infty}^{b} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi$;

(iv) $b \leqslant x$，$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi$.

综上

$$\mathbf{P}_{g_2(X)} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi, & |x| \geqslant b, \\ \int_{-\infty}^{-b} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi, & -b < x < 0, \\ \int_{-\infty}^{b} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi, & 0 \leqslant x < b. \end{cases}$$

(3). (i) $x < -b$, $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 0$;

(ii) $-b \leqslant x < b$, $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi$;

(iii) $b \leqslant x$, $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 1$.

综上

$$F_{g_3(X)} = \begin{cases} 0, & x < -b \\ \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_X(\xi)\,d\xi, & -b \leqslant x < b \\ 1, & b \leqslant x. \end{cases}$$