日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 11 月 8 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第七次作业

题目 1. (2.1.2) 设 $A\in L(X,Y)$，求证：

$$(1).\ ||A||=\sup_{||x||\leqslant 1}||Ax||;\quad (2).\ ||A||=\sup_{||x||<1}||A||.$$

证明. (1). 当 $|x|<1$ 时，$||Ax||\leqslant ||A||\cdot||x||<||A||$，则 $||A||=\sup\limits_{||x||\leqslant 1}||Ax||$.

(2). 由上确界定义可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists||x_0||=1$ 使得 $||Ax_0||>||A||(1-\varepsilon)$，令 $x_n=x_0\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$，则 $||x_n||=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)||x_0||<1$ 且 $x_n\to x_0$，又由于 A 有界 $||A||<\infty$，则

$$||Ax_n||=||Ax_n-Ax_0+Ax_0||\leqslant ||A||\cdot||x_n-x_0||+||Ax_0||\to||A||(1-\varepsilon),\ (n\to\infty)$$

由 ε 的任意性可知 $\sup\limits_{||x||<1}||Ax||=||A||$. □

题目 2. (2.1.3) 设 $f\in L(X,\mathbb{R})$，求证：

$$(1).\ ||f||=\sup_{||x||=1}f(x);\quad (2).\ \sup_{||x||<\delta}f(x)=\delta||f||,\ (\forall\delta>0).$$

证明. (1). 由于 $f(-x)=-f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$ 使得 $|f(x_0)>||f||-\varepsilon$.

若 $f(x_0)<0$，则 $\exists||-x_0||=1$ 使得 $f(-x_0)=-f(x_0)=|f(x_0)|>||f||-\varepsilon$.

若 $f(x_0)\geqslant 0$，则 $f(x_0)=|f(x_0)|>||f||-\varepsilon$.

综上，$\exists||x_1||=1$ 使得 $f(x_1)>||f||-\varepsilon$，则 $||f||=\sup\limits_{||x||=1}f(x)$.

(2). 由上题可知 $||f||=\sup\limits_{||x||<1}f(x)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists||x_0||<1$，使得

$$f(x_0)>||f||-\varepsilon\Rightarrow f(\delta x_0)>\delta||f||-\delta\varepsilon,\ (\forall\delta>0)$$

则 $\exists y_0=\delta x_0\in B(\delta)$ 使得 $f(y_0)>\delta||f||-\delta\varepsilon$，则 $\sup\limits_{||y||<\delta}f(y)=\delta||f||$. □

题目 3. (2.1.4) 设 $y(t)\in C[0,1]$，定义 $C[0,1]$ 上的泛函 $f(x)=\displaystyle\int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t,\ (\forall x\in C[0,1])$，求 $||f||$.

解答. 由于

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|x(t)|\,\mathrm{d}t\int_0^1|y(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\max_{t\in[0,1]}\{x(t)\}\int_0^1|y(t)|\,\mathrm{d}t$$

则 $||f||\leqslant\displaystyle\int_0^1|y(t)|\,\mathrm{d}t$. 下证 $||f||\geqslant\displaystyle\int_0^1|y(t)|\,\mathrm{d}t$.

由于 y 连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$n\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall|x_1-x_2|\leqslant 1/n$，有 $|y(x_1)-y(x_2)|<\varepsilon$，构造 $[0,1]$ 上的 n 等分区间 $\pi:0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$，其中 $a_i-a_{i-1}=1/n\ (i=1,2,\cdots,n)$. 令

$$A=\bigcup\{[a_{i-1},a_i]:\forall t\in[a_{i-1},a_i],y(t)\neq 0\},\qquad \tilde{x}=\begin{cases}\mathrm{sgn}(y(t)), & t\in A,\\ \text{线性函数}, & t\in B.\end{cases}$$
$$B=\bigcup\{[a_{i-1},a_i]:\exists t_0\in[a_{i-1},a_i],y(t)=0\}.$$

$$
\begin{aligned}
f(\tilde{x}) &= \int_0^1 \tilde{x}(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \int_A |y|\,\mathrm{d}t + \int_B \tilde{x}(t)y(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_A |y|\,\mathrm{d}t - \int_B |y|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |y|\,\mathrm{d}t - 2\int_B |y|\,\mathrm{d}t > \int_0^1 |y|\,\mathrm{d}t - 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

由于 $||\tilde{x}|| \leqslant 1$ 则

$$
\int_0^1 |y|\,\mathrm{d}t - 2\varepsilon < f(\tilde{x}) \leqslant ||f|| \cdot ||x|| \leqslant ||f|| \leqslant \int_0^1 |y|\,\mathrm{d}t
$$

由 ε 的任意性可知 $||f|| = \int_0^1 |y|\,\mathrm{d}t$.

题目 4. (2.1.5) 设 f 是 X 上的非零有界线性泛函，令 $d = \inf\{||x|| : f(x) = 1, x \in X\}$，求证 $||f|| = 1/d$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in X$，$f(x_0) = 1$，使得

$$
||x_0|| < d(1+\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{1}{||x_0||} = \frac{f(x_0)}{||x_0||} = f\left(\frac{x_0}{||x_0||}\right)
$$

则 $1/d = \sup\limits_{||x||=1} f(x) = ||f||$. □

题目 5. (2.1.6) 设 $f \in X^*$，求证：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in X$，使得 $f(x_0) = ||f||$，且 $||x_0|| < 1+\varepsilon$.

证明. 不妨令 $||f|| \neq 0$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_1 \in X$，且 $||x_1|| \neq 0$，使得

$$
f\left(\frac{x_1}{||x_1||}\right) > \frac{||f||}{1+\varepsilon} \Rightarrow \frac{||x_1||}{f(x_1)}||f|| < 1+\varepsilon
$$

令 $x_0 = \dfrac{x_1}{f(x_1)}||f||$，则 $||x_0|| < 1+\varepsilon$，且 $f(x_0) = ||f||$. □

题目 6. (2.1.7) 设 $T : X \to Y$ 是线性的，令 $N(T) := \{x \in X : Tx = \theta\}$.

(1). 若 $T \in L(X,Y)$，求证：$N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

(2). 问 $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间能否推出 $T \in L(X,Y)$?

(3). 若 f 是线性泛函，求证：$f \in X^* \iff N(f)$是闭线性子空间.

证明. (1). $\forall \{x_n\} \subset N(T)$ 收敛于 x，则 $0 = Tx_n \to Tx$，则 $x \in N(T)$.

(2). 反例：在 $l^\infty = \left\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\right\}$ 中，范数为 $||x|| = \sup\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n|$，$a = \{1, -1, 0, \cdots\}$，构造 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$，$(\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots))$，则 f 是 l^∞ 上的线性泛函. 令 $Tx = x - af(x)$，则 $x - af(x) = \theta \Rightarrow a = \dfrac{x}{f(x)} \Rightarrow ||a|| = f(x) - f(a)f(x) = \theta$，则 $N(T) = \{\theta\}$.

假设 T 有界，$\exists M$ 使得

$$
\begin{aligned}
&||Tx|| \leqslant M||x|| \Rightarrow ||x - af(x)|| \leqslant M||x|| \Rightarrow ||af(x)|| - ||x|| \leqslant M||x|| \\
&\Rightarrow ||a|| \cdot |f(x)| \leqslant (M+1)||x|| \Rightarrow |f(x)| \leqslant (M+1)||x||
\end{aligned}
$$

则 f 有界. 下证 f 无界.

令 $a_n=\{\underbrace{1,\cdots,1}_{n个},0,\cdots\}$ 则 $||a_n||=1$, $f(a_n)=n$，而 $\dfrac{||f(a_n)||}{||a_n||}=n\to\infty$, $(n\to\infty)$，所以 f 无界. 故 T 无界.

(3). 充分性：由 (1) 可得.

必要性：反设 f 在单位球面上无界，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists x_n\in X$ 且 $||x_n||=1$，$f(x_n)\geqslant n\Rightarrow\dfrac{1}{n}\geqslant\dfrac{1}{f(x_n)}$，令 $y_n=\dfrac{x_n}{f(x_n)}-\dfrac{x_1}{f(x_1)}$，则

$$\left|\left|y_n+\frac{x_1}{f(x_1)}\right|\right|=\left|\left|\frac{x_n}{f_n}\right|\right|=\frac{1}{f(x_n)}\leqslant\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

则 $y_n\to-\dfrac{x_n}{f(x_1)}$，且 $f(y_n)=0$，则 $\{y_n\}\subset\mathrm{Ker}f$ 收敛，但是 $f(-\dfrac{x_1}{f(x_1)})=-1\neq 0$，则 $-\dfrac{x_1}{f(x_1)}\notin\mathrm{Ker}f$ 与 $\mathrm{Ker}f$ 是闭的矛盾. 故 f 在单位球面上有界，则 $f\in X^*$. □