非负可测函数的 Lebesgue 积分的等价性

吴天阳 强基数学 002　学号: 2204210460

定义 1. 设 E 是 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集, $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数.

(1) 若 E 为有界集, 对 $[0,\infty)$ 上任一分割

$$H: 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_i < \cdots, \quad (y_i \to \infty),$$

记 $\lambda(H) = \sup\limits_i (y_i - y_{i-1})$, $E_i = E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$. $\overline{\sigma}(H,f) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i m(E_i)$, $\underline{\sigma}(H,f) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_{i-1} m(E_i)$. 任取分割列

$$H_1 \leqslant H_2 \leqslant \cdots \leqslant H_n \leqslant \cdots, \quad (\lambda(H_n) \to 0),$$

其中 $H_{n-1} \leqslant H_n$ 表示 H_n 为 H_{n-1} 的加细.

定义 *Lebesgue* 积分 $\displaystyle\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 为当 $\lambda(H_n) \to 0$ 时, $\overline{\sigma}(H_n,f)$ 与 $\underline{\sigma}(H_n,f)$ 的共同极限 a $(0 \leqslant a \leqslant \infty)$.

(2) 若 E 为无界集, 则定义 *Lebesgue* 积分为 $\displaystyle\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 E_n 与定义 1(2) 相同.

定义 2. 设 E 为 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集.

(1) 设 $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$ 为 E 上的非负简单函数, 其中 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, 各 E_i 为互不相交的可测集, $\chi_{E_i}(x)$ 为 E_i 的特征函数, 则定义 *Lebesgue* 积分为 $\displaystyle\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E_i)$.

(2) 设 $f(x)$ 为 E 上的非负可测函数, 则定义 *Lebesgue* 积分为

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi\text{为}E\text{上的简单函数, 且}0 \leqslant \varphi \leqslant f\right\}.$$

上述定义中, 当 $\displaystyle\int_E f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ 时, 称 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积.

引理 1. 设 $\{E_n\}$ 为 $\mathbb{R}^q$ 中递增的可测集列, 且 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $\varphi(x)$ 为 E 上非负简单函数, 则在定义 2(1) 意义下, 有 $\displaystyle\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. (参考 [2]) 由于 $\{|\varphi(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 是非负渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} |\varphi(x)|\chi_{E_k}(x) = |\varphi(x)|, \quad (x \in E),$$

由 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可知

$$\int_E |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E |\varphi(x)|\chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

即 $\varphi \in L(E)$. 又由于在 E 上有 $(k=1,2,\cdots)$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x)\chi_{E_k}(x) = \varphi(x), \quad |\varphi(x)\chi_{E_k}(x)| \leqslant |\varphi(x)|,$$

故根据控制收敛定理可得

$$\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

引理 2. 设 E 为 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集, $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数.

(1) 对 E 上任意简单函数 $\varphi(x): 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, 恒有 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $f(x)$ 在 E 上 *Lebesgue* 可积, 则任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 上的简单函数 $\varphi(x): 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, 使 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x > \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon$. 其中 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 与定义 1 相同, $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 与定义 2(1) 相同.

证明. 当 E 为有界集时, 由定义 1(1) 与定义 2(1) 得证 (见 [1]). 以下证明 E 为无界的情形. 设 E 是 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集, $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 记

$$K_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_q)\} : |x_i| \leqslant n,\ i = 1, 2, \cdots, q\},\ E_n = E \cap K_n.$$

(1) 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 在 E_n 上有 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, 而 E_n 有界, 且定理对有界集成立. 故

$$\int_{E_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

又由于 $\{E_n\}$ 递增, 且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 由引理 1 与定义 1(2) 的知, 当 $n \to \infty$ 时

$$\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 记 $a = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, 由定义 1(2) 知 $a = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, 故对任意的 $\varphi > 0$, 取 N 使得 $a \geqslant \int_{E_N} f(x)\,\mathrm{d}x > a - \frac{\varphi}{2}$. 由于 E_N 有界, 故存在 E_N 上的简单函数 $\varphi_N(x)$: $0 \leqslant \varphi_N(x) \leqslant f(x)$, 使得

$$\int_{E_N}\varphi_N(x)\,\mathrm{d}x > \int_{E_N} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_N(x), & x\in E_N,\\ 0, & x\in E-E_N,\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 为 E 上简单函数, 且 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$, 而

$$\int_E\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{E_N}\varphi_N(x)\,\mathrm{d}x>\int_{E_N}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}>a-\varepsilon.$$

□

设 E 为 $\mathbb{R}^q$ 中测度有限的可测集, $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 且 $f(E)\subset(\alpha,\beta)$, 对 $[\alpha,\beta]$ 上任一分隔

$$D:\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta.$$

令 $\lambda(D)=\max\limits_i(y_i-y_{i-1})$, $E_i=E(y_{i-1}\leqslant f<y_i)$, 引入 Lebesgue 大和 S 和小和 s

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^n y_i m(E_i),\quad s(D,f)=\sum_{i=1}^n y_{i-1}m(E_i).$$

记集类 $\mathcal{D}:=\{D:\lambda(D)<\infty\}$, 对于 $D_1,D_2\in\mathcal{D}$, 若 $D_1\subset D_2$, 则称 D_2 为 D_1 的加细, 记为 $D_1\leqslant D_2$, 此时有 $\lambda(D_2)\leqslant\lambda(D_1)$. 于是有如下性质

引理 3. 设有分划列 $D_1\leqslant D_2\leqslant\cdots\leqslant D_n\leqslant\cdots$, $\lambda(D_n)\to 0$. 则 $s(D_n),S(D_n)$ 趋于同一极限 a, a 为有限数或 ∞.

证明. 由于 $S(D_n)-s(D_n)\leqslant\sum\limits_n(y_{n+1}-y_n)m(E_n)\leqslant\lambda(D_n)m(E)$, 而 $m(E)<\infty$, 所以当 $\lambda(D_n)\to 0$ 时, $S(D_n)-s(D_n)\to 0$.

若 $S(D_1)=\infty$, 则 $S(D_1)=\infty$, 从而一切 $s(D_n)$ 与 $S(D_n)$ 均为 ∞, 此时 $a=\infty$. 事实上, 若设 $S(D_1)<\infty$, 则由于 $S(D_1)-s(D_1)\leqslant\lambda(D_1)m(E)<\infty$, 故当 $s(D_1)<\infty$ 时, 必有 $S(D_1)<\infty$, 这与 $S(D_1)=\infty$ 矛盾.

若 $S(D_1)<\infty$, 则

$$s(D_1)\leqslant s(D_2)\leqslant\cdots\leqslant s(D_n)\leqslant\cdots\leqslant S(D_1)<\infty$$

可见, 此时 $\{s(D_n)\}$ 为单调上升有界数列, 故必然有有限极限, 记为 a, 同理 $\{S(D_n)\}$ 为单调下降有界数列, 必有极限, 记为 c. 易得 $a=c$, 否则, 若 $a<c$, 则

$$S(D_n)-s(D_n)\geqslant c-a>0$$

这与 $S(D_n)-s(D_n)\to 0$ 矛盾. □

引理 4. 若引理 3 中 $a=\infty$, 则任意的 $M>0$, 存在简单函数 $\varphi: 0 \leqslant \varphi \leqslant f$, 且使

$$\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m \geqslant M$$

成立.

证明. 根据引理 3 证明, 存在分划

$$D: 0 \leqslant y_0 < y_1 < \cdots < y_n < \cdots,$$

使得 $s(D)=\infty$, 即 $s(D)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n m(E_n)=\infty$. 因此可取充分大的 N 使得

$$\sum_{n \leqslant N} y_n m(E_n) > M.$$

定义简单函数 φ 为

$$\varphi(x)=\begin{cases} y_n, & x \in E_n, n \leqslant N, \\ 0, & \texttt{otherwise}. \end{cases}$$

则 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ 且 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m = \sum_{n \leqslant N} y_n m(E_n) > M$. □

引理 5. 对于简单函数 $\varphi: 0 \leqslant \varphi \leqslant f$, 恒有 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m \leqslant a$, 其中 a 为引理 3 中所述.

证明. 由引理 3 证明, 任意的 $\varphi > 0$, 存在 $D \in \mathcal{D}$, 使得 $S(D) < a + \varepsilon$.

设 $S(D)=\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} m(E_n)$, 由于简单函数 φ 只取有限个值, 于是有 N, 使得 $\varphi \leqslant y_{N+1}$.

若定义另一简单函数 ψ 为

$$\psi(x)=\begin{cases} y_{n+1}, & x \in E_n (n \leqslant N), \\ y_{N+1}, & \texttt{otherwise}. \end{cases}$$

那么有

$$\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m \leqslant \int_E \psi(x)\,\mathrm{d}m.$$

而

$$\int_E \psi(x)\,\mathrm{d}m = \sum_{n \leqslant N} y_{n+1} m(E_n) + y_{N+1} m(E - \bigcup_{n \leqslant N} E_n) \leqslant S(D) < a + \varepsilon.$$

则 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m < a + \varepsilon$.

由 ε 的任意性可知, $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m \leqslant a$. □

引理 6. 若上述极限 $a < \infty$, 则任意的 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 $\varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant f$, 使得 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m > a - \varepsilon$.

证明. 由引理 3 证明, 必存在分划 D, 使得 $s(D) > a - \frac{\varepsilon}{2}$. 设 $s(D) = \sum_n y_n m(E_n)$, 有可取充分大的 N, 使得 $\sum_{n>N} y_n m(E_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $\sum_{n\leqslant N} y_n m(E_n) > a - \varepsilon$.

定义简单函数 φ 为

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_n, & x \in E_n (n \leqslant N), \\ 0, & \texttt{otherwise}. \end{cases}$$

那么有 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, 且 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m = \sum_{n\leqslant N} y_n m(E_n) > a - \varepsilon$. □

Lebesgue 积分的等价性证明

证明. 设 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 在定义 1 与定义 2 下的值分别为 b 和 c, 即

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ c &= \sup\left\{ \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi(x)\text{为}E\text{上简单函数, 且}0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) \right\}, \end{aligned}$$

其中 $E_n = E \cap K_n$ 的定义与引理 2 中一致, 则两个定义等价只需证明 $b = c$, 以下分为两种情况:

(1) 当 E 为有界集时,(证明参考 [1])

(i) 若 $m(E(f = \infty)) > 0$, 则 $b = \infty$, 另一方面, 若记 $\delta = m(E(f = \infty))$, 则对任何一正数 $M > 0$, 可定义一简单函数为:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{M}{\delta}, & x \in E(f = \infty), \\ 0, & x \in E - E(f = \infty). \end{cases}$$

于是对于此 φ 有 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, 而且 $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}m = M$. 这说明 $c = \infty$, 所以 $b = c$ 成立.

(ii) 若 f 是几乎处处有限时, 此时 b 有两种可能.

当 $b = \infty$ 时, 由引理 4 可得 $c = b = \infty$;

当 $b < \infty$ 时, 由引理 5 可知, 任意的 $\varepsilon > 0, c < b + \varepsilon$, 又由引理 6 可知 $c > b - \varepsilon$. 所以 $|b - c| < \varepsilon$, 因此由 ε 的任意性可知 $b = c$.

(2) 当 E 为无界集时,(证明参考 [3])

(i) $b=\infty$, 则任意的 $M>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得在定义 1 下 $\int_{E_N} f(x)\,\mathrm{d}x > M$, 因为 $E_N = E\cap K_n$ 有界, 故由 (1) 可知 $\int_{E_N} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在两个定义下相等, 于是存在 E_N 上的简单函数 $\varphi_N(x): 0\leqslant \varphi_N(x)\leqslant f(x)$ 使得 $\int_{E_N}\varphi_N(x)\,\mathrm{d}x > M$.

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_N(x), & x\in E_N,\\ 0, & x\in E-E_N,\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 为 E 上的简单函数, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$, 且 $\int_E\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{E_N}\varphi_N(x)\,\mathrm{d}x>M$. 于是 $c>M$, 所以 $c=\infty$.

(ii) $b<\infty$, 由引理 2(1) 可知 $c\leqslant b$, 又由引理 2(2) 可知, 任意的 $\varepsilon>0$, 存在 E 上简单函数 $\varphi(x): 0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$, 使得 $\int_E\varphi(x)\,\mathrm{d}x>b-\varepsilon$, 于是 $c>b-\varepsilon$, 从而 $c\geqslant b$, 所以 $b=c$.

□

参考文献

[1] 王戌堂, 温作吉. 实变函数论 [M]. 西安: 西北大学出版社, 2001.

[2] 周民强. 实变函数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1985.

[3] 张永峰. 非负可测函数 L 积分的定义及其等价性 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2007.9.