日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 3 月 16 日	数据分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第二次作业

题目 1. 设 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 均为 p 维随机向量，已知

$$X=\begin{bmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{bmatrix}\sim N_{2p}\left(\begin{bmatrix}\mu^{(1)}\\\mu^{(2)}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Sigma_1&\Sigma_2\\\Sigma_2&\Sigma_1\end{bmatrix}\right)$$

其中 $\mu^{(i)}(i=1,2)$ 为 p 维向量，$\Sigma_i(i=1,2)$ 是 p 阶矩阵.

1. 证明 $X^{(1)}+X^{(2)}$ 和 $X^{(1)}-X^{(2)}$ 相互独立；
2. 求 $X^{(1)}+X^{(2)}$ 和 $X^{(1)}-X^{(2)}$ 的分布.

解答. 1. 设 I_p 为 p 阶单位阵，由于

$$\begin{bmatrix}X^{(1)}+X^{(2)}\\X^{(1)}-X^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_p&I_p\\I_p&-I_p\end{bmatrix}X\sim N_{2p}\left(\begin{bmatrix}\mu_1+\mu_2\\\mu_1-\mu_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2(\Sigma_1+\Sigma_2)&0\\0&2(\Sigma_1-\Sigma_2)\end{bmatrix}\right)$$

于是 $X^{(1)}+X^{(2)}$ 与 $X^{(1)}-X^{(2)}$ 独立.

2. 由上一问可知

$$\begin{aligned}X^{(1)}+X^{(2)}&=\begin{bmatrix}I_p&I_p\end{bmatrix}X\sim N_p(\mu_1+\mu_2,2(\Sigma_1+\Sigma_2)),\\X^{(1)}-X^{(2)}&=\begin{bmatrix}I_p&-I_p\end{bmatrix}X\sim N_p(\mu_1-\mu_2,2(\Sigma_1-\Sigma_2)).\end{aligned}$$

题目 2. 设 $X\sim N_3(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$，其中

$$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)',\quad\Sigma=\begin{bmatrix}1&\rho&\rho\\\rho&1&\rho\\\rho&\rho&1\end{bmatrix}\quad(0<\rho<1)$$

1. 求条件分布 $(X_1,X_2|X_3)$ 和 $(X_1|X_2,X_3)$.
2. 给定 $X_3=x_3$ 时，求出 X_1 和 X_2 的条件协方差.

解答. 1. 由条件分布计算公式可知

$$\begin{aligned}(X_1,X_2|X_3=x_3)&\sim N_2\left(\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\rho\\\rho\end{bmatrix}(x_3-\mu_3),\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\rho\\\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho&\rho\end{bmatrix}\right)\\&\sim N_2\left(\begin{bmatrix}\mu_1+\rho(x_3-\mu_3)\\\mu_2+\rho(x_3-\mu_3)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1-\rho^2&\rho-\rho^2\\\rho-\rho^2&1-\rho^2\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_1|X_2=x_2,X_3=x_3)&\sim N_1\left(\mu_1+\begin{bmatrix}\rho&\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix}\right),1-\begin{bmatrix}\rho&\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\rho\\\rho\end{bmatrix}\right)\\&\sim N_1\left(\mu_1+\frac{\rho}{1+\rho}(x_2+x_3-\mu_2-\mu_3),1-\frac{2\rho^2}{1+\rho}\right)\end{aligned}$$

2. 由第一问可知，X_1,X_2 在给定 $X_3=x_3$ 下的条件协方差均为 $1-\rho^2$.

题目 3. 设 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 = \begin{cases} -X_1, & -1 \leqslant X_1 \leqslant 1, \\ X_1, & \text{否则}. \end{cases}$

1. 证明：$X_2 \sim N(0,1)$.
2. 证明 (X_1, X_2) 的联合分布不是正态分布.

证明. 1. 当 $x \in [-1,1]$ 时，$f_{X_2}(x) = f_{X_1}(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$；当 $x \notin [-1,1]$ 时，$f_{X_2}(x) = f_{X_1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. 综上 $f_{X_1} = f_{X_2}$，所以 $X_2 \sim N(0,1)$.

2. 当 $x_2 \in [-1,1]$ 时，X_1, X_2 的联合分布函数满足

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \mathrm{P}[X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2] = \mathrm{P}[X_1 \leqslant x_1, -X_1 \leqslant x_2] = P[-x_2 \leqslant X_1 \leqslant x_1]$$

所以 $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ 不是正态分布. □

题目 4. 设 $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$，A 为对称阵，证明：

(1). $\mathrm{E}(XX') = \Sigma + \mu\mu'$；

(2). $\mathrm{E}(X'AX) = \mathrm{tr}(\Sigma A) + \mu' A \mu$；

(3). 当 $\mu = a \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =: a\mathbf{1}_p$, $A = I_p - \dfrac{1}{p}\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'$, $\Sigma = \sigma^2 I_p$ 时，试利用 (1) 和 (2) 的结果证明 $\mathrm{E}(X'AX) = \sigma^2(p-1)$.

若记 $X = (X_1, \cdots, X_p)'$ 此时 $X'AX = \sum\limits_{i=1}^{p}(X_i - \bar{X})^2$，则

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{p}(X_i - \bar{X})^2\right] = \sigma^2(p-1).$$

解答. (1).

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^p} \frac{xx'}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \mathrm{d}x \\
\xlongequal{x \leftarrow x-\mu}\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} (x+\mu)(x+\mu)' \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} (xx' + 2\mu x' + \mu\mu') \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \mu\mu' - \frac{\Sigma}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} (x+2\mu)\, \mathrm{d} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \\
&= \mu\mu' + \frac{\Sigma}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \Sigma + \mu\mu'
\end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^p} \frac{x'Ax}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \mathrm{d}x \\
\xlongequal{x\leftarrow x-\mu}\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} (x+\mu)'A(x+\mu) \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \mathrm{d}x \\
\xlongequal{A\text{为对称阵}}\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} (x'Ax + 2\mu'Ax + \mu'A\mu) \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \mu'A\mu - \frac{\Sigma A}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} (x+2\mu)\, \mathrm{d} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \\
&= \mu\mu' + \frac{\Sigma A}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{tr}(\Sigma A) + \mu'A\mu
\end{aligned}$$

(3). 由 (2) 可知：$\mathrm{E}(X'AX) = \mathrm{tr}(\Sigma A) + \mu'A\mu = p\sigma^2(1-1/p) + a^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{1}_p = \sigma^2(p-1)$.
由于

$$\begin{aligned}
X'AX &= \begin{bmatrix} X_1, \cdots, X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-1/p & -1/p & \cdots & -1/p \\ -1/p & 1-1/p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1/p \\ -1/p & \cdots & -1/p & 1-1/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X_1-\bar{X} & X_2-\bar{X} & \cdots & X_n-\bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{p} X_i^2 - X_i\bar{X} = \sum_{i=1}^{P} X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \sum_{i=1}^{p} X_i\bar{X} \\
&= \sum_{i=1}^{p} (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{p} (X_i - \bar{X})^2
\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{p}(X_i-\bar{X})^2\right] = \sigma^2(p-1).$$