日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 11 月 26 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460	50

第六次作业

题目 1. (1) 令 X 是来自分布 $f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)$, $\theta>0$.

(a) 求一个枢轴量，并且使用它求出关于 θ 的一个置信区间估计.

(b) 令 $Y=-1/\log X$，则 $(Y/2,Y)$ 关于 θ 的置信区间，求出关于该区间的置信系数，并且找到一个关于 θ 更优的置信区间.

解答. (a) 由于 X 分布函数 $F(x)=\int_0^x\theta t^{\theta-1}\,\mathrm{d}t=x^\theta$, $(0<x<1)$. 由于 $F(X)\sim I(0,1)$，则 $-\log F(X)\sim\Gamma(1,1)\Rightarrow -2\log F(X)\sim\chi^2(2)$. 设 $q_1,q_2\in(0,\infty)$, $q_1<q_2$，满足

$$\gamma=P(q_1<-2\log F(x)<q_2)=P(q_1<-2\theta\log X<q_2)=P\left(\frac{q_1}{-2\log X}<\theta<\frac{q_2}{-2\log X}\right)$$

q_1,q_2 取等尾概率 $q_1=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2)$, $q_2=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2)$，则 θ 的一个系数为 γ 的置信区间为

$$\left(\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2)}{-2\log X},\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2)}{-2\log X}\right)$$

(b) 由于 $(Y/2,Y)$ 是 θ 的一个置信区间，则

$$P(Y/2<\theta<Y)=P(1/2<\theta/Y<1)=P(1/2<-\theta\log X<1)$$

由于 $-\theta\log X\sim\Gamma(1,1)$，于是 $P(Y/2<\theta<Y)=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}$，于是该区间的置信系数 $\gamma=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}$. 设 $q_1,q_2\in[0,\infty)$, $q_1<q_2$ 满足

$$\gamma=P(q_1<-\theta\log X<q_2)=P\left(\frac{q_1}{-\log X}<\theta<\frac{q_2}{-\log X}\right)$$

则期望区间长度 $l=\mathbb{E}\left[\frac{q_1}{\log X}-\frac{q_2}{\log X}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{1}{\log X}\right](q_1-q_2)$，由于 $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\log X}\right]<0$，则极小化 $l\iff$ 极大化 q_1-q_2，转化为求解极大化问题

$$\begin{aligned}\max\quad & z=q_1-q_2,\\ s.t.\quad & \int_{q_1}^{q_2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-q_1}-\mathrm{e}^{-q_2}=\gamma,\\ & 0\leqslant q_1<q_2.\end{aligned}$$

于是 $q_1=-\log(\mathrm{e}^{-q_2}+\gamma)$，由于 $q_1\geqslant 0$ 代入得到 $q_2\geqslant-\log(1-\gamma)$ 且

$$z=-\log(\mathrm{e}^{-q_2}+\gamma)-q_2,\ z'=\frac{-\gamma}{\mathrm{e}^{-q_2}+\gamma}<0$$

则 z 关于 q_2 单调递减，于是 $q_2=-\log(1-\gamma)$ 时 z 有极大值，区间长度有极小值，对应的 $q_1=0$，则更优的置信区间为

$$\left(0,\frac{\log(1-\gamma)}{\log X}\right)=\left(0,\frac{\log(1+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})}{\log X}\right)$$

题目 2. (2) 令 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\theta, \theta)$, $\theta > 0$ 的随机样本. 求出一个枢轴量，并用它得到关于 θ 的置信区间估计.

解答. 由于 $\dfrac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\theta/n}} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_i-\theta}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1)$，于是 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sqrt{\theta}}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\theta} \sim \chi^2(n-1)$，于是

$$\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\theta/n}} \cdot \frac{\sqrt{\theta(n-1)}}{\sqrt{(n-1)S^2}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\theta}{S} \sim t(n-1)$$

设 $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, $q_1 < q_2$，满足

$$\gamma = P(q_1 < \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\theta}{S} < q_2) = P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}q_2 < \theta < \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}q_1\right)$$

由于 t 分布为对称分布，则 $q_2 = -q_1 = t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ 是使得置信区间最小的上下限，则 θ 的系数为 γ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right)$$

题目 3. (5) 令 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $f(x;\theta) = \theta \mathrm{e}^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$ 的随机样本.

(a) 求解关于总体均值的 100γ 置信度区间.

(b) 求解关于总体方差的 100γ 置信度区间.

(c) 求解上述两个区间同时覆盖真实均值和方差的概率.

(d) 求解关于 $\mathrm{e}^{-\theta} = P(X > 1)$ 的置信区间估计.

(e) 求出仅与 Y_1 相关的枢轴量，并且使用它求出关于 θ 的置信区间估计.

解答. (a) 总体均值为 $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(X) = 1/\theta$. 由于 θ 为尺度参数，$\theta X \sim \gamma(1,1)$，则 $\theta\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,1) \Rightarrow 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(2n)$. 设 $q_1, q_2 \in [0,\infty)$, $q_1 < q_2$，满足

$$\gamma = P(q_1 < 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i < q_2) = P\left(\frac{2n\bar{X}}{q_2} < \frac{1}{\theta} < \frac{2n\bar{X}}{q_1}\right)$$

对 q_1, q_2 取等尾概率得 $q_1 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)$, $q_2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)$，于是总体均值 $1/\theta$ 的置信度为 100γ 的区间为

$$\left(\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}, \frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}\right)$$

(b) 由于总体方差为 $\mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$，且 $P(q_1' < 1/\theta < q_2') = P(q_1'^2 < 1/\theta < q_2'^2)$，由 (a) 可得，总体方差 $1/\theta^2$ 的置信度为 100γ 的区间为

$$\left(\left[\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}\right]^2, \left[\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}\right]^2\right)$$

(c) 由于 (b) 是由 (a) 直接推出的，所以同时包含住真实均值和方差的概率为 γ.

(d) 由 (a) 可知，$P\left(\frac{q_1}{2n\bar{X}} < \theta < \frac{q_2}{2n\bar{X}}\right) = P\left(\exp\left\{-\frac{q_2}{2n\bar{X}}\right\} < \mathrm{e}^{-\theta} < \exp\left\{-\frac{q_1}{2n\bar{X}}\right\}\right) = \lambda$，于是 $\mathrm{e}^{-\theta}$ 的系数为 λ 的置信区间为

$$\left(\exp\left\{-\frac{q_2}{2n\bar{X}}\right\}, \exp\left\{-\frac{q_1}{2n\bar{X}}\right\}\right)$$

(e) 由于 $f_{Y_1}(y) = nf_X(y)(1-F_X(y))^{n-1} = n\theta\mathrm{e}^{-n\theta y} \sim \Gamma(1, n\theta)$，令 $Z = \theta Y_1$，则 $f_Z(z) = f_{Y_1}(z/\theta)/\theta = n\mathrm{e}^{-nz} \sim \Gamma(1, n)$. 设 $q_1, q_2 \in [0, \infty)$, $q_1 < q_2$，满足

$$1-\alpha = P(q_1 < \theta Y_1 < q_2) = P\left(\frac{q_1}{Y_1} < \theta < \frac{q_2}{Y_1}\right)$$

于是期望区间长度为$l = \mathbb{E}\left[\frac{q_2}{Y_1} - \frac{q_1}{Y_1}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{Y_1}\right](q_2 - q_1)$，由于 $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y_1}\right] > 0$，于是最小化 $l \iff$ 最小化 $q_2 - q_1$，转化为求解极小化问题

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = q_2 - q_1, \\
s.t. \quad & \int_{q_1}^{q_2} n\mathrm{e}^{-nz}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-nq_1} - \mathrm{e}^{-nq_2} = 1-\alpha \\
& 0 \leqslant q_1 < q_2.
\end{aligned}$$

则 $q_1 = -\frac{1}{n}\log(1-\alpha+\mathrm{e}^{-nq_2})$，由于 $q_1 \geqslant 0$ 代入可得 $q_2 \geqslant -\frac{1}{n}\log\alpha$ 且

$$z = q_1 + \frac{1}{n}\log(1-\alpha+\mathrm{e}^{-nq_2}),\ f'(q_2) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-nq_2}}{1-\alpha+\mathrm{e}^{-nq_2}} > 0$$

则 z 关于 q_2 单调递增，当 $q_2 = -\frac{1}{n}\log\alpha$ 时 z 有极小值，对应 $q_1 = 0$，于是 θ 的系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(0, -\frac{\log\alpha}{nY_1}\right)$$

题目 4. (18) 为了在正常耕作条件下测试两个新型杂交玉米品种，一家种子公司在 Iowa 选择了八个农场，并在每个农场的试验田里终止了两个新品种. 八个地点的产量为（换算为蒲式耳/英尺）

Line A:	86	87	56	93	84	93	75	79
Line B:	80	79	58	91	77	82	74	66

假设假设两个收益率满足联合正态分布，求解两个品种平均收益率之差满足系数为 95 的置信区间.

解答. 设品种 A, B 收益率对应的样本为 $X_1, \cdots, X_8$; $Y_1, \cdots, Y_8$，则 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_8, Y_8) \overset{iid}{\sim} N\left(\begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$，其中 $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$. 令 $D_i = X_i - Y_i$ 则 $D_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_D^2)$,

其中 $\sigma_D^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2$，则

$$\frac{\bar{D}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_D/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\ \frac{\sum_{i=1}^n(D-\bar{D})^2}{\sigma_D^2}=\frac{(n-1)S_D^2}{\sigma_D^2}\sim\chi^2(7)$$

于是 $\dfrac{\bar{D}-(\mu_1-\mu_2)}{S_D/\sqrt{n}}\sim t(7)$，则置信度为 95 的区间为

$$\left(\bar{D}-t_{0.975}(7)\frac{S_D}{\sqrt{8}},\bar{D}+t_{0.975}(7)\frac{S_D}{\sqrt{8}}\right)$$

由于 $D_i=6,8,-2,2,7,11,1,13$，则 $\bar{D}=5.75,\ S_D\approx 5.12$，查表可得 $t_{0.975}(7)\approx 2.365$，于是品种 A 与品种 B 收益率均值差的置信度为 95 的区间为 $(1.469,10.031)$.

题目 5. (中文书 3) $0.50,1.25,0.80,2.00$ 是取自总体 X 的样本，已知 $Y=\log X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1) 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间.

(2) 求 X 的数学期望的置信水平为 95% 的置信区间.

解答. (1) 由于 $Y_1,\cdots,Y_4\overset{iid}{\sim}N(\mu,1/4)$，则 $\bar{Y}\sim(\mu,1/4)$，于是 $\dfrac{\bar{Y}-\mu}{1/2}\sim N(0,1)$，设 $q_1,q_2\in\mathbb{R},\ q_1<q_2$ 满足

$$0.95=P(q_1<2(\bar{Y}-\mu)<q_2)=P\left(\bar{Y}-\frac{q_1}{2}<\mu<\bar{Y}-\frac{q_2}{2}\right)$$

由于正态分布是对称的，取 $q_2=-q_1=z_{0.975}\approx 1.96$ 时置信区间长度达到最小，且 $\bar{Y}=\dfrac{1}{4}\log(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot 2)=0$，则 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $(-0.98,0.98)$.

(2) 由于

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(\mathrm{e}^Y)&=\int_R\mathrm{e}^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\mathrm{e}^{y+\mu}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由于 $P(-0.98<\mu<0.98)\approx 0.95$，则 $P(\mathrm{e}^{-0.98+0.5}<\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}<\mathrm{e}^{0.98+0.5})\approx 0.95$，于是 $\mathbb{E}(X)$ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $(0.6188,4.3929)$.

题目 6. (中文书 5) 已知某种材料的抗压强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：

$$482\quad 493\quad 457\quad 471\quad 510\quad 446\quad 435\quad 418\quad 394\quad 469$$

(1) 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间.

(2) 若已知 $\sigma=30$，求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间.

(3) 求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间.

解答. (1) 由于 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}} \sim N(0,1)$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{9S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$，则

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\frac{\sigma\sqrt{9}}{\sqrt{9}S} = \sqrt{10}\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t(n-1)$$

设 $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, $q_1 < q_2$ 满足

$$\gamma = P\left(q_1 < \sqrt{10}\frac{\bar{X}-\mu}{S} < q_2\right) = P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{10}}q_2 < \mu < \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{10}}q_1\right)$$

由于 t 为对称分布，取 $q_2 = -q_1 = t_{0.975}(9) \approx 2.365$，$\bar{X} = 457.5$, $S = \sqrt{\dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{X})^2} \approx 35.2176$，则 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{10}}t_{0.975}(9), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{10}}t_{0.975}(9)\right) = (431.1615, 483.8385)$$

(2). 由于 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{30/\sqrt{10}} \sim N(0,1)$，设 $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, $q_1 < q_2$ 满足

$$\gamma = P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{30/\sqrt{10}} < q_2\right) = P\left(\bar{X} - \frac{30}{\sqrt{10}}q_2 < \mu < \bar{X} - \frac{30}{\sqrt{10}}q_1\right)$$

由于 $N(0,1)$ 为对称分布，取 $q_2 = -q_1 = z_{0.975} \approx 1.96$，$\mu$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{30}{\sqrt{10}}z_{0.975} < \mu < \bar{X} + \frac{30}{\sqrt{10}}z_{0.975}\right) = (438.9058, 476, 0.942)$$

(3). 由于 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{9S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$. 设 $q_1, q_2 \in [0,\infty)$, $q_1 < q_2$ 满足

$$\gamma = P\left(q_1 < \frac{9S^2}{\sigma^2} < q_2\right) = P\left(\frac{3S}{\sqrt{q_2}} < \sigma < \frac{3S}{\sqrt{q_1}}\right)$$

由于 χ^2 不是对称分布,考虑等尾分布:$q_1 = \chi^2_{0.025}(9) \approx 2.7$, $q_2 = \chi^2_{0.975}(9) \approx 19.023$, $S \approx 35.2176$，于是 σ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left(\frac{3S}{\sqrt{\chi^2_{0.975}(9)}}, \frac{3S}{\sqrt{\chi^2_{0.025}(9)}}\right) = (24.2237, 64.2982)$$

题目 7. (中文书 9) 设从总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1 = 10, n_2 = 15$ 的独立样本，计算可得 $\bar{x} = 82, s_x^2 = 56.5, \bar{y} = 76, s_y^2 = 52.4$.

(1) 若已知 $\sigma_1^2 = 64, \sigma_2^2 = 49$，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

(2) 若已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

(3) 若对 σ_1^2, σ_2^2 一无所知，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间.

(4) 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间.

解答. (1) 由于 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$，则 $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$，令 $q_1,q_2\in\mathbb{R}$, $q_1<q_2$，则

$$
\begin{aligned}
0.95 &= P\left(q_1<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<q_2\right)\\
&= P\left(\bar{X}-\bar{Y}-q_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\bar{X}-\bar{Y}-q_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)
\end{aligned}
$$

取 $q_2=-q_1=z_{0.975}\approx 1.96$，则置信水平为 95% 的置信区间为 $(-0.094,12.094)$.

(2) 令 $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$，由于 $U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma/n_1+\sigma/n_2}}\sim N(0,1)$，$V=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi(n_1+n_2-2)$，于是得到枢轴量 $U/\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}\sim t(n_1+n_2-2)$，于是取对称分布点 $t_{0.975}(23)\approx 2.069$，令 $S_p^2=\frac{9S_1^2+14S_2^2}{23}\approx 54$，于是可得到置信区间为 95% 的置信区间为

$$
\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{0.975}(23)S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+t_{0.975}(23)S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(-0.207,12.207)
$$

(3) 由于 n_1,n_2 较小，令 $S_k^2=\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\approx 9.143$，则有枢轴量 $T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_k}$ 近似服从分布 $t(r)$，其中 $r=\frac{S_k^4}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}\approx 19$，由于 $t_{0.975}(19)=2.093$，于是置信区间为 95% 的置信区间为

$$
(\bar{X}-\bar{Y}-t_{0.975}(19)S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+t_{0.975}(19)S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})=(-0.3288,12.3288)
$$

(4) 设 $T_1=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)$, $T_2=\frac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$，可得到枢轴量 $F=\frac{T_1/(n_1-1)}{T_2/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，由于 $F_{0.025}(9,14)=0.263,F_{0.975}(9,14)=3.2093$，于是置信水平为 95% 的置信区间为

$$
\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{0.025}(9,14),\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{0.975}(9,14)\right)=(0.2836,3.4604)
$$

题目 8. (中文书 14) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为来自正态分布 $N(\mu,16)$ 的简单随机样本，为使得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于给定的 L，试问样本容量 n 至少是多少?

解答. 由于 $\frac{\bar{X}-\mu}{4/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，于是

$$
P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{4/\sqrt{n}}<z_{1-\frac{\alpha}{2}})=P(\bar{X}-\frac{4}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{4}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}})
$$

于是 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间长度最小为 $\dfrac{8}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}$，则 n 应至少满足

$$\frac{8}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant L \Rightarrow n \geqslant \left\lceil \left(\frac{8z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L}\right)^2 \right\rceil$$ 向上取整