日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 3 月 21 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第三次作业

题目 1. 练习 3.1.1 从放射空间的定义出发，证明仿射空间中过不同两点有且仅有一条直线.

证明. 反设，存在两条不同的直线 l_1, l_2 分别过 A, B 两点，则 $\forall k, p \in \mathbb{R}$，$\exists X \in l_1, Y \in l_2$，使得 $\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AY} = p\overrightarrow{AB}$，令 $k = p$. 则 $\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY}$，由仿射空间的定义可知，$X = Y$，又由于 k 的任意性可知 $l_1 = l_2$. □

题目 2. 练习 3.1.4 设三位仿射空间中有仿射坐标系 $\mathcal{A} = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. 设某两点 P 的坐标为 $(1, 2, 1)$，O' 的坐标为 $(2, 1, -1)$. 计算 O 在坐标系 $\{P, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 中的坐标和 P 在坐标系 $\{O', \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 中的坐标.

解答. 在 $\mathcal{A}$ 中，$OP = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 且 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 O 在 $\{P, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 中坐标为 $(-1, -2, -1)\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = (-1, -1, -1)$.

由于 O' 在 $\mathcal{A}$ 中表示为 $OO' = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ 且 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 P 在 $\{O', \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 中的坐标为

$$\Big[(1,2,1) - (2,1,-1)\Big]\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = (-1, 1, 2)\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = (-1, 0, 2)$$

题目 3. 练习 3.2.1 设 $\mathscr{A}^3$ 上有四个点 A_1, A_2, A_3, A_4，其坐标分别为 $(x_i^1, x_i^2, x_i^3), i = 1, 2, 3, 4$，定义

$$\lambda = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^3 |x_1^j - x_2^j|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 |x_3^j - x_4^j|^2}}$$

在什么条件下，λ 是仿射几何量.

解答. 设任意一个仿射坐标系为 $\mathcal{A} = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，条件为 A_1, A_2, A_3, A_4 在同一条直线 $l : \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ 上，其中 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$，设 $A_i = \boldsymbol{x_0} + t_i\boldsymbol{v}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$，于是

$$\lambda = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^3 |x_1^j - x_2^j|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 |x_3^j - x_4^j|^2}} = \frac{||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2||_2}{||\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4||_2} = \frac{|t_1 - t_2| \cdot ||\boldsymbol{v}||_2}{|t_3 - t_4| \cdot ||\boldsymbol{v}||_2} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_3 - t_4|}$$

λ 与仿射坐标系 $\mathcal{A}$ 无关，所以 λ 是仿射几何量.

题目 4. 练习 3.3.1 设 X,Y 为两个集合，$f:X\to Y$ 为一个映射. 证明下述性质：

(1) 设 Λ 为一个指标集，$A_\alpha\subset Y$，则

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(A_\alpha)$$

(2)

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(A_\alpha)$$

证明. (1) 只需证明相互包含即可，如下可证

$$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)\Leftrightarrow f(x)\in A_\alpha,\ (\forall\alpha\in\Lambda)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A_\alpha),\ (\forall\alpha\in\Lambda)\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(A_\alpha)$$

(2) 只需证明相互包含即可，如下可证

$$x\in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)\Leftrightarrow\exists\alpha_0\in\Lambda,\ f(x)\in A_{\alpha_0}\Leftrightarrow\exists\alpha_0\in\Lambda,\ x\in f^{-1}(A_\alpha)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(A_\alpha)$$

□

题目 5. 练习 3.3.2 根据上述性质证明在定义 3.4 中引入的开集族构成一个拓扑.

证明. 在拓扑空间 $\mathscr{A}^n$ 中，任取一拓扑坐标系 $\mathcal{A}=\{O,\boldsymbol{e}_i\}$，设开集族全体构成集合 τ，于是

$$\tau=\{U\subset\mathscr{A}^n:\varphi_{\mathcal{A}}(U)\text{为开集}\}$$

下面证明 $(\mathscr{A}^n,\tau)$ 构成 $\mathscr{A}^n$ 的一个拓扑空间：

(1). 由于 $\varphi_{\mathcal{A}}(\mathscr{A}^n)=\mathbb{R}^n,\ \varphi_{\mathcal{A}}(\varnothing)=\varnothing$，且 $\mathbb{R}^n,\varnothing$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，故 $\mathscr{A}^n,\varnothing\in\tau$.

(2). $\forall\{U_1,\cdots,U_n,\cdots\}\subset\tau$，由于 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 为同胚映射，令上一题中 $f^{-1}=\varphi_{\mathcal{A}}$，由于 $\varphi_{\mathcal{A}}(U_n)$ 为开集和开集的性质可知

$$\varphi_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi_{\mathcal{A}}(U_i)$$

为开集，则 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\in\tau$.

(3). $\forall n\in\mathbb{N}$，$\{U_1,\cdots,U_n\}\subset\tau$，类似 (2) 和上题结论，且 $\varphi_{\mathcal{A}}(U_i)$ 为开集和开集的性质可知

$$\varphi_{\mathcal{A}}\left(\bigcap_{i=1}^{n}U_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\varphi_{\mathcal{A}}(U_i)$$

为开集，则 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau$.

综上，$(\mathscr{A}^n,\tau)$ 是 $\mathscr{A}^n$ 的一个拓扑空间. □