日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 3 月 5 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第一次作业

题目 1. 证明下面恒等式：

1. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$
2. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0$
3. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2$

证明. 1.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= a\cdot(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))\\ &\xlongequal{\text{二重向量积}} \boldsymbol{a}\cdot((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d})\\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\ \xlongequal{\text{二重向量积}}\ &(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\\ \xlongequal{\text{内积交换律}}\ &0\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\ =\ &(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\left[((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\right]\\ \xlongequal{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0}\ &[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}][(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\\ =\ &(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2\end{aligned}$$

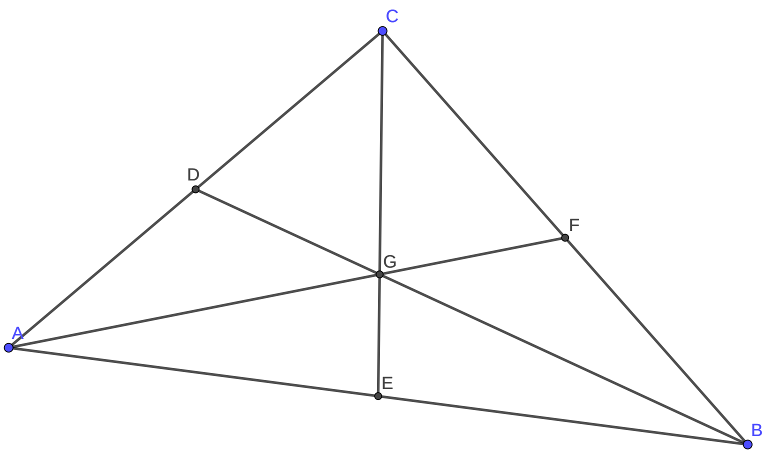
□

题目 2. 采用向量方法证明：

1. 平面上三角形的三条中线交于一点，这点分中线为 1:2 两部分，称为三角形的重心.
2. 空间中四面体的顶点到对面三角形的重心的连线称为四面体的中线. 证明四条中线相交于同一个点，称为四面体的重心，并且重心分中线为 1:3 两个部分.

解答.

1. 以右图三角形 $\triangle ABC$ 为例，D, E, F 为三边的中点，则 G 为三条重心，设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 下证 G 为 AF 的三等分点，由于 $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$，$\overrightarrow{CE} = \dfrac{\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}}{2}$，设 $|AG|:|AF| = \alpha, |CG|:|CE| = \beta$，于是



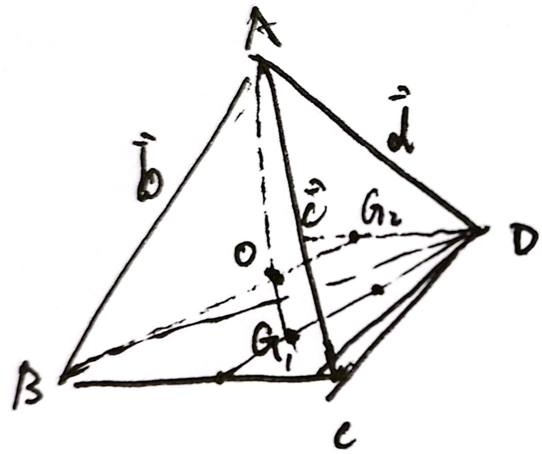
$$\alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$$

也就是

$$\alpha\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}+\beta 2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}2=\boldsymbol{b}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=0,\\ \alpha+2\beta=2\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{2}{3}$$

于是 G 时 AF 的三等分点，类似地，可以证明 G 是 BD，CE 的三等分点.

2. 以右图四面体 $ABCD$ 为例，G_1 为 $\triangle BCD$ 的重心，G_2 为 $\triangle ACD$ 的重心，设



$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},\ \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d}$$

则 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{CD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$，于是

$$\overrightarrow{DG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d})$$
$$\overrightarrow{DG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$$

则

$$\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG_1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),\quad \overrightarrow{BG_2}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG_2}=-\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$$

假设存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，使得 $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AG_1}+\beta\overrightarrow{G_2B}$，于是

$$\frac{\alpha}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+\beta\boldsymbol{b}-\frac{\beta}{3}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}\Rightarrow\begin{cases}\alpha/3+\beta=1\\ \alpha/3=\beta/3\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{3}{4}$$

故四面体重心是其中线的四等分点.