| 日期 | 科目 | 班级 | 姓名 | 学号 |
|---|---|---|---|---|
| 2023 年 5 月 11 日 | 微分几何 | 强基数学 002 | 吴天阳 | 2204210460 |

# 第七次作业

**题目 1. 5.3 练习 1.** 设 $a_i x^i = 0$ 为 $\mathbb{E}^3$ 上标准坐标系 $\{O, e_i\}$ 的一个平面. 当 $a_1 \neq 0$ 时, 平面有参数化

$$x^1 = -\frac{1}{a_1}(a_2x^2 + a_3x^3),\ x^2 = x^2,\ x^3 = x^3$$

其中 $(x^2, x^3)$ 为参数. 求证在这个在参数标架下 $\Gamma_{ij}^k = 0$.

证明. 由于 $\partial_2 = (-a_2/a_1, 1, 0)$, $\partial_3 = (-a_3/a_1, 0, 1)$，于是

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} (\partial_2, \partial_2) & (\partial_2, \partial_3) \\ (\partial_3, \partial_2) & (\partial_3, \partial_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2}\begin{bmatrix} a_2^2 & a_2a_3 \\ a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

于是 $\partial_k \boldsymbol{g}_{ij} = 0$，由 $\Gamma_{ij}^k$ 的计算式可知 $\Gamma_{ij}^k = 0$. □

**题目 2. 5.11 练习 1.** 求证，直线段是所在平面的测地线，反之平面的测地线一定是直线段.

证明. 设三维空间中的平面为 $a_ix^i = 0$，于是可以在 $x^2, x^3$ 参数标架下表出 $x^1 = -\frac{1}{a_1}(a_2x^2 + a_3x^3)$，由上题可知，$\Gamma_{ij}^k = 0$. 假设任意一条从原点 $(0,0)$ 开始，初始速度为 $(\partial_2, \partial_3)$ 的测地线 $y(x_2(t), x_3(t))$，即初值条件为 $y(0) = (0,0), \dot{y}(0) = (1,1)$，于是求解测地线方程可得

$$\begin{cases} \ddot{y}^1 = 0, \\ \ddot{y}^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^1(t) = t, \\ y^2(t) = t. \end{cases}$$

则 $y(x^2(t), x^3(t)) = (t,t) \Rightarrow y(t) = (-\frac{a_2+a_3}{a_1}t, t, t)$，就是三维空间中的直线，通过平移可将原点平移到三维空间中任意一点，给定测地线终点，上式说明三维平面的测地线一定是一条线段.

由弧长变分可知，三维平面上的测地线一定是线段. □

**题目 3. 5.11 练习 2.** 求证，大圆是球面的测地线，反之，球面上的测地线一定是大圆.

证明. 由 5.1 的练习 2 可知，考虑三维空间中的单位球在 $(1,0,0)$ 附近的参数化：

$$x^1 = \cos\theta\sin(\pi/2+\varphi),\ x^2 = \sin\theta\sin(\pi/2+\varphi),\ x^3 = \cos(\pi/2+\varphi)$$

设测地线为 $y(\theta(t), \varphi(t))$，在参数 $(\theta, \varphi)$ 标架下可得测地线方程

$$\begin{cases} \tan(\pi/2+\varphi(t))\ddot{y}^1 + 2\dot{y}^1\dot{y}^2 = 0, \\ \ddot{y}^2 - \frac{1}{2}\sin(\pi+2\varphi)\dot{y}^1\dot{y}^1 = 0. \end{cases}$$

给定初始条件 $y(0) = (0,0)$, $\dot{y}(0) = (1,0)$，可解得 $y = (t, 0) = (\cos t, \sin t, 0)$. 这表明在单位球上从 $(1,0,0)$ 开始，初速度为 $(\partial_\theta, 0)$ 的质点，运动轨迹就是 $xOy$ 平面上的单位圆. 可以通过平移旋转使得初始状态达到单位单位球上任意一点，通过等比例缩放从单位球得到任意球，从而可以说明大圆就是球的测地线.

由弧长变分可知，球上的测地线一定是大圆. □

**题目 4. 6.2 练习 1.** 通过计算说明圆柱面的第二基本形式不为零，这就是它不是外蕴意义下的平面的原因.

**解答.** 设三维空间中的圆柱面方程为 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = z$，法向量为 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\partial_\theta \times \partial_z}{||\partial_\theta \times \partial_z||} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 于是 $(1, 0, 0)$ 在 $(\theta, z)$ 的局部参数化下的第二基本形式为

$$\Pi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial\theta^2}, \frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial\theta^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right) \cdot \boldsymbol{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0) = -1 \neq 0$$

所以圆柱面不是外蕴意义下的平面.

**题目 5.** 证明：曲面的第二基本形式与具体的标准正交坐标系无关.

*证明.* 设曲面上切向量场 $X, Y$ 在标准坐标系 $\{O, e_i\}$，令 $Y = Y^i e_i$，假设 $\{O', e_i'\}$ 为另一个标准正交坐标系，则存在可逆矩阵 $T$ 且 $|T| = 1$，使得 $Z^i e_i' = T(Y^i e_i)$，于是

$$\Pi(X, Z) = (\partial_X Z^i e_i')_\perp = [\partial_X T(Y^i e_i)]_\perp = |T| \cdot (\partial_X Y^i e_i)_\perp = \Pi(X, Y)$$

说明曲面的第二基本形式与具体的标准正交坐标系选取无关. □