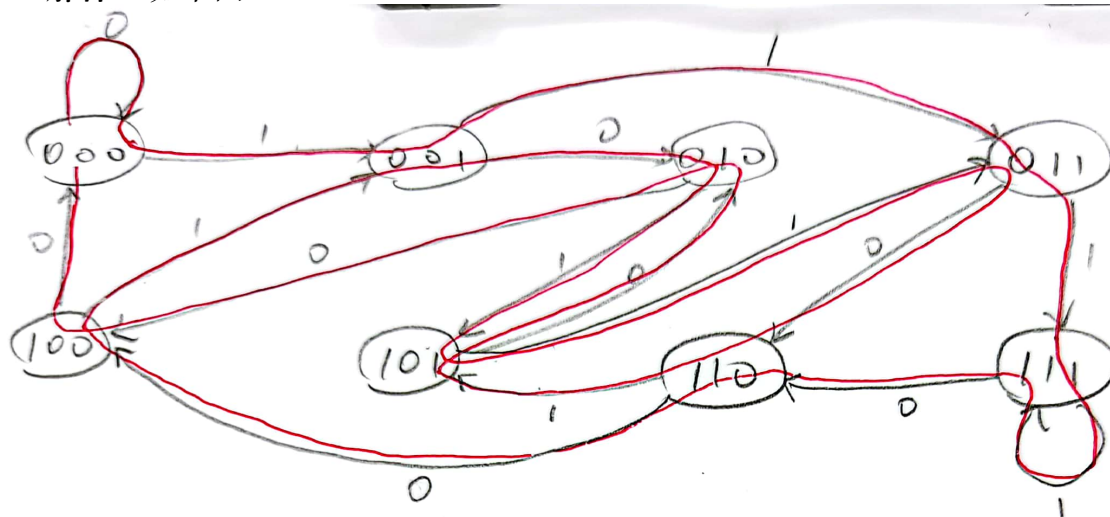


## 习题八

21. 解答. 如下图



0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0

24. 解答. 如下图, 由于删去  $S$  集合中的点, 导致 (a) 图中的连通支数为  $5 > |S| = 4$ , 所以 (a) 图没有 Hamilton 圈。

由于删去  $S$  集合中的点, 导致 (b) 图中的连通支数为  $8 > |S| + 1 = 6 + 1$ , 所以 (b) 图没有 Hamilton 路。

24. 证明图 8.99 的图示中 (a) 图没有 Hamilton 圈, (b) 图没有 Hamilton 路。

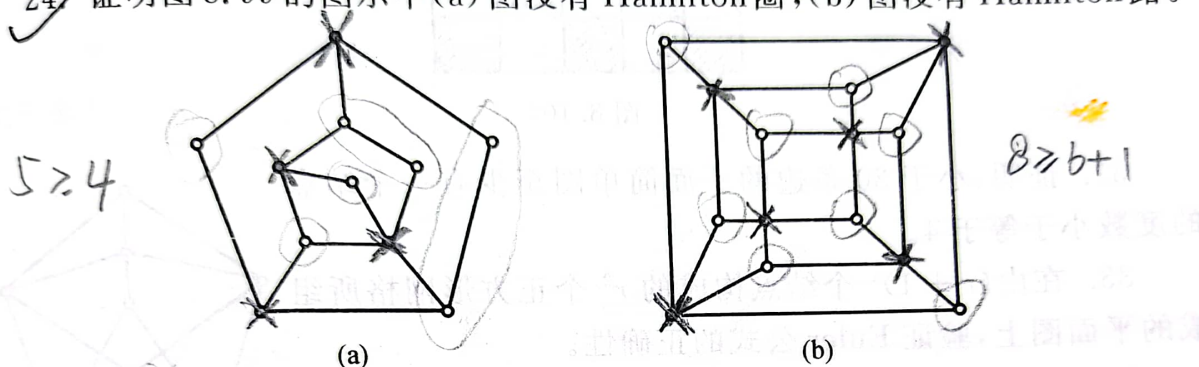


图 8.99

25. 解答. 如下图

英语: A, 汉语: C, 意大利语: I, 俄语: R, 日语: J, 德语: D, 法语: F

A: E

B: E, C

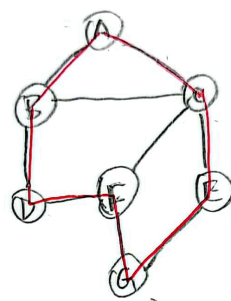
C: E, Y, R

D: C, J

E: Y, D

F: F, J, R

G: D, F



存在:  
ABDFGEC

26. 解答. 将每个人视为一个点, 则一共有  $n$  个点, 如果两个人认识, 则在两个人之间连一条边, 则对任意的两个结点  $u, v$ , 都有  $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 2$ , 下证利用两个人可以认识其他所有人这个条件可以推出  $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$ , 讨论  $u, v$  之间有无边相连,

1.  $u, v$  两个结点间存在连边, 则  $\deg(u) + \deg(v) = n \geq n - 1$ , 命题成立。

2.  $u, v$  两个结点间不存在连边, 则存在和  $v$  连接的结点  $w$ , 使得  $w$  与  $u$  之间没有连边, 对于结点  $v, w$ , 由于  $u$  结点都没有直接连边, 所以他们合起来也不认识  $u$  与条件矛盾。

综上, 对于任意两个结点  $u, v$ , 有  $\deg(u) + \deg(v) = n \geq n - 1$  成立, 所以图中存在一个 *Hamilton* 路, 使得所有人按照该路径排成一条, 满足题意。

28.

证明. 设二分图  $G$  对所有结点划分为  $n_1, n_2$  个结点, 则  $n_1 + n_2 = n$ , 由于  $G$  为二分图, 则  $m \leq n_1 n_2 = (n - n_2) n_2$ , 由于当  $n_2 = \frac{n}{2}$  时,  $(n - n_2) n_2$  有最大值为  $\frac{n^2}{4}$ , 故

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$

□

**30. 解答.** 不存在完美匹配, 因为总结点数为奇数个, 故不存在匹配  $M$ , 使得  $|M| = |V_1| = |V_2|$  成立。

利用贪心的思路, 容易看出一个最大匹配:

$$M = \{(v_1, u_2), (v_2, u_1), (v_3, u_4), (v_4, u_3)\}$$

**31. 解答.** 不存在这样的路线, 因为, 如果走完 25 间房间, 一共移动 24 次, 为偶数次, 由于每移动一次颜色发生变化, 所以入口的颜色与出口的颜色必定相同, 而该题入口与出口颜色不同, 所以一定不存在这样的路径。