日期	科目	姓名，学号
2022 年 3 月 7 日	实变函数	吴天阳 2204210460

习题 1.1

3. (i) 等式 $(A-B)\cup C = A-(B-C)$ 成立的充要条件是什么?

(ii) 证明:

$$(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$$

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$$

解答. 记 $A\cap B = AB$。

(i).

$$
\begin{aligned}
& (A-B)\cup C = A-(B-C) \\
& (AB^c)\cup C = A(BC^c)^c \\
& (A\cup C)(B^c\cup C) = A(B^c\cup C) \\
\iff & \begin{cases} ((A\cup C)-A)(B^c\cup C) = \varnothing \\ (A-(A\cup C))(B^c\cup C) = \varnothing \Rightarrow \varnothing = \varnothing \end{cases} \\
\iff & \varnothing = ((A\cup C)-A)(B^c\cup C) = ((A\cup C)A^c)(B^c\cup C) \\
& = (A^cC)(B^c\cup C) = A^cB^cC\cup A^cC \\
\iff & \begin{cases} A^cB^cC = \varnothing \\ A^cC = \varnothing \end{cases} \\
\iff & C\subset A
\end{aligned}
$$

(ii).

$$
\begin{aligned}
(A-C)\cup(B-C) &= (AC^c)\cup(BC^c) \\
&= (A\cup B)C^c \\
&= (A\cup B)-C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A-(B\cup C) &= A(B\cup C)^c \\
&= A(B^c\cap C^c) \\
&= (AB^c)\cap(AC^c) \\
&= (A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

5. 设 $\{A_n\}$ 是一列集，

(i) 作 $B_1 = A_1, B_n = A_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\ (n > 1)$。证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集，而且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

(ii) 如果 $\{A_n\}$ 是单调减少的集列，那么

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i),$$

并且其中各项互不相交。

解答. (i) 对于 $\forall n \geqslant 1$，根据 B_n 的定义知，$B_n \subset A_n$，且

$$\begin{aligned} B_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) &= \varnothing \\ \Rightarrow B_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\right) &= \varnothing \end{aligned}$$

则 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集。

下面用归纳法证明

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

当 $n = 1$ 时，$A_1 = B_1$ 成立。

假设命题在 k 时成立，下面讨论 $k+1$ 的情况，

$$\begin{aligned} B_{k+1} = A_{k+1} - \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = A_{k+1} - \bigcup_{i=1}^{k} B_i \\ \Rightarrow A_{k+1} \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \\ \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \end{aligned}$$

又由于 $B_i \subset A_i$，则

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$$

得，

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$$

由数学归纳法知，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) 记 $B=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)$，

$\forall x\in A_1$，若 $\exists i\geqslant 1$，使得 $x\in A_i$，且 $x\notin A_{i+1}$，则 $x\in A_i-A_{i+1}\subset B$；否则 $\forall i\geqslant 1$，有 $x\in A_i$，则 $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\subset B$。故 $A\subset B$。

由于 $\{A_n\}$ 单调减小，则 $B\subset A$。综上，$A=B$。

对于任意的 $i,j\ (i<j)$，由于 $A_j\subset A_{i+1}$，则 $A_j\cap A_iA_{i+1}^c=\varnothing$，则

$$(A_i-A_{i+1})\cap(A_j-A_{j+1})\subset(A_iA_{i+1}^c)\cap A_j=\varnothing$$

由于 $A_{i+2}\subset A_{i+1}$，则

$$\begin{aligned}A_{i+2}\cap(A_i-A_{i+1})&=\varnothing\\ \Rightarrow\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cap(A_i-A_{i+1})&=\varnothing\end{aligned}$$

所以，B 中各项互不相交。

6. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\frac{1}{n}\right),A_{2n}=(0,n)$，$n=1,2,3,\cdots$，求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集。

解答. 通过上下极限定义可知，

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=(0,+\infty)$$

$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\varnothing$$

8. 证明：(i) $A\triangle B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$;

(ii) $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$;

(iii) $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$;

(iv) $A\triangle B=\{x:\chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$.

解答. 记 $A\cap B=AB$，全集为 X。

(i)

$$\begin{aligned}A\triangle B&=(A-B)\cup(B-A)\\&=(AB^c)\cup(BA^c)\\&=(AB^c)\cup(A^cB)\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
(A\triangle B)\cup(AB) &= (AB^c)\cup(A^cB)\cup(AB)\\
&= (AB^c)\cup((A^cB)\cup(AB))\\
&= (AB^c)\cup(X(A^c\cup B)(A\cup B)B)\\
&= (AB^c)\cup B\\
&= (A\cup B)X\\
&= A\cup B
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
&x\in AB^c, \text{则}\chi_{A\triangle B}(x)=1=|1-0|=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|\\
&x\in A^cB, \text{则}\chi_{A\triangle B}(x)=1=|0-1|=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|\\
&x\in A\cap B, \text{则}\chi_{A\triangle B}(x)=0=|1-1|=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|\\
&x\in (A\cup B)^c, \text{则}\chi_{A\triangle B}(x)=0=|0-0|=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|\\
\Rightarrow&\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
A\triangle B &= \{x:\chi_{A\triangle B}(x)=1\}\\
&= \{x:|\chi_A(x)-\chi_B(x)|=1\}\\
&= \{x:\chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}
\end{aligned}
$$

10. 设集 E 上的实函数列 $\{f_n\}$ 及 f 具有性质 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。证明

$$
E(f\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)=\lim_{n\to\infty}E(f_n\leqslant c).
$$

证明. 令 $A_n=E(f_n\leqslant c)$，由于 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，则 $A_{n+1}\subset A_n$，$\{A_n\}$ 为单调下降集列，所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\\
\Rightarrow\lim_{n\to\infty}E(f_n\leqslant c) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\lim_{n\to\infty}E(f_n\leqslant c)=\lim_{n\to\infty}\{x\in E:f_n(x)\leqslant c\}=\{x\in E:f(x)\leqslant c)=E(f\leqslant c)
$$

故

$$E(f \leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c)=\lim_{n\to\infty} E(f_n \leqslant c).$$

$\square$

12. 设 X 是固定的集，$A\subset X$，$\chi_A(x)$ 是集 A 的特征函数，证明：

(i) $A=X$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 1, A=\varnothing$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 0$；

(ii) $A\subset B$ 等价于 $\chi_A(x)\leqslant \chi_B(x)$；$A=B$ 等价于 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$；

(iii) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N} A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$；$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N} A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$；

(iv) 设 $\{A_n\}$ 是一列集，那么极限 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$ 存在，而且当极限存在时，有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x).$$

证明. (i) $\forall x\in X$，由于 $A=X$，则 $x\in A \iff \chi_A(x)=1$，由 x 的任意性知，$\chi_A(x)\equiv 1$。

$\forall x\in X$，由于 $A=\varnothing$，则 $x\notin A \iff \chi_A(x)=0$，由 x 的任意性知，$\chi_A(x)\equiv 0$。

(ii) $A\subset B \iff \forall x\in A, x\in B \iff \forall x\in A, \chi_A(x)=\chi_B(x) \iff \forall x\in X, \chi_A(x)\leqslant \chi_B(x)$。

$A=B \iff A\subset B\text{且}B\subset A \iff \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)\text{且}\chi_A(x)\geqslant\chi_B(x) \iff \chi_A(x)=\chi_B(x)$。

(iii) 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in N}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，当 $n=2$ 时，$\forall x\in A_1\cup A_2$，有 $\chi_{A_1}(x)=1$ 或 $\chi_{A_2}(x)=1$，则 $\chi_{A_1\cup A_2}=\max(\chi_{A_1}(x),\chi_{A_2}(x))$，由数学归纳法知，

$$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N} A_\alpha}(x)=\max_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$$

同理可得，

$$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N} A_\alpha}(x)=\min_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$$

(iv). $\forall x\in \overline{\lim} A_n$，当且仅当，$x$ 属于无穷多项 $A_{n_1},A_{n_2},\cdots,A_{n_k},\cdots$ 中，所以有

$$\chi_{\overline{\lim} A_n}=\overline{\lim}\chi_{A_n}$$

同理可得，

$$\chi_{\underline{\lim} A_n}=\underline{\lim}\chi_{A_n}$$

所以，

$$\begin{aligned}\lim A_n\text{存在} &\iff \overline{\lim}A_n=\underline{\lim}A_n \iff \chi_{\overline{\lim}A_n}=\chi_{\overline{\lim}A_n}\\ &\iff \overline{\lim}\chi_{A_n}=\underline{\lim}\chi_{A_n} \iff \lim\chi_{A_n}\text{存在}\end{aligned}$$

由 $\underline{\lim}A_n\subset \lim A_n\subset \overline{\lim}A_n$，知

$$\underline{\lim}\chi_{A_n}=\chi_{\underline{\lim}A_n}\leqslant \chi_{\lim A_n}\leqslant \chi_{\overline{\lim}A_n}=\overline{\lim}\chi_{A_n}$$

由夹逼定理知，当极限存在时，有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n} = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}$$

□

14. 设 F, E_1 及 E_2 是 X 的任意三个子集，记 $F_1 = F \cap (E_1 \cap E_2^c)^c$，证明：

(i) $F_1 \cap E_1 \cap E_2 = F \cap E_1 \cap E_2$;

(ii) $F_1 \cap E_1 \cap E_2^c = \varnothing$;

(iii) $F_1 \cap E_1^c \cap E_2 = F \cap E_1^c \cap E_2$;

(iv) $F_1 \cap E_1^c \cap E_2^c = F \cap E_1^c \cap E_2^c$.

证明. $F_1 = F \cap (E_1 \cap E_2^c)^c = F \cap (E_1^c \cup E_2)$

(i)

$$\begin{aligned} F_1 \cap E_1 \cap E_2 =& F \cap (E_1^c \cup E_2) \cap E_1 \cap E_2 \\ \xlongequal{E_2 \subset (E_1^c \cup E_2)}& F \cap E_1 \cap E_2 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} F_1 \cap E_1 \cap E_2^c =& F \cap (E_1^c \cup E_2) \cap E_1 \cap E_2^c \\ =& F \cap (E_1^c \cup E_2) \cap (E_1^c \cup E_2)^c \\ =& F \cap \varnothing = \varnothing \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} F_1 \cap E_1^c \cap E_2 =& F \cap (E_1^c \cup E_2) \cap E_1^c \cap E_2 \\ \xlongequal{E_2 \subset (E_1^c \cup E_2)}& F \cap E_1^c \cap E_2 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} F_1 \cap E_1^c \cap E_2^c =& F \cap (E_1^c \cup E_2) \cap E_1^c \cap E_2^c \\ \xlongequal{E_1^c \subset (E_1^c \cup E_2)}& F \cap E_1^c \cap E_2^c \end{aligned}$$

□