

## 第六章

66. 解答. 方程组:

$$\begin{cases} x \oplus (c \otimes y) = a & (1) \\ (c \otimes x) \oplus y = b & (2) \end{cases}$$

对 (1) 进行变化:

$$x = a \oplus (-c \otimes y) \quad (3)$$

将 (3) 代入 (2) 中, 得

$$\begin{aligned} (c \otimes (a \oplus (-c \otimes y))) \oplus y &= b \\ c \otimes a \oplus c \otimes (-c \otimes y) \oplus y &= b \\ c \otimes a \oplus (-c^2 \otimes y) \oplus y &= b \\ (-c^2 \oplus 1) \otimes y &= b \oplus (-c \otimes a) \end{aligned}$$

当  $c = 1$  时,  $a = b$ , 则  $x \oplus y = a$ , 无唯一解。

当  $c = -1$  时,  $a = -b$ , 则  $x \oplus (-y) = a$ , 无唯一解。

当  $c \neq \pm 1$  时, 则  $y = (b \oplus (-c \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1}$ , 则有

$$\begin{aligned} x &= a \oplus (-c \otimes (b \oplus (-c \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1}) \\ &= a \oplus (-(b \otimes c \oplus (-c^2 \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1}) \\ &= (a \oplus (-a \otimes c^2) \oplus (-b \otimes c) \oplus (c^2 \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \\ &= (a \oplus (-b \otimes c)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} x = (a \oplus (-b \otimes c)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \\ y = (b \oplus (-c \otimes a)) \otimes (-c^2 \oplus 1)^{-1} \end{cases}$$

67. 解答. 不一定. 设域为实数域,  $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ , 取

$$R = \{\text{所有偶数}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

则  $\langle R, +, \times \rangle$  构成环, 所以  $\langle R, +, \times \rangle$  是  $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$  的子环, 但  $1 \notin R$ , 所以  $R$  中没有幺元, 故  $R$  不是整环。

68. 解答. (1). 不是, 因为  $-1 \notin X$ , 所以  $1 \in X$  没有关于  $\oplus$  的逆元, 故  $\langle X, +, \times \rangle$  不是域。

(2). 是, 由上次作业 60.(5) 题知,  $\langle X, +, \times \rangle$  构成整环, 则只需证明  $\forall a + b\sqrt{3} \in X$  都有逆元即可, 由于

$$(a + b\sqrt{3}) \frac{(a - b\sqrt{3})}{a^2 - 3b^2} = 1$$
$$\frac{(a - b\sqrt{3})}{a^2 - 3b^2} (a + b\sqrt{3}) = 1$$

假设  $a^2 - 3b^2 = 0$ , 则  $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ , 由于  $a, b \in \mathbb{Q}$ , 则  $\sqrt{3}$  是有理数, 与  $\sqrt{3}$  为无理数矛盾, 所以  $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a + b\sqrt{3}$  都有逆元, 故  $\langle X, +, \times \rangle$  是域。

(3). 不是, 由于  $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25} \notin X$ , 所以  $\langle X, +, \times \rangle$  不是域。

(4). 是, 证明方式同本题的 (2)。

(5). 不是, 因为  $a \neq kb$ , 所以  $1 \notin X$ , 则  $X$  无幺元, 故  $\langle X, +, \times \rangle$  不是域。

69.

证明. 由于:

1.  $S_1 \subset F$  且  $S_2 \subset F$ , 则  $S_1 \cap S_2 \subset F$
2.  $\langle S_1, \oplus \rangle, \langle S_2, \oplus \rangle$  为 Abel 群, 则  $\langle S_1 \cap S_2, \oplus \rangle$  为 Abel 群
3.  $\langle S_1 \setminus \{0\}, \otimes \rangle, \langle S_2 \setminus \{0\}, \otimes \rangle$  为 Abel 群, 则  $\langle S_1 \cap S_2 \setminus \{0\}, \otimes \rangle$  为 Abel 群
4.  $\otimes, \oplus$  为域  $F$  中的运算, 则满足分配律, 所以  $S_1 \cap S_2$  中的  $\otimes$  对  $\oplus$  运算满足分配律。

综上,  $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$  是  $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$  的子域。

□