日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 4 月 9 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第五次作业

题目 1. 3.7 练习 1. 证明命题 3.6 的逆命题也成立，即如果一条仿射空间中的曲线在其每个点附近都可以被某个广义坐标系的映射映射为 $\mathbb{R}^3$ 中的连续/可微/光滑/正则曲线段，那么该曲线本身也是连续/可微/光滑/正则.

证明. 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathscr{A}^3$ 为 $\mathscr{A}^3$ 中的曲线，$A=\gamma(t_0)$, $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$U$ 为 A 在 $\mathscr{A}^3$ 中的邻域，存在广义坐标系 $\{U,\varphi_U\}$，坐标映射为 $\varphi_U:\mathscr{A}^3\to\{y^i\}$，则存在 ε' 使得

$$(t_0-\varepsilon',t_0+\varepsilon')\xrightarrow{\gamma}U\xrightarrow{\varphi_U}\varphi_U(U)\subset\mathbb{R}^3$$

连续/可微/光滑，且 $\varphi_U\circ\gamma$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的正则曲线.

设 $\mathcal{A}=\{O,\boldsymbol{e}_i\}$ 为仿射坐标系，坐标映射为 $\varphi_{\mathcal{A}}$，则

$$\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma=(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1})\circ(\varphi_U\circ\gamma)$$

由于 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\varphi_U^{-1}$ 是光滑映射，且 $\varphi_U\circ\gamma$ 连续/可微/光滑，于是 $\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma$ 是连续/可微/光滑映射，所以 γ 在 $\mathscr{A}^3$ 上连续.

由于

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)=\left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_{\varphi_U(\gamma(t))}\frac{\mathrm{d}(\varphi_U\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t),\quad t\in(t_0-\varepsilon',t_0+\varepsilon')$$

其中矩阵 $\left.\dfrac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_{\varphi_U(\gamma(t))}$ 非退化，且 $\dfrac{\mathrm{d}(\varphi_U\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)\neq0$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}(\varphi_{\mathcal{A}}\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)\neq0$，故 γ 为正则曲线. □

题目 2. 3.8 练习 1. 证明**定义 3.14** 中引入的关系 $\sim$ 是 $\mathcal{F}_A$ 上的一个等价关系，并证明**定义 3.15** 在 $\mathcal{F}_A/\sim$ 上定义的线性运算的合理性.

证明. 设 A 为 $\mathscr{A}^n$ 中的点，记 $\mathcal{F}_A$ 为定义在 A 附近的光滑函数全体，$\forall f,g,h\in\mathcal{F}_A$，设 D 为定义在 A 的导算子 D，定义关系如下

$$f\sim g\iff Df=Dg,\quad(\forall D\in\mathcal{F}_A)$$

下证其是一个等价关系：

1. 自反性：由于 $Df=Df$，则 $f\sim f$.
2. 对称性：由于 $Df=Dg=Df$，则 $f\sim g\iff g\sim f$.
3. 传递性：由于 $Df=Dg=Dh$，则 $f\sim g,g\sim h\iff f\sim h$.

综上，$f\sim g$ 是一个等价关系.

记 $\mathscr{F}_A=\mathcal{F}_A/\sim$ 为 A 点的余向量空间，函数 f 所在的等价类记为 $\bar f$，定义如下线性运算

$$\alpha\bar f+\beta\bar g=\overline{\alpha f+\beta g},\quad(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})\tag{1}$$

下证明上式与代表元选取无关：设 $\bar{f}_1=\bar{f}_2, f_1\neq f_2$，$\bar{g}_1=\bar{g}_2, g_1\neq g_2$，则

$$D(\alpha f_1+\beta g_1)=\alpha Df_1+\beta Dg_1=\alpha Df_2+\beta Dg_2=D(\alpha f_2+\beta g_2)$$

于是 $\overline{\alpha f_1+\beta g_1}=\overline{\alpha f_2+\beta g_2}$，故 (1) 式结果与代表元选取无关. □

题目 3. 3.8 练习 2. 证明 $\overline{fg}=g(A)\bar{f}+f(A)\bar{g}$.

证明. 由于 $D(fg)=f(A)Dg+Df\cdot g(A)=D(f(A)g+g(A)f)$，于是 $\overline{fg}=\overline{f(A)g+g(A)f}=f(A)\bar{g}+g(A)\bar{f}$. □

题目 4. 3.8 练习 3. 考虑 $\mathbb{R}^3\backslash r=0$ 或 $x^1=x^2=0$ 上的标准柱面坐标系：

$$x^1=r\cos\theta,\ x^2=r\sin\theta,\ x^3=z$$

在每个点写出自然余标架场，表出在 $(\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x^3)$ 这组基下.

解答. 由于

$$\begin{bmatrix}\partial r\\ \partial\theta\\ \partial z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial r}&\frac{\partial x^2}{\partial r}&\frac{\partial x^3}{\partial r}\\ \frac{\partial x^1}{\partial\theta}&\frac{\partial x^2}{\partial\theta}&\frac{\partial x^3}{\partial\theta}\\ \frac{\partial x^1}{\partial z}&\frac{\partial x^2}{\partial z}&\frac{\partial x^3}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\partial_1+\sin\theta\partial_2\\ -r\sin\theta\partial_1+r\cos\theta\partial_2\\ \partial_3\end{bmatrix}$$

由于 r,θ,z 可以视为 $\mathscr{A}^3$ 中的光滑函数，所以 $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z$ 是余向量空间中的元素，可以在 $\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x^3$ 中线性表出，令 $\mathrm{d}r=a\mathrm{d}x^1+b\mathrm{d}x^2+c\mathrm{d}x^3$，由对偶基的性质可知

$$\begin{cases}\langle\partial r,\mathrm{d}r\rangle=1,\\ \langle\partial\theta,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial z,\mathrm{d}r\rangle=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta a+\sin\theta b=1,\\ -r\sin\theta a+r\cos\theta b=0,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\cos\theta,\\ b=\sin\theta,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow\mathrm{d}r=\cos\theta\mathrm{d}x^1+\sin\theta\mathrm{d}x^2.$$

类似地，可以令 $\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}x^1+b\mathrm{d}x^2+c\mathrm{d}x^3$，由对偶基的性质可知

$$\begin{cases}\langle\partial r,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial\theta,\mathrm{d}r\rangle=1,\\ \langle\partial z,\mathrm{d}r\rangle=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta a+\sin\theta b=0,\\ -r\sin\theta a+r\cos\theta b=1,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\sin\theta/r,\\ b=\cos\theta/,\\ c=0.\end{cases}\Rightarrow\mathrm{d}\theta=\frac{1}{r}(-sin\theta\mathrm{d}x^1+\cos\theta\mathrm{d}x^2).$$

令 $\mathrm{d}z=a\mathrm{d}x^1+b\mathrm{d}x^2+c\mathrm{d}x^3$，由对偶基的性质可知

$$\begin{cases}\langle\partial r,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial\theta,\mathrm{d}r\rangle=0,\\ \langle\partial z,\mathrm{d}r\rangle=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta a+\sin\theta b=0,\\ -r\sin\theta a+r\cos\theta b=0,\\ c=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=0,\\ c=1.\end{cases}\Rightarrow\mathrm{d}z=\mathrm{d}x^3.$$

题目 5. 3.9 练习 1. 严格证明**引理 3.11**：设 V 为 n 维实线性空间，则 $\dim \mathrm{Sym}_2(V^*) = \dfrac{n(n+1)}{2}$，如果 $\{e_i\}$ 为 V 的一组基，那么

$$e^{*i}e^{*j} = \frac{1}{2}(e^{*i} \otimes e^{*j} + e^{*j} \otimes e^{*i}), \quad i \leqslant j$$

为 $\mathrm{Sym}_2(V^*)$ 的一组基.

题目 6. 3.9 练习 3. 求 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上的球坐标系

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x^3 = r\cos\theta$$

在每个点写出自然余标架场，在 $(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3)$ 下表出.

题目 7. 3.9 练习 4. 将 $\mathbb{R}^3$ 上的欧几里德度量表出在球坐标系的自然余标架场下.