日期	科目	姓名，学号
2021 年 10 月 29 日	离散数学	吴天阳 2204210460

习题六

1. 解答.

(1). 是

(2). 是

(3). 是

(4). 不是，因为 $1/2 \notin \mathbb{Z}$，所以 $(1, 2)$ 没有定义。

(5). 不是，因为 $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$，所以 $(2, -1)$ 没有定义。

(6). 不是，因为 $\sqrt[1]{2} \notin \mathbb{Z}$，所以 $(2, 1)$ 没有定义。

(7). 是

(8). 是

(9). 是

(10). 是

6. 解答. 观察表格知，a 是 X 上关于 $*$ 二元运算的幺元，则

元素	左逆元	右逆元
a	a	a
b	c, d	c
c	b, e	b, d
d	c	b
e	无	c

8. 解答.

满足结合律，先证明 $\mathrm{LCM}(x, y, z) = \mathrm{LCM}(\mathrm{LCM}(x, y), z)$，设 d 为 x, y, z 的公倍数，则 $x|d, y|d, z|d$，特别的，$\mathrm{LCM}(x, y)|d$，于是 d 为 $\mathrm{LCM}(x, y), z$ 的公倍数，因此，x, y, z 的公倍数是 $\mathrm{LCM}(x, y), z$ 的公倍数。反之亦然，比较两组数的公倍数中的最小者即可得证，所以

$$x * y * z = \mathrm{LCM}(x, y) * z = \mathrm{LCM}(\mathrm{LCM}(x, y), z) = \mathrm{LCM}(x, y, z)$$
$$= \mathrm{LCM}(x, \mathrm{LCM}(y, z)) = x * \mathrm{LCM}(y, z) = x * (y * z)$$

满足交换律，因为 x,y 的最小公倍数和 y,x 的最小公倍数相同，所以

$$x * y = \mathrm{LCM}(x,y) = \mathrm{LCM}(y,x) = y * x$$

存在幺元，且幺元为 0，因为 0 是任何正整数的因数，所以

$$x * 0 = 0 * x = \mathrm{LCM}(0,x) = x$$

不存在零元，反设存在零元 z，则 $z = (z+1) * z = \mathrm{LCM}(z+1,z) \geqslant z+1$，矛盾。
不存在逆元，$x \in \mathbb{N}^*$，对于 $\forall y \in \mathbb{N}$，$\mathrm{LCM}(x,y) \geqslant x > 0$，所以不存在逆元。

12. 解答.

对应于 S_1 的子关系：

$\oplus$	b	d
b	b	b
d	b	d

$\otimes$	b	d
b	b	d
d	d	d

则 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 的子代数系统。
对应于 S_2 的子关系：

$\oplus$	a	d
a	a	a
d	a	d

$\oplus$	a	d
a	a	d
d	d	d

则 $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 的子代数系统。
对应于 S_3 的子关系：

$\oplus$	b	c
b	b	a
c	a	c

$\oplus$	b	c
b	b	d
c	d	c

则 $\langle S_3, \oplus, \otimes \rangle$ 不是 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 的子代数系统，因为 $b \oplus c \notin S_3$。