日期	科目	班级	姓名	学号
2025 年 5 月 10 日	随机过程	人工智能 B2480	吴天阳	4124136039

第 12 周作业 Markov 链

题目 1. (P218 1.) 3 个白球和 3 个黑球分布在两个坛子中，每个含有 3 个球．如果第一个坛子中有 i 个白球，我们就称此系统处在状态 $i, i = 0, 1, 2, 3$．每次我们从坛子中取出一球，并将从第一个坛子中取出的球放到第二个坛子中，从第二个坛子取出的球放到第一个坛子中，以 X_n 记第 n 步后系统的状态．解释为什么 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是 Markov 链，并计算它的转移概率矩阵．

解答. Markov 性：每次交换操作仅和当前的坛子的状态决定，和历史中的坛子状态没有关系，因此满足 Markov 链性质．

当系统处于状态 i 时，第一个坛子有 i 个白球 $3-i$ 个黑球，第二个坛子有 $3-i$ 个白球 i 个黑球，因此第一个坛子取出白球和黑球概率分别为 $\dfrac{i}{3}$ 和 $\dfrac{3-i}{3}$，第二个坛子同理．则当 $i \in \{1, 2\}$ 时，状态转移分以下三种情况

- 同时取出白球或黑球 $P_{i,i} = \dfrac{2i(3-i)}{9}$;
- 第一和二个坛子分别取出白球和黑球 $P_{i,i-1} = \dfrac{i^2}{9}$;
- 第一和二个坛子分别取出黑球和白球 $P_{i,i+1} = \dfrac{(3-i)^2}{9}$.

而当 $i \in \{0, 3\}$ 时，仅能转移到相邻的状态上，综上，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

题目 2. P218 5. 一个状态为 $0, 1$ 或 2 的 Markov 链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$，它的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

如果 $\mathrm{P}(X_0 = 0) = \mathrm{P}(X_0 = 1) = 1/4$，求 $\mathbb{E}[X_3]$.

解答. 由 $C-K$ 方程可知，累计走 n 步的转移概率矩阵为

$$P^3 = P^{(3)} = \begin{bmatrix} 13/36 & 11/54 & 47/108 \\ 4/9 & 4/27 & 11/27 \\ 5/12 & 2/9 & 13/36 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2} \mathrm{P}(X_0 = i) P_{ij}^3 \cdot j = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} P^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{53}{54} \approx 0.98148148$$

题目 3.（P219 6.）令两个状态的 Markov 链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

用数学归纳法证明

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{bmatrix}$$

证明. 当 $n = 1$ 时，$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$ 成立.

$\forall k \in \mathbb{N}^+$，只需证 $P^{k+1} = P^k P$，令

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} A_{00} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k\right)p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k\right)p \\ &= (2p-1)^k p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k\right)p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k\right)p \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k - (2p-1)^k p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{k+1} \end{aligned}$$

同理可知 $A_{10} = A_{01}, A_{11} = A_{00}$，于是 $P^k P = A = P^{k+1}$，由归纳法可知原命题成立. □

题目 4.（P219 14.）指定如下 Markov 链的类，确定它们是否都是暂态或常返态.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解答. 如下图所示，可知 P_1 中 $\{1,2,3\}$ 为常返类，Markov 链不可约；P_2 中 $\{1,2,3,4\}$ 为常返类，Markov 链不可约；P_3 中 $\{1,3\},\{4,5\}$ 分别为常返类，$\{2\}$ 为暂态类；P_4 中 $\{1,2\},\{3\}$ 分别为常返类，$\{4\},\{5\}$ 为暂态类.

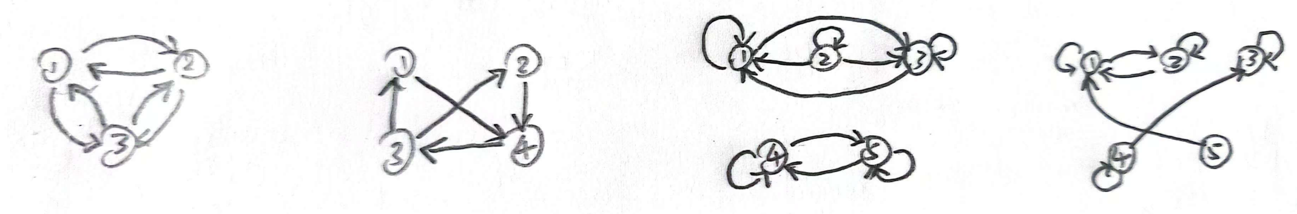

图 1: 状态之间的可达关系图

题目 5.（P220 16.） 证明若状态 i 为常返态，且状态 i 不与状态 j 互通，则 $P_{ij}=0$. 它说明一旦过程进入一个常返的状态类，它绝不会离开这个类. 因为这个原因，一个常返类常指一个闭的类.

证明. 反设 $P_{ij}>0$，由于 i 为常返态，根据常返态性质有 j 也为常返态，因此 i 与 j 互通，矛盾，原命题成立. $\square$

题目 6.（P220 18.） 硬币 1 正面朝上的概率为 0.6，而硬币 2 正面朝上的概率是 0.5. 一枚硬币连续地抛掷直到正面朝上，此时将这个硬币搁置一旁，我们开始抛掷另一枚.

(a) 用硬币 1 抛掷的比例是多少？

(b) 如果我们从抛掷硬币 1 开始，问第 5 次抛掷的是硬币 2 的概率是多少？

解答. (a) 考虑两个状态的 Markov 链，状态 1 表示当前抛掷硬币 1，状态 2 表示当前抛掷硬币 2，每次抛出正面后换硬币，则转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

求解长程比例（平稳分布）$\pi\in\mathbb{R}^2$ 满足 $\pi^T=\pi^T P,\pi_1+\pi_2=1$，解得 $\pi_1=\dfrac{5}{11},\pi_2=\dfrac{6}{11}$，则用硬币 1 抛掷的比例为 $\dfrac{5}{11}$.

(b) 求解 P 的特征值与特征向量：

$$|P-\lambda I|=\begin{vmatrix}0.4-\lambda & 0.6\\ 0.5 & 0.5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{9}{10}\lambda-\frac{1}{10}=0\Rightarrow(\lambda-1)(10\lambda+1)=0$$

特征值分别为 $1,-0.1$，分别求出左特征向量

$$\boldsymbol{x}_1^T(P-I)=0\Rightarrow\begin{cases}-0.6x_1+0.5x_2=0,\\ 0.6x_1-0.5x_2=0.\end{cases}\xrightarrow{\text{取特值}}\boldsymbol{x}_1=\left[\frac{5}{11},\frac{6}{11}\right]^T$$

$$\boldsymbol{x}_2^T(P-0.1I)=0 \Rightarrow \begin{cases} 0.5x_1+0.5x_2=0, \\ 0.6x_1+0.6x_2=0. \end{cases} \xrightarrow{\text{取特值}} \boldsymbol{x}_2=[1,-1]^T$$

初始状态分布为 $\boldsymbol{v}_0=[1,0]^T=\boldsymbol{x}_1+\frac{6}{11}\boldsymbol{x}_2$，则五次转移后的状态分布为

$$\boldsymbol{v}_5^T=\boldsymbol{v}_0^TP^5=\boldsymbol{x}_1+\frac{6}{11}\boldsymbol{x}_2\cdot 0.1^5$$

可得到达状态 2 的概率为

$$\frac{6}{11}+\frac{6}{11}(-1)0.1^5=\frac{6}{11}(1-0.1^5)\approx\frac{6}{11}\approx 0.5454545$$

题目 7. P220 20. 一个转移概率矩阵 P 称为双随机的，如果每一列的和为 1，即对于一切的 j，

$$\sum_i P_{ij}=1$$

如果这样的链是不可约和非周期的，并且由 $M+1$ 个状态 $0,1,\cdots,M$ 组成，证明长程比例为

$$\pi_j=\frac{1}{M+1},\quad j=0,1,\cdots,M$$

证明. $\forall i,j\in\{0,1,\cdots,M\}$

$$\sum_{i=0}^{M}\pi_iP_{ij}=\sum_{i=0}^{M}\left(\frac{1}{M+1}\right)P_{ij}=\frac{1}{M+1}\sum_{i=0}^{M}P_{ij}\xlongequal{P\text{每一列的和为}1}\frac{1}{M+1}=\pi_j$$

又由于 Markov 链是不可约且非周期的，根据 Perron-Frobenius 定理，存在唯一的长程比例 π_j. □

题目 8. P221 27. N 个总体中的任意一个个体在每个时段可能积极也可能消极. 如果一个个体在某个时段积极，那么与所有其他个体独立，他在下一个时段也积极的概率为 α. 类似地，如果一个个体在某个时段消极，那么与所有其他个体独立，他在下一个时段也消极的概率为 β. 令 X_n 表示在时段 n 积极的个体数.

(a) 证明 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是 Markov 链;

(b) 求 $\mathbb{E}[X_n|X_0=i]$;

(c) 推导转移概率的表达式;

(d) 求恰有 j 个个体积极的长程时间比例.

解答. (a) 由于每个个体的状态转移仅依赖于当前的状态，并且与其他个体独立，即 X_{n+1} 仅依赖于 X_n 的状态，满足 Markov 性，因此 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是 Markov 链.

(b) 由全期望公式可知

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}|X_0=i] &= \alpha\mathbb{E}[X_n|X_0=i]+(1-\beta)(N-\mathbb{E}[X_n|X_0=i]) \\
\text{（简记）}\Rightarrow \mathbb{E}_{n+1} &= (\alpha+\beta-1)\mathbb{E}_{n+1}+(1-\beta)N
\end{aligned}
$$

此为线性差分方程，解为齐次线性差分方程的通解和特解的和，其导出的齐次方程为 $\mathbb{E}_{n+1}=(\alpha+\beta-1)\mathbb{E}_n$，特征根 $\lambda=\alpha+\beta-1$，则齐次方程解为 $C(\alpha+\beta-1)^n$，将 E^* 带入求特解

$$
\mathbb{E}^*=(\alpha+\beta-1)\mathbb{E}^*+(1-\beta)N\Rightarrow E^*=\frac{(1-\beta)N}{2-\alpha-\beta}
$$

于是原线性差分方程解为 $\mathbb{E}_n=\mathbb{E}^*+C(\alpha+\beta-1)^n$，带入初始条件 $\mathbb{E}_0=i$，可得 $C=i-\mathbb{E}^*$.

综上

$$
\mathbb{E}[X_n|X_0=i]=\mathbb{E}^*+(i-\mathbb{E}^*)(\alpha+\beta-1)^n,\quad \text{其中 } \mathbb{E}^*=\frac{(1-\beta)N}{2-\alpha-\beta}
$$

(c) $\forall i,j\in\{0,1,\cdots,N\}$，$\forall k\leqslant \min\{i,j\}$ 表示连续两个状态保持积极的个体数，则从状态 i 到状态 j 的概率转移存在两种情况：k 个积极个体保持积极，概率为 $\binom{i}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{i-k}$；$j-k$ 个消极个体变为积极个体，概率为 $\binom{N-i}{j-k}\beta^{j-k}(1-\beta)^{N-i-(j-k)}$

综上，转移概率表达式为

$$
P_{ij}=\sum_{k=\max\{0,i+j-N\}}^{\min\{i,j\}}\binom{i}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{i-k}\binom{N-i}{j-k}\beta^{j-k}(1-\beta)^{N-i-(j-k)}
$$

(d) 由于每个个体独立，且在两个状态中进行转移，假设平稳分布为二项分布，在平稳分布下处于积极的概率为 p，则

$$
p=\alpha p+(1-\beta)(1-p)\Rightarrow p=\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}
$$

可得平稳分布为

$$
\pi_j=\binom{N}{j}\left(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)^j\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\right)^{N-j}
$$

题目 9. P222 30. 在公路上，每 4 辆货车中有 3 辆后面跟着一辆轿车，而每 5 辆轿车中只有一辆后面跟着一辆货车. 行驶在公路上的车辆中货车的比例是多少?

解答. 将该问题视为 Markov 过程，X_n 表示第 n 辆车的车型，其中状态 1 表示当前为货车，状态 2 表示当前为轿车，则转移概率矩阵为

$$
P=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4\\ 1/5 & 4/5\end{bmatrix}
$$

求解长程比例 $\pi\in\mathbb{R}^2$ 满足 $\pi^T=\pi^TP,\pi_1+\pi_2=1$，解得 $\pi_1=\dfrac{4}{19}$，故货车出现的比例为 $4:19$.