日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 10 月 10 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第二次作业

编程作业 1. 假设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的随机样本，$X\sim\chi^2(k)$.

(1) 求样本均值 $\bar{X}$ 的密度函数.

(2) 求样本均值的渐近分布.

(3) 通过编程比较，在不同样本量下，样本均值的密度函数和其渐近分布的密度函数图像.

解答. (1) $n\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i$，由于 $X_i\sim\chi^2(k)=\Gamma(\frac{k}{2},\frac{1}{2})$，且 Gamma 函数有可加性，则 $N\bar{X}\sim\Gamma(\frac{nk}{2},\frac{1}{2})$

$$p_{\bar{X}}(x)=p_{n\bar{X}}(nx)n=n^{\frac{nk}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{nk}{2}}}{\Gamma(\frac{nk}{2})}x^{\frac{nk}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{nx}{2}}.$$

(2) $\chi^2(k)$ 的 $\mu=k,\sigma^2=2k$，则 $\bar{X}$ 的渐近分布为 $N(k,\frac{2k}{n})$.

(3) 设定每次计算密度函数时使用 10^7 个样本，k 表示卡方分布的自由度，N 表示样本量大小，结果如图 1 所示.

编程作业 2. 在一个图上画出标准正态分布的密度曲线和 $t(1),t(3),t(30),t(100)$ 的密度曲线.

解答. 直接绘图，结果如图 2 所示.

编程作业 3. 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自均匀分布 $U[\mu-\sqrt{3}\sigma,\mu+\sqrt{3}\sigma]$ 的随机样本，其中 $\mu\in\mathbb{R},\sigma>0$. 编程比较 μ 的矩估计和 MLE 的偏，方差和均方误差.

解答. 由于 $E(x)=\int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma}\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}x\,\mathrm{d}x=\mu$，则 μ 的矩估计为 $\hat{\mu}=\bar{X}$.

由课上习题可知，μ 的 MLE 估计为 $\hat{\mu}=\frac{y_1+y_n}{2}$，其中 $Y_1,\cdots,Y_n$ 为 $X_1,\cdots,X_n$ 的次序统计量.

通过程序计算，取 $\mu=0,\sigma=1$，每个样本大小 $n=10^5$，总共取 10^5 个样本，计算得到

$$\begin{aligned}\text{矩估计：}\quad & E(\hat{\mu})\approx 1.96\times10^{-6},\ Var(\hat{\mu})\approx 0.003,\ \text{MSE}(\hat{\mu})\approx 0.003\\ \text{MLE：}\quad & E(\hat{\mu})\approx 6.19\times10^{-8},\ Var(\hat{\mu})\approx 2.46\times10^{-5},\ \text{MSE}(\hat{\mu})\approx 2.46\times10^{-5}\end{aligned}$$

由此看出 MLE 的估计效果优于矩估计方法.

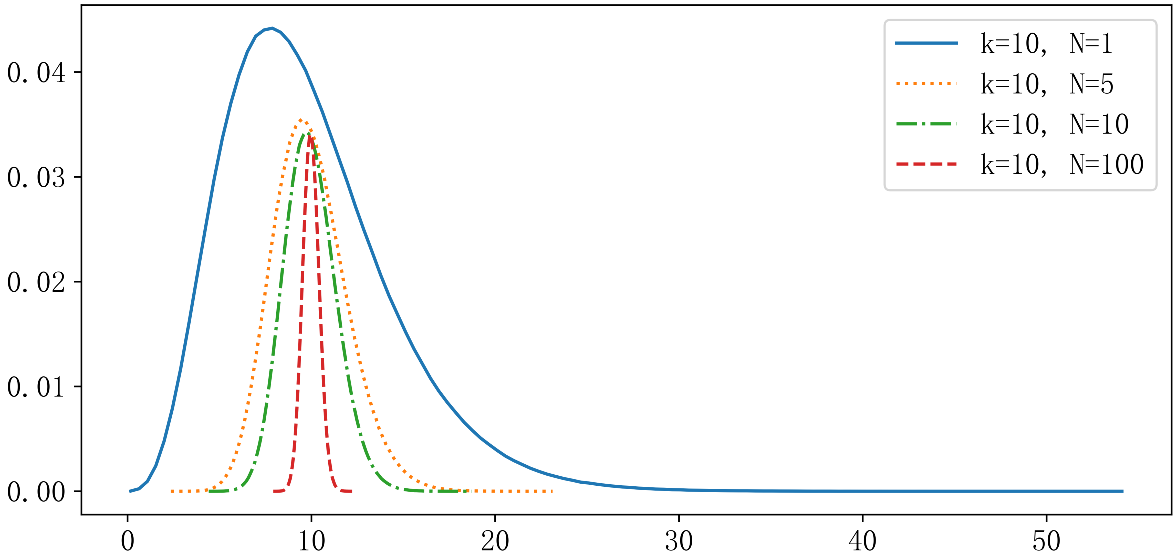
k=10, N=1
k=10, N=5
k=10, N=10
k=10, N=100
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
10
20
30
40
50

图 1: 第一题

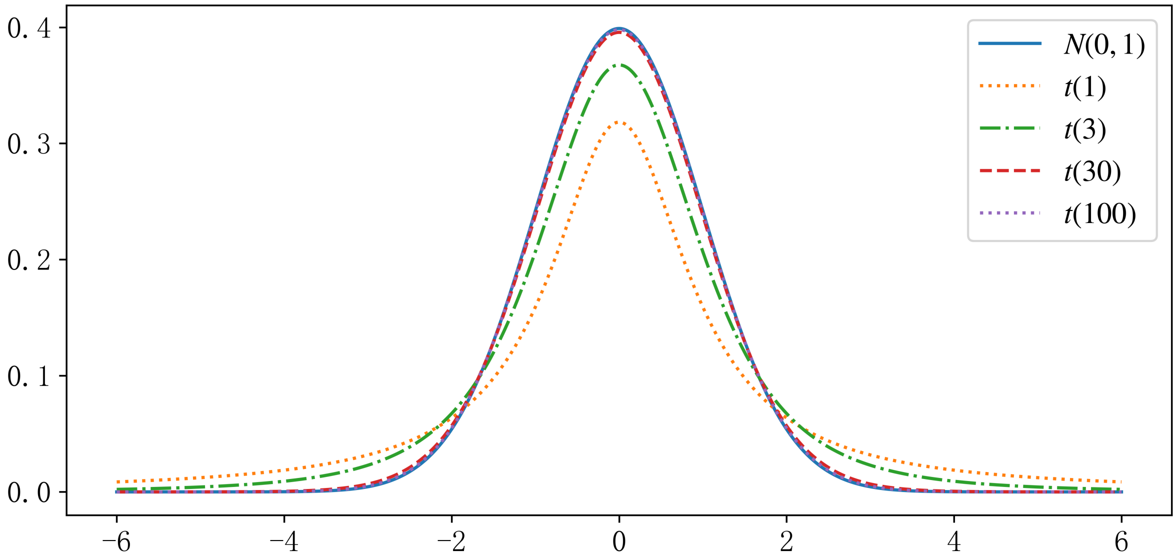
N(0, 1)
t(1)
t(3)
t(30)
t(100)
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−6
−4
−2
0
2
4
6

图 2: 第二题