

第 12 周作业 Markov 链

题目 1. (P218 1.) 3 个白球和 3 个黑球分布在两个坛子中, 每个含有 3 个球. 如果第一个坛子中有 i 个白球, 我们就称此系统处在状态 $i, i = 0, 1, 2, 3$. 每次我们从坛子中取出一球, 并将从第一个坛子中取出的球放到第二个坛子中, 从第二个坛子取出的球放到第一个坛子中, 以 X_n 记第 n 步后系统的状态. 解释为什么 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链, 并计算它的转移概率矩阵.

解答. Markov 性: 每次交换操作仅和当前的坛子的状态决定, 和历史中的坛子状态没有关系, 因此满足 Markov 链性质.

当系统处于状态 i 时, 第一个坛子有 i 个白球 $3-i$ 个黑球, 第二个坛子有 $3-i$ 个白球 i 个黑球, 因此第一个坛子取出白球和黑球概率分别为 $\frac{i}{3}$ 和 $\frac{3-i}{3}$, 第二个坛子同理. 则当 $i \in \{1, 2\}$ 时, 状态转移分以下三种情况

- 同时取出白球或黑球 $P_{i,i} = \frac{2i(3-i)}{9}$;
- 第一和二个坛子分别取出白球和黑球 $P_{i,i-1} = \frac{i^2}{9}$;
- 第一和二个坛子分别取出黑球和白球 $P_{i,i+1} = \frac{(3-i)^2}{9}$.

而当 $i \in \{0, 3\}$ 时, 仅能转移到相邻的状态上, 综上, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

题目 2. P218 5. 一个状态为 0, 1 或 2 的 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 它的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

如果 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 1/4$, 求 $\mathbb{E}[X_3]$.

解答. 由 $C-K$ 方程可知, 累计走 n 步的转移概率矩阵为

$$P^3 = P^{(3)} = \begin{bmatrix} 13/36 & 11/54 & 47/108 \\ 4/9 & 4/27 & 11/27 \\ 5/12 & 2/9 & 13/36 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 P(X_0 = i) P_{ij}^3 \cdot j = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} P^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{53}{54} \approx 0.98148148$$

题目 3. (P219 6.) 令两个状态的 Markov 链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

用数学归纳法证明

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{bmatrix}$$

证明. 当 $n=1$ 时, $P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$ 成立.

$\forall k \in \mathbb{N}^+$, 只需证 $P^{k+1} = P^k P$, 令

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} A_{00} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k \right) p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k \right) p \\ &= (2p-1)^k p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k \right) p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k \right) p \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k - (2p-1)^k p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{k+1} \end{aligned}$$

同理可知 $A_{10} = A_{01}, A_{11} = A_{00}$, 于是 $P^k P = A = P^{k+1}$, 由归纳法可知原命题成立. \square

题目 4. (P219 14.) 指定如下 Markov 链的类, 确定它们是否都是暂态或常返态.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解答. 如下图所示, 可知 P_1 中 $\{1, 2, 3\}$ 为常返类, Markov 链不可约; P_2 中 $\{1, 2, 3, 4\}$ 为常返类, Markov 链不可约; P_3 中 $\{1, 3\}, \{4, 5\}$ 分别为常返类, $\{2\}$ 为暂态类; P_4 中 $\{1, 2\}, \{3\}$ 分别为常返类, $\{4\}, \{5\}$ 为暂态类.

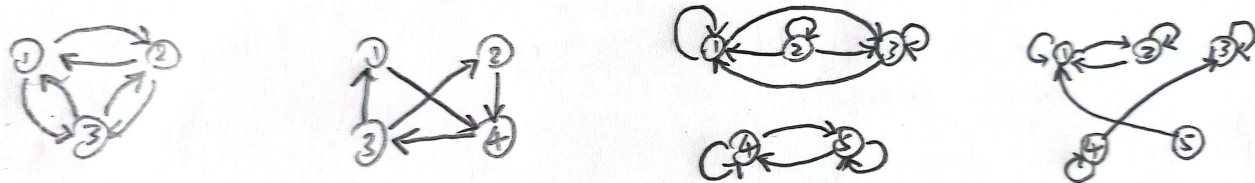


图 1: 状态之间的可达关系图

题目 5. (P220 16.) 证明若状态 i 为常返态, 且状态 i 不与状态 j 互通, 则 $P_{ij} = 0$. 它说明一旦过程进入一个常返的状态类, 它绝不会离开这个类. 因为这个原因, 一个常返类常指一个闭的类.

证明. 反设 $P_{ij} > 0$, 由于 i 为常返态, 根据常返态性质有 j 也为常返态, 因此 i 与 j 互通, 矛盾, 原命题成立. \square

题目 6. (P220 18.) 硬币 1 正面朝上的概率为 0.6, 而硬币 2 正面朝上的概率是 0.5. 一枚硬币连续地抛掷直到反面朝上, 此时将这个硬币搁置一旁, 我们开始抛掷另一枚.

(a) 用硬币 1 抛掷的比例是多少?

(b) 如果从抛掷硬币 1 开始, 问第 5 次抛掷的是硬币 2 的概率是多少?

解答. (a) 考虑两个状态的 Markov 链, 状态 1 表示当前抛掷硬币 1, 状态 2 表示当前抛掷硬币 2, 每次抛出正面后换硬币, 则转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

求解长程比例 (平稳分布) $\pi \in \mathbb{R}^2$ 满足 $\pi^T = \pi^T P, \pi_1 + \pi_2 = 1$, 解得 $\pi_1 = \frac{5}{11}, \pi_2 = \frac{6}{11}$, 则用硬币 1 抛掷的比例为 $\frac{5}{11}$.

(b) 求解 P 的特征值与特征向量:

$$|P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.4 - \lambda & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{9}{10}\lambda - \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(10\lambda + 1) = 0$$

特征值分别为 1, -0.1, 分别求出左特征向量

$$\mathbf{x}_1^T (P - I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0.6x_1 + 0.5x_2 = 0, \\ 0.6x_1 - 0.5x_2 = 0. \end{cases} \xrightarrow{\text{取特值}} \mathbf{x}_1 = \left[\frac{5}{11}, \frac{6}{11} \right]^T$$

$$\mathbf{x}_2^T(P - 0.1I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0.5x_1 + 0.5x_2 = 0, \\ 0.6x_1 + 0.6x_2 = 0. \end{cases} \xrightarrow{\text{取特值}} \mathbf{x}_2 = [1, -1]^T$$

初始状态分布为 $\mathbf{v}_0 = [1, 0]^T = \mathbf{x}_1 + \frac{6}{11}\mathbf{x}_2$, 则五次转移后的状态分布为

$$\mathbf{v}_5^T = \mathbf{v}_0^T P^5 = \mathbf{x}_1 + \frac{6}{11}\mathbf{x}_2 \cdot 0.1^5$$

可得到达状态 2 的概率为

$$\frac{6}{11} + \frac{6}{11}(-1)0.1^5 = \frac{6}{11}(1 - 0.1^5) \approx \frac{6}{11} \approx 0.5454545$$

题目 7. P220 20. 一个转移概率矩阵 P 称为双随机, 如果每一列的和为 1, 即对于一切的 j ,

$$\sum_i P_{ij} = 1$$

如果这样的链是不可约和非周期的, 并且由 $M+1$ 个状态 $0, 1, \dots, M$ 组成, 证明长程比例为

$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

证明. $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, M\}$

$$\sum_{i=0}^M \pi_i P_{ij} = \sum_{i=0}^M \left(\frac{1}{M+1} \right) P_{ij} = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M P_{ij} \xrightarrow{P \text{ 每一列的和为 } 1} \frac{1}{M+1} = \pi_j$$

又由于 Markov 链是不可约且非周期的, 根据 Perron-Frobenius 定理, 存在唯一的长程比例 π_j . \square

题目 8. P221 27. N 个总体中的任意一个个体在每个时段可能积极也可能消极. 如果一个个体在某个时段积极, 那么与所有其他个体独立, 他在下一个时段也积极的概率为 α . 类似地, 如果一个个体在某个时段消极, 那么与所有其他个体独立, 他在下一个时段也消极的概率为 β . 令 X_n 表示在时段 n 积极的个体数.

(a) 证明 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链;

(b) 求 $\mathbb{E}[X_n | X_0 = i]$;

(c) 推导转移概率的表达式;

(d) 求恰有 j 个个体积极的长程时间比例.

解答. (a) 由于每个个体的状态转移仅依赖于当前的状态, 并且与其他个体独立, 即 X_{n+1} 仅依赖于 X_n 的状态, 满足 Markov 性, 因此 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链.

(b) 由全期望公式可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|X_0 = i] &= \alpha\mathbb{E}[X_n|X_0 = i] + (1 - \beta)(N - \mathbb{E}[X_n|X_0 = i]) \\ (\text{简记}) \Rightarrow \mathbb{E}_{n+1} &= (\alpha + \beta - 1)\mathbb{E}_n + (1 - \beta)N\end{aligned}$$

此为线性差分方程，解为齐次线性差分方程的通解和特解的和，其导出的齐次方程为 $\mathbb{E}_{n+1} = (\alpha + \beta - 1)\mathbb{E}_n$ ，特征根 $\lambda = \alpha + \beta - 1$ ，则齐次方程解为 $C(\alpha + \beta - 1)^n$ ，将 E^* 带入求特解

$$\mathbb{E}^* = (\alpha + \beta - 1)\mathbb{E}^* + (1 - \beta)N \Rightarrow E^* = \frac{(1 - \beta)N}{2 - \alpha - \beta}$$

于是原线性差分方程解为 $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}^* + C(\alpha + \beta - 1)^n$ ，带入初始条件 $\mathbb{E}_0 = i$ ，可得 $C = i - \mathbb{E}^*$ 。

综上

$$\mathbb{E}[X_n|X_0 = i] = \mathbb{E}^* + (i - \mathbb{E}^*)(\alpha + \beta - 1)^n, \quad \text{其中 } \mathbb{E}^* = \frac{(1 - \beta)N}{2 - \alpha - \beta}$$

(c) $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$, $\forall k \leq \min\{i, j\}$ 表示连续两个状态保持积极的个体数，则从状态 i 到状态 j 的概率转移存在两种情况： k 个积极个体保持积极，概率为 $\binom{i}{k}\alpha^k(1 - \alpha)^{i-k}$ ； $j - k$ 个消极个体变为积极个体，概率为 $\binom{N-i}{j-k}(1 - \beta)^{j-k}\beta^{N-i-(j-k)}$

综上，转移概率表达式为

$$P_{ij} = \sum_{k=\max\{0, i+j-N\}}^{\min\{i, j\}} \binom{i}{k}\alpha^k(1 - \alpha)^{i-k} \binom{N-i}{j-k}(1 - \beta)^{j-k}\beta^{N-i-(j-k)}$$

(d) 由于每个个体独立，且在两个状态中进行转移，假设平稳分布为二项分布，在平稳分布下处于积极的概率为 p ，则

$$p = \alpha p + (1 - \beta)(1 - p) \Rightarrow p = \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta}$$

可得平稳分布为

$$\pi_j = \binom{N}{j} \left(\frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right)^j \left(\frac{1 - \alpha}{2 - \alpha - \beta} \right)^{N-j}$$

题目 9. P222 30. 在公路上，每 4 辆货车中有 3 辆后面跟着一辆轿车，而每 5 辆轿车中只有一辆后面跟着一辆货车。行驶在公路上的车辆中货车的比例是多少？

解答. 将该问题视为 Markov 过程， X_n 表示第 n 辆车的车型，其中状态 1 表示当前为货车，状态 2 表示当前为轿车，则转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

求解长程比例 $\pi \in \mathbb{R}^2$ 满足 $\pi^T = \pi^T P$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ，解得 $\pi_1 = \frac{4}{19}$ ，故货车出现的比例为 $\frac{4}{19}$ 。