日期	科目	班级	姓名	学号	序号
2022 年 10 月 31 日	数理统计	强基数学 002	吴天阳	2204210460	50

第五次作业

题目 1. (44) 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $f(x;\theta)=\mathrm{e}^{-(x-\theta)}I_{[\theta,\infty)}(x)$, $(\theta\in\mathbb{R}^1)$ 的随机样本.

(a). 求解一个充分统计量.

(b). 求出 θ 的 MLE.

(c). 求出 θ 的矩估计.

(d). 求解一个完备充分统计量.

(e). 求解 θ 的 UMVUE.

(f). 求出关于 θ 的 Pitman 估计量.

(g). 使用先验分布 $g(\theta)=\mathrm{e}^{-\theta}I_{(0,\infty)}(\theta)$，求出 θ 的后验 Bayes 估计量.

解答. (a). 由于 $f(x;\theta)=1\cdot I_{[\theta,\infty)}(x)\exp\{\theta-x\}$，令 $a(\theta)=1$, $b(x)=I_{[\theta,\infty)}(x)$, $c(\theta)=\theta$, $d(x)=-x$，于是 $-\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 是完备充分统计量.

(b). 由于 $\mathcal{L}(\theta)=\prod\limits_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod\limits_{i=1}^n\mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}I_{[\theta,\infty)}(x_i)=\exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^n x_i+n\theta\right\}I_{(-\infty,y_1]}(\theta)$，其中 $Y_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$，则 MLE 为 $\hat{\theta}=Y_1$.

(c). $\mathbb{E}(\bar{X})=\mathbb{E}(X)=\int_\theta^\infty x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty(x+\theta)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\Gamma(2)}{1^2}+\theta=1+\theta$，于是 θ 的矩估计为 $\tilde{\theta}=\bar{X}-1$.

(d). 由 (a) 可知，$-\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 是完备充分统计量.

(e). 由于 $\bar{X}-1$ 是关于 $-\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 的统计量且是 θ 的无偏估计，于是 $\bar{X}-1$ 是 θ 的 UMVUE.

(f).

(g). 由于 $\mathcal{L}(\theta)=\mathrm{e}^{n\theta-\sum_{i=1}^n x_i}I_{(-\infty,y_1]}(\theta)\propto\mathrm{e}^{n\theta}I_{(-\infty,y_1]}(\theta)$ 且 $f(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\int L(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{y_1}\mathrm{e}^{(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}{n-1}$, $(y_1>0)$. 则

$$f(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\frac{\mathcal{L}(\theta)g(\theta)}{\int L(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta}=\frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\mathrm{e}^{(n-1)\theta}I_{(0,y_1]}(\theta).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\theta|x_1,\cdots,x_n\right]&=\int_0^{y_1}\theta\frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\mathrm{e}^{(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\int_0^{y_1}\theta\mathrm{e}^{-(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{n-1}{\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1}\cdot\frac{\Gamma(2)}{(1-n)^2}=\frac{1}{(n-1)(\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1)}\end{aligned}$$

则 θ 的后验 Bayes 估计量为 $\dfrac{1}{(n-1)(\mathrm{e}^{(n-1)y_1}-1)}$.

题目 2. (47) 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自离散分布 $f(x;\theta)=\binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}I_{\{0,1,2\}}(x)$, $(\theta>0)$ 的随机变量.

(a). 是否存在一维的充分统计量，若存在，是否完备?

(b). 求解 $\theta^2 = P(X_1 = 2)$ 的 MLE，并判断是否是无偏的.

(c). 求解一个关于 θ 的无偏统计量，且满足 C-R 下界. 若不存在，证明之.

(d). 求解一个 θ^2 的 UMVUE.

(e). 利用平方误差损失函数求解 θ^2 关于先验分布为 Beta 分布的 Bayes 估计. Beta 分布为 $g(\theta) = \dfrac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}I_{(0,1)}(\theta)$.

(f). 使用平方误差损失函数，求解 θ 的最大估计.

(g). 求解 θ^2 均方误差的一致估计.

解答. (a). 由于

$$f(x;\theta) = \exp\{2\log(1-\theta)\}\binom{2}{x}I_{\{0,1,2\}}(x)\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}$$

令 $a(\theta) = \exp\{2\log(1-\theta)\}$, $b(x) = \dbinom{2}{x}I_{\{0,1,2\}}(x)$, $c(\theta) = \log\dfrac{\theta}{1-\theta}$, $d(x) = x$. 则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是完备充分统计量.

(b).