日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 5 月 25 日	最优化方法	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第五章 习题 3 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4}f_i(x)^2,\ r_i(x)=x_1e^{-x_2t_i}-y_i,\ i=1,2,3,4$, 其中 $t_1=-1,t_2=0,t_3=1,t_4=2,y_1=2.7,y_2=1,y_3=0.4,y_4=0.1$.

(1) 以 $x^{(1)}=(1,1)^T$ 为初始点, 计算进行一次 Gauss-Newton 迭代所得的点 $x^{(2)}$;

(2) 在点 $x^{(2)}$ 还是用矩阵 $A_1^TA_1$ 进行一次近似的 Gauss-Newton 迭代得点 $x^{(3)}$. 由这三个点估计方法对此问题的线性收敛速度.

解答. (1)

$$A(x)=[\nabla r_1(x)\quad \nabla r_2(x)\quad \nabla r_3(x)\quad \nabla r_4(x)]^T=\begin{bmatrix}e^{-x_2t_1} & -x_1t_1e^{-x_2t_1}\\ e^{-x_2t_2} & -x_1t_2e^{-x_2t_2}\\ e^{-x_2t_3} & -x_1t_3e^{-x_2t_3}\\ e^{-x_2t_4} & -x_1t_4e^{-x_2t_4}\end{bmatrix}$$

则 $A_1=A(x^{(1)})=\begin{bmatrix}e & 1 & e^{-1} & e^{-2}\\ e & 0 & -e^{-1} & -2e^{-2}\end{bmatrix}^T$, 于是

$$A_1^TA_1=\begin{bmatrix}e^2+1e^{-2}+e^{-4} & e^2-e^{-2}-2e^{-4}\\ e^2-e^{-2}-2e^{-4} & e^2+e^{-2}+4e^{-4}\end{bmatrix}$$

$$A_1^Tr_1=\begin{bmatrix}e & 1 & e^{-1} & e^{-2}\\ e & 0 & -e^{-1} & -2e^{-2}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}e-2.7\\ 0\\ e^{-1}-0.4\\ e^{-2}-0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^2-2.7e-0.4e^{-1}+0.9e^{-2}+e^{-4}\\ e^2-2.7e+0.4e^{-1}-0.8e^{-2}-2e^{-4}\end{bmatrix}$$

求解 $A_1^TA_1\delta_1=A_1^Tr_1$, 得 $\delta_1=[-0.0040\quad 0.0106]^T$, 于是 $x^{(2)}=x^{(1)}+\delta_1=[0.9960\quad 1.0106]^T$.

(2) 求解 $A_1^TA_1\delta_2=A_2^Tr_2$, 得 $\delta_2=[-0.0076\quad 0.0210]^T$, 于是 $x^{(3)}=x^{(2)}+\delta_2=[0.9884\quad 1.0316]^T$.

4. 写出下列等式的 KKT 条件.

$$\begin{aligned}\min\quad & q(x)=\frac{1}{2}x^TGx+x^Tg\\ s.t.\quad & Ax\geqslant b,\qquad \overline{A}x=\overline{b}.\end{aligned}$$

其中 G 是对称正半定矩阵.

解答. 设 $A,\overline{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 则

$$L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^TGx+x^Tg-\lambda_1^T(Ax-b)-\lambda_2^T(\overline{A}x-\overline{b}).$$

则 KKT 条件为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x}(x^*) = Gx^* + g - A^T\lambda_1 - \overline{A}^T\lambda_2 = 0, \\
Ax^* \geqslant b, \\
\overline{A}x^* = \overline{b}, \\
\lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0, \\
\lambda_1^T(Ax^* - b) = 0.
\end{cases}
$$

题目. 求下列规划问题的 K-T 点

$$
\begin{cases}
\min \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\
s.t. \quad g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leqslant 0 \\
\qquad\quad g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 4 \leqslant 0 \\
\qquad\quad g_3(x_1, x_2) = -x_1 \leqslant 0 \\
\qquad\quad g_4(x_1, x_2) = -x_2 \leqslant 0.
\end{cases}
$$

解答.

$$
L(f, \lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 4) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2)
$$

则 KKT 条件为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x}(x^*) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 3) + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ 2(x_2 - 3) + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 - \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
x_1^2 + x_2^2 - 5 \leqslant 0, \\
x_1 + 2x_2 - 4 \leqslant 0, \\
-x_1 \leqslant 0, \\
-x_2 \leqslant 0, \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geqslant 0, \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0, \\
\lambda_2(x_1 + x_2 - 4) = 0, \\
\lambda_3 x_1 = 0, \\
\lambda_4 x_2 = 0.
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \\
\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \\
\lambda_2 = 0.
\end{cases}
$$

则 K-T 点为 $x^* = [2 \quad 1]^T$.