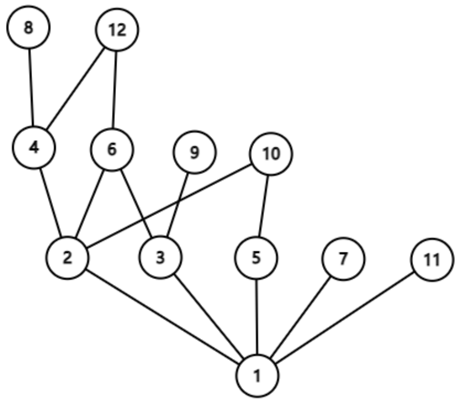
日期	科目	姓名学号
2021 年 10 月 23 日	离散数学	吴天阳 2204210460

习题四

31. 对集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ 上的整除关系画出 Hasse 图，并对子集 $\{2,3,6\},\{2,4,6\},\{4,8,12\}$ 找出最大元素、最小元素、极大元素、极小元素、上确界、下确界。

解答. 令 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$，则半序集 $(A,|)$ 所对应的 Hasse 图如下：



令 $B_1=\{2,3,6\},B_2=\{2,4,6\},B_3=\{4,8,12\}$，它们的最大元素、最小元素、极大元素、极小元素、上确界、下确界如下表所示：

集合	最大元素	最小元素	极大元素	极小元素	上确界	下确界
B_1	6	无	{6}	{2,3}	6	1
B_2	无	2	{4,6}	{2}	12	2
B_3	无	4	{8,12}	{4}	无	4

32. 写出集合 A 及半序关系 $\preccurlyeq$ 的所有元素。

解答.

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$
$$\preccurlyeq=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(2,5),(3,5),(4,6),$$
$$(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

34. 设 $\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2$ 分别是定义在非空集合 A, B 上半序关系，如下定义 $\preccurlyeq_3$：

$$\forall a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$$

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \preccurlyeq_3 \iff (a_1, a_2) \in \preccurlyeq_1 \wedge (b_1, b_2) \in \preccurlyeq_2$$

证明：$\preccurlyeq_3$ 是 $A \times B$ 上的半序关系。

证明. 1.（自反性）设 $a \in A, b \in B$，由 $\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2$ 的自反性知

$$(a, a) \in \preccurlyeq_1 \wedge (b, b) \in \preccurlyeq_2 \Rightarrow ((a, b), (a, b)) \in \preccurlyeq_3$$

2.（反对称性）设 $a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$，

若有 $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \preccurlyeq_3 \wedge ((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in \preccurlyeq_3$

$\Rightarrow (a_1, a_2) \in \preccurlyeq_1 \wedge (a_2, a_1) \in \preccurlyeq_1 \wedge (b_1, b_2) \in \preccurlyeq_2 \wedge (b_2, b_1) \in \preccurlyeq_2$

（由 $\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2$ 的反对称性知）

$\Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

$\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$

3.（传递性）设 $a_1, a_2, a_3 \in A,\ b_1, b_2, b_3 \in B$，

$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \preccurlyeq_3 \wedge ((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in \preccurlyeq_3$

$\Rightarrow (a_1, a_2) \in \preccurlyeq_1 \wedge (a_2, a_3) \in \preccurlyeq_1 \wedge (b_1, b_2) \in \preccurlyeq_2 \wedge (b_2, b_3) \in \preccurlyeq_2$

（由 $\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2$ 的传递性知）

$\Rightarrow (a_1, a_3) \in \preccurlyeq_1 \wedge (b_1, b_3) \in \preccurlyeq_2$

$\Rightarrow ((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in \preccurlyeq_3$

综上，$\preccurlyeq_3$ 满足自反性，反对称性，传递性，则 $\preccurlyeq_3$ 是半序关系。 □

36. 解答.

令有限集合 $A = \{1, 2, 3, 12, 18\}$，无限集合 $B = \{2^n, 3^m, 12, 18 : n, m \in \mathbb{N}\}$，则有关于**整除关系**的非空半序集合 $(A, |), (B, |)$，取 $C = \{2, 3\}$，则 C 为 A, B 的子集，下面对三问关于 C 分别进行验证。

(1).C 中没有最大元素。

(2).C 在 A, B 中都有最大下界 1，没有最小元素。

(3).C 在 A, B 中都有上界 $\{12, 18\}$，没有最小上界。

习题五

3. 解答.

(1). 单射的，因为 $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x^2+1=y^2+1 \Rightarrow\ x=y$，不是满射，因为 $f(x)=3$ 无解。

(2). 满射的，因为 $f(0)=1, f(1)=0$，不是单射的，因为 $f(0)=f(2)=1$。

(3). 既不是单射也不是满射，不是单射，因为 $f(0)=f(2)=1$，不是满射，因为 $\mathfrak{R}(f)=\{0,1\} \neq \mathbb{N}$。

(4). 满射的，因为 $\forall m \in \mathbb{N}, f(m,1)=m$，不是单射，因为 $f(2,4)=f(4,2)=16$。

(5). 双射的，因为 $f(x)$ 是线性函数，由 $x=\dfrac{f(x)+17}{3}$ 知，$f(x)$ 是单射也是满射。

(6). 单射的，因为 $n=10^{f(n)}$，不是满射，因为 $f(n)=\log_{10} n=-1$，无解。

(7). 既不是单射也不是满射，不是单射，因为 $f(A_1,A_2)=f(A_2,A_1)$，不是满射，因为 $f((A_1,A_2))=(\varnothing,\{X\})$，由于 $\{X\} \not\subset \varnothing$，且 $A_1 \cap A_2 \subset A_1 \cup A_2$，则不存在这样的 (A_1,A_2) 满足条件。

6. 设 f 和 g 是函数，$f \subset g$ 并且 $\mathfrak{D}(g) \subset \mathfrak{D}(f)$，证明 $f=g$。

证明. 由于 $f \subset g$，所以只需证 $g \subset f$。

对 $\forall x \in \mathfrak{D}(g)$，由于 $\mathfrak{D}(g) \subset \mathfrak{D}(f)$，则有 $x \in \mathfrak{D}(f)$，故 $(x, f(x)) \in f$。

又由于 $f \subset g$，则 $(x, f(x)) \in g$，于是有 $f(x)=g(x) \Rightarrow (x, g(x)) \in f$，故 $g \subset f$。

综上，$f=g$。 □

11. 解答.

$$p^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$p \diamond p^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

12. 设 A 是无限集合，B 是有限集合。

解答.

(1). $A \cap B$ 不是无限集合，因为 $A \cap B \subset B$，而 B 是有限集合，有限集合的子集还是有限集合。

(2). $A \cup B$ 是无限集合，因为 $A \subset A \cup B$，而 A 是无限集合，包含无限集合的集合一定是无限集合。

(3). $A \backslash B$ 是无限集合，因为无限集中去除有限多个元素，仍然是无限集，所以 $A \backslash B$ 是无限集合。