日期	科目	班级	姓名	学号
2022 年 11 月 17 日	泛函分析	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第九次作业

题目 1. 设 X 是复 Hilbert 空间，$T \in L(X)$，证明：$T^* = T \iff (Tx, x) \in \mathbb{R},\ (\forall \in X)$.

证明. "$\Rightarrow$"：$(Tx, x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$，则 $(Tx, x) \in \mathbb{R}$.

"$\Leftarrow$": 由于 $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ 于是 $(Tx, x) = (x, Tx) = (x, T^*x)$, 于是 $(x, (T - T^*)x) = 0,\ (\forall x \in X)$, 于是 $T - T^* = 0 \Rightarrow T = T^*$. □

题目 2. 设 X 为 Hilbert 空间, $T_1, T_2 \in L(X)$, $T_1^* = T_1, T_2^* = T_2$, 证明: $T_1T_2 = T_2T_1 \iff T_1T_2 = (T_1T_2)^*$.

证明. 由于 $T_1T_2 = (T_1T_2)^{**} = (T_2^*T_1^*)^* = (T_2T_1)^*$

"$\Rightarrow$"：由于 $T_1T_2 = T_2T_1$，于是 $T_1T_2 = (T_1T_2)^*$.

"$\Leftarrow$"：由于 $T_1T_2 = (T_1T_2)^* = (T_2T_1)^*$，两边同取共轭可得 $T_1T_2 = T_2T_1$. □

题目 3. 设 X 为 Hilbert 空间，$T \in L(X)$，证明 $\mathrm{Ker}(T^*) = R(T)^\perp$.

证明. 一方面，$\forall x \in \mathrm{Ker}(T^*)$，则 $0 = (T^*x, y) = (x, Ty),\ (\forall y \in X)$，则 $x \in R(T)^\perp \Rightarrow \mathrm{Ker}(T) \subset R(T)^\perp$. 另一方面, $\forall x \in R(T)^\perp$, 则 $0 = (x, Ty) = (T^*x, y),\ (\forall y \in X)$, 则 $T^*x = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(T^*)$.

综上：$\mathrm{Ker}(T^*) = R(T)^\perp$. □

题目 4. 证明 $({}^\perp M)^\perp = \bar{M}$.

证明. $\forall x \in M$，$\forall f \in {}^\perp M$ 有 $\langle f, x\rangle = 0$，则 $x \in ({}^\perp M)^\perp$，令 $\{x_n\} \subset M$ 且 $x_n \to x \in X$，由于 f 的连续性，则 $\langle f, x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow x \in ({}^\perp M)^\perp$，于是 $\bar{M} \subset ({}^\perp M)^\perp$.

假设 $\bar{M}$ 是 $({}^\perp M)^\perp$ 的真子集，则 $\exists x_0 \in ({}^\perp M)^\perp - \bar{M}$，且 $d := \rho(x_0, \bar{M}) > 0$，由 Hahn-Banach 定理推论可得 $\exists f \in X^*$ 使得 $f(x_0) = d,\ f|_{\bar{M}} = 0$, 于是 $f \in {}^\perp M$ 且 $f(x_0) = d > 0$, 则 $x_0 \notin ({}^\perp M)^\perp$ 与 $x_0 \in ({}^\perp M)^\perp$ 矛盾. 故 $\bar{M} = ({}^\perp M)^\perp$. □

题目 5. 设 X, Y 为 B^* 空间，$T \in L(X, Y)$ 则 $\mathrm{Ker}(T^*) = {}^\perp R(T)$，$\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}(T^*)^\perp$.

证明.

$$\left.\begin{aligned} \forall f \in \mathrm{Ker}(T^*),\ \text{则}\langle f, Tx\rangle = \langle T^*f, x\rangle = 0,\ \text{则} f \in {}^\perp R(T) \\ \forall f \in {}^\perp R(T),\ \text{则}\langle T^*f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = 0,\ \text{则} f \in \mathrm{Ker}(T^*) \end{aligned}\right\} \mathrm{Ker}(T^*) = {}^\perp R(T)$$

$$\left.\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{Ker}(T),\ \text{则}\langle T^*f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = f(0) = 0,\ \text{则} x \in R(T^*)^\perp \\ \forall x \in R(T^*)^\perp,\ \text{则}\langle f, Tx\rangle = \langle T^*f, x\rangle = 0,\ \text{则} x \in \mathrm{Ker}(T) \end{aligned}\right\} \mathrm{Ker}(T) = R(T^*)^\perp$$

□

题目 6. 设 $X = \{\xi = (x_1, \cdots, x_n) \in l^2 : \sum\limits_{n\geqslant 1} |nx_n|^2 < \infty\}$，$T : x \to l^2$，$Tx = x$，证明 $\overline{R(T)} = l^2$.

证明. 先证明 X 为 l^2 的子空间，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall\xi,\eta\in X$，令 $\xi=\{x_n\}, \eta=\{y_n\}$，$\forall N>0$，有

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|n(\alpha x_n+\beta y_n)|^2=\alpha^2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}n^2x_n^2+2\alpha\beta\sum_{1\leqslant n\leqslant N}n^2x_ny_n+\beta^2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}n^2y_n^2$$

由于 $\xi,\eta\in X$，于是 $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N}n^2x_n^2, \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N}n^2y_n^2$ 关于 N 收敛，又由于

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant M}n^2x_ny_n\leqslant\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant M}|nx_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant M}|ny_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|n(\alpha x_n+\beta y_n)|^2=\sum_{n\geqslant1}|n(\alpha x_n+\beta y_n)|^2<\infty$$

所以 $\alpha\xi+\beta\eta\in X$，X 是 l^2 的闭子空间.

由 Hahn-Banach 定理推论可得，要证 $\overline{R(T)}=l^2$ 即 $R(T)$ 在 l^2 中稠密，只需证：$\forall f\in(l^2)^*, f|_{R(T)}=0\Rightarrow f=\theta$. 反设，存在 $f\neq\theta$ 使得 $f|_{R(T)}=0$，由于 l^2 是 Hilbert 空间，由 Riesz 表示定理可知，存在 $\eta_f\in l^2, \eta_f=\{y_n\}$ 使得 $\forall\xi\in X, \xi=\{x_n\}$ 有

$$f(\xi)=(\xi,\eta_f)=\sum_{n\geqslant1}x_n\bar{y}_n=0$$

由于 $f\neq\theta$，于是 $\eta_f\neq\theta$，即 $\exists y_n\neq0$，令 $\xi=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{个}},0,\cdots)\in X$，则 $f(\xi)=\bar{y}_n\neq0$ 与 $f(\xi)=0$ 矛盾，则 $f|_{R(T)}=\theta\Rightarrow f=\theta$. □