日期	科目	姓名，学号
2021 年 11 月 17 日	近世代数	吴天阳 2204210460

习题 1.8

4. 设 F 是一个域，求一般线性群 $GL_n(F)$ 的中心。

解答.

$Z(GL_n(F)) = \{A \in GL_n(F) : AB = BA, \forall B \in GL_n(F)\}$，即 A 能和所有的 n 阶可逆矩阵可交换。

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，构造可逆矩阵 B 如下：

$$B = E_n + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = E_n + C$$

则 $AB = BA \Rightarrow A + AC = CA + A \Rightarrow AC = CA$，故 $a_{11} = a_{22}$，同理可证 $a_{ii} = a_{i+1,i+1}\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$，所以 A 的对角线上元素都相等。

构造可逆矩阵 B 如下：

$$B = E_n + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = E_n + D$$

则 $AB = BA \Rightarrow A + AD = DA + A \Rightarrow AD = DA$，于是

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = DA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

故 $a_{12} = \cdots = a_{1n} = a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$，

同理有 $a_{k2} = \cdots = a_{kn} = a_{2k} = \cdots = a_{nk} = 0\ (k = 1, 2\cdots, n)$。

即 A 的非对角线上的元素都是 0。

综上，A 只能为数量矩阵，即 $Z(GL_n(F)) = \{kE_n : k \in F^*\}$，其中 E_n 为 $GL_n(F)$ 上的单位阵。

8. 求 S_n 的中心，其中 $n \geqslant 3$。

解答. $\forall \sigma \in S_n$，设 $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r)$，其中 $r \geqslant 2$，下面证明 $\sigma \notin \mathrm{Z}(S_n)$：

当 $r = 2$，则 $\exists a_3 \in [1, n]$ 且 $a_3 \neq a_1, a_3 \neq a_2$，则

$$(a_1a_3)\sigma(a_1a_3)^{-1} = (a_1a_3)(a_1a_2)(a_1a_3)^{-1} = (a_3a_2) \neq \sigma$$

当 $r \geqslant 3$，则

$$(a_1a_2)\sigma(a_1a_2)^{-1} = (a_2a_1 \cdots a_r) = (a_1a_3 \cdots a_ra_2) \neq \sigma$$

则 $\sigma \notin \mathrm{Z}(S_n)$，故 $\mathrm{Z}(S_n) = \{(1)\}$。

12. 设 H 是群 G 的一个子群，如果 G 的每一个自同构都把 H 映成自身，那么称 H 是 G 的**特征子群**，证明：G 的中心 $\mathrm{Z}(G)$ 和 G 的换位子群 G' 都是 G 的特征子群。

证明. 设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$。

$\forall z \in \mathrm{Z}(G), \forall a \in G$，则

$$\sigma(za) = \sigma(az) = \sigma(z)\sigma(a) = \sigma(a)\sigma(z)$$

由 σ 为自同构和 a 的任意性知，$\sigma(a)$ 能遍历 G 中的全体元素，所以 $\sigma(z) \in \mathrm{Z}(G)$，则 $\sigma(\mathrm{Z}(G)) \subset \mathrm{Z}(G)$，又由于 σ 是双射，所以 $\sigma(\mathrm{Z}(G)) = \mathrm{Z}(G)$，故 $\mathrm{Z}(G)$ 为 G 的特征子群。

$\forall x, y \in G$，则

$$\sigma(xyx^{-1}y^{-1}) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(x^{-1})\sigma(y^{-1}) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(x)^{-1}\sigma(y)^{-1} \in G'$$

由于 $G' = \langle xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G \rangle$，所以 $\sigma(G') \subset G'$，又由于 σ 是双射，则 $\sigma(G') = G'$，故 G' 是 G 的特征子群。

□

16. 求 S_4 的共轭类的个数，以及每个共轭类的代表和元素数目。

解答.

先证明 S_n 的共轭类个数等于 n 的分拆数，设 $\sigma \in S_n$ 的不相交的轮换分解式为：

$$\sigma = (a_1a_2 \cdots a_{l_1})(b_1b_2 \cdots b_{l_2}) \cdots (q_1q_2 \cdots q_{l_t})$$

其中 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_t$ 且 $l_1+l_2+\cdots+l_t=n$，称有序数组 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 为 n 的**分拆**，也称为 σ 的**型**，下证：如果 σ_1,σ_2 共轭当且仅当它们同型。

设 $\sigma_1=(a_1a_2\cdots a_{l_1})\cdots(q_1q_2\cdots q_{l_t})$。

$\Rightarrow$：由于 σ_1,σ_2 共轭，则 $\exists\tau\in S_n$，使得 $\tau\sigma_1\tau^{-1}=\sigma_2$，则

$$\sigma_2=\tau\sigma_1\tau^{-1}=(\tau(a_1)\tau(a_2)\cdots\tau(a_{l_1}))\cdots(\tau(q_1)\tau(q_2)\cdots\tau(q_{l_t}))$$

故 σ_2 与 σ_1 同型。

$\Leftarrow$：由于 σ_1,σ_2 同型，设 $\sigma_2=(b_1b_2\cdots b_{l_1})\cdots(p_1p_2\cdots p_{l_t})$，构造置换 τ 如下：

$$\tau=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{l_1} & \cdots & q_1 & q_2 & \cdots & q_{l_t} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{l_1} & \cdots & p_1 & p_2 & \cdots & p_{l_t} \end{pmatrix}$$

则 $\tau\sigma_1\tau^{-1}=\sigma_2$，故 σ_1,σ_2 共轭。

所以，在 S_n 上的共轭作用下，σ_1,σ_2 在同一个共轭类中当且仅当它们的同型，又由于一个同型对应 n 的一个分拆，所以 S_n 的共轭类个数等于 n 的分拆数。

由于 $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$，所以 4 的分拆数为 5，故 S_4 的共轭类个数为 5，代表元分别为：

$$(1234)\quad(123)\quad(12)(34)\quad(12)\quad(1)$$

通过组合方法，得知其元素数目分别为：

$$\begin{aligned}
&|C((1234))|=\frac{A_4^4}{4}=6\\
&|C((123))|=\frac{A_4^3}{3}=8\\
&|C((12)(34))|=\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3\\
&|C((12))|=\binom{4}{2}=6\\
&|C((1))|=1
\end{aligned}$$

23. 设 G 是一个群，G 的所有子群组成的集合记做 Ω，令

$$G\times\Omega\to\Omega$$

$$(a,H)\mapsto aHa^{-1}$$

容易验证这给出了群 G 在 Ω 上的一个作用，称它为群 G 在子群集合 Ω 上的**共轭作用**，H 的 $G-$ 轨道 $G(H)$ 是由 H 的所有共轭子群组成的，H 的稳定子群

$$G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

称为 H 在 G 中的**正规化子**，记做 $N_G(H)$，容易看出 $H \triangleleft N_G(H)$。证明：如果 G 为有限群，$H < G$，那么 H 的共轭子群的个数等于 $[G : N_G(H)]$。

证明. 设 G 在它的所有子群组成的集合 Ω 上的共轭作用，下面证明这是一个作用

$$(ab) \circ H = (ab)H(ab)^{-1} = abHb^{-1}a^{-1} = a(b \circ H)a^{-1} = a \circ (b \circ H)$$
$$e \circ H = eHe^{-1} = H$$

由 轨道-稳定子定理 知，$H < G, |O(H)| = [G : G_H] = [G : N_G(H)]$，又由于 $|O(H)|$ 就是 H 的所有共轭子群集合，所以 H 的共轭子群的个数等于 $[G : N_G(H)]$。 □

28. 设 G 为一个有限群，p 为 $|G|$ 的最小素因子。证明：指数为 p 的子群（如果存在）必为正规子群。

证明. 设 $H < G$，且 $[G : H] = p$，则 $|(G/H)_l| = p$，所以 $S_{(G/H)_l} \cong S_p$，构造 G 到 $(G/H)_l$ 上的左平移，则其对应的 G 到 $S_{(G/H)_l}$ 上的群同态 ψ 为：

$$\psi : G \to S_{(G/H)_l} \cong S_p$$
$$g \mapsto \psi(g)(xH) := gxH$$

由 群同态基本定理 知，$G/\text{Ker } \psi \cong \text{Im } \psi \Rightarrow \dfrac{|G|}{|\text{Ker } \psi|} = |\text{Im } \psi|$，又由于 $\text{Im } \psi < S_p$，由 Lagrange 定理 知，$|\text{Im } \psi| \Big| |S_p| \Rightarrow |\text{Im } \psi| \Big| p!$，于是

$$\frac{|G|}{|\text{Ker } \psi|} \Bigg| p!$$

设 $|G|$ 的标准分解为：$|G| = p^{a_0} p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$，其中 $p < p_1 < \cdots < p_r$，且 $\alpha_i \geqslant 1$，则 $|\text{Ker } \psi| = p^{a_0 - 1} p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} = \dfrac{|G|}{p}$，或者 $|\text{Ker } \psi| = |G|$。

由于

$$\begin{aligned}
\text{Ker } \psi =& \{a \in G : axH = xH, \forall x \in G\} \\
=& \{a \in G : x^{-1}ax \in H, \forall x \in G\} \\
=& \{a \in G : a \in xHx^{-1}, \forall x \in G\} \\
=& \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}
\end{aligned}$$

所以 Ker $\psi \subset H \Rightarrow |\text{Ker }\psi| \leqslant |H|$，又由于 $[G:H] = \dfrac{|G|}{|H|} = p$，所以 $|\text{Ker }\psi| \leqslant \dfrac{|G|}{p}$，故 $|\text{Ker }\psi| = \dfrac{|G|}{p} = |H|$，于是

$$\begin{aligned}
&\text{Ker }\psi = \bigcap_{x\in G} xHx^{-1} = H \\
\Rightarrow & \forall x \in G, xHx^{-1} \in H \\
\Rightarrow & H\text{为正规子群}
\end{aligned}$$

□

29. 设群 G 在集合 Ω 和 Ω' 上分别有一个作用 "$\circ$" 和 "$\cdot$"，如果 Ω 到 Ω' 有一个双射 σ，使得

$$\sigma(a \circ x) = a \cdot (\sigma(x)), \quad a \in G, \forall x \in \Omega$$

那么称群 G 的这两个作用是**等价的**。证明：群 G 在任一集合 Ω 上的传递作用等价于群 G 在左商集 $(G/G_x)_l$ 上的左平移，其中 $x \in G$。

证明. 设 $\Omega' = (G/G_x)_l$，"$\circ$" 是 G 在 Ω 上的传递作用，"$\cdot$" 是 G 在 $(G/G_x)_l$ 上的左平移，即 $g \cdot aG_x = gaG_x$，由于 $\circ$ 是传递作用，所以由 "$\circ$" 运算所定义的轨道 $G(x) = \Omega$，利用证明 轨道-稳定子定理 时，所构造的双射 σ：

$$\begin{aligned}
\sigma : G(x) &\leftrightarrow (G/G_x)_l \\
a \circ x &\mapsto aG_x
\end{aligned}$$

则 σ 是 Ω 到 Ω' 的双射，且 $\forall y \in \Omega$, $\exists b \in G$，使得 $b \circ x = y$，则

$$\begin{aligned}
a \cdot (\sigma(y)) =& a \cdot (\sigma(b \circ x)) \\
=& a \cdot bG_x \\
=& abG_x \\
=& \sigma((ab) \circ x) \\
=& \sigma(a \circ (b \circ x)) \\
=& \sigma(a \circ y)
\end{aligned}$$

由等价作用的定义知，"$\circ$" 和 "$\cdot$" 等价。

□

33. 证明：n 阶循环群 $G = \langle a \rangle$ 的自同构群同构于 $\mathbb{Z}_n^*$。

证明. 由于 $\mathbb{Z}_n^*$ 中的元素都和 n 互素，所以 $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$，设 $\mathbb{Z}_n^* = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_{\varphi(n)}}\}$。

由于 a 为群 G 的生成元，则 $|a| = n$，又由于

$$|a^k| = \frac{|a|}{(k, |a|)} = \frac{n}{(k, n)}$$

所以 G 中的生成元 $|a^k| = n$ 当且仅当 $(k, n) = 1$，所以 G 中所有生成元为

$$\{a^{b_1}, a^{b_2}, \cdots, a^{b_{\varphi(n)}}\}$$

由于自同构将同阶元映射到同阶元上，而且如果定义了 G 的生成元上的映射，相当于对 G 中每个元素都做出了定义，所以只需讨论 G 的同阶生成元上的置换即可，又由于 G 是循环群（可以通过一个元素生成），故 G 上的全体自同构个数有且仅有 $\varphi(n)$ 个，分别记为 $\sigma_i(a) = a^{b_i}$，$(i = 1, 2, \cdots, \varphi(n))$，则

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\varphi(n)}\}$$

构造映射 ψ 如下：

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Aut}(G) &\to \mathbb{Z}_n^* \\ \sigma_i(a) &\mapsto \overline{b_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, \varphi(n)) \end{aligned}$$

由于 $|\mathrm{Aut}(G)| = \varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$，通过定义可以看出 ψ 为双射，下面证明 ψ 保运算 $\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, \varphi(n)\}$，有

$$\sigma_i\sigma_j(a) = \sigma_i(a^{b_j}) = (\sigma_i(a))^{b_j} = a^{b_i b_j}$$

由于 b_i, b_j 和 n 互素，所以 $b_i b_j$ 也和 n 互素，则 $\exists k \in \{1, 2, \cdots, \varphi(n)\}$，使得

$$\begin{aligned} b_i b_j &\equiv b_k \pmod n \\ \Rightarrow \overline{b_i b_j} &= \overline{b_k} \end{aligned}$$

则

$$\sigma_i\sigma_j(a) = a^{b_i b_j} = a^{b_k} = \sigma_k(a)$$

故

$$\psi(\sigma_i)\psi(\sigma_j) = \overline{b_i b_j} = \overline{b_k} = \psi(\sigma_k) = \psi(\sigma_i\sigma_j)$$

综上，ψ 是 $\mathrm{Aut}(G)$ 到 $\mathbb{Z}_n^*$ 上的群同构映射。

□

习题 1.9

3. 证明：不存在阶为 56 的单群。

证明. 设群 G 的阶为 56，则存在 G 的 Sylow 2-子群P，设 P 的个数有 r 个，由 Sylow 第三定理 知，$r \equiv 1 \pmod 2$，$r|7$，则 r 的取值只有 $1, 7$。

1. 当 $r = 1$ 时，P 唯一 $\iff$ $P \lhd G$，则 G 不为单群。
2. 当 $r = 7$ 时，设它们为

$$\Omega = \{P_i : i = 1, 2, \cdots, 7\}$$

构造 G 在 Ω 上的共轭作用 $g \circ P_i = gP_ig^{-1}$，因为 Ω 上的元素两两共轭，所以这是一个良作用，设其对应的 G 到 Ω 的变换群上的群同态为 ψ：

$$\psi : G \to S_\Omega \cong S_7$$
$$g \mapsto \psi(g)(P_i) := g \circ P_i$$

由 群同态基本定理 知，

$$G/\text{Ker } \psi \cong \text{Im } \psi$$

又由于 $\text{Im } \psi < S_7 \Rightarrow |\text{Im } \psi| \Big| 7!$，于是

$$\frac{2^3 \cdot 7}{|\text{Ker } \psi|} = |\text{Im } \psi| \Big| 7!$$
$$\Rightarrow 2^2 \Big| |\text{Ker } \psi|$$
$$\Rightarrow |\text{Ker } \psi| \neq 0$$

又由于 $\text{Ker } \psi \lhd G$，所以 $\text{Ker } \psi$ 为 G 的非平凡正规子群。

综上，不存在阶为 56 的单群。

□

6. 确定 15 阶群的类型。

解答. 设群 G 的阶数为 15，则 $|G| = 15 = 3 \cdot 5$，设 Sylow 3-子群 为 H，Sylow 5-子群 为 P，下证 H, P 均唯一

设 Sylow 3-子群 的个数为 r 个，Sylow 5-子群 的个数为 s 个，则

$$\left.\begin{aligned} r \equiv 1 \pmod 3 \text{ 且 } r|5 \\ s \equiv 1 \pmod 5 \text{ 且 } s|3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r = s = 1$$

所以 H, P 均唯一，故 $H \lhd G, P \lhd G$，由于 $H \cong \mathbb{Z}_3, P \cong \mathbb{Z}_5$，所以 $H \cap P = \{e\}$，又由于

$$|HP| = \frac{|H| \cdot |P|}{|H \cap P|} = 15 = |G|$$

所以，$G \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{15}$，故 G 一定为 15 阶循环群。

10. 设 p, q 是不同的素数，证明：p^2q 阶群必有一个正规的 Sylow 子群。

证明. 分为以下两种情形：

1. 若 $p > q$，由于 G 的 Sylow-p 子群 的指数为 q，为 $|G|$ 的最小的素因数，所以 Sylow-p 子群 为正规子群。

2. 若 $p < q$，设 G 的 Sylow-p 子群 个数为 r，Sylow-q 子群 个数为 s，则有

$$r \equiv 1 \pmod p \text{ 且 } r|q$$
$$s \equiv 1 \pmod q \text{ 且 } s|p^2$$

若 $s = 1$，则 Sylow-q 子群 为正规子群。

若 $s = p$，则 $p \equiv 1 \pmod q \Rightarrow p = 1$，故 s 不能为 p。

若 $s = p^2$，则 $p^2 \equiv 1 \pmod q$，则 $\exists k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，使得 $p^2 = kq+1$，则 $kq = (p-1)(p+1)$，有 $q|(p-1)$ 或 $q|(p+1)$，由于 $p \leqslant q-1$，所以 $p-1 \leqslant q-2, p+1 \leqslant q$，故 $q = p+1$，所以 $p = q-1$，又由于 p, q 均为素数，所以 $p = 2, q = 3$，则 $s = 4$，下面对 r 进行讨论

若 $r = 1$，则 Sylow-p 子群 为正规子群。

若 $r = 3$，由于 4 阶群一定是循环群，所以 G 中至少有 $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 = 18 \geqslant |G| = 12$，矛盾，所以 r 不能为 3。

综上，p^2q 阶群必有一个正规的 Sylow 子群。

$\square$

13. 设 G 为一个有限群，$N \lhd G$，P 是 N 的一个 Sylow p-子群，证明：

$$G = N \cdot \mathrm{N}_G(P)$$

证明. $\forall g \in G$，由于 $P < N$，则 $gPg^{-1} \subset gNg^{-1} = N$，所以 gPg^{-1} 也是 N 的一个 Sylow p-子群，由 Sylow 第二定理 知，$\exists n \in N$，使得 $gPg^{-1} = nPn^{-1}$，故

$$
\begin{aligned}
& n^{-1}gPg^{-1}n = P \\
\Rightarrow\ & n^{-1}gP(n^{-1}g)^{-1} = P \\
\Rightarrow\ & n^{-1}g \in \mathrm{N}_G(P) \\
\Rightarrow\ & g\mathrm{N}_G(P) = n\mathrm{N}_G(P) \\
\Rightarrow\ & g \in N \cdot \mathrm{N}_G(P) \\
\Rightarrow\ & G \subset N \cdot \mathrm{N}_G(P)
\end{aligned}
$$

又由于 $N \cdot \mathrm{N}_G(P) \subset G$，所以 $G = N \cdot \mathrm{N}_G(P)$。 $\square$