日期	科目	班级	姓名	学号
2023 年 3 月 12 日	微分几何	强基数学 002	吴天阳	2204210460

第二次作业

题目 1. 2.2 习题 1 求证本节映射 η 定义合理, 即 $\forall s\in(c,d)$，$\exists! t=\eta(s)\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^{\eta(s)}||r'(\eta)||_2\,\mathrm{d}\tau=s-c,$$

并且该映射是 C^1 正则参数变换，并且 $\eta'(s)=\dfrac{1}{||r'(t)||_2}$，从而 $||\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)||_2\equiv 1.$

证明. 由于曲线的弧长定义为 $s(t)=\displaystyle\int_a^t||\boldsymbol{r}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau$，则 $s'(t)=||\boldsymbol{r}'(t)||>0$，由反函数定理，则 $\exists! t=\eta(s)$，且 $\eta\in C^1$，$\eta'(s)=\dfrac{1}{s'(t)}=\dfrac{1}{||\boldsymbol{r}'(t)||}$，而且

$$\int_a^{\eta(s)}||\boldsymbol{r}'(\tau)||\,\mathrm{d}\tau=\int_a^t s'(\tau)\,\mathrm{d}\tau=s(\tau)|_a^t=s-c$$

$\square$

题目 2. 2.2 练习 4 设 $a,b,w>0$，求螺线

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}:(t_0,t_1)\ &\to\mathbb{R}^3\\ t\ &\mapsto(a\sin\omega t,a\cos\omega t,bt)\end{aligned}$$

的切向量，并给出一个弧长参数化.

解答. 切向量为 $\boldsymbol{r}'=(a\omega\cos\omega t,-a\omega\sin\omega t,b)$，则

$$s(t)=\int_{t_0}^t||r'(\tau)||_2\,\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^t\sqrt{a^2\omega^2+b^2}\,\mathrm{d}\tau=\sqrt{a\omega^2+b^2}(t-t_0)$$

于是 $t=\dfrac{s}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}+t_0=\eta(s)$，故弧长参数化为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}'\circ\eta=(a\sin\omega\eta(s),a\omega\cos\omega\eta(s),b\eta(s))$$

题目 3. 2.3 练习 1 计算半径为 r 的平面圆周曲率.

解答. 二维平面中圆形在原点，半径为 r 的圆周可以有以下参数化表示方法：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}:[0,2\pi)\ &\to\mathbb{R}^2\\ \theta\ &\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{aligned}$$

则$s(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta||\boldsymbol{r}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau=\int_0^\theta r\,\mathrm{d}\tau=r\theta$，则 $\eta(s)=s/r=\theta$，对应的弧长参数化为 $\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{\eta}=$

$(r\sin s/r, r\sin s/r)$，则曲率为

$$\kappa(t)=||\tilde{\boldsymbol{r}}''||=||(-r\cos t,-r\sin t)||=\left|\left|-\frac{1}{r}(\cos s/r,\sin s/r)\right|\right|=\frac{1}{r}$$

题目 4. 2.3 练习 2 计算螺线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos\omega t, a\sin\omega t, bt)$ 的曲率和挠率（$a,\omega,b>0$）.

解答. $\boldsymbol{r}'(t)=(-a\omega\sin\omega t, a\omega\cos\omega t, b), \boldsymbol{r}''(t)=-a\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t,0), \boldsymbol{r}'''(t)=a\omega^3(\sin\omega t,-\cos\omega t,0)$，则 $|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=a\omega\sqrt{a^2\omega^2+b^2}$, $|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{a^2w^2+b^2}$, $(r',r'',r''')=-a^4b\omega^{10}$，于是

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^2}=\frac{a\omega}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}},\quad \tau(t)=\frac{(r',r'',r''')}{|r'\times r''|^2}=-\frac{a^2b\omega^8}{a^2\omega^2+b^2}$$

题目 5. 2.3 练习 3 证明：如果一条平面曲线的挠率恒为零，且曲率为常数（$\neq 0$），则该曲线是一段圆弧.

证明. 由于 $\dot{\alpha}(s)=\kappa(s)\beta(s)$, $\dot{\beta}=-\kappa(s)\alpha(s)+\tau(s)\gamma(s)$，由于 $\tau(s)=0$, $\kappa(s)=c$，其中 $c>0$ 为常数（曲率非负），则

$$\dot{\alpha}(s)=c\cdot\beta(s),\ \dot{\beta}(s)=-c\cdot\alpha(s)\quad\Rightarrow\quad\ddot{\alpha}(s)=-c^2\cdot\alpha(s),$$

上述线性常微分方程对应的特征方程为 $a^2=-c^2\Rightarrow a=\pm\mathrm{i}c$，于是 $\alpha(s)=\boldsymbol{a}\sin cs+\boldsymbol{b}\cos cs$, $(s\geqslant 0)$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ 为待定系数，由弧长参数化性质可知

$$|\alpha(s)|=|\boldsymbol{a}|^2\sin^2 cs+|\boldsymbol{b}|^2\cos^2 cs+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\sin cs\cos cs=1$$

取 $s=0,\ \dfrac{\pi}{2c}$，可得 $|\boldsymbol{a}|^2=1$, $|\boldsymbol{b}|^2=1$，代入上式可得 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\sin cs\cos cs=0$，由 s 的任意性可知 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$. 设 A 为任一正交阵，$\boldsymbol{a}_0=(1,0,0)^T, \boldsymbol{b}_0=(0,1,0)^T$，取 $\boldsymbol{a}=A\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{b}=-A\boldsymbol{b_0}$，于是

$$\boldsymbol{r}(s)=A(\sin cs,\cos cs,0)+\xi$$

其中 $\xi\in\mathbb{R}^3$ 为常向量，故 $\boldsymbol{r}$ 是一段圆弧. □

题目 6. 2.3 练习 6 求

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x^2+y^2=x\end{cases}$$

在 $(0,0,1)$ 处的曲率和挠率.

解答. 令 $\boldsymbol{r}(x,y,z)=\boldsymbol{r}(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$，代入 $x^2+y^2=x$ 中可得 $\sin^2\varphi=\sin\varphi\cos\theta\Rightarrow\sin\varphi=\cos\theta\ (\varphi\neq 0)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\varphi)&=(\sin^2\varphi,\sin\varphi\cos\varphi,\cos\varphi),\\ \boldsymbol{r}'(\varphi)&=(-2\sin\varphi\cos\varphi,\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,-\sin\varphi),\\ \boldsymbol{r}''(\varphi)&=(4\sin^2\varphi-2,-4\sin\varphi\cos\varphi,-\cos\varphi),\\ \boldsymbol{r}'''(\varphi)&=(8\cos\varphi,4(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi),\sin\varphi).\end{aligned}$$

取 $\varphi \to 0^+$ 有 $\boldsymbol{r}' = (0,1,0)$, $\boldsymbol{r}'' = (-2,0,1)$, $\boldsymbol{r}''' = (8,-4,0)$, $|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = \sqrt{5}$, $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = -8$ 则

$$\kappa(0,0,1) = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|} = \sqrt{5}, \quad \tau(0,0,1) = -\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

题目 7. 2.4 练习 3 证明：若曲线段曲率 κ 处处不为 0，每个点的密切平面都过一个固定点，则这个曲线段在一个平面内.

证明. 令弧长参数化为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} : (a,b) &\to \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \boldsymbol{r}(s) \end{aligned}$$

设密切平面均过点 $\boldsymbol{x}_0$，则存在实函数 $a(s), b(s)$ 使得 $\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{x}_0 = a(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + b(s)\boldsymbol{\beta}(s)$，两边对 s 求导可得

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = a'(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + a(s)\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) + b'(s)\boldsymbol{\beta}(s) + b(s)\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)$$

由标架运动公式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(s) \\ \boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(s) \\ \boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}(s) \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = (a'(s) - b(s)\kappa(s) - 1)\boldsymbol{\alpha}(s) + (b'(s) + a(s)\kappa(s))\beta(s) + b(s)\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s) = 0$$

由于 $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ 两两正交，于是上式系数恒为 0，若 $b(s) \equiv 0$，则 $a(s)\kappa(s) = 0$，由于 $\kappa(s)$ 几乎处处不为零，则 $a(s)$ 几乎处处为零，于是 $\boldsymbol{r}(s)$ 几乎处处为 $\boldsymbol{x}_0$，与 $\kappa(s)$ 几乎处处不为零矛盾. 所以 $\tau(s)$ 几乎处处为零，由**引理 2.3** 可知该曲线段是平面曲线段. □

题目 8. 2.4 练习 4 设 $\{r(s), \alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\}$ 是定义在弧长参数曲线 $r(s)$ 上的单位正交标架. 令

$$\dot{\alpha}_i(s) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_i^j(s)\alpha_j(s)$$

求证：$\lambda_i^j + \lambda_j^i = 0$.

解答. 取 $s \in (a,b)$，由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_1(s), \boldsymbol{\alpha}_2(s), \boldsymbol{\alpha}_3(s)\}$ 是单位正交标架，设 $\boldsymbol{r}(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$，于是存在正交阵 A，使得 $A(\boldsymbol{\alpha}_1(s), \boldsymbol{\alpha}_2(s), \boldsymbol{\alpha}_3(s))^T = (\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s))^T$，且 $A^T = A^{-1}$，由题目可知，只需证下述矩阵 C 为反对称矩阵

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1(s) \\ \boldsymbol{\alpha}_2(s) \\ \boldsymbol{\alpha}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ \lambda_3^1 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1(s) \\ \boldsymbol{\alpha}_2(s) \\ \boldsymbol{\alpha}_3(s) \end{bmatrix} =: C \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1(s) \\ \boldsymbol{\alpha}_2(s) \\ \boldsymbol{\alpha}_3(s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

由标架运动公式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\ \boldsymbol{\beta}(s)\\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa(s) & 0\\ -\kappa(s) & 0 & 0\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\ \boldsymbol{\beta}(s)\\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}=:B\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\ \boldsymbol{\beta}(s)\\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}$$

于是对式 (1) 两侧同时左乘正交阵 A 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\ \boldsymbol{\beta}(s)\\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}=ACA^{-1}A\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1(s)\\ \boldsymbol{\alpha}_2(s)\\ \boldsymbol{\alpha}_3(s)\end{bmatrix}=ACA^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\ \boldsymbol{\beta}(s)\\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}$$

于是 $ACA^{-1}=B\Rightarrow C=A^{-1}BA=A^TBA$，其中 B 为反对称矩阵，下面证明 C 是反对称矩阵：

令 $AB=D=[d_{ij}]$，则 $d_{ij}=\sum\limits_k a_{ik}b_{kj}$，于是

$$\begin{aligned}c_{ij}&=\sum_l d_{il}a_{jl}=\sum_{k,l}a_{ik}b_{kl}a_{jl}=\sum_{l>k}a_{ik}a_{jl}b_{kl}+\sum_{l<k}a_{ik}a_{jl}b_{kl}\\ &\xlongequal{b_{kl}=-b_{lk}}\sum_{l>k}a_{ik}a_{jl}b_{kl}-\sum_{k>l}a_{ik}a_{jl}b_{lk}=\sum_{l>k}(a_{ik}a_{jl}-a_{il}a_{jk})b_{kl}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}c_{ii}&=\sum_{l>k}(a_{ik}a_{il}-a_{ik}a_{il})b_{kl}=0,\quad(\forall i=1,2,3)\\ c_{ij}&=-\sum_{l>k}(a_{jk}a_{il}-a_{jl}a_{ik})b_{kl}=-c_{ji}\quad(\forall i,j=1,2,3,\ i\neq j).\end{aligned}$$

故矩阵 C 为反对称矩阵.