4.7 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 和 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$。

解答. 设插值区间为 $[a,b]$，对于插值点 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，由差商的性质知，存在 ξ 介于所有插值点之间，满足

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^n(\xi)}{n!}$$

由于 $f(x)$ 为 7 阶首一多项式，则 $f^7(x)=7!,f^8(x)=0$，所以

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^6,2^7]=\frac{f^7(\xi)}{7!}=1$$
$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7,2^8]=\frac{f^8(\xi')}{8!}=0$$

4.8 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上三阶导数连续，$x_0,x_1\in[a,b]$，构造满足如下条件：

$$p(x_0)=f(x_0),\quad p'(x_0)=f'(x_0),\quad p(x_1)=f(x_1)$$

的二次插值多项式 $p(x)$，并写出截断误差表达式。

解答. 通过计算得到如下的差商表：

x_i	$f[x_1]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f'(x_0)}{x_1-x_0}$

通过差商表可得插值多项式和截断误差表达式：

$$p(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f'(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x-x_0)^2$$
$$R_n(x)=f[x_0,x_0,x_1,x](x-x_0)^2(x-x_1)$$

4.9 已知函数 $y=f(x)$ 在若干点处的函数值、导数值如下表所示，求埃尔米特插值多项式和截断误差表达式：

(1)

x_i	-1	0	1
y_i	-1	0	1
y_i'	0	0	0

；

(2)

x_i	0	1	2
y_i	1	-1	0
y_i'	0	0	
y_i''	2		

.

解答. (1) 计算差商表如下:

x_i	$f[x_1]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
-1	-1					
-1	-1	0				
0	0	1	1			
0	0	0	-1	-2		
1	1	1	1	1	$\frac{3}{2}$	
1	1	0	-1	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

通过差商表可得插值多项式和截断误差表达式:

$$\begin{aligned} H_5(x) = & -1+(x+1)^2-2(x+1)^2x+\frac{3}{2}(x+1)^2x^2-\frac{3}{2}(x+1)^2x^2(x-1) \\ = & -\frac{x^3}{2}(3x^2-5) \end{aligned}$$

$$R_5(x)=f[-1,-1,0,0,1,1,x](x+1)^2x^2(x-1)^2$$

(2) 计算差商表如下:

x_i	$f[x_1]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	1					
0	1	0				
0	1	0	1			
1	-1	-2	-2	-3		
1	-1	0	2	4	7	
2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{37}{8}$

通过差商表可得插值多项式和截断误差表达式:

$$H_5(x)=1+x^2-3x^3+7x^3(x-1)-\frac{37}{8}x^3(x-1)^2$$

$$R_5(x)=f[0,0,0,1,1,2,x]x^3(x-1)^2(x-2)$$

4.10 设 x_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 是互不相同的插值节点, $l_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 是拉格朗日插值基函数。证明:

(1) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x)=1$;

(2) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k=x^k$ $(k=1,2,\cdots,n)$;

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x)(x_i-x)^k=0\ (k=1,2,\cdots,n)$;

(4) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(0)x_i^k=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k=1,2,\cdots,n,\\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & k=n+1.\end{cases}$

证明. (1) 构造常值函数 $f(x)=1$，则 $f^{(k)}(x)=0\ (\forall k\in\mathbb{N}^*)$。设插值区间为 $(-\infty,+\infty)$，对于 $\mathbb{R}$ 上任意 $n+1$ 个插值点，由 Lagrange 插值法 知

$$L_n(x)=l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)\equiv 0$$

由于 $R_n(x)\equiv 0$，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $L_n(x)\equiv f(x)=1$，故

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=1$$

(2) 构造函数 $f(x)=x^k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则 $f^{(n+1)}=0$。设插值区间为 $(-\infty,+\infty)$，对于 $\mathbb{R}$ 上任意 $n+1$ 个插值点，由 Lagrange 插值法 知

$$L_n(x)=l_0(x)x_0^k+l_1(x)x_1^k+\cdots+l_n(x)x_n^k=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)\equiv 0$$

由于 $R_n(x)\equiv 0$，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $L_n(x)\equiv f(x)=x^k$，故

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k=x^k$$

(3) $\forall t\in\mathbb{R}$，构造函数 $f(x)=(x-t)^k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则 $f^{(n+1)}=0$。设插值区间为 $(-\infty,+\infty)$，对于 $\mathbb{R}$ 上任意 $n+1$ 个插值点，由 Lagrange 插值法 知

$$L_n(x)=l_0(x)(x_0-t)^k+l_1(x)(x_1-t)^k+\cdots+l_n(x)(x_n-t)^k=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)(x_i-t)^k$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)\equiv 0$$

由于 $R_n(x)\equiv 0$，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $L_n(x)\equiv f(x)=(x-t)^k$，所以

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)(x_i-t)^k=(x-t)^k$$

又由于 t 的任意性，取 $t=x$，得

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)(x_i-x)^k=0$$

(4) 由 (1),(2) 分别可知 $k=0,k=1,2,\cdots,n$ 的两种情况，下面证明 $k=n+1$ 的情况：

构造函数 $f(x)=x^{n+1}$，则 $f^{(n+1)}=(n+1)!$。设插值区间为 $(-\infty,+\infty)$，对于 $\mathbb{R}$ 上任意 $n+1$ 个插值点，由 Lagrange 插值法 知

$$L_n(x)=l_0(x)x_0^{n+1}+l_1(x)x_1^{n+1}+\cdots+l_n(x)x_n^{n+1}=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^{n+1}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)=\pi_{n+1}(x)$$

则

$$\begin{aligned} & f(x)-L_n(x)=R_n(x)=\pi_{n+1}(x) \\ \Rightarrow\ & \sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^{n+1}=x^{n+1}-(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ (\text{令}x=0)\ \Rightarrow\ & \sum_{i=0}^{n} l_i(0)x_i^{n+1}=(-1)^n x_0x_1\cdots x_n \end{aligned}$$

□

4.11 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$，方程 $f(x)=0$ 有 n 个不同的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明

(1)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ 1/a_n, & k=n-1.\end{cases}$$

(2) 设 $x_i\neq 0,-1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^n f(x_i^{-1})}{f'(x_i)(1+x_i)}=(-1)^n(x_1x_2\cdots x_n-1);$$

(3)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{(i-1)\cdots(i-i+1)(i-i-1)\cdots(i-n)}=0,\quad k=0,1,\cdots,n-2.$$

证明. 由代数基本定理知，$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=a_n\pi_n(x)$，

(1) 令 $g(x)=x^k$，根据差商的性质可知，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{a_n\pi_n'(x_i)}=\frac{1}{a_n}g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{a_n(n-1)!}$$

其中 ξ 在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间。当 $k\leqslant n-2$ 时 $g^{(n-1)}\equiv 0$，当 $k=n-1$ 时 $g^{(n-1)}=(n-1)!$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ 1/a_n, & k=n-1.\end{cases}$$

(2) 令 $g(x)=x^n f(x^{-1})=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，做 $g(x)$ 对 $(1+x)$ 的带余数除法，存在唯一的 $q(x),r(x)$，使得

$$g(x)=(1+x)q(x)+r(x)$$

其中 $\deg q(x)=n-1$ 且首项为 a_n，由多项式除法可知

$$r(x)=a_0(-1)^n+a_1(-1)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(-1)+a_n=g(-1)=(-1)^nf(-1)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^nf(x_i^{-1})}{f'(x_i)(1+x_i)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f'(x_i)(1+x_i)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q(x_i)}{f'(x_i)}+\frac{r(x_i)}{f'(x_i)(1+x_i)}\right)\\&\xlongequal[\text{利用(1)结论}]{\text{将}q(x)\text{首项提出来}}\frac{a_0}{a_n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^nf(-1)}{f'(x_i)(1+x_i)}\end{aligned}\tag{1}$$

令 $l_i=\dfrac{f(x)}{f'(x_i)(x-x_i)}$，由 **4.10(1)** 可知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}l_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{f'(x_i)(x-x_i)}&=1\\(\text{令}x=-1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{f(-1)}{f'(x_i)(-1-x_i)}&=1\\\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{f(-1)}{f'(x_i)(1+x_i)}&=-1\end{aligned}\tag{2}$$

又由于 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，通过对比常数项系数可以发现：

$$a_0=(-1)^na_nx_1x_2\cdots x_n\tag{3}$$

将 (2),(3) 带回到 (1) 式中，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^nf(x_i^{-1})}{f'(x_i)(1+x_i)}&=(-1)^nx_1x_2\cdots x_n+(-1)^{n+1}\\&=(-1)^n(x_1x_2\cdots x_n-1)\end{aligned}$$

(3) 令 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，$x_i=i\ (i=1,2,\cdots,n)$，由 (1) 知，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{(i-1)\cdots(i-i+1)(i-i-1)\cdots(i-n)}=0,\quad k=0,1,\cdots,n-2.$$

$\square$