日期	科目	姓名，学号
2021 年 12 月 2 日	离散数学	吴天阳 2204210460

第八章

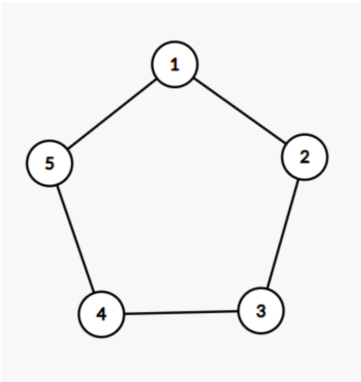
4.

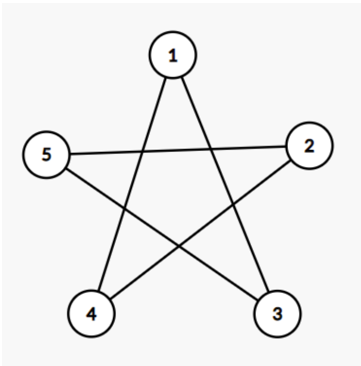
证明. 中间小正方形的左上角度为 3 的结点记为 v_1，在 (a) 左图中，中间小正方形左下角度为 3 的结点记为 v_2，(a) 右图中，中间小正方形右下角度为 3 的结点记为 v_3，则 $d(v_1,v_2)=1$，而 $d(v_1,v_3)=2$，故 (a) 左图与 (a) 右图不同构。

记右下角有自环的结点为 v_1，(b) 左图中，右侧度为 4 的结点记为 v_2，(b) 右图中，左侧度为 4 的结点记为 v_3，则 $d(v_1,v_2)=1$，而 $d(v_1,v_3)=2$，故 (b) 左图与 (b) 右图不同构。 □

5.

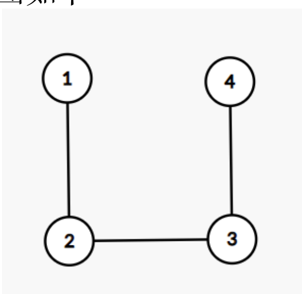
证明. (1). 五个结点的自补图如下：

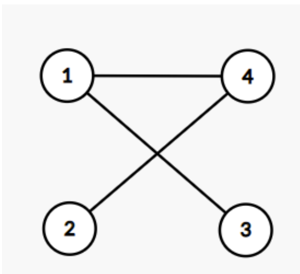




(2). 没有三个结点的自补图，因为三个结点的完全图边数为 $\frac{3\cdot 2}{2}=3$，为奇数，设图 G 为包含三个节点的图，边数为 n，由于自补图边数必须相同，则完全图中的边数应为 $2n$，与 3 为奇数矛盾，故没有三个结点的自补图。

四个结点的自补图如下：





(3). 设 G 为自补图，G 的边数为 n，由于 G 同构于它的补图 G'，则 G' 中的边数也为 n，又由于 G 和 G' 中的边的并为完全图中的边数，则完全图中的边数为 $2n$，故它对应的完全图的边数必然为偶数。 □

6.

证明. 设组内一共有 n 个人，将每个人视为一个结点，朋友关系视为一条无向边，由于每个人不能和自己做朋友，两个人之间有且仅有一个朋友关系，所以此图没有重边和自环，故为简单图，且每个人朋友个数等价于人所对应的结点的度。

反设，不存在两个人在组内有相同个数的朋友，即任意两个结点的度都不相同，由于简单图中结点的度必须在 0 到 $n-1$ 之间，由于这正好也有 n 个数，故结点的度和 $0, 1, \cdots, n-1$ 构成双射，则一定存在一个结点的度为 $n-1$，即它与其他所有结点都相邻，但这与图中存在一个度为 0 的结点矛盾。

综上，一定存在两个人在组内有相同个数的朋友。 □

10.

证明. 反设 G 不是连通图，则存在 $v_i \in G$，使得 $\forall v_j \in V(G)$，$v_i \neq v_j$，$d(v_i, v_j) = \infty$，即 v_i 与其他所有点都没有连边，则

$$\begin{aligned} m &\leqslant \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) \\ \Rightarrow m &\leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

与 $m > \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 矛盾。

故 G 为连通图。 □