Міністерство освіти і науки України

НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Навчально-науковий інститут атомної та теплової енергетики

Кафедра цифрових технологій в енергетиці

Лабораторна робота №3

з дисципліни «Чисельні методи для розв’язання енергетичних задач»

Тема «Розв'язування диференціальних рівнянь засобами Mathcad»

Варіант №22

Виконав:

Студент 3-го курсу НН ІАТЕ

гр. ТР-12

Ковальов Олександр

КИЇВ 2023

Мета: Вивчити основні функції MathCad, призначені для розв'язання диференціальних рівнянь, набути навичок розв'язання диференціальних рівнянь засобами MathCad Prime 9.

Завдання 1.

Розв’яжіть на відрізку $[x_0; x_{end}]$ задачу Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Зобразіть графік розв’язку. Для розв’язання рівняння використовувати функції **odesolve**, **rkfixed**, **Bulstoer**. Відрізок інтегрування: $[0, 3]$.

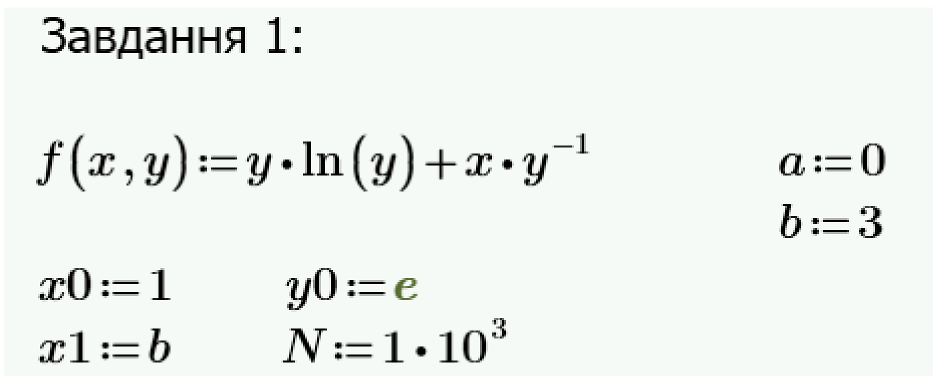
Варіант: $22 \% 10 = 2$.

Функція за варіантом: $y * \ln(y) + xy^{-1} = 0$.

Початкова умова: $y(1) = e$.

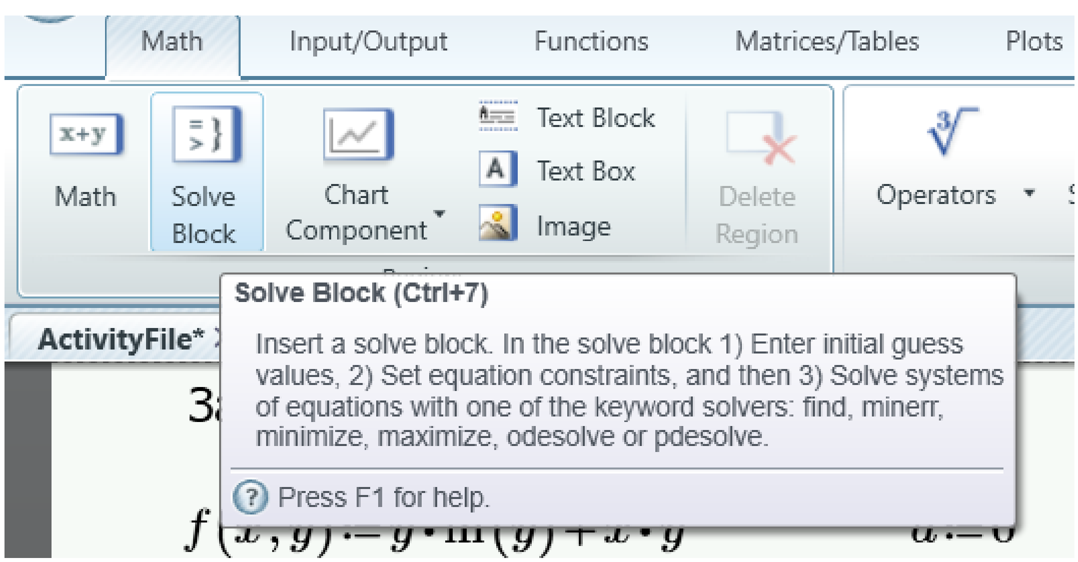
Спочатку, розв’яжемо рівняння за допомогою функції **odesolve**.

Ініціалізуємо потрібні змінні:

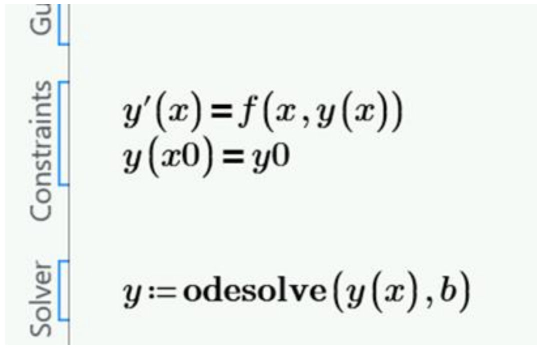


Де $f(x, y)$ – функція, a і b – межі відрізку, на якому розв’язуємо проблему Коші, x_0, y_0 – значення для початкової умови, x_1 – кінець відрізку, N – кількість значень на відрізку (в даному методі не використовується).

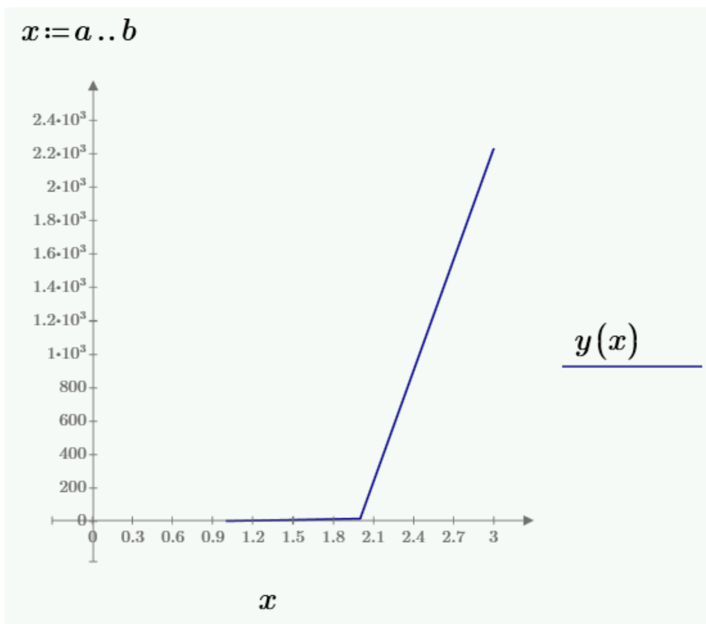
Для того, щоб задати проблему Коші, використовуємо **Solve Block**: структуру, яка призначена для вирішення систем диференційних рівнянь, знаходження мінімуму або максимуму функції, тощо.



Guess Values – розділ для ініціалізації змінних, можна залишити порожнім. Constraints – в перекладі з англійської «умови» або «обмеження». Вводимо диференційне рівняння та початкову умову. Solver – розділ для того, щоб вказати, що плануємо робити. У нашому випадку – розв’язати систему диференційних рівнянь, яка складається з одного рівняння:

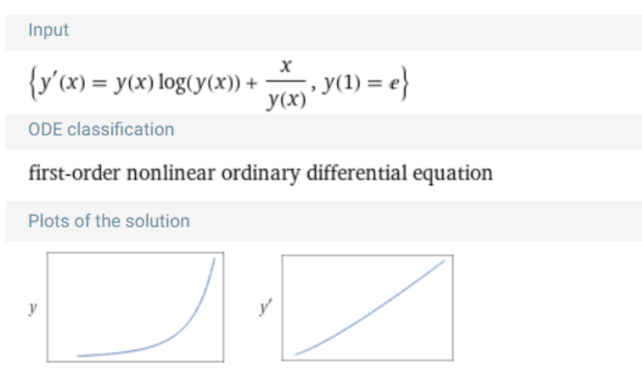


Помилок немає, все чудово. Будуємо графік:



Функція **odesolve** знаходить рішення починаючи з точки, для якої задана початкова умова, тому маємо результат на відрізку $[1,3]$.

Перевіряємо розв’язок за допомогою Wolfram Alpha. Результат однаковий.



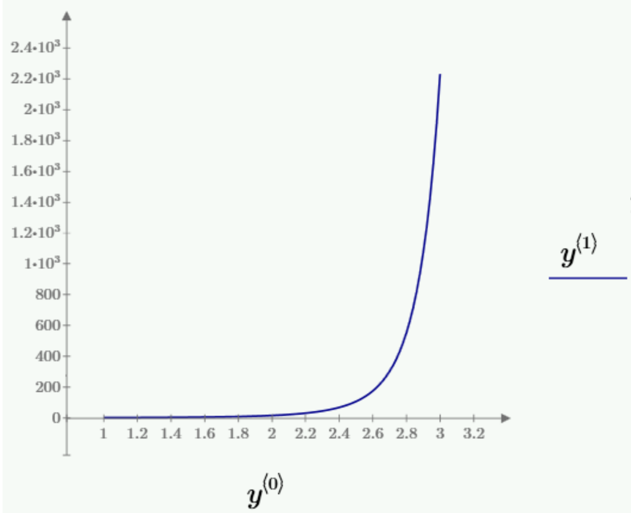
Розв’яжемо рівняння за допомогою функції **rkfixed** *(алгоритм Рунге-Кутта)*.

Присвоюємо змінній y значення функції. Її параметри – початкове значення, межі диференціювання (вказуємо $x = 1$ як початкову точку, тому що для неї є початкове значення), кількість точок диференціювання (у даному випадку – 100) та функцію.

Виводимо вектор результатів за допомогою оператору =. Будуємо графік, в полях для осей використовуємо оператор “Matrix Column” *(Ctrl+Shift+C)*.

В результаті отримуємо графік, більш схожий на той, що повинен бути. Різниця полягає в кількості точок, взятих для побудови. Також серед переваг цього методу те, що можна отримати вектор значень.

$$y := \mathrm{rkfixed}(y0, 1, 3, N, f)$$

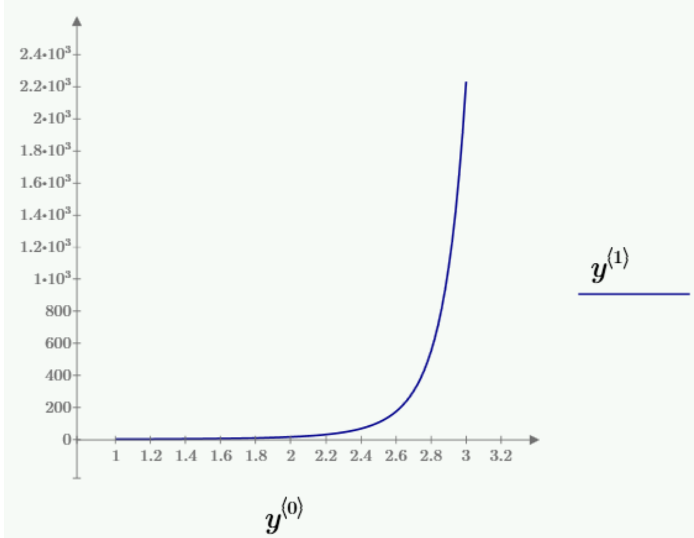


$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2.718 \\ 1.02 & 2.781 \\ 1.04 & 2.847 \\ 1.06 & 2.915 \\ 1.08 & 2.986 \\ 1.1 & 3.06 \\ 1.12 & 3.137 \\ 1.14 & 3.218 \\ 1.16 & 3.302 \\ 1.18 & 3.39 \\ 1.2 & 3.482 \\ 1.22 & 3.578 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

Розв’яжемо рівняння за допомогою функції **Bulstoer** *(алгоритм Булірша-Штера)*.

Різниця між цим і минулим методом лише в точності, яка не дуже важлива у даному випадку. Алгоритм Булірша-Штера точніший, але повільніший. Щодо Mathcad – сигнатура функції не відрізняється від сигнатури попередньої функції.

$$y := \mathrm{Bulstoer}(y0, 1, 3, N, f)$$



$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2.718 \\ 1.02 & 2.781 \\ 1.04 & 2.847 \\ 1.06 & 2.915 \\ 1.08 & 2.986 \\ 1.1 & 3.06 \\ 1.12 & 3.137 \\ 1.14 & 3.218 \\ 1.16 & 3.302 \\ 1.18 & 3.39 \\ 1.2 & 3.482 \\ 1.22 & 3.578 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

Завдання 2.

Розв'яжіть задачу Коші $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$, $y_1(a) = y_{1,0}$, $y_2(a) = y_{2,0}$ на відрізку $[a, b]$ з кроком $h = 0{,}1$. Зобразіть графіки розв'язків. Для розв'язання рівняння використовувати функції **odesolve**, **rkfixed**, **Bulstoer**.

Варіант: $22 \% 10 = 2$.

Функція 1 за варіантом: $\arctan(x^2 + y_2^2)$.

Функція 2 за варіантом: $\sin(x + y_1)$.

Відрізок інтегрування: $[0, 2]$.

Початкова умова 1: $y_1(0) = 0{,}5$.

Початкова умова 2: $y_2(0) = 1{,}5$.

Розв'яжемо систему за допомогою функції **odesolve**.

Вносимо всі потрібні дані:

Завдання 2:

$Start := 0 \qquad End := 2$

$N := 100$

$f1(x, y1, y2) := \operatorname{atan}(x^2 + y2^2)$

$f2(x, y1, y2) := \sin(x + y1)$

$x0 := 0 \qquad y10 := 0.5 \qquad y20 := 1.5$

Constraints

$y1'(x) = f1(x, y1(x), y2(x))$

$y2'(x) = f2(x, y1(x), y2(x))$

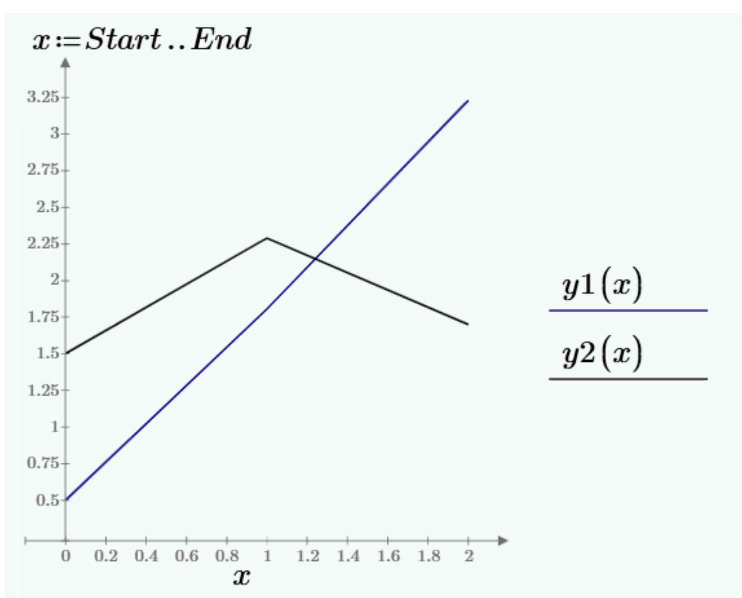
$y1(x0) = y10$

$y2(x0) = y20$

Solver

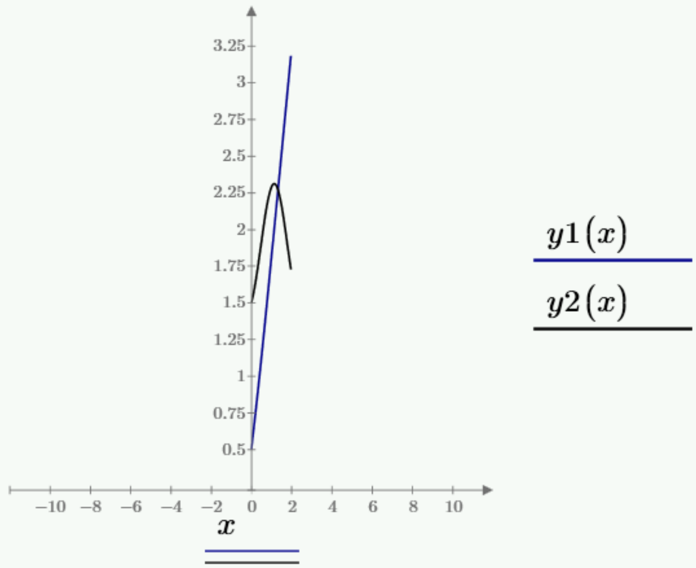
$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left(\begin{bmatrix} y1(x) \\ y2(x) \end{bmatrix}, End\right)$

Будуємо графіки:



Ті ж графіки у зменшеному масштабі:

$$x := Start\,..\,End$$



Перевірити результат можна за допомогою використання інших функцій.

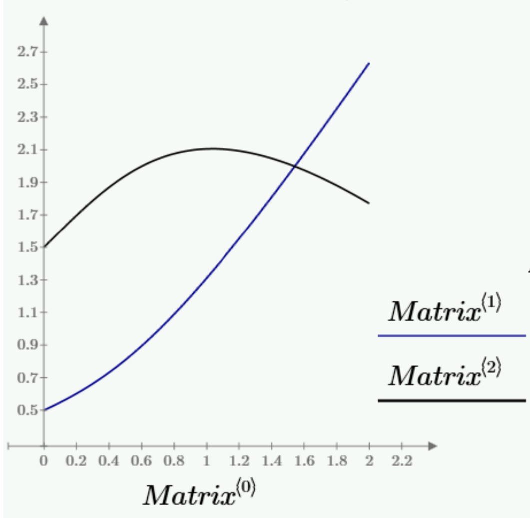
Розв’яжемо систему за допомогою функції **rkfixed**.

Створюємо вектор початкових значень та функцію, яка визначає вектор похідних. Y – змінна, яка відповідає певним y. Нумерація була здійснена за допомогою оператору “Matrix Index”.

$$Conditions := \begin{bmatrix} y10 \\ y20 \end{bmatrix} \qquad System(x, Y) := \begin{bmatrix} \operatorname{atan}\left(x^2 + Y_0\right) \\ \sin\left(x + Y_1\right) \end{bmatrix}$$

Будуємо графік. Схожий на 1, але з більшою кількістю точок ($N = 100$).

$$Matrix := \mathrm{rkfixed}(Conditions, Start, End, N, System)$$

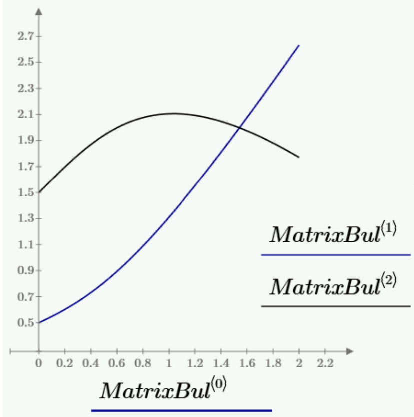


$$Matrix = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0.02 & 0.509 & 1.52 \\ 0.04 & 0.519 & 1.54 \\ 0.06 & 0.529 & 1.56 \\ 0.08 & 0.538 & 1.58 \\ 0.1 & 0.549 & 1.6 \\ 0.12 & 0.559 & 1.62 \\ 0.14 & 0.569 & 1.639 \\ 0.16 & 0.58 & 1.659 \\ 0.18 & 0.591 & 1.678 \\ 0.2 & 0.602 & 1.697 \\ 0.22 & 0.614 & 1.716 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

Розв'яжемо систему за допомогою функції **Bulstoer**.

Як і у випадку з диференціальним рівнянням, змін немає.

$MatrixBul := \mathrm{Bulstoer}(Conditions, Start, End, N, System)$



$$MatrixBul = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0.02 & 0.509 & 1.52 \\ 0.04 & 0.519 & 1.54 \\ 0.06 & 0.529 & 1.56 \\ 0.08 & 0.538 & 1.58 \\ 0.1 & 0.549 & 1.6 \\ 0.12 & 0.559 & 1.62 \\ 0.14 & 0.569 & 1.639 \\ 0.16 & 0.58 & 1.659 \\ 0.18 & 0.591 & 1.678 \\ 0.2 & 0.602 & 1.697 \\ 0.22 & 0.614 & 1.716 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

Завдання 3.

Знайти на відрізку $[a, b]$ наближений розв'язок рівняння $y'' = f(x, y, y')$, що задовольняє початковим умовам $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_0'$, і побудуйте графік знайденого розв'язку. Для розв'язання рівняння використати функції **odesolve**, **rkfixed**, **Bulstoer**.

Варіант: $22 \,\%\, 10 = 2$.

Функція за варіантом: $3x^2$.

Відрізок інтегрування: $[0, 5]$.

Початкова умова 1: $y(a) = 2$.

Початкова умова 2: $y'(a) = 1$.

Зведемо розв'язання задачі для рівняння другого порядку до задачі для еквівалентної нормальної системи першого порядку. Позначимо $y_1(x) = y(x)$ та $y_2(x) = y'(x)$. Оскільки $y''(x) = \big(y'(x)\big)' = y_2'(x)$, то отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1' = y2 \\ y_2' = 3x^2 \end{cases}, \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за допомогою функції **odesolve**.

Вносимо всі потрібні дані:

Завдання 3:

$Start := 0 \qquad End := 5 \qquad N := 100$

$f1(x, y1, y2) := y2$

$f2(x, y1, y2) := 3 \cdot x^2$

$x0 := Start \qquad y10 := 2 \qquad y20 := 1$

Constraints

$y1'(x) = f1(x, y1(x), y2(x))$

$y2'(x) = f2(x, y1(x), y2(x))$

$y1(x0) = y10$

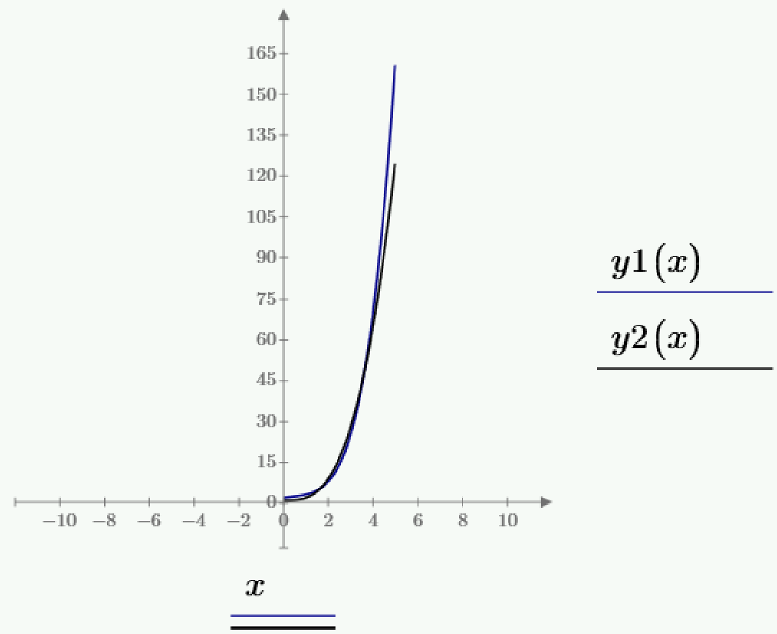
$y2(x0) = y20$

Solver

$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left(\begin{bmatrix} y1(x) \\ y2(x) \end{bmatrix}, End\right)$

Графіки:

$$x := Start..End$$

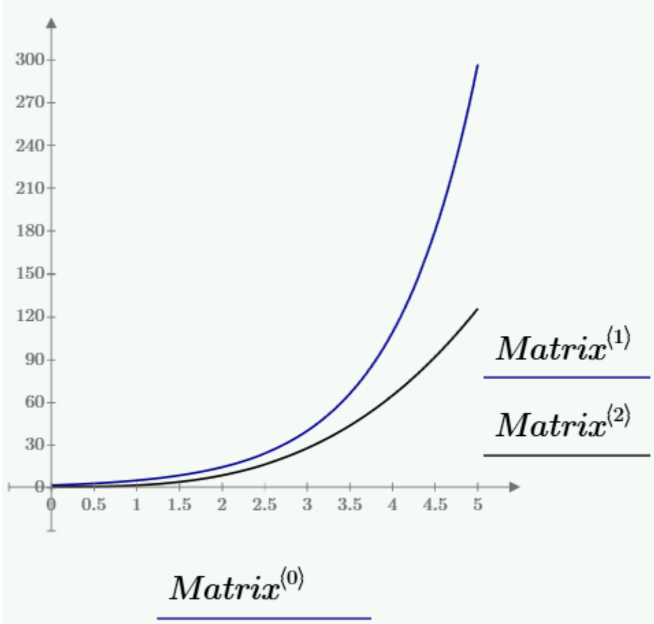


Розв’яжемо систему за допомогою функції **rkfixed**.
Початкові дані:

$$Conditions := \begin{bmatrix} y10 \\ y20 \end{bmatrix} \qquad System(x, Y) := \begin{bmatrix} Y_0 \\ 3\ x^2 \end{bmatrix}$$

Графіки:

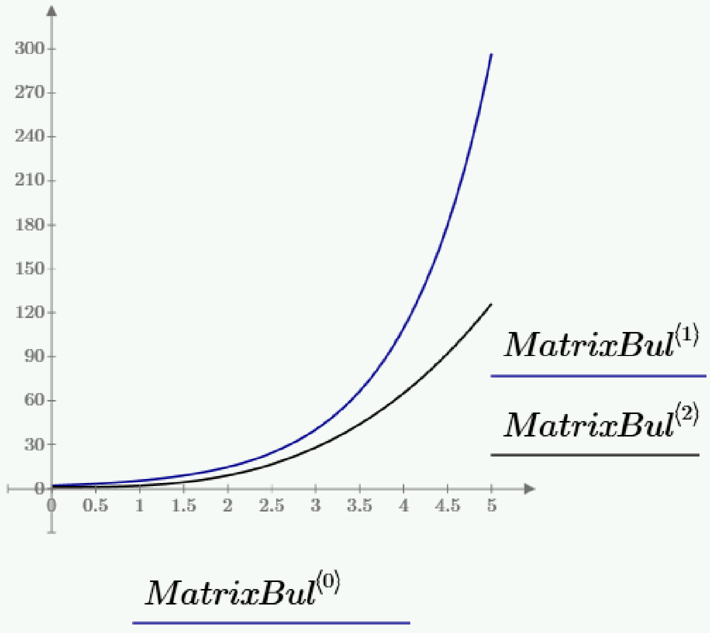
$$Matrix := \mathrm{rkfixed}(Conditions, Start, End, N, System)$$



$$Matrix = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.05 & 2.103 & 1 \\ 0.1 & 2.21 & 1.001 \\ 0.15 & 2.324 & 1.003 \\ 0.2 & 2.443 & 1.008 \\ 0.25 & 2.568 & 1.016 \\ 0.3 & 2.7 & 1.027 \\ 0.35 & 2.838 & 1.043 \\ 0.4 & 2.984 & 1.064 \\ 0.45 & 3.137 & 1.091 \\ 0.5 & 3.297 & 1.125 \\ 0.55 & 3.467 & 1.166 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

Розв’яжемо систему за допомогою функції **Bulstoer**.

$$MatrixBul := \mathrm{Bulstoer}\left(Conditions, Start, End, N, System\right)$$



$$MatrixBul = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.05 & 2.103 & 1 \\ 0.1 & 2.21 & 1.001 \\ 0.15 & 2.324 & 1.003 \\ 0.2 & 2.443 & 1.008 \\ 0.25 & 2.568 & 1.016 \\ 0.3 & 2.7 & 1.027 \\ 0.35 & 2.838 & 1.043 \\ 0.4 & 2.984 & 1.064 \\ 0.45 & 3.137 & 1.091 \\ 0.5 & 3.297 & 1.125 \\ 0.55 & 3.467 & 1.166 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

Приблизний розв’язок знайдено.

Висновок: під час виконання цієї лабораторної роботи були набуті практичні навички з розв’язання диференціальних функцій і систем в Mathcad Prime 9. Були вивчені основні функції. Також, була проведена певна робота з диференційними рівняннями.