定义1、设$f: A \to B$，$g: B \to C$

令$(gf)(a) := g(f(a))$，$\forall a \in A$，则

称gf为g与f的乘积或合成

映射的乘法满足结合律，不满足交换律

定义2、若$f: A \longrightarrow A$，$a \longmapsto a$，则f为A上恒等变换，记作I_A

（相当于数乘1元的作用）

命题1. 设$f: A \longrightarrow B$，则 $fI_A = f$，$I_B f = f$

证：$fI_A(a) = f(a)$，$I_B f(a) = f(a)$

定义3、设$f: A \longrightarrow B$，如果$\exists\, g: B \longrightarrow A$，s.t. $gf = I_A$，$fg = I_B$，

则称f是可逆映射，g为f的逆映射，且唯一，

记作f^{-1}，此时有$f^{-1}f = I_A$，$ff^{-1} = I_B$　　待证

$\therefore$ f^{-1}也为可逆映射，且$(f^{-1})^{-1} = f$

定理1. $f: A \to B$是可逆映射$\Longleftrightarrow$ f为双射

证：$\Rightarrow$ $\because$ f存在逆映射$f^{-1}: B \to A$

$\therefore$ 对于$\forall b \in B$，在A中存在唯一的a通过f^{-1}与之对应

$\therefore$ f为满射，且f为单射

$\therefore$ f为双射

$\Leftarrow$ 设 $f: A \longrightarrow B$，$a \longmapsto b$

任取 $b \in B$，$\because f$ 为双射 $\therefore$ 有唯一的 $a \in A$ s.t. $f(a)=b$

把 b 对 a 的一个对应法则取为 $g: B \to A$

$\therefore g$ 为一个映射

$\because gf(a) = g(f(a)) = g(b) = a$ $\therefore gf = I_A$

$\because fg(b) = f(a) = b$ $\therefore fg = I_B$