定理1. 设$\underline{A}$为域F上n维线性空间V上的一个线性变换.

若$\underline{A}$的最小多项式$m(\lambda)$在$F[\lambda]$中的标准分解式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s} \quad (1)$$

则V中有一基使得$\underline{A}$在此基下矩阵为Jordan形矩阵

其主对角元为$\underline{A}$的全部特征值.

主对角元为λ_j的Jordan块个数$N_j=n-\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$

主对角元为λ_j的t级Jordan块个数

$$N_j(t)=\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t-1}+\operatorname{ran}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t+1}-2\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t}$$

此Jordan标准形除Jordan块的排列顺序外由$\underline{A}$唯一确定

证: $\because$ $m(\lambda)$与$\underline{A}$的特征多项式的根相同

$\therefore$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$即为$\underline{A}$的特征值

且 $V=\operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})^{l_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_s\underline{I})^{l_s}$

$V=\quad W_1 \quad \oplus\cdots\oplus \quad W_s$

令$\underline{B_j}=\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I}$, 则$\underline{B_j}$为$W_j$上幂零变换,幂零指数$l_j$

则可在W_j中取一基, 使得$\underline{B_j}$在W_j下的矩阵B_j为主对角为0的Jordan形矩阵

设$\underline{A}|W_j$在W_j此基下矩阵为A_j, 则

$B_j=A_j-\lambda_j I$, $A_j=B_j+\lambda_j I$

$\therefore$ A_j为主对角为λ_j的Jordan形矩阵

$\therefore$ $\underline{A}$在W_1一基, $\cdots$, W_s一基下所成的V一基下的矩阵为Jordan形

$N_j=\dim(\operatorname{Ker}\underline{B_j})=\dim(\operatorname{Ker}(\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I}))$

引理: $\forall m\in N^+$, 有 $\operatorname{Ker}(\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I})^m=\operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m$

证: $\alpha\in\operatorname{Ker}(\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I})^m \Longleftrightarrow \alpha\in W_j$且$(\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I})^m\alpha=0$

$\Longleftrightarrow \alpha\in W_j$且$(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m\alpha=0$

$\Rightarrow \alpha \in Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m$

当 $m \le l_j$ 时，$\alpha \in Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m \Leftrightarrow (\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m\alpha = 0$

$\Rightarrow (\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{l_j}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{l_j}$

$\Rightarrow \alpha \in W_j$

当 $m > l_j$ 时，令 $g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_j)^m\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$

$\because m(\lambda) | g(\lambda)$ $\therefore g(\lambda)$ 为 $\underline{A}$ 的零化多项式

$\therefore V = Ker(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})^{l_1} \oplus \cdots \oplus Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m \oplus \cdots \oplus Ker(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$

$= W_1 \oplus \cdots \oplus Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m \oplus \cdots \oplus W_s$

$\because V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j \oplus \cdots \oplus W_s$

V的基为其直和子空间基的并集

$\therefore W_j$ 与 $Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m$ 基相同

$\therefore W_j = Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m$ $\therefore \alpha \in W_j$

综上：即 $\alpha \in Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m \Rightarrow \alpha \in W_j$

$\therefore \alpha \in Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^m \Leftrightarrow \alpha \in Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m$

即 $Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^m = Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^m$

$\therefore Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I}) = Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$

$\therefore N_j = \dim(Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})) = \dim(Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I}))$

$= \dim V - rank(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$

$N_j(t) = B_j$ t 级Jordan块个数

$= rank\,\underline{B_j}^{t-1} + rank\,\underline{B_j}^{t+1} - 2\,rank\,\underline{B_j}^{t}$

$= (\dim W_j - \dim Ker\,\underline{B_j}^{t-1}) + (\dim W_j - \dim Ker\,\underline{B_j}^{t+1}) - 2(\dim B_j - \dim Ker\,\underline{B_j}^{t})$

$= 2\dim Ker\,\underline{B_j}^{t} - \dim Ker\,\underline{B_j}^{t-1} - \dim Ker\,B_j^{t+1}$

$= 2\dim Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^t - \dim Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^{t-1} - \dim Ker(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^t$

$= 2\dim Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^t - \dim Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t-1} - \dim Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t+1}$

$= 2(\dim V - rank(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^t) - (\dim V - rank(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t-1}) - (\dim V - rank(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{t+1})$

$= rank(\underline{A}-\lambda_j \underline{I})^{t-1} + ran(\underline{A}-\lambda_j \underline{I})^{t+1} - 2\, rank(\underline{A}-\lambda_j \underline{I})^t$

推论 1、域 F 上 n 级矩阵 A，若 A 最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积，则 A 相似于一 Jordan 形矩阵，其主对角线元素为 A 的全部特征值.

主对角元为 λ_j 的 Jordan 块个数 $N_j = n - rank(A-\lambda_j I)$

主对角元为 λ_j 的 t 级 Jordan 块个数

$N_j(t) = rank(A-\lambda_j I)^{t-1} + ran(A-\lambda_j I)^{t+1} - 2\, rank(A-\lambda_j I)^t$

此 Jordan 标准形除 Jordan 块的排列顺序外由 A 唯一确定

此矩阵称为 A 的 Jordan 标准形

定理 2. 设 $\underline{A}$ 为域 F 上 n 维线性变换，若 $\underline{A}$ 有 Jordan 标准形，则 $\underline{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积.

证：设 $\underline{A}$ 有 Jordan 标准形 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix}$

$\because$ $J_t(\lambda_0)$ 的最小多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^t$

$\therefore$ $\underline{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda) = [(\lambda-\lambda_1)^{t_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{t_s}]$

即 $m(\lambda)$ 为一次因式乘积

推论 2：$\underline{A}$ 有 Jordan 标准形 $\Longleftrightarrow$

$\underline{A}$ 特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解为一次因式乘积，在域 F 上

推论 3. A 相似于一 Jordan 标准形 $\Longleftrightarrow$

A 特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解为一次因式乘积，在域 F 上

推论 4. 复数域上矩阵都相似于一 Jordan 标准形

定理 3. 设 $A, B \in M_n(F)$，若其特征多项式（或最小多项式）可分解为一次因式乘积，则 $A \sim B \Longleftrightarrow$ A 与 B 有相同的 Jordan 标准形

(除去Jordan块排列顺序外)

证：设 $A\sim J_1$，$B\sim J_2$，则 $A\sim B \Longleftrightarrow J_1\sim J_2$

$J_1\sim J_2 \Longleftrightarrow$ J_1与J_2可视作域F上n维线性空间上变换 $\underline{A}$ 在不同基下矩阵

$\Longleftrightarrow$ J_1，J_2 为 $\underline{A}$ Jordan标准形

$\Longleftrightarrow$ J_1，J_2 除Jordan块排列顺序不同外，其余相同

推论：复数域上矩阵相似 $\Longleftrightarrow$ 有相同的Jordan标准形(除去Jordan块排列顺序外)