定义1. n元实二次型 $X'AX$，设 $\mathrm{rank}(A)=r$.

$X'AX \cong d_1x_1^2+\cdots+d_px_p^2-d_{p+1}x_{p+1}^2-\cdots-d_rx_r^2$.

其中 $d_i>0$，$i=1,\cdots r$.

又用 x_i 用 $\frac{1}{\sqrt{d_i}}x_i$ 代入 $i=1,\cdots r$ 得

$X'AX \cong x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2$

称为 $X'AX$ 的规范型（系数只为 $\pm1,0$）.

定理1（惯性定理）n元实二次型 $X'AX$，设 $\mathrm{rank}(A)=r$.

的规范型唯一.

证：设 $X'AX \cong x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2=X'D_pX$

$X'AX \cong x_1^2+\cdots+x_q^2-x_{q+1}^2-\cdots-x_r^2=X'D_qX$

由二次型等价的传递性可知 $D_p \cong D_q$

$\therefore D_p$. D_q 可看作 n 维实线性空间 V 上同一对称双线性函数的不同基 α_i, β_i 下度量矩阵

令. $V_1=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_p\rangle$，$V_2=\langle\beta_{q+1},\cdots,\beta_n\rangle$

设 $\alpha\in V_1\cap V_2$，$\alpha=\sum_{i=1}^{p}a_i\alpha_i=\sum_{q+1}^{n}b_i\beta_i$.

$$f(\alpha,\alpha)=(a_1,\cdots,a_p,0,\cdots0)D_p\begin{bmatrix}a\\ \vdots\\ a_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=(0,\cdots,0,b_{q+1},\cdots,b_n)D_q\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b_{q+1}\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$\therefore a_1^2+\cdots+a_p^2+b_{q+1}^2+\cdots+b_n^2=0$

$\therefore \alpha=0$ $\therefore V_1\cap V_2=\phi$

$\therefore \dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)\le\dim V$

∴ $p+n-q\le n \Rightarrow p\le q$

同理可得 $q\le p$

∴ $p=q$

定义2. n元实二次型 $X'AX$ 的规范型中系数为+1的个数 p 称为 $X'AX$ 的正惯性指数，系数为-1的个数 $r-p$ 负惯性指数

$p-(r-p)=2p-r$ 称为 $X'AX$ 的符号差

易知任一标准型系数为+1的个数与正惯性指数相等

定理2. 两n元实二次型 $X'AX\cong X'BX$

$\Leftrightarrow$ 规范型相同

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数与秩相同

定理3. n级实对称矩阵 A 与 B 合同

$\Leftrightarrow$ 秩与正惯性指数（A合同规范型中元素为1个数）相同

故秩与正惯性指数为n级实对称矩阵在合同关系下的完全不变量