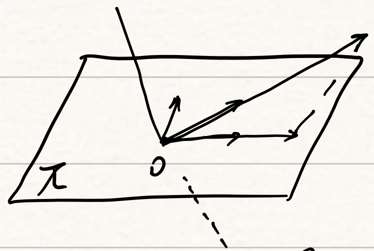

$S\times V := \{(a,b) \mid a,b\in V\}$ 笛卡尔积

$V\times V \longrightarrow V$ 称为V上的代数运算

$(a,b) \longmapsto c$

$K\times V \longrightarrow V$　V上的数量运算

$(k,\alpha) \longmapsto \gamma$

定义1. 设V是数域K上的一个线性空间，U是α的一个非空子集，如果U对于V的加法和数乘也成为数域K上的一个线性空间，那么称U是V的一个(线性)子空间

V的非空子集U是子空间 $\Longleftrightarrow$
(1) 若 $\alpha,\beta\in U$，则 $\alpha+\beta\in U$ (U对于V的加法封闭)
(2) 若 $\alpha\in U, k\in K$，则 $k\alpha\in U$ (U对V的数乘封闭)

构成U上代数运算与数量运算基本条件

证：$\Rightarrow$ 由定义1及代数运算与数量运算定义得

$\Leftarrow$ ∵ U上加法与数乘即V上数乘 ∴

∴ 易知 1°, 2°, 5°, 6°, 7°, 8° 成立(负元，零元待证)

又由于 $U\neq\phi$ ∴ $\exists\ \alpha\in U$，则 $0=0\cdot\alpha\in U$

$-\alpha=(-1)\times\alpha\in U$

∴ U 成为K上一线性空间 ∴ U是子空间

$\{0\}$ 零子空间，与V本身称为平凡子空间

令 $W=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1,\cdots,k_s\in K\}$

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个线性组合

易知 W对于加法与数乘封闭，∴ W为一个子空间

称W为由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间

记为 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle$ 或 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

$\beta\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle \Longleftrightarrow \beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_2\alpha_s$.

称β可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

数域K上n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ 有解

$\Longleftrightarrow$ 数域K中 $\exists\, k_1, \cdots, k_n$, s.t. $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta$

$\Longleftrightarrow$ β 可由 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性表出

$\Longleftrightarrow$ $\beta \in \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle$

任务:研究线性空间及其子空间的结构