令 $K^n := \{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_i \in K, i=1,\cdots,n\}$

n维向量

$(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_n) \Leftrightarrow b_i=a_i$

数量乘法: $k(a_1,a_2,\cdots a_n) := (ka_1,\cdots,ka_n)$

加法: $(a_1,\cdots,a_n) = (a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)$

零向量 $0 := (0,\cdots,0)$

加法律: 交换律、结合律、0元、负元

数量乘法律: "1"元, 交换律, 数量分配律、向量分配律

映射:

domain 定义域　　codomain 陪域

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & b \end{array}$$

每一个　　唯一的

b在f下的原像　　a在f下的像(亦记为f(a))

称 f 是 A 到 B 的一个映射

f的值域 $f(A) := \{f(a) \mid a\in A\}$

若 $f(A)=B$, 则f为满射

若 A中不同元素的像不同, 则f为单射

若f既是单射,又是满射,则f为双射(一一对应)

$2+3=5$　　$2\times 3=6$

$(2,3)\mapsto 5$　　$(2,3)\mapsto 6$

$S\times M := \{(a,b) \mid a\in S, b\in M\}$

称为S与M的笛卡尔积

定义1: 非空集合S上的一个代数运算

是指 S×S 到 S 的一个映射

定义3: 设 V是一个非空集合, K是一个数域

如果V上有一个运算，称为加法：$V \times V \to V$

K与V间有一运算，称为数量乘法：$K \times V \to V$

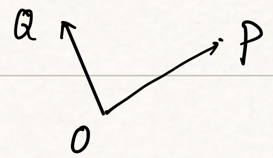
满足下8条运算法则

加法律：交换律、结合律、0元、负元

数量乘法律："1"元，交换律，数量分配律、向量分配律

称V为数域K上的线性空间（向量空间）

例1. 几何空间（由点组成的集合）｛以定点O为起点的所有向量｝




例2. $K^n := \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in K, i=1,\cdots,n\}$

n维向量

例3. $\mathbb{R}^X :=$｛非空集合X到$\mathbb{R}$的映射｝

称为X上的一个实值函数

规定 $(f+g)(x) := f(x)+g(x) \ \forall x \in X$

$(kf)(x) := kf(x) \quad k \in \mathbb{R}$

零函数 $0(x) = 0, \ \forall x \in X$

易知 $\mathbb{R}^X$ 为线性空间

设V是数域K上的一个线性空间

1° V的零元唯一

$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$

2° 负元唯一，记为 $-\alpha$

$\beta_1 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_2$

$3^\circ$ $0\alpha = 0$, $\forall \alpha \in V$ （零元为加法特性，此为数乘）

$0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha$

$0\alpha + 0(-\alpha) = 0\alpha + 0\alpha + 0(-\alpha) \Rightarrow 0\alpha = 0$

$4^\circ$ $k0 = 0$ $\forall k \in V$

$k0 = k(0+0) = k0 + k0$ （性质8）

$k0 + (-k)0 = k0 + k0 + (-k)0 \Rightarrow k0 = 0$

$5^\circ$. 若 $k\alpha = 0$，则 $k=0$ 或 $\alpha = 0$

设 $k \neq 0$，则 $\alpha = 1\alpha = (k^{-1} \cdot k)\alpha = k^{-1}0 = 0$

$\alpha \neq 0$，则 $k\alpha = (k-k)\alpha = k\alpha + (-k)\alpha \Rightarrow -k = k \Rightarrow k = 0$

$6^\circ$ $(-1)\alpha = -\alpha$

$\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = 0$

$\therefore (-1)\alpha = -\alpha$