定义1. 设$f(x), g(x) \in K[x]$. 若$\exists h(x) \in K[x]$, s.t. $f(x) = h(x)g(x)$. 则称$g(x)$ **整除** $f(x)$, 记作$g(x) \mid f(x)$, 否则称$g(x)$不能整除$f(x)$ 记作$g(x) \nmid f(x)$

性质: (1) $\forall f(x) \in K[x]$, $\forall b \in K^*$, 由于$f(x) = [b^{-1}f(x)]b$
$\therefore b \mid f(x)$

(2) $\forall f(x) \in K[x]$, $\because 0 = 0 \cdot f(x)$ $\therefore f(x) \mid 0$,特别地 $0 \mid 0$

(3) 若 $0 \mid f(x)$. 则 $f(x) = 0 \cdot g(x) = 0$

命题. 若在$K[x]$中, 若$g(x) \mid f(x)$, 且$f(x) \neq 0$, 则$\deg g(x) \leq \deg f(x)$

证: $\exists h(x) \in K[x]$, s.t. $f(x) = h(x)g(x) \Rightarrow g(x) \neq 0, h(x) \neq 0$
$\therefore \deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x) \geqslant \deg g(x)$

易知整除关系满足反身性, 传递性, 但不满足对称性

定义2. 若$g(x) \mid f(x)$, $f(x) \mid g(x)$, 则称$f(x)$与$g(x)$ **相伴**. 记为$g(x) \sim f(x)$

命题2: $g(x) \sim f(x) \Leftrightarrow f(x) = c\,g(x)$, $c \in K^*$

证: $\Rightarrow$ 设 $f(x) = h_1(x)g(x)$, $g(x) = h_2(x)f(x)$

则 $f(x) = h_1(x)h_2(x)f(x) \Rightarrow h_1(x)h_2(x) = 1$ ($f(x) \neq 0$)

$\therefore \deg h_1(x) \leq 0$, $\deg h_2(x) \leq 0$

$\therefore h_1(x) = c_1 \in K^*$, $h_2(x) = c_2 \in K^*$

$\therefore f(x) = c\,g(x)$, $c \in K^*$

若 $f(x) = 0$, 则 $g(x) = 0$ $\therefore f(x) = c\,g(x)$, $c \in K^*$

命题3、在$K[x]$, 若$g(x) \mid f_i(x)$, 则$g(x) \mid u_1(x)f_1(x) + \cdots + u_s(x)f_s(x)$

定理1.（带余除法）设 $f(x), g(x) \in K[x]$，且 $g(x) \neq 0$，则存在唯一的多项式 $h(x), r(x) \in K[x]$，s.t. $f(x) = \underbrace{h(x)}_{\text{商式}} g(x) + \underbrace{r(x)}_{\text{余式}}$，$\deg r(x) < \deg g(x)$

注：此为研究 $K[x]$ 突破口

证：存在性：对被除式次数 m 作归纳法，

待补

唯一性．设 $f(x) = h(x)g(x) + r(x) = h_1(x)g(x) + r_1(x)$，$\deg\{r(x), r_1(x)\} < \deg g(x)$

则 $0 = [h(x) - h_1(x)]g(x) + r(x) - r_1(x)$

$r(x) - r_1(x) = [h_1(x) - h(x)]g(x)$

若 $r(x) - r_1(x) \neq 0$，则

$\deg g(x) \leq \deg(r(x) - r_1(x)) \leq \max\{\deg r(x), \deg r_1(x)\} < \deg(x)$

$\therefore r(x) - r_1(x) = 0$

又 $g(x) \neq 0$　$\therefore h_1(x) - h(x) = 0$

$\therefore r(x), h(x)$ 唯一

推论1．设 $f(x), g(x) \in K[x]$，且 $g(x) \neq 0$　$g(x) \mid f(x) \Longleftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 余式为0

（由带余除法的唯一性推出）

命题4．设 $f(x), g(x) \in K[x]$，$g(x) \neq 0$，数域 $E \supseteq K$，

则在 $K[x]$ 中，$g(x) \mid f(x) \Longleftrightarrow$ 在 $E[x]$ 中，$g(x) \mid f(x)$

证：$\Leftarrow$ 在 $K[x]$ 中，作带余除法．

$f(x) = h(x)g(x) + r(x)$，$\deg r(x) < \deg g(x)$

可看作是在 $E[x]$ 中作带余除法

$\because g(x) \mid f(x)$ $\therefore r(x)=0$ ，即在 $K[x]$ 中 $g(x) \mid f(x)$

整除性不随数域扩大而改变