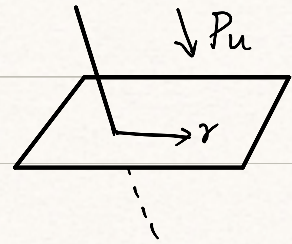
几何空间 V 

任取 $\gamma\in U$, $\delta\in W$, 有

$P_U\gamma=1\gamma$, $P_u\delta=0\cdot\delta$

定义1. 设 $\underline{A}$ 为域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换

若 $\exists\lambda_0\in F$, $\xi\in V$, $\xi\neq 0$, s.t.

$$\underline{A}\xi=\lambda_0\xi$$

则称 λ_0 为 $\underline{A}$ 的一个特征值，ξ 为 $\underline{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量

设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$, λ_0 为 $\underline{A}$ 一特征值, $V_{\lambda_0}:=\{\alpha\in V \mid \underline{A}\alpha=\lambda_0\alpha\}$

$\because \underline{A}0=0=\lambda_0 0 \quad \therefore 0\in V_{\lambda_0}$

任取 $\alpha,\beta\in V_{\lambda_0}$, $\underline{A}(\alpha+\beta)=\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta=\lambda_0\alpha+\lambda_0\beta=\lambda_0(\alpha+\beta)$.

$\underline{A}(k\alpha)=k\underline{A}\alpha)=k\lambda_0\alpha=\lambda_0(k\alpha)$

$\therefore V_\lambda$ 是 V 一子空间，称为 $\underline{A}$ 的属于 λ_0 的特征子空间

定理1. 设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$, λ_1, λ_2 为 $\underline{A}$ 不同特征值,

取 V_{λ_1} 中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，V_{λ_2} 中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关

则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关

证：设 $k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0$

则 $k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots k_s\lambda_1\alpha_s+l_1\lambda_2\beta_1+\cdots+l_r\lambda_2\beta_r=0$

又 $k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots k_s\lambda_1\alpha_s+l_1\lambda_1\beta_1+\cdots+l_r\lambda_1\beta_r=0$

$\therefore l_1(\lambda_2-\lambda_1)\beta_1+\cdots+l_r(\lambda_2-\lambda_1)\beta_r=0$

$\because \lambda_2\neq\lambda_1$

$\therefore l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0 \quad \therefore l_1=\cdots=l_r=0$

同理 $k_1=\cdots=k_s=0$

$\therefore \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关

推论1. 设 $\underline{A} \in Hom(V,V)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ 为 $\underline{A}$ 不同特征值. 若

$\alpha_{i1}, \cdots \alpha_{ir_i} \in V_{\lambda_i}$ 线性无关, 则

$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{t1}, \cdots, \alpha_{tr_t}$ 线性无关

定理2. 设 $\underline{A} \in Hom(V,V)$, $\dim V = n$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 一基,

$\underline{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) A$, $\gamma \in V$ 在此基下坐标为 Y

$\underline{A}\xi = \lambda_0 \xi$. $\lambda_0 \in F$, $\xi \in V, \xi \neq 0'$

则 $AY = \lambda_0 Y$, $\lambda_0 \in F$, $Y \neq 0'$, $Y \in F^n$

即 λ_0 为 A 一特征值, ξ 的坐标 Y 为 A 属于 λ_0 的特征向量

定义2. 设 $A \in M_n(F)$, 若 $\exists \lambda_0 \in F$, $\alpha \in F^n$, s.t. $A\alpha = \lambda_0 \alpha$, 则

称 λ_0 为 A 一特征值, α 为 A 属于 λ_0 一特征向量

设 $A \in M_n(F)$, λ_0 为 A 一特征值, α 为 A 属于 λ_0 一特征向量

则 $A\alpha = \lambda_0 \alpha$. $\lambda_0 \in F$, $\alpha \in F^n$, $\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow (\lambda_0 I - A)\alpha = 0$, $\lambda_0 \in F$, $\alpha \in F^n$, $\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow$ α 为 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的一非零解.

$\Leftrightarrow$ $|\lambda_0 I - A| = 0$, α 为 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的一非零解.

$\Leftrightarrow$ λ_0 为一元多项式 $P[\lambda] = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$ 在 F 下一根

α 为 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的一非零解.

$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2n} \end{bmatrix}$ 为环 $F[\lambda]$ 上一矩阵.

$$\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix}$$

环 $F[\lambda]$ 上矩阵可定义加法,乘法,数量乘法,且满足相关运算法则

环 $F[\lambda]$ 上的 n 级矩阵可定义行列式

$\lambda I-A$ 称为 A 的特征矩阵,$|\lambda I-A|$ 称为 A 的特征多项式

求 F 上 n 级矩阵 A 的全部特征值与特征向量步骤:

1° 计算 $|\lambda I-A|$

2° 求 $|\lambda I-A|$ 在 F 中的全部根

3° 对每一特征值 λ_i,求 $(\lambda_i I-A)X=0$ 的基础解系 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it}$

4° 特征向量集合为 $\{k_{i1}\alpha_{i1}+\cdots+k_{it}\alpha_{it} \mid k_{i1}^2+\cdots+k_{it}^2\neq 0\}$

命题 1、设 $A,B\in M_n(F)$,若 A 与 B 相似,则 A 与 B 的特征多项式相等.从而 A 与 B 有相同的特征值

证: $B=P^{-1}AP$

$$|\lambda I-B| = |P^{-1}\lambda P-P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I-A)P|$$
$$= |P^{-1}||\lambda I-A||P| = |\lambda I-A|$$

称 A 在 V 中一基下矩阵特征多项式为 A 的特征多项式

命题 2、设 $A\in M_n(F)$,则 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A| = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1}+\cdots \quad + (-1)^n|A|$$

证: $f[\lambda] = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & \cdots & 0-a_{1n} \\ 0-a_{21} & \cdots & 0-a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0-a_{n1} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$

待补

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0-a_{12} & \cdots & 0-a_{1n} \\ 0 & \lambda-a_{22} & \cdots & 0-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0-a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0-a_{12} & \cdots & 0-a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & 0-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & 0-a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0-a_{1n} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & \cdots & 0-a_{1n} \\ 0 & -a_{22} & \cdots & 0-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} +$$