设 V 与 V' 为域 F 上线性空间，

$Hom(V,V') := \{V \to V'$ 的线性映射$\}$

$Hom(V,V) := \{V$ 上的线性映射$\}$

在 $Hom(V,V')$ 中，规定加法

$$(\underline{A}+\underline{B})\alpha := \underline{A}\alpha + \underline{B}\alpha, \quad \forall \alpha \in V$$

验证：$\forall \alpha, \beta \in V$,

$$(\underline{A}+\underline{B})(\alpha+\beta) = \underline{A}(\alpha+\beta)+\underline{B}(\alpha+\beta) = \underline{A}(\alpha)+\underline{B}(\alpha)+\underline{A}(\beta)+\underline{B}(\beta)$$

$$= (\underline{A}+\underline{B})\alpha + (\underline{A}+\underline{B})(\beta)$$

$$(\underline{A}+\underline{B})(k\alpha) = \underline{A}(k\alpha)+\underline{B}(k\alpha) = k\underline{A}\alpha + k\underline{B}\alpha = k(\underline{A}+\underline{B})\alpha$$

$\therefore \underline{A}+\underline{B} \in Hom(V,V')$

规定数量乘法：

$$(k\underline{A})\alpha := k(\underline{A}\alpha), \quad \forall \alpha \in V,$$

同上可证：$kA \in Hom(V,V')$

零元是零映射 $\underline{0}(\alpha) = 0'$, $\forall \alpha \in V$

负元 $(-\underline{A})\alpha = -\underline{A}\alpha$, $\forall \alpha \in V$

$\vdots$

$\therefore Hom(V,V')$ 成为 F 上线性空间

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\substack{\text{线性映射} \\ \underline{A}}"] \arrow[rr, bend right, "\underline{B}\underline{A}"'] & V' \arrow[r, "\substack{\text{线性映射} \\ \underline{B}}"] & W \end{tikzcd}$$

(亦为线性映射)

线性映射的乘法满足结合律

左右分配律

$Hom(V,V')$ 对于加法和乘法是一个有单位元的环

易证：$k(\underline{A}\,\underline{B})=(k\underline{A})(\underline{B})=\underline{A}(k\underline{B})$

$\underline{A}$是V上可逆线性变换 $\Leftrightarrow$ A^{-1}是V上可逆线性变换

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\underline{A}$是$V\to V$ 同构映射 $\Leftrightarrow$ A^{-1}是$V\to V$的同构映射

设 $A\in Hom(V,V)$，令

$A^m:=\underbrace{\underline{A}\cdots\underline{A}}_{m}$ $m\in N^+$

$A^0:=\underline{I}$，

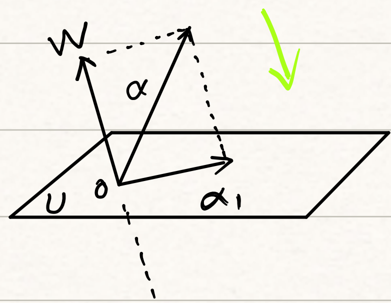
易证 $\underline{A}^m\underline{A}^n=\underline{A}^{m+n}$

$(\underline{A}^m)^l=\underline{A}^{ml}$.

若A可逆，则令 $\underline{A}^{-m}:=(\underline{A}^{-1})^m$.

几何空间 $V=U\oplus W$

任$\alpha\in V$，设$\alpha=\underset{\underset{U}{\uparrow}}{\alpha_1}+\underset{\underset{W}{\uparrow}}{\alpha_2}$



平行W在U上投影

$P_U(\alpha)=\alpha_1$

设F上线性空间 $V=U\oplus W$

任$\alpha\in V$，设$\alpha=\underset{\underset{U}{\uparrow}}{\alpha_1}+\underset{\underset{W}{\uparrow}}{\alpha_2}$

令 $P_U(\alpha)=\alpha_1$

则称平行W在U上投影

投影$\underline{P_U}$的性质

1° P_U是V上的线性变换

证：由于α的表法唯一，故P_U为一映射

设$\beta = \underset{U}{\beta_1} + \underset{W}{\beta_2}$，则$\alpha+\beta = \underset{U}{\underline{(\alpha_1+\beta_1)}} + \underset{W}{\underline{(\alpha_2+\beta_2)}}$

$\therefore P_U(\alpha+\beta) = \alpha_1+\beta_1 = P_U(\alpha)+P_U(\beta)$

同理 $P_U(k\alpha) = kP_U(\alpha)$

$\therefore P_U$是线性变换

2° $P_U(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \alpha\in U \\ 0 & \alpha\in W \end{cases}$ 若V上线性变换 $\underline{A} = \begin{cases} \alpha & \alpha\in U \\ 0 & \alpha\in W \end{cases}$

则$\underline{A} = P_U$

证：记$\forall \alpha\in V$，设$\alpha = \underset{U}{\alpha_1} + \underset{W}{\alpha_2}$

$\underline{A}(\alpha) = \underline{A}\alpha_1 + \underline{A}\alpha_2 = \underline{A}\alpha_1 = \alpha_1$

$= P_U(\alpha)$

$\therefore \underline{A} = P_U$

3° $P_U^2 = P_U$

证：$P_U^2(\alpha) = P_U(P_U(\alpha)) = P_U(\alpha_1) = \alpha_1 = P_U(\alpha)$

$\therefore P_U^2 = P_U$

定义2. V上线性变换$\underline{A}$如满足

$\underline{A}^2 = \underline{A}$

称$\underline{A}$为幂等变换

P_U为幂等变换