

定义1. n 元实二次型 $X'AX$ 若 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0, \alpha'AX > 0$, 则称 $X'AX$ 为 正定二次型

定理1. n 元实二次型 $X'AX$, 下列命题等价

(1) $X'AX$ 为 正定的

(2) $X'AX$ 的 规范型 为 $x_1^2 + \dots + x_n^2$

(3) $X'AX$ 的 正惯性指数 为 n

(4) $X'AX$ 的 标准型 平方项系数全大于0

n 级对称矩阵 A 为正定矩阵

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0, \alpha'AX > 0$

$\Leftrightarrow n$ 元实二次型 $X'AX$ 正定

定理2. n 级对称矩阵 A 为正定矩阵

$\Leftrightarrow A \simeq I$

$\Leftrightarrow A$ 的合同标准型中主对角元全大于0

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于0

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, d_i > 0 \Leftrightarrow |d_1| > 0, \begin{vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} > 0 \cdots \begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} > 0$$

顺序主子式

定理3. n 级实对称矩阵 A 为正定矩阵

$\Leftrightarrow A$ 的所有顺序主子式 > 0

证:

待补

推论: $X'AX$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 所有顺序主子式 > 0

定义2. n 元实二次型 $X'AX$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0$.

$$\alpha' A \alpha \geq 0$$

半正定

$$\alpha' A \alpha < 0$$

负定

$$\alpha' A \alpha \leq 0$$

半负定

或

不定