定义1. 设f为域F上的线性空间V到F的一个线性映射，

即f为V到F的一个映射，且满足：

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ ， $\forall \alpha,\beta\in V$;

$f(k\alpha)=kf(\alpha)$ $\forall \alpha\in V, k\in F$

则称f为V上一个线性函数

设 $\dim V=n$ ，V中取一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ ，则

$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ ， $\forall \alpha\in V$

设f为V上一线性函数，则

$$f(\alpha)=x_1f(\alpha_1)+\cdots+x_nf(\alpha_n) \qquad (1)$$

称为f在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的表达式

任给F中元素 $a_1,\cdots,a_n$

$\exists$ 唯一的f，s.t. $f(\alpha_i)=a_i$ $i=1,\cdots,n$

$f(\alpha)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

$\mathrm{Hom}(V,F)$ 称为V上的线性函数空间

设 $\dim V=n$ ， $\mathrm{Hom}(V,F)$ 记为 V^* ，称 V^* 是V的对偶空间

$\dim V^*=\dim \mathrm{Hom}(V,F)=(\dim V)(\dim F)=n$

$\therefore$ $V^*\cong V$

V中取一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ ，求 V^* 的一个基

F中给定n个元素	V上线性函数
$1,0,\cdots,0$	f_1 ，s.t. $f_1(\alpha_1)=1, f_1(\alpha_j)=0, j\neq 1$
$\vdots$	$\vdots$
$0,0,\cdots,1$	f_n ，s.t. $f_n(\alpha_n)=1$ ， $f_n(\alpha_j)=0, j\neq n$

设 $k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0$

则 $k_1f_1(\alpha_1)+\cdots+k_nf_n(\alpha_1)=k_1=0$

$\vdots$ $\vdots$

$$k_1 f_1(\alpha_n)+\cdots+k_n f_n(\alpha_n)=k_n=0$$

即 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关，为 V^* 一基

称为 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对偶基

$$f_i(\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}=\delta_{ij} \quad (i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n) \qquad (2)$$

对 V 中任一向量 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，则 $f_j(\alpha)=x_i$

因此 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}f_i(\alpha)\alpha_i \qquad (3)$

V^* 中任一元素 $f=\sum_{i=1}^{n}k_if_i$，则

$$f(\alpha_i)=\left(\sum_{i=1}^{n}k_if_i\right)\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}k_if_i(\alpha_i)=k_i$$

$$\therefore f=\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)f_i \qquad (4)$$

定理 1. 设 V 为域 F 上 n 维线性空间 V 中两基

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

对偶基   对偶基

$$V^* \text{中} \ (g_1,\cdots,g_n)=(f_1,\cdots,f_n)B$$

则 $B=(A^{-1})'$

证：

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A^{-1}\triangleq(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}$$

则 $\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\beta_i$

又由(3)得 $\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}g_i(\alpha_j)\beta_i \quad \therefore c_{ij}=g_i(\alpha_j)$

$$\because (g_1,\cdots,g_n)=(f_1,\cdots,f_n)\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & & b_{nn}\end{bmatrix}$$

$$g_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}f_j$$

$$c_{ij}=g_i(\alpha_j)=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}f_k(\alpha_j)=b_{ji}$$

$\therefore\ B=(A^{-1})'$

$\dim V=n$，V^*的对偶空间$(V^*)^*$，记作V^{**}，称为V的双重对偶空间

$\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$.

V中取一基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

V^*中关于$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的对偶基$f_1,\cdots,f_n$

V^{**}中关于$f_1,\cdots,f_n$的对偶基，$\alpha_1^{**},\cdots,\alpha_n^{**}$

$$V\xrightarrow{\text{同构映射}\sigma}V^*\xrightarrow{\text{同构映射}\tau}V^{**}$$

$$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\longmapsto\sum_{i=1}^n x_if_i\longmapsto\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i^{**}=:\alpha^{**}$$

任给$f\in V^*$，$\alpha^{**}(f)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i^{**}\right)(f)=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i^{**}(f)$

$$\overset{\text{(性)}}{=}\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i^{**}\left(\sum_{j=1}^n f(\alpha_j)f_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n f(\alpha_j)\alpha_i^{**}(f_j)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^n x_if(\alpha_i)\quad(\alpha_i^{**}\text{为对偶基})$$

$$=f\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\right)$$

$$=f(\alpha)$$

$\exists$同构映射σ：$V\longrightarrow V^{**}$

$\alpha\longrightarrow\alpha^{**}$，$\alpha^{**}(f)=f(\alpha)$

不依赖于基的选择的同构映射称为一个自然同构

可把α与α^{**}等同起来，从而可将V与V^{**}等同

$\therefore$ V可看作V^*的对偶空间

$\therefore$ V，与V^*互为对偶空间