定义1. 如果集合S是它的一些非空子集的并集，其中每两个不同的子集的交是空集，则称这些子集组成的集合为S的一个划分.

例.

定义2. 设S为一非空集合，$S\times S$的一个子集W称为S上的一个二元关系.

若$(a,b)\in W$，则称a与b有W关系，记作$a\underset{W}{\sim}b$，或$a\sim b$.

若$(a,b)\notin W$，则称a与b没有W关系

定义3. 若S上的一个二元关系满足：

1° $a\sim a$ 反射性

2° $a\sim b\Rightarrow b\sim a$， 对称性

3° $a\sim b, b\sim c, \Rightarrow a\sim c$. 传递关系

则称此关系为等价关系

定义4. 设~是S上等价关系，任给$a\in S$，令$\bar{a}:=\{x\in S\mid x\sim a\}$

则称$\bar{a}$为a的等价类 $x\in\bar{a}\Leftrightarrow x\sim a$

称a为$\bar{a}$的一个代表

性质1. $\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow a\sim b$

证：$\Rightarrow$ 设$a\in\bar{a}$，则$a\in\bar{b}$ $\therefore a\sim b$

$\Leftarrow$ $\forall c\in\bar{a}$，则$a\sim c$，$\therefore c\sim b$ $\therefore c\in\bar{b}$

$\therefore \bar{a}\subseteq\bar{b}$

同理 $\bar{b}\subseteq\bar{a}$ $\therefore \bar{b}=\bar{a}$

性质2. 若$\bar{a}\neq\bar{b}$，则$\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

证：若$\bar{a}\cap\bar{b}=c$，则$c\in\bar{a}$，$c\in\bar{b}$

$\therefore c\sim a$，$c\sim b$，$\therefore b\sim a$ $\therefore \bar{a}=\bar{b}$

$\therefore \bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

定理1. 如果集合S有一个等价关系，则所有等价类组成集合为S的一个划分

证：考察 $\bigcup\limits_{a\in S}\bar{a}:=\{x\in S\mid \exists c\in S, s.t. x\in\bar{c}\}\subseteq S$

任取$b\in S$，则$\exists b\in S$, s.t. $b\in\bar{b}$ $\therefore b\in\bigcup\limits_{a\in S}\bar{a}$

$\therefore S\subseteq\bigcup\limits_{a\in S}\bar{a}$ $\therefore \bigcup\limits_{a\in S}\bar{a}=S$

又若$\bar{a}\neq\bar{b}$，则$\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

$\therefore$ 等价关系是S的一个划分

反之，若已存在S上的一个划分，则存在一个等价关系，使得这个划分由所有等价类组成

待补

设$\Omega=\{$数域K上线性空间$\}$，则同构是Ω的一个划分

同构类有：

$\bar{0}:=\{0\}$

$\overline{K^1}:=\{$维数为1空间$\}$

$\vdots$

$\overline{K^n}:=\{$维数为n空间$\}$

同构类完全由维数决定