定义1. 域F上线性空间V上的双线性函数f. 若 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$, $\forall\alpha,\beta\in V$,
则称f是对称的

若 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$, $\forall\alpha,\beta\in V$, 则称f是斜对称的(反对称)

$\dim V=n$, f在V下一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵为A

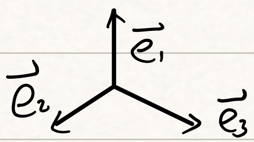
f是对称的 $\Longleftrightarrow f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$, $\forall\alpha,\beta\in V$

$$\Longleftrightarrow \underset{A(i,j)}{\underset{\shortparallel}{f(\alpha_i,\alpha_j)}}=\underset{A(j,i)}{\underset{\shortparallel}{f(\alpha_j,\alpha_i)}} \quad i,j=1,\cdots,n$$

$\Longleftrightarrow$ A是对称矩阵

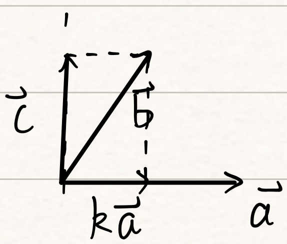
同理f是斜对称的 $\Longleftrightarrow$ A是斜对称矩阵

几何空间V



内积在基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 下的度量空间

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{pmatrix}$$



$\vec{c}=\vec{b}-k\vec{a}$

$\vec{c}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\Longleftrightarrow (\vec{b}\cdot k\vec{a})=\vec{a}=0$

$\Longleftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{a}-k\vec{a}\cdot\vec{a}=0$

$\Longleftrightarrow k=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$\Longleftrightarrow \vec{c}=\vec{b}-\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$

定理1. 设f是特征不为2域F上n维线性空间V上一对称双线性函数，则V中存在一个基，s.t. f在此基下的度量矩阵为对角矩阵

证：$n=1$时，$V=\langle\alpha\rangle$，$(f(\alpha))$为对角矩阵.

设对于$n-1$维线性空间成立，则对于n维有

若$f=0$，显然成立

若$f\neq 0$

引理：当域F特征不为2时，存在$\alpha_1\in V$，s.t. $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$

证：若$\forall\alpha\in V$，$f(\alpha,\alpha)=0$，

则$\forall\alpha,\beta\in V$，有 $0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+2f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)$

$=2f(\alpha,\beta)$

$\because F$特征不为2，$\therefore f(\alpha,\beta)=0$ $\therefore f=0$

$\exists\alpha_1\neq 0$，s.t. $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$，将$\alpha_1$扩为$V$一基$\alpha_1,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$

令 $\widehat{\beta_i}=\beta_i-\dfrac{f(\beta_i,\alpha_1)}{f(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$

则$f(\alpha_1,\widehat{\beta_i})=f(\alpha_1,\beta_i)-\dfrac{f(\beta_i,\alpha_1)}{f(\alpha_1,\alpha_1)}\cdot f(\alpha_1,\alpha_1)=0$

易知 $\alpha_1,\widehat{\beta_1},\cdots,\widehat{\beta_{n-1}}$ 与$\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$可互相线性表出

$\therefore\alpha_1,\widehat{\beta_1},\cdots,\widehat{\beta_{n-1}}$为$V$一基

令 $W=\langle\widehat{\beta_1},\cdots,\widehat{\beta_{n-1}}\rangle$ 则 $V=\langle\alpha_1\rangle\oplus W$

$f|W$为W上一对称双线性函数.

由假设得，$f|W$在W下一基$\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$的度量矩阵为对角矩阵

则$\alpha,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$为$V$一基，且$f(\alpha,\eta_i)=0$ $i=1,\cdots,n-1$

则f在$\alpha,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$下度量矩阵为对角矩阵

推论2. 特征不为2域F n级对称矩阵A一定合同于一个对角矩阵.

称为A的一个合同标准形

定理2. 设f是特征不为2域F上n维线性空间V上一斜称双线性函数

则V中存在一个基, s.t. f在此基下的度量矩阵形如下式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$