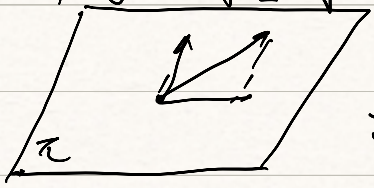
平面几何空间



平面空间中任一向量可由两不共线向量表出

$\vec{c}$ 与 $\vec{\alpha}(\neq\vec{0})$ 共线　　$\vec{a}$ 与 $\vec{c}(\neq\vec{0})$ 共线

$\Leftrightarrow \vec{c}=\lambda\vec{a},\ \lambda\in R$　　$\Leftrightarrow \vec{a}=\mu\vec{c}$

$\Leftrightarrow -\lambda\vec{a}+1\vec{c}=\vec{0}$　　$\Leftrightarrow \vec{a}-\mu\vec{c}=\vec{0}$

$\vec{c},\vec{a}$ 共线，$\Leftrightarrow$ 有不全为0的实数 k_1,k_2 s.t. $k_1\vec{c}+k_2\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{c},\vec{a}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ (若 $k_1\vec{c}+k_2\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow k_1=k_2=0$)

定义1. 设V为K上一线性空间，V中一向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 1)$

若 $\exists\, k_1,\cdots,k_s\in K$, s.t. $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$

则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

否则称其线性无关 $\Leftrightarrow$ 若 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 则 $k_1=\cdots=k_s=0$

K^s 中，列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow \exists\, c_1,\cdots,c_n$ 不全为零，s.t. $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$

$\Leftrightarrow \alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0$ 有非零解

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

K^n 中 列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 组成矩阵 A 的行列式等于0

设V是数域K上一线性空间

(1) α 线性相关 $\Leftrightarrow \exists\, k\neq 0$ s.t. $k\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha\neq 0$

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 部分组线性相关 $\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Rightarrow$ 任一部分线性无关

(3) 含 0 向量的向量组线性相关

(4) $\alpha_1,\cdots\alpha_s\ (s\geqslant 2)$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 至少有一向量 α_i 可由其它向量线性表出

证：$\Rightarrow$ 由定义1得，K 中有不全为 0 的数 $k_1,\cdots k_s$, s.t.

$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$,

设 $k_i\neq 0$

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}-\cdots-\frac{k_n}{k_i}\alpha_n$$

$\Leftarrow$ 易证

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 每一向量都不能由其它向量线性表出

命题1. 设 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

表出方式唯一 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

证："$\Leftarrow$" 设 $\beta=a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s$

$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$

则 $0=(a_1-b_1)\alpha_1+\cdots+(a_s-b_s)\alpha_s \Rightarrow a_1-b_1=\cdots=a_s-b_s=0$

即 $a_1=b_1,\cdots,a_s=b_s$

"$\Rightarrow$" 若线性相关，则 $\exists k_1,\cdots k_s\in K$ 不全为 0, s.t.

$0=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$

$+$

$\beta=a_1\alpha_1+\cdots a_s\alpha_s$

$\beta=(k_1+a_1)\alpha_1+\cdots(k_s+a_s)\alpha_s$

由于 $k_1,\cdots k_s$ 不全为 0

$\therefore (k_1+a_1,\cdots,k_s+a_s)\neq(a_1,\cdots a_s)$

$\because \beta$ 有两种不同表出方式 $\therefore \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

命题 2. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出

证：$\because \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关

$\therefore \exists k_1, \cdots, k_s, l \in K$，不全为 0，s.t.

$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + l\beta = 0$

又 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

$\therefore l \neq 0 \quad \therefore \beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{l}\alpha_s$