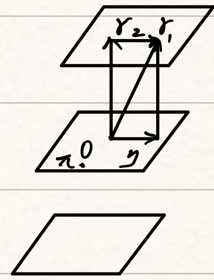
定义1. 集合 S 的一个划分也称为 S 的一个商集

例：$\mathbb{Z}_7$（或 $\mathbb{Z}/7$）$:=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$（模7同余）

几何空间，考虑一组平面



$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \gamma_1, \gamma_2$ 在同一平面

$\Leftrightarrow \gamma_2 \to \gamma_1 = \eta \in \pi$。

设 V 是数域 K 上线性，W 为 V 的一个子空间

$\beta \sim \alpha :\Leftrightarrow \beta - \alpha \in W$

1° $\alpha - \alpha = 0 \in W$，$\forall \alpha \in V$，则 $\alpha \sim \alpha$ 反身性

2° $\beta \sim \alpha \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma \in W$，则 $\alpha - \beta = -\gamma \in W \Rightarrow \alpha \sim \beta$ 对称性

3° $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha - \beta = \vec{m} \in W$，$\beta - \gamma = \vec{n} \in W$，则

$\alpha - \gamma = \alpha - \beta + \beta - \gamma = \vec{m} + \vec{n} \in W$ 传递性

$\therefore \sim$ 为一等价关系

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \{\beta \in V \mid \beta \sim \alpha\} \\
&= \{\beta \in V \mid \beta - \alpha \in W\} \\
&= \{\beta \in V \mid \beta - \alpha = \eta, \eta \in W\} \\
&= \{\beta \in V \mid \beta = \alpha + \eta, \eta \in W\} \\
&= \{\alpha + \eta \mid \eta \in W\} \\
&=: \alpha + W
\end{aligned}
$$

称为 W 的一个陪集（通解），α 为 $\alpha + W$ 的一个代表（特解）

$\alpha + W = \gamma + W \Longleftrightarrow \alpha \sim \gamma$

$\Updownarrow$

$\Longleftrightarrow \alpha-\gamma\in W$（陪集代表不唯一）

$\eta\in W \Longleftrightarrow \eta-0=\eta\in W \Longleftrightarrow \eta+W=0+W=W$

$V/W:=\{\alpha+W \mid \alpha\in V\}$ 是 V 关于 W 的一个商集

商集运算.

加法

$$\begin{array}{ccccc}(\alpha+W)+(\beta+W) & := & (\alpha+\beta)+W \\ \| \quad\quad\quad \| & & \| \\ (\gamma+W)+(\delta+W) & := & (\gamma+\delta)+W \\ \Downarrow \quad\quad\quad \Downarrow & & \Uparrow \\ \alpha-\gamma\in W \quad \beta-\delta\in W & \Rightarrow & (\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)\in W\end{array}$$

数乘

$$\begin{array}{ccc}k(\alpha+W) & := & k\alpha+W \\ \| & & \| \\ k(\gamma+W) & := & k\gamma+W \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \alpha-\gamma\in W & \Longrightarrow & k\alpha-k\gamma\in W\end{array}$$

$\because\ W+(\alpha+W)=(0+W)+(\alpha+W)=\alpha+W$

$\therefore\ W$ 为 V/W 的零元

易证商集的运算满足其它线性空间运算律.

$\therefore$ 商集构成线性空间，称为商空间

定理 1. 设 V 是 n 维线性空间，W 为 V 一子空间

则 $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

证：取 W 中一基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，扩充成 V 一基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$

任取商空间一元素 $\alpha + W \in V/W$

设 $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$

则 $\alpha + W = a_1(\alpha_1 + W) + \cdots + a_s(\alpha_s + W) + a_{s+1}(\alpha_{s+1} + W) + \cdots + a_n(\alpha_n + W)$

$= a_1 W + \cdots + a_s W + a_{s+1}(\alpha_{s+1} + W) + \cdots + a_n(\alpha_n + W)$

$= a_{s+1}(\alpha_{s+1} + W) + \cdots + a_n(\alpha_n + W)$

$\therefore \alpha + W$ 由 $\alpha_{s+1} + W, \cdots, \alpha_n + W$ 线性表出

设 $k_{s+1}(\alpha_{s+1} + W) + \cdots + k_n(\alpha_n + W) = W$

则 $(k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots k_n\alpha_n) + W = W$

$\therefore k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_n\alpha_n \in W$

又 $\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$ 不可由 W 中基表出

$\therefore k_{s+1} = \cdots = k_n = 0$ $\quad \therefore \alpha_{s+1} + W, \cdots, \alpha_n + W$ 线性无关

$\therefore \alpha_{s+1} + W, \cdots, \alpha_n + W$ 为 V/W 一个基

$\therefore \dim(V/W) = n - s = \dim V - \dim W$

$\therefore V = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle + \langle \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n \rangle$

$= W \oplus U$

定理 2. 若 V/W 一基为 $\beta_1 + W, \cdots, \beta_t + W$，令 $U = \langle \beta_1, \cdots, \beta_t \rangle$

则 $V = W \oplus U$，且 $(\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 为 U 的一个基

证：任取 $\alpha \in V$，则 $\alpha + W \in V/W$，

$\alpha + W = k_1(\beta_1 + W) + \cdots + k_t(\beta_t + W)$

$= (k_1\beta_1 + \cdots + k_t\beta_t) + W$

又 $\beta = k_1\beta_1 + \cdots + k_t\beta_t \in U$，$\alpha - \beta = \gamma \in W$

$\therefore \alpha = \beta + \gamma$，$\beta \in U$，$\gamma \in W$

$\therefore\ V = W + U$

任取 $\gamma \in W \cap U$

$\therefore\ \gamma = l_1\beta_1 + \cdots + l_t\beta_t\ ,\ \gamma + W = W$

$\therefore\ W = l_1\beta_1 + \cdots + l_t\beta_t + W$

$= l_1(\beta_1 + W) + \cdots + l_t(\beta_t + W)$

$\because\ \beta_1 + W, \cdots, \beta_t + W$ 为 V/W 一基

$\therefore\ l_1 = \cdots = l_t = 0 \quad \therefore\ \gamma = 0$

$\therefore\ V = W \oplus V$

设 $k_1\beta_1 + \cdots + k_t\beta_t = 0$

则 $W = 0 + W = k_1\beta_1 + \cdots + k_t\beta_t + W$

$\therefore\ k_1 = \cdots = k_t = 0 \quad \therefore\ \beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性无关

$\therefore\ (\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 为 U 的一个基