设 $\underline{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换，

V 中两基：$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$；$\eta_1, \cdots, \eta_n$.

设 $(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\alpha_1, \cdots \alpha_n) \underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}}_{S}$

称 S 为基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵

设 $\underline{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) A$

$\underline{A}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n) B$

则 (1) S 可逆

(2) $B = S^{-1}AS$

证：(1) $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 从 $k_1\eta_1 + \cdots + k_n\eta_n = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0$

$\Leftrightarrow$ 从 $(\eta_1, \cdots, \eta_n)\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = 0'$

$\Leftrightarrow$ 从 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) S \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow K = 0'$

$\Updownarrow$

$\Leftrightarrow$ 从 $SK = 0 \Rightarrow K = 0'$

$\Leftrightarrow$ $|S| \neq 0$，S 可逆

(2) $\underline{A}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = \underline{A}[(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) S]$

$= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) AS$

$= (\eta_1, \cdots, \eta_n) \cdot S^{-1} \cdot AS$

$\therefore B = S^{-1}AS$

定义 1. 设 $A, B \in M_n(F)$，若 $\exists$ 可逆矩阵 $S \in M_{n\times n}(F)$，s.t. $B = P^{-1}AP$

则称 A 与 B 相似

定理 1. 由上知，线性变换 $\underline{A}$ 在 V 的不同基下矩阵相似

易证：相似关系为 $M_n(F)$ 上一个等价关系，称 A 的等价类为 A 的相似类

性质1. 若 $A\sim B$，则 $|A|=|B|$，$\text{rank}(A)=\text{rank}(B)$

$\because\ B=P^{-1}AP$

$\therefore\ |B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|$

$\because$ 与可逆矩阵相乘矩阵秩不变

$\therefore\ \text{rank}(B)=\text{rank}(P^{-1}AP)=\text{rank}(A)$

定义2. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad tr(A):=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

称为矩阵 A 的迹（在群表示论中作用大）

命题1：$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

命题2：$tr(kA)=k\,tr(A)$

命题3：$tr(AB)=tr(BA)$

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $\quad B=(b_{ij})_{n\times n}$

$$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}(AB)(i;i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$$

$$tr(BA)=\sum_{i=1}^{n}(BA)(i;i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}a_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij}$$

性质2. 若 $A\sim B$ $(B=P^{-1}AP)$，则 $tr(A)=tr(B)$

证：$tr B=tr(P^{-1}AP)=tr(APP^{-1})=tr(A)$

n 阶矩阵的行列式，秩，迹为相似关系下的不变量

把线性变换 $\underline{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵的行列式，秩，迹分别称为 $\underline{A}$ 的行列式，秩，迹

注：$\underline{A}$ 的秩又定义为 $\mathrm{Im}\,\underline{A}$ 的维数

命题2. 设 $\underline{A}\in \mathrm{Hom}(V,V)$，$\underline{A}(\alpha_1,\overset{\text{基}}{\cdots},\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$，则

$\dim(\mathrm{Im}\,\underline{A})=\mathrm{rank}(A)$

证：任取 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n\in V$，

则 $\underline{A}\alpha=a_1\underline{A}\alpha_1+\cdots+a_n\underline{A}\alpha_n$

即 $\mathrm{Im}\,\underline{A}\subseteq\langle\underline{A}\alpha_1,\cdots,\underline{A}\alpha_n\rangle$

易知 $\langle\underline{A}\alpha_1,\cdots,\underline{A}\alpha_n\rangle\subseteq\mathrm{Im}\,\underline{A}$

$\therefore\ \mathrm{Im}\,\underline{A}=\langle\underline{A}\alpha_1,\cdots,\underline{A}\alpha_n\rangle$

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ （A_i 为矩阵 A 列向量）

则 $\mathrm{rank}(A)=\dim\langle A_1,\cdots,A_n\rangle$

设 $\sigma: V\longrightarrow F^n$

$$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n\longmapsto\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$

σ 为 $V\to F$ 一同构映射

将 σ 限制在 V 的子空间 $\langle\underline{A}\alpha_1,\cdots,\underline{A}\alpha_n\rangle$ 与 F^n 子空间 $\langle A_1,\cdots,A_n\rangle$ 中

则可得 $\dim\langle\underline{A}\alpha_1,\cdots,\underline{A}\alpha_n\rangle=\dim\langle A_1,\cdots,A_n\rangle$

$\therefore\ \mathrm{rank}(A)=\dim(\mathrm{Im}\,\underline{A})$