$K[x]$中，若 $c(x)\mid f(x)$，且 $c(x)\mid g(x)$，则称 $c(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一个公因式

定义1，设 $f(x), g(x)\in K[x]$，若 $\exists\, d(x)\in K[x]$ 满足：

1° $d(x)\mid g(x)$，$d(x)\mid f(x)$

2° $f(x)$ 与 $g(x)$ 任一公因式 $c(x)\mid d(x)$

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式

$\forall f(x)\in K[x]$ $\because$ $f(x)\mid f(x)$，且 $f(x)\mid 0$，$f(x)$ 的任一因式 $c(x)\mid f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ 为 $f(x)$ 与 0 的最大公因式，

特别地：0 与 0 的最大公因式为 0

引理1. 设 $f(x), g(x)\in K[x]$，且 $g(x)\neq 0$，若 $f(x)=g(x)h(x)+r(x)$

则 $c(x)\mid f(x), c(x)\mid g(x) \Longleftrightarrow c(x)\mid g(x), c(x)\mid r(x)$

$d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 最大公因式 $\Longleftrightarrow$ $d(x)$ 为 $r(x), g(x)$ 最大公因式

设 $f(x), g(x)\in K[x]$，且 $g(x)\neq 0$，作带余除法，

$$f(x)=h_1 g(x)+r_1(x),\quad \deg r_1(x)<\deg g(x)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{若 } r_1(x)\neq 0,\text{ 则 } g(x)=h_2(x)r_1(x)+r_2(x), & \deg r_2<\deg r_1 \\
\text{若 } r_2(x)\neq 0,\text{ 则 } r_1(x)=h_3(x)r_2(x)+r_3(x), & \deg r_3<\deg r_2 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad\vdots \\
\text{若 } r_{s-1}(x)\neq 0,\text{ 则 } r_{s-2}(x)=h_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x), & \deg r_s<\deg r_{s-1} \\
\text{若 } r_s(x)\neq 0,\text{ 则 } r_{s-1}(x)=h_{s+1}(x)r_s(x)+r_{s+1}(x), & \deg r_{s+1}<\deg r_s
\end{array}\right\}\text{辗转相除法}$$

$\because$ $\deg g(x)$ 有限，$\therefore$ 至多 $n=\deg g(x)$ 次后，可使 $r_{s+1}(x)=0$

即 $r_{s-1}(x)=h_{s+1}(x)r_s(x)+0$

$\therefore$ $r_s(x)$ 为 $r_s(x)$ 与 0 的一个最大公因式.

$r_s(x)$ 为 $r_{s-1}(x)$ 与 $r_s(x)$ 的一个最大公因式

⋮

$r_s(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式

又 $r_1(x)$ 可示 $f(x), g(x)$ 表示，$r_2(x)$ 可由 $g(x)$ $r_1(x)$ 表示，…，$r_s(x)$ 可由 $r_{s-1}(x)$，$r_{s-2}(x)$ 表示

∴ $r_s(x)$ 可由 $f(x), g(x)$ 表示，即 $r_s(x) = u_1 f(x) + u_2 g(x)$

定理 1. $K[x]$ 中任一对多项式 $f(x), g(x)$ 有最大公因式 $d(x)$，且

$\exists u_1(x), u_2(x) \in K[x]$，s.t. $d(x) = u_1(x)f(x) + u_2(x)g(x)$

易知 任二 $f(x), g(x)$ 最大公因式 $d_1(x) \sim d_2(x)$

当 $f(x), g(x)$ 不全为零多项式时，其最大公因式 $d(x)$ 为非零多项式

且有多个. 记 $(f(x), g(x))$ 为其首项系数为 1 的最大公因式.

命题 1. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$，且 $g(x) \neq 0$. 数域 $E \supseteq K$，则

$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $K[x]$ 中首一最大公因式, 与 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $E[x]$ 中首一最大公因式相同. 即首一最大公因式不随数域扩大改变

定义2. 若 $(f(x), g(x)) = 1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素

推论. $(f(x), g(x)) = 1 \Longleftrightarrow \forall c(x) \in K[x], c(x) \mid f(x), c(x) \mid g(x)$, $c(x)$ 为零次多项式

定理2. 在 $K[x]$ 中, $(f(x), g(x)) = 1 \Longleftrightarrow$

$\exists u_1(x), u_2(x) \in K[x]$, s.t. $u_1(x)f(x) + u_2(x)g(x) = 1$

证: $\Leftarrow$ 设 $c(x) \in K[x]$, $c(x) \mid f(x)$, $c(x) \mid g(x)$.

则 $c(x) \mid 1$，即 $c(x)$ 为零次多项式

命题2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$，且 $g(x) \neq 0$，数域 $E \supseteq K$，

则 $f(x)$ 在 $g(x)$ 互素 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $E[x]$ 互素

即数域的扩大不改变互素性

性质1. 在 $K[x]$ 中，若 $f(x) \mid g(x)h(x)$，且 $(f(x), g(x)) = 1$，则 $f(x) \mid h(x)$

证：$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$

若 $h(x) \neq 0$，则 $u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x) = h(x)$

即 $f(x) \mid h(x)$

若 $h(x) = 0$，则 $f(x) \mid 0$.

性质2. 在 $K[x]$ 中，若 $f(x) \mid h(x)$，$g(x) \mid h(x)$，$(f(x), g(x)) = 1$，则 $f(x)g(x) \mid h(x)$

证：$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$，

若 $h(x) \neq 0$，$h(x) = k_1(x)f(x) = k_2(x)g(x)$. $(k_1(x), k_2(x) \neq 0)$

$u(x)f(x)g(x)k_2(x) + v(x)g(x)f(x)k_1(x) = h(x)$

$\therefore f(x)g(x) \mid h(x)$

性质3. 在 $K[x]$，若 $(f(x), h(x)) = 1$，且 $(g(x), h(x)) = 1$，则 $(f(x)g(x), h(x)) = 1$

证：$u_1(x)f(x) + v_1(x)h(x) = 1$

$u_2(x)g(x) + v_2(x)h(x) = 1$

$u_1(x)f(x)u_2(x)g(x) + (v_2(x)u_1(x)f(x) + v_1(x)u_2(x)g(x) + v_1(x)v_2(x)h(x))h(x) = 1$

$\Downarrow$ 推广为，在 $K[x]$ 中，若 $(f_i(x), h(x)) = 1$，$i = 1, \cdots, n$，则 $(f_1(x) \cdots f_n(x), h(x)) = 1$