$K[x]$中，次数大于1多项式$f(x)$有一次因式 $\Rightarrow$ $f(x)$可约

定理1. $K[x]$中，$x-c \mid f(x) \Longleftrightarrow f(c)=0$

定义1. 设$f(x)\in K[x]$，若$c\in K$，s.t. $f(c)=0$，则称c是$f(x)$在K中一根.

定理2.（Bezout定理）在$K[x]$中，$x-c\mid f(x) \Longleftrightarrow c$为$f(x)$在$K$中一根

若$x-c$是$f(x)$的k重因式，则称c为$f(x)$一k重根

设$f(x)\in K[x]$，$\deg f(x)=n>0$，

$$f(x)=a\left[(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_s)^{r_s}\right]\left[p_1^{l_1}(x)\cdots p_t^{l_t}(x)\right]$$

则c_i为$f(x)$ r_i重根，且$r_1+\cdots+r_s\le \deg f(x)=n$.

定理3. $K[x]$中$n(n\geq 0)$次非零多项式$f(x)$在K中至多有n个根

推论1. 若$K[x]$中$f(x)$有$n+1$个根（$n=\deg f(x)$），则$f(x)=0$

命题1. $K[x]$中，$\deg f(x)\le n$，$\deg g(x)\le n$，若$K[x]$中有$n+1$个不同的根，

$c_1,\cdots,c_{n+1}$，s.t. $f(c_i)=g(c_i)$，则$f(x)=g(x)$

证：设$h(x)=f(x)-g(x)$，则$c_1,\cdots,c_{n+1}$为$h(x)$的根

$\therefore h(x)$为零多项式，$\therefore f(x)=g(x)$

设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in K[x]$，用$x=t\in K$代，得$f(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i$，$\forall t\in K$

令$f: t\longmapsto f(t)$，故f可视作一函数

称为多项式$f(x)$诱导的多项式函数，或称为数域K上的一元多项式函数

$K_{pol}:=\{$数域K上一元多项式函数$\}$

规定：加法 $(f+g)(t):=f(t)+g(t)$ $\quad\forall t\in K$

乘法 $(fg)(t):=f(t)g(t) \quad \forall t\in K$

验证：令 $h(x)=f(x)+g(x)$

将 $x=t$ 代入 $h(t)=g(t)+f(t)=(f+g)(t) \quad \forall t\in K$

$\therefore$ $f+g$ 由 $h(x)$ 诱导，$\therefore$ $f+g\in K_{pol}$，即加法封闭

同理 令 $h'(x)=g(x)\cdot f(x)$

代入：$h'(t)=g(t)f(t)=(gf)t \quad \forall t\in K$

$\therefore$ gf 由 $h(x)$ 诱导，$gf\in K_{pol}$ 即乘法封闭

易证：K_{pol} 成为有单位元交换环

命题2、设 $f[x],g[x]\in K$，若 $f=g$，则 $f(x)=g(x)$

证：$f(t)=g(t) \quad \forall t\in K$，

$\because$ 数域 K 中有无穷多个元素，

即有大于 $\max\{\deg f(x),\deg g(x)\}$ 个值为 $g(x)-f(x)$ 的根

$\therefore$ $g(x)-f(x)=0$ 即 $f(x)=g(x)$

令 $\sigma: K[x] \longrightarrow K_{pol}$

$f(x) \longmapsto f$

易知 σ 为映射，且为双射，并保持加法，乘法

故 σ 为 $K[x]$ 到 K_{pol} 的环同构映射

从而 $K[x]\cong K_{pol}$

可将多项式 $f(x)$ 与函数 f 等同看待

c 是 $f(x)$ 在 K 中的一个根 $\Longleftrightarrow$ f 在 c 处函数值 $f(c)=0$

设 $f(x)\in C[x]$，$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，设 $\deg f(x)=n>0$.

若 $f(x)$ 无复根，则 $\forall z\in C$，有 $f(z)\neq 0$

令 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$，则 $\varphi'(z)=-\frac{f'(z)}{(f(z))^2}$

$\because f(z)\neq 0$，$\therefore \varphi(z)$ 在 C 上每一点可导（称 $\varphi(z)$ 在复平面解析）

对于复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

于是 $|z^n|=r^n=|z|^n$

$$\lim_{|z|\to+\infty}\frac{1}{|z^n|}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{|z|^n}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad \therefore \lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{z^n}=0$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\varphi(z)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{a_nz^n+\cdots+a_0}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\frac{1}{z^n}}{a_n+\cdots+a_0\frac{1}{z^n}}=\frac{0}{a_n}=0$$

给定 $\varepsilon=1$ 存在 $\delta>0$，s.t. 当 $|z|>\delta$ 时有

$$|\varphi(z)-0|<1 \quad \text{，即} \quad |\varphi(z)|<1$$

当 $|z|\leq\delta$ 时，$\because \varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ 连续

$\therefore \varphi(z)$ 在闭区间上有界

$\therefore |\varphi(z)|\leq M$

$\therefore |\varphi(z)|\leq C$，$C\in\mathbb{R}^+$. 即 $\varphi(z)$ 有界

据 Liuovill 定理：在复平面上解析且（模）有界的函数为常值函数.

$\therefore \varphi(z)=b$，$b\in C^*$，$f(z)=\frac{1}{b}$，$f(x)=\frac{1}{b}$

$\therefore f(x)$ 为零次多项式，$\therefore$ 与题设矛盾

$\therefore f(x)$ 存在复根.

定理4.（代数基本定理）每一次数大于0的多项式有复根

推论1. 次数大于1的多项式必有一次因式

推论2. 只有1次多项式不可约

推论3. $\mathbb{C}[x]$ 中次数大于0的多项式可分解为1次因式乘积.

推论4. $f(x)$ 有 $\deg f(x)$ 个复根（重根按重次计算