定义1、设K是一个数域，x是一个符号，形如以下表达式

$$a_n x^n+\cdots+a_i x^i+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (1)$$

其中$n\in \mathbb{N}$, $a_n,\cdots,a_0\in K$. 称为系数，

若满足：两个这种形式的表达式相等，当且仅当它们除系数为0的项外有完全相同的项

则称这种表达式是数域K上的一元多项式．x称为不定元

系数全为零的一元多项式称为零多项式

$$f(x)=a_n x^n+\cdots+a_i x^i+\cdots+a_1 x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

首项　　　i次项　　　零次项（常数项）

n称$f(x)$的次数，记作$\deg f(x)$

0次多项式形如b, $b\in K^*$（即$b\neq 0$），等同于K中非零元

$\deg 0:=-\infty$

$K[x]:=\{$数域K上所有一元多项式$\}$

规定：加法 $\sum_{i=0}^{n}a_i x^i+\sum_{i=0}^{n}b_i x^i:=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$

乘法 $(\sum_{i=0}^{n}a_i x^i)(\sum_{j=0}^{m}b_j x^j):=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_i b_j x^{i+j}$

$=\sum_{s=0}^{n+m}(\sum_{i+j=s}a_i b_j)x^s$

数乘 $k(\sum_{i=0}^{n}a_i x^i)=\sum_{i=0}^{n}k a_i x^i$

规定：$f(x)-g(x):=f(x)+(-g(x))$

易证$K[x]$对于加法和数乘成为数域K上线性空间

$K[x]$中每一个多项式可由集合$\Omega=\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$中有限多个多项式线性表出，任取$\Omega$一个有限子集$\Omega_1\{x^{i_1},\cdots,x^{i_m}\}$

设 $k_1 x^{i_1}+\cdots+k_m x^{i_m}=0$

由多项式定义得 $k_1=\cdots=k_m=0$

$\therefore \Omega_1$线性无关　$\therefore \Omega$线性无关

$\therefore\ \Omega=\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$ 是 $k[x]$ 的一个基.

从而 $k[x]$ 为无限维线性空间

$k[x]$ 中乘法满足：交换律、结合律，分配律，且

$$1f(x)=f(x)\cdot 1=f(x) \qquad \forall f(x)\in k[x]$$

命题1. 设 $f(x), g(x)\in k[x]$，则

$$\deg[f(x)+g(x)]\leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$ (两式首项次数相同,互为相反数时小于)

$$\deg[f(x)\cdot g(x)]=\deg f(x)+g(x)$$

推论1. $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0 \Longrightarrow f(x)g(x)\neq 0$

推论2.(消去律) 设 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$

定义2. 一个非空集合 R，如果有两个代数运算，一个称为加法，另一个为乘法，并且满足：

1° $(a+b)+c=a+(b+c)$，$\forall a,b,c\in R$

2° $a+b=b+a$ $\quad \forall a,b\in R$

3° 有一元素记作 0，s.t. $0+a=a$，$\forall a\in R$，称为零元

4° 对于 $a\in R$，存在 $b\in R$，s.t. $a+b=b+a=0$，b 称为 a 的负元，记为 $-a$

5° $(ab)c=a(bc)$

6° $\begin{cases} a(b+c)=ab+ac \\ (b+c)a=ba+ca \end{cases}$ $\forall a,b,c\in R$. (左分配律) (右分配律)

则称 R 是一个环 (ring)

例. $\mathbb{Z}$，$k[x]$，$M_n[k]$，$\mathbb{Z}_2$

环 R 中定义减法 $a-b:=a+(-b)$

设 R 是一个环，

(1) 若 R 的乘法满足交换律，则称 R 是交换环

(2) 若 R 中有一元素 e，满足 $ea=ae=a$，则称 e 是 R 的单位元（记作 1）

(3) 对于 $a\in R$，若 $\exists b\in R, b\neq 0$, s.t. $ab=0$（或 $ba=0$）

则称 a 为左零因子（或右零因子）通称为零因子

命题 2、环 R 中 $0\cdot a=a\cdot 0=0 \quad \forall a\in R$

证：$0\cdot a=(0+0)a=0\cdot a+0a \Rightarrow 0a=0$

$a\cdot 0=a(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0 \Rightarrow a0=0$

$\therefore$ 0 为零因子，称为平凡零因子

定义 3、环 R 的一个非空子集 R_1，也成立一个环，则称 R_1 为 R 子环

命题 3、环 R 的一个非空子集 R_1 是子环

$\Longleftrightarrow$ 从 $a,b\in R_1$，可推出 $a-b\in R_1$，$ab\in R_1$（减法，乘法封闭）

证：$\Rightarrow$ $\because b\in R \quad \therefore -b\in R$

又 $a\in R \quad \therefore a+(-b)\in R$ 即 $a-b\in R$

$\Leftarrow$ $\because R_1$ 非空 $\quad \therefore \exists c\in R_1$，

$\therefore \quad 0=c-c\in R_1$，（零元存在）

任给 $b\in R_1$，则 $-b=0-b\in R_1$（负元存在）

任给 $a,b\in R_1$，则 $a+b=a-(-b)\in R$，（加法封闭）

由题知 $ab\in R_1$（乘法封闭）

$\therefore R_1$ 成为一个环，从而 R_1 为一子环

任给 $A\in M_n(k)$，表达式 $b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0I \ (b_i\in\mathbb{N})$ 称为矩阵 A 的多项式

$K[A]=\{$矩阵A的多项式$\}$

易证 $K[A]$ 对减法,乘法封闭,

$\therefore$ $K[A]$ 为环 $M_n(K)$ 一子环, 且 $K[A]$ 是有单位元 I 的交换环

KI 为 $K[A]$ 一子环

记 τ: $K \longrightarrow KI$

$k \longmapsto kI$

则易知 τ 为双射, 且保持加法, 乘法

定义4. 若环 R 到环 R' 有一双射 σ, 满足

$$\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b) \quad \forall a,b\in R$$

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b) \quad \forall a,b\in R$$

则称 σ 是环 R 到环 R' 的一个同构映射

此时 R 与 R' 是同构的, 记作 $R\cong R'$

命题4. 若环 R 到 R' 存在同构映射 σ, 且 R 有单位元 e,

则 $\sigma(e)$ 为 R' 单位元

证: 任取 R' 中一元素 a',

$\because$ σ 为双射 $\therefore$ $\exists a\in R$, s.t. $\sigma(a)=a'$

$\because$ $\sigma(e)a'=\sigma(e)\sigma(a)=\sigma(ea)=\sigma(a)=a'$

$a'\sigma(e)=\sigma(a)\sigma(e)=\sigma(ae)=\sigma(a)=a'$

$\therefore$ $\sigma(e)$ 为 R' 中单位元

定理. (一元多项式环的通用性质)

设 K 是一数域, R 为一有单位元 $1'$ 的交换环

K 到 R 一包含 $1'$ 的子环 R_1 有一同构映射 τ

任给 $t\in R$ 令 σ_t : $K[x] \longrightarrow R$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i =: f(t)$$

则 σ_t 为 $K[x]$ 到 R 一映射；$\sigma_t(x)=t$，且保持加法，乘法运算.

即若 $f(x)+g(x)=h(x)$ ， $f(x)g(x)=p(x)$

则 $f(t)+g(t)=h(t)$ ， $f(t)g(t)=p(t)$

称 σ_t 是 x 用 t 代入

证：$\because$ $f(x)$ 的表法唯一，且 τ 为一映射

$\therefore$ σ_t 为 $K[x]$ 到 R 一映射

$\because$ $\sigma_t(x)=\sigma_t(1x)=\tau(1)\cdot t^1 = 1' t = t$

$\therefore$ $\sigma_t(x)=t$

设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$ ，$g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_i x^i$，$\in K[x]$

若 $f(x)+g(x)=h(x)$ ， $f(x)g(x)=P(x)$

则 $h(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$ $\quad P(x)=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s}a_i b_j\right)x^s$

从而 $h(t)=\sum_{i=0}^{n}\tau(a_i+b_i)t^i = \sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i+\sum_{i=0}^{n}\tau(b_i)t^i = f(t)+g(t)$

$P(t)=\sum_{s=0}^{n+m}\tau\left(\sum_{i+j=s}a_i b_j\right)t^s = \sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s}\tau(a_i)\tau(b_j)\right)t^s$

$$f(t)g(t)=\left[\sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i\right]\left[\sum_{j=0}^{m}\tau(b_j)t^j\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\tau(a_i)\tau(b_j)\,t^{i+j} \quad (R\text{为交换环})$$

$$=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s}\tau(a_i)\tau(b_j)\right)t^s = P(t)$$