定义、设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$，$V\in F$，若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 中一基，使得 $\underline{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵，则称 $\underline{A}$ 可对角化

n 维线性空间矩阵可对角化

$\Leftrightarrow$ V 中有一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，s.t. $\underline{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $(\underline{A}\alpha_1,\cdots,\underline{A}\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\cdots,\lambda_n\alpha_i)$ 即 $\underline{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,\cdots,n)$

$\Leftrightarrow$ V 中存在由 $\underline{A}$ 的特征向量组成的基

$\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 设 $\underline{A}$ 的所有不同特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，$V_{\lambda_i}$ 的基的并集为 V 的一个基

证："$\Rightarrow$" $\underline{A}$ 的 n 个线性无关特征向量：$\underbrace{\alpha_{11},\cdots\alpha_{1r_1}}_{V_{\lambda_1}},\cdots,\underbrace{\alpha_{s1},\cdots\alpha_{sr_s}}_{V_{\lambda_s}}$ $r_1+\cdots+r_s=n$

则 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 为 V_{λ_i} 的一个基 $(i=1,\cdots,n)$

（证：设 $\exists V_{\lambda_j}$，$\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 不为其一基

则 $\exists\beta_j\in V_{\lambda_j}$ 不可由其线性表出，即 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j},\beta_j$ 线性无关

$\because$ 不同向量值的线性无关特征向量仍线性无关

$\therefore$ $\alpha_{11},\cdots\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s},\beta_j$ 线性无关

又 $\dim V=n$，$r_1+\cdots r_s+1=n+1$

$\therefore$ $\alpha_{11},\cdots\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s},\beta_j$ 线性相关

$\therefore$ $\forall V_{\lambda_j}$，$\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 为其一基）

$\Leftrightarrow$ $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$，

$\Leftrightarrow$ $\dim V=\dim V_{\lambda_1}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$

$$\Leftrightarrow \underline{A}(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s})=(\quad)\begin{array}{c} \qquad r_1 \\ \begin{bmatrix}\lambda_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda_1&&\\&&&\lambda_s&\\&&&&\ddots\ \lambda_s\end{bmatrix}\end{array}$$

$\therefore$ $\underline{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$

特征值λ_i的代数重数（λ_i作为$f(\lambda)$根的重数）$=$ λ_i的几何重数（$\dim V_{\lambda_i}$）

（注：一般情况下，λ的几何重数$\leq$代数重数）

定义2．设$A\in M_n(F)$，若A相似于一对角矩阵，则称A可对角化

$\Longleftrightarrow$ $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$

即 $AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$

$\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关特征向量．