一、欧几里得空间中的标准正交基

命题1. 实内积空间V中由两两正交的非零向量组成集合S 线性无关

证：取S中一有限子集$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$

设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则 $(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\alpha_i)=(0,\alpha_i)=0$, $i=1,\cdots,m$

$(k_i\alpha_i,\alpha_i)=0 \Rightarrow k_i=0$, $i=1,\cdots,m$

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，S 线性无关

推论1. n维欧几里得空间V中n个两两正交非零向量是V一个基

称为正交基，若又为单位向量则称为标准正交基

定理1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是实内积空间中一线性无关向量组

令
$$\left.\begin{aligned}
\beta_1&=\alpha_1\\
\beta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\
&\vdots\\
\beta_s&=\alpha_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j
\end{aligned}\right\}\ \text{Schmidt 正交化}$$

$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 V 一正交基

证：$s=1$ 时 $\beta_1=\alpha_1$ 命题为真

设当$s=k$时 命题为真

$s=k+1$ 时，$\beta_{k+1}=\alpha_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\alpha_{k+1},\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$

$$(\beta_{k+1},\beta_i)=(\alpha_{k+1},\beta_i)-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\alpha_{k+1},\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}(\beta_j,\beta_i)$$

$$=(\alpha_{k+1},\beta_i)-\frac{(\alpha_{k+1},\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}(\beta_i,\beta_i)$$

$$=0$$

$\therefore \beta_{k+1}$ 与 β_i 正交，$i=1,\cdots,k$

故 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 两两正交

又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 等价

$\therefore$ $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关

$\therefore$ $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 V 一正交基

推论2. n维欧几里德空间有标准正交基.

V中取一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

Schmidt正交化 $\Downarrow$

V 的一个正交基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$

单位化 $\Downarrow$ $\eta_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i$

$\eta_1,\cdots,\eta_s$ 即为标准正交基

n维欧几里得空间V,有唯一内积,此内积在V的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下度量矩阵A称为基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵

$\forall\ \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X,\ \beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y$,有 $(\alpha,\beta)=X'AY$

设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是n维欧几里得空间V的一个标准正交基,

$\alpha=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X$, $\beta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y$

性质1. $(\alpha,\beta)=X'IY=X'Y$

性质2. $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\eta_i$, $(\alpha,\eta_j)=x_j$, $\alpha=\sum_{i=1}^{n}(\alpha,\eta_i)\eta_i$

定理2. 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为n维欧几里得空间V一标准正交基. 设

$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P$

为V一标准正交基,则

$\Longleftrightarrow$ P为正交矩阵

证：$P=(P_1,\cdots,P_n)$，$\beta_j=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P_i$

$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 标准正交基

$\Leftrightarrow (\beta_i,\beta_i)=1,(\beta_i,\beta_j)=0$

$\Leftrightarrow P_i'P_i=1,\ P_i'P_j=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}P_1'\\ \vdots\\ P_n'\end{pmatrix}(P_1,\cdots,P_n)=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow P'P=I$

定义1. n级实矩阵 A 满足 $A'A=I$，则称 A 为正交矩阵

命题2. n级实矩阵 A 为正交矩阵

$\Leftrightarrow A'A=I$

$\Leftrightarrow A^{-1}=A'$

$\Leftrightarrow AA'=I$

性质1. I 为正交矩阵

2. 若 A、B 为正交矩阵，则 AB 亦为正交矩阵

$(AB)'AB=(B'A')AB=I$

3. 若 A 为正交矩阵，则 A^{-1} 亦为正交矩阵

二、子空间，正交补

定义2. 设 S 为实内积空间 V 的一个子空间

$S^{\perp}:=\{\alpha\mid(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in S\}$

称为 S 的正交补，易验证 $S^{\perp}$ 为 V-子空间，且实内积空间

定理3. 设U为实内积空间V的一有限维子空间，则

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

证：$\forall \alpha \in V$，设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_1 \in U$

设U的标准正交基为 $\eta_1, \cdots, \eta_m$，$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{m} k_i \eta_i$

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 \in U^{\perp} \Leftrightarrow (\alpha_2, \eta_j) = 0 \quad j = 0, \cdots, m$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \alpha_1, \eta_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \eta_j) = (\alpha_1, \eta_j) = k_j$$

故当 $\alpha_1 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha, \eta_i) \eta_i$ 时 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_1 \in U$，$\alpha_2 \in U^{\perp}$

即 $V = U + U^{\perp}$

任取 $\gamma \in U \cap U^{\perp}$，则 $(\gamma, \gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\therefore V = U \oplus U^{\perp}$

若 $V = U \oplus U^{\perp}$，则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_1 \in U$，$\alpha_2 \in U^{\perp}$，有平行于 $U^{\perp}$ 在U上的投影 P_U，$P_U(\alpha) = \alpha_1$，称 P_U 是V在U上的正交投影（把 α_1 称为 α 在正交投影 P_U 下的像）α_1 称为 α 在U上的正交投影

α_1 是 α 上正交投影 $\Leftrightarrow \alpha - \alpha_1 \in U^{\perp}$

定理4. 若 $V = U \oplus U^{\perp}$，则 $\forall \alpha \in V$，$\alpha_1 \in U$ 为 α 在U上的正交投影

$$\Leftrightarrow d(\alpha, \alpha_1) \leq d(\alpha, \gamma), \ \forall \gamma \in U$$

证："$\Rightarrow$" $\alpha - \alpha_1 \in U^{\perp}$，$\forall \gamma \in U$，$\alpha_1 - \gamma \in U$

$$[d(\alpha, \gamma)]^2 = |\alpha - \gamma|^2 = |(\alpha - \alpha_1) + (\alpha_1 - \gamma)|^2$$

$$= |\alpha - \alpha_1|^2 + |\alpha_1 - \gamma|^2$$

$$\geq [d(\alpha, \alpha_1)]^2$$

$\Leftarrow$ 设 δ 为 α 在U上正交投影.

则有 $d(\alpha, \delta) \leq d(\alpha, \alpha_1)$

又 $d(\alpha,\alpha_1)\le d(\alpha,\delta)$

$\therefore d(\alpha,\alpha_1)=d(\alpha,\delta)$

$$|\alpha-\alpha_1|^2=|\alpha-\delta+\delta-\alpha_1|^2=|\alpha-\delta|^2+|\delta-\alpha_1|^2$$

$$=|\alpha-\alpha_1|^2+|\delta-\alpha_1|^2$$

$\therefore |\delta-\alpha_1|=0 \quad \therefore \delta-\alpha_1=0 \Rightarrow \delta=\alpha_1$

定义2. 设实内积空间 V 的一子空间 U，若 $\forall\alpha\in V, \exists\delta\in U$, s.t.

$$d(\alpha,\delta)\le d(\alpha,\gamma)\quad \forall\gamma\in U,$$

则称 δ 为 α 在 U 上的最佳逼近元

当 U 是有限维，则 $V=U\oplus U^\perp$, $\forall\alpha\in V, \exists\alpha_1\in U^\perp$, s.t. $\alpha-\alpha_1\in U$
则 α_1 为 α 在 U 上最佳逼近元

三、同构

定义3. 设 V 与 V' 都是实内积空间，若 V 到 V' 有一双射 σ，且

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta) & \forall\alpha,\beta\in V\\ \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha) & \forall k\in\mathbb{R},\alpha\in V\end{array}\right\}\text{线性同构}\\ (\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V\end{array}\right\}\text{保距同构}$$

则称 σ 为实内积空间 V 到 V' 的一个同构映射

称 V 与 V' 是同构的，记作 $V\cong V'$

保距同构 σ 将 V 的一个标准正交基映成 V' 的标准正交基

定理5、两个欧几里得空间同构 $\Longleftrightarrow$ 维数相同

证: "$\Leftarrow$" 设 $\dim V=\dim V'=n$

V中取一标准正交基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$;

V'中取一标准正交基 $\delta_1, \cdots, \delta_n$;

$$\sigma: V \longrightarrow V'$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_i$$

易知 σ 为线性同构

设 $\alpha = (\eta_1, \cdots, \eta_n) X$, $\beta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) Y$

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = ((\delta_1, \cdots, \delta_n) X, (\delta_1, \cdots, \delta_n) Y) = X'Y = (\alpha, \beta)$$

$\therefore$ σ 为保距同构

$\therefore$ V 与 V' 同构

任一 n 维欧几里得空间 $V \cong \mathbb{R}^n$, 其中一同构映射为

$$\sigma: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$