几何空间V中：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $\quad (\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\vec{b}$ $\quad (k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\vec{a}\cdot\vec{b}$

定义1. 设V是域F上一线性空间，V×V到F的一个映射f满足：

1° $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_1,\beta)$ $\quad\forall\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V,k_1,k_2\in F$

2° $f(\alpha,l_1\beta_1+l_2\beta_2)=l_1f(\alpha,\beta_1)+l_2f(\alpha,\beta_2)$ $\quad\forall\alpha,\beta_1,\beta_2\in V,l_1,l_2\in F$

则称f是V上的一个双线性函数

任给$\alpha\in V$，$\alpha_L(\beta):=f(\alpha,\beta)$，$\forall\beta\in V$，易验证$\alpha_L$为V上一线性函数

$\beta\in V$，$\beta_R(\alpha):=f(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha\in V$ 易验证β_R为V上一线性函数

设$\dim V=n$，V中取一基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X \qquad \beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y$$

设f为一双线性函数，则

$$f(\alpha,\beta)=f\Big(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i\Big)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j f(\alpha_i,\alpha_j) \qquad (1)$$

$$=\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{i=1}^n x_if(\alpha_i,\alpha_j)\Big)y_j$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^n x_if(\alpha_i,\alpha_1),\cdots,\sum_{i=1}^n x_if(\alpha_i,\alpha_n)\Big)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}f(\alpha_1,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_1,\alpha_n)\\ \vdots&&\vdots\\ f(\alpha_n,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$=X'AY$$

称 A 为 f 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下度量矩阵

(1). (2) 式称为 f 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的表达式

反之，任给 $A\in M_n(F)$ 令 $f(\alpha,\beta):=X'AY$

易验证 f 为 V 上一双线性函数，且 f 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下度量矩阵为 A

定理 1. 设 f 为域 F 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数. V 中两基

$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C$，$f$ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下度量矩阵为 A，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下为 B.

则 $B=C'AC$

证：$\beta_j=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{nj}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C_j$

$$B=\begin{pmatrix}f(\beta_1,\beta_1)&\cdots&f(\beta_1,\beta_n)\\ \vdots&&\vdots\\ f(\beta_n,\beta_1)&\cdots&f(\beta_n,\beta_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1'AC_1&\cdots&C_1'AC_n\\ \vdots&&\vdots\\ C_n'AC_1&\cdots&C_n'AC_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1'\\ \vdots\\ C_n'\end{pmatrix}(AC_1,\cdots,AC_n)=C'AC$$

定义2. 设 $A,B\in M_n(F)$，若 $\exists\, C\in F$，$|C|\neq 0$，s.t.

$$B=C'AC$$

则称 A 与 B 是合同的 记作 $A\simeq B$

易知合同为一等价关系

同一双线性函数 f 在 V 的不同的基下度量矩阵是合同的

命题 1. 设 $A,B\in M_n(F)$，若 $A\simeq B$，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

将双线性函数f在V的一个基下的秩称为f的矩阵秩 $\mathrm{rank}_m(f)$

命题2. 设 $A, B \in M_n(F)$，若 $A \simeq B$，则可将A,B看作f在V的不同基下度量矩阵

定义3. 设f是域F上n维线性空间V上的一个双线性函数.

$$\mathrm{rad}_L V := \{\alpha \in V \mid f(\alpha,\beta)=0,\ \forall \beta \in V\}$$

称为f在V中的左根；为V一子空间

$$\mathrm{rad}_r V := \{\beta \in V \mid f(\alpha,\beta)=0,\ \forall \alpha \in V\}$$

称为f在V的右根 为V一子空间

定义4. 若V上双线性函数f在V中左根与右根都是0，则称f是非退化的

定理2. 域F上n维线性空间V上双线性函数为非退化的

$\Leftrightarrow$ f的度量矩阵满秩

证：V中取一基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. f在此基下度量矩阵为A.

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X,\quad \beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Y$

$\alpha \in \mathrm{rad}_L(V) \Leftrightarrow f(\alpha,\beta)=0,\ \forall \beta \in V$

$\Leftrightarrow X'AY=0,\ \forall Y \in F^n$

$\Leftrightarrow X'A\varepsilon_i=0\quad i=1,\cdots,n$

$\Leftrightarrow X'A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=0$

$\Leftrightarrow X'AI=0$

$\Leftrightarrow X'A=0$

$\Leftrightarrow X$ 为 $A'Z=0$ 的一个解

$\mathrm{rad}_L V = 0 \Leftrightarrow A'Z=0$ 只有零解

$$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n$$

同理 $\operatorname{rad}_R V=0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n$