定义1. 设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$, $V\in F$, 在 $\underline{A}$ 的所有零化多项式中,
考虑次数最低且首项次数为1的多项式, 称为最小多项式

命题1. $\underline{A}$ 的最小多项式唯一

命题2. 设 $m(\lambda)$ 为 $\underline{A}$ 最小多项式, 则若 $m(\lambda)|g(\lambda) \Leftrightarrow g(\underline{A})=0$

证: $\Rightarrow g(\lambda)=m(\lambda)n(\lambda)$

$g(A)=m(A)n(A)=0\cdot n(A)=0$

$\Leftarrow \quad g(\lambda)=h(\lambda)m(\lambda)+r(\lambda) \qquad \deg r(\lambda)<\deg m(\lambda)$

$g(\underline{A})=h(\underline{A})m(\underline{A})+r(\underline{A})=r(\underline{A})=0$

则 $r(\lambda)$ 亦为零化多项式, $\therefore \deg r(\lambda)\geq \deg m(\lambda)$

$\therefore r(\lambda)=0$

命题3、$\underline{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$, 与最小多项式 $m(\lambda)=c_0+\cdots+c_{r-1}\lambda^{r-1}+\lambda^r$
有相同的根(重数未必相同)

证: $m(\lambda)|f(\lambda) \Rightarrow f(\lambda)=m(\lambda)h(\lambda)$

$\therefore m(\lambda)$ 的根 $\subseteq f(\lambda)$ 的根

设 λ_0 为 $f(\lambda)$ 一根, 即 λ_0 为 $\underline{A}$ 一特征值

即 $\exists \xi\in V, \xi\neq 0$, s.t. $\underline{A}\xi=\lambda_0\xi$

$m(\underline{A})\xi=(c_0+\cdots+A^r)\xi$

$=c_0\xi+c_1\lambda_0\xi+\cdots+\lambda_0^r\xi$

$=(c_0+c_1\lambda_0+\cdots+\lambda_0^r)\xi=m(\lambda_0)\xi=0$

$\because \xi\neq 0 \quad \therefore m(\lambda_0)=0 \quad \therefore$

$\therefore m(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 有相同的根(重数未必相同)

定义2. 设 $A\in M_n(F)$, 将 A 的零化多项式中次数最小且首项为1
的称为最小多项式

推论1：设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$，$\underline{A}$ 在 V 下一基的矩阵为 A，则 $\underline{A}$ 与 A 有相同的零化多项式

$\therefore$ A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 有相同的根（重数未必相同）

推论2．相似的矩阵有相同的最小多项式（行列式、秩、迹，特征多项式）

设 $B=P^{-1}AP$．$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 中一基

则 $\exists$ 唯一的 $\underline{A}$，s.t. $\underline{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)A$

令 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$

则 $\underline{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=\underline{A}[(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P]=[\underline{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)]P$

$=[(\alpha_1,\cdots\alpha_n)A]P=[(\beta_1,\cdots,\beta_n)P^{-1}A]P$

$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B$

$\therefore$ $\underline{A}$ 与 A 最小多项式相同，$\underline{A}$ 与 B 最小多项式相同

定理1．设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$ $\dim V=n$，$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$（$W_i$ 为 $\underline{A}$ 不变子空间）

$\underline{A}|W_j$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda)$，则 $m(\lambda)=[m_1(\lambda)\cdots m_s(\lambda)]$

证：任取 $\underline{A}$ 的一个非零零化多项式 $q(\lambda)$，则 $q(\underline{A})=\underline{0}$

任取 $q(\underline{A}|W_j)\alpha_j=q(\underline{A})\alpha_j=\underline{0}\alpha_j=0$ $\therefore q(\underline{A}|W_j)=\underline{0}$

$\therefore$ $q(\lambda)$ 为 $\underline{A}|W_j$ 的一个零化多项式

$\therefore$ $m_j(\lambda)\mid q(\lambda)$ $(j=1,\cdots,n)$

$\therefore$ $q(\lambda)$ 为 $m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$ 的公倍数

$\therefore$ $\{\underline{A}$ 的零化多项式$\}\subseteq\{m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$ 的非零公倍数$\}$

任取 $m_1(\lambda)\ldots m_s(\lambda)$ 的一个非零公倍数 $k(\lambda)$

则 $k(\lambda)=h_j(\lambda)m_j(\lambda)$

任取 $\alpha\in A$，$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$ $(\alpha_j\in W_j)$

$k(\underline{A})\alpha=\sum_{i=1}^{s}k(\underline{A})\alpha_i=\sum_{i=1}^{s}k(\underline{A}|W_i)\alpha_i$

$=\sum_{i=1}^{s}h_i(\underline{A}|W_i)m_i(\underline{A}|W_i)\alpha_i$

$= \sum_{i=1}^{s} h_i(\underline{A}|W_i)0 \quad = 0$

$\therefore$ $k(\underline{A})$ 为 $\underline{A}$ 的零化多项式

$\therefore$ {$\underline{A}$的零化多项式} = {$m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的非零公倍数}

$\therefore$ $m(\lambda) = [m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$ (代表首项为1为最小公倍数)

推论3.

设域F上n维矩阵 A为 $\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$

A_i 的最小多项式为 $m_j(\lambda)$ $(j=,\cdots,n)$ A的为 $m(\lambda)$, 则

$m(\lambda) = [m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$

证: 设V为F上线性空间, 则 $\exists \underline{A} \in Hom(V,V)$, s.t. $\underline{A}$ 在 V一组基 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 下矩阵为A, 于是

$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, 且 A_j 是 $\underline{A}|W_j$ 在 W_j 下的矩阵

于是 $\underline{A}|W_j$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda)$

$m(\lambda) = [m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$

定义3. 若 $\exists l \in N^*$, s.t. $\underline{A}^l = 0$, 则称 $\underline{A}$ 为幂零变换, 使 $\underline{A}^x = 0$ 成立的最小正整数 l 称为 $\underline{A}$ 的幂零指数

命题4. 设 $\underline{A}$ 是幂零指数为 l, 则 $\underline{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda) = \lambda^l$

证: $\underline{A}^l = 0 \Rightarrow f(\lambda) = \lambda^l$ 为 $\underline{A}$ 的零化多项式

$\therefore$ $m(\lambda) | f(\lambda)$ $\quad \therefore$ $m(\lambda) = \lambda^k$ $(k \leq l)$

又 l 为 $\underline{A}^x = 0$ 成立的最小整数

$\therefore$ $k = l$ $\quad \therefore$ $m(\lambda) = \lambda^l$

定理2. 设 $V \in F$, $\dim V = n$, $\underline{A} \in Hom(V,V)$, 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 $\underline{A}$ 的所有不

同特征值，$\underline{A}$可对角化 $\Longleftrightarrow m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

证：设 $\alpha_j\in V_{\lambda_j} \Longleftrightarrow \underline{A}\alpha_j=\lambda_j\alpha_j \Longleftrightarrow \underline{A}\alpha_j-\lambda_j\underline{I}\alpha_j=0$

$\Longleftrightarrow (\underline{A}-\lambda_j\underline{I})\alpha_j=0 \Longleftrightarrow \alpha_j\in Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$

$\therefore V_{\lambda_j}=Ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$ ， $\underline{A}|V_{\lambda_j}-\lambda_j(\underline{I}|V_{\lambda_j})=\underline{O}$

$\therefore$ $\lambda-\lambda_j$ 为 $A|V_{\lambda_j}$ 的一个零化多项式

$\therefore$ $\underline{A}|V_{\lambda_j}$ 的最小多项式为 $\lambda-\lambda_j$

$\therefore$ $m(\lambda)=[\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_s]=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

"$\Leftarrow$" 设 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

则 $V=Ker\,m(\underline{A})=Ker(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})\oplus\cdots\oplus Ker(\underline{A}-\lambda_s\underline{I})$

$=V_{\lambda_1}\oplus\cdots V_{\lambda_s}$

推论4. 幂零指数 $l>1$ 的幂零变换一定不可对角化

推论5. 幂等变换 $\underline{A}^2=\underline{A}$ 可对角化

$\underline{A}^2=\underline{A} \Rightarrow \underline{A}^2-\underline{A}=\underline{O} \Rightarrow \underline{A}(\underline{A}-\underline{I})=0$

$\lambda(\lambda-1)$ 为 $\underline{A}$ 一零化多项式.

$m(\lambda)\,|\,\lambda(\lambda-1)$