一、概念与性质

复数域上线性空间 V 上一个双线性函数 f

$f(i\alpha, i\alpha) = i\cdot i f(\alpha,\alpha) = -f(\alpha,\alpha)$ 与正定性矛盾

故修改为 $f(\alpha, i\alpha) = \bar{i} f(\alpha,\alpha)$ $f(\alpha,\alpha)$ 为实数.

则有 $f(i\alpha, i\alpha) = i\bar{i} f(\alpha,\alpha) = f(\alpha,\alpha)$

$\overline{f(i\alpha,\alpha)} = \overline{i f(\alpha,\alpha)} = \bar{i} f(\alpha,\alpha) = f(\alpha, i\alpha)$

定义1. 复线性空间 V 上的一个二元函数 (,), 即 $V\times V \to C$ 的一个映射

若满足

1° $(\beta,\alpha) = \overline{(\alpha,\beta)}$ $\forall \alpha,\beta\in V$. (Hermite 性)

2° $(\alpha+\gamma,\beta) = (\alpha,\beta) + (\gamma,\beta)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in V$

3° $(k\alpha,\beta) = k(\alpha,\beta)$ $\forall \alpha,\beta\in V, k\in C$

} 第一个变量为线性

4° $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 仅当 $\alpha=0$ 时等号成立 (正定性)

则称 (,) 为 V 上一个内积

若复线性空间上指定了一个内积, 则称其为复内积空间或酉空间

$(\alpha,\beta+\gamma) = \overline{(\beta+\gamma,\alpha)} = \overline{(\beta,\alpha)} + \overline{(\gamma,\alpha)} = (\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$ 加法保留

$(\alpha, k\beta) = \overline{(k\beta,\alpha)} = \bar{k}\,\overline{(\beta,\alpha)} = \bar{k}(\alpha,\beta)$ 数乘不保留

称 (,) 对第二个变量是半线性的

设 V 是一个酉空间, 则 α 的长度 $|\alpha| := \sqrt{(\alpha,\alpha)}$, $|k\alpha| = |k||\alpha|$

定理1. 在酉空间 V 中, $\forall \alpha,\beta\in V$ 有 $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha|\cdot|\beta|$ 仅当 α,β 线性相关时等号成立

证: 若 α,β 线性相关, 则 $|(\alpha,\beta)| = |\alpha||\beta|$

若线性无关. 则有 $\forall t\in C$, 有 $\alpha+t\beta\neq 0$

由正定性 得 $0<(\alpha+t\beta, \alpha+t\beta)$

$$= (\alpha, \alpha + t\beta) + t(\beta, \alpha + t\beta)$$
$$= (\alpha,\alpha) + \bar{t}(\alpha,\beta) + t\overline{(\alpha,\beta)} + t\cdot\bar{t}(\beta,\beta)$$

取 $t = -\frac{(\alpha,\beta)}{|\beta|^2}$，代入得

$$0 < |\alpha|^2 - \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2} - \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2} + \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2}$$

即 $|(\alpha,\beta)|^2 < |\alpha|^2|\beta|^2$

$\therefore\ |(\alpha,\beta)| < |\alpha||\beta|$

定义2. 在酉空间 V 中，若 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$，则 $\langle\alpha,\beta\rangle := \arccos\frac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha|\cdot|\beta|}$

故 $0 \leq (\alpha,\beta) \leq \frac{\pi}{2}$

在酉空间 V 中：

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

若 α 与 β 正交，则 $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

定义3. 在酉空间 V 中，$\forall \alpha, \beta \in V$，$d(\alpha,\beta) := |\alpha - \beta|$

二、酉空间的结构

(一) n 维酉空间的标准正交基

命题1. 酉空间 V 中两两正交的非零向量线性无关

定义4. 酉空间 V 中两两正交的非零向量称为 V 的一个正交基

若其皆为单位向量，则称为标准正交基

例1. C^n 中，$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$(\alpha,\beta) := x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n = \bar{Y}'X = Y^*X$$

易验证 (,) 是 C^n 上一个内积，称之为标准内积

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 C^n 上一标准正交基

定理2. n维酉空间必有标准正交基（同欧氏空间Schmit正交化）

设$\eta_1,\cdots,\eta_n$是n维酉空间V的一个标准正交基

$\alpha=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X$，$\beta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y$

则$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{n}x_i\eta_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\eta_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\overline{y_j}(\eta_i,\eta_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$

$=Y^*X$

$\alpha=\sum_{i=1}^{n}(\alpha,\eta_i)\eta_i$

定理3. 设$\eta_1,\cdots,\eta_n$是n维酉空间V的一个标准正交基，且有

$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P$，$P=(P_1,\cdots,P_n)$

$\beta_1,\cdots,\beta_n$为V标准正交基

$\Leftrightarrow P^*P=I$，P为酉矩阵

证：$\beta_j=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P_j$

$\beta_1,\cdots,\beta_n$为V标准正交基

$\Leftrightarrow(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}$

$\Leftrightarrow P_j^*\cdot P_i=\delta_{ij}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}P_1^*\\ \vdots\\ P_n^*\end{pmatrix}(P_1,\cdots,P_n)=I$$

$\Leftrightarrow P^*P=I$

定义. n级复数域上矩阵A若满足$A^*A=I$，则称A为酉矩阵

(2) 正交补

定理4. 设U为酉空间V中一个n维子空间，则$V=U\oplus U^{\perp}$

若 $V=U\oplus U^{\perp}$，则平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影 P_U 称为 V 在 U 上的正交投影.

设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in U$，$\alpha_2\in U^{\perp}$，称 α_1 为 α 在 U 上的正交投影

$\alpha_1\in U$ 是 α 在 U 上正交投影 $\Leftrightarrow \alpha-\alpha_1\in U^{\perp}$

$\Leftrightarrow d(\alpha,\alpha_1)\le d(\alpha,\gamma)$，$\forall\gamma\in U$

定义6. 酉空间 V 中一子空间 U，对于 $\alpha\in V$，若 $\exists\,\delta\in U$，s.t.

$$d(\alpha,\delta)\le d(\alpha,\gamma),\quad \forall\gamma\in U$$

则称 δ 是 α 在 U 上的最佳逼近元

若 U 为有限维，则 $\forall\alpha\in V$，α 在 U 上的正交投影为其最佳逼近元

定义7. 设 V 是复(实)内积空间，若 V 中每一个 Cauchy 序列都在 V 有极限，则称 V 是 Hilbort 空间

定理5. 设 V 是一个 Hilbort 空间，若 U 是 V 的一个闭子空间，则 V 中任一向量 α 在 U 上都有最佳逼近元，从而 $V=U\oplus U^{\perp}$

(三) 同构

定理6. 两个有限维酉空间同构 $\Leftrightarrow$ 维数相同