定义1. 设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$，$V\in F$，$W$为$V$-子空间，若

$\forall \alpha\in W$，$\underline{A}\alpha\in W$，则称W是$\underline{A}$的一个不变子空间

易知 $\{0\}$，V为$\underline{A}$不变子空间，称为平凡的

$\underline{A}|W: \ W\to W, \ \alpha\longmapsto \underline{A}\alpha$

命题1. $\underline{A}$的特征子空间，$Ker\underline{A}$，$Im\underline{A}$ 为$\underline{A}$不变子空间

命题2. $\underline{A},\underline{B}\in Hom(V,V)$，若$\underline{A},\underline{B}$可交换，

则$Ker\underline{B}$，$Im\underline{B}$，$\underline{B}$特征子空间，为$\underline{A}$不变子空间

证：$\forall\alpha\in Ker\underline{B}$，有 $\underline{B}\underline{A}\alpha=\underline{A}(\underline{B}\alpha)=\underline{A}0=0$

$\therefore \underline{A}\alpha\in Ker B$ $\therefore Ker B$ 为A不变子空间

$\forall\alpha\in V$，$\underline{A}(\underline{B}\alpha)=\underline{B}(\underline{A}\alpha)\in Im\underline{B}$

$\therefore Im B$ 为不变子空间

设V_{λ_0}为$\underline{B}$-特征子空间，$\forall\alpha\in V_{\lambda_0}$，$\underline{B}\alpha=\lambda_0\alpha$

$\because \underline{B}(\underline{A}\alpha)=\underline{A}\underline{B}\alpha=\underline{A}\lambda_0\alpha=\lambda_0 A\alpha$

$\therefore \underline{A}\alpha\in V_{\lambda_0}$ $\therefore$ 任一$\underline{B}$特征子空间为$\underline{A}$不变子空间

命题3. $\underline{A}$的不变子空间的交与和仍为$\underline{A}$不变子空间

命题4. 设 $W=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle$，则 W为$\underline{A}$不变子空间 $\Leftrightarrow$ $\underline{A}\alpha_i\in W$

定理1. 设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$，$dim V=n$，$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}$ 为V-基

$$\underline{A}(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s})=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s})\begin{bmatrix}A_1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&A_s\end{bmatrix}$$

其中A_i为r_i级矩阵，$i=1,\cdots,s$.

即 $\underline{A}(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i})=(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i})A_i$

$\Rightarrow W_1=\langle\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1}\rangle\cdots W_s=\langle\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}\rangle$ 为 $\underline{A}$ 的非平凡子空间

且 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ 注：此为 $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}\Leftrightarrow\underline{A}$ 可对角化的弱化

寻找 $\underline{A}$ 的不变子空间，

1° V_{λ_0}，$Ker\underline{A}$、$Im\underline{A}$.

2° 若 $\underline{B}$ 与 $\underline{A}$ 可交换，则 $V_{\lambda_0}(\underline{B})$，$Ker\underline{B}$、$Im\underline{B}$ 为 $\underline{A}$

设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$，$a_m\underline{A}^m+\cdots+b_1\underline{A}+b_0\underline{I}$ 称为 $\underline{A}$ 的一个多项式

$F[\underline{A}]:=\{\underline{A}$ 的多项式$\}\subseteq Hom(V,V)$

易知 $F[A]$ 对减法与乘法封闭，

$\therefore F[A]$ 为 $Hom(V,V)$ 的一子环，有单位元，且是交换环

$F\underline{I}:=\{k\underline{I}\mid k\in F\}=\{\underline{k}\mid k\in F\}$，$\therefore F\underline{I}$ 为 $F[A]$ 一子环，有单位元 $\underline{I}$

令 τ： $F\longrightarrow F\underline{I}$，$k\longmapsto k\underline{I}$

则 τ 为 F 到 $F\underline{I}$ 的环同构映射，

由 F 上一元多项式的通用性质得，x 可用 $F[A]$ 中元素代入，且保持加法和乘法

$\therefore$ $\underline{A}$ 的任一多项式 $f(\underline{A})$ 与 $\underline{A}$ 可交换

$\therefore$ $Kerf(\underline{A})$ 为 $\underline{A}$ 不变子空间

设 $\alpha\in Kerf(\underline{A})$ $\underline{A}\alpha\in Kerf(\underline{A})$

$f(\underline{A})\alpha=0$

$f(\underline{A})\underline{A}\alpha=\underline{A}f(\underline{A})\alpha=0$

定理2. 设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$，$V\in F$. 在 $F[x]$ 中. $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$

则 $Kerf(\underline{A})=Kerf_1(\underline{A})\oplus Kerf_2(\underline{A})$

证：$\because f(\underline{A})=f_1(\underline{A})f_2(\underline{A})$

设 $\alpha_1\in Kerf_1(A)$，则 $f_2(\underline{A})f_1(\underline{A})\alpha=f_2(\underline{A})0=0=f(\underline{A})\alpha$，

$\therefore\alpha_1\in Kerf(\underline{A})$ $\therefore Kerf(\underline{A})\supseteq Kerf_1(\underline{A})$

同理 $Kerf_2(\underline{A})\subseteq Kerf(\underline{A})$ $\therefore Kerf_1(A)+Kerf_2(A)\subseteq Kerf(\underline{A})$

任取 $\alpha\in Ker f(\underline{A})$

$\because (f_1(x),f_2(x))=1$,

$\therefore \exists\, u(x),v(x)\in F[x]$, s.t. $u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1$

代入 $\underline{A}$ 得 $u(\underline{A})f_1(\underline{A})+v(\underline{A})f_2(\underline{A})=\underline{I}$

$\therefore \alpha=\underline{I}\alpha=\underbrace{u(\underline{A})f_1(\underline{A})\alpha}_{\alpha_2}+\underbrace{v(\underline{A})f_2(\underline{A})\alpha}_{\alpha_1}$

又 $f_1(\underline{A})\alpha_1=f_1(\underline{A})v(\underline{A})f_2(\underline{A})\alpha\overset{1}{=}v(\underline{A})f(\underline{A})\alpha=v(\underline{A})0=0$

$\therefore \alpha_1\in Ker f_1(\underline{A})$ 同理 $\alpha_2\in Ker f_2(\underline{A})$

$\therefore Ker f(\underline{A})\subseteq Ker f_1(\underline{A})+Ker f_2(\underline{A})$

任取 $\beta\in Ker f_1(\underline{A})\cap Ker f_2(\underline{A})$

$\because \beta=\underline{I}\beta=u(\underline{A})f_1(\underline{A})\beta+v(\underline{A})f_2(\underline{A})\beta=0$

$\therefore Ker f_1(\underline{A})\cap Ker f_2(\underline{A})=\{0\}$

$\therefore Ker f(\underline{A})=Ker f_1(\underline{A})\oplus Ker f_2(\underline{A})$

推论1: 在 $F[x]$ 中, 若 $f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$, 其中 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素

则 $Ker f(\underline{A})=Ker f_1(\underline{A})\oplus\cdots\oplus Ker f_s(\underline{A})$

若 $Ker f(\underline{A})=V$, 则 $f(\underline{A})=0$

定义2. 设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$, $f(x)\in F[x]$, 若 $f(\underline{A})=\underline{0}$,

则称 $f(x)$ 为 $\underline{A}$ 的零化多项式

定义3. 设 $A\in M_n(F)$, $f(x)\in F[x]$, 若 $f(A)=0$,

则称 $f(x)$ 为 A 的零化多项式

设 $\underline{A}\in Hom(V,V)$, $\dim V=n$. $\underline{A}$ 在 V 的一个基下矩阵为 A

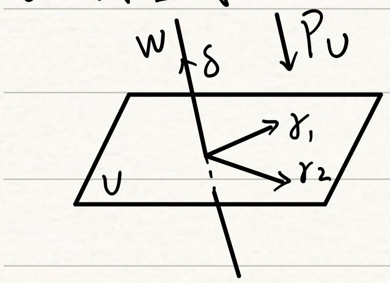
$f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ 为 $\underline{A}$ 一零多项项 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 为 A 的零化多项式

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\underline{0}=f(\underline{A})=a_m\underline{A}^m+\cdots+a_1\underline{A}+a_0\underline{I}\Leftrightarrow 0=a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0I$

注 $\sigma: \underline{A} \longmapsto A$ 为双射，且保乘法

几何空间



$P_U(\alpha_1)=\alpha_1$

$P_U(\alpha_2)=\alpha_2$ 则 $P_U(\alpha_1,\alpha_2,\delta)=(\alpha_1,\alpha_2,\delta)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$P_U(\delta)=0$

$$f(\lambda)=|\lambda I-P|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda$$

$$f(P_U)=P_U^3-2P_U^2+P_U=P_U-2P_U+P_U=\underline{0}$$

$$\lambda I-P=\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\quad(\lambda I-P)^*=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda&0&0\\0&\lambda^2-\lambda&0\\0&0&\lambda^2-2\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2&0&0\\0&\lambda^2&0\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&-2\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(\lambda I-P)^*(\lambda I-P)=|\lambda I-P|\,I=f(\lambda)\,I$$

定理3.（Hamilton-Cayley定理）. 设 $A\in M_n(F)$，则 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 为 A 的零化多项式.

证：$(\lambda I-A)^*(\lambda I-A)=|\lambda I-A|\,I=f(\lambda)\,I$

$$(\lambda I-A)^*=\begin{bmatrix}g_{11}(\lambda)&\cdots&g_{1n}(\lambda)\\ \vdots&&\vdots\end{bmatrix}\quad \deg(g_{ij}(\lambda))\le n-1$$

$$\begin{bmatrix} g_{n1}(\lambda) & \cdots & g_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^{n-1} B_{n-1} + \cdots + \lambda B_1 + B_0$$

$$(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) = (\lambda^{n-1} B_{n-1} + \cdots + \lambda B_1 + B_0)(\lambda I - A)$$

$$= \lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + \cdots + \lambda(B_0 - B_1 A) - B_0 A$$

设 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

则 $f(\lambda)I = \lambda^n I + a_{n-1} I \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 I \lambda + a_0 I$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
B_{n-1} &= I & \times A^n \\
a_{n-2} - B_{n-1}A &= a_{n-1} I & \times A^{n-1} \\
&\vdots & \vdots \\
B_0 - B_1 A &= a_1 I & \times A \\
-B_0 A &= a_0 I &
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_1 A + a_0 I$$

即 $f(A) = 0$

定理 3′ (Hamilton-Cayley). 设 $\underline{A} \in Hom(V,V)$, $\dim V = n$. 则 $\underline{A}$ 的特征多项式为其一零化多项式

在 $F[\lambda]$ 中, $f(\lambda) = P_1^{r_1}(\lambda) \cdots P_s^{r_s}(\lambda)$, 其中 $P_i(\lambda)$ 为 $F[\lambda]$ 中两两不等的不可约多项式

由推论 1 得 $Ker f(\underline{A}) = Ker P_1^{r_1}(\underline{A}) \oplus \cdots \oplus Ker P_s^{r_s}(\underline{A})$

$\because f(\underline{A}) = 0 \quad \therefore Ker f(\underline{A}) = V$

$\therefore V = Ker P_1^{r_1}(\underline{A}) \oplus \cdots \oplus Ker P_s^{r_s}(\underline{A})$

特别地, 若 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$

则. $V = Ker(\underline{A} - \lambda_1 I)^{r_1} \oplus \cdots \oplus Ker(\underline{A} - \lambda_s I)^{r_s}$

称 $Ker(\underline{A} - \lambda_i I)^{r_i}$ 为根子空间