几何空间 V, $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

定义1. 实数域上的线性空间 V 上的对称双线性函数 f, 若满足:

$\forall \alpha\in V$ 有 $f(\alpha,\alpha)\geq 0$, $f(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

称 f 为正定的

命题1. n 维实线性空间 V 上的对称双线性函数 f 是正定的

$\Leftrightarrow$ f 在 V 的一个基下的度量矩阵 A 满足:

A 为对称矩阵, 且 $\forall X\in\mathbb{R}^n, X\neq 0$, 有 $X'AX>0$

$\Leftrightarrow$ A 是正定矩阵

定义2. n 级实对称矩阵满足: $\forall X\in\mathbb{R}^n$, 且 $X\neq 0$, 有 $X'AX>0$, 则

称 A 为正定(对称)矩阵

定义3. 实线性空间 V 上一正定的对称双线性函数 f 称为 V 上一个内积

把 $f(\alpha,\beta)$ 简记为 (α,β). f 简记为 $(\ ,\ )$;

若实线性空间 V 指定了一个内积, 则称 V 是一实内积空间;

有限维实内积空间称为欧几里得空间

例. 1. $\mathbb{R}^n$ 中任取 $X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$,

令 $(X,Y):=x_1y_1+\cdots+x_ny_n=X'Y=X'IY$

则 $(\ ,\ )$ 为一双线性函数, 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下度量矩阵为 I, 为对称的

且 $\forall X\in\mathbb{R}^n, X\neq 0$, 有 $(X,X)=X'X=x_1^2+\cdots+x_n^2>0$

$\therefore$ $(\ ,\ )$ 为正定的, 故 $(\ ,\ )$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上一内积, 称之为标准内积

设 V 是实内积空间:

定义4. V 中向量 α 的长度 $|\alpha|:=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ (或记为 $\|\alpha\|$)

$|k\alpha| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = \sqrt{k^2(\alpha,\alpha)} = |k|\cdot|\alpha|$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in V$

若 $|\alpha|=1$, 则称 α 为一单位向量

定理1.(Cauchy不等式)

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha|\cdot|\beta|$, 仅当 α,β 线性相关时等号成立

证: 1° 当 α,β 线性相关, 有 $\alpha=0$ 或 $\beta=k\alpha$.

$(0,\beta) = (0\,0,\beta) = 0(0,\beta) = 0 = |0||\beta|$

$|(\alpha,\beta)| = |(\alpha, k\alpha)| = |k(\alpha,\alpha)| = |k||\alpha|^2 = |\alpha||k\alpha|$

2° 当 α,β 线性无关, 即 $\forall t \in \mathbb{R}$, 有 $\beta \neq t\alpha$, $t\alpha-\beta\neq 0$

$0 < (t\alpha-\beta, t\alpha-\beta) = (t\alpha,t\alpha) - (t\alpha,\beta) - (\beta,t\alpha) + (\beta+\beta)$

$= t^2|\alpha|^2 - 2t(\alpha,\beta) + |\beta|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}^2$

$\therefore (-2(\alpha,\beta))^2 - 4|\alpha|^2|\beta|^2 > 0$

即 $|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha||\beta|$

定义5. 设 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, 则 α 与 β 夹角为

$<\alpha,\beta> := \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

于是 $0 \leq <\alpha,\beta> \leq \pi$

定义6. 若 $<\alpha,\beta> = \frac{\pi}{2}$, 即 $(\alpha,\beta)=0$, 则称 α,β 正交, 记作 $\alpha\perp\beta$

定义7. α 与 β 的距离 $d(\alpha,\beta) := |\alpha-\beta|$

易知 $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$, $d(\alpha-\beta) \geq 0$, 仅当 $\alpha=\beta$ 时等号成立

$d(\alpha,\gamma) \leq d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma)$

命题2. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ 三角不等式

$|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2(\alpha,\beta) + |\beta|^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$

$\leq (|\alpha|+|\beta|)^2$

推论1. 若α与β正交 则 $|\alpha+\beta| = |\alpha|^2+|\beta|^2$