映射：$f: \overset{\text{定义域}}{A} \longrightarrow \overset{\text{陪域}}{B}$，值域（像 $\mathrm{Im} f$）$f(A) := \{f(a) \mid a \in B\} \subseteq B$

f 为满射 $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$，

$\Leftrightarrow$ 任取 $b \in B$，$\exists a \in A$，s.t. $b = f(a)$

f 为单射 $\Leftrightarrow$ A中不同元素在下 f 下的象不同

$\Leftrightarrow$ 设 $a_1, a_2 \in A$，从 $f(a_1) = f(a_2)$ 可得 $a_1 = a_2$

若 f 既为单射又为满射，则称之为双射，（一一对应）

若 $f: A \to B$，$g: A \to B$，且 $f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$，则称 f 等于 g，记为 $f = g$

定义1、设 V 和 V' 都是数域 K 上的线性空间，如果 V 到 V' 有一双射 σ，并且满足

$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V$（保加法）

$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$　　$\forall \alpha \in V$　（保数乘）

即称 σ 是 V 到 V' 的一个同构映射，

称 V 与 V' 是同构的，记为 $V \cong V'$

设 σ 为 $V \to V'$ 的同构映射

性质1. $\sigma(0) = 0'$

证：$\sigma(0) = \sigma(0 \times 0) = 0\sigma(0) = 0'$

性质2. $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$

证：$\sigma((-1) \times \alpha) = (-1) \times \sigma(\alpha) = -\sigma(\alpha)$

性质3. $\sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s) = k_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s)$

性质4、V 中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ V' 中 $\sigma(\alpha_1), \cdots \sigma(\alpha_s)$ 线性相关

证：$\because \sigma$ 是双射

设 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$　$(k_1^2 + \cdots + k_s^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow \sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=\sigma(0)$

$\Leftrightarrow k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)=0'$

$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_s)$ 线性相关

性质5. $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 是 V 的一个基 $\Leftrightarrow$ $\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_m)$ 为 V' 一个基

证：$\because \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

$\therefore \sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_m)$ 线性无关

$\because \sigma$ 是满射

任取 $\gamma\in V'$，则 $\exists\,\alpha\in V$, s.t. $\sigma(\alpha)=\gamma$

又 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$

$\therefore \sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)=\gamma$

$\therefore \sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_s)$ 为 V' 一个基

定理1. 数域K上的两个有限维线性空间 V 与 V' 同构

$\Leftrightarrow \dim V=\dim V'$

证：$\Rightarrow$ 由性质5易得

$\Rightarrow$ 设 $\dim V=\dim V'$

取 V 中一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，V' 中一基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$

令 $\sigma:\quad V\longrightarrow V'$

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\longmapsto\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i=\gamma$$

$\because \alpha$ 表法唯一 $\therefore a_i$ 确定 $\therefore \sigma$ 为一映射

同样，γ 的表法唯一 $\therefore \alpha$ 唯一 $\therefore \sigma$ 为单射

$\because \forall\gamma=\sum_{i=1}^{n}c_i\gamma_i$ 有 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i\in V$ 与之对应

$\therefore \sigma$ 为满射

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma\sum_{i=1}^{n}(a_i+\beta_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\gamma_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i+\sum_{i=1}^{m}b_i\gamma_i$$

$= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$

$\sigma(k\alpha) = \sigma(\sum_{i=1}^{n} k a_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} k a_i \gamma_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i = k\sigma(\alpha)$

注：在此映射下 α 与 $\sigma(\alpha)$ 分别在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，与 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中坐标相同，都为 $(a_1, \cdots, a_n)'$

推论1. 数域 K 上一 n 维线性空间 V 与 K^n 同构

设 V 中一个基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$. K^n 中标准基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$

$$\sigma: \quad V \longrightarrow K^n$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

命题1、设 σ 是数域 K 上线性空间 V 到 V' 的一个同构映射

U 是 V 的一个子空间，令 $\sigma(U) := \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in U\} \subseteq V'$

则 $\sigma(U)$ 为一子空间，且 $\dim U = \dim \sigma(U)$

证：$\because 0' = \sigma(0) \in \sigma(U)$ $\quad \therefore \sigma(U)$ 非空

$\because \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \sigma(\alpha+\beta) \in \sigma(U)$ $\quad \therefore$ 加法封闭

$\because k\sigma(\alpha) = \sigma(k\alpha) \in \sigma(U)$ $\quad \therefore$ 数乘封闭

$\therefore \sigma(U)$ 为子空间

限制 σ 在 U 上，记作 $\sigma|U : U \longrightarrow \sigma(U)$

$\because \sigma$ 为单射 $\quad \therefore \sigma|U$ 为单射

又 U 在 $\sigma|U$ 下的像为 $\sigma(U)$ $\quad \therefore \sigma|U$ 为满射

$\therefore \sigma|U$ 为 U 与 $\sigma(U)$ 间的同构映射

$\therefore \dim U = \dim \sigma(U)$