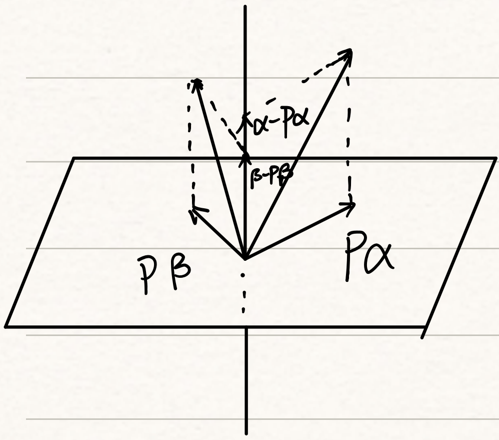
几何空间 V 中



$$0=(P\alpha,\beta-P\beta)=(P\alpha,\beta)-(P\alpha,P\beta)$$

$$0=(\alpha-P\alpha,P\beta)=(\alpha,P\beta)-(P\alpha,P\beta)$$

$$0=(P\alpha,\beta)-(\alpha,P\beta)$$

$$(P\alpha,\beta)=(\alpha,P\beta)\quad\forall\alpha,\beta\in V$$

定义1，设 $\underline{A}$ 为实内积空间上一变换，若 $\underline{A}$ 满足

$$(\underline{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\underline{A}\beta),\ \forall\alpha,\beta\in V$$

则称 $\underline{A}$ 为 V 上一个对称变换

命题1、实内积空间变换上对称变换 $\underline{A}$ 一定是线性变换

证：利用 $(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)\ \forall\gamma\in V \Leftrightarrow (\alpha-\beta,\gamma)=0\ \forall\gamma\in V$

$$\Rightarrow(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=0\Rightarrow\alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta$$

任取 $\alpha,\beta\in V$，对于 $\forall\gamma\in V$ 有

$$(\underline{A}(\alpha+\beta),\gamma)=(\alpha+\beta,\underline{A}\gamma)$$

$$=(\alpha,\underline{A}\gamma)+(\beta+\underline{A}\gamma)$$

$$=(\underline{A}\alpha,\gamma)+(\underline{A}\beta,\gamma)$$

$$=(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta,\gamma)$$

$\therefore\ \underline{A}(\alpha+\beta)=\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta$ 即 $\underline{A}$ 保加法

$$(\underline{A}(k\alpha),\gamma)=(k\alpha,\underline{A}\gamma)$$

$$=k(\alpha,\underline{A}\gamma)$$

$$=k(\underline{A}\alpha,\gamma)$$

$$=(k\underline{A}\alpha,\gamma)$$

$\therefore\ \underline{A}(k\alpha)=k\underline{A}\alpha\quad\therefore\ \underline{A}$ 保乘法

$\therefore \underline{A}$为线性变换

命题2. n维欧氏空间V上的线性变换$\underline{A}$是对称变换，$\underline{A}$在V一标准正交基上矩阵为对称矩阵

证：设 $\underline{A}(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A \quad A=(A_1,\cdots,A_n)$

$$\underline{A}\eta_j=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\eta_i$$

又 $\underline{A}\eta_j=\sum_{i=1}^{n}(\underline{A}\eta_j,\eta_i)\eta_i$

$\therefore \quad a_{ij}=(\underline{A}\eta_j,\eta_i)$

$\underline{A}$为对称变换

$\Leftrightarrow (\underline{A}\eta_j,\eta_i)=(\eta_j,\underline{A}\eta_i)$

$\Leftrightarrow \quad a_{ij}=a_{ji}$

$\Leftrightarrow$ A为对称矩阵

命题3. n级实对称矩阵A的特征多项式$f(x)$的复根都是实数

证：任取$f(x)$的一个复根λ_0. 把A看作复数域上矩阵

则λ_0是矩阵A的一个特征值，从而$\exists\alpha\in C^n,\alpha\neq0$, s.t.

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

两边同取共轭复数得 $A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}_0\bar{\alpha} \Rightarrow \alpha'A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}_0\alpha'\bar{\alpha}$

又 A为对称矩阵，取转置 $\alpha'A=\lambda_0\alpha'\Rightarrow\alpha'A\bar{\alpha}=\lambda_0\alpha'\bar{\alpha}$

$\therefore \bar{\lambda}_0\alpha'\bar{\alpha}=\lambda_0\alpha'\bar{\alpha}$

$\therefore \alpha'\bar{\alpha}=(c_1,\cdots,c_n)\begin{pmatrix}\bar{c}_1\\ \vdots\\ \bar{c}_n\end{pmatrix}=|c_1|^2+\cdots+|c_n|^2\neq0$

$\therefore \bar{\lambda}_0=\lambda_0$

$\therefore \lambda_0$为实数

命题3. n级实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量是正交的

命题4. n维欧氏空间V上的对称变换$\underline{A}$的属于不同特征值的特征向量正交

证：设λ_1, λ_2为$\underline{A}$的不同特征值. ξ_i为$\underline{A}$属于λ_i的一特征向量,

$$\lambda_1(\xi_1, \xi_2) = (\lambda\xi_1, \xi_2) = (\underline{A}\xi_1, \xi_2)$$
$$= (\xi_1, \underline{A}\xi_2) = (\xi_1, \lambda_2\xi_2)$$
$$= \lambda_2(\xi_1, \xi_2)$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\xi_1, \xi_2) = 0 \Rightarrow (\xi_1, \xi_2) = 0$$

命题5. 设$\underline{A}$是实内积空间上的一个对称变换，若W为$\underline{A}$的一个不变子空间，则$W^\perp$也是$\underline{A}$的不变子空间

证：任取$\beta \in W^\perp$. $\alpha \in W$，则$\underline{A}\alpha \in W$

$$(\underline{A}\beta, \alpha) = (\beta, \underline{A}\alpha) = 0$$

定理1. 设$\underline{A}$为n维欧氏空间上一对称变换，则V中存在一标准正交基下矩阵为对角矩阵

证：对n作数学归纳法

$n=1$时，显然成立

设当$n=k-1$时成立

当$n=k$时

推命题3，$\underline{A}$有特征值. 取$\underline{A}$一特征值λ_1,

设η_1是$\underline{A}$属于λ_1的一个单位特征向量，则

$$V = \langle \eta_1 \rangle \oplus \langle \eta_1 \rangle^\perp$$

易知$\langle \eta_1 \rangle$为$\underline{A}$不变子空间，则$\langle \eta_1 \rangle^\perp$也为$\underline{A}$不变子空间

则$\underline{A}|\langle \eta_1 \rangle^\perp$为$\langle \eta_1 \rangle^\perp$上对称变换

故基在$\langle \eta_1 \rangle^\perp$下标准正交基$\eta_2, \cdots, \eta_k$下矩阵为对角矩阵

又 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$ 为 V 一标准正交基.

∴ A 在此基下矩阵为对角矩阵

∴ 定理成立

推论 1. 设 A 为 n 级实对称矩阵，则有一 n 级正交矩阵，s.t.

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称 A 正交相似于对角矩阵

求 T, s.t. $T^{-1}AT$ 为对角矩阵 步骤

1° 计算 $|\lambda I-A|$

2° 求 $|\lambda I-A|$ 的根（皆为实根）

3° 求特征向量 $(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots\alpha_{sr_s})$

$$\Downarrow$$

4° Schmidt 正交化 $(\beta_{11},\cdots,\beta_{1r_1},\cdots,\beta_{s1},\cdots\beta_{sr_s})$

$$\Downarrow$$

5° 单位化.

6° 令 $T=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1r_1},\cdots,\eta_{s1},\cdots\eta_{sr_s})$