定义1、设 $f(x)\in K[x]$，$\deg f(x)>0$，若 $f(x)$ 的因式只有零次多项式与其相伴元，则称 $f(x)$ 是在 $K[x]$ 上不可约的，否则，称 $f(x)$ 在 K 上可约.

（类似于素数 因数只有1与其自身）

定理1、设 $P(x)$ 为 $K[x]$，且 $\deg P(x)>0$，则下列命题等价

(1) $P(x)$ 在 $K[x]$ 上不可约

(2) $\forall f(x)\in K[x]$，有 $(P(x),f(x))=1$ 或 $P(x)\mid f(x)$ （与其它多项式关系）

(3) 若 $P(x)\mid f(x)g(x)$，则 $P(x)\mid f(x)$ 或 $P(x)\mid g(x)$ （整除角度）

(4) $P(x)$ 不可分解为两个次数低于它的因式 （因式角度）

证：(1) ⇒ (2) $(P(x),f(x))\mid 1$ 或 $(P(x),f(x))\mid P'(x)$ （$P'(x)$ 为 $P(x)$ 相伴元）

又 $P'(x)\mid P(x)$ $\therefore (P(x),f(x))\mid P(x)$ $\therefore P(x)\mid f(x)$

(2) ⇒ (3) 若 $P(x)\nmid f(x)$ 且 $P(x)\nmid g(x)$，则

$(P(x),f(x))=1$ 且 $(P(x),g(x))=1$

$(P(x),f(x)g(x))=1$，从而 $P(x)\nmid f(x)g(x)$

(3) ⇒ (4) 若 $P(x)=P_1(x)P_2(x)$，$\deg(P_1(x),P_2(x))<\deg P(x)$

$P(x)\mid P(x)\Rightarrow P(x)\mid P_1(x)P_2(x)$

$\Rightarrow P(x)\mid P_1(x)$ 或 $P(x)\mid P_2(x)$

$\Rightarrow \deg P(x)<\deg P_1(x)$ 或 $\deg P(x)<\deg P_2(x)$

矛盾

(4) ⇒ (1) 任取 $P(x)$ 一个因式 $g(x)$，则 $\exists h(x)\in K[x]$, s.t. $P(x)=h(x)g(x)$

$\therefore \deg h(x)=\deg P(x)$ 或 $\deg g(x)=\deg P(x)$

$\Downarrow$ $\quad\quad$ $\Downarrow$

$g(x)=c$, $c\in K^*$ $\quad\quad$ $h(x)=c$, $c\in K^*$

$\Downarrow$ $\quad\quad$ $\Downarrow$

$h(x)\sim P(x)$ $\quad\quad$ $g(x)\sim P(x)$

$\Downarrow$

$P(x)$ 为不可约多项式

推论1、$K[x]$，$P(x)$不可约，若 $P(x) \mid f_1(x)\cdots f_n(x)$，则 $\exists f_j(x)$ s.t. $P(x) \mid f_j(x)$

推论2、$K[x]$中，一次多项式不可约

推论3、$K[x]$中，$f(x)$可约 $\iff$ $f(x)$可分解为两次数低于其两因式乘积

定理2（唯一因式分解定理）$K[x]$中每一次数大于0的多项式$f(x)$可唯一地分解为 K上有限个不可约多项式乘积，其中唯一性指，若 $f(x)=P_1(x)\cdots P_s(x)=q_1(x)\cdots q_t(x)$，则 $s=t$，且 $\forall P_i(x)$，$\exists q_j(x)$ s.t. $P_i(x)\sim q_j(x)$

证：可分解性：

唯一性：当 $s=1$时，$f(x)=P_1(x)=q_1(x)\cdots q_t(x)$，则 $q_1(x) \mid P_1(x)$

$\therefore q_1 \sim P_1(x)$，$P_1(x)=cq_1(x)$，$c\in K^*$

$\therefore f(x)=P_1(x)=cq_1(x)$

设当 $s-1$时成立

$f(x)=P_1(x)\cdots P_s(x)=q_1(x)\cdots q_t(x)$

$\because P_1(x) \mid q_1(x)\cdots q_t(x)$ $\therefore \exists q_i(x)$, s.t. $P_1(x) \mid q_i(x)$

$\therefore P_1(x)\sim q_i(x)$ $\therefore P_1(x)=cq_i(x)$ $c\in K^*$

$\therefore P_2(x)\cdots P_s(x)=c\,q_1(x)\cdots q_{i-1}(x)\cdot q_{i+1}(x)\cdots q_t(x)$

$\therefore s-1=t-1$，$P_i(x)\sim q_j(x)$

据唯一分解得 $f(x)=aP_1^{l_1}(x)\cdots P_s^{l_s}(x)$，$P_i(x)$为首一不可约多项式

称此为标准分解式

定义2、设 $f(x)\in K[x]$，$\deg f(x)>0$，若 $P(x)$为不可约多项式，且 $P^l(x)\mid f(x)$，$P^{l+1}(x)\nmid f(x)$ 即称其为$f(x)$的 l重因式