设 $V \in F$, $\dim V = n$, $\underline{A} \in Hom(V,V)$，$\underline{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$

$m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{l_s}$ （$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 两两不等）

$V = Ker(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})^{l_1} \oplus \cdots \oplus Ker(\underline{A}-\lambda_s\underline{I})^{l_s}$

即 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ （$Ker(\underline{A}-\lambda_i\underline{I})^{l_i} = W_i$）

求 $\underline{A}|W_j$ 的最小多项式

任给 $\alpha_j \in W_j$，则 $(\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^{l_j}\alpha_j = 0$

$\therefore (\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^{l_j} = \underline{0}$ $\quad \therefore (\lambda-\lambda_j)^{l_j}$ 为 $\underline{A}|W_j$ 的零化多项式

$\therefore m_j(\lambda) \mid (\lambda-\lambda_j)^{l_j}$ $\quad \therefore m_j(\lambda) = (\lambda-\lambda_j)^{t_j}$ $(t_j \le l_j)$

又 $m(\lambda) = [(\lambda-\lambda_1)^{t_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{t_s}] = (\lambda-\lambda_1)^{t_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{t_s}$

$\therefore t_j = l_j$ $(j=1,\cdots,s)$

$\therefore m_j(\lambda) = (\lambda-\lambda_j)^{l_j}$

设 $\underline{A}|W_j$ 在 W_j 的一个基下矩阵为 A

令 $\underline{B}_j = \underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I}$

则 $\underline{B}_j^{l_j} = (\underline{A}|W_j - \lambda_j\underline{I})^{l_j} = \underline{0}$，即 $\underline{B}$ 为幂零变换

$\because$ 当 $0 < t_j < l_j$ 时 $\underline{B}^{t_j} \ne \underline{0}$ $\quad \therefore$ 幂零指数为 l_j

$\underline{B}$ 在 W_j 此基下矩阵 $B = A - \lambda_j I$

设 $W \in F$, $\dim W = r$, $\underline{B} \in Hom(W,W)$，$\underline{B}^l = \underline{0}$，$l$ 为其幂零指数

则 $\underline{B}^l = \underline{0}$，$\underline{B}^{l-1} \ne \underline{0}$

$\therefore \exists\, \xi \in W, \xi \ne 0$, s.t. $\underline{B}^{l-1}\xi \ne 0$, $\underline{B}^l\xi = 0$

$\therefore \xi, \underline{B}\xi, \cdots, \underline{B}^{l-1}\xi$ 线性无关 $\quad \therefore l \le r$

$W = \langle \xi, \underline{B}\xi, \cdots, \underline{B}^{l-1}\xi \rangle$

$$\underline{B}(\underline{B}^{l-1}\xi, \cdots, \underline{B}\xi, \xi) = (\underline{B}^{l-1}\xi, \cdots, \underline{B}\xi, \xi)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定义1. 域F上t级矩阵 $J_t(a):=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & a \end{bmatrix}$

称为主对角元为a的t级 Jordan块

定义2. 由若干个Jordan块组成的分块对角矩阵称为Jordan形矩阵

定义3. $V \in F$, $\dim V = n$, $\underline{A} \in \mathrm{Hom}(V,V)$,

若 $\exists \alpha \in V$, s.t. $\alpha, \underline{A}\alpha, \cdots, \underline{A}^{t-1}\alpha$ 线性无关

且 $\underline{A}^{r}\alpha \in \langle \alpha, \underline{A}\alpha, \cdots, \underline{A}^{t-1}\alpha \rangle$ (或 $\underline{A}^{t}\alpha = 0$), 则

称 $\langle \alpha, \underline{A}\alpha, \cdots, \underline{A}^{t-1}\alpha \rangle$ 为循环子空间 (强循环子空间)

命题1. $\langle \underline{B}^{l-1}\xi, \cdots, \underline{B}\xi, \xi \rangle$ 为强循环子空间,

且 $\underline{B}$在$(\underline{B}^{l-1}\xi, \cdots, \underline{B}\xi, \xi)$下矩阵为 $J_l(0)$

定理1. 设$W \in F$, $\dim W = r$, $\underline{B} \in \mathrm{Hom}(W,W)$, $\underline{B}^{l} = \underline{0}$, l为其幂零指数

W 分解为$\dim V_0$个$\underline{B}$-强循环子空间的直和

证: 对线性空间维数r作第二数学归纳法

当$r=1$时, $W = \langle \alpha \rangle$, 此时 $l=1$ $\therefore \underline{B} = \underline{0}$

$\underline{0}\alpha = 0$. $\therefore \langle \alpha \rangle$为 $\underline{0}$-强循环子空间.

设当 $r < k$ 时. 命题为真

则当$r=k$时,

若 $l=1$, 则 $\underline{B}^1 = \underline{0}$, 在$W$中取一基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$

则 $W=\langle\alpha_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\alpha_n\rangle$

∵ $\underline{0}\alpha_j=0$ ∴ $\langle\alpha_j\rangle$ 为 $\underline{0}$-强循环子空间

若 $l>1$， 则 $\exists\ \underline{B}(\underline{B}^{l-1}\alpha)=0$， $\underline{B}^{l-1}\alpha\neq0$

∴ $\underline{B}$ 有特征值 0，$\underline{B}$ 的属于 0 的特征子空间 $W_0\neq0$

且 $W_0\neq W$

$1\le\dim W/W_0=\dim W-\dim W_0<\dim W=r$

设 $\widetilde{\underline{B}}$：

$$\begin{array}{ccc}
W/W_0 & \longrightarrow & W/W_0 \\
\alpha+W_0 & \longmapsto & \underline{B}\alpha+W_0 \\
\| & & \|? \\
\beta+W_0 & \longmapsto & \underline{B}\beta+W_0 \\
\Downarrow & & \Uparrow \\
\alpha-\beta\in W_0 & \Longrightarrow & \underline{B}(\alpha-\beta)=0\in W_0
\end{array}$$

∴ $\widetilde{\underline{B}}$ 为 W/W_0 上一变换

易证 $\widetilde{\underline{B}}$ 保加法，数乘

∴ $\widetilde{\underline{B}}$ 为线性变换

$\forall\ \alpha+W_0\in W/W_0$ 有

$\widetilde{\underline{B}}^l(\alpha+W_0)=\underline{B}^l\alpha+W_0=0\alpha+W_0=W_0$

∴ $\widetilde{\underline{B}}$ 为 W/W_0 上幂零变换，

由归纳假设得，

W/W_0 可分解为 $\widetilde{\underline{B}}$-强循环子空间直和，即

$W/W_0=\langle\widetilde{\underline{B}}^{t_1-1}(\xi_1+W_0),\cdots,(\xi_1+W_0)\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\widetilde{\underline{B}}^{t_s-1}(\xi_s+W_0),\cdots,(\xi_s+W_0)\rangle$

$W/W_0=\langle\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+W_0,\cdots,\xi_1+W_0,\cdots,\underline{B}^{t_s-1}\xi_s+W_0,\cdots,\xi_s+W_0\rangle$

令 $U=\langle\underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s-1}\xi_s,\cdots,\xi_s\rangle$

$=\underbrace{\langle\underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1\rangle}_{U_1}\oplus\cdots\oplus\underbrace{\langle\underline{B}^{t_s-1}\xi_s,\cdots,\xi_s\rangle}_{U_s}$

则 $W=W_0\oplus U$

∵ $\underline{B}^{t_i}\xi_i+W_0=\widetilde{\underline{B}}^{t_i}(\xi_i+W_0)=W_0$

∴ $\underline{B}^{t_i}\xi_i\in W_0$ ∴ $\underline{B}^{t_i+1}\xi_i=0$

设 $k_1\underline{B}^{t_1}\xi_1+\cdots+k_s\underline{B}^{t_s}\xi_s=0$

$\underline{B}(k\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+\cdots+k_s\underline{B}^{t_s-1}\xi_s)=0$

$\therefore k_1\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+\cdots+k_s\underline{B}^{t_s-1}\xi_s\in W_0$

$\therefore k_1(\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+W_0)+\cdots+k_s(\underline{B}^{t_s-1}\xi_s+W_0)=W_0$

又 $\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+W_0,\cdots,\underline{B}^{t_s-1}\xi_s+W_0$ 为 W/W_0 中基的一部分

$\therefore k_1=\cdots=k_s=0$

$\therefore \underline{B}^{t_1}\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s}\xi_s$ 可扩充为 W_0 一基：

$\underline{B}^{t_1}\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s}\xi,\eta_1,\cdots,\eta_q$

$\therefore W=<\underline{B}^{t_1}\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s}\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_q>\oplus$

$<\underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1>\oplus\cdots\oplus<\underline{B}^{t_s-1}\xi_s,\cdots,\xi_s>$

$=<\underline{B}^{t_1}\xi_1,\underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1>\oplus\cdots\oplus<\underline{B}^{t_1}\xi_s,\underline{B}^{t_1-1}\xi_s,\cdots,\xi_s>$

$\oplus<\eta_1>\oplus\cdots\oplus<\eta_q>$

$\because \underline{B}\eta_i=0 \quad \therefore <\eta_i>$ 为 $\underline{B}$-强循环子空间

即 W 分解为 $\underline{B}$-强循环子空间直和

且 $\underline{B}$-强循环子空间个数为 $q+s=\dim W_0$

定理2. 设 $W\in F$, $\dim W=r$, $\underline{B}\in Hom(W,W)$, $\underline{B}^l=\underline{0}$, l 为其幂零指数

则在 W 中有一基使得 $\underline{B}$ 在此基下矩阵为一Jordan形矩阵

且 Jordan块总数为 $\dim W_0=\dim(Ker\,\underline{B})=\dim W-rank\,\underline{B}$

每个 Jordan块主对角元为0，级数 $t\le l$

t 级 Jordan块个数 $N(t)=rank\,\underline{B}^{t-1}+rank\,\underline{B}^{t+1}-2\,rank\,\underline{B}^{t}$

$\underline{B}$ 的Jordan标准形除Jordan块的排列顺序外是由 $\underline{B}$ 唯一确定的

证：t 级 Jordan 块 $J_t(0)$，$(J_t(0))^2=\begin{pmatrix}0&J_t(0)\\0&0\end{pmatrix}$

$rank\,J_t(0)=t-1$, $rank(J_t(0))^2=t-2,\cdots,rank(J_t(0))^t=0$

$$\operatorname{rank} B^0 = \operatorname{rank} I = N(1) + 2N(2) + \cdots + lN(l) \quad (1)$$

$$\operatorname{rank} B = 0 \times N(1) + 1 \times N(2) + \cdots + (l-1)N(l) \quad (2)$$

$$\operatorname{rank} B^2 = 0 \times N(1) + 0 \times N(2) + \cdots + (l-2)N(l) \quad (3)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\operatorname{rank} B^{l-1} = 0 \times N(1) + 0 \times N(2) + \cdots + 1 \times N(l) \quad (l)$$

$$(1)-(2) = N(1) + N(2) + \cdots + N(l)$$

$$(2)-(3) = N(2) + \cdots + N(l)$$

$$\vdots$$

$$(l-1)-(l) = N(l)$$

$$N(1) = (1)-(2) - [(2)-(3)] = \operatorname{rank} B^0 + \operatorname{rank} B^3 - 2 \times \operatorname{rank} B$$

$$\vdots$$

$$N(t) = \operatorname{rank} B^{t-1} + \operatorname{rank} B^{t+1} - 2 \times \operatorname{rank} B^t$$

推论1. 设 $B \in M_r(F)$, $B^l = 0$, 幂零指数为 l

则B相似于一Jordan形矩阵

且 Jordan块总数为 $r - \operatorname{rank} B$

每个 Jordan块主对角元为0, 级数 $\le l$.

t 级 Jordan块个数 $N(t) = \operatorname{rank} B^{t-1} + \operatorname{rank} B^{t+1} - 2 \operatorname{rank} B^t$

B的Jordan标准形除Jordan块的排列顺序外是由B唯一确定的