设 V 是数域 K 上的线性空间

定义1. V 的一个有限子集 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 线性相关

$:\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

V 的一个无限子集 S 线性相关

$:\Leftrightarrow$ S 有一个有限子集线性相关

V 的无限子集 S 线性无关

$:\Leftrightarrow$ S 任一有限子集线性无关

空集定义为线性无关

定义2. 若 V 的一个子集 S 满足以下条件

1°. S 线性无关

2°. V 中任一向量可由 S 中的有限多个向量线性表出

则称 S 是 V 的一个基

$\{0\}$ 的一个基为空集 $(\emptyset)$

定理1. 任一线性空间必有基

定义3. 若 V 有一个基是有限子集，则称 V 是有限维的

若 V 有一个基是无限子集，则称 V 是无限维的

定理2. 若 V 是有限维的，则 V 的任意两个基所含向量个数相等

证：V 有一个基为 $\{\alpha_1, \cdots \alpha_n\}$，任取 V 的一个基 S

则两个基等价，则其所含向量个数相等

推论1. 若 V 是无限维的，则 V 的任一基是无限子集

定义4. 设 V 是有限维的，V 的一个基所含向量的个数称为

V的维数(dimension) 设为 $\dim V$

若V是无限维的，则 $\dim V=\infty$

$\dim\{0\}=0$

命题1. 若 $\dim V=n$，则V中任一 $n+1$ 个向量线性相关

设 $\dim V=n$，取V的一个基 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$，则V中任一向量

$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$

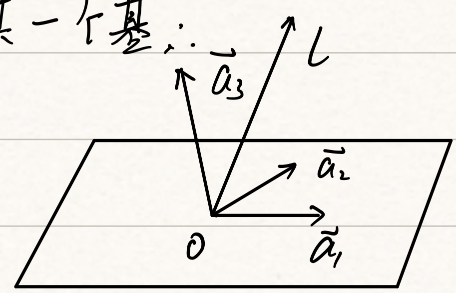
$\because$ 表示方式唯一，把 $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 称为 α 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标

例1. 几何空间中三个不共面向量为其一个基 $\therefore$

几何空间为3维

过点O平面为2维

过点O直线为1维



例2. K^n中，向量组 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\cdots\cdots\ \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ 线性无关

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

α 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$(标准基)下坐标为 $\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\alpha$

命题2. 设 $\dim V=n$，则 V 中任意 n 个线性无关向量为 V 的基

证：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，任取 $\beta\in V$

由命题1 得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，

$\therefore$ β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$\therefore$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中一个基

命题3. 设 $\dim V=n$，若 V 中任一向量可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中一个基

证：取 V 中一个基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，

$\because$ α 可由 β 线性表出

$\therefore$ α 与 β 等价 $\therefore$ $rank(\alpha)=rank(\beta)=n$

$\therefore$ α 线性无关

命题4. 设 $\dim V=n$，则 V 中任一线性无关向量组可扩为一个基

证：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

若 $s=n$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 V 中一基

若 $s<n$，则 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 不是 V 中一基，

则 V 中存在 α_{s+1} 不可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，

且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性无关，

若 $s+1<n$，则依次下推，得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$，为 V 中一基

命题5. 设 $\dim V=n$，W 为 V 一子空间，则 $\dim W<\dim V$

若 $\dim V=\dim W$ 则 $V=W$

证：取 W 中一基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，则 $\dim W=s$

又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可扩充为 V 中一基

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$，则 $n>s$

若 $\dim W = n$，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关

$\therefore \forall \beta \in V$，有 $\beta = a_1\alpha_1 + \cdots a_n\alpha_n \in W \quad \therefore V \subseteq W$

又 $W \subseteq V \quad \therefore \quad W = V$

定义5. 设 V 的一个子集 S.（$V \neq \{0\}$）若满足

1° S 线性无关

2°. 对 $\forall \beta \notin S$, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关

则称 S 为 V 的一个极大线性无关集

S 是 V 的一个基 $\Longleftrightarrow$ S 是 V 的一个极大线性无关集

当 $V = \{0\}$，则 ϕ 为 $\{0\}$ 的一个极大线性无关集（不是基）

命题6. $\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle := \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_1 \cdots k_s \in K\}$

则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组是 $\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle$ 的一个基.

从而 $\dim \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle = \mathrm{rank}\{\alpha_1, \cdots \alpha_s\}$

命题7. $\langle \alpha_1, \cdots \alpha_s \rangle = \langle \beta_1, \cdots, \beta_r \rangle$ （子空间对加法与数乘封闭）

$\Longleftrightarrow \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$