$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，$1\le i,j\le n$ 即 $A(a_{ij})$ 为对称矩阵

称为域 F 上一 n 元二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$$

$x_1,\cdots,x_n$ 分别用 $c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n$ 代入

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$$

$$=(c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n)A\begin{bmatrix}c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n\\ \vdots\\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n\\ \vdots\\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}}_{X}$$

$$=(CX)'ACX$$

$$=X'C'ACX$$

$\because (C'AC)'=C'A'C=C'AC$

$\therefore C'AC$ 为对称矩阵

定义2. $x_1,\cdots,x_n$ 分别用 $c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n$ 代入称为 X 用 CX 代入 若 C 可逆，则称其为一非退化线性替换

定义3. 域 F 上两二次型 $X'AX$，$X'BX$ 若存在一非退化线性替换 X 用 CX 代入，使得 $X'AX$ 变为 $X'BX$，则称 $X'AX$ 与 $X'BX$ 等价，记作 $X'AX\cong X'BX$.

则等价为 {F上n元二次型} 上一等价关系

$$\begin{tikzcd} \{\text{域}F\text{上}n\text{元二次型}\} \arrow[r] & \{\text{域}F\text{上}n\text{元矩阵}\} \\ X'AX \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "X\text{用}CX\text{代入}"'] & A \arrow[d, "\text{用}C\text{作合同变换}"] \\ X'C'ACX \arrow[r, mapsto] & C'AC \end{tikzcd}$$

命题1. 域F上n元二次型 $X'AX \simeq X'BX \Longleftrightarrow A \simeq B$

定理1. 特征值不为2的域F上n元二次型 $X'AX$ 等价于一只含平方项二次型：$d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2$，称为 $X'AX$ 一**标准型**，$X'AX$ 任一标准型中系数不为0平方项个数等于 $\mathrm{rank}(A)$ 称为 $X'AX$ 的**秩**

证：由7.2推论2知特征值不为2的域F上任一对称矩阵合同于一对角矩阵

$\therefore A \simeq \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$

$\therefore X'AX \simeq X'\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n) = d_1x_1^2+\cdots+x_n^2$

定理2. 实数域上n元二次型 $X'AX$ 有一标准型为 $\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为A特征值

证：$\because$ A为实对称矩阵

$\therefore \exists$ 正交矩阵 T, s.t. $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

又 $T^{-1}=T'$

$\therefore X'AX \simeq X'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)X = \lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$

称X用TX代入为**正交替换**