定义1. 设V和V'都是数域F上的线性空间，V到V'的一个映射 $\underline{A}$ 如果满足：

$\underline{A}(\alpha+\beta)=\underline{A}(\alpha)+\underline{A}(\beta), \forall \alpha,\beta\in V$ （$\underline{A}$保加法）

$\underline{A}(k\alpha)=k\underline{A}(\alpha), \quad \forall\alpha\in V,\forall k\in F$（$\underline{A}$保数量乘法）

那么称 $\underline{A}$ 为V到V'的一个线性映射

V到自身的线性映射称为V上的线性变换

任给 $k\in F$：

$\underline{k}(\alpha):=k\alpha, \forall\alpha\in V$

则 $\underline{k}$ 是V上的一个线性变换，称 $\underline{k}$ 是V上的数乘变换

零变换：$\underline{0}(\alpha)=0. \ \forall\alpha\in V$

恒等变换：$\underline{1}(\alpha)=\alpha, \ \forall\alpha\in V$ （记作 $\underline{I}$）

设 $\underline{A}:V\to V'$ 是线性映射

1° $\underline{A}(0)=0'$

证：$\underline{A}(0\times0)=0\underline{A}(0)$

高等代数的主线：研究
线性空间的结构及其线性映射
域F上一元多项式环F(x)的结构及其通用结构

2° $\underline{A}(-\alpha)=-\underline{A}(\alpha)$

证 $\underline{A}(-1\times\alpha)=(-1)\times\underline{A}(\alpha)=-\underline{A}(\alpha)$

3° $\underline{A}(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\underline{A}(\alpha_1)+k_2\cdots+k_s\underline{A}(\alpha_s)$

4° $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 在V中线性相关，则 $\underline{A}(\alpha_1),\cdots\underline{A}(\alpha_s)$ 在V'中线性相关

证：有F中不全为0 $k_1,\cdots k_s$ 使得

$k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0 \Rightarrow k_1\underline{A}(\alpha_1)+\cdots A_s\underline{A}(\alpha_s)=0'$

5° 设 $\dim V=n$，V中取一基 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots a_n\alpha_n$

$\underline{A}(\alpha)=a_1\underline{A}(\alpha_1)+\cdots+a_n(A\alpha_n)$

从而$\underline{A}$被在V的一个基上的作用所决定

即若V到V'的一个线性映射$\underline{B}$满足

$$\underline{B}(\alpha_i)=\underline{A}(\alpha_i)\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则$\underline{B}=\underline{A}$

6° $\underline{A}$是V到V'的一个同构映射(保+×，双射)

$\Leftrightarrow$ A V到V'的可逆线性映射

定理1 设V, V', F上线性空间 $\dim=n$

V中一基，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$

V'中任n个向量$\gamma_1\cdots\gamma_n$(可相同)

令
$$\underline{A}: V \longrightarrow V'$$
$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n}a_n\gamma_i$$

$\underline{A}$为V至V'的线性映射

证：由于α的表法唯一，$\therefore \underline{A}$是V到V'的一个映射

设$\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i$，则$\alpha+\beta=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\alpha_i$

从而$\underline{A}(\alpha+\beta)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\gamma_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\gamma_i=\underline{A}(\alpha)+\underline{A}(\beta)$

$\therefore \underline{A}$为线性映射

且若有V到V' $\underline{B}$满足$\underline{B}(\alpha_i)=\gamma_i$ 则$\underline{B}=\underline{A}$