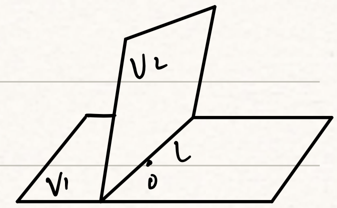
a. 子空间的交

定理1.设 V 是数域 K 上线性空间，

V_1, V_2 为 V 子空间，则 $V_1\cap V_2$ 也是 V 子空间



证：∵ $\{0\}\in V_1\cap V_2$ ∴ $V_1\cap V_2$ 不为空集

设 $\alpha,\beta,\in V_1\cap V_2$ 则 $\alpha+\beta\in V_1\cap V_2$（加法封闭）

$\alpha\in V_1\cap V_2$，$k\alpha\in V_1\cap V_2$（数乘封闭）

设 $W:=\{V_i \mid V_i为V子空间\}$ 则

“$\cap$”是 $W\times W\longrightarrow W$ 的一个映射，故“$\cap$”是一种运算

运算性质：

1° 交换律：$V_1\cap V_2=V_2\cap V_1$

2° 结合律：$(V_1\cap V_2)\cap V_3=V_1\cap(V_2\cap V_3)$

从而 $\bigcap_{i=1}^{s} V_i = V_1\cap\cdots\cap V_s$ 也是一个子空间

b. 子空间的和

$V_1+V_2:=\{\alpha_1+\alpha_2\mid \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$

∵ $0=0+0$，∴ $0\in V_1+V_2$ 非空

$(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_1+\beta_1)\in V_1+V_2$（加法封闭）

$k(\alpha_1+\alpha_2)=k\alpha_1+k\alpha_2\in V_1+V_2$（数乘封闭）

∴ V_1+V_2 是 V 的一个子空间，称为子空间的和

易知和也为一种代数运算

运算性质：

1° 交换律 $V_1+V_2=V_2+V_1$

2° 结合律 $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$（由向量加法结合律得）

$\sum_{i=1}^{s} V_i := V_1+\cdots+V_s$ 也为 V的一个子空间

命题1. $\langle \alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle + \langle \beta_1,\cdots,\beta_r\rangle = \langle \alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots\beta_r\rangle$

定理2（子空间的维数公式）：设 V_1,V_2是V的有限维子空间.

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

证：设 $V_1\cap V_2$ 中一个基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，分别扩充为 V_1,V_2 的基

V_1: $\alpha_1,\cdots\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}$ V_2: $\alpha_1,\cdots\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$

则 $V_1+V_2 = \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}\rangle+\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}\rangle$

$= \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}\rangle$

设 $a\cdot\alpha+b\beta+c\cdot\gamma=0$

$c\cdot\gamma=-a\alpha-b\beta$ 则 $c\gamma\in V_1\cap V_2$

$\therefore c\gamma=l\alpha$ $\therefore (l+a)\alpha+b\beta=0$

$\therefore l+a=0$, $b=0$ $\therefore a\alpha+c\gamma=0$

$\therefore a=c=0$

$\therefore \alpha,\beta,\gamma$ 线性无关

$\therefore \dim(V_1+V_2)=m+n_1-m+n_2-m=n_1+n_2-m$

$=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

推论1. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2 \Longleftrightarrow V_1\cap V_2=0$

C. 直和

设 V_1,V_2 都是V的子空间，若 V_1+V_2中每个α表示成

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha_1\in V_1$ $\alpha_2\in V_2$ 方式唯一，则

称 V_1+V_2 为直和

定理3. 下列4个命题等价

1° V_1+V_2 为直和

2° $\vec{0}$ 表法唯一 (即若 $0=\alpha_1+\alpha_2$，则 $\alpha_1=\alpha_2=0$)

3° $V_1\cap V_2=0$，

4°. V_1 的一个基 S_1 与 V_2 的一个基 S_2 的并集 $S_1\cup S_2$ 是 V_1+V_2 的一个基

$1°\to2°$ $\because \vec{0}\in V_1+V_2$，$\therefore \vec{0}$ 在 V_1, V_2 中表法唯一

即若 $\vec{0}=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2 \Longrightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

$2\to3°$ 任取 $\alpha\in V_1\cap V_2$，则 $\alpha\in V_1$，$\alpha\in V_2$

$\therefore -\alpha\in V_1$，$-\alpha\in V_2$

又 $0=\alpha+(-\alpha)$ $\therefore \alpha=-\alpha=0$

$3°\Rightarrow1°$. 若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$

则 $\alpha_1-\beta_1=-\alpha_2+\beta_2 \in V_1\cap V_2=0$

$\therefore \alpha_1=\beta_1 \quad \alpha_2=\beta_2$

$2°\to4°$ 任取 $S_1\cup S_2$ 中一有限子集 $\{\underbrace{\gamma_1,\cdots,\gamma_t}_{S_1},\underbrace{\delta_1,\cdots\delta_r}_{S_2}\}$

设 $k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t+l_1\delta_1+\cdots l_r\delta_r=0$

$\because k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t\in V_1$，$l_1\delta_1+\cdots+l_r\delta_r\in V_2$

$\therefore k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t=0 \quad l_1\delta_1+\cdots+l_r\delta_r=0$

又 S_1，S_2 为 V_1，V_2 基

$\therefore k_1=\cdots=k_t=l_1=\cdots=l_r=0$

$\therefore \gamma_1\cdots\gamma_t,\delta_1,\cdots,\delta_r$ 线性无关

$\therefore S_1\cup S_2$ 线性无关

$\forall \alpha \in V_1+V_2$ 有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$

$\because S_1$ 是 V_1 一基，$\therefore \alpha_1$ 可由 S_1 中有限个向量线性表出

S_2 V_2 α_2 S_2

$\therefore \alpha$ 可由 S_1, S_2 中有限个向量线性表出

$\therefore$ $S_1\cup S_2$ 是 V_1+V_2 的一个基

$4^\circ \Rightarrow 2^\circ$ 设 $0=\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha_1\in V_1$ $\alpha_2\in V_2$)

$\because S_1$ 为 V_1 一基 $\therefore \alpha_1=a_1\gamma_1+\cdots a_m\gamma_m$ $(\gamma_1\cdots\gamma_m\in S_1$

同理 $\alpha_2=b_1\delta_1+\cdots b_t\delta_t$ $(\delta_1\cdots\delta_t\in S_2)$

$\therefore 0=a_1\gamma_1+\cdots+a_m\gamma_m+b_1\delta_1+\cdots+b_t\delta_t$

又 $S_1\cup S_2$ 为 V_1+V_2 一基 $\therefore \gamma_1\cdots\gamma_m, \delta_1,\cdots,\delta_t$ 线性无关

$\therefore a_1=\cdots=a_m=b_1=\cdots=b_t=0$

$\therefore \alpha_1=\alpha_2=0$ $\therefore \vec{0}$ 表法唯一

定理 4. 设 V_1、V_2 为 V 的有限维子空间，则

V_1+V_2 是直和 $\Longleftrightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

定义 2、若 $V=V_1\oplus V_2$ $\begin{cases} V=V_1+V_2 \\ V_1+V_2 \text{为直和} \end{cases}$，则称 V_1 与 V_2 互为补空间

命题 2、设 $\dim V=n$，则 V 的每一个子空间 U 在 V 中有一补空间

证、设 U 中一基 S_1 为 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$，扩充成 V 的一个基

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n-m}$，设 $W=\langle\beta_1,\cdots,\beta_{n-m}\rangle$

$$\therefore V=L\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle$$
$$=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle+\langle\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle$$
$$=U+W$$

$\because S_1\cup S_2$ 中 $U+W$ 的一个基

$\therefore$ $U+W$ 为直和 即 W 为 V 的补空间

注：U 的补空间不唯一，例几何空间中，过 0 点平面 U 的补空间为任意过 0 点不在 U 上直线

定义3. 设 $V_1, \cdots, V_m$ 为 V 子空间，若 $V_1+\cdots+V_m$ 中任一向量 α，可表示为 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$ $(\alpha_i \in V_i)$ 且表法唯一，则称 $V_1+\cdots+V_m$ 为直和 记 $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i := V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$

定理4. 下列4个命题等价

1° $V_1+\cdots+V_m$ 为直和

2° 0表法唯一

3° $V_i \cap (\sum_{j\neq i} V_j) = 0$

4°. 设 V_i 的一个基为 S_i，则 $S_1 \cup \cdots \cup S_m$ 为 $V_1+\cdots V_m$ 的一基

证：

待补

定理6. $V_1+\cdots+V_m$ 为直和

$$\Longleftrightarrow \dim V_1+\cdots+\dim V_m=\dim(V_1+\cdots+V_m)$$

证：$\Rightarrow$ 设 $V_1+\cdots+V_m$ 是直和，则

$$V_i \cup \sum_{i\neq j} V_j = 0$$

$$\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\dim(V_2+\cdots+V_m)$$

$$=\dim V_1+\dim V_2+\dim(V_3+\cdots+V_m)$$

$$\vdots$$

$$=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$$

$\Leftarrow$ 设 $\dim V_1+\cdots+\dim V_m=\dim(V_1+\cdots+V_m)$

在 V_i 中取一个基 $S_i=\alpha_{i1},\cdots\alpha_{ir_i}$

$V_1+\cdots+V_m=\langle\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{m1},\cdots\alpha_{mr_m}\rangle$

$\because \dim(V_1+\cdots+V_m)=r_1+\cdots+r_m$

$\therefore \alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{m1},\cdots,\alpha_{mr_m}$ 为 $V_1+\cdots+V_m$ 的基

即 $S_1\cap\cdots\cap S_m$ 为 $V_1+\cdots+V_m$ 的一个基

$\therefore$ $V_1+\cdots+V_m$ 为直和

若 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$，则 V_i 的一个基 S_i 合起来为 V 的基