定义1. 酉空间 V 上一个变换 $\underline{A}$，若为满射，且满足

$$(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = (\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in V$$

则称 $\underline{A}$ 为 V 上一酉变换

性质 同正交变换

命题1. 酉空间 V 上的变换 $\underline{A}$ 是酉变换，

$\Longleftrightarrow$ $\underline{A}$ 是 V 到自身的一个同构映射

命题2. n 维酉空间 V 上的变换 $\underline{A}$，若其满足

$$(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = (\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in V,$$

则 $\underline{A}$ 为 V 上一酉变换

命题3. n 维酉空间 V 上的酉变换 $\underline{A}$ 的特征值模为1

证：设 λ_0 为 $\underline{A}$ 一特征值，ξ 为 $\underline{A}$ 属于 λ_0 的一特征向量

则 $(\underline{A}\xi, \underline{A}\xi) = (\lambda_0\xi, \lambda_0\xi) = \lambda_0\overline{\lambda_0}(\xi, \xi) = (\xi, \xi)$

$\therefore\ |\lambda_0|^2 = 1$ 即 $|\lambda_0| = 1$

命题4. 设 $\underline{A}$ 为酉空间 V 上一酉变换，若 W 为 V 一有限维子空间，且为 $\underline{A}$ 的不变子空间，则 $W^\perp$ 也为 $\underline{A}$ 不变子空间

证：任取 $\beta \in W^\perp$.

$\underline{A}|W$ 为 W 上一线性变换，

由于 $\underline{A}$ 为 V 上单射，故 $\underline{A}|W$ 为 W 上一单射

又 W 为有限维，故 $\underline{A}|W$ 为满射

任给 $\alpha \in W$，$\exists\, \gamma \in W$，s.t. $\underline{A}\gamma = \alpha$

$\therefore (\underline{A}\beta, \alpha) = (\underline{A}\beta, \underline{A}\gamma) = (\beta, \gamma) = 0$

$\because \underline{A}\beta \in W^{\perp}$ $\therefore W^{\perp}$为不变子变间

定理1. 设$\underline{A}$是n维酉空间V上一酉变换，则V中存在一标准正交基，使得$\underline{A}$在此基下的矩阵为对角矩阵.

证：对V的维数作数学归纳法

$n=1$时 显然成立

设$n=k-1$时成立

当$n=k$时

取$\underline{A}$一特征值λ_1，设η_1为$\underline{A}$属于λ_0一单位向量

则 $V=\langle\eta_1\rangle \oplus \langle\eta_1\rangle^{\perp}$

从而$\underline{A}|\langle\eta_1\rangle$为$\underline{A}$不变子空间.

因此$\langle\eta_1\rangle^{\perp}$亦为不变子空间

从而$\underline{A}|\langle\eta_1\rangle^{\perp}$为$\langle\eta_1\rangle^{\perp}$一酉变换.

由假设得$\langle\eta_1\rangle^{\perp}$存在一标准正交基$\eta_2,\cdots,\eta_k$，使得$\underline{A}$在其下矩阵为

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

又$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为$V$一标准正交基

故$\underline{A}$在此基下矩阵为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$