概率论笔记

作者：肖程哲

时间：July 21, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 4 章 常见分布

4.1 离散分布

4.1.1 均匀分布

定义 4.1 (离散均匀分布)
若随机变量只能在 $a_1, \cdots, a_n$ 中取值，并且对应的概率相同，则称其遵循**均匀分布** (Uniform distribution)，记为 $X \sim U(a_1, \cdots, a_n)$。

离散均匀分布的特征：

参数	$a_i \in \mathbb{R}$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x = a_1, a_2, \cdots, a_n \\ 0 & 其他 \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{\sum_{i=1}^m e^{a_i t}}{m}$
均值	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{m} = \bar{a}$
方差	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (a_i - \bar{a})^2}{m}$
实例	丢一个均匀的骰子

4.1.2 Bernoulli 分布

定义 4.2 (Bernoulli 分布)
若随机变量只能取 0 或 1，并且对应的概率分别为 $1-p$ 与 p，则称其遵循 **Bernoulli 分布** (Bernoulli distribution)（也称 0-1 分布），记为 $X \sim B(p)$。

Bernoulli 分布的特征：

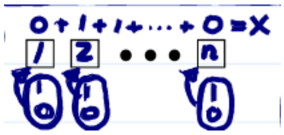
参数	$p \in [0, 1]$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0, 1\} \\ 0 & 其他 \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = pe^t + 1 - p$
均值	$\mu = p$
方差	$\sigma^2 = p(1-p)$
实例	丢一次硬币，p 代表某一面出现的概率

注 若 A 是一个事件，出现概率为 p_A，则指示随机变量 I_A（若 A 出现记为 1，否则为 0）遵循 Bernoulli 分布，即 $I_A \sim B(p_A)$

4.1.3 二项分布

定义 4.3 (二项分布)

若进行 n 次独立的 Bernouli 实验 $X_1+\cdots+X_n, X_i \sim B(p)$，则这些随机变量之和 $Y=X_1+\cdots+X_n$ 遵循 **二项分布** (binomial distribution)，记为 $Y \sim B(n,p)$。



二项分布的特征：

参数 $p\in[0,1], n\in\mathbb{N}_+$

概率质量函数 $p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} & x\in\mathbb{N}^n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

矩母函数 $M(t)=(pe^t+1-p)^n$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20）
- 定义

均值 $\mu=np$，求解方法有：

- 定义（下述凑一法）
- 矩母函数在 $t=0$ 的一阶导
- 变量之和的均值等于各变量均值之和

方差 $\sigma^2=np(1-p)$，求解方法有：

- 定义（下述凑一法）
- 矩母函数在 $t=0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
- 独立变量 之和的方差等于各变量均值之和

实例 丢 n 次硬币，p 代表某一面出现的概率，出现此面的次数

笔记 求解二项分布的均值时，可通过将其凑成概率质量函数之和（为 1）的形式：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\\
&= np\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-1-(x-1)}\\
&= np
\end{aligned}
$$

此称为凑一法 (sum to one, STO)。同理，求方差时也可使用：

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{i=1}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{i=1}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= n(n-1)p^2 \\
\mathrm{Var}(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

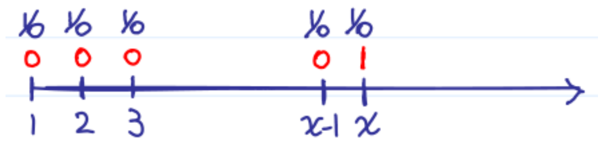
命题 4.1

二项分布之和仍是二项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim B(n_i,p)$，则 $Y = X_1+\cdots+X_k \sim B(n_1+\cdots+n_k,p)$

4.1.4 几何分布

定义 4.4

若进行无限次独立的 Bernouli 实验，则第一次出现“1”的实验次数遵循**几何分布** (geometric distribution)，记为 $X \sim G(p)$。



几何分布的特征：

参数 $p \in [0,1]$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x \in \mathbb{N}_+ \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有：

- 独立变量之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20）
- 定义

均值 $\mu = \frac{1}{p}$，求解方法有：

- $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 定义（下述微分法）

方差 $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$，求解方法有：

- 定义（下述微分法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

实例 买彩票时，中奖所需购买张数。

笔记 微分法求解几何分布均值：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k \\
&= p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = \frac{p}{(1-p)^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

微分法求解几何分布方差：

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k \\
&= p\frac{d^2}{dq^2}\frac{q}{1-q} = \frac{2p}{(1-q)^3} \\
&= \frac{2}{p^2} \\
\mathrm{Var}(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}p^2 \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

命题 4.2

离散分布中有且只有几何分布具备无记忆性：

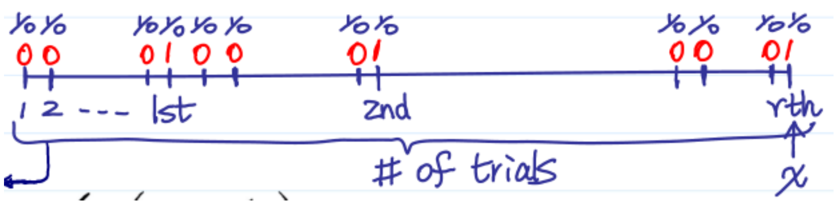
$$P\{X = s + t | X > t\} = P\{X = s\}$$

证明

4.1.5 负二项分布

定义 4.5

若进行无限次独立的 Bernouli 实验，则第 r 次出现“1”的实验次数遵循**负二项分布** (negative binomial distribution)，记为 $X \sim NB(r, p)$。



负二项分布的特征：

参数	$p \in [0, 1]$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} p & x \in \mathbb{N}_r \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{p^r e^{rt}}{(1-(1-p)e^t)^r}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理**??**）
- 定义凑一法
- 利用公式 $\sum_{x=0}^{\infty}\binom{n+x-1}{x}t^x = \frac{1}{(1-t)^n}, -1 < t < 1$

均值 $\mu = \frac{r}{p}$，求解方法有：

- 定义凑一法
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 独立几何分布之和 (定理4.3)

方差 $\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$，求解方法有：

- 定义（凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 独立几何分布之和 (定理4.3)

实例 买彩票时，中奖 r 次所需购买张数。

命题 4.3

几何分布之和是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_r$ 独立且 $X_i \sim G(p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_r \sim NB(r,p)$

证明

命题 4.4

负二项分布之和仍是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_k$ 独立且 $X_i \sim NB(r_i,p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim B(r_1 + \cdots + r_k, p)$

证明

4.1.6 多项分布

定义 4.6 (多项分布)

若进行 n 次独立的实验，每次实验有 r 种结果，每种结果对于概率分别为 $p_1, \cdots, p_r$。令 X_i 代表得出结果 i 的次数，则随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_r)$ 遵循**多项分布** (multinomial distribution)，记为 $\mathbf{X} \sim Multinomial(n, p_1, \cdots, p_r)$。

多项分布的特征：

参数 $p_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x_1 \cdots x_r} p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r} & x \in \mathbb{N}^n \,\&\, \sum_{i=1}^{r} x_i = n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t_1, \cdots, t_r) = (p_1 e^{t_1} + \cdots + p_r e^{t_r})^n$，求解方法有：

- 利用公式
- 凑一法

边缘分布 $X_i \sim B(n, p_i)$

均值 $E(X_i) = np_i$

方差 $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$

协方差 $\text{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$，求解方法有：

- 矩母函数求解 $E(X_i X_j)$
- 凑一法求解 $E(X_i X_j)$

实例

注 多项分布是二项分布的泛化。

4.1.7 Poisson 分布

定理 4.1 (Poisson 逼近)

$$\lim_{np_n \to \lambda} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明 记 $np_n = \lambda_n$，记 $p_n = \lambda_n / n$，我们可得

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

对固定的 k 有

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda; \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}; \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

对任意的 k ($k = 0, 1, 2, \cdots$) 成立

定义 4.7 (Poisson 分布)

若随机变量 X 的概率分布列满足以下形式：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称其遵循 **Poisson 分布**记为 $X \sim P(\lambda)$.

注 由定理4.1可看出，Poisson 分布可作为二项分布的近似。λ 的涵义

Poisson 分布的特征：

参数 $\lambda > 0$

概率质量函数 $p(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & x \in \mathbb{N}^n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$，求解方法有：

- 利用公式
- 凑一法

均值 $\mu = \lambda$

方差 $\sigma^2 = \lambda$

实例 公共汽车站来到的乘客数

命题 4.5

Poisson 分布之和仍是 Poisson 项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim P(\lambda_i)$，则 $Y=X_1+\cdots+X_k \sim P(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$

证明

定义 4.8 (泊松过程)

4.1.8 超几何分布

定义 4.9

设有 N 个产品，其中有 M 个不合格品. 若从中不放回地随机抽取 n 个，则其中含有的不合格品的个数 X 服从超几何分布，记为 $X \sim h(n,N,M)$.

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k=0,1,\cdots,r, \tag{4.1}$$

其中

超几何分布的特征：

参数 $r=\min\{M,n\}$，且 $M\le N, n\le N, n, N, M$ 均为正整数.

概率质量函数 $p(k)=\begin{cases}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} k=0,1,\cdots,r\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

矩母函数 存在，但没有简单的表达

均值 $\mu=\frac{rn}{n+m}$

方差 $\sigma^2=\frac{rnm(n+m-r)}{(n+m)^2(n+m-1)}$

实例 从一个有限总体中进行不放回抽样

注 若 $m,n\to\infty$ 时有 $p_{m,n}=\frac{n}{m+n}\to p$，则超几何分布可近似为二项分布。$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\cong\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

4.2 连续分布

4.2.1 均匀分布

4.2.2 指数分布

4.2.3 Gamma 分布

4.2.4 Beta 分布

4.3 正态分布及其导出分布

4.3.1 正态分布

4.3.2 卡方分布

4.3.3 t 分布

4.3.4 F 分布

4.3.5 Cauchy 分布

4.4 各分布间关系