概率论笔记

作者：肖程哲

时间：July 25, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 4 章 常见分布

4.1 离散分布

4.1.1 均匀分布

定义 4.1 (离散均匀分布)

若随机变量只能在 $a_1, \cdots, a_n$ 中取值，并且对应的概率相同，则称其遵循**均匀分布** (Uniform distribution)，记为 $X \sim U(a_1, \cdots, a_n)$。

离散均匀分布的特征：

参数	$a_i \in \mathbb{R}$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x = a_1, a_2, \cdots, a_n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} e^{a_i t}}{m}$
均值	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{m} = \bar{a}$
方差	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (a_i - \bar{a})^2}{m}$
实例	丢一个均匀的骰子

4.1.2 Bernoulli 分布

定义 4.2 (Bernoulli 分布)

若随机变量只能取 0 或 1，并且对应的概率分别为 $1-p$ 与 p，则称其遵循 **Bernoulli 分布** (Bernoulli distribution)（也称 0-1 分布），记为 $X \sim B(p)$。

Bernoulli 分布的特征：

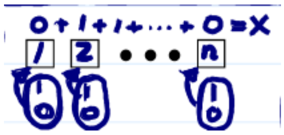
参数	$p \in [0, 1]$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = pe^t + 1 - p$
均值	$\mu = p$
方差	$\sigma^2 = p(1-p)$
实例	丢一次硬币，p 代表某一面出现的概率

注 若 A 是一个事件，出现概率为 p_A，则指示随机变量 I_A（若 A 出现记为 1，否则为 0）遵循 Bernoulli 分布，即 $I_A \sim B(p_A)$

4.1.3 二项分布

定义 4.3 (二项分布)

若进行 n 次独立的 Bernouli 实验 $X_1 + \cdots + X_n, X_i \sim B(p)$，则这些随机变量之和 $Y = X_1 + \cdots + X_n$ 遵循**二项分布** (binomial distribution)，记为 $Y \sim B(n,p)$。



二项分布的特征：

参数 $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}_+$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \mathbb{N}^n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = (pe^t + 1 - p)^n$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20）
- 定义

均值 $\mu = np$，求解方法有：

- 定义（下述凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 变量之和的均值等于各变量均值之和

方差 $\sigma^2 = np(1-p)$，求解方法有：

- 定义（下述凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 独立变量 之和的方差等于各变量均值之和

实例 丢 n 次硬币，p 代表某一面出现的概率，出现此面的次数

笔记 求解二项分布的均值时，可通过将其凑成概率质量函数之和（为 1）的形式：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

此称为凑一法 (sum to one, STO)。同理，求方差时也可使用：

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{i=1}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{i=1}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= n(n-1)p^2 \\
\mathrm{Var}(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

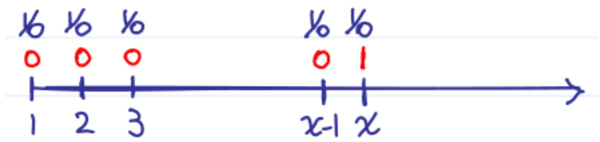
命题 4.1

二项分布之和仍是二项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim B(n_i,p)$，则 $Y = X_1+\cdots+X_k \sim B(n_1+\cdots+n_k,p)$

4.1.4 几何分布

定义 4.4

若进行无限次独立的 Bernouli 实验，则第一次出现“1”的实验次数遵循**几何分布** (geometric distribution)，记为 $X \sim G(p)$。



几何分布的特征：

参数	$p \in [0,1]$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x \in \mathbb{N}_+ \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有： •独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20） •定义
均值	$\mu = \frac{1}{p}$，求解方法有： •$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ •矩母函数在 $t=0$ 的一阶导 •定义（下述微分法）
方差	$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$，求解方法有： •定义（下述微分法） •矩母函数在 $t=0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
实例	买彩票时，中奖所需购买张数。

笔记 微分法求解几何分布均值：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k \\
&= p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = \frac{p}{(1-p)^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

微分法求解几何分布方差：

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k \\
&= p\frac{d^2}{dq^2}\frac{q}{1-q} = \frac{2p}{(1-q)^3} \\
&= \frac{2}{p^2} \\
\mathrm{Var}(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}p^2 \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

命题 4.2

离散分布中有且只有几何分布具备无记忆性：

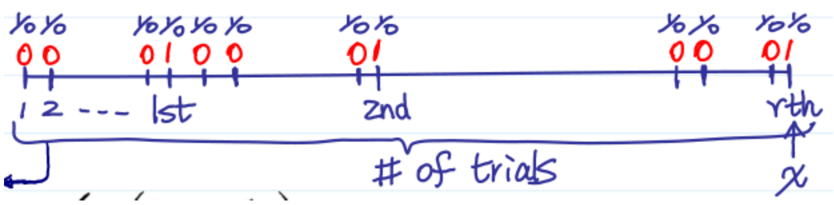
$$
P\{X = s+t | X > t\} = P\{X = s\}, \quad \forall s > 0, t > 0
$$

证明

4.1.5 负二项分布

定义 4.5

若进行无限次独立的 Bernoulli 实验，则第 r 次出现“1”的实验次数遵循**负二项分布** (negative binomial distribution)，记为 $X \sim NB(r,p)$。



负二项分布的特征：

参数 $p \in [0,1]$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}p & x \in \mathbb{N}_r \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = \frac{p^r e^{rt}}{(1-(1-p)e^t)^r}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有：

•独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理??）
•定义凑一法
•利用公式 $\sum_{x=0}^{\infty}\binom{n+x-1}{x}t^x = \frac{1}{(1-t)^n}, -1 < t < 1$

均值 $\mu = \frac{r}{p}$，求解方法有：

•定义凑一法
•矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
•独立几何分布之和 (定理4.3)

方差 $\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$，求解方法有：

•定义（凑一法）
•矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
•独立几何分布之和 (定理4.3)

实例 买彩票时，中奖 r 次所需购买张数。

命题 4.3

几何分布之和是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_r$ 独立且 $X_i \sim G(p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_r \sim NB(r, p)$

证明

命题 4.4

负二项分布之和仍是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_k$ 独立且 $X_i \sim NB(r_i, p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim B(r_1 + \cdots + r_k, p)$

证明

4.1.6 多项分布

定义 4.6 (多项分布)

若进行 n 次独立的实验，每次实验有 r 种结果，每种结果对于概率分别为 $p_1, \cdots, p_r$。令 X_i 代表得出结果 i 的次数，则随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_r)$ 遵循**多项分布** (multinomial distribution)，记为 $\mathbf{X} \sim Multinomial(n, p_1, \cdots, p_r)$。

多项分布的特征：

参数 $p_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x_1 \cdots x_r} p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r} & x \in \mathbb{N}^n \,\&\, \sum_{i=1}^{r} x_i = n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t_1, \cdots, t_r) = (p_1 e^{t_1} + \cdots + p_r e^{t_r})^n$，求解方法有：

•利用公式
•凑一法

边缘分布 $X_i \sim B(n, p_i)$

均值 $E(X_i) = np_i$

方差 $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$

协方差 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$，求解方法有：

- 矩母函数求解 $E(X_i X_j)$
- 凑一法求解 $E(X_i X_j)$

实例

注 多项分布是二项分布的泛化。

4.1.7 Poisson 分布

定理 4.1 (Poisson 逼近)

$$\lim_{np_n \to \lambda} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明 记 $np_n = \lambda_n$，记 $p_n = \lambda_n / n$，我们可得

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

对固定的 k 有

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda; \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}; \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

对任意的 k（$k = 0, 1, 2, \cdots$）成立

定义 4.7 (Poisson 分布)

若随机变量 X 的概率分布列满足以下形式：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称其遵循 **Poisson 分布**记为 $X \sim P(\lambda)$.

注 由定理4.1可看出，Poisson 分布可作为二项分布的近似。λ 的涵义

Poisson 分布的特征：

参数 $\lambda > 0$

概率质量函数 $p(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & x \in \mathbb{N}^n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$，求解方法有：

- 利用公式
- 凑一法

均值 $\mu = \lambda$

方差 $\sigma^2 = \lambda$

实例	公共汽车站来到的乘客数

命题 4.5

Poisson 分布之和仍是 Poisson 项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim P(\lambda_i)$，则 $Y = X_1+\cdots+X_k \sim P(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$

证明

引理 4.1

若 $f(x)$ 是连续函数（或单调函数），且对一切 x, y（或一切 $x, y \geq 0$）成立：

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

则 $f(x)$ 为**指数函数**。

证明

$$\because f(1) = [f(\frac{1}{n})]^n$$
$$\text{且} a = f(1) = [f(\frac{1}{2})]^2 \geq 0$$
$$\therefore f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$$
$$\therefore f(\frac{m}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^m = a^{\frac{m}{n}}$$

即此命题对一切有理数成立。又实数具有连续性，故此命题对一切实数成立。

定义 4.8 (泊松过程)

若某一随机过程满足以下特征，则称其为**泊松过程**：

平稳性	随机事件 A 在 $[t_0, t_0+t)$ 中的发生次数数只与时间间隔长度 t 有关而与时间起点 t_0 无关。以 $P_k(t)$ 记在长度为 t 的时间区间中发生 K 次事件 A 的概率。
独立增量性	在 $[t_0, t_0+t)$ 中发生 K 次事件 A 的概率与时刻 t_0 以前发生的事件独立。
普通性	在充分小的时间间隔中，最多发生一次事件 A。即，若记 $\psi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(t) = 1 - P_0(t) - P_1(t)$，则有 $\lim_{t\to 0} \psi(t)/t = 0$

对 $\Delta t > O$，考虑 $[O, t+\Delta t)$ 中发生 K 次事件 A 的概率 $P_k(t+\Delta t)$，由独立增量性及全概率公式可得：

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)P_0(\Delta r) + P_{k-1}P_1(\Delta t) + \cdots + P_0(t)P_k(\Delta t), k \geq 0$$

（对 $n \geq 1$，假定 $P_{-n}(t) = 0$）

特别地

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

由引理4.1知

$$P_0(t) = a^t, a \geq 0$$

若 $a = O$，则 $P_0(t) \equiv 0$，说明在不管怎么短的时间间隔内事件 A 都发生，因此在有限时间间隔中将发生无穷多个次事件 A，这种情形不在我们的考虑之列。此外，因 $P_0(t)$ 是概率，故应有 $a \geq 1$，而当 $a = 1$ 时，$P_0(t) \equiv 1$，表明事件 A 永不发生，也不是我们感兴趣的情形，所以应有 $0 < a < 1$，从而存在 $\lambda > 0$，使

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

因此当 $\Delta t \to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}P_0(\Delta t) &= e^{-\lambda\Delta t} = 1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\\ P_1(\Delta t) &= 1-P_0(\Delta t)-\psi(\Delta t) = \lambda\Delta t+o(\Delta t)\\ \sum_{l=2}^{\infty}P_{k-l}(t)P_l(\Delta t) &\leqslant \sum_{l=2}^{\infty}P_l(\Delta t) = \psi(\Delta t) = o(\Delta t)\end{aligned}$$

所以：

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)(1-\lambda\Delta t)+P_{k-1}\lambda\Delta t+o(\Delta t), k\geq 1$$

因此：

$$P_k'(t) = \frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t} = \lambda[P_{k-1}-P_k(t)]$$

由于 $P_0(t) = e^{-\lambda t}$，故有 $P_1'(t) = \lambda[e^{-\lambda t}-P_1(t)]$，可解得 $P_0(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$，依次可递推可解得：

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k\in\mathbb{N}$$

正是参数为 λt 的泊松分布。

4.1.8 超几何分布

定义 4.9

设有 N 个产品，其中有 M 个不合格品. 若从中不放回地随机抽取 n 个，则其中含有的不合格品的个数 X 服从超几何分布，记为 $X\sim h(n,N,M)$.

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k=0,1,\cdots,r, \tag{4.1}$$

其中

♣

超几何分布的特征：

参数	$r=\min\{M,n\}$，且 $M\leq N, n\leq N, n,N,M$ 均为正整数.
概率质量函数	$p(k)=\begin{cases}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} k=0,1,\cdots,r\\ 0 \qquad\qquad 其他\end{cases}$
矩母函数	存在，但没有简单的表达
均值	$\mu=\frac{rn}{n+m}$
方差	$\sigma^2=\frac{rnm(n+m-r)}{(n+m)^2(n+m-1)}$
实例	从一个有限总体中进行不放回抽样

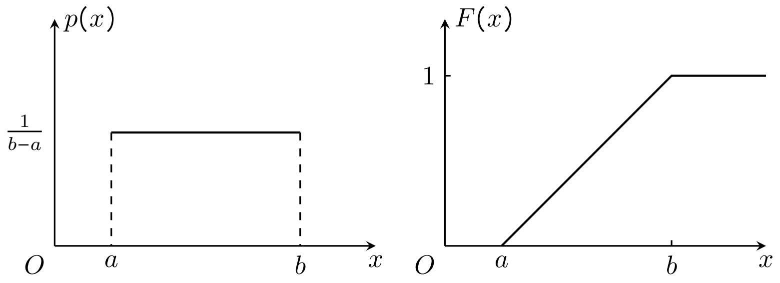
注 若 $m,n\to\infty$ 时有 $p_{m,n}=\frac{n}{m+n}\to p$，则超几何分布可近似为二项分布。$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\cong\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

4.2 连续分布

4.2.1 均匀分布

定义 4.10

若随机变量 X 在 $[a,b]$ 中任一区域的概率与其测度成正比，则称 X 服从区间 (a,b) 上的**均匀分布** (Uniform distribution)，记作 $X \sim U(a,b)$。



(a) 密度函数 $p(x)$　(b) 分布函数 $F(x)$

图 4.1: (a,b) 上的均匀分布

均匀分布的特征：

参数	$a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
分布函数	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, \quad t \in \mathbb{R}$
均值	$\mu = \frac{a+b}{2}$
方差	$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

注 常利用 $U(0,1)$ 生成特定分布的伪随机数（参见定理**??**）

4.2.2 指数分布

定义 4.11

若随机变量 X 的密度函数（见图 4.2）为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

则称 X 服从**指数分布**，记作 $X \sim Exp(\lambda)$，其中参数 $\lambda > 0$. 指数分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

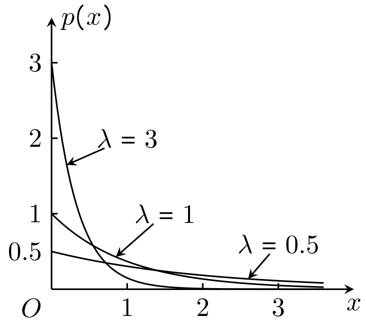


图 4.2: 参数为 λ 的指数分布密度函数

指数分布的特征：

矩母函数	$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$
均值	$\mu = \frac{1}{\lambda}$
方差	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
实例	物品使用寿命，等待时间

注 有其均值可看出，对于等待时间模型，$\frac{1}{\lambda}$ 代表平均等待时间，即 (时间/次)；λ 代表平均发生频率，即 (次/时间)。

定理 4.2 (指数分布的无记忆性)

连续分布中有且只有指数分布具备无记忆性：

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t), \quad \forall s > 0, t > 0$$

证明

命题 4.6

如果某设备在任何长为 t 的时间 $[0, t]$ 内发生故障的次数 $N9t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，则相继两次故障之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布.

证明 设 $N(t) \sim P(\lambda t)$，即

$$P\big(N(t) = k\big) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

注意到两次故障之间的时间间隔 T 是非负随机变量，且事件 $\{T \geq t\}$ 说明此设备在 $[0, t]$ 内没有发生故障，即 $\{T \geq t\} = \{N(t) = 0\}$，由此我们得

当 $t < 0$ 时，有 $F_T(t) = P(T \leq t) = 0$；

当 $t \geq 0$ 时，有

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P\big(N(t) = 0\big) = 1 - e^{-\lambda t},$$

所以 $T \sim Exp(\lambda)$，相继两次故障之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布.

4.2.3 Γ 分布

定义 4.12

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

则称 X 服从**伽玛分布**，记作 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，其中 $\alpha>0$ 为形状参数，$\lambda>0$ 为尺度参数.

图 4.3 给出若干条 λ 固定、α 不同的伽玛密度函数曲线，从图中可以看出：

- $0<\alpha<1$ 时，$p(x)$ 是严格下降函数，且在 $x=0$ 处有奇异点；
- $\alpha=1$ 时，$p(x)$ 是严格下降函数，且在 $x=0$ 处 $p(0)=\lambda$；
- $1<\alpha\le 2$，$p(x)$ 是单峰函数，向上凸、后下凸；
- $2<\alpha$ 时，$p(x)$ 是单峰函数，先下凸、中间上凸、后下凸. 且 α 越大，$p(x)$ 越近似于正态分布.

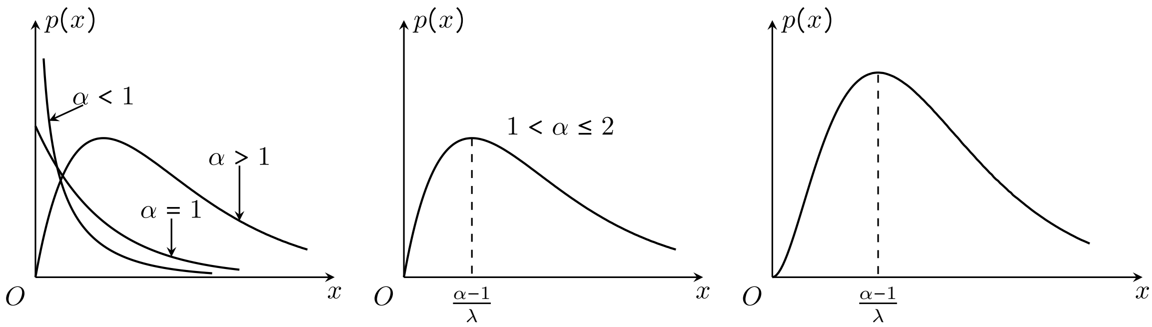


图 4.3: λ 固定、不同 α 的伽玛密度曲线

Gamma 分布的特征：

矩母函数	$M(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha,\quad t<\lambda$
均值	$\mu=\frac{\alpha}{\lambda}$
方差	$\sigma^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Gamma 函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}dy$ 的特征：

- $\Gamma(1)=1$
- $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
- $\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\in\mathbb{Z}$
- $\Gamma(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{\pi}(\alpha-1)!}{2^{\alpha-1}(\frac{\alpha-1}{2})!},\quad \alpha=2k+1,k\in\mathbb{N}$

命题 4.7

Γ 分布是指数分布的泛化，即 $\Gamma(1,\lambda)=E(\lambda)$。进一步有：若随机变量 $X_1,\cdots,X_k,\mathrm{i.i.d.}\sim E(\lambda)$，则 $Y=X_1+\cdots+X_k\sim\Gamma(k,\lambda)$。更进一步有：若随机变量 $X_1',\cdots,X_k',\mathrm{i.i.d.}\sim\Gamma(\alpha_i,\lambda)$，则 $Y'=X_1'+\cdots+X_k'\sim\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_k,\lambda)$。

证明

$$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{k}M_{X_i}(t_i)=\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda}{\lambda-t}=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^k$$
$$M_{Y'}(t)=\prod_{i=1}^{k}M_{X_i'}(t_i)=\prod_{i=1}^{k}(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_i}=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$$

命题 4.8

若令随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $cX\sim\Gamma(\alpha,\frac{\lambda}{c})$, $\quad c>0$

证明

$$M_{cX}(t)=M_X(ct)=(\frac{\lambda}{\lambda-ct})^\alpha=(\frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{\lambda}{c}-t})^\alpha$$

命题 4.9

若令随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $\mu_k=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}$, $\quad 0<k$，且则 $\mu_{-k}=\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$, $\quad 0<k<\alpha$

证明

$$\mu_k=M_X^{(k)}(0)=\frac{1}{\lambda^k}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}$$
$$\mu_{-k}=M_X^{(-k)}(0)=\lambda^k\frac{1}{\alpha-1}\cdots\frac{1}{\alpha-k}=\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$$

4.2.4 β 分布

定义 4.13

称以下函数

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$$

为**贝塔函数**，其中参数 $a>0,b>0$.

命题 4.10

贝塔函数具有如下性质：

- $\beta(a,b)=\beta(b,a)$
- $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

证明 在贝塔函数的积分中令 $y=1-x$，即得

$$\beta(a,b)=\int_1^0(1-y)^{a-1}y^{b-1}(-\mathrm{d}y)=\int_0^1(1-y)^{a-1}y^{b-1}\mathrm{d}y=\beta(b,a)$$

由伽玛函数的定义知

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

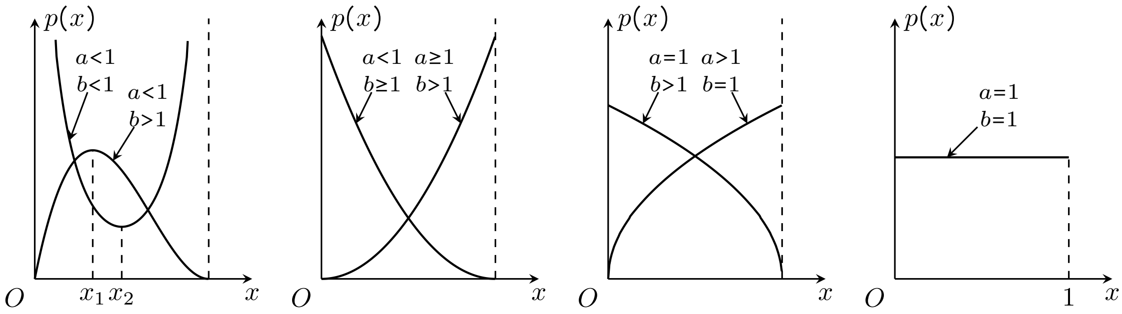


图 4.4: 贝塔密度函数曲线

作变量变换 $x = uv, y = u(1-v)$，其雅可比行列式 $J = -u$，故

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (uv)^{a-1}[u(1-v)]^{b-1}\mathrm{e}^{-u}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{+\infty} u^{a+b-1}\mathrm{e}^{-u}\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathrm{d}v = \Gamma(a+b)\end{aligned}$$

$beta(a,b)$,

定义 4.14

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 服从**贝塔分布**，记作 $X \sim Be(a,b)$，其中 $a > 0, b > 0$ 都是形状参数.

从图 **??** 可以看出：

- $a < 1, b < 1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单峰函数.
- $a > 1, b > 1$ 时，$p(x)$ 是上凸的单峰函数.
- $a < 10, b \geq 1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单调减函数.
- $a \geq 1, b < 1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单调增函数.
- $a = 1, b = 1$ 时，$p(x)$ 是常函数，且 $Be(1,1) = U(0,1)$.

Beta 分布的特征：

矩母函数	$M(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{a+r}{a+b+r}\right)\frac{t^k}{k!}, \quad t < \lambda$
均值	$\mu = \frac{a}{a+b}$
方差	$\sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

注

$$\beta(1,1) = U(0,1)$$

命题 4.11

令独立随机变量 $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1,\lambda), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2,\lambda)$，则 $\frac{X_1}{X_1+X_2} \sim \beta(\alpha_1,\alpha_2)$

证明

4.3 正态分布及其导出分布

4.3.1 正态分布

4.3.2 卡方分布

4.3.3 t 分布

4.3.4 F 分布

4.3.5 Cauchy 分布

4.4 各分布间关系