



# 概率论笔记

作者：肖程哲

时间：August 6, 2022



苟日新，日日新，又日新

# 目录

<b>第 1 章 概率基础</b>	<b>1</b>	3.3 估计与预测 . . . . .	29
1.1 概率空间 . . . . .	1	3.3.1 delta 法 . . . . .	29
1.1.1 随机事件 . . . . .	1	3.3.2 预测 . . . . .	29
1.1.2 概率空间 . . . . .	2	3.4 熵与信息 . . . . .	29
1.1.3 概率的性质 . . . . .	3	3.5 其他特征 . . . . .	29
1.2 古典概型与几何概型 . . . . .	4		
1.2.1 古典概型 . . . . .	4	<b>第 4 章 常见分布</b>	<b>30</b>
1.2.2 几何概型 . . . . .	5	4.1 离散分布 . . . . .	30
1.2.3 Bertrand 奇论 . . . . .	7	4.1.1 均匀分布 . . . . .	30
1.3 条件概率 . . . . .	7	4.1.2 伯努利分布 . . . . .	30
1.4 独立性 . . . . .	10	4.1.3 二项分布 . . . . .	31
		4.1.4 几何分布 . . . . .	32
<b>第 2 章 随机变量</b>	<b>12</b>	4.1.5 负二项分布 . . . . .	33
2.1 随机变量的分布 . . . . .	12	4.1.6 多项分布 . . . . .	34
2.2 多元随机变量 . . . . .	14	4.1.7 泊松分布 . . . . .	35
2.2.1 边际分布 . . . . .	15	4.1.8 超几何分布 . . . . .	37
2.2.2 条件分布 . . . . .	15	4.2 连续分布 . . . . .	38
2.2.3 独立 . . . . .	16	4.2.1 均匀分布 . . . . .	38
2.3 随机变量的函数 . . . . .	16	4.2.2 指数分布 . . . . .	38
2.3.1 分布函数法 . . . . .	17	4.2.3 伽马分布 . . . . .	40
2.3.2 Copula . . . . .	18	4.2.4 贝塔分布 . . . . .	41
2.3.3 概率密度函数法 . . . . .	19	4.3 正态分布及其导出分布 . . . . .	43
2.3.4 矩母函数法 . . . . .	20	4.3.1 正态分布 . . . . .	43
2.3.5 次序统计量 . . . . .	20	4.3.2 卡方分布 . . . . .	44
		4.3.3 F 分布 . . . . .	45
		4.3.4 t 分布 . . . . .	46
<b>第 3 章 随机变量的数值特征</b>	<b>22</b>	4.3.5 柯西分布 . . . . .	47
3.1 期望 . . . . .	22	4.4 各分布间关系 . . . . .	49
3.1.1 均值 . . . . .	22		
3.1.2 方差 . . . . .	23		
3.1.3 协方差 . . . . .	24		
3.1.4 条件期望 . . . . .	25		
3.2 矩母函数与特征函数 . . . . .	26		
3.2.1 矩 . . . . .	26		
3.2.2 矩母函数 . . . . .	27		
3.2.3 联合特征函数 . . . . .	28		
3.2.4 特征函数 . . . . .	28		
<b>第 5 章 概率极限</b>	<b>51</b>		
5.1 收敛 . . . . .	51		
5.2 大数定理 . . . . .	53		
5.3 中央极限定理 . . . . .	54		
<b>第 A 章 基本数学工具</b>	<b>56</b>		
A.1 集合论与测度论 . . . . .	56		
A.2 排列与组合 . . . . .	56		

## 附录 A 基本数学工具

### A.1 集合论与测度论

### A.2 排列与组合

全部组合分析公式的推导基于下列两条原理：

**乘法原理** 若进行  $A_1$  过程有  $n_1$  种方法，进行  $A_2$  过程有  $n_2$  种方法，则进行  $A_1$  过程后再接着进行  $A_2$  程共有  $n_1 \cdot n_2$  种方法

**加法原理** 若进行  $A_1$  过程有  $n_1$  种方法，进行  $A_2$  过程有  $n_2$  种方法，假定  $A_1$  过程与  $A_2$  过程是并行的，则进行过程  $A_1$  或过程  $A_2$  的方法共有  $n_1 + n_2$  种

排列与组合的定义及其计算公式如下：

**排列** 从  $n$  个不同元素中任取  $r(r \leq n)$  个元素排成一列（考虑元素先后出现次序），称此为一个排列，其总数记为  $P_n^r$ 。按乘法原理有：

$$P_n^r = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

若  $r = n$ ，则称为全排列，记为  $n!$ 。显然，全排列  $P_n = n!$ 。

**重复排列** 从  $n$  个不同元素中每次取出一个，放回后 再取下一个，如此连续取  $r$  次所得的排列称为重复排列。此种重复排列数共有  $n^r$  个。

**组合** 从  $n$  个不同元素中任取  $r(r \leq n)$  个元素并成一组（不考虑元素间的先后次序），称此为一个组合，其总数记为  $\binom{n}{r}$  或  $C_n^r$ 。按乘法原理有：

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n - 1)\cdots(n - r + 1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

在此规定  $0! = 1$  与  $\binom{n}{0} = 1$ 。

**重复组合** 从  $n$  个不同元素中每次取出一个，放回后 再取下一个，如此连续取  $r$  次所得的组合称为重复组合。其总数为  $\binom{n+r-1}{r}$ 。注意这里的  $r$  也允许大于  $n$ 。

重复组合数的得出可如下考虑：将  $n$  个元素看作  $n$  个盒子，使用  $n + 1$  个插板区分（相邻两插板组成一个盒子），取  $r$  次视为往盒子中放入  $r$  个球。每种取法可视为将  $n - 1$  个插板（两头的不能动）与  $r$  个球进行放置。共有  $r + n - 1$  个位置，但只要其中的插板（或球）放置好后，球（或插板）的位置自然固定。所以其总数为  $\binom{n+r-1}{n-1}$ （或  $\binom{n+r-1}{r}$ ，两者相同）。

	有序	无序
放回	重复排列 $n^r$	重复组合 $\binom{n+r-1}{r}$
不放回	排列 $\frac{n!}{(n-r)!}$	组合 $\binom{n}{r}$

**定理 A.1 (牛顿二项式定理)**

若对于任意实数  $\alpha$  定义

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{A_r^\alpha}{r!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - r + 1)}{r!}$$

则有牛顿二项式：

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r$$



证明