概率论笔记

作者：肖程哲

时间：August 6, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

附录 A 基本数学工具

A.1 集合论与测度论

A.2 排列与组合

全部组合分析公式的推导基于下列两条原理：

乘法原理 若进行 A_1 过程有 n_l 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再接着进行 A_2 程共有 $n_1 \cdot n_2$ 种方法

加法原理 若进行 A_1 过程有 n_l 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，假定 A_1 过程与 A_2 过程是并行的，则进行过程 A_1 或过程 A_2 的方法共有 $n_1 + n_2$ 种

排列与组合的定义及其计算公式如下：

排列 从 n 个不同元素中任取 $r(r \leq n)$ 个元素排成一列 (考虑元素先后出现次序)，称此为一个排列，其总数记为 P_n^r。按乘法原理有：

$$P_n^r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r!)}$$

若 $r = n$，则称为全排列，记为 $_n$。显然，全排列 $P_n = n!$。

重复排列 从 n 个不同元素中每次取出一个，<u>放回后</u> 再取下一个，如此连续取 r 次所得的排列称为重复排列。此种重复排列数共有 n^r 个。

组合 从 n 个不同元素中任取 $r(r \leq n)$ 个元素并成一组 (不考虑元素间的先后次序)，称此为一个组合，其总数记为 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r。按乘法原理有：

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

在此规定 $0! = 1$ 与 $\binom{n}{0} = 1$.

重复组合 从 n 个不同元素中每次取出一个，<u>放回后</u> 再取下一个，如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合. 其总数为 $\binom{n+r-1}{r}$。注意这里的 r 也允许大于 n.

重复组合数的得出可如下考虑：将 n 个元素看作 n 个盒子，使用 $n+1$ 个插板区分（相邻两插板组成一个盒子），取 r 次视为往盒子中放入 r 个球。每种取法可视为将 $n-1$ 个插板（两头的不能动）与 r 个球进行放置。共有 $r+n-1$ 个位置，但只要其中的插板（或球）放置好后，球（或插板）的位置自然固定。所以其总数为 $\binom{n+r-1}{n-1}$（或 $\binom{n+r-1}{r}$，两者相同）。

	有序	无序
放回	重复排列 n^r	重复组合 $\binom{n+r-1}{r}$
不放回	排列 $\frac{n!}{(n-r!)}$	组合 $\binom{n}{r}$

定理 A.1 (牛顿二项式定理)

若对于任意实数 α 定义

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{A_r^{\alpha}}{r!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$$

则有牛顿二项式：

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^r$$

证明