概率论笔记

作者：肖程哲

时间：July 9, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 2 章 随机变量

内容提要

- 离散与连续随机变量
- 一元与多元
- cdf, pmf, pdf
- 条件分布
- 独立随机变量
- 随机变量函数的分布
- 次序随机变量

在概率论中, 主要关心 X 取值于数值集合 $\mathcal{X}$ 中某个子集 B 的可能性, 即希望得到 $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$. 概率论不关心具体的样本点 $\omega \in \Omega$, 将其记为 $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$. 由于 $\mathbb{P}$ 定义在 $\mathscr{F}$ 上, 故需 $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.

定义 2.1 (可测性)

设所有值得关心的 $B \subset \mathcal{X}$ 组成 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$, 且 $\forall B \in \mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 都满足 $\{X \in B\} \in \mathscr{F}$, 则称 X 为 $\mathscr{F}/\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ **可测的**. 当 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 不引起混淆时, 简记为关于 $\mathscr{F}$ **可测**, 写作 $X \in \mathscr{F}$.

由于原像保持交、并、补等集合运算, 且 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数, 可将 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 扩张为合适的最小的 σ 代数, 即 $\sigma(\mathscr{F}_{\mathcal{X}})$, 因此可测映射的定义不妨只考虑 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 是 σ 代数 的情况.

定义 2.2 (随机变量)

为了表示因随机性而变动的量, 称可测映射(measurable mapping)

$$X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{X}, \mathscr{F}_{\mathcal{X}}), \quad \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathcal{X}$$

为**随机元** (random element), 也称**随机变量** (random variable). 其中 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$

由于只考虑 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 是 σ 代数的情况, 可将随机变量看作将原概率空间映射到新概率空间的方式. 新样本空间由Borel 点集 构成, 对应的概率测度等于原像的.

注 使用随机变量 X 时, 有两个可能的含义:

- X 的 (随机) 取值
- X 的分布

定义 2.3 (离散与连续随机变量)

当 $\mathcal{X}$ 是 (至多可数的) 离散点集, $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 由 $\mathcal{X}$ 的所有子集组成, 则称其为**离散随机变量** (discrete random varible). 当随机变量 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, 考虑 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 为 $\left\{\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i] : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$ 生成的 Borel 代数 (最小的 σ 代数), 则称其为**连续随机变量** (continuous random varible).

2.1 随机变量的分布

定义 2.4

称随机元 X 诱导的概率测度

$$\mathbb{P}\{X \in \bullet\}, \bullet \in \mathscr{F}_{\mathcal{X}}$$

为 X 的**概率分布** (distribution/law)

注 对于随机变量, 他的取值是随机的, 但他的分布是固定的

定义 2.5 (单变量分布函数)

一个函数 $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ 称为一个单变量分布函数，当其满足以下性质时：

单调性 $F(x_1)\le F(x_2),\quad \forall x_1<x_2$

右连续性 $\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

有界性 $\lim_{n\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{n\to\infty}F(x)=1$

性质 $F(x)$ 最多只有可数个间断点

命题 2.1

对每个分布 $Q:\mathscr{B}_1\to[0,1]$ 都存在唯一一个分布函数 $F_Q:\mathbb{R}\to[0,1]$ 使得 $F_Q(x)=Q[(-\infty,x]],\quad \forall x\in\mathbb{R}$ 成立。

命题 2.2

对每个分布函数 $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ 都存在唯一一个分布 $Q_F:\mathscr{B}_1\to[0,1]$ 使得 $Q_F[(-\infty,x]]=F(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$ 成立。

定理 2.1

分布函数可以唯一决定概率分布, 即:

$$Q_{F_Q}=Q,\quad F_{Q_F}=F$$

把随机变量 X 服从分布函数 $F(x)$ 简记作 $X\sim F(x)$

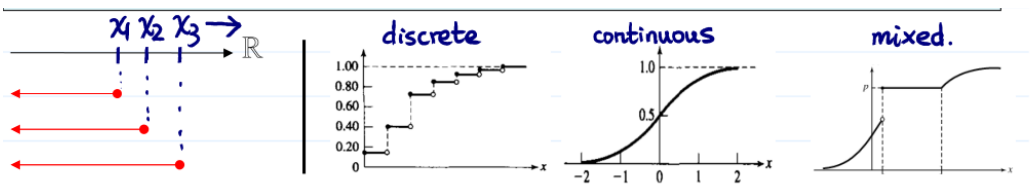
	离散	连续
一元随机变量	概率质量函数 (pmf)	概率密度函数 (pdf)
	累积分布函数 (cdf)	
	矩母函数/特征函数 (mgf/chf)	
多元随机变量	联合概率质量函数 (joint pmf)	联合概率密度函数 (joint pdf)
	联合累积分布函数 (joint cdf)	
	联合矩母函数/特征函数 (joint mgf/chf)	

定义 2.6 (累积分布函数)

此时 $X=(X_1,\ldots,X_n)^\top$ 的分布由 (累积) **分布函数** (cumulative distribution function, c.d.f.)

$$F_X(x_1,\ldots,x_n)=\mathbb{P}\{X_1\le x_1,\ldots,X_n\le x_n\},\quad x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}.$$

唯一刻画. 把随机变量 X 服从分布函数 $F(x)$ 简记作 $X\sim F(x)$



定义 2.7 (概率质量函数)

当且仅当函数 $p(x)$ 满足下述条件时, 被称为**概率质量函数** (probability mass function, p.m.f.):

- $p(x)\ge 0$
- $\sum_{x\in\mathcal{X}}p(x)=1$

当 X 是离散型随机变量, 设 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 由 $\mathcal{X}$ 的所有子集组成, 此时 X 的分布由

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}), \quad x \in \mathcal{X}$$

唯一刻画. 其与分布函数间的关系为:

- $F(x) = \sum_{t \le x} P(X = t) = \sum_{t \le x} p(t)$
- $p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-)$

定义 2.8 (概率密度函数)

当且仅当函数 $f(x)$ 满足下述条件时, 被称为**概率密度函数** (probability density function, p.d.f.):

- $f(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

♣

当 X 是连续型随机变量, 且 $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ 可微 (或者更一般地, 绝对连续), 此时 X 的分布由

$$f_X := \frac{\partial^n F_X}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

唯一刻画. 其与分布函数间的关系为:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

注 即使对于 $f(x) > 0$ 的 x, $P(X = x) = x \int_x^x f(t)dt = 0$, 即连续型随机变量在实轴上任意一点的概率测度为零. 概率密度函数 $f(x)$ 代表的是在此位置上单位长度的概率, 可能是一个很大的值.

2.2 多元随机变量

定义 2.9 (随机向量)

若随机变量 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上, 则称

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

构成一个 n 维**随机向量**，亦称 n 维随机变量.

♣

命题 2.3

若 B_n 为 $\mathbb{R}^n$ 上任一博雷尔点集，有

$$\{X(\omega) \in B_n\} \in \mathscr{F}$$

♠

定义 2.10

称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, X_n) = \mathbb{P}\{X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, \cdots, X_n(\omega) < x_n\}$$

为随机向量 $X(\omega)$ 的**联合分布函数** (joint cdf).

♣

当 $n = 2$ 时，有

$$\mathbb{P}((a_1, b_1) \le X < (a_2, b_2)) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \tag{2.1}$$

性质 多元分布函数的一些性质:

1. 单调性：关于每个变元是单调不减函数；

2.

$$F(x_1, x_2, \cdots, -\infty, \cdots, X_n) = 0$$
$$F(+\infty, +\infty, \cdots, , +\infty) = 1$$

3. 关于每个变元右连续.
4. 在二元场合，还应该有：对任意 $a_1 < b, , a_2 < b_2$ ，都有

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$$

为保证2.1式中的概率的非负性，性质 4 是必须的，而且由性质 4 可以推出单调性，但存在着反例说明，由单调性并不能保证性质 4 的成立 (见习题 12)． 这是多元场合与一元场合的不同之处.

2.2.1 边际分布

定义 2.11

对于多维随机变量 X, 只考虑其中一个分量的分布时, 称其为 X 的**边际分布或边缘分布**. 对于分量 X_i, 其**边缘分布函数** (marginal cdf) 为:

$$F_{X_i}(x_i) = \mathbb{P}\{X_i \leq x_i\} = F(\infty, \cdots, x_i, \cdots, \infty)$$

♣

2.2.2 独立

定义 2.12 (独立随机变量)

若随机变量 $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ 联合分布函数可分解成各分量边缘分布函数的乘积, 即:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n), \quad \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$$

则称随机变量 X 各分量相互**独立**

♣

注 对于一般的多元随机变量, 其各分量边缘分布不足以描述联合分布的情况. 但若其各分量独立则可以.

定理 2.2

对于连续情况:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$
$$\Leftrightarrow f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

对于离散情况:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$
$$\Leftrightarrow p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$$

♡

定理 2.3

若随机变量 X, Y 独立, 则其变换 $Z = g(X), W = h(Y)$ 也独立.
泛化情况: 若随机向量 $\{X\}_n$ 各分类独立, 则其变换 $\{Y\}_n = g(\{X\}_n)$ 各分类也独立.

♡

2.2.3 条件分布

定义 2.13

对一切使 $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}>0$ 的 y_j, 称

$$p_{i|j}=P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\ldots \tag{2.2}$$

为给定 $Y=y_j$ 条件下 X 的条件分布列. 若 $p_X(x)=0$, 则定义其为 0.

设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$, 边际密度函数为 $p_X(x),p_Y(y)$.

在离散随机变量场合, 其条件分布函数为 $P(X\le x|Y=y)$. 但是, 因为连续随机变量取某个值的概率为零, 即 $P(Y=y)=0$, 所以无法用条件概率直接计算 $P(X\le x|Y=y)$, 一个很自然的想法是: 将 $P(X\le x|Y=y)$ 看成是 $h\to 0$ 时 $P(X\le x|y\le Y\le y+h)$ 的极限, 即

$$\begin{aligned}
P(X\le x|Y=y)&=\lim_{h\to 0}P(X\le x|y\le Y\le y+h)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{P(X\le x,y\le Y\le y+h)}{P(y\le Y\le y+h)}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+h}p(u,v)dvdu}{\int_{y}^{y+h}p_Y(v)dv}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left\{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p(u,v)dv\right\}du}{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p_Y(v)dv}.
\end{aligned}$$

当 $p_Y(y),p(x,y)$ 在 y 处连续时, 由积分中值定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p_Y(v)dv&=p_Y(y),\\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p(u,v)dv&=p(u,y).
\end{aligned}$$

所以

$$P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}du.$$

至此, 我们可以定义连续随机变量的条件分布如下.

定义 2.14

对一切使 $p_Y(y)>0$ 的 y, 给定 $Y=y$ 条件下 X 的**条件分布函数**和 **条件密度函数**分别为

$$F(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}du, \tag{2.3}$$

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}. \tag{2.4}$$

同理对一切使 $p_Y(y)>0$ 的 x, 给定 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数和条件密度函数分别为

$$F(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{p(x,v)}{p_X(x)}dv \tag{2.5}$$

$$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}. \tag{2.6}$$

注 对于每一个<u>固定的 x</u>, $p_{Y|X}(y|x)$ 是一个关于 y 的概率质量函数; $f_{Y|X}(y|x)$ 是一个关于 y 的概率密度函数

与概率三定理的对应:

乘法法则 $p_{XY}(x,y)=p_{Y|X}(y|x)p_X(x),\quad f_{XY}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

全概率公式 $p_Y(y)=\sum_x p_{Y|X}(y|x)p_X(x),\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$

Bayes 原理 $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{\sum_x p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}$, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}$

2.3 随机变量的函数

在统计学中，常需要转化原始数据以获取其中信息, 由此引出了研究随机变量的函数的需要.

定理 2.4 (事件法)

设 $Y = g(X)$ 是随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的函数, 则 Y 的分布由 X 的分布通过下式决定:

$$\mathbb{P}\{Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in A\}, \quad A = \{\omega | g(\omega) \in B\}$$

此法是其他方法的基础, 但使用不便, 常用于离散随机变量.

例题 2.1 已知随机变量 X, Y 的联合概率质量函数为 $p(x, y)$, 求 $Z = X + Y$ 的分布

$$p_Z = P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p(x, z - x)$$

若 X, Y 独立, 则 $p_Z(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z - x)dx$, 为 p_X 与 p_Y 的卷积

2.3.1 分布函数法

通过下式获取随机变量的函数的分布:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \int_{A_y} f_X(x)dx \\ \sum_{x \in A_y} p_X(x) \end{cases}, \quad A_y = \{x | g(x) \leq y\}$$

对每一个变换分别运用上式则可得到向量函数的分布.

例题 2.2 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)$ 与分布函数 $F_X(x)$, 求 $Y = X^2$ 的分布

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) + P(X = \sqrt{y} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})) + 0 \quad y \geq 0$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y}) \\ &= f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y})\frac{-1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) \end{aligned}$$

例题 2.3 已知随机变量 X, Y 的联合概率密度函数 $f(x, y)$, 求 $Z = X + Y$ 的分布

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) + P(X = \sqrt{y} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})) + 0 \quad y \geq 0$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leq z) &= P(X + Y \leq z) \\ &= \iint_{x+y\leq z} f(x, y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v - x)dxdv, \quad y = v - x \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$$

若 X, Y 独立, 则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$, 为 f_X 与 f_Y 的卷积, 与2.1类似

例题 2.4 已知随机变量 X, Y 的联合概率密度函数 $f(x,y)$, 求 $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布

$$Q_z = \{(x,y) : y/x \le z\} = \{(x,y) : x < 0, y \ge zx\} \cup \{(x,y) : x > 0, y \le zx\}$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{Q_z} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{0}\int_{xz}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{xz} f(x,y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xv)dvdx \quad (\text{set} y = xv) \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xv)dvdx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xv)dvdx \\ &= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x,xv)dxdv \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x,xz)dx$$

2.3.2 Copula

定义 2.15

设连续型 实值随机变量 X 有分布函数 F, 易见 F 在 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ 上从 0 递增到 1. 定义相应的**分位数函数** (quantile function) 为

$$F^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge p\}, \quad p \in [0,1].$$

注 当 F 严格递增时, 这与一般的反函数定义相同.

定理 2.5

设连续型 实值随机变量 X 有分布函数 F, 则 $F(X) \sim \text{Uniform}([0,1])$

证明

$$\mathbb{P}\{F(X) \le p\} = \mathbb{P}\{X \le F^{-1}(p)\} = F(F^{-1}(p)) = p, \quad \forall p \in [0,1].$$

定理 2.6

设连续型 实值随机变量 X 有分布函数 F, 且设 $U \sim \text{Uniform}([0,1])$, 则 $F^{-1}(U) \overset{d}{=} X$, 其中 $\overset{d}{=}$ 表示分布相同 (equal in distribution).

定理 2.7 (Sklar 定理)

考虑多个连续型 实值随机变量 $X_1, \ldots, X_k$, 记 X_i 的分布函数为 F_i. 我们称 $(F_1(X_1), \ldots, F_k(X_k))$ 的分布函数 $C : [0,1]^k \to [0,1]$ 为相应的 **Copula**, 适合

$$C(F_1(x_1), \ldots, F_k(x_k)) = \mathbb{P}\{X_1 \le x_1, \ldots, X_k \le x_k\}, \quad \forall x_1, \ldots, x_k$$

这个结果称为 **Sklar 定理**

这个结果, 在金融统计中有颇多应用. 稍作诠释的话, Copula 提取了变量间的相关性, 通过粘合边际能够恰好地表示总体. 人们可以构造各种各样的 Copula, 对真实世界进行建模.

2.3.3 概率密度函数法

定理 2.8

设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$. 令 $Y = g(X)$, 其中 g 为可微函数, 且严格单调, 则当 $y = g(x)$ 有定义时:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

否则为 0

若 g 为分段单调函数, 则分段 计算上是结果, 再进行相加

定理 2.9

设连续随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数为 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. 令 $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$, 其中 $\mathbf{g}$ 为双射, 定义其逆函数为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}(\mathbf{y})$$

若 $\mathbf{w}$ 存在连续偏导数, 则当 $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ 有定义时:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})) \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} \right|$$

否则为 0

注 若 $\mathbf{Y}$ 的维数 k 小于 $\mathbf{X}$ 的维数 n, 可增补 $n-k$ 维的函数 $\mathbf{Z} = \mathbf{h}(\mathbf{X})$, 使得 $(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ 满足条件, 再通过积分获取 $\mathbf{Y}$ 的概率密度函数.

例题 2.5 已知随机变量 X_1, X_2 的联合概率密度函数 $f(x_1, x_2)$, 求 $Y_1 = \frac{X_2}{X_1}$ 的分布

令 $Y_2 = X_1$, 则:

$$x_1 = y_2 \equiv w_1(y_1, y_2)$$
$$x_2 = y_1 y_2 \equiv w_2(y_1, y_2)$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial w_1}{\partial y_2} = 1, \frac{\partial w_2}{\partial y_1} = y_2, \frac{\partial w_2}{\partial y_2} = y_1$$
$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = -y_2$$

所以:

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1X_2}(y_2, y_1y_2)\,|y_2|$$
$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(y_2, y_1y_2)\,|y_2|\,dy_2$$

2.3.4 矩母函数法

2.3.5 次序统计量

定义 2.16

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为随机变量, 将其按大小排序后记为 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$, 则将 $x_{(i)}$ 称为该样本的第 i 个**次序统计量**. 其中

- **最小次序统计量**定义为:$X_{(1)} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$
- **最大次序统计量**定义为:$X_{(n)} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$
- **极差**定义为:$R = X_{(n)} - X_{(1)}$
- 第 i 个**间差**定义为:$S_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$

注 虽然 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立, 但其次序统计量一般不独立

例题 2.6 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布, 求 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的分布

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) \\ &= P(X_1 \le x) \cdots P(X_n \le x) \\ &= [F(x)]^n \\ f_{X_{(n)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) \\ &= n f(x) [F(x)]^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) \\ &= P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x) \\ &= [1 - F(x)]^n \\ f_{X_{(1)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) \\ &= n f(x) [1 - F(x)]^{n-1} \end{aligned}$$

定理 2.10

第 i 个**次序统计量**的概率密度函数为:

$$f_{X_{(k)}} = C(n; 1, k-1, n-k) f(x) [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k}$$

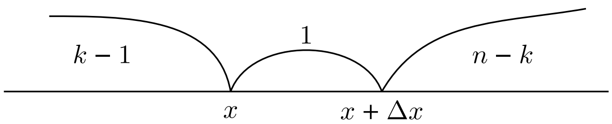


图 2.1: $X_{(k)}$ 取值的示意图

定理 2.11

次序统计量 $(x_{(i)}, x_{(j)})(i < j)$ 的联合分布密度函数为

$$\begin{aligned} p_{ij}(y, z) = &\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(y)]^{i-1} [F(z) - F(y)]^{j-i-1} \\ &\cdot [1 - F(z)]^{n-j} p(y) p(z), \quad y \le z, \end{aligned}$$

证明 对正 $\Delta y, \Delta z$ 以及 $y < z$, 事件 “$x_{(i)} \in (y, y+\Delta y], x_{(j)} \in (z, z+\Delta z]$” 可以表示为 “容量为 n 的样本 $x_1, \ldots, x_n$ 中有 $i-1$ 个观测值小于等于 y, 一个落入区间 $(y, y+\Delta y]$, $j-i-1$ 个落入区间 $(y+\Delta y, z]$, 一个落入区间 $(z, z+\Delta z]$, 而余下 $n-j$ 个大于 $z+\Delta z$”(见图 2.2).

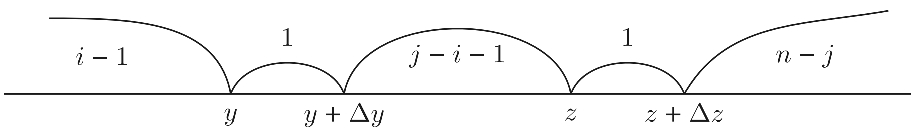


图 2.2: $x_{(i)}$ 与 $x_{(j)}$ 取值的示意图

例题 2.7 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布, 求 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的分布

$$f_{X_{(1)} X_{(n)}}(s, t) = n(n-1) f(s) f(t) [F(t) - F(s)]^{n-2} \mathbb{I}(s \le t)$$

$$f_R(r) = \mathbb{I}(r > 0) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{(1)}X_{(n)}}(s, s + r) ds$$