概率论笔记

作者：肖程哲

时间：July 1, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 1 章 概率基础

内容提要

- 事件
- 古典概型与几何概率
- 条件概率与独立
- 乘法法则
- 全概率公式
- Bayes 法则

1.1 概率空间

定义 1.1 (样本空间)

随机试验可能出现的结果称为**样本点** (sample point)，用 ω 表示。样本的全体构成**样本空间** (sample space)，用 Ω 表示。

定义 1.2 (事件的古典定义)

样本点 ω 的集合称为**事件** (event)。

我们关心的随机现象被抽象为集合, 逻辑运算 (且, 或, 非, etc.) 对应成集合论运算 (交, 并, 补, etc.)。

性质 集合的运算性质:

交换律 $A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$

分配律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{1.1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1.2}$$

对偶律 (De Morgan's laws)

$$\text{事件并的对立等于对立的交:} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.3}$$

$$\text{事件交的对立等于对立的并:} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.4}$$

为方便概率的定义，并不把 Ω 的一切子集作为事件，应避免不可测集的出现。

定义 1.3

事件构成的全体称为**事件域** $\mathscr{F}$，是 Ω 的子集族 (collection of subsets)，应满足 σ 代数 的要求：

- $\Omega \in \mathscr{F}$, 样本空间的整体可作为一个事件;
- $A \in \mathscr{F} \implies A^{\complement} \in \mathscr{F}$, 即 $\mathscr{F}$ 对补集运算 (逻辑上的非) 封闭;
- $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$, 即 $\mathscr{F}$ 对可数交运算 (逻辑上的可数多个且) 封闭.

笔记 可数性是为了在数学上能够恰当地处理无穷 的概念, 术语中的 σ 指的就是可数并。由对偶原理可得 σ 域同时对可数并运算封闭. 即 σ 域对逆, 并, 交, 差的可数次运算封闭.

事件域根据问题的不同要求适当选取, 在概率定义没有困难时, 应尽量选大, 通常以 Ω 的一切子集作为事件域. 当 Ω 给定后, 若某些子集必须作为事件处理, 能否找到包含他们的 σ 域?

命题 1.1

若给定 Ω 的一个非空集族 $\mathscr{G}$, 必存在 Ω 上唯一的 σ 域 $\mathfrak{m}(\mathscr{G})$, 满足下列性质:

- 包含 $\mathscr{G}$
- 若其他 σ 域包含 $\mathscr{G}$, 则必包含 $\mathfrak{m}(\mathscr{G})$

这个 $\mathfrak{m}(\mathscr{G})$ 称为包含 $\mathscr{G}$ 的最小 σ 域, 或由 $\mathscr{G}$ 产生的 σ 域.

证明 由于 Σ 的一切子集构成的集类包含 $\mathscr{G}$, 所以 $\mathfrak{m}$ 存在. 再取 Σ 上满足此条件的 σ 域之交作为 $\mathfrak{m}(\mathscr{G})$ 即可.

定义 1.4

设 $\mathbb{R}^1$ 为全集, 形为 $[a,b)$ 构成的集类产生的 σ 域称为**一维 Borelσ 域**, 记为 $\mathscr{B}_1$, 其中的元素称为**一维 Borel 集**

若 x,y 为任意实数, 由于:

$$\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x,x+\frac{1}{n}\right)$$

$$(x,y)=[x,y)-\{x\}$$

$$[x,y]=[x,y)+\{y\}$$

$$(x,y]=[x,y)+\{y\}-\{x\}$$

因此 $\mathscr{B}_1$ 包含一切开区间, 闭区间, 单个实数, 可列个实数, 以及他们经可列次逆, 并, 交, 差运算的集合.

定义 1.5

定义在事件域上的集合函数 $P:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 称为**概率**的条件是:

非负性 $P(A)\geq 0,\forall A\in\mathscr{F}$

规范性 $P(\Omega)=1$; (如果没有这条就是一般的有限测度)

可列可加性 若 $A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\mathscr{F}$ 两两不交, 即 $A_i\cap A_j=\emptyset$, $\forall i\neq j$, 则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

我们称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个**概率空间** (probability space)

推论 1.1

$P(\bar{A})=1-P(A)$

推论 1.2

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推论 1.3

$$P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)=\sum_{i=1,\cdots,n}P\left(A_i\right)-\sum_{\substack{i<j\\ i,j=1,\cdots,n}}P\left(A_iA_j\right)$$
$$+\sum_{\substack{i<j<k\\ i,j,k=1,\cdots,n}}P\left(A_iA_jA_k\right)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)$$

特别地, 若事件出现个数相同时概率相等, 则可简化为:

$$P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)=nP_1-\binom{n}{2}P_2+\binom{n}{3}P_3\cdots+(-1)^{n-1}P_n$$

1.2 古典概型与几何概率

1.3 条件概率

考虑正概率的事件 $A \in \mathscr{F}$, 称

$$P(\bullet|A) = P(\bullet \cap A)/P(A), \quad \bullet \in \mathscr{F}$$

为**条件于 A 的概率** (probability conditional on A), 这仍然是一个概率测度.

扩张, 或者称为*延拓*, 是数学中很重要的一个概念, 大抵是将某映射的定义域适当扩大, 不改变在初始定义域上的映射取值 (注意值域可能是比较抽象的集合, 配备了某些操作之后被称为空间), 同时在扩大后的定义域上仍然保持某些优良的性质. 与此相对的概念是*限制*, 即关心局部上可能更加漂亮的性质, 把初始的定义域适当缩小.

第 2 章 随机变量

2.1 随机变量的分布

2.2 随机变量的条件分布

2.3 随机变量的函数

第 3 章 随机变量的数值特征

3.1 期望与方差

3.2 矩母函数与特征函数

3.3 熵与信息

第 4 章 常见分布

4.1 离散分布

4.2 连续分布

4.3 正态分布及其导出分布

第 5 章 概率极限

5.1 收敛

5.2 大数定理

5.3 中央极限定理