概率论笔记

作者：肖程哲

时间：August 30, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 4 章 常见分布

考试重点

- ❑ 各分布的特征
- ❑ 各分布联系与转换
- ❑ 多维正态分布

4.1 离散分布

4.1.1 均匀分布

定义 4.1 (离散均匀分布)

若随机变量只能在 $a_1, \cdots, a_n$ 中取值，并且对应的概率相同，则称其遵循**均匀分布** (Uniform distribution)，记为 $X \sim U(a_1, \cdots, a_n)$。

注 此即古典概型。

离散均匀分布的特征：

参数 $a_i \in \mathbb{R}$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x = a_1, a_2, \cdots, a_n \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} e^{a_i t}}{m}$

均值 $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{m} = \overline{a}$

方差 $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (a_i - \overline{a})^2}{m}$

实例 丢一个均匀的骰子

4.1.2 两点分布

定义 4.2 (两点分布)

若随机变量只能取 0 或 1，并且对应的概率分别为 $1-p$ 与 p，则称其遵循**两点分布** (Bernouli distribution)（也称 0-1 分布、两点分布分布），记为 $X \sim B(1,p)$。

两点分布的特征：

参数 $p \in [0,1]$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0,1\} \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = pe^t + 1 - p$

均值 $\mu = p$

方差 $\sigma^2 = p(1-p)$

实例 丢一次硬币，p 代表某一面出现的概率

注 若 A 是一个事件，出现概率为 p_A，则指示随机变量 I_A（若 A 出现记为 1，否则为 0）遵循 Bernoulli 分布，即 $I_A \sim B(p_A)$

4.1.3 二项分布

定义 4.3 (二项分布)

若进行 n 次独立的 Bernoulli 实验（定义**??**）$X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1,p)$，则这些随机变量之和 $Y = X_1 + \cdots + X_n$ 遵循**二项分布** (binomial distribution)，记为 $Y \sim B(n,p)$。♣

二项分布的特征：

参数 $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}_+$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \mathbb{N}^n \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = (pe^t + 1 - p)^n$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（定理3.15）
- 定义

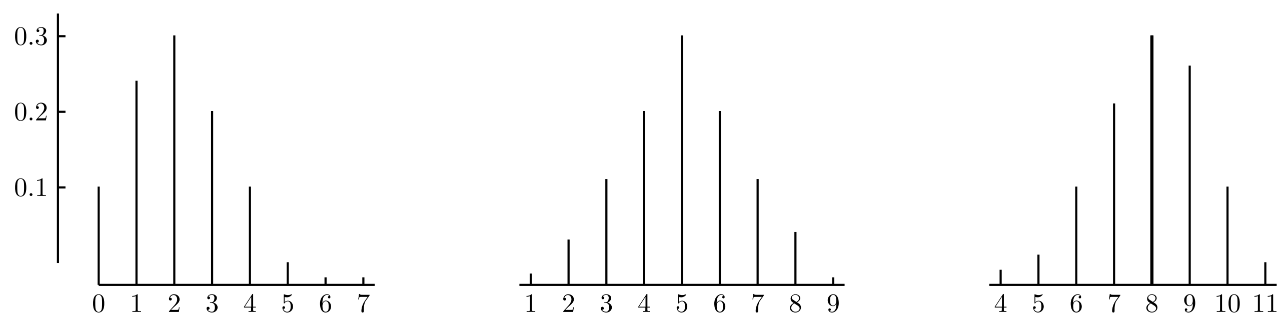
均值 $\mu = np$，求解方法有：

- 定义（例**??**）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 变量之和的均值等于各变量均值之和

方差 $\sigma^2 = np(1-p)$，求解方法有：

- 定义（例**??**）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 独立变量 之和的方差等于各变量均值之和

实例 丢 n 次硬币，p 代表某一面出现的概率，出现此面的次数



(a) $b(10,0,2)$ 的线条图 (右偏)　(b) $b(10,0,5)$ 的线条图 (对称)　(c) $b(10,0,8)$ 的线条图 (左偏)

图 4.1: 二项分布 $b(n,p)$ 的线条图

从上图可以看出：

- 位于均值 np 附近概率较大；
- 随着 p 的增加，分布的峰逐渐右移.

命题 4.1

二项分布之和仍是二项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim B(n_i,p)$，则 $Y = X_1+\cdots+X_k \sim B(n_1+\cdots+n_k,p)$

4.1.4 泊松分布

定理 4.1 (Poisson 逼近)

$$\lim_{np_n\to\lambda}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

证明 记 $np_n = \lambda_n$，记 $p_n = \lambda_n/n$，我们可得

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

对固定的 k 有

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = \lambda,\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

定义 4.4 (Poisson 分布)

若随机变量 X 的概率分布列满足以下形式：

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\in\mathbb{N}$$

则称其遵循 **Poisson 分布**，记为 $X \sim P(\lambda)$.

注 由定理1.1可看出，Poisson 分布可作为二项分布的近似。λ 的涵义

Poisson 分布的特征：

参数	$\lambda > 0$
概率质量函数	$p(k) = \begin{cases}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & x\in\mathbb{N}^n \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
矩母函数	$M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$，求解方法有： •利用公式 •凑一法
均值	$\mu = \lambda$
方差	$\sigma^2 = \lambda$
实例	公共汽车站来到的乘客数

命题 4.2

Poisson 分布之和仍是 Poisson 分布。若 $X_1 + \cdots + X_k \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P(\lambda_i)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim P(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)$

证明

$$M_Y(t) = \prod_i^k M_{X_i}(t) = \exp\{(e^t - 1)\sum_{i=1}^k \lambda_i\}$$

引理 4.1

若 $f(x)$ 是连续函数（或单调函数），且对一切 x, y（或一切 $x, y \geq 0$）成立：

$$f(x)f(y) = f(x + y)$$

则 $f(x)$ 为**指数函数**。

证明

$$\because f(1) = [f(\frac{1}{n})]^n$$

$$且 a = f(1) = [f(\frac{1}{2})]^2 \geq 0$$

$$\therefore f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore f(\frac{m}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^m = a^{\frac{m}{n}}$$

即此命题对一切有理数成立。又实数具有连续性，故此命题对一切实数成立。

定义 4.5 (泊松过程)

若某一随机过程满足以下特征，则称其为**泊松过程**：

平稳性 随机事件 A 在 $[t_0, t_0 + t)$ 中的发生次数只与时间间隔长度 t 有关而与时间起点 t_0 无关。将在长度为 t 的时间区间中发生 K 次事件 A 的概率记为 $P_k(t)$。

独立增量性 在 $[t_0, t_0 + t)$ 中发生 K 次事件 A 的概率与时刻 t_0 以前发生的事件独立。

普通性 在充分小的时间间隔中，最多发生一次事件 A。即，若记 $\psi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(t) = 1 - P_0(t) - P_1(t)$，则有 $\lim_{t\to0} \psi(t)/t = 0$

对 $\Delta t > O$，考虑 $[O, t + \Delta t)$ 中发生 K 次事件 A 的概率 $P_k(t + \Delta t)$，由独立增量性及全概率公式可得：

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)P_0(\Delta r) + P_{k-1}P_1(\Delta t) + \cdots + P_0(t)P_k(\Delta t), k \geq 0$$

（对 $n \geq 1$，假定 $P_{-n}(t) = 0$）

特别地

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

由引理1.1知

$$P_0(t) = a^t, a \geq 0$$

若 $a = O$，则 $P_0(t) \equiv 0$，说明在不管怎么短的时间间隔内事件 A 都发生，因此在有限时间间隔中将发生无穷多个次事件 A，这种情形不在我们的考虑之列。此外，因 $P_0(t)$ 是概率，故应有 $a \geq 1$，而当 $a = 1$ 时，$P_0(t) \equiv 1$，表明事件 A 永不发生，也不是我们感兴趣的情形，所以应有 $0 < a < 1$，从而存在 $\lambda > 0$，使

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

因此当 $\Delta t \to 0$ 时，有

$$P_0(\Delta t) = \mathrm{e}^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$
$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) - \psi(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$
$$\sum_{l=2}^{\infty} P_{k-l}(t)P_l(\Delta t) \leqslant \sum_{l=2}^{\infty} P_l(\Delta t) = \psi(\Delta t) = o(\Delta t)$$

所以：

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{k-1}\lambda\Delta t + o(\Delta t), k \geq 1$$

因此：

$$P_k'(t) = \frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \lambda[P_{k-1} - P_k(t)]$$

由于 $P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$，故有 $P_1'(t) = \lambda[\mathrm{e}^{-\lambda t} - P_1(t)]$，可解得 $P_0(t) = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$，依次可递推可解得：

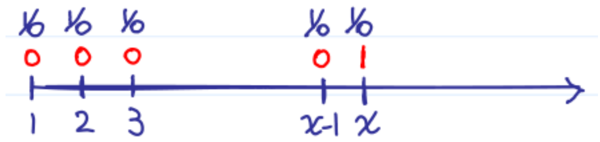
$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, k \in \mathbb{N}$$

正是参数为 λt 的泊松分布。

4.1.5 几何分布

定义 4.6

若进行无限次独立的 Bernouli 实验，则第一次出现“1”的实验次数遵循**几何分布** (geometric distribution)，记为 $X \sim G(p)$。♣



几何分布的特征：

参数 $p \in [0,1]$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x \in \mathbb{N}_+ \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.15）
- 定义

均值 $\mu = \frac{1}{p}$，求解方法有：

- $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$（定理??）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 定义（例??）

方差 $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$，求解方法有：

- 定义（例??）

•矩母函数在 $t=0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

实例 买彩票时，中奖所需购买张数。

命题 4.3

离散分布中有且只有几何分布具备无记忆性：

$$P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>n\},\quad \forall s>0,t>0$$

证明

$$\because P(X>n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(1-p)^k p=\frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}=(1-p)^n$$

$$\therefore P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>n\}=\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m}$$

$$=(1-p)^n=P\{X>n\}$$

即几何分布具备无记忆性。

设 X 是取正整数值的随机变量，满足：在已知 $X>k$ 的条件下，$X=k+1$ 的概率与 k 无关。令 $p=P\{X=k+1|X>k\}$，并记 $q_k=P\{X>k\}$，以及 $P_k=P\{X=k\}$，那么 $P_{k+1}=q_k-q_{k+1}$，且

$$p=\frac{p_{k+1}}{q_k}$$

即

$$\frac{q_{k+1}}{q_k}=1-p$$

注意到 $q_0=1$，那么 $q_k=(l-p)^k$，因此

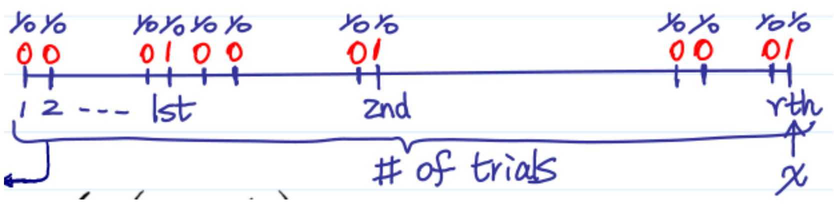
$$p_k=p(l-p)^{k-l},\quad k\in N_+$$

正是几何分布

4.1.6 负二项分布

定义 4.7

若进行无限次独立的 Bernouli 实验，则第 r 次出现“1”的实验次数遵循**负二项分布** (negative binomial distribution)，记为 $X\sim NB(r,p)$。



负二项分布的特征：

参数 $p\in[0,1]$

概率质量函数 $p(x)=\begin{cases}\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}p & x\in\mathbb{N}_r\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

矩母函数 $M(t)=\frac{p^r e^{rt}}{(1-(1-p)e^t)^r}, t<-\ln(1-p)$，求解方法有：

•独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.15）

- 定义凑一法
- 利用公式 $\sum_{x=0}^{\infty}\binom{n+x-1}{x}t^x = \frac{1}{(1-t)^n}, -1 < t < 1$

均值 $\mu = \frac{r}{p}$，求解方法有：

- 定义凑一法
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 独立几何分布之和 (定理1.4)

方差 $\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$，求解方法有：

- 定义（凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 独立几何分布之和 (定理1.4)

实例 买彩票时，中奖 r 次所需购买张数。

命题 4.4

几何分布之和是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_r$ 独立且 $X_i \sim G(p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_r \sim NB(r,p)$

证明

命题 4.5

负二项分布之和仍是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_k$ 独立且 $X_i \sim NB(r_i,p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim B(r_1 + \cdots + r_k, p)$

证明

4.1.7 多项分布

定义 4.8 (多项分布)

若进行 n 次独立的实验，每次实验有 r 种结果，每种结果对于概率分别为 $p_1,\cdots,p_r$。令 X_i 代表得出结果 i 的次数，则随机向量 $\mathbf{X} = (X_1,\cdots,X_r)$ 遵循**多项分布** (multinomial distribution)，记为 $\mathbf{X} \sim Multinomial(n,p_1,\cdots,p_r)$。

多项分布的特征：

参数 $p_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x_1\cdots x_r}p_1^{x_1}\cdots p_r^{x_r} & x \in \mathbb{N}^n \,\&\, \sum_{i=1}^{r} x_i = n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t_1,\cdots,t_r) = (p_1e^{t_1} + \cdots + p_re^{t_r})^n$，求解方法有：

- 利用公式
- 凑一法

边缘分布 $X_i \sim B(n,p_i)$

均值 $E(X_i) = np_i$

方差 $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$

协方差 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$，求解方法有：

- 矩母函数求解 $E(X_i X_j)$
- 凑一法求解 $E(X_i X_j)$

实例

注 多项分布是二项分布的泛化。

4.1.8 超几何分布

定义 4.9

设有 N 个产品，其中有 M 个不合格品. 若从中不放回地随机抽取 n 个，则其中含有的不合格品的个数 X 服从**超几何分布** (Hypergeometric distribution)，记为 $X \sim h(n, N, M)$

超几何分布的特征：

参数 $M, n \le N \quad n, N, M \in N_+$

概率质量函数 $p(k) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, & k = 0, 1, \cdots, r \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 存在，但没有简单的表达

均值 $\mu = n\frac{M}{N}$（利用凑一法，例**??**）

方差 $\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$

实例 从一个有限总体中进行不放回抽样

注 若 $\frac{n}{N} \to 0$ 时，$\frac{M}{N} \to p$，则超几何分布可近似为二项分布。

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad p = \frac{M}{N}$$

4.2 连续分布

4.2.1 均匀分布

定义 4.10

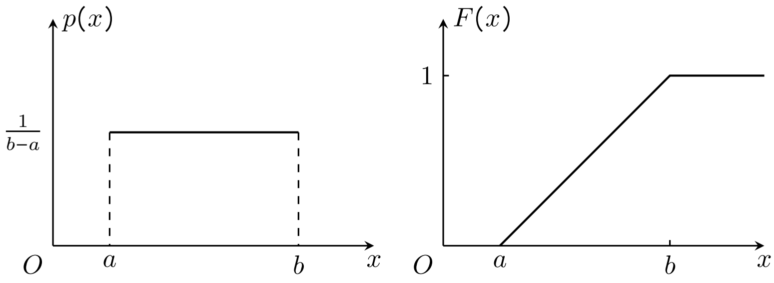
若随机变量 X 在 $[a, b]$ 中任一区域的概率与其测度成正比，则称 X 服从区间 (a, b) 上的**均匀分布** (Uniform distribution)，记作 $X \sim U(a, b)$。

均匀分布的特征：

参数 $a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

概率质量函数 $p(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{\{a<x<b\}}(x)$

分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$



(a) 密度函数 $p(x)$　　(b) 分布函数 $F(x)$

图 4.2: (a,b) 上的均匀分布

矩母函数　$M(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, \quad t \in \mathbb{R}$

均值　$\mu = \frac{a+b}{2}$

方差　$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

注 常利用 $U(0,1)$ 生成特定分布的伪随机数（参见定理2.6）

4.2.2 指数分布

定义 4.11

若随机变量 X 的密度函数（见图1.3）为

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}(x)$$

则称 X 服从**指数分布**（Exponential distribution），记作 $X \sim Exp(\lambda)$，其中参数 $\lambda > 0$。指数分布的分布函数为

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}(x)$$

♣

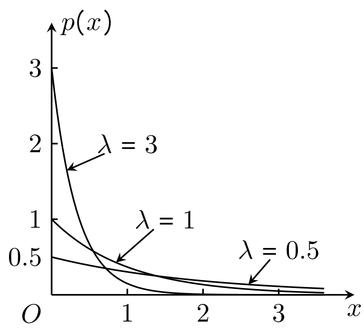


图 4.3: 参数为 λ 的指数分布密度函数

指数分布的特征：

矩母函数　$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}, \quad t < \lambda$

均值　$\mu = \frac{1}{\lambda}$

方差　$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

实例　物品使用寿命，等待时间

注 由其均值可看出，对于等待时间模型，$\frac{1}{\lambda}$ 代表平均等待时间，即（时间/次）；λ 代表平均发生频率，即（次/时

间）。

定理 4.2 (指数分布的无记忆性)

连续分布中，有且只有指数分布具备无记忆性：

$$P(X>s+t|X>s)=P(X>t),\quad \forall s>0,t>0$$

证明 由

$$P(X>s+t|X>s)=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}=P(X>t)$$

可知，指数分布具备无记忆性。

设 X 为非负随机变量，其分布函数为 $F(x)$，记 $G(x)=P\{X\geq x\}$。若其具备无记忆性，则 $G(s+t)=G(s)G(t)$。由于 $G(x)$ 是单调函数，有由引理1.1得，$G(x)$ 为指数函数：

$$G(x)=a^x,\ x\geq 0$$

由于 $G(x)$ 是概率，故 $0<a<1$，可以写成 $a=\mathrm{e}^{-\lambda}$，$\lambda>0$。因此

$$F(x)=1-G(x)=1-a=\mathrm{e}^{-\lambda x},\ x\geq 0$$

即 X 服从指数分布。

命题 4.6

如果某事件在任何长为 t 的时间 $[0,t]$ 内发生的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，则相继两次事件之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布。

证明 设 $N(t)\sim P(\lambda t)$，即

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad k=0,1,\cdots$$

注意到两次事件发生的时间间隔 T 是非负随机变量；且事件 $\{T\geq t\}$ 说明在 $[0,t]$ 内事件没有故障，即 $\{T\geq t\}=\{N(t)=0\}$，由此得

- 当 $t<0$ 时，有 $F_T(t)=P(T\leq t)=0$；
- 当 $t\geq 0$ 时，有 $F_T(t)=P(T\leq t)=1-P(T>t)=1-P\big(N(t)=0\big)=1-e^{-\lambda t}$

所以 $T\sim Exp(\lambda)$，相继两次事件之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布。

4.2.3 伽马分布

定义 4.12

称

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0$$

为**伽马函数** (gamma function)。

Gamma 函数的特征：

- $\Gamma(1)=1$
- $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\alpha+1)=(\alpha)\Gamma(\alpha)$（分部积分可证）
- $\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\in\mathbb{N}$
- $\Gamma(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{\pi}(\alpha-1)!}{2^{\alpha-1}(\frac{\alpha-1}{2})!},\quad \alpha=2k+1,k\in\mathbb{N}$

定义 4.13

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}(x)$$

则称 X 服从**伽玛分布**，记作 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，其中称 $\alpha > 0$ 为形状参数，$\lambda > 0$ 为尺度参数。

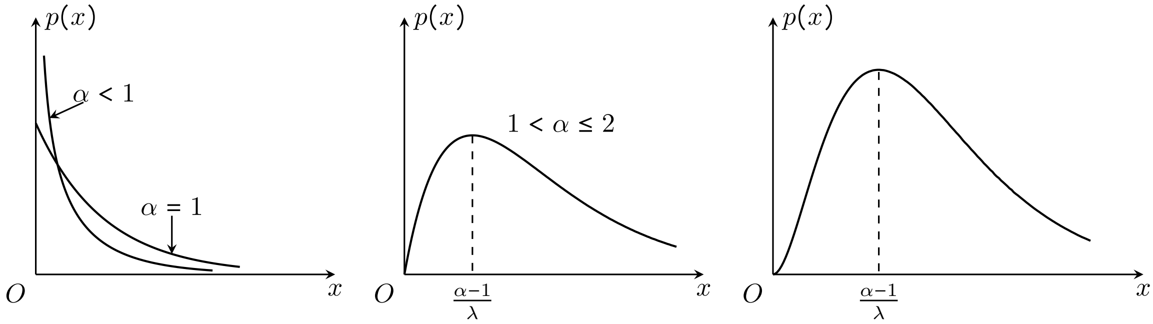


图 4.4: λ 固定、不同 α 的伽玛密度曲线

从图1.4中可以看出：

- $0 < \alpha < 1$ 时，$p(x)$ 是严格下降函数，且在 $x = 0$ 处有奇异点；
- $\alpha = 1$ 时，$p(x)$ 是严格下降函数，且在 $x = 0$ 处 $p(0) = \lambda$；
- $1 < \alpha \leq 2$，$p(x)$ 是单峰函数，向上凸、后下凸；
- $2 < \alpha$ 时，$p(x)$ 是单峰函数，先下凸、中间上凸、后下凸. 且 α 越大，$p(x)$ 越近似于正态分布.

Gamma 分布的特征：

矩母函数	$M(t) = (\frac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha, \quad t < \lambda$
均值	$\mu = \frac{\alpha}{\lambda}$
方差	$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

命题 4.7

Γ 分布是指数分布的泛化，即 $\Gamma(1, \lambda) = E(\lambda)$。进一步有：若随机变量 $X_1, \cdots, X_k, \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} E(\lambda)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$。更进一步有：若随机变量 $X_1', \cdots, X_k', \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \Gamma(\alpha_i, \lambda)$，则 $Y' = X_1' + \cdots + X_k' \sim \Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \lambda)$。

证明

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t_i) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\lambda - t} = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^k$$

$$M_{Y'}(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i'}(t_i) = \prod_{i=1}^{k} (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{\alpha_i} = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}$$

命题 4.8

若令随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则 $cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c}), \quad c > 0$

证明

$$M_{cX}(t) = M_X(ct) = (\frac{\lambda}{\lambda - ct})^\alpha = (\frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{\lambda}{c} - t})^\alpha$$

命题 4.9

若令随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $\mu_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}$， $0<k$，且则 $\mu_{-k} = \frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$， $0<k<\alpha$

证明

$$\mu_k = M_X^{(k)}(0) = \frac{1}{\lambda^k}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}$$

$$\mu_{-k} = M_X^{(-k)}(0) = \lambda^k\frac{1}{\alpha-1}\cdots\frac{1}{\alpha-k} = \frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$$

命题 4.10

4.2.4 贝塔分布

定义 4.14

称

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

为**贝塔函数**，其中参数 $a>0, b>0$.

命题 4.11

贝塔函数具有如下性质：

- $\beta(a,b) = \beta(b,a)$
- $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

证明 在贝塔函数的积分中令 $y = 1-x$，即得

$$\beta(a,b) = \int_1^0 (1-y)^{a-1}y^{b-1}(-\,\mathrm{d}y) = \int_0^1 (1-y)^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}y = \beta(b,a)$$

由伽玛函数的定义知

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

作变量变换 $x = uv, y = u(1-v)$，其雅可比行列式 $J = -u$，故

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^1\int_0^\infty (uv)^{a-1}[u(1-v)]^{b-1}\mathrm{e}^{-u}u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{+\infty} u^{a+b-1}\mathrm{e}^{-u}\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,\mathrm{d}v \\ &= \Gamma(a+b)\beta(a,b)\end{aligned}$$

定义 4.15

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{\{0<x<1\}}(x)$$

则称 X 服从**贝塔分布**，记作 $X \sim Be(a,b)$，其中 $a>0, b>0$ 都是形状参数。

从图 1.5 可以看出：

- $a<1, b<1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单峰函数.

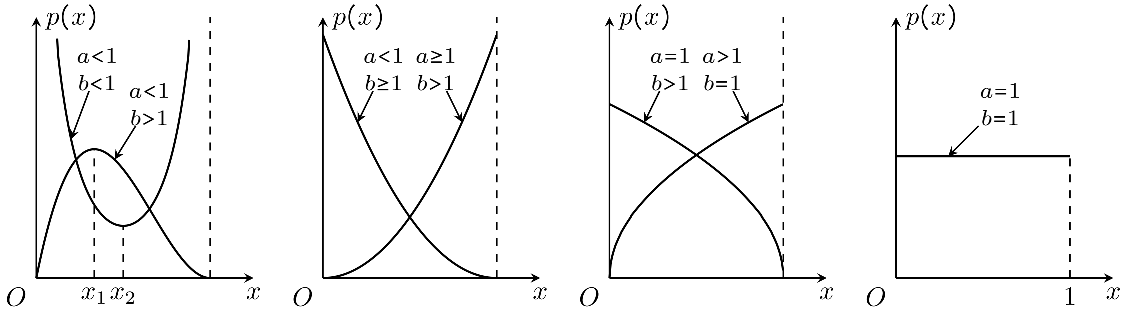


图 4.5: 贝塔密度函数曲线

- $a > 1, b > 1$ 时，$p(x)$ 是上凸的单峰函数.
- $a < 10, b \geq 1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单调减函数.
- $a \geq 1, b < 1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单调增函数.
- $a = 1, b = 1$ 时，$p(x)$ 是常函数，且$\underline{Be(1,1) = U(0,1)}$.

Beta 分布的特征：

矩母函数	$M(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{a+r}{a+b+r}\right)\frac{t^k}{k!}, \quad t < \lambda$
均值	$\mu = \frac{a}{a+b}$
方差	$\sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$
实例	不合格品率、机器的维修率、市场的占有率、射击的命中率等各种比率

命题 4.12

令独立随机变量 $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$，则 $\frac{X_1}{X_1+X_2} \sim \beta(\alpha_1, \alpha_2)$

证明

4.2.5 柯西分布

定义 4.16

若随机变量 X 的密度函数为

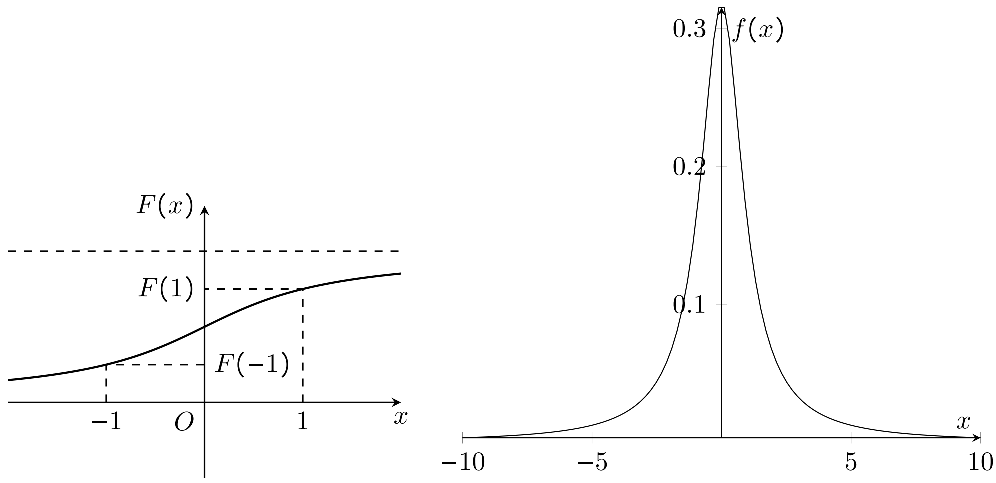
$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, x \in \mathbb{R}$$

则称 X 服从**柯西分布** (Cauchy distribution)，记作 $X \sim C(\mu, \sigma)$。其中参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$。

柯西分布的特征：

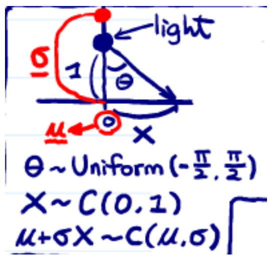
累积函数	$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\mu + \sigma x)$
矩母函数	除 $t = 0$ 外不存在
特征函数	$\phi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma\lvert t\rvert)$
均值	不存在
方差	不存在

注 此类因极端值概率密度较高而导致均值、方差不存在的分布称为重尾分布。



(a) 柯西分布累积函数 **(b)** 柯西分布密度函数

图 4.6: 柯西分布



命题 4.13

$C(0,1)=t_1$

命题 4.14

若随机变量 X,Y i.i.d. $\sim N(0,1)$，则 $\frac{X}{Y}\sim C(0,1)$

证明

命题 4.15

若随机变量 $X\sim C(\mu,\sigma)$，则其线性变换 $a,b\in\mathbb{R}, aX+b\sim C(a\mu+b,|a|\sigma)$。

证明

$$\phi_{aX+b}(t)=e^{ibt}\phi_X(at)=\exp(ibt+ia\mu t-\sigma|at|)$$

命题 4.16

若独立随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ 满足 $X_i\sim C(\mu_i,\sigma_i)$，则其和 $Y=X_1+\cdots+X_k\sim N(\sum_{i=1}^k\mu_i,\sum_{i=1}^k\sigma_i)$

证明

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}=\prod_{i=1}^n\phi_{X_i}(t)=\exp(it\sum_{i=1}^k\mu_i-|t|\sum_{i=1}^k\sigma_i)$$

推论 4.1

若随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$，则其平均 $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_k)/k\sim C(\mu,\sigma)$

注 此处的 σ 不代表方差，所以不遵守 $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{k}$ 的关系。

4.3 正态分布及其导出分布

4.3.1 正态分布

定义 4.17

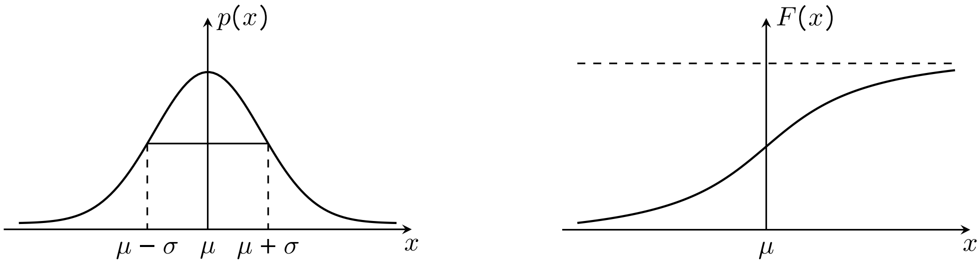
若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}$$

则称 X 服从**正态分布** (Normal distribution)，记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。其中参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$。特别地，将 $N(0,1)$ 称为**标准正态分布** (standard Normal distribution)，其密度函数记为 $\varphi(x)$，分布函数记为 $\Phi(x)$。

正态分布的密度函数 $f(x)$ 的图形如图1.7(a) 所示，是一条钟形曲线，左右关于 μ 对称，衰减速度由 σ 决定，$\mu \pm \sigma$ 是该曲线的拐点。

- 如果固定 σ，改变 μ 的值，则图形沿 x 轴平移，而不改变其形状，即正态密度函数的位置由参数 μ 所确定，因此亦称 μ 为**位置参数**。
- 如果固定 μ，改变 σ 的值，则 σ 愈小，曲线呈高而瘦；σ 愈大，曲线呈矮而胖，即正态密度函数的尺度由参数 σ 所确定，因此称 σ 为**尺度参数**。



(a) 密度函数 $f(x)$ (b) 分布函数 $F(x)$

图 4.7: 正态分布

正态分布的特征：

矩母函数	$M(t) = \exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}),\quad t \in \mathbb{R}$
均值	$\mu = \mu$
方差	$\sigma^2 = \sigma^2$

命题 4.17

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则其线性变换 $a, b \in \mathbb{R}, aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$。特别的，常对正态随机变量作标准化：$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

证明

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) = \exp(bt + a\mu t + \frac{a^2\sigma^2 t^2}{2})$$

命题 4.18

若独立随机变量 $X_1, \cdots, X_k$ 满足 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，则其和 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim N(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2)$

证明

$$M_{X_1+\cdots+X_n}=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)=\exp(\sum_{i=1}^{k}\mu_i t+\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma_i^2t^2}{2})$$

推论 4.2

若随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ i. i. d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$，则其平均 $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_k)/k\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{k})$

定理 4.3

若随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ i. i. d $\sim N(\mu,\sigma^2)$，并且定义其样本均值为 $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，其样本方差为 $S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2$，则有以下关系：

1. $\overline{X_n}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，即 $\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)/\sigma\sim N(0,1)$
2. 随机变量 $\overline{X_n}$ 与随机向量 $(X_1-\overline{X_n},\cdots,X_n-\overline{X_n})$ 独立
3. $\overline{X_n},S_n^2$ 独立
4. $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma}\sim\chi_n$
5. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)}{S_n}\sim t_{n-1}$

证明

4.3.2 卡方分布

定义 4.18

设 $Z_1,...,Z_n$ 独立同分布于标准正态分布 $N(0,1)$，则 $X=Z_1^2+...+Z_n^2$ 的分布称为 n **自由度的卡方分布** (Chi-square distribution)，记为 $X\sim\chi_n^2$.

卡方分布的特征：

参数	$n\in\mathbb{N}_+$
概率密度函数	$p(x)=\begin{cases}\frac{(1/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}y^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
矩母函数	$M(t)=(\frac{1}{1-2t})^{\frac{n}{2}}$
均值	$\mu=n$
方差	$\sigma^2=2n$
实例	

该密度函数的图像是一个只取非负值的偏态分布, 见图 1.8。

命题 4.19

若 $X\sim N(0,1)$，则 $X^2\sim Ga(1/2,1/2),Y\sim Ga(n/2,1/2)=\chi^2(n)$

证明

推论 4.3

若随机变量 $X_1,\cdots,X_k$, i. i. d. $\sim\chi_{n_i}^2$，则 $Y=X_1+\cdots+X_k\sim\chi_{n_1+\cdots+n_k}^2$。

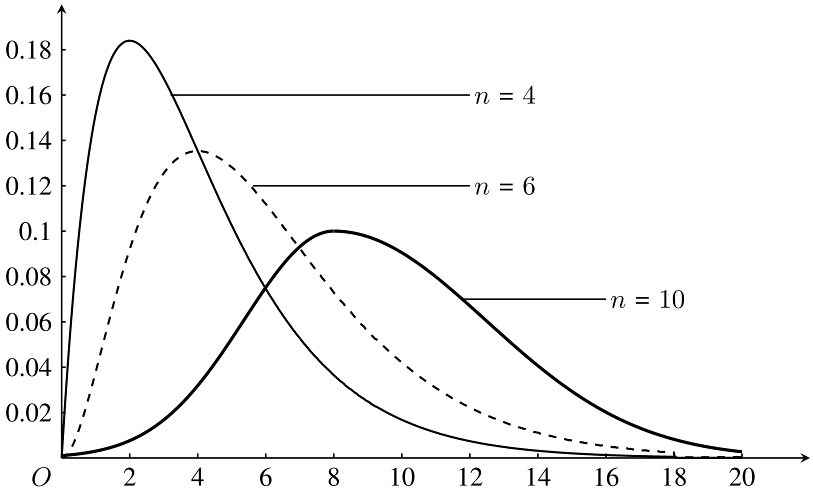


图 4.8: $\chi^2(n)$ 分布的密度函数

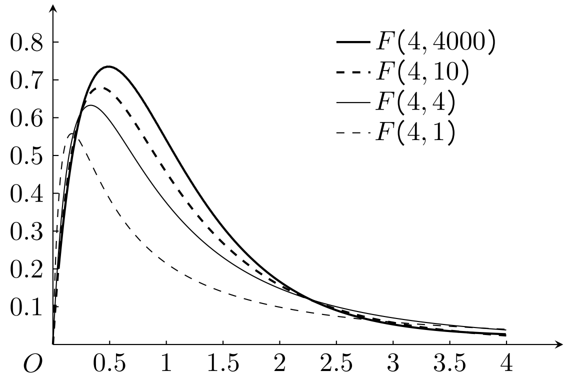


图 4.9: F 分布的密度函数，是一个只取非负值的偏态分布

4.3.3 F 分布

定义 4.19

设独立随机变量 $X_1 \sim \chi^2(m), X_2 \sim \chi^2(n)$，则称 $F = \frac{X_1/m}{X_2/n}$ 的分布是自由度为 m 与 n 的 **F 分布**，记为 $F \sim F(m,n)$，其中 m 称为分子自由度，n 称为分母自由度。♣

F 分布的特征：

参数 $m, n \in \mathbb{N}_+$

概率密度函数

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

矩母函数 不存在

均值 $\mu = \frac{n}{n-2}$

方差 $\sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

实例

命题 4.20

F 分布的密度函数为

证明 首先我们导出 $Z=\frac{X_1}{X_2}$ 的密度函数，若记 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 分别为 $\chi^2(m)$ 和 $\chi^2(n)$ 的密度函数，根据独立随机变量商的分布的密度函数公式2.4。Z 的密度函数为

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_0^{=\infty} x_2 p_1(zx_2)p_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}}\int_0^{+\infty} x_2^{\frac{m+n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{2}(1+z)}\,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}
$$

运用变换 $u=\frac{x_2}{2}(1+z)$，可得

$$
p_Z(z)=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} u^{\frac{m+n}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.
$$

最后的定积分为伽马函数 $\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$，从而

$$
p_Z(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}},\quad z>0.
$$

第二步，我们导出 $F=\frac{n}{m}Z$ 的密度函数，对 $y>0$，有

$$
\begin{aligned}
p_F(y) &= p_Z\left(\frac{m}{n}y\right)\cdot\frac{m}{n} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}y\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}\cdot\frac{m}{n} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}.
\end{aligned}
$$

注 由 F 分布的构造知，若 $F\sim F(m,n)$，则有 $1/F\sim F(n,m)$

4.3.4 t 分布

定义 4.20

设随机变量 $Z\sim N(0,1)$ 与 $U\sim\chi_n^2$ 独立，则称 $t=\frac{Z}{\sqrt{U/n}}$ 的分布为自由度为 n 的 **t 分布**，记为 $t\sim t_n$.

t 分布的密度函数的图像是一个关于纵轴对称的分布 (图 **??**)，与标准正态分布的密度函数形状类似，只是峰比标准正态分布低一些，尾部的概率比标准正态分布的大一些.

t 分布的特征：

参数	$n\in\mathbb{N}_+$
概率密度函数	$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
矩母函数	不存在
均值	$\mu=0,n>1$
方差	$\sigma^2=\frac{n}{n-2},n>2$
实例	

注

- 自由度 $n=1$ 的 t 分布就是标准柯西分布，它的均值不存在;

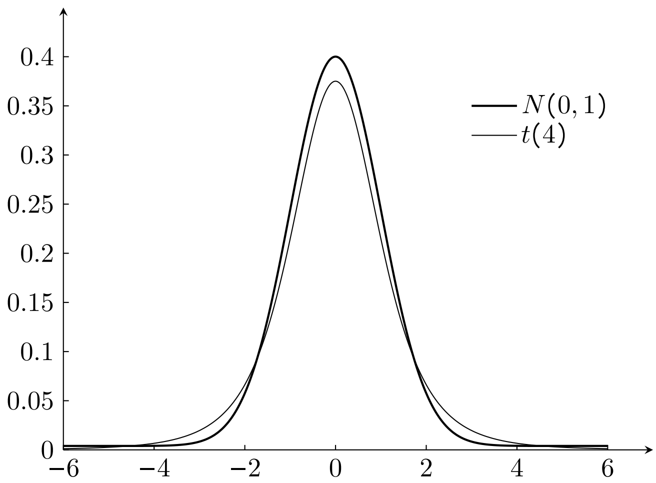


图 4.10: t 分布与 $N(0,1)$ 的密度函数，t 分布尾更重

- 自由度 $n \to \infty$ 时，t_n 趋近于 $N(0,1)$

命题 4.21

t 分布的密度函数为

证明 由标准正态密度函数的对称性知, X_1 与 $-X_1$ 有相同分布, 从而 t 与 $-t$ 有相同分布. 这意味着: 对任意实数 y 有

$$P(0<t<y)=P(-y<-t<y)=P(-y<-t<0).$$

于是

$$P(0<t<y)=\frac{1}{2}P(t^2<y^2).$$

由 F 变量构造可知, $t^2=\frac{X_1^2}{X_2^2/n}\sim F(1,n)$, 将上式两边关于 y 求导可微 t 分布的密度函数为

$$\begin{aligned}
p_t(y)=yp_F(y^2)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+\frac{1}{n}y^2\right)^{-\frac{1+n}{2}}y\\
&=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<y<+\infty.
\end{aligned}$$

4.4 各分布间关系

可参考网站http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html

若每隔 At 进行一次试验，则伯努利试验也可以看作一个随时间而变化的过程. 在伯努利试验中，到时刻 nat 为止，共进行 n 次试验，这时成功次数服从二项分布. 而在泊松过程中，到时刻 t 的来到数则服从泊松分布为等待第一次成功，伯努利试验中的等待时间服从几何分布；而泊松过程中则服从指数分布. 它们都有无记忆性. 为等待第 r 次成功，伯努利试验中的等待时间服从帕斯卡分布；而泊松过程中则服从埃尔朗分布.

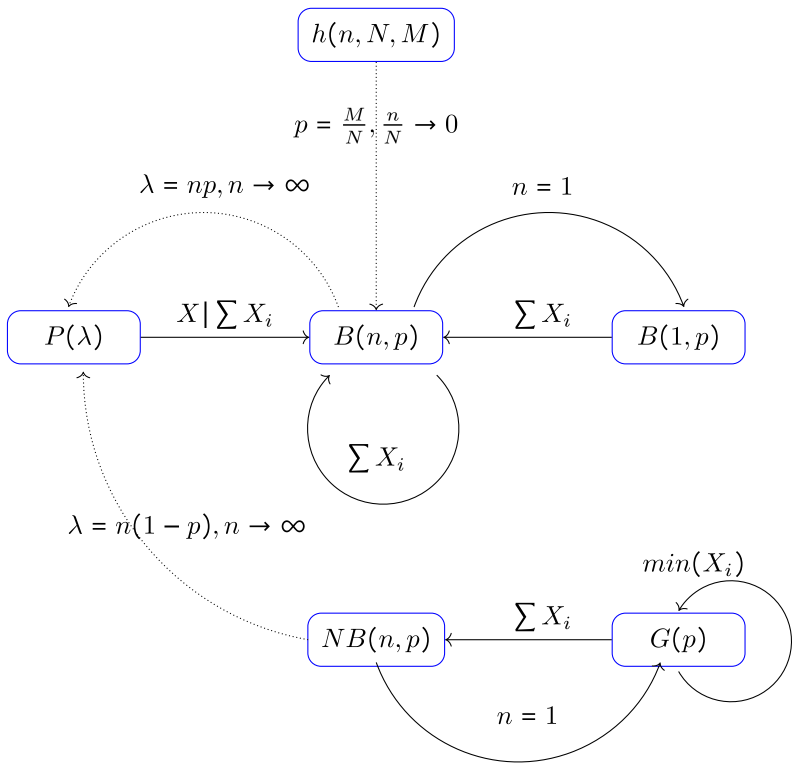


图 4.11: 离散分布间的关系

离散时间	连续时间
几何分布	指数分布
负二项分布	伽马分布
二项分布	泊松分布

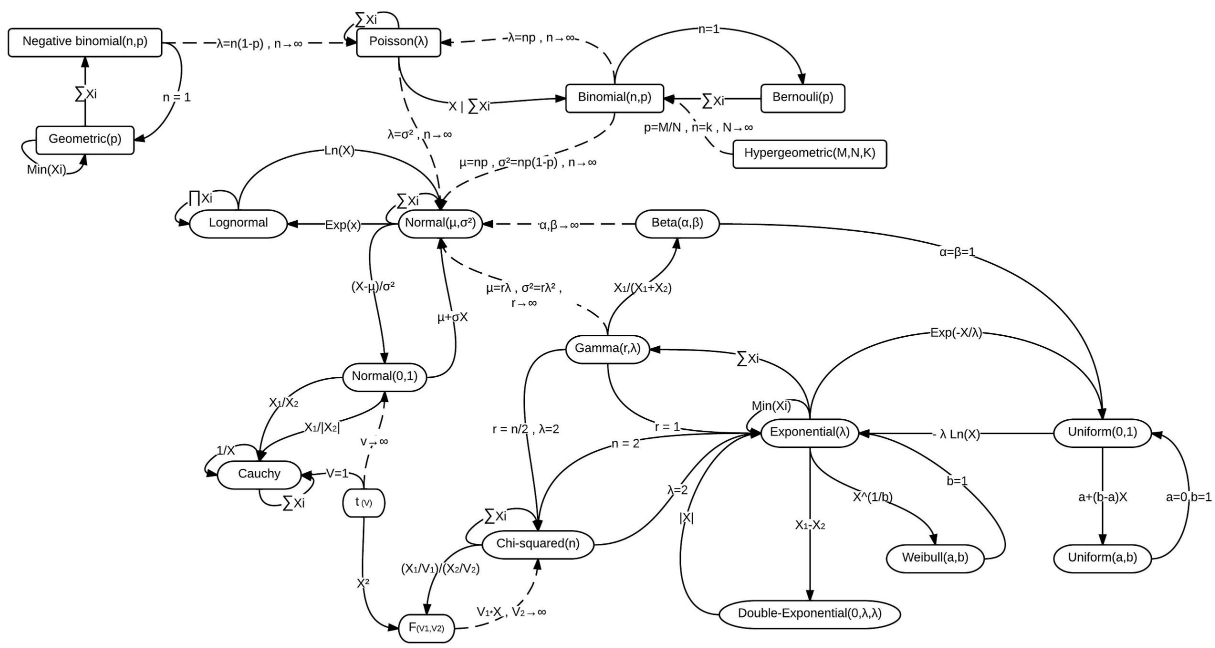


图 4.12: 各分布间的联系

错题记录

1. （茆 2.4.9）已知某商场一天来的顾客数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，而每个来到商场的顾客购物的概率为 p，证明：此商场一天内购物的顾客数服从参数为 λp 的泊松分布.
2. （茆 2.5.8）统计调查表明，英格兰在 1875 年至 1951 年期间，在矿山发生 10 人或 10 人以上死亡的两次事故之间的时间 T（以日计）服从均值为 241 的指数分布，试求 $P(50 < T < 100)$.
3.