概率论笔记

作者：肖程哲

时间：August 4, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 1 章 概率基础 **1**
- 1.1 概率空间 1
  - 1.1.1 随机事件 1
  - 1.1.2 概率的性质 3
- 1.2 古典概型与几何概型 4
  - 1.2.1 古典概型 4
  - 1.2.2 几何概型 5
  - 1.2.3 Bertrand 奇论 7
- 1.3 条件概率 7
- 1.4 独立性 10

第 2 章 随机变量 **12**
- 2.1 随机变量的分布 12
- 2.2 多元随机变量 14
  - 2.2.1 边际分布 15
  - 2.2.2 条件分布 15
  - 2.2.3 独立 16
- 2.3 随机变量的函数 16
  - 2.3.1 分布函数法 17
  - 2.3.2 Copula 18
  - 2.3.3 概率密度函数法 19
  - 2.3.4 矩母函数法 20
  - 2.3.5 次序统计量 20

第 3 章 随机变量的数值特征 **22**
- 3.1 期望 22
  - 3.1.1 均值 22
  - 3.1.2 方差 23
  - 3.1.3 协方差 24
  - 3.1.4 条件期望 25
- 3.2 矩母函数与特征函数 26
  - 3.2.1 矩 26
  - 3.2.2 矩母函数 27
  - 3.2.3 联合特征函数 28
  - 3.2.4 特征函数 28
- 3.3 估计与预测 29
  - 3.3.1 delta 法 29
  - 3.3.2 预测 29
- 3.4 熵与信息 29
- 3.5 其他特征 29

第 4 章 常见分布 **30**
- 4.1 离散分布 30
  - 4.1.1 均匀分布 30
  - 4.1.2 伯努利分布 30
  - 4.1.3 二项分布 31
  - 4.1.4 几何分布 32
  - 4.1.5 负二项分布 33
  - 4.1.6 多项分布 34
  - 4.1.7 泊松分布 35
  - 4.1.8 超几何分布 37
- 4.2 连续分布 38
  - 4.2.1 均匀分布 38
  - 4.2.2 指数分布 38
  - 4.2.3 伽马分布 40
  - 4.2.4 贝塔分布 41
- 4.3 正态分布及其导出分布 43
  - 4.3.1 正态分布 43
  - 4.3.2 卡方分布 44
  - 4.3.3 F 分布 45
  - 4.3.4 t 分布 46
  - 4.3.5 柯西分布 47
- 4.4 各分布间关系 49

第 5 章 概率极限 **51**
- 5.1 收敛 51
- 5.2 大数定理 53
- 5.3 中央极限定理 54

第 A 章 基本数学工具 **56**
- A.1 集合论 56
- A.2 测度论 56
- A.3 排列与组合 56

第 1 章 概率基础

考试重点

- 概率空间的定义
- 条件概率与独立
- 古典概型与几何概型
- 伯努利试验

1.1 概率空间

1.1.1 随机事件

定义 1.1 (样本空间)

随机试验可能出现的结果称为**样本点** (sample point)，用 ω 表示。样本的全体构成**样本空间** (sample space)，用 Ω 表示。

定义 1.2 (事件的古典定义)

样本点 ω 的集合称为**事件** (event)。

我们关心的随机现象被抽象为集合, 逻辑运算 (且, 或, 非, etc.) 对应成集合论运算 (交, 并, 补, etc.)。

性质 集合的运算性质:

交换律 $A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$

分配律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{1.1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1.2}$$

对偶律 (De Morgan's laws)

$$\text{事件并的对立等于对立的交:} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.3}$$

$$\text{事件交的对立等于对立的并:} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.4}$$

例题 1.1 设 A、B、C 是某个随机现象的三个事件, 则

1. 事件“A 与 B 发生, C 不发生”可表示为: $AB\overline{C}$.
2. 事件“A、B、C 中至少有一个发生”可表示为: $A \cup B \cup C$.
3. 事件“A、B、C 中至少有两个发生”可表示为: $AB \cup AC \cup BC$.
4. 事件“A、B、C 中恰好有两个发生”可表示为: $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.
5. 事件“A、B、C 同时发生”可表示为: ABC.
6. 事件“A、B、C 都不发生”可表示为: $\overline{ABC}$.
7. 事件“A、B、C 不全发生”可表示为: $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

为方便概率的定义，并不把 Ω 的一切子集作为事件，应避免不可测集的出现。

定义 1.3 (事件域)

事件构成的全体称为**事件域** $\mathscr{F}$，是 Ω 的子集族 (collection of subsets)，应满足σ 代数 的要求：

- $\varnothing \in \mathscr{F}$, 无事发生;
- $A \in \mathscr{F} \implies A^{\mathsf{C}} \in \mathscr{F}$, 即 $\mathscr{F}$ 对补集运算 (逻辑上的非) 封闭;
- $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$, 即 $\mathscr{F}$ 对可数交运算 (逻辑上的可数多个且) 封闭.

笔记 可数性是为了在数学上能够恰当地处理无穷 的概念, 术语中的 σ 指的就是可数并。由对偶原理可得 σ 域同时对可数并运算封闭. 即 σ 域对逆, 并, 交, 差的可数次运算封闭.

事件域根据问题的不同要求适当选取, 在概率定义没有困难时, 应尽量选大, 通常以 Ω 的一切子集作为事件域. 当 Ω 给定后, 若某些子集必须作为事件处理, 能否找到包含他们的 σ 域?

命题 1.1

若给定 Ω 的一个非空集族 $\mathscr{G}$, 必存在 Ω 上唯一的 σ 域 $\mathrm{m}(\mathscr{G})$, 满足下列性质:

- 包含 $\mathscr{G}$
- 若其他 σ 域包含 $\mathscr{G}$, 则必包含 $\mathrm{m}(\mathscr{G})$

这个 $\mathrm{m}(\mathscr{G})$ 称为包含 $\mathscr{G}$ 的最小 σ 域, 或由 $\mathscr{G}$ 扩张而成的 σ 域.

扩张, 或者称为延拓, 是数学中很重要的一个概念, 大抵是将某映射的定义域适当扩大, 不改变在初始定义域上的映射取值 (注意值域可能是比较抽象的集合, 配备了某些操作之后被称为空间), 同时在扩大后的定义域上仍然保持某些优良的性质. 与此相对的概念是限制, 即关心局部上可能更加漂亮的性质, 把初始的定义域适当缩小.

证明 由于 Σ 的一切子集构成的集类包含 $\mathscr{G}$, 所以 m 存在. 再取 Σ 上满足此条件的 σ 域之交作为 $\mathrm{m}(\mathscr{G})$ 即可.

特别地, 实数集 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ 生成的 σ 代数 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* 代数.

定义 1.4 (Borel 集)

设 $\mathbb{R}^1$ 为全集, 形为 $[a, b)$ 构成的集类产生的 σ 域称为**一维 Borelσ 域**, 记为 $\mathscr{B}_1$, 其中的元素称为**一维 Borel 集**

若 x, y 为任意实数, 由于:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x, x + \frac{1}{n}\right)$$

$$(x, y) = [x, y) - \{x\}$$

$$[x, y] = [x, y) + \{y\}$$

$$(x, y] = [x, y) + \{y\} - \{x\}$$

因此 $\mathscr{B}_1$ 包含一切开区间, 闭区间, 单个实数, 可列个实数, 以及他们经可列次逆, 并, 交, 差运算的集合.

定义 1.5 (概率空间)

定义在事件域(非样本空间) 上的集合函数 $P : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ 称为**概率**的条件是:

非负性	$P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{F}$
规范性	$P(\Omega) = 1$; (如果没有这条就是一般的有限测度)
可列可加性	若 $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$ 两两不交, 即 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, 则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

我们称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一个**概率空间** (probability space)

1.1.2 概率的性质

性质 概率的性质:

- $P(\Omega) = 1$;
- $P(A^{\mathsf{C}}) = 1 - P(A)$;
- 若 $A \subseteq B$ 则 $P(A) \leq P(B)$;

推论 1.1 (加法公式)

基础形式:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般形式:

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{i=1,\cdots,n} P\left(A_i\right) - \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1,\cdots,n}} P\left(A_i A_j\right)$$

$$+ \sum_{\substack{i<j<k \\ i,j,k=1,\cdots,n}} P\left(A_i A_j A_k\right) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)$$

特别地, 若事件出现个数相同时概率相等, 则可简化为:

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = nP_1 - \binom{n}{2} P_2 + \binom{n}{3} P_3 - \cdots + (-1)^{n-1} P_n$$

显然, 可列可加性可以推出有限可加性. 但是一般来讲, 由有限可加性并不能推出可列可加性. 设 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \cdots$ 且两两互不相容, 若希望由有限可加性推出可列可加性, 则需要下式成立:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = P\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i\Big)$$

定义 1.6

对于 $\mathscr{F}$ 上的集合函数 P, 若它对 $\mathscr{F}$ 中任何一个单调不减的集序列 $\{S_n\}$(即 $S_n \in \mathscr{F}, S_n \subseteq S_{n+1}$) 均满足:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n) = P(\lim_{n\to\infty} S_n)$$

则称它是**下连续的**.

故若令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} A_n$, 则可列可加性条件等价于有限可加性加下连续.

例题 1.2 口袋中有编号为 $1, 2, \ldots, n$ 的 n 个球, 从中有放回地任取 m 次, 求取出的 m 个球的最大号码为 k 的概率.

解 记事件 A_k 为 "取出的 m 个球的最大号码为 k". 如果直接考虑事件 A_k, 则比较复杂, 因为 "最大号码为 k" 可以包括取到 1 次 k、取到 2 次 k、...、取到 m 次 k.

为此我们记事件 B_i 为 "取出的 m 个球的最大号码小于等于 i", $i = 1, 2, \ldots, n$. 则 B 发生只需每次从 $1, 2, \ldots, i$ 号球中取球即可. 所以由古典概率知

$$P(B_i) = \frac{i^m}{n^m}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

又因为 $A_k = B_k - B_{k-1}$, 且 $B_{k-1} \subset B_k$, 由性质 得

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_k - B_{k-1}) = P(B_k) - P(B_{k-1}) \\ &= \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

譬如, $n = 6, m = 3$, 可算得

$$P(A_4) = \frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{37}{216} = 0.1713.$$

其他的 $P(A_k)$ 也都可算出, 现列表如下:

这相当于掷三颗骰子, 最大点数为 6 的概率是 0.4213, 而由

$$P(k \le 3) = 0.0046 + 0.0324 + 0.0880 = 0.1250.$$

说明: 掷三颗骰子, 最大点数不超过 3 的概率仅为 0.1250.

一般而言, 求"至少有一个……"的概率时, 用对立事件公式去求较为方便. 但下面例 1.3 的配对问题却不能用对立事件去求解, 而一定要将事件"至少有个……"表示成事件的并, 然后用一般事件的加法公式去求解.

例题 1.3 配对问题 在一个有 n 个人参加的晚会上, 每个人带了一件礼物, 且假定各人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己礼物的概率是多少?

解 以 A_i 记事件"第 i 个人自己抽到自己的礼物", $i = 1, \dots, n$. 所求概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. 因为

$$\begin{aligned}
&P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n},\\
&P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \cdots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)},\\
&P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = \cdots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},\\
&\dots\\
&P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

所以由概率的加法公式 (**??**) 得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

譬如, 当 $n = 5$ 时, 此概率为 0.6333; 当 $n \ge 10$ 时, 此概率近似为 $1 - e^{-1} = 0.6321$. 这表明: 即使参加晚会的人很多 (譬如 100 人以上), 事件"至少有一个人自己抽到自己礼物"也不是必然事件.

1.2 古典概型与几何概型

1.2.1 古典概型

古典概型的基本思想:

有限个样本点 所涉及的随机现象只有有限个样本点, 譬如为 n 个, 且这些事件是两两互不相容的;

等可能性 每个样本点发生的可能性相等

定义 1.7

若事件 A 含有 k 个样本点, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{ 所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所有样本点的个数}} = \frac{k}{n}$$

笔记 事实上，古典概型的大部分问题都能形象化地用摸球模型来描述以后我们经常研究摸球模型，意义即在于此.

例题 1.4 生日问题 n 个人的生日全不相同的概率 p_n 是多少?

解 把 n 个人看成是 n 个球, 将一年 365 天看成是 $N = 365$ 个盒子, 则"n 个人的生日全不相同"就相当于"恰好有 $n(n \le N)$ 个盒子各有一球", 所以 n 个人的生日全不相同的概率为

$$P_n = \frac{365!}{365^n(365-n)!} = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{365}\right). \tag{1.5}$$

上式看似简单，但其具体计算是繁琐的，对此可用以下方法作近似计算:

1. 当 n 较小时, (1.5) 右边中各因子的第二项之间的乘积 $\frac{i}{365} \times \frac{j}{365}$ 都可以忽略, 于是有近似公式

$$p_n \approx 1 - \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{365} = 1 - \frac{n(n-1)}{730}. \tag{1.6}$$

2. 当 n 较大时, 因为对小的正数 x, 有 $\ln(1-x)\approx -x$, 所以由 (1.5) 得

$$\ln p_n \approx \frac{1+2+\cdots+(n-1)}{365} = -\frac{n(n-1)}{730}. \tag{1.7}$$

例如当 $n=10$ 时, 由 (1.7) 给出的近似值为 0.8840, 而精确值为 $p_n = 0.8831\ldots$; $n=30$ 时, 近似值为 0.3037, 精确值为 $p_n = 0.2937$.

这个数值结果是令人吃惊的, 因为许多人会认为: 一年 365 天, 30 个人的生日全不相同的可能性是较大的, 至少会大于 1/2. 甚至有人会认为: 100 个人的生日全不相同的可能性也是较大的. 对一些不同的 n 值, 表 **??** 列出用 (1.7) 近似公式计算出的 p 值.

表中最后一行是对立事件"n 个人中至少有两个人生日相同"的概率 $1-p_n$. 当 $n=60$ 时, $1-p_n=0.9922$ 表明在 60 个人的群体中至少有两个人生日相同的概率超过 99%, 这是出乎人们预料的.

1.2.2 几何概型

例题 1.5 会商问题 甲乙两人约定在下午 6 时到 7 时之间在某处会面, 并约定先到者应等候另一个人 20 min, 过时即可离去. 求两人能会面的概率.

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间 (以 min 为单位), 在平面上建立 xOy 直角坐标系 (见图 1.1).

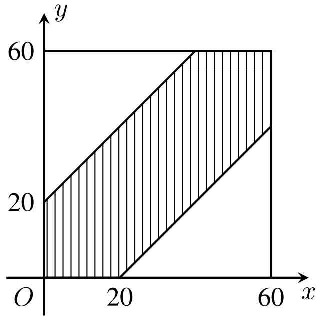


图 1.1: 会面问题中的 Ω 与 A.

因为甲、乙都是在 0 至 60 min 内等可能地到达, 所以由等可能性知这是一个几何概率问题. (x,y) 的所有可能取值是边长为 60 的正方形, 其面积为 $S_\Omega = 60^2$. 而事件 A = "两人能够会面" 相当于:

$$|x-y| \le 20,$$

即图中的阴影部分, 其面积为 $S_A = 60^2 - 40^2$, 由 (**??**) 式知

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{60^2-40^2}{60^2} = 0.5556.$$

结果表明: 按此规则约会, 两人能会面的概率不超过 0.6. 若把约定时间改为在下午 6 时到 6 时 30 分, 其他不变, 则两人能会面的概率提高到 0.8889.

例题 1.6 蒲丰投针问题 平面上画有间隔为 $d(d>0)$ 的等距平行线, 向平面任意投掷一枚长为 $l(l<d)$ 的针, 求针与任一平行线相交的概率.

解 以 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离, 又以 φ 表示针与此直线间的交角, 见图 1.2. 易知样本空间 Ω 满足

$$0 \le x \le d/2, \quad 0 \le \varphi \le \pi,$$

由这两式可以确定 $x-\varphi$ 平面上的一个矩形 Ω, 这就是样本空间, 其面积为 $S_\Omega = d\pi/2$. 这时为了针与平行线相交 (记为事件 A), 其充要条件是

$$x \le \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

由这个不等式表示的区域是图 1.3 中的阴影部分.

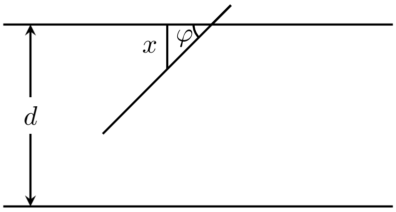


图 1.2: 蒲丰投针问题

.

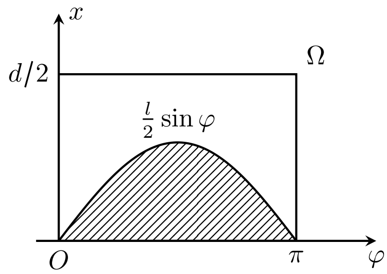


图 1.3: 蒲丰投针问题中的 Ω 和 A

.

由于针是向平面任意投掷的, 所以由等可能性知这是一个几何概率问题. 由此得

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2l}{d\pi}.$$

如果 l, d 为已知, 则以 π 的值代入上式即可计算得 $P(A)$ 之值. 反之, 如果已知 $P(A)$ 的值, 则也可以利用上式去求 π, 而关于 $P(A)$ 的值, 可用从试验中获得的频率去近似它: 即投针 N 次, 其中针与平行线相交 n 次, 则频率 n/N 可作为 $P(A)$ 的估计值, 于是由

$$\frac{n}{N} \approx P(A) = \frac{2l}{d\pi},$$

可得

$$\pi \approx \frac{2lN}{dn}.$$

历史上有一些学者曾亲自做过这个试验, 下表记录了他们的试验结果.

这是一个颇为奇妙的方法: 只要设计一个随机试验, 使一个事件的概率与某个未知数有关, 然后通过重复试验, 以频率估计概率, 即可求得未知数的近似解. 一般来说, 试验次数越多, 则求得的近似解就越精确。随着电子计算机的出现, 人们便可利用计算机来大量重复地模拟所设计的随机试验。这种方法得到了迅速的发展和广泛的应用。人们称这种方法为**随机模拟法**, 也称为**蒙特卡罗 (Montecarlo) 法**.

例题 1.7 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解 由于是将线段任意分成三段, 所以由等可能性知这是一个几何概率问题. 分别用 x, y 和 $a-x-y$ 表示线段被分成的三段长度, 见图 1.4. 则显然应该有

$$0 < x < a;\quad 0 < y < a;\quad 0 < a-(x+y) < a.$$

第三个式子等价于: $0 < x+y < a$. 所以样本空间为 (见图 1.5)

$$\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x+y < a\}.$$

Ω 的面积为

$$S_\Omega = \frac{a^2}{2}.$$

又根据构成三角形的条件: 三角形中任意两边之和大于第三边, 得事件 A 所含样本点 (x,y) 必须满足:

$$\begin{aligned} &0 < a-(x+y) < x+y,\\ &0 < x < y+(a-x-y),\\ &0 < y < x+(a-x-y). \end{aligned}$$

整理得

$$\frac{a}{2} < x+y < a;\quad 0 < x < \frac{a}{2};\quad 0 < y < \frac{a}{2}.$$

所以事件 A 可用图 1.6 中的阴影部分表示. 事件 A 的面积为

$$S_A = \frac{a^2}{8}.$$

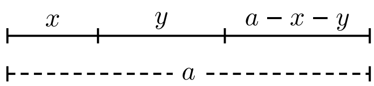


图 1.4: 长度为 a 的线段分成三段.

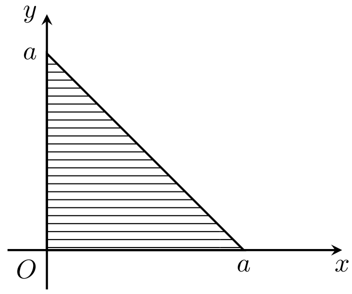


图 1.5: 线段分成三段的样本空间 Ω.

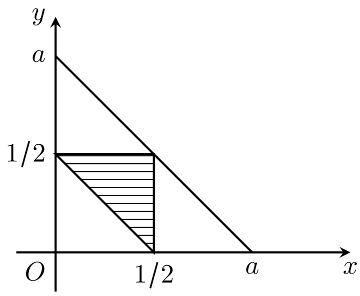


图 1.6: 构成三角形的条件

由此得

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

1.2.3 Bertrand 奇论

1.3 条件概率

定义 1.8 (条件概率)

令 $A, B \in \mathscr{F}$, 且 $P(B) > 0$ 称

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

为**基于于 B 的条件概率** (probability conditional on B), 这仍然是一个概率测度.

定理 1.1 (乘法法则)

令 $A, B \in \mathscr{F}$, 且 $P(B) > 0$, 则

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

泛化后有:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots$$

例题 1.8 罐子模型 设罐中有 b 个黑球、r 个红球, 每次随机取出一个球, 取出后将原球放回, 还加进 c 个同色球和 d 个异色球. 记 B_i 为 “第 i 次取出的是黑球”, R_j 为 “第 j 次取出的是红球”.

若连续从罐中取出三个球, 其中有两个红球、一个黑球. 则由乘法公式我们可得

$$
\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3) &= P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2) \\
&= \frac{b}{b+r}\frac{r+d}{b+r+c+d}\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}, \\
P(R_1B_2R_3) &= P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2) \\
&= \frac{r}{b+r}\frac{b+d}{b+r+c+d}\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}, \\
P(R_1R_2B_3) &= P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2) \\
&= \frac{r}{b+r}\frac{r+c}{b+r+c+d}\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}.
\end{aligned}
$$

以上概率与黑球在第几次被抽取有关.

罐子模型也称为波利亚 (Polya) 模型, 这个模型可以有各种变化, 具体见下:

1. 当 $c=-1, d=0$ 时, 即为**不返回抽样**. 此时前次抽取结果会影响后次抽取结果. 但只要抽取的黑球与红球个数确定, 则概率不依赖其抽出球的次序, 都是一样的. 此例中有

$$
\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3) &= P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) \\
&= \frac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}.
\end{aligned}
$$

   例 **??** 可以归结为此种情况.

2. 当 $c=0, d=0$ 时, 即为**返回抽样**. 此时前次抽取结果不会影响后次抽取结果. 故上述三个概率相等, 且都等于

$$
P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br^2}{(b+r)^3}.
$$

3. 当 $c>0, d=0$ 时, 称为**传染病模型**. 此时, 每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率, 或换句话说, 每次发现一个传染病患者, 以后都会增加再传染的概率. 与前面两个一样, 以上三个概率都相等, 且都等于

$$
\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3) &= P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) \\
&= \frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}.
\end{aligned}
$$

   从以上可以看出: 在罐子模型中只要 $d=0$, 则以上三个概率都相等. 即只要抽取的黑球与红球个数确定, 则概率不依赖其抽出球的次序, 都是一样的. 但当 $d>0$ 时, 就不同了.

4. 当 $c=0, d>0$ 时, 称为**安全模型**. 此模型可解释为: 每当事故发生了 (红球被取出), 安全工作就抓紧一些, 下次再发生事故的概率就会减少; 而当事故没有发生时 (黑球被取出), 安全工作就放松一些, 下次再发生事故的概率就会增大. 在这种场合, 上述三个概率分别为

$$
\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3) &= \frac{b}{b+r}\frac{r+d}{b+r+d}\frac{r+d}{b+r+2d}, \\
P(R_1B_2R_3) &= \frac{r}{b+r}\frac{b+d}{b+r+d}\frac{r+d}{b+r+2d}, \\
P(R_1R_2B_3) &= \frac{r}{b+r}\frac{r}{b+r+d}\frac{b+2d}{b+r+2d}.
\end{aligned}
$$

定理 1.2 (全概率公式)

设 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割, 且互不相容, 即 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, B_iB_j = \varnothing for i \neq j$ 如果 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 则对任一事件 A 有

$$
P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.8}
$$

笔记 $P(A|B_i)$ 可视为事件 A 在 B_i 上的平均, $P(B_i)$ 则为其权重.

定理 1.3 (Bayes 定理)

设 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割, 且互不相容, 即 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, B_iB_j = \varnothing fori \neq j$ 如果 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} \tag{1.9}$$

例题 1.9 某地区居民的肝癌发病率为 0.0004, 现用甲胎蛋白法进行普查. 医学研究表明, 化验结果是存有错误的. 已知患有肝癌的人其化验结果 99 % 呈阳性 (有病), 而没患肝癌的人其化验结果 99.9 % 呈阴性 (无病). 现某人的检查结果呈阳性, 问他真的患肝癌的概率是多少?

解 记 B 为事件 "被检查者患有肝癌", A 为事件 "检查结果呈阳性". 由题设知

$$P(B) = 0.0004, \quad P(\overline{B}) = 0.996,$$
$$P(A|B) = 0.99, \quad P(A|\overline{B}) = 0.001.$$

我们现在的目的是求 $P(B|A)$. 由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})} \\ &= \frac{0.0004 \times 0.99}{0.0004 \times 0.99 + 0.9996 \times 0.001} \\ &= 0.284. \end{aligned}$$

这表明, 在检查结果呈阳性的人中, 真患肝癌的人不到 30 %, 这个结果可能会使人吃惊, 但仔细分析一下就可以理解了. 因为肝癌发病率很低, 在 10 000 个人中, 约有 4 人, 而约有 9996 个人不患肝癌. 对 10 000 个人用甲胎蛋白法进行检查, 按其错检的概率可知, 9996 个不患肝癌者中约有 $9996 \times 0.001 \cong 9.994$ 个呈阳性. 另外 4 个真患肝癌者的检查报告中约有 $4 \times 0.99 \cong 3.96$ 个呈阳性. 仅从 13.956 个呈阳性者中看, 真患肝癌的 3.96 人约占 28.4 %.

例题 1.10 伊索寓言 "孩子与狼" 讲的是一个小孩每天到山上放羊，山里有狼出没. 第一天，他在山上喊："狼来了！狼来了！"，山下的村民闻声便去打狼，可到山上，发现狼没有来；第二天仍是如此；第三天，狼真的来了，可无论小孩怎么喊叫，也没有人来救他，因为前二次他说了谎，人们不再相信他了.

现在用贝叶斯公式来分析此寓言中村民对这个小孩的可信程度是如何下降的.

首先记事件 A 为 "小孩说谎"，记事件 B 为 "小孩可信". 不妨设村民过去对这个小孩的印象为

$$P(B) = 0.8, \quad P(\bar{B}) = 0.2. \tag{1.10}$$

我们现在用贝叶斯公式来求 $P(B|A)$，亦即这个小孩说了一次谎后，村民对他可信程度的改变.

在贝叶斯公式中我们要用到概率 $P(A|B)$ 和 $P(A|\bar{B})$，这两个概率的含义是：前者为 "可信" (B) 的孩子 "说谎" (A) 的可能性，后者为 "不可信" $(\bar{B})$ 的孩子 "说谎" (A) 的可能性. 在此不妨设

$$P(A|B) = 0.1, \quad P(A|\bar{B}) = 0.5.$$

第一次村民上山打狼，发现狼没有来，即小孩说了谎 (A). 村民根据这个信息，对这个小孩的可信程度改变为（用贝叶斯公式）

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\ &= \frac{0.8 \times 0.1}{0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.5} = 0.444. \end{aligned}$$

这表明村民上了一次当后，对这个小孩的可信程度由原来的 0.8 调整为 0.444，也就是 (1.10) 调整为

$$P(B) = 0.444, \quad P(\bar{B}) = 0.556. \tag{1.11}$$

在此基础上，我们再一次用贝叶斯公式来计算 $P(B|A)$，亦即这个小孩第二次说谎后，村民对他的可信程度改变为

$$P(B|A) = \frac{0.444 \times 0.1}{0.444 \times 0.1 + 0.556 \times 0.5} = 0.138.$$

这表明村民们经过两次上当，对这个小孩的可信程度已经从 0.8 下降到了 0.138，如此低的可信度，村民听到第三次呼叫时怎么再会上山打狼呢?

1.4 独立性

定义 1.9 (事件的独立性)

如果 $A, B \in \mathscr{F}$ 满足

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B **独立** (independent), 记为 $A \perp\!\!\!\perp B$.

对于事件集 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 若对于其中任意子集 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ 有:

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n})$$

则称此事件集**相互独立** (mutually independent)

笔记 当 $P(A) > 0$ 时, 我们有 $P(B|A) = P(B) \iff B \perp\!\!\!\perp A$, 由此可得到<u>$B$ 独立于 A</u> 的直观理解

性质 独立性是对称的, 即 $A \perp\!\!\!\perp B \iff B \perp\!\!\!\perp A$. 若两事件独立, 则其补集也独立.

$$\begin{array}{c} A \longleftrightarrow B \\ \times \\ A^{\complement} \leftrightarrow B^{\complement} \end{array}$$

定义 1.10 (事件域的独立性)

若 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 与 $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ 满足

$$A \perp\!\!\!\perp B, \quad \forall A \in \mathscr{G},\ B \in \mathscr{H},$$

则称 $\mathscr{G}$ 与 $\mathscr{H}$ 独立, 记为 $\mathscr{G} \perp\!\!\!\perp \mathscr{H}$

测度论告诉我们一个重要结果: 如果 $\mathscr{G}$ 对交集运算封闭, 那么成立 $\mathscr{G} \perp\!\!\!\perp \mathscr{H} \implies \sigma(\mathscr{G}) \perp\!\!\!\perp \mathscr{H}$

例题 1.11 有两名选手比赛射击，轮流对同一目标进行射击，甲命中目标的概率为 α，乙命中目标的概率为 β. 甲先射，谁先命中谁得胜. 问甲、乙两人获胜的概率各为多少?

解 记事件 A_i 为“第 i 次射击命中目标”，$i = 1, 2$，因为甲先射，所以事件“甲获胜”可以表示为

$$A_1 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5 \cup \cdots,$$

又因为各次射击是独立的，所以得

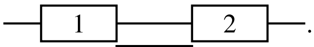
$$\begin{aligned} P(\text{甲获胜}) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha + \cdots \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

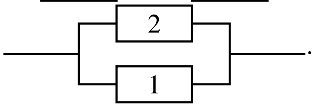
同理可得

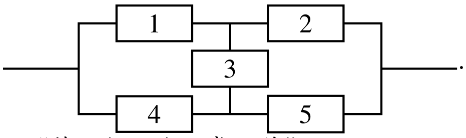
$$\begin{aligned} P(\text{乙获胜}) &= P(\bar{A}_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 \cup \cdot) \\ &= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \cdots \\ &\beta(1-\alpha) \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

此题在等比级数求和时，应该有条件：公比 $|(1-\alpha)(1-\beta)|M1$. 这一点不难从题目的实际意义中得到. 因为对本题而言，α, β 取值为零或 1 均是无意义的.

例题 1.12 系统由多个元件组成，且所有元件都独立地工作. 设每个元件正常工作的概率都为 $p = 0.9$，试求以下系统正常工作的概率.

(1) 串联系统 S_1：
.

(2) 并联系统 S_2：
.

(3) 5 个元件组成的桥式系统 S_3：
.

解 设 S_i = "第 i 个系统正常工作"，A_i = "第 i 个元件正常工作".

(1) 对串联系统而言，"系统正常工作"相当于"所有元件正常工作"，即 $S_1 = A_1A_2$，所以

$$P(S_1) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = p^2 = 0.81.$$

这也可看出：两个正常工作概率为 0.9 的元件组成的串联系统，其系统正常工作的概率下降为 0.81.

(1) 对并联系统而言，"系统正常工作"相当于"至少一个元件正常工作"，即 $S_2 = A_1 \cup A_2$，所以

$$\begin{aligned} P(S_2)P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \\ &= p + p - p^2 = 0.99. \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P(S_2) = 1 - P(\bar{S}_2) &= 1 - P(A_1 \bar{\cup} A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 1 - (1-p)^2 = 0.99. \end{aligned}$$

这也可看出：两个正常工作概率为 0.9 的元件组成的并联系统，其系统正常工作的概率提高至 0.99.

(1) 在桥式系统中，第 3 个元件是关键，我们先用全概率公式得

$$P(S_3) = P(A_3)P(S_3|A_3) + P(\bar{A}_3)P(S_3|\bar{A}_3).$$

因为在"第 3 个元件正常工作"的条件下，系统成为先并后串系统（见图 1.7）. 所以

$$\begin{aligned} P(S_3|A_3) = P\big((A_1 \cup A_4)(A_2 \cup A_5)\big) &= P(A_1 \cup A_4)P(A_2 \cup A_5) \\ &= [1 - (1-p)^2]^2 = 0.9801. \end{aligned}$$

又因为在"第 3 个元件不正常工作"的条件下，系统成为先串后并系统（见图 1.8）.

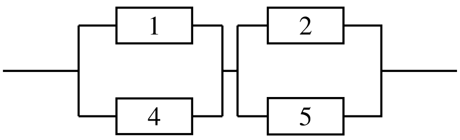


图 1.7: 先并后串系统

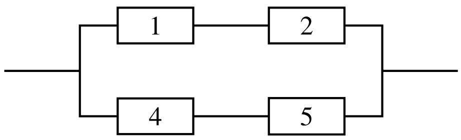


图 1.8: 先串后并系统

所以

$$P(S_3|\bar{A}_3) = P(A_1A_2| \cup A_4A_5) = 1 - (1-p^2)^2 = 0.9639.$$

最后我们得

$$\begin{aligned} P(S_3) &= p[1 - (1-p)^2]^2 + (1-p)[1 - (1-p^2)^2] \\ &= 0.9 \times 0.9801 + 0.1 \times 0.9639 = 0.9785. \end{aligned}$$

第 2 章 随机变量

内容提要

- 离散与连续随机变量
- 一元与多元
- cdf, pmf, pdf
- 条件分布
- 独立随机变量
- 随机变量函数的分布
- 次序随机变量

在概率论中, 主要关心 X 取值于数值集合 $\mathcal{X}$ 中某个子集 B 的可能性, 即希望得到 $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$. 概率论不关心具体的样本点 $\omega \in \Omega$, 将其记为 $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$. 由于 $\mathbb{P}$ 定义在 $\mathscr{F}$ 上, 故需 $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.

定义 2.1 (可测性)

设所有值得关心的 $B \subset \mathcal{X}$ 组成 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$, 且 $\forall B \in \mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 都满足 $\{X \in B\} \in \mathscr{F}$, 则称 X 为 $\mathscr{F}/\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ **可测的**. 当 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 不引起混淆时, 简记为关于 $\mathscr{F}$ **可测**, 写作 $X \in \mathscr{F}$.

由于原像保持交、并、补等集合运算, 且 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数, 可将 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 扩张为合适的最小的 σ 代数, 即 $\sigma(\mathscr{F}_{\mathcal{X}})$, 因此可测映射的定义不妨只考虑 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 是 σ 代数 的情况.

定义 2.2 (随机变量)

为了表示因随机性而变动的量, 称可测映射(measurable mapping)

$$X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{X}, \mathscr{F}_{\mathcal{X}}), \quad \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathcal{X}$$

为**随机元** (random element), 也称**随机变量** (random variable). 其中 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$

由于只考虑 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 是 σ 代数的情况, 可将随机变量看作将原概率空间映射到新概率空间的方式. 新样本空间由Borel 点集 构成, 对应的概率测度等于原像的.

注 使用随机变量 X 时, 有两个可能的含义:

- X 的 (随机) 取值
- X 的分布

定义 2.3 (离散与连续随机变量)

当 $\mathcal{X}$ 是 (至多可数的) 离散点集, $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 由 $\mathcal{X}$ 的所有子集组成, 则称其为**离散随机变量** (discrete random varible). 当随机变量 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, 考虑 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 为 $\left\{\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i] : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$ 生成的 Borel 代数 (最小的 σ 代数), 则称其为**连续随机变量** (continuous random varible).

2.1 随机变量的分布

定义 2.4

称随机元 X 诱导的概率测度

$$\mathbb{P}\{X \in \bullet\}, \ \bullet \in \mathscr{F}_{\mathcal{X}}$$

为 X 的**概率分布** (distribution/law)

注 对于随机变量, 他的取值是随机的, 但他的分布是固定的

定义 2.5 (单变量分布函数)

一个函数 $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ 称为一个单变量分布函数，当其满足以下性质时：

单调性 $\quad F(x_1)\leq F(x_2),\quad \forall x_1<x_2$

右连续性 $\quad \lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

有界性 $\quad \lim_{n\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{n\to\infty}F(x)=1$

性质 $F(x)$ 最多只有可数个间断点

命题 2.1

对每个分布 $Q:\mathscr{B}_1\to[0,1]$ 都存在唯一一个分布函数 $F_Q:\mathbb{R}\to[0,1]$ 使得 $F_Q(x)=Q[(-\infty,x]],\quad \forall x\in\mathbb{R}$ 成立。

命题 2.2

对每个分布函数 $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ 都存在唯一一个分布 $Q_F:\mathscr{B}_1\to[0,1]$ 使得 $Q_F[(-\infty,x]]=F(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$ 成立。

定理 2.1

分布函数可以唯一决定概率分布，即:

$$Q_{F_Q}=Q,\quad F_{Q_F}=F$$

把随机变量 X 服从分布函数 $F(x)$ 简记作 $X\sim F(x)$

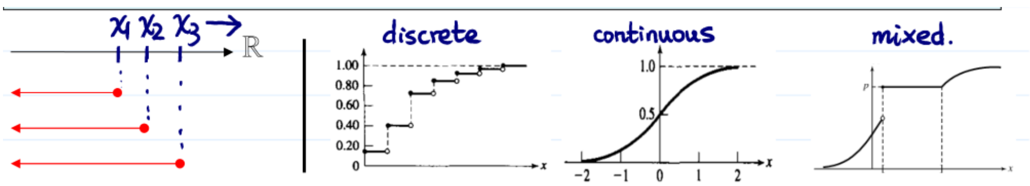
	离散	连续
一元随机变量	概率质量函数 (pmf)	概率密度函数 (pdf)
	累积分布函数 (cdf)	
	矩母函数/特征函数 (mgf/chf)	
多元随机变量	联合概率质量函数 (joint pmf)	联合概率密度函数 (joint pdf)
	联合累积分布函数 (joint cdf)	
	联合矩母函数/特征函数 (joint mgf/chf)	

定义 2.6 (累积分布函数)

此时 $X=(X_1,\ldots,X_n)^\top$ 的分布由 (累积) **分布函数** (cumulative distribution function, c.d.f.)

$$F_X(x_1,\ldots,x_n)=\mathbb{P}\{X_1\leq x_1,\ldots,X_n\leq x_n\},\quad x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}.$$

唯一刻画. 把随机变量 X 服从分布函数 $F(x)$ 简记作 $X\sim F(x)$



定义 2.7 (概率质量函数)

当且仅当函数 $p(x)$ 满足下述条件时，被称为**概率质量函数** (probability mass function, p.m.f.):

- $p(x)\geq 0$

- $\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) = 1$

当 X 是离散型随机变量, 设 $\mathscr{F}_{\mathcal{X}}$ 由 $\mathcal{X}$ 的所有子集组成, 此时 X 的分布由

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = x\}), \quad x\in\mathcal{X}$$

唯一刻画. 其与分布函数间的关系为:

- $F(x) = \sum_{t\le x} P(X = t) = \sum_{t\le x} p(t)$
- $p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-)$

定义 2.8 (概率密度函数)

当且仅当函数 $f(x)$ 满足下述条件时, 被称为**概率密度函数** (probability density function, p.d.f.):

- $f(x)\ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

当 X 是连续型随机变量, 且 $F_X:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ 可微 (或者更一般地, 绝对连续), 此时 X 的分布由

$$f_X := \frac{\partial^n F_X}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$$

唯一刻画. 其与分布函数间的关系为:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

注 即使对于 $f(x) > 0$ 的 x, $P(X = x) = x\int_x^x f(t)dt = 0$, 即连续型随机变量在实轴上任意一点的概率测度为零. 概率密度函数 $f(x)$ 代表的是在此位置上单位长度的概率, 可能是一个很大的值.

2.2 多元随机变量

定义 2.9 (随机向量)

若随机变量 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 定义在同一概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上, 则称

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

构成一个 n 维**随机向量**, 亦称 n 维随机变量.

命题 2.3

若 B_n 为 $\mathbb{R}^n$ 上任一博雷尔点集, 有

$$\{X(\omega)\in B_n\}\in\mathscr{F}$$

定义 2.10

称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, X_n) = \mathbb{P}\{X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, \cdots, X_n(\omega) < x_n\}$$

为随机向量 $X(\omega)$ 的**联合分布函数** (joint cdf).

当 $n = 2$ 时, 有

$$\mathbb{P}((a_1, b_1)\le X < (a_2, b_2)) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \tag{2.1}$$

性质 多元分布函数的一些性质:

1. 单调性: 关于每个变元是单调不减函数;

2.

$$F(x_1, x_2, \cdots, -\infty, \cdots, X_n) = 0$$
$$F(+\infty, +\infty, \cdots, , +\infty) = 1$$

3. 关于每个变元右连续.
4. 在二元场合，还应该有：对任意 $a_1 < b, , a_2 < b_2$ ，都有

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$$

为保证2.1式中的概率的非负性，性质 4 是必须的，而且由性质 4 可以推出单调性，但存在着反例说明，由单调性并不能保证性质 4 的成立 (见习题 12)．这是多元场合与一元场合的不同之处.

2.2.1 边际分布

定义 2.11

对于多维随机变量 X, 只考虑其中一个分量的分布时, 称其为 X 的**边际分布或边缘分布**. 对于分量 X_i, 其**边缘分布函数** (marginal cdf) 为:

$$F_{X_i}(x_i) = \mathbb{P}\{X_i \leq x_i\} = F(\infty, \cdots, x_i, \cdots, \infty)$$

♣

2.2.2 条件分布

定义 2.12

对一切使 $P\left(Y = y_j\right) = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} > 0$ 的 y_j, 称

$$p_{i|j} = P\left(X = x_i | Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

为给定 $Y = y_j$ 条件下 X 的条件分布列. 若 $p_X(x) = 0$, 则定义其为 0.

♣

设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 边际密度函数为 $p_X(x), p_Y(y)$.

在离散随机变量场合, 其条件分布函数为 $P(X \leq x|Y = y)$. 但是, 因为连续随机变量取某个值的概率为零, 即 $P(Y = y) = 0$, 所以无法用条件概率直接计算 $P(X \leq x|Y = y)$, 一个很自然的想法是: 将 $P(X \leq x|Y = y)$ 看成是 $h \to 0$ 时 $P(X \leq x|y \leq Y \leq y + h)$ 的极限, 即

$$\begin{aligned}
P(X \leq x|Y = y) &= \lim_{h \to 0} P(X \leq x|y \leq Y \leq y + h) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{P(X \leq x, y \leq Y \leq y + h)}{P(y \leq Y \leq y + h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+h} p(u, v) dv du}{\int_{y}^{y+h} p_Y(v) dv} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \left\{\frac{1}{h} \int_{y}^{y+h} p(u, v) dv\right\} du}{\frac{1}{h} \int_{y}^{y+h} p_Y(v) dv}.
\end{aligned}$$

当 $p_Y(y), p(x, y)$ 在 y 处连续时, 由积分中值定理可得

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{y}^{y+h} p_Y(v) dv = p_Y(y),$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{y}^{y+h} p(u, v) dv = p(u, y).$$

所以

$$P(X \le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}du$$

至此, 我们可以定义连续随机变量的条件分布如下.

定义 2.13

对一切使 $p_Y(y)>0$ 的 y, 给定 $Y=y$ 条件下 X 的**条件分布函数**和 **条件密度函数**分别为

$$F(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}du,$$

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}.$$

同理对一切使 $p_Y(y)>0$ 的 x, 给定 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数和条件密度函数分别为

$$F(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{p(x,v)}{p_X(x)}dv$$

$$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}.$$

♣

注 对于每一个固定的 x, $p_{Y|X}(y|x)$ 是一个关于 y 的概率质量函数; $f_{Y|X}(y|x)$ 是一个关于 y 的概率密度函数与概率三定理的对应:

乘法法则	$p_{XY}(x,y)=p_{Y\|X}(y\|x)p_X(x),\quad f_{XY}(x,y)=f_{Y\|X}(y\|x)f_X(x)$
全概率公式	$p_Y(y)=\sum_x p_{Y\|X}(y\|x)p_X(x),\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y\|X}(y\|x)f_X(x)dx$
Bayes 原理	$p_{X\|Y}(x\|y)=\frac{p_{Y\|X}(y\|x)p_X(x)}{\sum_x p_{Y\|X}(y\|x)p_X(x)},\quad f_{X\|Y}(x\|y)=\frac{f_{Y\|X}(y\|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y\|X}(y\|x)f_X(x)dx}$

2.2.3 独立

定义 2.14 (独立随机变量)

若随机变量 $X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$ 联合分布函数可分解成各分量边缘分布函数的乘积, 即:

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),\quad \forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$$

则称随机变量 X 各分量相互**独立**

♣

注 对于一般的多元随机变量, 其各分量边缘分布不足以描述联合分布的情况. 但若其各分量独立则可以.

定理 2.2

对于连续情况:

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)\\ \Leftrightarrow &f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)\end{aligned}$$

对于离散情况:

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)\\ \Leftrightarrow &p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)\end{aligned}$$

♡

2.3 随机变量的函数

在统计学中，常需要转化原始数据以获取其中信息, 由此引出了研究随机变量的函数的需要.

定义 2.15 (可测函数)

设 $y=g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个映照，若对于一切 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 点集 B_1 均有

$$\{x: g(x)\in B_1\}\in\mathcal{B}_1$$

其中 $\mathcal{B}_1$ 为 $\mathbb{R}$ 上 Borel σ 域，则称 $g(x)$ 是一元博雷尔函数, 也称为一元**可测函数**

定理 2.3 (事件法)

设 $Y=g(X)$ 是随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的函数, 则 Y 的分布由 X 的分布通过下式决定:

$$\mathbb{P}\{Y\in B\}=\mathbb{P}\{X\in A\},\quad A=\{\omega|g(X(\omega))\in B\}$$

此法是其他方法的基础, 但使用不便, 常用于离散随机变量.

例题 2.1 已知随机变量 X,Y 的联合概率质量函数为 $p(x,y)$, 求 $Z=X+Y$ 的分布

解

$$p_Z=P(Z=z)=P(X+Y=z)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}p(x,z-x)$$

若 X,Y 独立, 则 $p_Z(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$, 为 p_X 与 p_Y 的卷积

定理 2.4 ()

若随机变量 X,Y 独立, 则其变换 $Z=g(X),W=h(Y)$ 也独立.

泛化情况: 若随机向量 $\{X\}_n$ 各分类独立, 则其变换 $\{Y\}_n=g(\{X\}_n)$ 各分类也独立.

证明

2.3.1 分布函数法

通过下式获取随机变量的函数的分布:

$$F_Y(y)=\begin{cases}\int_{A_y}f_X(x)dx\\ \sum_{x\in A_y}p_X(x)\end{cases},\quad A_y=\{x|g(x)\le y\}$$

对每一个变换分别运用上式则可得到向量函数的分布.

例题 2.2 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)$ 与分布函数 $F_X(x)$, 求 $Y=X^2$ 的分布

解

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}<X\le\sqrt{y})+P(X=\sqrt{y}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}))+0\quad y\ge 0$$

$$\begin{aligned}f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)&=\frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y})-\frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y})\\&=f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}-f_X(-\sqrt{y})\frac{-1}{2\sqrt{y}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y}))\end{aligned}$$

例题 2.3 已知随机变量 X,Y 的联合概率密度函数 $f(x,y)$, 求 $Z=X+Y$ 的分布

解

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}<X\le\sqrt{y})+P(X=\sqrt{y}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}))+0\quad y\ge 0$$

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) = P(Z \le z) &= P(X+Y \le z) \\
&= \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v-x)dxdv, \quad y = v-x
\end{aligned}
$$

$$
f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx
$$

若 X,Y 独立, 则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$, 为 f_X 与 f_Y 的卷积, 与2.1类似

例题 2.4 已知随机变量 X,Y 的联合概率密度函数 $f(x,y)$, 求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的分布

解

$$
Q_z = \{(x,y): y/x \le z\} = \{(x,y): x<0, y\ge zx\} \cup \{(x,y): x>0, y\le zx\}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) = \iint_{Q_z} f(x,y)dxdy &= \int_{-\infty}^{0}\int_{xz}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{xz} f(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xv)dvdx \quad (\text{set} y = xv) \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}(-x)f(x,xv)dvdx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xv)dvdx \\
&= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x,xv)dxdv
\end{aligned}
$$

$$
f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x,xz)dx
$$

2.3.2 Copula

定义 2.16

设连续型 实值随机变量 X 有分布函数 F, 易见 F 在 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ 上从 0 递增到 1. 定义相应的**分位数函数** (quantile function) 为

$$
F^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge p\}, \quad p \in [0,1].
$$

注 当 F 严格递增时, 这与一般的反函数定义相同.

定理 2.5

设连续型 实值随机变量 X 有分布函数 F, 则 $F(X) \sim \text{Uniform}([0,1])$

证明

$$
\mathbb{P}\{F(X) \le p\} = \mathbb{P}\{X \le F^{-1}(p)\} = F(F^{-1}(p)) = p, \quad \forall p \in [0,1].
$$

定理 2.6

设连续型 实值随机变量 X 有分布函数 F, 且设 $U \sim \text{Uniform}([0,1])$, 则 $F^{-1}(U) \overset{d}{=} X$, 其中 $\overset{d}{=}$ 表示分布相同 (equal in distribution).

定理 2.7 (Sklar 定理)

考虑多个连续型 实值随机变量 $X_1,\dots,X_k$, 记 X_i 的分布函数为 F_i. 我们称 $(F_1(X_1),\dots,F_k(X_k))$ 的分布函数 $C:[0,1]^k\to[0,1]$ 为相应的 **Copula**, 适合

$$C(F_1(x_1),\dots,F_k(x_k))=\mathbb{P}\{X_1\le x_1,\dots,X_k\le x_k\},\quad \forall x_1,\dots,x_k$$

这个结果称为 **Sklar 定理**

这个结果, 在金融统计中有颇多应用. 稍作诠释的话, Copula 提取了变量间的相关性, 通过粘合边际能够恰好地表示总体. 人们可以构造各种各样的 Copula, 对真实世界进行建模.

2.3.3 概率密度函数法

定理 2.8

设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$. 令 $Y=g(X)$, 其中 g 为可微函数, 且严格单调, 则当 $y=g(x)$ 有定义时:

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

否则为 0

若 g 为分段单调函数, 则分段 计算上是结果, 再进行相加

定理 2.9

设连续随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数为 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. 令 $\mathbf{Y}=\mathbf{g}(\mathbf{X})$, 其中 $\mathbf{g}$ 为双射, 定义其逆函数为:

$$\mathbf{x}=\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})=\mathbf{w}(\mathbf{y})$$

若 $\mathbf{w}$ 存在连续偏导数, 则当 $\mathbf{Y}=\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 有定义时:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})=f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}))\left|\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{y}}\right|$$

否则为 0

注 若 $\mathbf{Y}$ 的维数 k 小于 $\mathbf{X}$ 的维数 n, 可增补 $n-k$ 维的函数 $\mathbf{Z}=\mathbf{h}(\mathbf{X})$, 使得 $(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ 满足条件, 再通过积分获取 $\mathbf{Y}$ 的概率密度函数.

例题 2.5 已知随机变量 X_1,X_2 的联合概率密度函数 $f(x_1,x_2)$, 求 $Y_1=\frac{X_2}{X_1}$ 的分布

解 令 $Y_2=X_1$, 则:

$$x_1=y_2\equiv w_1(y_1,y_2)$$
$$x_2=y_1y_2\equiv w_2(y_1,y_2)$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial y_1}=0,\frac{\partial w_1}{\partial y_2}=1,\frac{\partial w_2}{\partial y_1}=y_2,\frac{\partial w_2}{\partial y_2}=y_1$$
$$J=\begin{vmatrix}0&1\\y_2&y_1\end{vmatrix}=-y_2$$

所以:

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1X_2}(y_2,y_1y_2)\,|y_2|$$
$$f_{Y_1}(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_1X_2}(y_2,y_1y_2)\,|y_2|\,dy_2 \tag{2.2}$$

命题 2.4

若随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 各分类相互独立，则其各分量的函数 $\mathbf{Y} = (g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n))$ 也相互独立

证明

2.3.4 矩母函数法

2.3.5 次序统计量

定义 2.17

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为随机变量，将其按大小排序后记为 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$，则将 $x_{(i)}$ 称为该样本的第 i 个**次序统计量**. 其中

- **最小次序统计量**定义为:$X_{(1)} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$
- **最大次序统计量**定义为:$X_{(n)} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$
- **极差**定义为:$R = X_{(n)} - X_{(1)}$
- 第 i 个**间差**定义为:$S_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$

注 虽然 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立，但其次序统计量一般不独立

例题 2.6 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，求 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的分布

解

$$
\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) \\
&= P(X_1 \le x) \cdots P(X_n \le x) \\
&= [F(x)]^n \\
f_{X_{(n)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) \\
&= n f(x) [F(x)]^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 - F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) \\
&= P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x) \\
&= [1 - F(x)]^n \\
f_{X_{(1)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) \\
&= n f(x) [1 - F(x)]^{n-1}
\end{aligned}
$$

定理 2.10

第 i 个**次序统计量**的概率密度函数为:

$$
f_{X_{(k)}} = C(n; 1, k-1, n-k) f(x) [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k}
$$

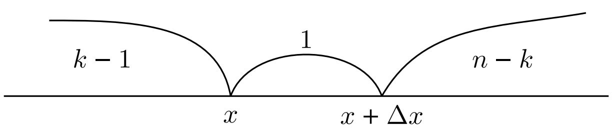


图 2.1: $X_{(k)}$ 取值的示意图

定理 2.11

次序统计量 $(x_{(i)}, x_{(j)})(i < j)$ 的联合分布密度函数为

$$p_{ij}(y,z) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(y)]^{i-1}[F(z)-F(y)]^{j-i-1} \cdot [1-F(z)]^{n-j}p(y)p(z), \quad y \le z,$$

证明 对正 $\Delta y, \Delta z$ 以及 $y < z$, 事件 "$x_{(i)} \in (y, y+\Delta y], x_{(j)} \in (z, z+\Delta z]$" 可以表示为 "容量为 n 的样本 $x_1, \dots, x_n$ 中有 $i-1$ 个观测值小于等于 y, 一个落入区间 $(y, y+\Delta y]$, $j-i-1$ 个落入区间 $(y+\Delta y, z]$, 一个落入区间 $(z, z+\Delta z]$, 而余下 $n-j$ 个大于 $z+\Delta z$"(见图 2.2).

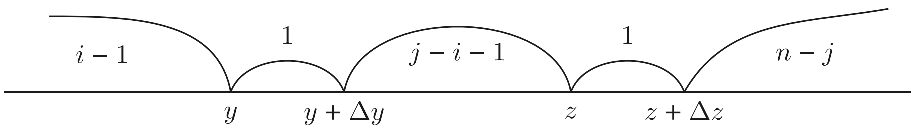


图 2.2: $x_{(i)}$ 与 $x_{(j)}$ 取值的示意图

例题 2.7 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 求 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的分布

解

$$f_{X_{(1)}X_{(n)}}(s,t) = n(n-1)f(s)f(t)[F(t)-F(s)]^{n-2}\mathbb{I}(s \le t)$$

$$f_R(r) = \mathbb{I}(r > 0)\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{(1)}X_{(n)}}(s, s+r)ds$$

第 3 章 随机变量的数值特征

考试重点

- ❑ 重期望公式
- ❑ 切比雪夫不等式
- ❑ 重方差公式

3.1 期望

定义 3.1

对于实值随机向量 $X:(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 和 (可测) 函数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 称

$$\mathbb{E}[g(X)]=\int_{\Omega}g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)=\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\mathrm{d}F_X(x)$$

为 $g(X)$ 的**期望** (expectation).

注 当 $F_X(x)$ 在 x_0 出连续可导时, $\mathrm{d}F_X(x_0)=f_X(x_0)\mathrm{d}x$; 当 x_0 为其间断点时时, $\mathrm{d}F_X(x_0)=p_X(x_0)\delta(x_0)\mathrm{d}x$
期望算子 $\mathbb{E}$ 是一个线性泛函, 仅适用于可积 的随机变量.

定义 3.2

1. 当 $g(x)=x$ 时, $\mathbb{E}[g(x)]=\mathbb{E}[X]$ 称作 X 的**均值** (mean), 记为 μ_X
2. 当 $g(x)=(x-\mu_X)^2$ 时, $\mathbb{E}[g(x)]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ 称作 X 的**方差** (variance), 记为 σ_X^2. 其平方根称作 X 的**标准差** (standard deviation), 记为 σ_X
3. 当 $g(x,y)=(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ 时, $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$ 称作 X 与 Y 的**协方差** (covariance), 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 或 σ_{XY}.
4. 定义 X 与 Y 的**相关系数** (correlation coefficient) 为:$\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$, 记为 $\mathrm{Cor}(X,Y)$ 或 ρ_{XY}. 若 $\rho_{XY}=0$, 则称 X 与 Y 不相关

3.1.1 均值

注

- 随机变量的均值可看作其加权平均, 权重为其 pdf 或 pmf, 也即其质心. 从大数定律 (5) 的角度看, 也可解释为其长期均值.
- 方差为随机变量距其均值的均方偏差, 刻画了 X 的变动程度
- 随机变量的均值与标准差的单位和其本身的相同, 方差的为其平方

定理 3.1

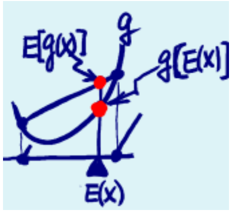
均值为随机变量的线性映射, 即:

$$\mathbb{E}(a+\sum_{i=1}^{n}b_iX_i)=a+\sum_{i=1}^{n}b_i\mathbb{E}(X_i)$$

定理 3.2 ()

若 X,Y 独立, 则

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(g(X)h(Y))=\mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$



注 由于 $\mathbb{E}(X/Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\frac{1}{Y})$, 而 $\mathbb{E}(\frac{1}{Y}) \neq \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$, 所以 $\mathbb{E}(X/Y) \neq \mathbb{E}(X)/\mathbb{E}(Y)$

定理 3.3

若 g 为下凸 (convex) 函数, 则 $\mathbb{E}[g(X)] \geq g[\mathbb{E}(X)]$; 若 g 为上凸 (concave) 函数, 则 $\mathbb{E}[g(X)] \leq g[\mathbb{E}(X)]$;

一个重要结果是, 若 $g(X) \geq 0$, 则 $\mathbb{E}[g(X)] = 0 \implies g(X) \stackrel{\text{a.s.}}{=} 0$, 即 $\mathbb{P}\{g(X) = 0\} = 1$. 其证明可通过 **Markov 不等式**

$$\mathbb{P}\{g(X) \geq \varepsilon\} \leq \mathbb{E}[g(X)]/\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

完成, 其中需要用到概率的连续性, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \implies \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

预处理随机变量有两个常用变换:

- **中心化** (centralization) $X \mapsto X - \mathbb{E}X$;
- **标准化** (standardization) $X \mapsto \dfrac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$.

3.1.2 方差

定理 3.4

$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - \mu_X$

定理 3.5

$$\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$$

定理 3.6

$$\mathrm{Var}(a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2\,\mathrm{Var}(X_i) + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{b}$$

其中 Σ 为协方差矩阵, $\Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

定理 3.7

若 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 则:

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

考虑**均方误差** (mean squared error)

$$\mathrm{MSE}(X;\theta) = \mathbb{E}[|X - \theta|^2], \quad \theta \in \mathbb{R},$$

通过**方差偏差分解** (variance-bias decomposition)

$$\mathrm{MSE}(X;\theta) = \mathrm{Var}(X) + |\mathbb{E}X - \theta|^2$$

可以说明 $\theta \mapsto \mathrm{MSE}(X;\theta)$ 在 $\mathbb{E}X$ 处取到最小值 $\mathrm{Var}(X)$.

投影 (projection) 和正交分解的思想在各种内积空间中应用广泛, 这里是 $\mathbb{E} = \text{proj}_{\mathbb{R}}$, 概率论中关于子事件域 $\mathscr{G}$ (随机元 X, resp.) 的条件期望几何直观是 $\text{proj}_{\mathscr{G}}$ ($\text{proj}_{\sigma(X)}$, resp.), 线性模型 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ 中拟合值为 $\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_{\text{Col}(\mathbf{X})}\,\mathbf{y}$.

定理 3.8 (Chebyshev 不等式)

设随机变量 X 的均值与方差分别为:μ, σ^2, 则:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > t) \le \frac{\sigma^2}{t^2}$$

证明 设 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数, 令 $R = \{x : |x - \mu| > t\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|x - \mu| > t) &= \int_R 1 \cdot f(x)\mathrm{d}x \le \int_R \frac{(x-\mu)^2}{t^2} f(x)\mathrm{d}x \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{t^2} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sigma^2}{t^2}\end{aligned}$$

注 若令 $t = k\sigma$, 则 $\mathbb{P}(|X - \mu| > k\sigma) \le \frac{1}{k^2}$, 即标准差可代表随机变量偏离均值的概率单位距离.

推论 3.1

$$\text{Var}(X) = 0 \implies P(X = \mu) = 1$$

3.1.3 协方差

协方差代表了 X 与 Y 之间的联合变化倾向, 或者说他们间的相关程度, 但其间未必有 因果关系.

定理 3.9

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mu_Y \mu_Y$$

定理 3.10

$$\text{Cov}(a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i, c + \sum_{j=1}^{m} d_j Y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_i d_j \,\text{Cov}(X_i, Y_i) = \mathbf{b}^{\text{T}} \Sigma \mathbf{d}$$

定理 3.11

独立是不相关的**充分条件**, 但不是必要条件

定理 3.12

$-1 \le \rho_{XY} \le 1$, 当且仅当 X 与 Y 间为线性关系时取等号

证明

定理 3.13

平移与缩放随机变量都不影响其协方差, 即:

$$|\text{Cov}(a + bX, c + dY)| = |Cor(X, Y)|$$

3.1.4 条件期望

定义 3.3

若 $h(Y)$ 在给定 $X=x$ 下的条件分布 (定义2.12) 的数学期望存在，则定义其为**条件期望**如下:

$$E(h(Y)|X=x)=\begin{cases}\sum_y h(y)p_{Y|X}(y|x), & \text{离散情况}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)f_{Y|X}(y|x)dy & \text{连续情况}\end{cases}$$

注 条件期望 $\mathbb{E}_{Y|X}(Y|x)$ 是关于给定变量 x 的函数，不随对应变量 Y 本身变动，但其单位与对应变量 Y 相同，可看作一条在 (X,Y) 平面的曲线。

定理 3.14

若随机变量 X,Y 独立，则:

$$\mathbb{E}_{Y|x}(Y|x)=\mathbb{E}_Y(Y)$$

证明 由2.2可知，若随机变量 X,Y 独立，则

$$p_{Y|X}(y|x)=p_Y(y)$$
$$f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$$

所以 $\mathbb{E}_{Y|x}(Y|x)=\mathbb{E}_Y(Y)$

由直观感受亦可知：若 X,Y 独立，则 X 不通过任何与 Y 相关的信息，其条件期望亦当与原期望相同。

笔记 令 $g(x)=\mathbb{E}(h(Y)|X=x)$，则 $g(X)$ 是随机变量 X 的变换，也是随机变量，记为 $\mathbb{E}(h(Y)|X)$

定理 3.15 (重期望公式)

$$\mathbb{E}_X[\mathbb{E}_{Y|X}(h(Y)|X)]=\mathbb{E}_Y[h(Y)]$$

证明

定理 3.16

联合期望公式：

$$E_{X,Y}=E_XE_{Y|X}=E_YE_{X|Y}$$

泛化情况：

$$E_{X,Y}[h(X,Y)]=E_XE_{Y|X}[h(X,Y)|X]=E_YE_{X|Y}[h(X,Y)|Y]$$

定理 3.17 (重方差公式)

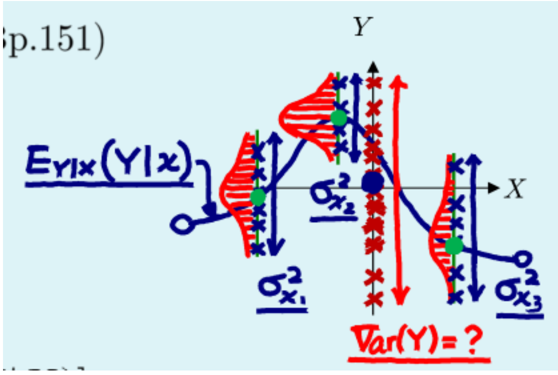
随机变量 Y 的方差可作如下分解：

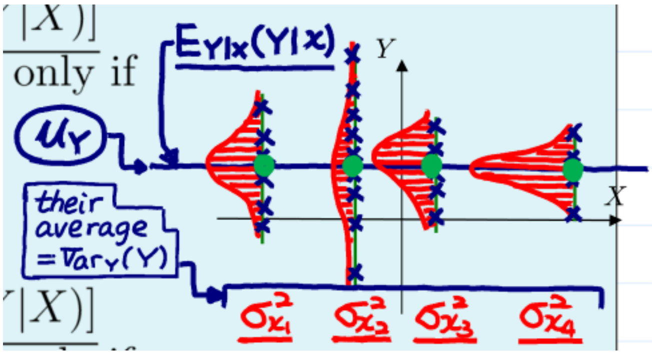
$$\mathrm{Var}_Y(Y)=\mathrm{Var}_X[E_{Y|X}(Y|X)]+E_X[\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|X)]$$

推论 3.2

$$\mathrm{Var}_Y(Y)\geq E_X[\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|X)]$$

当且仅当 $E_{Y|X}(Y|X)=E_Y(Y)$ 时取等号





推论 3.3

$$\mathrm{Var}_Y(Y) \geq \mathrm{Var}_X[E_{Y|X}(Y|X)]$$

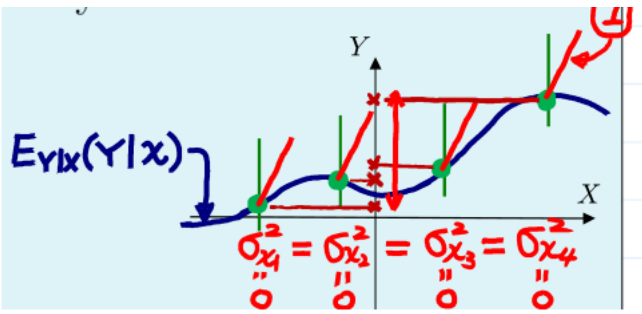
当且仅当 $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|X) = 0$，即 $\mathbb{E}_{Y|X}(Y|X) = Y$ 时取等号

3.2 矩母函数与特征函数

3.2.1 矩

定义 3.4

对于随机变量 X，定义其 k 阶**矩** (moment) 为 $E(X^k)$，记为 μ_k；定义其 k 阶**中心矩** (central moment) 为 $E((X-\mu_X)^k)$，记为 υ_k；



易知矩与中心矩间存在以下关系:

$$\upsilon_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i (-\mu_X)^{n-i}$$

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \upsilon_i (\mu_X)^{n-i}$$

特别的有:

$$E(X) = \mu_1$$

$$\mathrm{Var}(X) = \upsilon_2 = \mu_1^2 - 2\mu_1 \cdot \mu_1 + \mu_2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

3.2.2 矩母函数

定义 3.5

对于随机变量 X, 若下式期望存在:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

则称其为**矩母函数** (moment generating function, mgf)。

注 此表达式等价于对概率质量函数或密度函数作 Laplace 变换, 当 t 取某些特定值时, 可能不存在. (若 $t = 0$ 则永远存在)

定理 3.18

若当 t 属于一个包含零点的开区间时, 矩母函数一直存在, 则其唯一对应一个概率分布.

定理 3.19

若当 t 属于一个包含零点的开区间时, 矩母函数一直存在, 则:

$$M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$$

注 借此可方便地计算各阶矩, 故称为矩母函数. 反过来, 若已知各阶矩, 通过 Tayler 展开 $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!} t^k$ 可还原矩母函数, 进而得出概率分布.

命题 3.1

若 a, b 为常数, 则

$$M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$$

定理 3.20

若 X, Y 独立, 则

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

泛化情况: 若 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 则

$$M_{X_1 + \cdots + X_n} = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

3.2.3 联合特征函数

定义 3.6

对于随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, 若下式期望存在：

$$M_{X_1 \cdots X_n}(t_1, \cdots, t_n) = \mathbb{E}(e^{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n})$$

则称其为**联合矩母函数** (joint moment generating function, joint mgf)。

注 此处为多元 函数

命题 3.2

$$M_{X_i}(t_i) = M_{X_1 \cdots X_n}(0, \cdots, t_i, \cdots, 0)$$

定理 3.21

当且仅当：

$$M_{X_1 \cdots X_n}(t_1, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t_i)$$

时, $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立

注 与累计函数、密度函数、质量函数 的情况类似，变量相互独立等价于联合函数可拆分为边缘函数的乘积

定理 3.22

$$\frac{\partial^{r_1 + \cdots + r_n}}{\partial t_1^{r_1} \cdots \partial t_n^{r_n}} M_{X_1 \cdots X_n}(t_1, \cdots, t_n) = E(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})$$

3.2.4 特征函数

由于有时矩母函数可能不存在，为避免此缺陷，构造出与之特性类似的特征函数。

定义 3.7

对于随机变量 X, 定义其**特征函数** (characat function, chf) 为：

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX))$$

对于随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, 定义其**联合特征函数** (joint characat function, joint chf) 为：

$$\phi_{X_1 \cdots X_n}(t_1, \cdots, t_n) = \mathbb{E}(e^{i(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)})$$

注 此表达式等价于对概率质量函数或密度函数作 Fourier 变换

命题 3.3

随机变量的特征函数总是存在

命题 3.4

若矩母函数存在，则其与特征函数之间满足关系：

$$\phi_X(t) = M_X(it)$$

定理 3.23

特征函数可通过以下逆变换得到分布：

离散	$p_X(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-itx}\phi_X(t)dt$
连续	$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_X(t)dt$

3.3 估计与预测

3.3.1 delta 法

3.3.2 预测

3.4 熵与信息

3.5 其他特征

第 4 章 常见分布

考试重点

- 各分布的特征
- 各分布联系与转换
- 多维正态分布

4.1 离散分布

4.1.1 均匀分布

定义 4.1 (离散均匀分布)

若随机变量只能在 $a_1, \cdots, a_n$ 中取值，并且对应的概率相同，则称其遵循**均匀分布** (Uniform distribution)，记为 $X \sim U(a_1, \cdots, a_n)$。

离散均匀分布的特征：

参数	$a_i \in \mathbb{R}$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x = a_1, a_2, \cdots, a_n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} e^{a_i t}}{m}$
均值	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{m} = \overline{a}$
方差	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (a_i - \overline{a})^2}{m}$
实例	丢一个均匀的骰子

4.1.2 伯努利分布

定义 4.2 (Bernoulli 分布)

若随机变量只能取 0 或 1，并且对应的概率分别为 $1-p$ 与 p，则称其遵循 **Bernoulli 分布** (Bernoulli distribution)（也称 0-1 分布），记为 $X \sim B(p)$。

Bernoulli 分布的特征：

参数	$p \in [0, 1]$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	$M(t) = pe^t + 1 - p$
均值	$\mu = p$
方差	$\sigma^2 = p(1-p)$

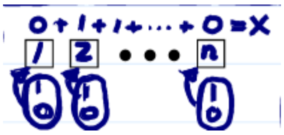
实例 丢一次硬币，p 代表某一面出现的概率

注 若 A 是一个事件，出现概率为 p_A，则指示随机变量 I_A（若 A 出现记为 1，否则为 0）遵循 Bernoulli 分布，即 $I_A \sim B(p_A)$

4.1.3 二项分布

定义 4.3 (二项分布)

若进行 n 次独立的 Bernoulli 实验 $X_1 + \cdots + X_n, X_i \sim B(p)$，则这些随机变量之和 $Y = X_1 + \cdots + X_n$ 遵循**二项分布** (binomial distribution)，记为 $Y \sim B(n, p)$。♣



二项分布的特征：

参数 $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}_+$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \mathbb{N}^n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = (pe^t + 1 - p)^n$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20）
- 定义

均值 $\mu = np$，求解方法有：

- 定义（下述凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 变量之和的均值等于各变量均值之和

方差 $\sigma^2 = np(1-p)$，求解方法有：

- 定义（下述凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 独立变量 之和的方差等于各变量均值之和

实例 丢 n 次硬币，p 代表某一面出现的概率，出现此面的次数

笔记 求解二项分布的均值时，可通过将其凑成概率质量函数之和（为 1）的形式：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

此称为凑一法 (sum to one, STO)。同理，求方差时也可使用：

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{i=1}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^{2}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= n(n-1)p^{2} \\
\mathrm{Var}(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^{2} \\
&= n(n-1)p^{2} + np - n^{2}p^{2} \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

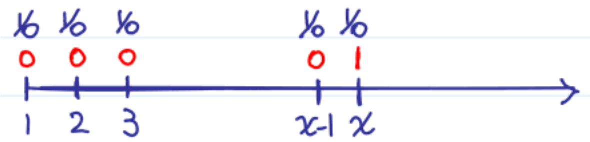
命题 4.1

二项分布之和仍是二项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim B(n_i, p)$，则 $Y = X_1+\cdots+X_k \sim B(n_1+\cdots+n_k, p)$

4.1.4 几何分布

定义 4.4

若进行无限次独立的 Bernouli 实验，则第一次出现“1”的实验次数遵循**几何分布** (geometric distribution)，记为 $X \sim G(p)$。



几何分布的特征：

参数 $p \in [0,1]$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x \in \mathbb{N}_+ \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20）
- 定义

均值 $\mu = \frac{1}{p}$，求解方法有：

- $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 定义（下述微分法）

方差 $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$，求解方法有：

- 定义（下述微分法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

实例 买彩票时，中奖所需购买张数。

笔记 微分法求解几何分布均值：

$$\begin{aligned}E(X) &= p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k \\ &= p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = \frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

微分法求解几何分布方差：

$$\begin{aligned}E(X(X-1)) &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k \\ &= p\frac{d^2}{dq^2}\frac{q}{1-q} = \frac{2p}{(1-q)^3} \\ &= \frac{2}{p^2} \\ \operatorname{Var}(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}p^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

命题 4.2

离散分布中有且只有几何分布具备无记忆性：

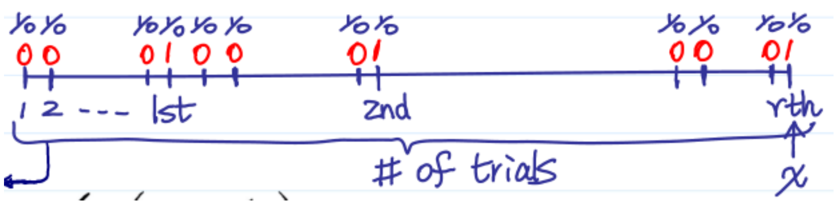
$$P\{X = s+t | X > t\} = P\{X = s\}, \quad \forall s > 0, t > 0$$

证明

4.1.5 负二项分布

定义 4.5

若进行无限次独立的 Bernoulli 实验，则第 r 次出现“1”的实验次数遵循**负二项分布** (negative binomial distribution)，记为 $X \sim NB(r, p)$。



负二项分布的特征：

参数	$p \in [0, 1]$
概率质量函数	$p(x) = \begin{cases}\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}p & x \in \mathbb{N}_r \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
矩母函数	$M(t) = \frac{p^r e^{rt}}{(1-(1-p)e^t)^r}, t < -\ln(1-p)$，求解方法有：

- 独立变量 之和的矩母函数等于各变量矩母函数之积（参见定理3.20）
- 定义凑一法
- 利用公式 $\sum_{x=0}^{\infty}\binom{n+x-1}{x}t^x = \frac{1}{(1-t)^n}, -1 < t < 1$

均值 $\mu = \frac{r}{p}$，求解方法有：

- 定义凑一法
- 矩母函数在 $t = 0$ 的一阶导
- 独立几何分布之和 (定理4.3)

方差 $\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$，求解方法有：

- 定义（凑一法）
- 矩母函数在 $t = 0$ 的二阶导，$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 独立几何分布之和 (定理4.3)

实例 买彩票时，中奖 r 次所需购买张数。

命题 4.3

几何分布之和是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_r$ 独立且 $X_i \sim G(p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_r \sim NB(r, p)$

证明

命题 4.4

负二项分布之和仍是负二项分布。若 $X_1 + \cdots + X_k$ 独立且 $X_i \sim NB(r_i, p)$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim B(r_1 + \cdots + r_k, p)$

证明

4.1.6 多项分布

定义 4.6 (多项分布)

若进行 n 次独立的实验，每次实验有 r 种结果，每种结果对于概率分别为 $p_1, \cdots, p_r$。令 X_i 代表得出结果 i 的次数，则随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_r)$ 遵循**多项分布** (multinomial distribution)，记为 $\mathbf{X} \sim Multinomial(n, p_1, \cdots, p_r)$。

多项分布的特征：

参数 $p_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x_1 \cdots x_r} p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r} & x \in \mathbb{N}^n \,\&\, \sum_{i=1}^{r} x_i = n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

矩母函数 $M(t_1, \cdots, t_r) = (p_1 e^{t_1} + \cdots + p_r e^{t_r})^n$，求解方法有：

- 利用公式
- 凑一法

边缘分布 $X_i \sim B(n, p_i)$

均值 $E(X_i) = np_i$

方差 $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$

协方差 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$，求解方法有：

- 矩母函数求解 $E(X_i X_j)$
- 凑一法求解 $E(X_i X_j)$

实例

注 多项分布是二项分布的泛化。

4.1.7 泊松分布

定理 4.1 (Poisson 逼近)

$$\lim_{np_n \to \lambda} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明 记 $np_n = \lambda_n$，记 $p_n = \lambda_n / n$，我们可得

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

对固定的 k 有

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda; \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}; \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

对任意的 k（$k = 0, 1, 2, \cdots$）成立

定义 4.7 (Poisson 分布)

若随机变量 X 的概率分布列满足以下形式：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称其遵循 **Poisson 分布**记为 $X \sim P(\lambda)$.

注 由定理4.1可看出，Poisson 分布可作为二项分布的近似。λ 的涵义

Poisson 分布的特征：

参数 $\lambda > 0$

概率质量函数 $p(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & x \in \mathbb{N}^n \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$，求解方法有：

- 利用公式
- 凑一法

均值 $\mu = \lambda$

方差 $\sigma^2 = \lambda$

实例 公共汽车站来到的乘客数

命题 4.5

Poisson 分布之和仍是 Poisson 项分布。若 $X_1+\cdots+X_k$ 独立且 $X_i \sim P(\lambda_i)$，则 $Y = X_1+\cdots+X_k \sim P(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$

证明

引理 4.1

若 $f(x)$ 是连续函数（或单调函数），且对一切 x, y（或一切 $x, y \geq 0$）成立：

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

则 $f(x)$ 为**指数函数**。

证明

$$\begin{aligned}&\because f(1) = [f(\frac{1}{n})]^n\\&\text{且} a = f(1) = [f(\frac{1}{2})]^2 \geq 0\\&\therefore f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}\\&\therefore f(\frac{m}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^m = a^{\frac{m}{n}}\end{aligned}$$

即此命题对一切有理数成立。又实数具有连续性，故此命题对一切实数成立。

定义 4.8 (泊松过程)

若某一随机过程满足以下特征，则称其为**泊松过程**：

平稳性 随机事件 A 在 $[t_0, t_0+t)$ 中的发生次数数只与时间间隔长度 t 有关而与时间起点 t_0 无关。以 $P_k(t)$ 记在长度为 t 的时间区间中发生 K 次事件 A 的概率。

独立增量性 在 $[t_0, t_0+t)$ 中发生 K 次事件 A 的概率与时刻 t_0 以前发生的事件独立。

普通性 在充分小的时间间隔中，最多发生一次事件 A。即，若记 $\psi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(t) = 1 - P_0(t) - P_1(t)$，则有 $\lim_{t\to 0}\psi(t)/t = 0$

对 $\Delta t > O$，考虑 $[O, t+\Delta t)$ 中发生 K 次事件 A 的概率 $P_k(t+\Delta t)$，由独立增量性及全概率公式可得：

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)P_0(\Delta r) + P_{k-1}P_1(\Delta t) + \cdots + P_0(t)P_k(\Delta t), k \geq 0$$

（对 $n \geq 1$，假定 $P_{-n}(t) = 0$）

特别地

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

由引理4.1知

$$P_0(t) = a^t, a \geq 0$$

若 $a = O$，则 $P_0(t) \equiv 0$，说明在不管怎么短的时间间隔内事件 A 都发生，因此在有限时间间隔中将发生无穷多个次事件 A，这种情形不在我们的考虑之列。此外，因 $P_0(t)$ 是概率，故应有 $a \geq 1$，而当 $a = 1$ 时，$P_0(t) \equiv 1$，表明事件 A 永不发生，也不是我们感兴趣的情形，所以应有 $0 < a < 1$，从而存在 $\lambda > 0$，使

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

因此当 $\Delta t \to 0$ 时，有

$$\begin{aligned} P_0(\Delta t) &= \mathrm{e}^{-\lambda\Delta t} = 1-\lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ P_1(\Delta t) &= 1 - P_0(\Delta t) - \psi(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ \sum_{l=2}^{\infty} P_{k-l}(t)P_l(\Delta t) &\leqslant \sum_{l=2}^{\infty} P_l(\Delta t) = \psi(\Delta t) = o(\Delta t) \end{aligned}$$

所以：

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{k-1}\lambda\Delta t + o(\Delta t), k \geq 1$$

因此：

$$P_k'(t) = \frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \lambda[P_{k-1} - P_k(t)]$$

由于 $P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$，故有 $P_1'(t) = \lambda[\mathrm{e}^{-\lambda t} - P_1(t)]$，可解得 $P_0(t) = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$，依次可递推可解得：

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, k \in \mathbb{N}$$

正是参数为 λt 的泊松分布。

4.1.8 超几何分布

定义 4.9

设有 N 个产品，其中有 M 个不合格品. 若从中不放回地随机抽取 n 个，则其中含有的不合格品的个数 X 服从超几何分布，记为 $X \sim h(n, N, M)$.

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0, 1, \cdots, r, \tag{4.1}$$

其中

超几何分布的特征：

参数	$r = \min\{M, n\}$，且 $M \leq N, n \leq N, n, N, M$ 均为正整数.
概率质量函数	$p(k) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & k = 0, 1, \cdots, r \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
矩母函数	存在，但没有简单的表达
均值	$\mu = \frac{rn}{n+m}$
方差	$\sigma^2 = \frac{rnm(n+m-r)}{(n+m)^2(n+m-1)}$
实例	从一个有限总体中进行不放回抽样

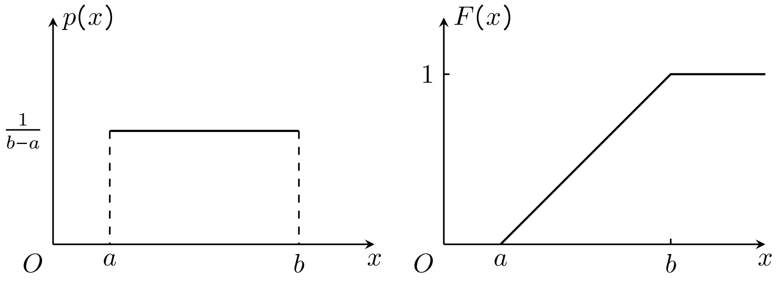
注 若 $m, n \to \infty$ 时有 $p_{m,n} = \frac{n}{m+n} \to p$，则超几何分布可近似为二项分布。$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \cong \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

4.2 连续分布

4.2.1 均匀分布

定义 4.10

若随机变量 X 在 $[a,b]$ 中任一区域的概率与其测度成正比，则称 X 服从区间 (a,b) 上的**均匀分布** (Uniform distribution)，记作 $X \sim U(a,b)$。



(a) 密度函数 $p(x)$ (b) 分布函数 $F(x)$

图 4.1: (a,b) 上的均匀分布

均匀分布的特征：

参数 $a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

概率质量函数 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$

矩母函数 $M(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, \quad t \in \mathbb{R}$

均值 $\mu = \frac{a+b}{2}$

方差 $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

注 常利用 $U(0,1)$ 生成特定分布的伪随机数（参见定理2.6）

4.2.2 指数分布

定义 4.11

若随机变量 X 的密度函数（见图 4.2）为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

则称 X 服从**指数分布**，记作 $X \sim Exp(\lambda)$，其中参数 $\lambda > 0$. 指数分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

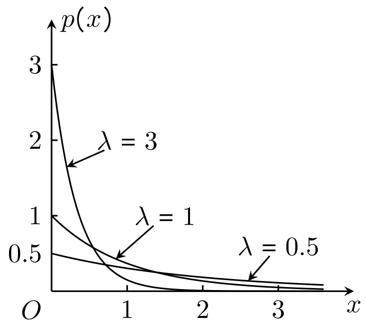


图 4.2: 参数为 λ 的指数分布密度函数

指数分布的特征：

矩母函数	$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$
均值	$\mu = \frac{1}{\lambda}$
方差	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
实例	物品使用寿命，等待时间

注 有其均值可看出，对于等待时间模型，$\frac{1}{\lambda}$ 代表平均等待时间，即（时间/次）；λ 代表平均发生频率，即（次/时间）。

定理 4.2 (指数分布的无记忆性)

连续分布中有且只有指数分布具备无记忆性：

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t), \quad \forall s > 0, t > 0$$

证明

命题 4.6

如果某设备在任何长为 t 的时间 $[0, t]$ 内发生故障的次数 $N9t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，则相继两次故障之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布.

证明 设 $N(t) \sim P(\lambda t)$，即

$$P\big(N(t) = k\big) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

注意到两次故障之间的时间间隔 T 是非负随机变量，且事件 $\{T \geq t\}$ 说明此设备在 $[0, t]$ 内没有发生故障，即 $\{T \geq t\} = \{N(t) = 0\}$，由此我们得

当 $t < 0$ 时，有 $F_T(t) = P(T \leq t) = 0$；

当 $t \geq 0$ 时，有

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P\big(N(t) = 0\big) = 1 - e^{-\lambda t},$$

所以 $T \sim Exp(\lambda)$，相继两次故障之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布.

4.2.3 伽马分布

定义 4.12

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

则称 X 服从**伽玛分布**，记作 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，其中 $\alpha>0$ 为形状参数，$\lambda>0$ 为尺度参数.

图 4.3 给出若干条 λ 固定、α 不同的伽玛密度函数曲线，从图中可以看出：

- $0<\alpha<1$ 时，$p(x)$ 是严格下降函数，且在 $x=0$ 处有奇异点；
- $\alpha=1$ 时，$p(x)$ 是严格下降函数，且在 $x=0$ 处 $p(0)=\lambda$；
- $1<\alpha\leq 2$，$p(x)$ 是单峰函数，向上凸、后下凸；
- $2<\alpha$ 时，$p(x)$ 是单峰函数，先下凸、中间上凸、后下凸. 且 α 越大，$p(x)$ 越近似于正态分布.

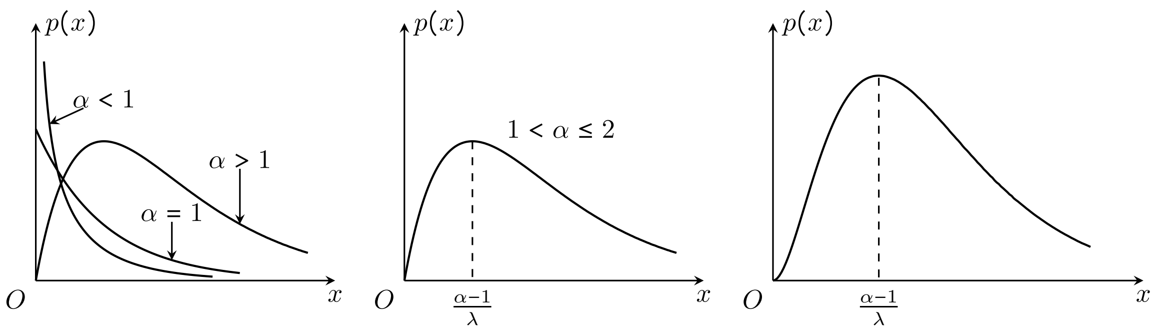


图 4.3: λ 固定、不同 α 的伽玛密度曲线

Gamma 分布的特征：

矩母函数	$M(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha},\quad t<\lambda$
均值	$\mu=\frac{\alpha}{\lambda}$
方差	$\sigma^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Gamma 函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}dy$ 的特征：

- $\Gamma(1)=1$
- $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
- $\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\in\mathbb{Z}$
- $\Gamma(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{\pi}(\alpha-1)!}{2^{\alpha-1}(\frac{\alpha-1}{2})!},\quad \alpha=2k+1,k\in\mathbb{N}$

命题 4.7

Γ 分布是指数分布的泛化，即 $\Gamma(1,\lambda)=E(\lambda)$。进一步有：若随机变量 $X_1,\cdots,X_k,\mathrm{i.i.d.}\sim E(\lambda)$，则 $Y=X_1+\cdots+X_k\sim\Gamma(k,\lambda)$。更进一步有：若随机变量 $X_1',\cdots,X_k',\mathrm{i.i.d.}\sim\Gamma(\alpha_i,\lambda)$，则 $Y'=X_1'+\cdots+X_k'\sim\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_k,\lambda)$。

证明

$$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{k}M_{X_i}(t_i)=\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda}{\lambda-t}=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^k$$
$$M_{Y'}(t)=\prod_{i=1}^{k}M_{X_i'}(t_i)=\prod_{i=1}^{k}(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_i}=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$$

命题 4.8

若令随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $cX\sim\Gamma(\alpha,\frac{\lambda}{c}),\quad c>0$

证明

$$M_{cX}(t)=M_X(ct)=(\frac{\lambda}{\lambda-ct})^\alpha=(\frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{\lambda}{c}-t})^\alpha$$

命题 4.9

若令随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $\mu_k=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)},\quad 0<k$，且则 $\mu_{-k}=\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)},\quad 0<k<\alpha$

证明

$$\mu_k=M_X^{(k)}(0)=\frac{1}{\lambda^k}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}$$
$$\mu_{-k}=M_X^{(-k)}(0)=\lambda^k\frac{1}{\alpha-1}\cdots\frac{1}{\alpha-k}=\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$$

命题 4.10

4.2.4 贝塔分布

定义 4.13

称以下函数

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

为**贝塔函数**，其中参数 $a>0,b>0$.

命题 4.11

贝塔函数具有如下性质：

- $\beta(a,b)=\beta(b,a)$
- $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

证明 在贝塔函数的积分中令 $y=1-x$，即得

$$\beta(a,b)=\int_1^0(1-y)^{a-1}y^{b-1}(-\mathrm{d}y)=\int_0^1(1-y)^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}y=\beta(b,a)$$

由伽玛函数的定义知

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

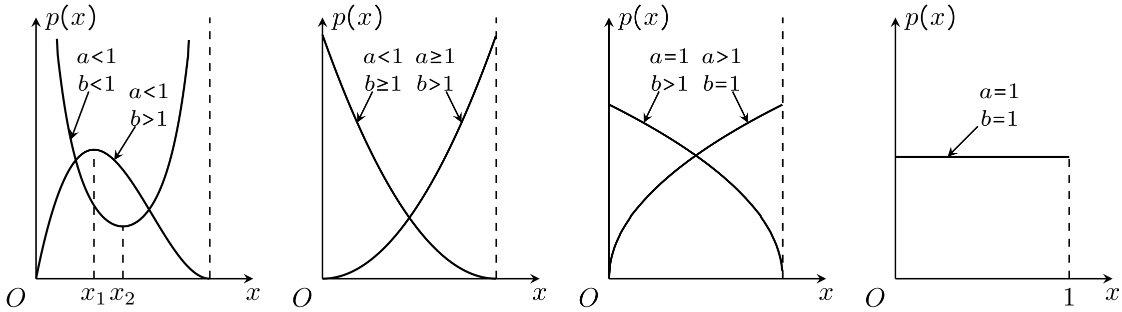


图 4.4: 贝塔密度函数曲线

作变量变换 $x=uv, y=u(1-v)$，其雅可比行列式 $J=-u$，故

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (uv)^{a-1}[u(1-v)]^{b-1}\mathrm{e}^{-u}u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^{+\infty} u^{a+b-1}\mathrm{e}^{-u}\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,\mathrm{d}v = \Gamma(a+b)\end{aligned}$$

$beta(a,b)$,

定义 4.14

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则称 X 服从**贝塔分布**，记作 $X\sim Be(a,b)$，其中 $a>0, b>0$ 都是形状参数.

从图 4.4 可以看出：

- $a<1, b<1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单峰函数.
- $a>1, b>1$ 时，$p(x)$ 是上凸的单峰函数.
- $a<10, b\geq 1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单调减函数.
- $a\geq 1, b<1$ 时，$p(x)$ 是下凸的单调增函数.
- $a=1, b=1$ 时，$p(x)$ 是常函数，且 $Be(1,1)=U(0,1)$.

Beta 分布的特征：

矩母函数	$M(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{a+r}{a+b+r}\right)\frac{t^k}{k!}, \quad t<\lambda$
均值	$\mu=\frac{a}{a+b}$
方差	$\sigma^2=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

注

$$\beta(1,1)=U(0,1)$$

命题 4.12

令独立随机变量 $X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda), X_2\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$，则 $\frac{X_1}{X_1+X_2}\sim\beta(\alpha_1,\alpha_2)$

证明

4.3 正态分布及其导出分布

4.3.1 正态分布

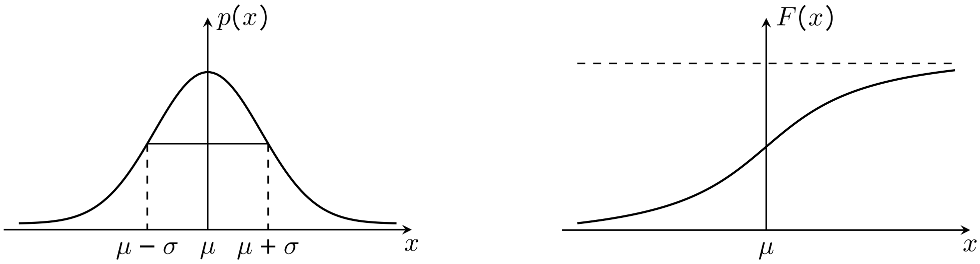
定义 4.15

若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

则称 X 服从**正态分布** (Normal distribution)，称 X 为**正态变量**，记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。其中参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$。♣

正态分布的密度函数 $p(x)$ 的图形如图 4.5(a) 所示，是一条钟形曲线，左右关于 μ 对称，衰减速度由 σ 决定，$\mu \pm \sigma$ 是该曲线的拐点.



(a) 密度函数 $p(x)$　　(b) 分布函数 $F(x)$

图 4.5: 正态分布

正态分布的特征：

矩母函数　$M(t) = \exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}), \quad t \in \mathbb{R}$

均值　$\mu = \mu$

方差　$\sigma^2 = \sigma^2$

命题 4.13

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则其线性变换 $a, b \in \mathbb{R}, aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$。特别的，常对正态随机变量作标准化：$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ ♠

证明

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at) = \exp(bt + a\mu t + \frac{a^2\sigma^2t^2}{2})$$

命题 4.14

若独立随机变量 $X_1, \cdots, X_k$ 满足 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，则其和 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim N(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2)$ ♠

证明

$$M_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \exp(\sum_{i=1}^k \mu_i t + \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_i^2 t^2}{2})$$

推论 4.1

若随机变量 $X_1, \cdots, X_k$ i. i. d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$，则其平均 $\overline{X} = (X_1 + \cdots + X_k)/k \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{k})$ ♡

定理 4.3

若随机变量 $X_1,\cdots,X_k\,\mathrm{i.i.d}\sim N(\mu,\sigma^2)$，并且定义其样本均值为 $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，其样本方差为 $S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X_n})^2$，则有以下关系：

1. $\overline{X_n}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，即 $\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)/\sigma\sim N(0,1)$
2. 随机变量 $\overline{X_n}$ 与随机向量 $(X_1-\overline{X_n},\cdots,X_n-\overline{X_n})$ 独立
3. $\overline{X_n},S_n^2$ 独立
4. $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma}\sim\chi_n$
5. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)}{S_n}\sim t_{n-1}$

证明

4.3.2 卡方分布

定义 4.16

设 $Z_1,\ldots,Z_n$ 独立同分布于标准正态分布 $N(0,1)$，则 $X=Z_1^2+\ldots+Z_n^2$ 的分布称为 n **自由度的卡方分布** (Chi-square distribution)，记为 $X\sim\chi_n^2$.

卡方分布的特征：

参数 $n\in\mathbb{N}_+$

概率密度函数 $p(x)=\begin{cases}\frac{(1/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}y^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

矩母函数 $M(t)=(\frac{1}{1-2t})^{\frac{n}{2}}$

均值 $\mu=n$

方差 $\sigma^2=2n$

实例

该密度函数的图像是一个只取非负值的偏态分布, 见图 4.6。

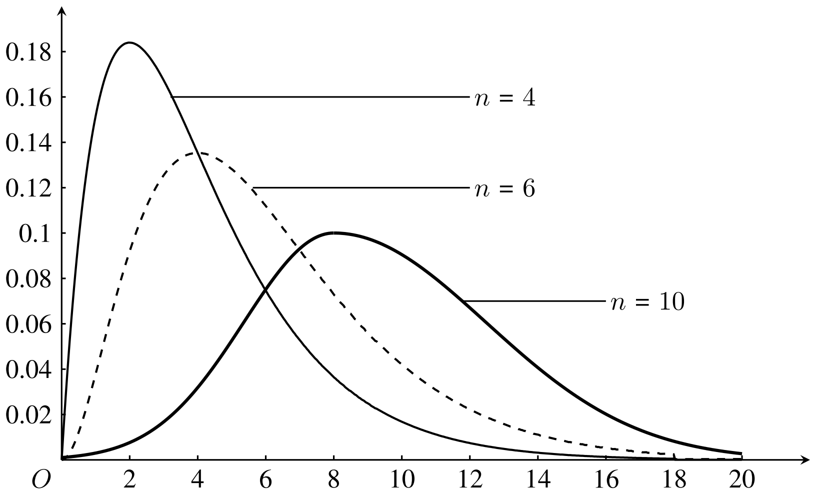


图 4.6: $\chi^2(n)$ 分布的密度函数

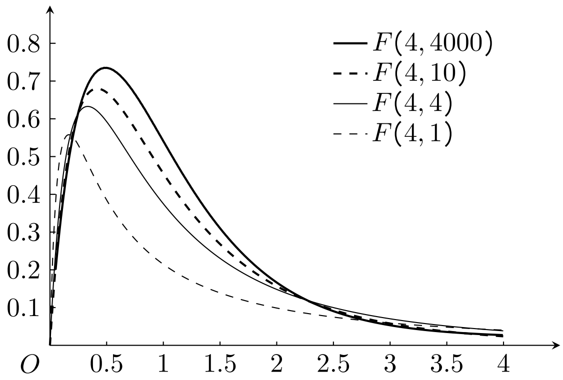


图 4.7: F 分布的密度函数，是一个只取非负值的偏态分布

命题 4.15

若 $X \sim N(0,1)$，则 $X^2 \sim Ga(1/2,1/2), Y \sim Ga(n/2,1/2) = \chi^2(n)$

证明

推论 4.2

若随机变量 $X_1, \cdots, X_k, \text{i.i.d.} \sim \chi^2_{n_i}$，则 $Y = X_1 + \cdots + X_k \sim \chi^2_{n_1+\cdots+n_k}$。

4.3.3 F 分布

定义 4.17

设独立随机变量 $X_1 \sim \chi^2(m), X_2 \sim \chi^2(n)$，则称 $F = \frac{X_1/m}{X_2/n}$ 的分布是自由度为 m 与 n 的 **F 分布**，记为 $F \sim F(m,n)$，其中 m 称为分子自由度，n 称为分母自由度。

F 分布的特征：

参数 $m, n \in \mathbb{N}_+$

概率密度函数

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

矩母函数 不存在

均值 $\mu = \frac{n}{n-2}$

方差 $\sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

实例

命题 4.16

F 分布的密度函数为

证明 首先我们导出 $Z = \frac{X_1}{X_2}$ 的密度函数，若记 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 分别为 $\chi^2(m)$ 和 $\chi^2(n)$ 的密度函数，根据独立随机

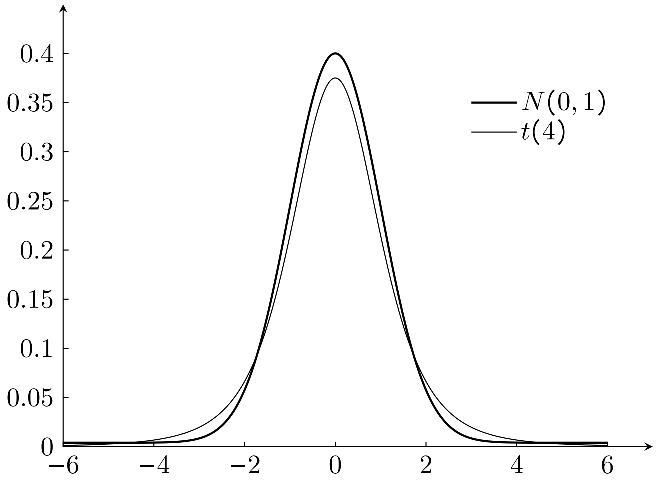


图 4.8: t 分布与 $N(0,1)$ 的密度函数，t 分布尾更重

变量商的分布的密度函数公式2.2。Z 的密度函数为

$$\begin{aligned}p_Z(z) &= \int_0^{=\infty} x_2 p_1(zx_2)p_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2\\ &= \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}}\int_0^{+\infty} x_2^{\frac{m+n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{2}(1+z)}\,\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

运用变换 $u=\frac{x_2}{2}(1+z)$, 可得

$$p_Z(z)=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}u^{\frac{m+n}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

最后的定积分为伽马函数 $\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$, 从而

$$p_Z(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}},\quad z>0.$$

第二步, 我们导出 $F=\frac{n}{m}Z$ 的密度函数, 对 $y>0$, 有

$$\begin{aligned}p_F(y) &= p_Z\left(\frac{m}{n}y\right)\cdot\frac{m}{n}\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}y\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}\cdot\frac{m}{n}\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}.\end{aligned}$$

注 由 F 分布的构造知, 若 $F\sim F(m,n)$, 则有 $1/F\sim F(n,m)$

4.3.4 t 分布

定义 4.18

设随机变量 $Z\sim N(0,1)$ 与 $U\sim\chi_n^2$ 独立，则称 $t=\frac{Z}{\sqrt{U/n}}$ 的分布为自由度为 n 的 **t 分布**, 记为 $t\sim t_n$.

t 分布的密度函数的图像是一个关于纵轴对称的分布 (图 4.8), 与标准正态分布的密度函数形状类似, 只是峰比标准正态分布低一些, 尾部的概率比标准正态分布的大一些.

t 分布的特征：

参数 $n\in\mathbb{N}_+$

概率密度函数 $p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

矩母函数 不存在

均值 $\mu = 0, n > 1$

方差 $\sigma^2 = \frac{n}{n-2}, n > 2$

实例

注

- 自由度 $n = 1$ 的 t 分布就是标准柯西分布，它的均值不存在;
- 自由度 $n \to \infty$ 时，t_n 趋近于 $N(0,1)$

命题 4.17

t 分布的密度函数为

证明 由标准正态密度函数的对称性知, X_1 与 $-X_1$ 有相同分布, 从而 t 与 $-t$ 有相同分布. 这意味着: 对任意实数 y 有

$$P(0 < t < y) = P(-y < -t < y) = P(-y < -t < 0).$$

于是

$$P(0 < t < y) = \frac{1}{2}P(t^2 < y^2).$$

由 F 变量构造可知, $t^2 = \frac{X_1^2}{X_2^2/n} \sim F(1,n)$, 将上式两边关于 y 求导可微 t 分布的密度函数为

$$\begin{aligned} p_t(y) = yp_F(y^2) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+\frac{1}{n}y^2\right)^{-\frac{1+n}{2}} y \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

4.3.5 柯西分布

定义 4.19

若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}, x \in \mathbb{R}$$

则称 X 服从**柯西分布** (Cauchy distribution)，记作 $X \sim C(\mu, \sigma)$。其中参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$。

柯西分布的特征：

累积函数 $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\mu + \sigma x)$

矩母函数 除 $t = 0$ 外不存在

特征函数 $\phi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma|t|)$

均值 不存在

方差 不存在

注 此类因极端值概率密度较高而导致均值、方差不存在的分布称为重尾分布。

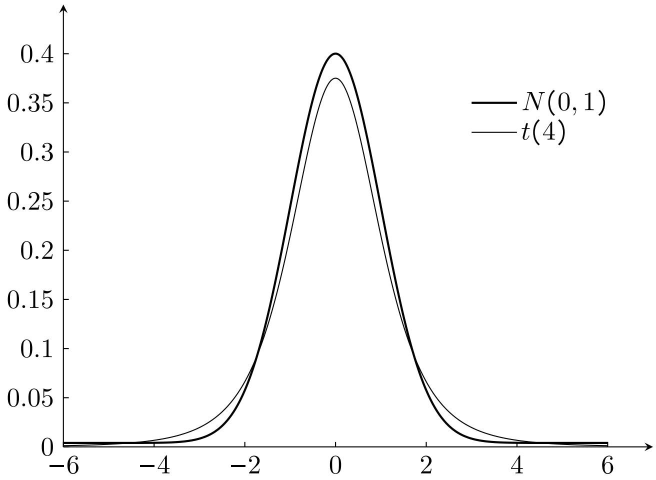
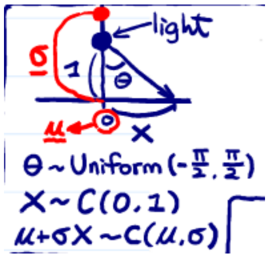


图 4.9: t 分布与 $N(0,1)$ 的密度函数



命题 4.18

$C(0,1)=t_1$

命题 4.19

若随机变量 X,Y i.i.d. $\sim N(0,1)$，则 $\frac{X}{Y}\sim C(0,1)$

证明

命题 4.20

若随机变量 $X\sim C(\mu,\sigma)$，则其线性变换 $a,b\in\mathbb{R}, aX+b\sim C(a\mu+b,|a|\sigma)$。

证明

$$\phi_{aX+b}(t)=e^{ibt}\phi_X(at)=\exp(ibt+ia\mu t-\sigma|at|)$$

命题 4.21

若独立随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ 满足 $X_i\sim C(\mu_i,\sigma_i)$，则其和 $Y=X_1+\cdots+X_k\sim N(\sum_{i=1}^k\mu_i,\sum_{i=1}^k\sigma_i)$

证明

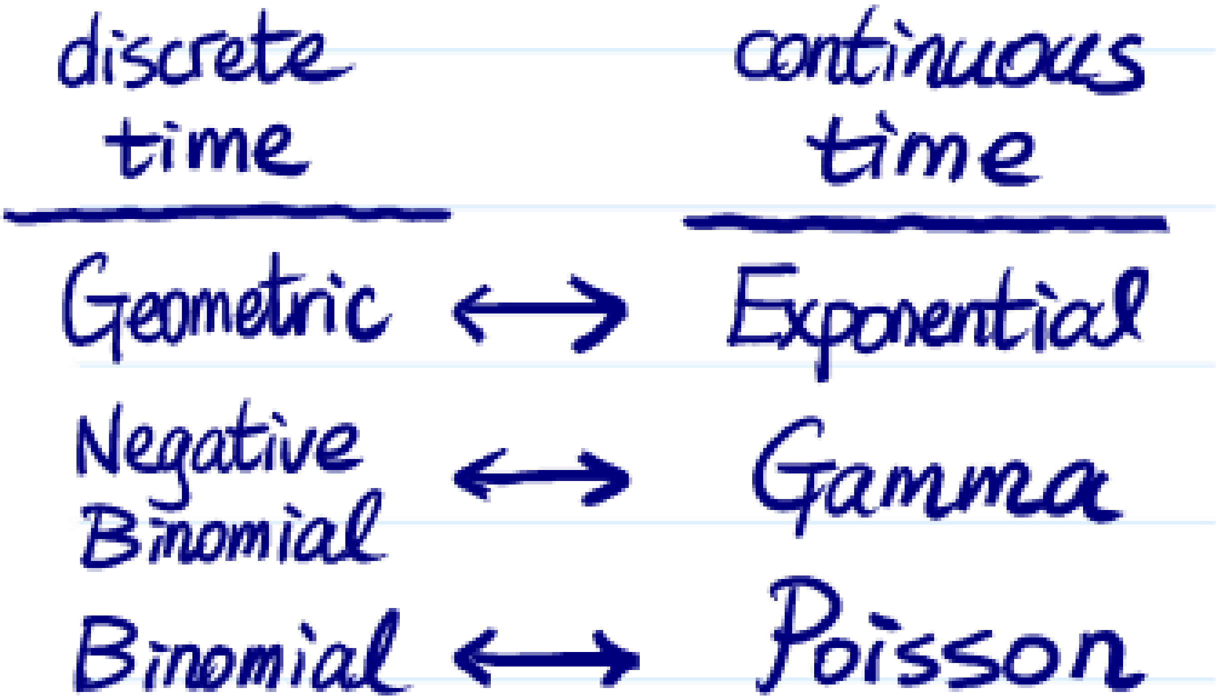
$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}=\prod_{i=1}^n\phi_{X_i}(t)=\exp(it\sum_{i=1}^k\mu_i-|t|\sum_{i=1}^k\sigma_i)$$

推论 4.3

若随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$，则其平均 $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_k)/k\sim C(\mu,\sigma)$

注 此处的 σ 不代表方差，所以不遵守 $\mathrm{Var}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{k}$ 的关系。

4.4 各分布间关系


discrete time
continuous time
Geometric ⟷ Exponential
Negative Binomial ⟷ Gamma
Binomial ⟷ Poisson

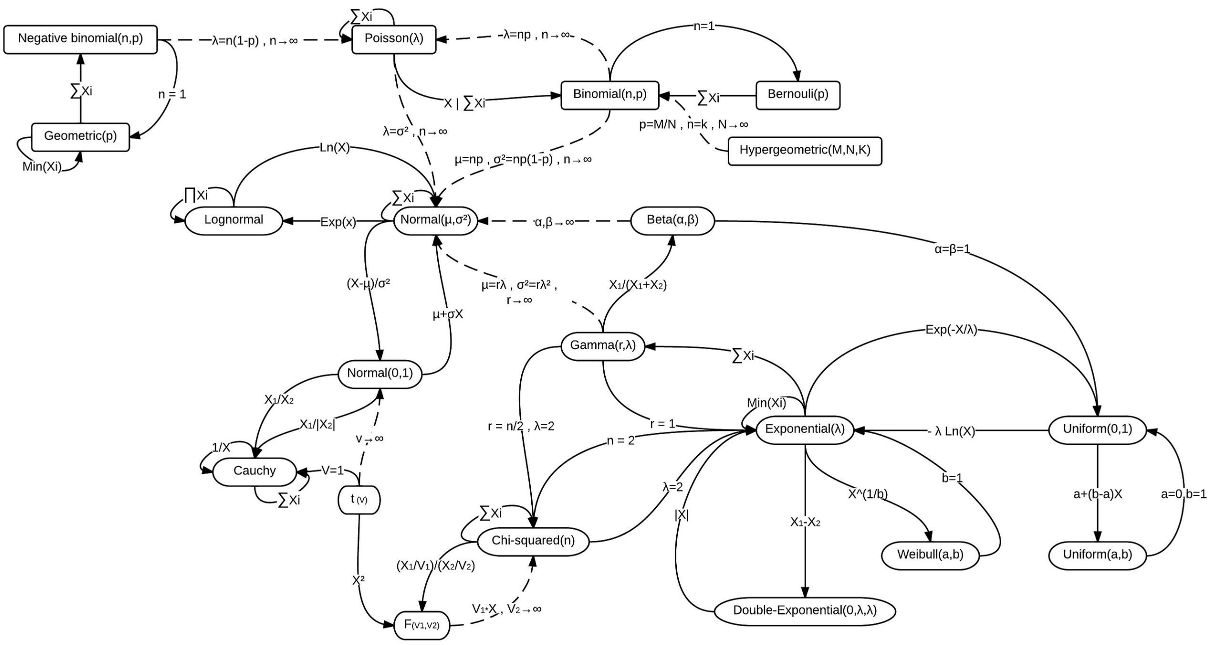


图 **4.10:** 各分布间的联系

第 5 章 概率极限

考试重点

- ❑ 收敛性
- ❑ Borel-Cantelli 引理
- ❑ 各种概率不等式
- ❑ 特征函数在处理概率极限定理中的应用
- ❑ 各种大数定律及证明，如雷尔-康特立引理
- ❑ 中心极限定理

5.1 收敛

定义 5.1

若随机变量序列 $\{X_n : \Omega \to \mathbb{R}\}$ 与随机变量 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 间存在以下关系：

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\right\} = 1, \forall \epsilon > 0$$

则称 X_n **几乎必然收敛** (converges almost surely) 于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$。 ♣

注 类似于微积分中逐点收敛的条件。考察满足条件 $\lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon$ 的样本点，这些样本点组成事件的概率为 1。

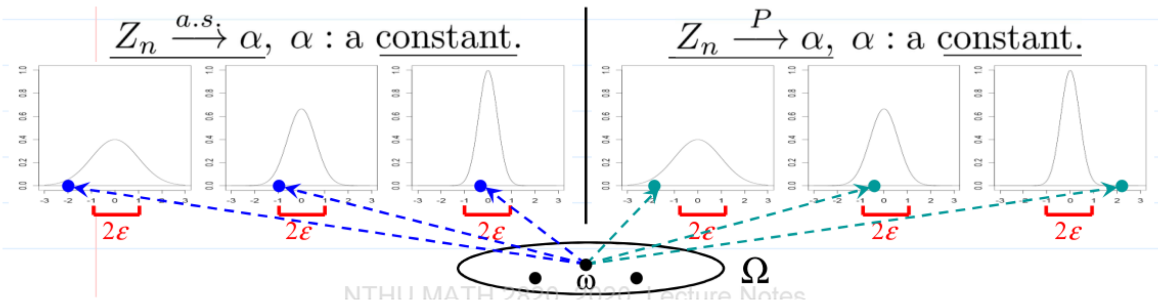
定义 5.2

若随机变量序列 $\{X_n : \Omega \to \mathbb{R}\}$ 与随机变量 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 间存在以下关系：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\} = 1, \ \forall \varepsilon > 0.$$

则称 X_n **依概率收敛** (converges in probability) 于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$。 ♣

注 即对于 Z_i，事件 $A_i = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$，$P(A_i)$ 将逐渐变为 1。



注 对于几乎必然收敛的情况，每个样本点上的序列随机变量都在逐渐趋近收敛变量；而对于依概率收敛的情况，由于对某个样本点的概率为 0（例如连续随机变量），可能某一次样本点的序列随机变量接近收敛变量，下一次又离开收敛变量，只有保证总体概率趋近 1 即可。

易见 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$, 但是反之不成立, 例如概率空间 $((0,1], \mathscr{B}_{(0,1]}, \text{Uniform}((0,1]))$ 上的打字机序列

$$\xi_n = \mathbb{1}_{(n/2^k - 1, (n+1)/2^k - 1]}, \quad 2^k \le n < 2^{k+1}$$

适合 $\mathbb{P}\{|\xi_n| > \varepsilon\} \le 1/2^k \to 0$, 而 $\overline{\lim}\, \xi_n \equiv 1$ 且 $\underline{\lim}\, \xi_n \equiv 0$, 所以 $\lim \xi_n(\omega)$ 对 $\forall \omega \in (0,1]$ 都不存在.

命题 5.1

依概率收敛是几乎必然收敛的必要条件，但不是充分条件。

例题 5.1 依概率收敛而不几乎必然收敛的实例：设样本空间为 $\Omega = (0,1]$，概率均匀分布在样本空间上，即 $P([a,b]) = b-a, 0 < a < b < 1$。接下来对于 $k \in \mathbb{N}_+$，将区间 $(0,1]$ 分为 2^k 个等长的子区间，并分别记为 $I_{k,j} = (\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$。

按以下方式定义随机变量序列 $\{X_n : \Omega \to \mathbb{R}\}$：

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in I_{k,j} \\ 0, \omega \notin I_{k,j} \end{cases}, \quad n = 2^k + j - 2$$

同时定义随机变量 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $X(\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega$

由于对任意 $0 < \epsilon < 1$

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\} = 1 - \frac{1}{2^K} \to 1$$

所以 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$。然而对于任意 $\omega \in \Omega$，无论 k 为何数，此次分割中，总有一个区间包含此样本点。即有无数个 $X_i(\omega) = 1$。所以

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\right\} = \mathbb{P}\{\varnothing\} = 0$$

所以 X_n 不几乎必然收敛到 X。

定义 5.3

设随机变量 $X, X_1, X_2, \ldots$ 的分布函数分别为 $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$。若对 $F(x)$ 的任一连续点 x, 都有

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{F_n(x)\}$ **弱收敛**于 $F(x)$, 记作 $F_n(x) \xrightarrow{W} \to F(x)$；也称 $\{X_n\}$ 按**分布收敛**于 X，记作 $X_n \xrightarrow{d} \to X$

命题 5.2

依分布收敛是依概率收敛的必要条件，但不是充分条件。但若依概率收敛到一个常数随机变量，则也可推出依分布收敛。

定理 5.1 (连续映射定理)

设 $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ 为连续 函数，则随机向量序列通过次映射后收敛情况与原先相同：

$$X_n^{(i)} \xrightarrow{\text{a.s.}} X^{(i)} \Rightarrow g(X_n^{(1)}, \cdots X_n^{(k)}) \xrightarrow{\text{a.s.}} g(X^{(1)}, \cdots X^{(k)})$$

$$X_n^{(i)} \xrightarrow{\mathbb{P}} X^{(i)} \Rightarrow g(X_n^{(1)}, \cdots X_n^{(k)}) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X^{(1)}, \cdots X^{(k)})$$

$$(X_n^{(i)}) \xrightarrow{d} (X^{(i)}) \Rightarrow g(X_n^{(1)}, \cdots X_n^{(k)}) \xrightarrow{d} g(X^{(1)}, \cdots X^{(k)})$$

注 随机向量依分布收敛是指联合 分布函数收敛。

定理 5.2 (Slutsky 定理)

若 $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{P} a$，其中 a 是常数，则：

- $Y_n X_n \xrightarrow{d} aX$
- $Y_n + X_n \xrightarrow{d} a + X$
- $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{a}$，若对所有的 n 都有 $P(Y_n \neq 0) = 1$，并且 $a \neq 0$

证明 由条件可知，$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, a)$，且 $g_1(X_n, Y_n) = X_nY_n, g_2(X_n, Y_n) = X_n + Y_n, g_3(X_n, Y_n) = \frac{X_n}{Y_n}$ 都是连续函数（g_3 在定理中的限制下），所以仍然保持依分布收敛。

注 当 $Y_n \xrightarrow{P} a$ 才能得出 $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, a)$；若 Y_n 依分布收敛到其他随机变量，则未必成立。

定理 5.3 (theta 方法的极限定理)

设

$$\frac{\sqrt{n}(X_n - \theta)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

那么对于连续函数 g，若 $g'(\theta) \neq 0$ 存在，则

$$\frac{\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta))}{\sigma|g'(\theta)|} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

证明

定理 5.4 (连续性定理)

设 $F_n(x)$ 是一个累计函数序列，并且分别对应矩母函数 $M_n(t)$；$F(x)$ 是一个累计函数，并且对应矩母函数 $M(t)$。那么，

$$\forall t \in U(0, \delta), s.t. \lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$$

是在 $F(x)$ 的所有连续点上 $F_n(x) \xrightarrow{M} F(x)$ 的充要条件。

注 若矩母函数不存在，替换成特征函数，定理也成立。但是，不能替换成密度函数或质量函数

例题 5.2 离散情况：

设均匀随机变量 $X_n \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，那么 $X_n \xrightarrow{d} 0$。然而 $P_n(x) \to 0, \forall x \in \mathbb{R}$（不满足质量函数定义），并且 $\lim_{n\to\infty} F_n(0) = \frac{1}{2}$（不满足累积函数定义）

连续情况：

设累积函数为 $F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}, 0 < x < 1$，那么 $F_n \xrightarrow{d} U(0, 1)$。然而 $f_n(x)$ 无极限

例题 5.3 泊松分布收敛于正态分布 令 $X_n \sim P(\lambda_n)$，并且 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$。将变量标准化：

$$Z_n = \frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$$

那么

$$M_{Z_n}(t) = \mathrm{e}^{-t\sqrt{\lambda_n}} M_{X_n}(t)(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}) = \exp(-t\sqrt{\lambda_n} + \lambda_n(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}-1}))$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \ln(M_{Z_n}(t)) = \lim_{\lambda_n\to\infty} -t\sqrt{\lambda_n} + \lambda_n(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}-1}) = \frac{t^2}{2}$$

所以 $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$，即若 λ 很大，可通过 $N(\lambda, \lambda)$ 估计 $P(\lambda)$

5.2 大数定理

定理 5.5 (弱大数定理)

设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $E(X_i) = \mu, \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$，那么

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

注 柯西分布无均值、方差，不能使用此定理。

证明 易知

$$E(\overline{X_n}) = \mu, \mathrm{Var}(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

再通过切比雪夫不等式有：

$$P(\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \epsilon) < \frac{\mathrm{Var}(\overline{X_n})}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

定理 5.6 (强大数定理)

设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $E(X_i) = \mu, \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$，那么

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$$

例题 5.4 蒙特卡洛积分 为计算积分 $I(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，生成随机数 $X_1, \cdots, X_n$ i. i. d. $\sim U(0,1)$，并且计算 $\hat{I}(f) = \overline{Y_n}, Y_i = f(X_n)$。由于 $X_1, \cdots, X_n$ i. i. d.，所以 $Y_1, \cdots, Y_n$ i. i. d.；并且 $E(Y_i) = E(f(X_i)) = \int_0^1 f(x)\cdot 1\mathrm{d}x = I(f)$，所以 $\hat{I}(f) \xrightarrow{\mathbb{P}} E(Y_i) = I(f)$

例题 5.5 样本方差 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ i. i. d.，并且均值和方差分别为 μ, σ。令：

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n}) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - \overline{X_n}^2 +$$

由于 $g(x) = x^2$ 是连续函数，所以 $\overline{X_n}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu^2$。由于 $X_1^2, \cdots X_n^2$ i. i. d.，且 $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$，所以 $\overline{X_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu^2 + \sigma^2$。因此：

$$S_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

例题 5.6 若 $X_n \sim t_n$，则 $X_n \xrightarrow{d} N(0,1)$。令 $Z \sim N(0,1), U_1, \cdots, U_n \sim \chi_1^2$ 相互独立，则 $\frac{Z}{\sqrt{(U_1+\cdots+U_n)/n}} \sim t_n$。由于 $E(U_i) = 1$，所以 $\overline{U_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$，所以 $\sqrt{\overline{U_n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$，所以 $t_n = \frac{Z}{\sqrt{\overline{U_n}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$（定理5.2）。

例题 5.7 若 $X_n \sim F_{m,n}$，则 $mX_n \xrightarrow{d} \chi_m^2$。令 $U \sim \chi_m^2, V_1, \cdots, V_n \sim \chi_1^2$ 相互独立，则 $\frac{U/m}{(V_1+\cdots+V_n)/n} \sim F_{m,n}$。由于 $E(V_i) = 1$，所以 $\overline{V_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$，所以 $mF_{m,n} = \frac{U}{\overline{V_n}} \xrightarrow{d} \chi_m^2$（定理5.2）。

5.3 中央极限定理

定理 5.7 (中央极限定理)

设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, i. i. d.，且 $E(X_i) = \mu, \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$，令

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

则：

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{T_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \leq x) = \Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的累积函数，即：

$$\frac{T_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

证明 令 $W_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma}$，则 $E(W_i) = 0, \mathrm{Var}(W_i) = 1$。再令 $Z_n = \frac{T_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n W_i$。则

$$\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= \left[M_W(\frac{t}{\sqrt{n}})\right]^n \\
&= \left[M_W(0) + M_W'(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{M_W''(0)}{2}(\frac{t}{\sqrt{n}})^2 + o(\frac{1}{n})\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right]^n \\
&\to e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

根据定理5.4，$Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$。

注 若矩母函数不存在，可替换为特征函数。

例题 5.8 二项分布近似为正态分布 若随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ i. i. d. $\sim B(1,p)$, 则 $T_n \sim B(n,p)$. 其中 $E(T_n) = nE_(X_i) = np, \mathrm{Var}(T_n) = n\,\mathrm{Var}(X_i) = np(1-p)$. 根据中央极限定理有:

$$\frac{T_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

即当 n 很大时, $B(n,p)$ 可用 $N(np, np(1-p))$ 近似.

注 其他与二项分布一样, 可以通过独立同分布的随机变量相加得到的分布, 也可在一定条件下近似为正态分布. 例如 Gamma 分布 (可通过指数分布相加得到), 泊松分布 (泊松分布相加), 负二项分布 (几何分布相加), 参见图4.10

注 由定理4.1可知, 当 $B(n,p)$ 中 n 很大 p 很小时, 二项分布可近似为泊松分布; 而泊松分布 λ 很大时, 又可近似为正态分布.

例题 5.9 测量误差估计 假设每次测量结果为独立同分布的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, 其均值与方差分别为 μ, σ^2. 由中央极限定理可知 $\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$. 由例5.5可知 $S_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$, 即 $\frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$(定理5.2). 所以:

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{S_n} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma}\frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)\cdot 1 = N(0,1)$$

即可以通过分布 $N(0, \frac{S_n^2}{n})$ 估计测量误差 $\overline{X_n} - \mu$

注 由定理4.3可知 $\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)}{S_n} \sim t_{n-1}$. 但由例5.6可知, $n \to \infty$ 时, t 分布收敛于正态分布, 所以不冲突.

附录 A 基本数学工具

A.1 集合论与测度论

A.2 排列与组合

全部组合分析公式的推导基于下列两条原理：

乘法原理 若进行 A_1 过程有 n_l 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再接着进行 A_2 程共有 $n_1 \cdot n_2$ 种方法

加法原理 若进行 A_1 过程有 n_l 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，假定 A_1 过程与 A_2 过程是并行的，则进行过程 A_1 或过程 A_2 的方法共有 $n_1 + n_2$ 种

排列与组合的定义及其计算公式如下.

排列 从 n 个不同元素中任取 $r(r \leq n)$ 个元素排成一列 (考虑元素先后出现次序), 称此为一个排列, 此种排列的总数记为 P_n^r, 按乘法原理, 取出的第一个元素有 n 种取法, 取出的第二个元素有 $n-1$ 种取法...取出的第 r 个元素有 $n-r+1$ 种取法, 所以有

$$P_n^r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r!)}$$

若 $r = n$, 则称为全排列, 记为 $_n$. 显然, 全排列 $P_n = n!$.

重复排列 从 n 个不同元素中每次取出一个, 放回后再取下一个, 如此连续取 r 次所得的排列称为重复排列, 此种重复排列数共有 n^r 个. 注意这里的 r 允许大于 n.

组合 从 n 个不同元素中任取 $r(r \leq n)$ 个元素并成一组 (不考虑元素间的先后次序), 称此为一个组合, 此种组合的总数记为 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r. 按乘法原理此种组合的总数为

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

在此规定 $0! = 1$ 与 $\binom{n}{0} = 1$.

重复组合 从 n 个不同元素中每次取出一个, 放回后再取下一个, 如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合, 此种重复组合总数为 $\binom{n+r-1}{r}$. 注意这里的 r 也允许大于 n.

上述四种排列组合及其总数计算公式，在确定概率的古典方法中经常使用，但在使用中要注意识别有序与无序、重复与不重复。

定理 A.1 (牛顿二项式定理)

若对于任意实数 α 定义

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{A_r^\alpha}{r!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$$

则有牛顿二项式：

$$(1+x)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r$$

证明