概率论笔记

作者：肖程哲

时间：August 13, 2022

苟日新，日日新，又日新

目录

第 1 章 概率基础 **1**

1.1 概率空间 1

1.1.1 随机事件 1

1.1.2 概率空间 2

1.1.3 概率的性质 3

1.2 古典概型与几何概型 5

1.2.1 古典概型 5

1.2.2 几何概型 6

1.2.3 Bertrand 奇论 8

1.3 条件概率 9

1.4 独立性 11

第 1 章 练习 13

第 2 章 随机变量 **12**

2.1 随机变量的分布 12

2.2 多元随机变量 14

2.2.1 边际分布 15

2.2.2 条件分布 15

2.2.3 独立 16

2.3 随机变量的函数 16

2.3.1 分布函数法 17

2.3.2 Copula 18

2.3.3 概率密度函数法 19

2.3.4 矩母函数法 20

2.3.5 次序统计量 20

第 3 章 随机变量的数值特征 **22**

3.1 期望 22

3.1.1 均值 22

3.1.2 方差 23

3.1.3 协方差 24

3.1.4 条件期望 25

3.2 矩母函数与特征函数 26

3.2.1 矩 26

3.2.2 矩母函数 27

3.2.3 联合特征函数 28

3.2.4 特征函数 28

3.3 估计与预测 29

3.3.1 delta 法 29

3.3.2 预测 29

3.4 熵与信息 29

3.5 其他特征 29

第 4 章 常见分布 **30**

4.1 离散分布 30

4.1.1 均匀分布 30

4.1.2 伯努利分布 30

4.1.3 二项分布 31

4.1.4 几何分布 32

4.1.5 负二项分布 33

4.1.6 多项分布 34

4.1.7 泊松分布 35

4.1.8 超几何分布 37

4.2 连续分布 38

4.2.1 均匀分布 38

4.2.2 指数分布 38

4.2.3 伽马分布 40

4.2.4 贝塔分布 41

4.3 正态分布及其导出分布 43

4.3.1 正态分布 43

4.3.2 卡方分布 44

4.3.3 F 分布 45

4.3.4 t 分布 46

4.3.5 柯西分布 47

4.4 各分布间关系 49

第 5 章 概率极限 **51**

5.1 收敛 51

5.2 大数定理 53

5.3 中央极限定理 54

第 A 章 测度论基础 **56**

A.1 可测空间和可测映射 56

A.1.1 集合及其运算 56

附录 A 测度论基础

简而言之，测度论可以理解为在抽象空间建立类似于实变函数中测度、积分和导数那样的分析系统。

A.1 可测空间和可测映射

A.1.1 集合及其运算

考虑一个任意非空集合 X，称之为**空间**。X 的子集以 $A.B, C, \cdots$ 等记之，称之为这个空间的**集合**。空集记为 $\varnothing$。X 的成员称为**元素**。元素 x 属于集合 A，记作 $x \in A$；反之，元素 x 不属于集合 A，则用记号 $x \notin A$ 来表示。

定义 A.1

空间 X 上定义的实函数

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

称为 A 的**指示函数**。

定义 A.2 (集合的运算)

给定集合 A 和 B，集合

余	$A^{\mathsf{C}} := \{x \in X \mid x \notin A\}$
并	$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
交	$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
差	$A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
对称差	$A \bigtriangleup B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

定义 A.3 (集合的极限)

设 $\{A_n\}$ 是一个集合序列，

1. 若

$$\forall n \in N_+, \quad A_{n+1} \subseteq A_n$$

则称 $\{A_n\}$ 为**非降**的，记为 $A_n \uparrow$，并称

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

为它的**极限**.

2. 若

$$\forall n \in N_+, \quad A_n \subseteq A_{n+1}$$

则称 $\{A_n\}$ 为**非增**的，记为 $A_n \downarrow$，并称

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

为它的**极限**.

非降或非增的集合序列统称为**单调序列**. 因此, 单调集合序列总有极限.

定义 A.4 (上极限与下极限)

对于任意给定的一个集合序列 $\{A_n\}$, 集合序列 $\{B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\}$ 与 $\{B_n' = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\}$ 分别是非降和非增的, 因而分别有极限:

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n' = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n' = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

分别称其为 $\{A_n\}$ 的**上极限与下极限**

显然，记号 $x \in \varlimsup_{n\to\infty} A_n$ 意味元素 x 属于序列 $\{A_n\}$ 中的无穷多个集合，而记号 $x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n$，则表明除去 $\{A_n\}$ 中的有限个集合外，元素 x 属于该序列的其余集合. 于是我们有

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

定义 A.5

如果 $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$, 则认为 $\{A_n\}$ 的极限存在, 并且将

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

称为它的**极限**.

A.1.2 集合系