Capítulo 7

Estimação

AMG, AFL, JFO (v11 – 2019)
adaptado de: *Estatística*,
Rui Campos Guimarães,
José A. Sarsfield Cabral

Slide 7b.-1

Conteúdo

Slide 7b.0

Resultados de aprendizagem

- Enunciar as propriedades desejáveis de estimadores
- Calcular o enviesamento e a eficiência de estimadores
- Comparar e escolher estimadores

Slide 7b.1

7.1 Introdução

Exemplo

Dados

- $Y \rightsquigarrow B(N, p)$, com N e p desconhecidos
- Amostra aleatória simples $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_K\}$

Pretende-se estimar os valores:

- de N e de p
- ou de outros parâmetros, como $\mu = N \cdot p$ ou $\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p)$

$\Rightarrow$ Definem-se estatísticas cujos valores particulares são estimativas dos parâmetros.

Por exemplo, seria razoável estimar μ a partir da média amostral:

$$\bar{Y} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} Y_k$$

Em que:

- $\bar{Y}$ é um estimador pontual de μ
- $\bar{y}$ (realização da estatística) constitui uma estimativa de μ

Slide 7b.2

Estimadores e Estimativas

Estimador pontual — é uma estatística $\hat{\Theta}$ cujos valores particulares $\hat{\theta}$ constituem estimativas do parâmetro populacional θ

Estimativa — é um valor particular $\hat{\theta}$ de um estimador que é função dos valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da amostra $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$

Exemplos:

- Média amostral — estimador do valor esperado da população
- Variância amostral — estimador da variância da população
- ...

Notas

- Amostras diferentes $\longrightarrow$ valores diferentes para o estimador (ou seja estimativas $\hat{\theta}$ diferentes) $\longrightarrow$ $\hat{\Theta}$ é uma variável aleatória
- Os estimadores pontuais são representados por letras maiúsculas ($\hat{\Theta}, \bar{Y}, \ldots$), enquanto as estimativas são representadas por letras minúsculas ($\hat{\theta}, \bar{y}, \ldots$)

Slide 7b.3

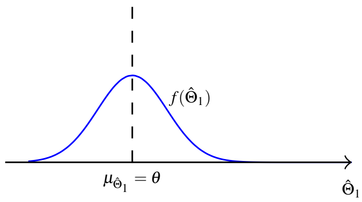
7.2 Propriedades desejáveis dos Estimadores Pontuais

7.2.1 Não-enviesamento

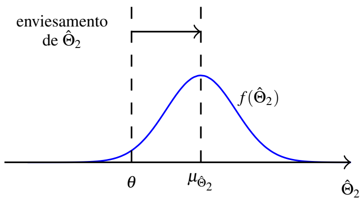
Enviesamento: diferença entre o valor esperado do estimador ($E(\hat{\Theta}) = \mu_{\hat{\Theta}}$) e o valor do parâmetro (θ)

$$\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}} = E(\hat{\Theta}) - \theta = \mu_{\hat{\Theta}} - \theta$$

(estimador não-enviesado)



(estimador enviesado)



- Se o enviesamento for nulo o estimador diz-se não-enviesado, cêntrico ou sem distorção
- O estimador diz-se assintoticamente não-enviesado se

$$\lim_{N\to\infty} E(\hat{\Theta}) - \theta \;=\; 0$$

Slide 7b.4

Exemplos de estimadores da *média populacional* (μ_x)
Para uma população caracterizada pela v.a. X, da qual se retiram amostras de dimensão N, consideram-se os seguintes estivadores

Média amostral, $\bar{X} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$:

$$\text{Enviesamento}_{\bar{X}} = E(\bar{X}) - \mu_x = E\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n\right) - \mu_x = \mu_x - \mu_x = 0$$

$\longrightarrow$ $\bar{X}$ é um estimador *não-enviesado* de μ_x

Mediana amostral, $\text{med}(X)$:

para distribuições *simétricas*, $E(\text{med}(X)) = \mu_X$

$$\text{Enviesamento}_{\text{med}(X)} = E(\text{med}(X)) - \mu_x = \mu_x - \mu_x = 0$$

$\longrightarrow$ $\text{med}(X)$ é um estimador *não-enviesado* de μ_x

para distribuições *assimétricas*, $E(\text{med}(X)) \neq \mu_X$

$$\text{Enviesamento}_{\text{med}(X)} = E(\text{med}(X)) - \mu_x \neq 0$$

$\longrightarrow \quad \text{med}(X)$ é um estimador *enviesado* de μ_x

Slide 7b.5

Exemplos de estimadores da *variância populacional* (σ_x^2)
Para uma população caracterizada pela v.a. X, da qual se retiram amostras de dimensão N, consideram-se os seguintes exemplos de estimadores

Desvio quadrático médio, $DQM(X) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})^2$:

$$\text{Enviesamento}_{DQM(X)} = E(DQM(X)) - \sigma_x^2 = E\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})^2\right) - \sigma_x^2 =$$

$$= \ldots = \tfrac{N-1}{N}\sigma_X^2 - \sigma_x^2 = -\tfrac{1}{N}\sigma_X^2 \neq 0$$

$\longrightarrow \quad DQM(X)$ é um estimador *enviesado* de σ_x^2

Varância amostral, $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})^2$:

$$\text{Enviesamento}_{s^2} = E(s^2) - \sigma_x^2 = E\left(\frac{N}{N-1}DQM\right) - \sigma_x^2 =$$

$$= \ldots = \tfrac{N}{N-1}\tfrac{N-1}{N}\sigma_X^2 - \sigma_x^2 = \sigma_X^2 - \sigma_X^2 = 0$$

$\longrightarrow \quad s^2$ é um estimador *não-enviesado* de σ_x^2

Slide 7b.6

7.2.2 Eficiência

Eficiência de um Estimador

- Reflecte a sua precisão potencial
- Pode ser medida através do seu Erro Quadrático Médio

  (medida de dispersão do estimador em redor do parâmetro estimado)

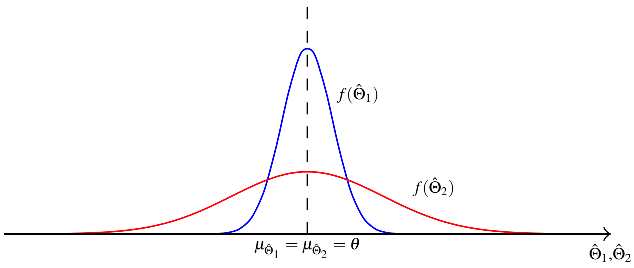
$$\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}} = E\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma_{\hat{\Theta}}^2 + (\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}})^2$$

Notas

- Como a eficiência de um estimador é calculada por uma medida de dispersão, pretende-se ter *valores baixos de eficiência*
- ou seja, quanto menor o valor da sua eficiência melhor é o estimador

Slide 7b.7

Eficiência entre estimadores não-enviesados



- O estimador $\hat{\Theta}_1$ é mais eficiente que o estimador $\hat{\Theta}_2$
- Estimador eficiente ou de fraca dispersão
- Um estimador é tanto "melhor" quanto menor for a sua variância

Slide 7b.8

Exemplo

Objectivo: estimar o valor esperado de uma população Normal com variância σ^2 a partir de estatísticas de uma amostra de tamanho N

Hipótese 1: média amostral $\bar{X}$

- $E(\bar{X}) = \mu_X \quad \rightarrow \quad$ estimador não enviesado
- $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2_X}{N}$ (conforme visto em capítulo anterior)

Hipótese 2: mediana amostral

- $E(Med) = \mu_X$ (distribuição normal é simétrica) $\rightarrow$ estimador não enviesado
- $\sigma^2_{Med} = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{N}$ (pode demonstrar-se)

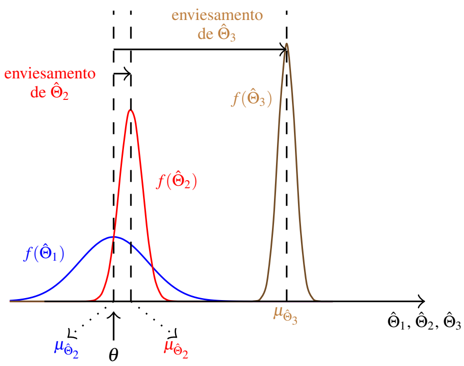
$\Rightarrow$ a mediana é um estimador menos eficiente:

A mediana teria que ser calculada sobre uma amostra 1.57 vezes maior do que aquela sobre a qual se calcula a média, para ambos os estimadores terem a mesma eficiência

Slide 7b.9

Comparação de estimadores enviesados

- Qual é o melhor estimador do parâmetro θ, $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ ou $\hat{\Theta}_3$, ?



$\hat{\Theta}_1$ é o estimador com menor enviesamento (tem enviesamento nulo)

$\Rightarrow$ $\hat{\Theta}_2$ é o estimador mais eficiente (menor Erro Quadrático Médio)

$\hat{\Theta}_3$ é o estimador com menor variância

Slide 7b.10

A comparação da eficiência entre diferentes estimadores faz-se com base no conceito de *eficiência relativa* entre estimadores

A *eficiência relativa* entre dois estimadores $\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$ de um parâmetro θ é dada por:

$$\text{Eficiência relativa}_{\frac{\hat{\Theta}_1}{\hat{\Theta}_2}} = \frac{E\left[(\hat{\Theta}_1 - \theta)^2\right]}{E\left[(\hat{\Theta}_2 - \theta)^2\right]} \qquad \left(= \frac{\sigma^2_{\hat{\Theta}_1} + (\text{Envies.}_{\hat{\Theta}_1})^2}{\sigma^2_{\hat{\Theta}_2} + (\text{Envies.}_{\hat{\Theta}_2})^2} \right)$$

Notas:

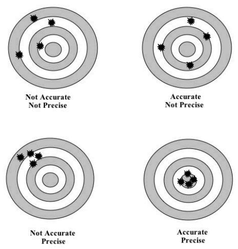
- Um estimador diz-se absolutamente eficiente se não existir outro estimador mais eficiente que ele
- Média amostral é o *estimador eficiente* do valor esperado para populações Normais

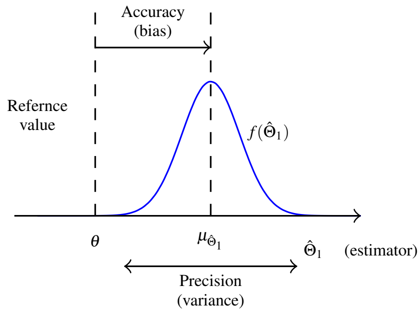
Slide 7b.11

Nota: Exactidão vs Precisão

Accuracy vs Precision

- Accuracy is how close an estimate is to the true value (bias)
- Precision is how close individual estimates are between each other (variance)

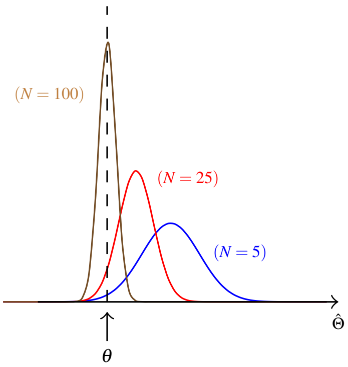




Slide 7b.12

7.2.3 Consistência

Estimador consistente: converge em probabilidade para o valor do parâmetro quando a dimensão da amostra N tende para ∞



Seja $\hat{\Theta}$ um estimador do parâmetro θ e N a dimensão da amostra com base na qual ele é calculado. Um estimador diz-se consistente se:

$$\forall_{\delta>0} \quad \lim_{N\to\infty} P[|\hat{\Theta}-\theta|<\delta]=1$$

(quando o tamanho da amostra tende para infinito o estimador concentra-se no seu alvo)

- Estimador consistente, coerente ou convergente
- A média amostral é um estimador consistente do valor esperado:
  - o enviesamento é nulo ($E(\bar{X})=\mu_X$)
  - a variância tende para 0 quando N tende para infinito ($\sigma^2_{\bar{X}}=\sigma^2_X/N$)

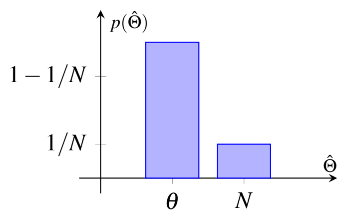
Slide 7b.13

Condições suficientes para a consistência de um estimador

São condições **suficientes** (mas não necessárias) para que um estimador seja consistente que o enviesamento e a variância do estimador tendam para zero quando a dimensão da amostra tender para infinito.

Exemplo: estimador $\hat{\Theta}$ do parâmetro θ com função de probabilidade:

$$p(\hat{\Theta})=\begin{cases} 1-\frac{1}{N}, \text{ para } \hat{\Theta}=\theta \\ \frac{1}{N}, \text{ para } \hat{\Theta}=N. \end{cases}$$



Verificação da consistência pela definição:

$$\lim_{N\to\infty} \text{Probabilidade}(|\hat{\Theta}-\theta|<\delta)=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)=1$$

(não) Verificação das condições suficientes de consistência:

- $E(\hat{\Theta})=\theta\times\left(1-\frac{1}{N}\right)+N\times\frac{1}{N}=\theta-\frac{\theta}{N}+1\neq\theta$
- $E[(\hat{\Theta}-\theta)^2]=(\theta-\theta)^2\left(1-\frac{1}{N}\right)+(N-\theta)^2\frac{1}{N}=N+\frac{\theta^2}{N}-2\theta\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$

Slide 7b.14

7.2.4 Outras características desejáveis

Outras características desejáveis nos estimadores

Suficiência
Capacidade de um estimador conseguir condensar toda a informação, relativa ao parâmetro estimado, presente nas observações que integram uma amostra

Robustez
É a propriedade de um estimador em se manter aproximadamente não-enviesado e eficiente para um grande conjunto de distribuições populacionais

Slide 7b.15

7.3 Exercícios

1. T_1 e T_2 são estimadores de um parâmetro θ, tais que:

$$E(T_1) = \theta \qquad Var(T_1) = 9 \qquad\qquad E(T_2) = 3\theta \qquad Var(T_2) = 3$$

Diga, justificando, qual destes estimadores é melhor estimador de θ.

(Resp.: Depende do valor de θ ...)

2. Considere uma população Normal e a estatística $T = \frac{X_1+2X_2}{3}$ para amostras aleatórias simples de dimensão 2.

   a) Determine a distribuição amostral de T e os respectivos parâmetros.

   (Resp.: $T \rightsquigarrow N\left(\mu_X, \frac{5}{9}\cdot\sigma_X^2\right)$)

   b) T é um estimador não-enviesado para μ?

   (Rep.: Sim, ...)

   c) Obtenha uma estimativa para T com base na amostra (7.8; 6.7).

   (Resp.: $t = 7.067$)

Slide 7b.16

3. Let $X1$ and $X2$ be independent random variables with mean μ and variance σ^2. Suppose that we have two estimators of μ:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X1+X2}{2} \qquad\qquad \hat{\Theta}_1 = \frac{X1+3X2}{4}$$

   a) Are both unbiased estimators of μ?

   b) What is the variance of each estimator?

   c) Which one is the most efficient estimator of μ?

Resolução:

   a) Cálculo dos valores esperados dos estimadores:

$$E(\hat{\Theta}_1) = E\left(\frac{X1+X2}{2}\right) = \frac{E(X1)+E(X2)}{2} = \frac{\mu+\mu}{2} = \mu$$

$$E(\hat{\Theta}_2) = E\left(\frac{X1+3X2}{4}\right) = \frac{E(X1)+3\cdot E(X2)}{4} = \frac{\mu+3\mu}{4} = \mu$$

   Cálculo dos enviesamentos:

$$\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_1} = E(\hat{\Theta}_1) - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_2} = E(\hat{\Theta}_2) - \mu = \mu - \mu = 0$$

   Logo, os dois estivadores são não enviesados.

   b) Cálculo das variâncias dos estimadores:

$$\sigma^2_{\hat{\Theta}_1} = Var(\hat{\Theta}_1) = Var\left(\frac{X1+X2}{2}\right) = \frac{Var(X1)+Var(X2)}{4} = \frac{\sigma^2+\sigma^2}{4} = \frac{1}{2}\cdot\sigma^2$$

$$\sigma^2_{\hat{\Theta}_2} = Var(\hat{\Theta}_2) = Var\left(\frac{X1+3X2}{4}\right) = \frac{Var(X1)+9\cdot Var(X2)}{16} = \frac{\sigma^2+9\sigma^2}{16} = \frac{5}{8}\cdot\sigma^2$$

c) Cálculo das eficiências dos estimadores:

$$\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_1} = E\left[(\hat{\Theta}_1 - \mu)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}_1} + (\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_1})^2 = \frac{1}{2}\cdot\sigma^2 + 0 = \frac{1}{2}\cdot\sigma^2$$

$$\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_2} = E\left[(\hat{\Theta}_2 - \mu)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}_2} + (\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_2})^2 = \frac{5}{8}\cdot\sigma^2 + 0 = \frac{5}{8}\cdot\sigma^2$$

Cálculo da eficiência relativa entre os dois estimadores:

$$\text{Eficiência relativa}_{\frac{\hat{\Theta}_1}{\hat{\Theta}_2}} = \frac{\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_1}}{\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2}{\frac{5}{8}\cdot\sigma^2} = \frac{4}{5}$$

Logo, o estimador $\hat{\Theta}_1$ é o mais eficiente porque a eficiência relativa é menor do que 1 (nota: um estimador será tanto melhor quanto menor for o valor da sua eficiência).

Resolução alternativa: como neste caso os dois estimadores são não enviesados o mais eficiente será o que tiver menor variância, logo será o estimador $\hat{\Theta}_1$

Slide 7b.17