

# MEAPS

Maxime Parodi      Xavier Timbeau

01/02/2023

# Table des matières

<b>1 Licence</b>	<b>3</b>
<b>2 Tobler n'implique pas la gravité</b>	<b>5</b>
<b>3 MEAPS : aspects théoriques</b>	<b>8</b>
<b>4 MEAPS : simulations synthétiques</b>	<b>22</b>
<b>5 MEAPS : estimation à La Rochelle</b>	<b>33</b>
<b>6 Scénarios à la Rochelle</b>	<b>53</b>
<b>Références</b>	<b>54</b>

# 1 Licence

Le modèle gravitaire utilisé pour distribuer les trajets entre une origine et une destination représente mal l'influence de la distance sur les choix. En partant du modèle des “*intervening opportunities*” de Stouffer (1940) et du modèle radiatif de Simini et al. (2012), nous construisons un modèle ergodique d’absorption avec priorité et saturation (*MEAPS*) qui permet de construire ces choix sur des fondements microscopiques explicites et flexibles – qui peuvent s’adapter à une grande palette de situations. Ainsi, le modèle s’accommode de différentes formulations des processus stochastiques microscopiques qui permettent d’estimer des paramètres fondamentaux et de leur donner une interprétation. Nous explorons les propriétés du modèle théorique sur des données synthétiques. Nous proposons ensuite une application empirique à la Rochelle pour la modélisation des trajets quotidiens entre le domicile et le travail. Le modèle est ajusté sur les données du recensement qui mesurent les flux entre communes de résidence et d’emploi. La comparaison avec le modèle gravitaire montre que *MEAPS* est plus à même de décrire les flux de déplacements et qu'il ouvre des possibilités d’interprétations très riches. Nous produisons une cartographie des émissions de CO<sub>2</sub> qui utilise *MEAPS* pour une interpolation au carreau 200m. La modélisation calibrée sur des données du recensement permet d’analyser des scénarios variantiels pour la Rochelle et permet d’illustrer la capacité du modèle à analyser des problématiques locales comme la configuration des réseaux de transport ou la localisation de l’emploi.

## Remerciements

*Nous remercions Francesco Pirri et Pablo Vallier pour leur travail durant un stage à l’OFCE pendant l’été 2022 et une trop courte période d’assistant de recherche. Tanguy Enez a pris le relais de Pablo et Francesco et a significativement contribué à son tour. Les discussions et les travaux conduits avec David Miet, Lucas Pouvreau et Valentin Stuhfault de Villes Vivantes ont été particulièrement fructueuses pour l’application à la Rochelle, en partie financée par l’agglomération de la Rochelle. Nous remercions également Florence Nassiet et Bernard Habbouche ainsi que leurs collègues des services de l’agglomération de la Rochelle dont les encouragements et les questionnements nous auront guidé dans ce travail. L’ensemble des calculs a été réalisé sur nuvolos.cloud dont le support technique s’est avéré indispensable.*

## Code, Shiny, Quarto

*Le code utile, principalement en C++, pour les calculs est regroupé dans un package R{rmeaps} accessible dans un dépôt public [github.com/maxime2506/rmeaps](https://github.com/maxime2506/rmeaps).*

Une application shiny permet de reproduire les simulations synthétiques du Chapitre 4, accessible à [ofce.shinyapps.io/rmeaps](https://ofce.shinyapps.io/rmeaps) dont le code se trouve dans le dépôt github [github.com/xtimbeau/meaps](https://github.com/xtimbeau/meaps).

Ce document a été produit avec *Quarto*. La partie “Aspects théoriques” (Chapitre 3) ne demande rien de plus pour être exécutée qu’un environnement supportant Quarto. La partie “Simulations synthétiques” (Chapitre 4) est exécutable complètement à partir des fichiers présent dans le dossier R du dépôt github [github.com/xtimbeau/meaps](https://github.com/xtimbeau/meaps). La partie “Application à la Rochelle” (Chapitre 5) nécessite l'accès à des données spécifiques pour lesquelles nous étudions la possibilité de diffusion. N'hésitez pas à contacter les auteurs sur ce point.

Nous utilisons de nombreux packages et logiciels libres dont tidyverse, data.table, matrixStats, R5, r5r, Rcpp, OpenMP, quarto, shiny, shinyWidgets, shinydashboard, future, progressr.

Contacts : [Maxime Parodi](#) ou [Xavier Timbeau](#)

## 2 Tobler n'implique pas la gravité

Dans l'analyse des phénomènes spatiaux, la distance joue un rôle nécessairement important. Cette évidence est ce qu'on appelle parfois le principe de Tobler :

Tout est relié mais les choses proches sont plus reliées que les choses éloignées.

Si nous prenons l'exemple de l'appariement géographique des emplois et des résidents, d'autres facteurs que la distance interviennent. Le salaire proposé, les compétences requises, la proximité d'autres services – des commerces ou une école – pour faciliter les trajets complexes d'un parent actif. La distance est cependant incontournable et est introduite, généralement en utilisant un modèle gravitaire. Peu d'alternatives ont été étudiées dans la littérature et le modèle gravitaire s'est imposé comme un standard, un outil que l'on peut oublier pour se consacrer à la prise en compte des autres facteurs.

Pourtant, en nous intéressant à la mobilité de la vie quotidienne à une échelle géographique fine – le carreau 200m – nous nous sommes heurtés aux limites du modèle gravitaire, en particulier lorsqu'il a fallu se prononcer sur des scénarios de relocalisation de l'emploi. Ces limites tiennent à ce que le modèle gravitaire réduit le principe de Tobler à une mesure homogène de la distance. L'utilisation d'une distance non euclidienne, tenant compte des temps de transport suivant les modes possibles, améliore nettement la compréhension des territoires. Mais la distance, bien qu'augmentée des réseaux de transport ou évaluée en coût complet, souffre d'un grave défaut. Les milieux très dense comme un centre-ville ou plus dispersés comme un habitat rural sont traités de la même façon. Un individu considérerait donc la distance de façon égale des temps de parcours quelque soit l'endroit où il habite. Intuitivement, cette propriété est contestable et elle conduit à des prédictions difficilement soutenables. Par exemple, des individus vivant des zones peu denses et isolées seraient moins sensibles à de nouveaux emplois offerts sur le territoire. La distance qu'ils ont à parcourir pour ces emplois est plus grande et ils semblent se contenter de ce qui n'est pas trop loin de chez eux. Les citadins considèrent la même distance, mais comme les nouveaux emplois sont proposés dans des zones plutôt proches des centres urbains, ils considèrent ces nouvelles possibilités. Ce qui est vrai pour les emplois l'est pour d'autres aménités. Le modèle gravitaire, en supposant que la valeur de la distance – la dés-utilité de l'éloignement – est homogène sur le territoire et est substituable à la valeur des aménités. Un petit centre urbain éloigné de plus grand pôles devrait, puisque les individus donnent le même poids aux distances, être plutôt autonome : les individus restent dans leur zone pour leurs emplois ou leurs autres activités.

On pourrait amender le modèle gravitaire pour qu'il prenne en compte la densité locale. Mais ce n'est pas si simple. Jusqu'où la densité locale joue et comment la définir et la mesurer ? Comment prendre en compte un territoire très isolé d'une zone qui est comme le montre les schémas de déplacement une zone satellite d'un pôle important ? Ces questions nous amène à une critique plus profonde du modèle gravitaire, rappelons le utilisé très largement

dans les applications. Le manque de fondements microscopiques ne permet pas de l'enrichir. L'analogie gravitaire ne fonctionne pas aussi bien pour les individus et leurs emplois que pour des particules élémentaires ou des planètes . Cette force d'attraction entre deux masses qui dépend inversement de la distance – d'une fonction de celle-ci – ne rencontre pas l'intuition de ce qui gouverne le choix de prendre tel emploi plutôt qu'un autre ou de se rendre à un supermarché à proximité.

Nous proposons de nous appuyer sur une autre analogie. Plutôt que la force d'attraction gravitaire, le trajet d'une particule dans un milieu plus ou moins dense qui peut l'absorber avec plus ou moins de probabilité suivant la densité est une alternative intéressante à l'échelle considérée. Si l'on cherche un emploi et que l'on est dans un milieu riche en emploi, on a une chance d'être satisfait très proche de son point de départ. Si les emplois sont peu denses là où on réside, la distance à parcourir sera plus grande. On réalise ici une première déviation du modèle particulaire. L'individu ne part pas dans une direction au hasard. Il sait où sont les emplois, il ne sait pas quelle rencontrera ses préférences ou ses compétences. Avant de partir, il examine les possibilités, en les triant par ordre de distance et il les parcourt, mentalement ou expérimentalement peu importe, jusqu'à qu'il trouve son bonheur. Cette analogie est celle qu'ont proposé Stouffer (1940) et Simini et al. (2012). Nous construisons à partir de là un modèle explicite qui tient compte de l'absorption et de la saturation. Il est de nature stochastique et, par un raisonnement de physique statistique, nous pouvons conjecturer une stationnarité des principales prédictions. Nous l'avons appelé Modèle Ergodique à Absorption et Saturation, qui s'abrége en *MEAPS*.

Ce modèle respecte tout autant le principe, très général, de Tobler. Ce qui est plus loin est moins attractif que ce qui est loin. Mais au lieu de la disatnce, on utilise le rang dans le classement des distances. La différence peut sembler mineure, mais elle répond à la question de la densité du milieu, et en fait de la densité des milieux traversés. Pouvoir prendre en compte que l'on est dans une zone peu dense entourée de zones très denses est particulièrement pertinent pour apprécier de l'isolement d'un territoire. Mais la bascule ne fait pas seulement sur ce changement. L'analogie employée permet de considérer le processus d'appariement comme résultant d'une procédure de recherche. Cette procédure est très simplifiée et peut paraître manquer de réalisme. Mais l'approche par le modèle gravitaire est encore moins satisfaisante.

Cette procédure naïve permet de spécifier des comportements qui servent de référence et d'hypothèse zéro pour se confronter aux données. Des amendements à la marge de cette procédure de recherche peuvent produire un meilleur ajustement et s'interpréter directement. En particulier, nous oubliions ici tous les autres déterminants de l'appariement, comme le salaire, les compétences demandées ou offertes ou le secteur. Nous ajustons un modèle réduit à l'argument de distance sur des données riches, issues du recensement français et mesurant les flux entre communes de résidence et communes d'emplois. Sous l'hypothèse que tous les emplois sont identiques en salaire ou en compétences, ils sont donc parfaitement homogènes, mais qu'ils ne diffèrent que par leur localisation, nous parvenons à un ajustement bien meilleur que le modèle gravitaire. Des données plus riches – à supposer qu'elles existent – pourraient améliorer encore l'ajustement en introduisant les différences de salaires ou de compétences. Cependant, une prise en compte plus rigoureuse de la géographie nous semble une première étape essentielle, puisqu'elle modifie d'un ordre de grandeur au moins à elle seule la qualité de l'ajustement sur les données.

Le document décrit dans un premier chapitre (3) la construction du modèle théorique. Nous y développons la critique du modèle gravitaire et filons l'analogie du modèle radiatif. Le modèle complet n'est pas solvable dans une forme fermée. Nous y décrivons donc un algorithme qui permet de le calculer. Dans un second chapitre (4) nous analysons les principales propriétés du modèle théorique sur des simulations synthétiques, c'est-à-dire générées explicitement. Ceci permet en particulier de donner de la vraisemblance, à défaut d'une démonstration, à la propriété d'ergodicité du modèle, qui conditionne la possibilité de le simuler. Dans le chapitre 5, nous procédons à l'ajustement empirique de *MEAPS* sur des données pour l'agglomération de Rochelle, – les données de flux communes à communes du recensement, mais également une information précise sur la localisation des résidents, des emplois et la structure des réseaux de transport. Nous décrivons en détail la construction de ces données. Nous procédons ensuite à une série d'estimations non paramétriques en modifiant le modèle théorique pour intégrer ce qui s'apparente à des effets fixes. L'estimation paramétrique de plusieurs modèles spécifiés à partir de *MEAPS* et du modèle gravitaire permet de conclure à la supériorité de la famille *MEAPS* quant à la prise en compte de la géographie. Dans le chapitre 6 nous utilisons *MEAPS*, ajusté sur les données, pour explorer la réponse à des questions du type “que se passe-t-il si...” pour lesquelles le modèle gravitaire produisait des résultats contestables et qui nous a conduit à le reconsidérer.

### 3 MEAPS : aspects théoriques

Pour modéliser les trajets entre des lieux de résidence et des lieux d'emploi, on procède usuellement par la méthode à 4 étapes (Patrick Bonnel 2001; Dios Ortúzar et Willumsen 2011). Cette méthode consiste dans un premier temps à déterminer le nombre de trajets en partance d'un lieu de résidence ainsi que ceux arrivant au total dans un lieu d'activité. C'est l'étape 1 de génération des trajets. La seconde étape consiste à distribuer les trajets de l'étape 1 entre chaque paire de départ et de destination. C'est l'étape de distribution. La troisième étape est celle du choix modal, où pour chaque trajet (entre chaque origine et chaque destination) considéré se voit affecté un mode de transport. Enfin la quatrième étape du modèle à 4 étapes est celle qui spécifie le trajet et permet d'en connaître les caractéristiques précises, comme la distance parcourue, les axes employées ou les dénivelés effectués. Cette décomposition est un peu arbitraire et ne rend pas compte avec justice de l'état de l'art. Le nombre de trajets effectué dépend en effet des possibilités ouvertes par la géographie qui sont définies par les caractéristiques précises des trajets. L'étape 4 est donc nécessaire pour comprendre l'étape 1, et l'étape 4 demande de connaître les choix modaux pour être utile aux choix fait en 1. L'étape 2 est nécessaire pour explorer les possibilités de trajets. Les imbrications sont nombreuses entre les étapes et la décomposition n'interdit pas d'effectuer des allers et retours entre les diverses étapes.

Nous développons ici un modèle qui permet de distribuer les trajets qui ont été assignés en première étape. Le modèle gravitaire est presque exclusivement employé dans cette deuxième étape pour prendre en compte le rôle de la distance. Plus un emploi est loin, moins il doit être attractif. Un individu doit donc préférer les emplois près de lui à ceux qui sont éloignés.

Ce modèle gravitaire est loin d'être convaincant et nous discutons dans une première partie de ses insuffisances (section 3.1). Le modèle des opportunités intervenantes de Stouffer (1940) et le modèle radiatif de Simini et al. (2012) qui font intervenir le rang de classement des emplois plutôt que la distance (section 3.2) et reposent sur une analogie plus adéquate aux échelles géographiques que nous considérons (commune, région) que celle de la gravitation. Nous présentons une version étendue du modèle radiatif qui produit deux résultats principaux :

1. au lieu de la distance, c'est le nombre d'emplois accessibles dans un cercle de rayon donné qui détermine le choix individuel.
2. nous explicitons la saturation et nous donnons un fondement microscopique au respect des contraintes aux marges (tout individu a un emploi, tout emploi est occupé par un individu) (section 3.3).

La formulation est probabiliste et nous en analysons quelques propriétés par des simulations synthétiques (Chapitre 4), en montrant qu'on peut arriver rapidement à simuler un état indépendant des conditions initiales.

### 3.1 Les insuffisances du modèle gravitaire

Le modèle gravitaire développe une analogie avec le modèle de la gravitation universelle d'Isaac Newton dont les succès en physique et en mécanique sont immenses. Ce modèle est généralement la pierre angulaire de l'étape de distribution des trajets dans la décomposition à 4 étapes des modèles de transport (Dios Ortúzar et Willumsen 2011; Patrick Bonnel 2001, 160). Il est également utilisé dans d'autres domaines, comme le commerce international ou l'analyse des épidémies, domaines que nous ne discuterons pas ici.

#### 3.1.1 Les (mauvaises) raisons du succès du modèle gravitaire

Formellement, le modèle gravitaire décrit la force d'une relation entre deux objets en fonction de leur distance et de leur masse respective. Par analogie, le modèle gravitaire consiste ici à évaluer le nombre de trajets professionnels entre deux localisations en prenant pour masses le nombre d'habitants au point de départ et le nombre d'emplois au point d'arrivée et, pour distance, une fonction  $f$  croissante de la distance. On a ainsi, en indiquant les points de départ par  $i$  et les points d'arrivée par  $j$  :

$$T_{i,j} = \frac{N_{hab,i} \times N_{emp,j}}{f(d_{i,j})} \quad (3.1)$$

Les premiers modèles gravitaires ont emprunté la fonction  $f$  à la physique newtonienne ( $f = 1/d^2$ ), mais d'autres formulations ont depuis été proposées. Par exemple, la fonction  $f = e^{-d/\delta}$  intervient dans les modèles de choix discrets proposés par McFadden (Ben-Akiva et Lerman 2018). En remplaçant la distance par la notion de coût généralisé du transport, on peut relier cette forme fonctionnelle à un modèle de choix avec une fonction d'utilité aléatoire (*random utility model*). Il est également possible d'ajuster des formes fonctionnelles plus complexes en ajoutant des paramètres. Le modèle gravitaire arrive alors à reproduire plus ou moins des distributions de distances observées dans des enquêtes de mobilité.

Un raisonnement par minimisation de l'entropie a été proposé par Wilson (1967) pour donner un fondement théorique à l'équation 3.1. Le raisonnement est de considérer l'état de référence comme étant celui qui est le plus fréquent dans une distribution aléatoire des choix. Wilson (1967) montre alors que, si la fonction  $f$  est donnée, l'équation 3.1 a bien la forme proposée et que c'est le produit des habitants et des emplois qui doit se trouver au numérateur (et non une puissance de l'un ou l'autre par exemple). Mais rien ne permet de trouver un fondement à la forme fonctionnelle de  $f$ . Le parallèle avec la physique est simple à faire : l'interaction définit le rôle de la distance, la maximisation de l'entropie permet d'en déduire que l'équation macroscopique dépend des masses agrégées, mais ne permet de dire quoique ce soit de plus sur la nature de l'interaction.

Comme le notent Simini et al. (2012), les fondations théoriques et empiriques de la fonction  $f$  sont au mieux faibles. La multiplication des paramètres pour améliorer l'ajustement n'ont le plus souvent aucune justification théorique. De fait, on perd souvent toute possibilité de donner une signification aux paramètres estimé ce qui rend l'exercice d'ajustement opaque. Les comportements asymptotiques soulignent également des incohérences : par exemple, en faisant tendre vers l'infini les emplois à l'arrivée, le modèle prédit un nombre infini de trajets,

même si le nombre de résidents au départ est limité ! Il est également insatisfaisant que le modèle gravitaire soit déterministe et ne permette ni d'expliquer les fluctuations statistiques du nombre de trajets prédis, ni d'évaluer la vraisemblance de différents cas empirique.

Mais la critique la plus forte du modèle gravitaire vient de ses propriétés fondamentales et des conclusions que l'on peut en tirer. Le nombre de trajets entre une origine (la résidence) et une destination (l'emploi) repose sur un simple arbitrage entre distance et quantité de résidents ou d'emplois. Le comportement du modèle aux limites, à nouveau, suscite la perplexité : un seul emploi à l'origine devrait être infiniment préféré un très grand nombre d'emplois un peu plus loin. C'est tout à fait irréaliste et l'on devine déjà que la distance ne joue pas un rôle si direct dans les comportements de mobilité. On voit également que le poids relatif de cet emploi quasi central par rapport aux "masses" d'emplois éloignés va varier de manière irréaliste selon qu'il est plus ou moins proche de l'origine.

Comme le soulignait déjà Stouffer (1940), ce n'est peut-être pas tant la distance aux emplois qui est décisive que le rang de ces emplois selon l'ordre des distances. Dans le modèle gravitaire, il faut faire une grande différence entre le cas où le deuxième emploi le plus proche est à 500 m et le cas où il est à 1 km. Si l'on applique le modèle newtonien, il faudrait croire, par exemple, que l'attractivité de ce dernier emploi est divisée par 4. Qui peut croire que 500 m de différence pèsent d'un si grand poids dans une recherche d'emploi ? L'attractivité de l'emploi dépend avant tout du fait qu'il s'agit du deuxième emploi disponible près de chez soi. Empiriquement, il y a peu de doutes que le modèle gravitaire a de piètres performances : il ne parvient pas à expliquer pourquoi, lorsque la densité des emplois est faible autour d'un résident, celui-ci va envisager des trajets plus long pour atteindre des zones denses en emplois ; c'est pourtant une observation très commune qui devrait se retrouver dans une modélisation adéquate.

Assez peu de publications se risquent à une comparaison systématique du modèle gravitaire avec d'autres formulations qui respecteraient la première loi de Tobler. On peut citer Heanue et Pyers (1966) comme une des rares tentatives de ce genre. Le modèle gravitaire semblait moins bon que le modèle des opportunités intervenantes (voir plus loin) s'il n'était pas ajusté de manière *ad hoc*, comme il est devenu usuel.

Simini et al. (2012) donnent quelques exemples pour les Etats-Unis de la difficulté du modèle gravitaire à reproduire les comportements observés en stylisant quelques régularités. A l'évidence, le modèle gravitaire ne prédit que des destinations proches et néglige complètement les destinations lointaines. Il semble impossible à la forme fonctionnelle  $f(d_{ij})$  de rendre compte empiriquement à la fois du nombre de trajets courts et du nombre de trajets distants au travers d'un modèle susceptible de rendre compte des trajets dans différentes régions, dès lors que les densités y sont distribuées différemment.

### 3.1.2 Le voile de la contrainte aux marges

Le modèle gravitaire peut être complexifié pour mieux coller aux données qu'il ne le fait spontanément. Il perd alors un lien clair avec les réflexions théoriques le reliant à la maximisation de l'entropie (Wilson 1967) ou au modèle de choix discret. L'ajustement du modèle devient un exercice factice dans lequel il est difficile d'avoir confiance en particulier dans l'analyse des scénarios modélisés. L'exercice consiste à ajouter une étape de "normalisation" au modèle en incorporant dans le modèle des coefficients correctifs en ligne et en colonne

dans la matrice origine-destination, ce qui revient à ajouter des effets fixes à chacun des points de départ et d'arrivée. La formulation du modèle gravitaire est alors modifiée comme suit :

$$T_{i,j} = a_i \times b_j \times \frac{N_{hab,i} \times N_{emp,j}}{f(d_{i,j})} \quad (3.2)$$

La détermination des coefficients  $a_i$  et  $b_j$  pose de nombreux problèmes. Ces coefficients doivent permettre de respecter les contraintes aux marges : la somme des emplois pour une ligne de résidents doit être égale au nombre des résidents employés dans la zone et la somme des résidents employés sur un lieu d'emploi doit, en colonne donc, être égale au nombre d'emplois en ce lieu) sur les déplacements. On a pour  $a_i$  :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\sum_j T_{i,j}}{\sum_j \frac{b_j \times N_{hab,i} \times N_{emp,j}}{f(d_{i,j})}} \\ &= \frac{1}{\sum_j \frac{b_j \times N_{emp,j}}{f(d_{i,j})}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\sum_j T_{i,j}$  est généralement directement observé ou estimé lors de l'étape de génération dans les approches dites à 4 étapes. C'est le nombre de départs depuis le point  $i$  et il est proportionnel aux nombres d'actifs résidant en  $i$ . De la même façon on peut écrire pour  $b_j$  une expression symétrique de celle de  $a_i$ , qui fait intervenir  $\sum_i T_{i,j}$  qui est également observée ou estimé auparavant. C'est le nombre de trajets convergeant vers le point d'arrivée  $j$ , qui est proportionnel au nombre d'emplois en  $j$ .

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{\sum_i T_{i,j}}{\sum_i \frac{a_i \times N_{hab,i} \times N_{emp,j}}{f(d_{i,j})}} \\ &= \frac{1}{\sum_i \frac{a_i \times N_{hab,i}}{f(d_{i,j})}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

La valeur de  $a_i$ , pour un  $i$  donné, dépend de l'évaluation de tous les  $b_j$  et réciproquement l'évaluation de chaque  $b_j$  dépend de celle de tous les  $a_i$ . On peut estimer ces coefficients par itérations successives et espérer atteindre de cette manière un point fixe, éventuellement unique à une constante multiplicative près. Des algorithmes de résolution ont donc été proposés dans les principaux manuels. L'application de tels algorithmes (comme celui de Furness, Dios Ortúzar et Willumsen (2011), p. 192) peut toutefois modifier considérablement le résultat initial proposé par le modèle gravitaire, au risque d'en trahir la logique et les justifications initiales. En outre, la multiplicité des solutions et le choix retenu par l'algorithme demeure un angle mort de ces méthodes.

Mais surtout, cette procédure itérative se contente de multiplier par des facteurs arbitraires des lignes et des colonnes de la matrice origine-destination. Ceci ne change donc pas les poids relatifs des nombres de déplacements depuis une origine ou vers une destination. Or, si l'on pense que le modèle gravitaire estime mal ces poids relatifs, comme nous l'avons affirmé ci-dessus, alors cette normalisation ne change rien sur le fond : une destination éloignée est

si fortement pénalisée dans le modèle gravitaire qu'aucun facteur multiplicatif ne peut faire remonter le nombre de trajets vers cette destination, sans faire crever le plafond au nombre de trajets plus proches.

La procédure de respect des marges aurait pu être formulée différemment, par exemple en utilisant des corrections additives au lieu de corrections multiplicatives ou une combinaison d'additivité et de multiplicativité. Chacune de ces procédures manque toutefois de fondements théoriques et, en toute généralité, peuvent conduire à des équilibres multiples que l'algorithme de résolution va sélectionner sans que l'on puisse justifier quoi que ce soit.

Le succès du modèle gravitaire découle en partie de cette “plasticité” opérationnelle qui permet de l'appliquer à des observations en respectant certaines contraintes observées tout en laissant croire qu'un fondement théorique continue de justifier les opérations. Aussi l'approche gravitaire est-elle largement reprise dans des modèles appliqués (notamment les modèles Land Use Transport Interaction) en dépit de ses défauts, peut-être faute de mieux. Mais le décalage avec les données rend urgent de dépasser cette approche qui survit en se transformant en boîte noire.

### 3.2 Une première alternative : le modèle radiatif

Le modèle radiatif est l'une des rares alternatives au modèle gravitaire (Dios Ortúzar et Willumsen 2011). Il reprend les intuitions de Stouffer (1940) avec son modèle des “*intervening opportunities*”, dont la logique est la suivante : un migrant prévoit d'aller dans un endroit distant mais trouve en chemin des opportunités ; il s'interrompt alors en chemin. Cette distraction de son objectif initial est le résultat des opportunités rencontrées en chemins, “intervenantes”. La différence avec le modèle gravitaire est que ce n'est pas la distance qui détermine la destination, mais le nombre de rencontres. La distance et la structure géographique continuent de peser indirectement sur le choix des destinations puisque plus le migrant parcourt une grande distance, plus il a de chances de rencontrer des opportunités. La modélisation initiale de Stouffer souffre toutefois de quelques défauts<sup>1</sup> et ne résout pas les questions de capacité ou de respect des contraintes sur les marges. Mais elle ouvre une autre perspective, où le rôle de la distance est médiatisé par le nombre d'opportunités rencontré, ce qui répond avec élégance aux insuffisances de l'analogie gravitaire.

Avec Stouffer, c'est ainsi une autre métrique qui est proposée en lieu et place de la simple distance spatiale. Elle est liée à la notion d'accessibilité, c'est-à-dire au nombre d'emplois (et plus généralement d'opportunités) auxquels à accès un individu pour un temps de trajet ou une distance maximaux fixés. Un emploi apparaît ainsi d'autant plus “éloigné” d'un individu qu'il y a d'emplois plus proches de lui. Le modèle gravitaire posait que les individus font une grande différence entre le cas où le deuxième emploi disponible est à 500 m et celui où cet emploi est à 1 km. Dans la nouvelle perspective, il n'y a pas de différence car il s'agit toujours du second emploi rencontré. Autrement dit, la distance est relativisée par la prise en compte du milieu qui est traversé. Plus le milieu est riche en opportunités, moins il est nécessaire d'aller loin et, inversement, plus le milieu est désert, plus il faut se résoudre à aller plus loin.

---

<sup>1</sup>Notamment des défauts dans la formalisation qui repose sur une série d'approximation pas toujours explicitées et qui rend le modèle peu manipulable.

La proposition de Simini et al. (2012) répond à certaines failles de Stouffer (1940) en proposant un modèle déduit par analogie avec la physique qui explicite le processus sous-jacent. L'appellation découle du modèle radiatif qui décrit l'émission de particules et leur absorption par le milieu qu'elle traverse. L'intuition est la même que celle de Stouffer (1940) : tant qu'une particule ne rencontre pas d'obstacle, elle poursuit son chemin. Elle ne s'arrête qu'en rencontrant un site qui peut l'absorber. Plus le milieu est dense en obstacles, plus la particule a des chances de s'arrêter. Dans ce modèle, la distribution des distances parcourues dépend du milieu et de la quantité de sites d'absorption rencontrés.

Plus précisément, dans le modèle de radiation, chaque particule – ou individu – est tirée aléatoirement d'une distribution de probabilité avec une caractéristique  $z$ . Chaque point d'absorption, qui représente un lieu possible de travail, possède une masse d'emploi  $n_i$  et se voit attribuer une caractéristique  $z_i$  qui est aléatoire. Les lieux possibles sont classés par ordre de distance, comme dans le modèle de Stouffer (1940) et la particule les rencontre dans cet ordre. Le tirage de  $z_i$  est construit en tirant  $n_i$  fois des  $z$  dans la distribution de probabilité et en prenant le maximum de ces  $z$ . Plus la masse est grande en  $i$ , plus le  $z_{max}$  sera grand. La particule émise est absorbée si son  $z$  est plus petit que  $z_i$ . Pour représenter que la particule sera émise si elle n'est pas absorbée par son point de départ, son propre  $z$  est tiré par la même méthode, c'est-à-dire le maximum de  $m_i$  tirages où  $m_i$  est la masse d'opportunités en  $i$ .

Le résultat principal de Simini et al. (2012) est particulièrement élégant. La valeur moyenne (notée  $\langle T_{i,j} \rangle$ ) des trajets partant de  $i$  et allant en  $j$  a une expression qui ne dépend pas de la distribution de probabilité des  $z$ . Elle prend l'expression suivante, où  $s_{i,j} = \sum_{k \in (i \rightarrow j)^*} n_k$  est la somme des opportunités entre  $i$  (non inclus) et  $j$  (non inclus) :

$$\langle T_{i,j} \rangle = T_i \times \frac{m_i \times n_j}{(m_i + s_{i,j}) \times (m_i + n_i + s_{i,j})} \quad (3.5)$$

A partir d'hypothèses générales assez simples, on obtient une formulation qui s'apparente au modèle gravitaire en remplaçant la distance par l'accumulation des opportunités entre deux points, dès lors que les opportunités sont classées dans l'ordre des distances. Cette formulation respecte autant que le modèle gravitaire le premier principe de Tobler, mais elle repose sur des hypothèses explicites et permet de mieux représenter les phénomènes déjà évoqués. Un départ dans une zone peu dense produira des trajets plus longs pour trouver un nombre équivalent d'opportunités à des trajets plus courts dans une zone dense. De plus, aucune étape de “normalisation” ad hoc n'est requise et le modèle est probabiliste, ce qui permet de produire des marges d'erreurs et des tests empiriques.

Les applications du modèle radiatif à des données diverses (mouvements pendulaires travail-domicile, appels téléphoniques, migrations, logistique) produisent des distributions de trajets plus proches des données que le modèle gravitaire, mettant à mal l'adage selon lequel le modèle gravitaire serait un “bon” modèle, validé par les données.

On notera que le modèle de Simini et al. (2012) admet comme cas limite, sous certaines hypothèses de densité des emplois, le modèle gravitaire. En effet, lorsque la densité d'emplois est uniforme dans le plan, alors l'accumulation des opportunités est proportionnelle à la surface et la moyenne de trajets entre  $i$  et  $j$  est une fonction en  $1/r^4$ . Ce cas limite montre sous quelle condition (très particulière) le modèle gravitaire peut être valide. Ce cas limite

montre également que la forme fonctionnelle employée dans le modèle gravitaire dépend fortement de la distribution de la densité des opportunités. Et c'est bien là un des éléments qui manque au modèle gravitaire.

Il subsiste deux défauts au modèle radiatif de Simini et al. (2012). Le premier est le pendant de son élégance : il n'y a pas de paramètres pour l'ajuster, ce qui limite les capacités du modèle à rendre compte de la richesses des données. La forme calculée de la moyenne des trajets n'est possible que lorsque le processus sous-jacent suit l'hypothèse des auteurs. Un processus différent ne permet d'en déduire une forme fermée.

Pourtant, si l'on veut un modèle de base simple et clair sur le plan conceptuel, on veut aussi pouvoir enrichir le modèle avec des paramètres qui auraient du sens. Or la seule proposition qu'ils font dans ce sens, en introduisant un  $\varepsilon$  pour modifier le poids du point de départ dans le choix des trajets n'y répond que très partiellement.

Le second défaut est que le modèle ne traite pas le respect des contraintes aux marges, en particulier en colonne. Dans l'équation 3.5 le terme  $T_i$  représente le nombre de départs de  $i$ . Il joue le rôle des coefficients  $a_i$  dans le modèle gravitaire sous une forme multiplicative simple. Son interprétation est directe et simple. En revanche, il n'existe pas de pendant aux coefficients  $b_j$  et il n'est donc pas possible au modèle de tenir compte d'une contrainte capacitaire : un nombre de particules supérieur au nombre d'emplois peuvent être absorbées en  $j$ .

### 3.3 MEAPS : un Modèle Ergodique d'Absorption avec Priorité et Saturation

Nous proposons maintenant une version étendue et remaniée de l'approche de Stouffer (1940) qui répond aux critiques que nous faisons au modèle de Simini et al. (2012). Dans cette section, nous présentons le modèle dans sa forme plus simple avant d'en exposer les extensions les plus directes. Des simulations synthétiques permettent alors d'apprecier les grandes lignes du fonctionnement de ce modèle. Nous discutons ensuite des procédures d'estimation envisageables ainsi que du développement de mesures issues de ce modèle.

#### 3.3.1 Rang, choix des destinations et absorption

On considère  $I$  individus et  $J$  emplois<sup>2</sup> localisés sur un territoire. Ces localisations sont fixes et exogènes, ce qui signifie que l'on ne s'intéresse pas au problème de choix de localisation. Non que ce choix ne soit pas important, mais nous nous intéressons à la distribution des trajets, une fois fixées les localisations. L'idée est que pour déterminer le choix de localisation, il faudra prendre en compte ce que la distribution des trajets, leur longueur ou le coût généralisé qui leur est associé, nous apprend.

---

<sup>2</sup>Dans ce qui suit on regarde la relation entre résident et emploi ce qui suggère les mobilités domicile travail.  
C'est principalement pour fixer les idées, mais la relation entre résident et tout type d'aménités peut être abordée de la même façon. Il est également possible de décliner les résident selon des caractéristiques observables et d'indexer le modèle par ces catégories.

On suppose que toutes les localisations sont séparées et qu'il n'y a donc qu'un individu ou qu'un emploi par localisation (les emplois et les individus peuvent être au même endroit, ça ne change rien). Chaque individu  $i$  classe par ordre de distance croissante les  $J$  emplois et les examine dans cet ordre. Il a à chaque fois une probabilité  $p_a$  de prendre l'emploi. Tant qu'il n'est pas pris, il continue sa recherche en passant à l'emploi suivant le plus proche (de son point de départ). La probabilité d'occuper l'emploi  $j$  est donc égale à la probabilité de ne pas occuper les emplois plus proches multipliée par la probabilité  $p_a$  d'occuper le poste  $j$ . En notant  $r_i(j)$  le rang de l'emploi  $j$  dans le classement des distances depuis  $i$ , on peut écrire  $\bar{F}(j)$  la probabilité de dépasser le  $j$ me élément :

$$\bar{F}(j) = (1 - p_a)^{r_i(j)} \quad (3.6)$$

On définit également la probabilité de fuite de la zone considérée. Cette probabilité est celle qu'un individu ne trouve pas parmi les  $J$  emplois celui qui lui convient et donc qu'il renonce ou cherche plus loin. En supposant pour le moment que cette probabilité est la même pour tous les individus,  $p_f$ , on peut déterminer  $p_a$  :

$$p_a = 1 - (p_f)^{1/J} \quad (3.7)$$

La probabilité  $P_i(j)$  de  $i$  de s'arrêter en  $j$  est :

$$P_i(j) = (1 - p_a)^{r_i(j)-1} \times p_a = p_f^{\frac{r_i(j)-1}{J}} \times (1 - p_f)^{1/J} \quad (3.8)$$

Cette expression définit donc la probabilité pour un individu  $i$  d'occuper l'emploi  $j$  comme une fonction de la probabilité de fuite, le rang de l'emploi et le nombre total d'emploi. La rang de  $j$  n'est autre que le nombre d'opportunités cumulées du point de départ de  $i$  jusqu'à  $j$  et remplace la distance, comme dans les expressions de Stouffer (1940) ou de Simini et al. (2012). Ce nombre n'est autre que l'accessibilité aux emplois de l'individu  $i$  dans un cercle de rayon  $[ij]$ , que ce rayon soit défini en utilisant une distance euclidienne ou d'autres mesures comme le temps de parcours en transport en commun en utilisant un réseau de transport.

Ce processus d'appariement peut s'interpréter comme une recherche d'un emploi satisfaisant en cherchant un emploi satisfaisant des critères non explicités et spécifique à l'individu et proche de son domicile afin de minimiser les coûts de transports. A priori, les emplois sont identiques ou homogènes pour l'individu et il organise donc sa recherche en les classant par rang de localisation.

Chaque emploi a été supposé distinct spatiallement des autres. Dans le cas où les emplois ne seraient pas séparés et pourraient s'accumuler en un point ou au sein d'un carreau, la formalisation ne change pas.

La probabilité que l'on s'arrête dans le carreau  $c_d$  situé à une distance  $d$  de  $i$  où se trouvent  $k$  emplois se déduit de l'équation 3.6 puisque les  $k$  emplois ont des rangs successifs. En notant  $s_i(d) = \sum_{j/d_{i,j} < d} 1$  le cumul de tous les emplois qui sont à une distance strictement inférieure à celle du carreau considéré pour  $i$  (et donc à l'exclusion des  $k$  emplois du le carreau  $c_d$ ), on a :

$$P_i(i \in c_d) = p_f^{s_i(d)/J} \times (1 - p_f)^{k/J} \quad (3.9)$$

En prenant un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre de cette expression (sous l'hypothèse que  $k$  est petit devant le nombre total d'opportunités  $J$ ) , on obtient, en notant  $\mu = \frac{-\log(p_f)}{J}$  :

$$P_i(i \in c_d) \approx k \times \mu \times e^{-\mu \times s_i(d)} \quad (3.10)$$

Cette expression fait apparaître clairement le cœur du modèle. La proportion d'emplois venant de  $i$  dans le carreau est une fonction des emplois dans le carreau multiplié par l'accessibilité jusqu'à ce carreau de  $i$ .

Lorsque la densité des emplois est constante sur un plan,  $s_i(d)$  est proportionnel à la surface et le modèle devient une fonction de la distance avec un terme en  $e^{-r^2/\rho^2}$ . Ici aussi, le comportement de notre modèle rejoint, sous cette condition très particulière d'une répartition homogène des opportunités, celui proposé pour un modèle gravitaire, lorsque celui-ci est spécifié avec une fonction de distance en  $e^{-r/\rho}$ . La forme favorite du modèle gravitaire se justifierait pour une répartition homogène des opportunités le long d'une droite<sup>3</sup>. Ce résultat diffère de celui de Simini et al. (2012), qui trouvaient un comportement asymptotique en  $1/r^4$ .

Tout comme dans le modèle de Simini et al. (2012), le résultat est sans paramètre, parce que la probabilité de fuite est entièrement déterminée par la contrainte en ligne (l'individu  $i$  a une espérance égale à  $1 - p_f$  de trouver un emploi dans la zone considérée).

### 3.3.2 Saturation et priorité

Il reste encore à prendre en compte la contrainte en colonne, c'est-à-dire le fait que chaque emploi peut être pourvu une fois et une seule. Au lieu d'un ajustement ad hoc qui tombe de nulle part, nous proposons le mécanisme suivant de remplissage des emplois : chaque individu  $i$  est classé selon un ordre de priorité. L'individu au premier rang est confronté à l'ensemble des emplois et nous calculons ses probabilités de prendre un emploi  $j$  par la formule précédente (équation 3.8). Les emplois sont alors partiellement remplis à proportion de ces probabilités<sup>4</sup>. Le deuxième individu est traité de la même manière, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un ou plusieurs emplois soient totalement pourvus (lorsque la somme des probabilités dépasse tout juste 1). On retire alors ces emplois de la liste des choix possibles et on continue l'affectation pour les individus suivants sur la liste réduite. A chaque individu ajouté, on peut être amené à retirer d'autres emplois de la liste de recherche.

<sup>3</sup>La littérature sur le commerce international fait un grand usage du modèle gravitaire et on y trouve des développements très riches. Le problème du commerce international est un peu différent de celui de l'analyse des distribution de déplacement parce qu'on observe les flux bilatéraux par produit de façon répétée entre les pays. On dispose ainsi d'une grande quantité d'informations à relier entre elles par la représentation gravitaire. La question du transport est différente en ce que la distance entre origines et destination est bien connue, mais que les trajets bilatéraux ne le sont pas. On dispose en revanche d'information sur la distribution des trajets en fonction de leur distance, de leur motif et des modes employés.

<sup>4</sup>En toute rigueur, les probabilités ne s'additionnent pas si simplement et un traitement exact exigerait de tenir compte de probabilités conditionnelles au fait que tel emploi a été pris, ou non, auparavant. La procédure décrite ici est une simplification, en subsituant aux probabilités conditionnelles des espérances.

A la fin de ce processus, tous les individus ont des emplois (à  $p_f$  près) et tous les emplois sont pourvus dès lors que l'on pose  $I \times p_f = J$ . Cette attribution avec priorité est Pareto-optimale. Il n'est pas possible d'augmenter la satisfaction d'un individu sans dégrader celle d'un autre. A chaque étape, chaque individu réalise ses choix sans contrainte autre que l'éventuelle saturation provoquée par ses prédecesseurs. Pour augmenter sa satisfaction, c'est-à-dire lui permettre d'occuper en probabilité un emploi mieux classé pour lui, il faudrait dégrader la situation d'un prédecesseur en lui attribuant un emploi plus éloigné pour lui. Cette procédure d'affection avantage les premiers du classement, mais tient compte des choix de chacun.

Formellement, on note  $\phi_u(i, j)$  la probabilité de disponibilité ( $\phi$  vaut 0 si l'emploi est complètement pris) de l'emploi  $j$  pour un ordre de priorité donné  $u$  au moment où l'individu  $i$  doit choisir. La probabilité de cet individu  $i$  de prendre l'emploi  $j$  s'écrit alors :

$$P_{u,i}(j) = \lambda_{u,i} \cdot \phi_u(i, j) \cdot p_a \prod_{l=1}^{r_i^{-1}(j)-1} (1 - \lambda_{u,i} \cdot \phi_u(i, r^{-1}(l)) \cdot p_a) \quad (3.11)$$

Cette expression est rendue complexe par la nécessité de parcourir les emplois dans l'ordre qui correspond à chaque individu. La probabilité  $p_a$  doit alors être calculée pour que le taux de fuite de  $i$  soit inchangé. On suppose que les emplois restants demeurent homogènes tout au long du processus d'affectation. La probabilité de chacun est donc identique et ajustée d'un facteur multiplicatif  $\lambda_{u,i}$ . Le terme  $\lambda_{u,i}$  découle ainsi de l'indisponibilité potentielle des emplois. Lorsqu'un emploi est indisponible, l'individu  $i$ , lorsque c'est son tour de choisir, connaît ses cibles potentielles. Il ajuste donc sa probabilité d'absorption de façon à respecter la probabilité de fuite. Nous choisissons cette option afin de continuer à respecter la contrainte en ligne, qui s'exprime par l'équation 3.12 ci-dessous. Ceci signifie qu'un individu a d'autant plus de chances d'accepter un emploi qu'il reste peu de choix.

Une autre solution serait de considérer que la probabilité de fuite n'est pas conservée et que les indisponibilités se traduisent par une fuite plus élevée. On peut tout à fait envisager des solutions plus complexes. Nous nous en tenons pour l'instant au cas simple où tous les individus ont la même chance de travailler dans la zone considérée<sup>5</sup>. Sous cette hypothèse de conservation de la probabilité de fuite, on a :

$$\prod_{j=i}^J (1 - \lambda_{u,i} \times \phi_u(i, j) \times p_a) = p_f \quad (3.12)$$

La solution de cette équation est celle d'un polynôme en  $\lambda_{u,i}$  d'un ordre élevé. Il y a possiblement plusieurs solutions, mais il est nécessaire que  $0 < \lambda_{u,i} \times p_a < 1$ , ce qui réduit le nombre de solutions admissibles. On peut en produire une solution approchée par un développement limité à l'ordre 1 en prenant le *log* de l'équation 3.12 :

$$p_a \times \lambda_{u,i} = \frac{-\log(p_f)}{\sum_{j=1}^J \phi_u(i, j)} \quad (3.13)$$

---

<sup>5</sup>En pratique, pour éviter les effets de bord, il faut choisir une zone d'emplois plus grande que la zone des résidents.

On peut vérifier que  $0 < \lambda_{u,i} \times p_a < 1$  lorsque  $J$  est assez grand et que le nombre d'emplois restant demeure élevé (en probabilité) par rapport à  $-\log(p_f)$ .

### 3.3.3 Ergodicité

Chaque ordre de priorité  $u$  définit une trajectoire possible d'affectation des emplois aux résidents (ou l'inverse). On aboutit à chaque fois à un état possible de l'appariement résidents-emplois d'où l'on déduit les trajets professionnels. Bien entendu, le résultat final dépend de l'ordre de priorité choisi. Pour s'en affranchir, la stratégie usuelle en physique statistique consiste à réitérer la procédure pour tous les ordres possibles de priorité et à considérer la moyenne des résultats obtenus sur les  $I!$  ordres de priorité possibles.

L'hypothèse ergodique consiste ici à soutenir que cette moyenne sur tous ces ordres de priorité est proche du régime permanent des trajets professionnels sur la zone considérée.

La première grandeur que nous moyennons sur les ordres  $u$  est la variable de disponibilités  $\phi_u(i, j)$  de l'emploi  $j$  pour le résident  $i$ . Cette moyenne  $\langle \phi \rangle_u(n, j)$  correspond à la probabilité de disponibilité de l'emploi  $j$  pour n'importe quel résident après que  $n$  résidents occupent d'ores et déjà un emploi ou ont fuit la zone. Cette grandeur ne dépend pas de  $i$ , mais uniquement du nombre de résidents déjà positionnés.

Un deuxième grandeur nous sera utile. Il s'agit de l'accessibilité moyenne aux emplois disponibles. On peut noter  $A_u(i, k)$  le cumul des emplois qui restent disponibles pour  $i$  lorsque  $n$  résidents se sont d'ores et déjà positionnés, en comptant les emplois depuis le plus proche de  $i$  jusqu'au  $k^{ime}$  le plus proche. La grandeur qui nous intéresse est la moyenne sur tous les  $n$  possibles, soit :

$$\langle A \rangle_n(i, k) = \left\langle \sum_{j, r_i(j) \leq k} \langle \phi \rangle_u(n, j) \right\rangle_n \quad (3.14)$$

La particularité de cette accessibilité est qu'à mesure que les emplois sont pris (lorsque  $n$  s'accroît), l'accessibilité se restreint puisqu'elle ne retient que la part encore disponible des emplois proches.

Comme précédemment, nous considérons que la probabilité de fuite d'un individu est une constante. Dans ce cas, la probabilité d'absorption va augmenter au fur et à mesure que les emplois sont pris : moins il reste d'emplois disponibles, plus un résident est prêt à accepter ceux qui restent. La probabilité  $P_a$  va donc dépendre de  $n$  et s'écrire ici  $P_{a,n}$ .

Pour un  $n$  donné, on a :

$$P_f = \prod_{k=1}^J (1 - P_{a,n} \times \langle \phi \rangle_u(n, r_i(k))) \quad (3.15)$$

En passant en  $\log$  et en effectuant un développement limité, on obtient :

$$\log(P_f) = -P_{a,n} \times \sum_{k=1}^J \langle \phi \rangle_u(n, r_i(k)) = -P_{a,n} \times (J - (1 - P_f) \times n) \quad (3.16)$$

Nous avons alors tous les éléments pour calculer la probabilité  $P_n(i, j)$  que le résident  $i$  prenne l'emploi  $j$  après que  $n$  résidents se sont déjà positionnés (cf. équation 3.8). En passant alors en  $\log$ , on a :

$$\log(P_{ij}) = \log(P_{a,n}) + \log(\langle\phi\rangle_u(n, j)) + \sum_{k=1}^{r_i^{-1}(j)} \log(1 - P_{a,n} \times \langle\phi\rangle_u(n, r_i(k))) \quad (3.17)$$

En faisant un développement limité du dernier terme puis la moyenne sur les  $n$ , il en découle :

$$\log(P_{ij}) \approx \langle \log(P_{a,n}) \rangle_n + \langle \langle\phi\rangle_u(n, j) \rangle_n + \langle A \rangle_n(i, r_i^{-1}(j)) \quad (3.18)$$

La probabilité  $P_{ij}$  s'écrit donc à partir de la probabilité moyenne d'absorption, de l'espérance que l'emploi  $j$  est disponible et de l'accessibilité moyenne. Sur le plan conceptuel, c'est tout à fait satisfaisant et compréhensible.

### 3.3.4 Hétérogénéité de la fuite et de l'absorption

Nous avons considéré jusqu'à présent le cas où les individus et les emplois étaient homogènes et indiscernables. Cela simplifie le modèle et permet une résolution explicite. Il est cependant possible de complexifier le modèle en levant ces hypothèses en introduisant des paramètres interprétables qui permettent une meilleure prédiction et l'extraction d'informations des données.

Tout d'abord, le paramètre de fuite peut être spécifique à chaque individu. Par exemple, le recensement nous permet de mesurer la proportion d'individu, par commune, qui ont un emploi à plus de 100km de leur domicile. Cette proportion est faible (< 5% pour une région comme celle étudiée dans l'application à la Rochelle Chapitre 5) mais peut varier d'une commune à l'autre. Ces variations peuvent s'expliquer par une géographie particulière ou par des caractéristiques des individus. On peut alors définir une probabilité de fuite  $p_{f,i}$  pour chaque individu.

Ensuite, le paramètre d'absorption était jusqu'à maintenant identique pour tous les emplois et tous les individus. On peut le rendre dépendant des emplois,  $p_{a,j}$ , pour marquer un effet fixe spécifique à des emplois. Le recensement nous donne quelques informations sur les trajets professionnels de commune à commune et, donc, sur l'attractivité différentielle entre communes. D'autres données pourraient nous informer à un niveau infra-communal. On pourrait aussi vouloir faire dépendre la probabilité d'absorption de caractéristiques observables des emplois. Des emplois dans une zone dense en emploi peuvent, au-delà de l'effet masse déjà pris en compte, être plus attractifs que des emplois isolés. Dans ce cas, l'absorption dépend de caractéristiques  $X$  observées et en spécifiant la forme fonctionnelle de  $p_a(X)$  on peut l'estimer de façon à mieux reproduire l'information sur la distribution des déplacements.

Le modèle présenté est suffisamment flexible pour pouvoir rendre compte de phénomènes plus complexes afin de, à la fois, pouvoir exploiter des données riches et modéliser des comportements (de fuite, d'absorption) qui semblent avoir un sens. Si au lieu d'apparier les individus et les emplois, on s'intéresse au cas du choix des écoles, on peut imaginer que

l'absorption de l'école la plus proche est élevée, mais que celles de rang supérieur s'effondrent. Si l'individu est indifférent aux caractéristiques des écoles, hors leur emplacement, il prend l'école la plus proche. Le refus de cette première école peut s'expliquer par une exigence parentale non observable, mais qui se traduit par une distance parcourue plus élevée. Mais le modèle de base rendant compte d'une baisse de l'absorption au-delà du premier rang est déjà assez bon<sup>6</sup>.

On peut ainsi modifier les probabilités d'absorption en donnant à un groupe particulier de paires individus emplois plus ou moins de chances d'être absorbé. En jouant sur les groupes qui partitionnent les paires individus  $\times$  emplois on peut augmenter ou réduire le nombre de degré de liberté du système. Lorsque seule la probabilité d'absorption est un paramètre, le nombre de degré de liberté est diminué de 1 et le paramètre  $p$  est déterminé par la condition d'égalité entre le nombre d'emplois pourvus et d'individus. Si on dispose d'une information sur la probabilité de fuite par individu ou par groupe d'individus, le nombre de degré de liberté peut être accru par une probabilité de fuite différenciée selon ces groupes. On peut encore accroître le nombre de degré de liberté en croisant une probabilité d'absorption par groupes d'emplois et groupes d'individus. Le choix de la spécification dépendra de ce que l'on souhaite réaliser et du problème considéré. On verra dans la Chapitre 5 une application en recourant à un grand nombre de degré de liberté afin d'ajuster le modèle sur des données détaillées (donnant pour des paires commune de résidence  $\times$  commune d'emploi une observation des flux de mobilité professionnels) et de pouvoir procéder à des interpolations, en projetant les flux à une échelle infra communale tout en respectant les observations, et de pouvoir simuler des scénarios alternatifs en considérant que les  $\lambda_{i,j}$  sont constants. Dans une publication ultérieure, nous montrerons une détermination parcimonieuse des coefficients correcteurs afin de pouvoir extraire une information pertinente des données de flux entre communes et de pouvoir comparer le pouvoir prédictif de MEAPS à celui d'un modèle gravitaire, à degré de liberté égal.

En indexant par  $i$  les probabilités de fuite  $p_{f,i}$  et par  $i,j$  les coefficients correcteurs  $\lambda_{i,j}$ , les équations principales du modèle deviennent :

$$P_{i,u}(j) = \lambda_{i,j} \cdot p_a \prod_{l=1}^{r_{u(i)}(j)-1} [1 - \lambda_{i,r_{u(i)}(l)} \cdot p_a \cdot \phi_u(i, r_{u(i)}^{-1}(l))] \quad (3.19)$$

$$\prod_{l=1}^J [1 - \lambda_{i,r_{u(i)}(l)} \cdot p_a \cdot \phi_u(i, r_{u(i)}^{-1}(l))] = p_{f,i} \quad (3.20)$$

Il n'est pas possible de donner une forme réduite de cette dernière expression. En revanche, elle est calculable numériquement pour chaque  $u$ ,  $i$  et  $j$  en fonction des hypothèses du modèle ( $p_{f,i}$ ,  $p_{a,j}$ , la structure spatiale des résidents et des emplois) et sert de base à l'algorithme de calcul employé dans les simulations présentées dans la section Chapitre 4<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>De façon plus générale, on peut spécifier une loi de la probabilité d'absorption quelconque qui doit vérifier que  $\sum_{k=1,J} p_{i,r_i(k)} = p_{f,i}$  pour tout  $i$ . Toute paramétrisation de cette loi de probabilité peut alors être simulée et ajustée sur des données. Si les paramètres ont une interprétation théorique, on peut alors les identifier.

<sup>7</sup>L'implémentation de cette expression est faite dans le fichier `meaps.cpp` accessible sur le dépôt [github.com/xtimbeau/meaps](https://github.com/xtimbeau/meaps)

Le modèle ainsi construit est flexible puisqu'on peut spécifier des processus de fuite (contrainte en ligne équivalente à la contrainte 3.3) et des processus d'absorption qui respecte la contrainte de saturation des emplois (contrainte en ligne équivalente à la contrainte 3.4) par le processus de priorité décrit en section 3.3.2. Le parcours de toutes les permutations possibles permet de s'affranchir d'un ordre de priorité particulier et de définir une solution moyenne au processus. Lorsqu'on analyse le problème avec une grille de taille finie (ou de taille inférieure au nombre  $J$  d'opportunités), on peut conjecturer un comportement ergodique des quantités moyennes prédictes par le modèle. On résout de cette façon explicitement le problème de contrainte aux marges du modèle gravitaire ou du modèle radiatif.

### 3.3.5 Synthèse de MEAPS

Avant de passer aux simulations, résumons le propos : nous proposons une formulation du problème de distribution des transports qui permet de traiter du respect de la contrainte aux marges avec un processus élémentaire explicite. Cela accroît la validité du modèle et sa possible utilisation dans des applications. Cela permet également d'utiliser l'information donnée par les contraintes de marge et d'en déduire une série d'indicateurs caractérisant la zone étudiée et les tensions entre l'offre et la demande.

La formulation la plus simple du modèle, correspondant à l'hypothèse d'homogénéité des emplois, d'un processus d'absorption homogène (la probabilité d'être absorbée est la même pour tous les individus ou les emplois) et d'une valeur identique de fuite par individu permet de construire une calibration canonique, qui ne dépend que des paramètres de "masse" et de "distance". On peut alors proposer une version plus riche du modèle, en individualisant la probabilité de fuite, en pondérant les probabilités d'absorption ou encore en proposant un processus d'absorption non binaire et paramétrique. Ces versions peuvent alors être confrontées aux données disponibles, en contrôlant du risque de surajustement et en disposant pour chacun des paramètres d'une une référence canonique.

Cette approche est structurelle et donne aux paramètres un statut exogène. L'identification sur les données, conditionnellement à ce modèle, peut alors recevoir une interprétation causale.

## 4 MEAPS : simulations synthétiques

Pour étudier quelques unes des propriétés du modèle nous proposons ici d'explorer son comportement sur des données synthétiques. Les données synthétiques, générées de façon explicites, permettent de contrôler les variations de paramètres afin d'en isoler les conséquences. Ces simulations ne prétendent pas ni à l'exhaustivité ni à la démonstration, mais peuvent servir à appuyer l'intuition. L'ensemble de la partie sur les simulations synthétiques est exécutable au sens de Lasser (2020). Les codes nécessaires à la reproduction de ces simulations et des graphiques associés sont disponibles sur [github.com/xtimbeau/meaps](https://github.com/xtimbeau/meaps) et exécutables librement.

### 4.1 Trois pôles en centre et satellites

Nous construisons un territoire abstrait composé d'un "centre ville" et de "deux périphéries" (figure 4.1). Cette configuration arbitraire nous permet d'évaluer *MEAPS* en simulant les trajets et leur distribution. Chaque individu et chaque emploi sont localisés, distinctement les uns des autres, ce qui permet de calculer des distances euclidiennes entre chaque habitant et chaque emploi et d'en déduire un classement pour chaque habitant sans ambiguïté des emplois en fonction de leur éloignement de chaque résident. Tous les emplois sont considérés comme homogènes et on suppose une probabilité de fuite identique de 10% pour tous les individus. Les distances entre les pôles sont données dans le tableau 4.1 (dans une unité sans intérêt).

tableau 4.1: Distances entre les pôles

	e1	e2	e3
h1	0.0	0.7	0.7
h2	0.7	0.0	1.4
h3	0.7	1.4	0.0

Pour assurer l'égalité entre demandes et offres d'emploi, on tire aléatoirement 4 500 emplois. Les trois pôles d'emplois ont les mêmes centres que les pôles d'habitation, mais ont une répartition plus resserrée que pour les habitants. Comme indiqué sur la figure 4.1, les tâches d'emplois 1 à 3 sont respectivement localisés autour des mêmes centres que les zones d'habitation 1 à 3. Les pôles périphériques comportent moins d'emplois (5% chacun) que le pôle central (80% de l'emploi total) afin de représenter dans les pôles périphériques des emplois présentiels, liés aux services fournis aux résidents (comme des commerces ou des écoles) et d'une zone d'activité centrale. Nous ne faisons aucune distinction de productivité ou de qualification nécessaire pour les emplois. Cette hypothèse simplifie la simulation du modèle,

mais rien n'empêche de distinguer des catégories d'emplois, des catégories d'habitants ni d'introduire des éléments de choix entre distance et nature de l'emploi. Nous ne considérons ici pas le choix de la localisation et considérons toutes les localisations comme exogènes.

Dans l'analyse statistique qui suit, on procédera à une agrégation spatiale en pavant le plan où sont localisés emplois et habitants par des hexagones adjacents. Cela correspond à une analyse empirique où les données de localisation sont carroyées.

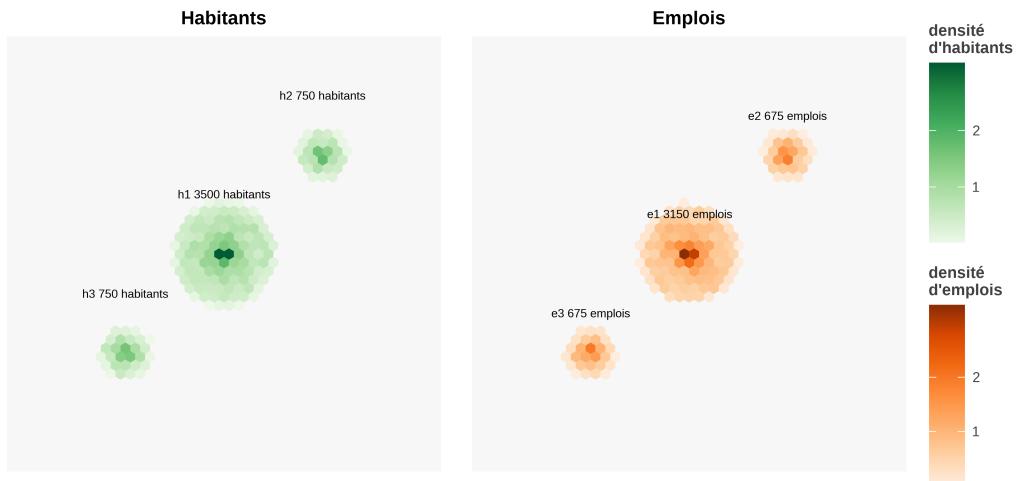


figure 4.1: Territoire synthétique comportant un centre ville (h1) et deux villages (h2) et (h3). Dans chaque hexagone est indiqué la densité (5 000 habitants). 4 500 emplois avec des proportions d'emplois de 80% dans le centre et de 5% dans les 2 villages (les 10% restant sont la fuite). La dispersion est plus basse pour les emplois. Les densités d'emplois sont représentées dans le panneau de droite en orange.

La figure 4.2 simule *MEAPS* à partir des données de figure 4.1. On obtient pour chaque hexagone où résident des habitants une valeur moyenne de distance jusqu'à leur emploi. De la même façon, on calcule pour chaque emploi la distance accomplie en moyenne pour l'atteindre.

Cette première représentation graphique permet de se représenter le fonctionnement du modèle *MEAPS*. On peut générer une distribution de trajets (dans les vignettes de la figure 4.2). Comme la majorité des emplois se trouvent dans le pôle central, les distances moyennes pour les habitants y sont plus faibles que dans les autres pôles. Le modèle génère un peu de variance à l'intérieur de chaque pôle. On retrouve l'idée que les hexagones d'habitations les plus excentrées génèrent des distances plus importantes. La distribution des distances moyennes pour atteindre un emploi est plus resserrée que celle des distances parcourues en moyenne par habitant. Les moyennes de ces deux distributions sont égales (par construction).

On peut construire une table des flux entre chaque pôles (tableau 4.2). Le premier élément est de noter que les contraintes aux marges sont parfaitement respectées, ce qui est le principe de construction de *MEAPS*, les approximations faites dans l'algorithme de résolution restant ici inférieures à  $10^{-5}$  au moins. Par ailleurs, la table de flux confirme le diagnostic précédent. La

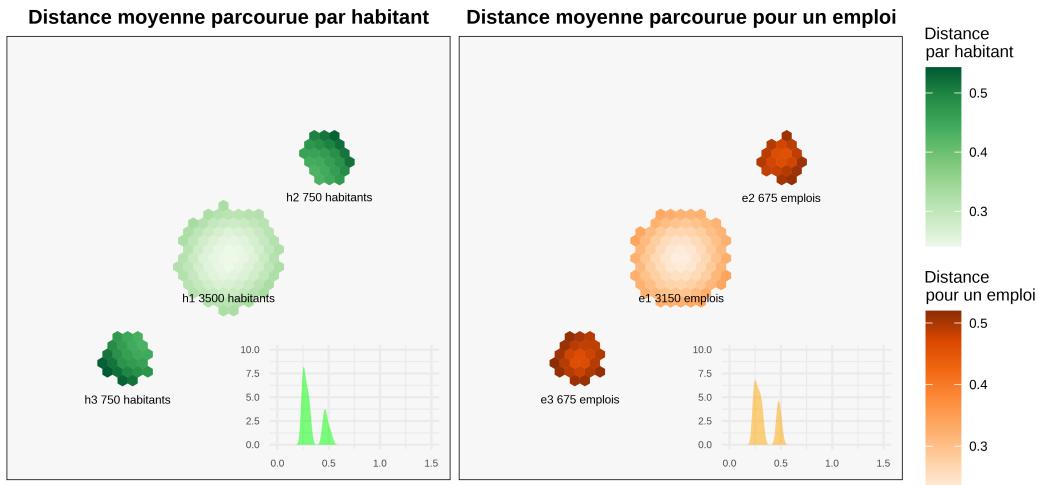


figure 4.2: On représente sur le panneau de **gauche** les distances moyennes parcourues par les habitants d'un hexagone. La vignette présente la densité des trajets en fonction de la distance(vert). Sur le panneau de **droite** on représente les distances moyennes pour atteindre chaque emploi, ainsi que la densité de ces trajets par distance dans la vignette (orange)

plupart des habitants de h1 (78%) se rendent dans g1 (le même pôle donc). Ce taux d'“auto-emploi” est de 42% pour les deux autres pôles. Cela tient au déséquilibre de localisation des emplois et est une propriété souhaitée du modèle. Cela explique en partie la distribution des distances pour les habitants et également le concept réciproque (distances moyenne vers un hexagone d'emplois).

tableau 4.2: flux entre pôles

	e1	e2	e3	total
h1	2 482	335	333	3 150
h2	334	290	51	675
h3	334	51	291	675
total	3 150	675	675	4 500

Pour apprécier le comportement du modèle, on peut procéder à une expérience de pensée dans laquelle on éloigne les deux pôles satellites du centre (la distance entre 1 et 2 ou 3 passe de 0.7 à 1.2 dans cette expérience). Le tableau 4.3 est obtenu en re-simulant le modèle sur la nouvelle géographie. Le résultat est identique à la configuration précédente. Ce résultat est conforme à l'intuition et est une propriété souhaitée du modèle. Puisque les ordres de classement ne changent pas (dès lors que les pôles sont assez éloignés et que la configuration demeure symétrique), les rangs ne sont pas modifiés et donc les flux sont inchangés. Les distributions des distances (sortantes et arrivantes) sont largement modifiées, puisque 2 ou 3 sont plus loins de 1, comme l'indique la figure 4.3. On est tenté de conduire

d'autres expériences de pensée pour analyser le comportement du modèle. L'application Shiny accessible à [ofce.shinyapps.io/rmeaps](http://ofce.shinyapps.io/rmeaps) permet de conduire toutes ces expériences en utilisant le même code que celui utilisé ici.

tableau 4.3: flux entre pôles (pôle 3 plus loin)

	e1	e2	e3	total
h1	2 482	334	333	3 150
h2	334	290	51	675
h3	334	51	291	675
total	3 150	675	675	4 500

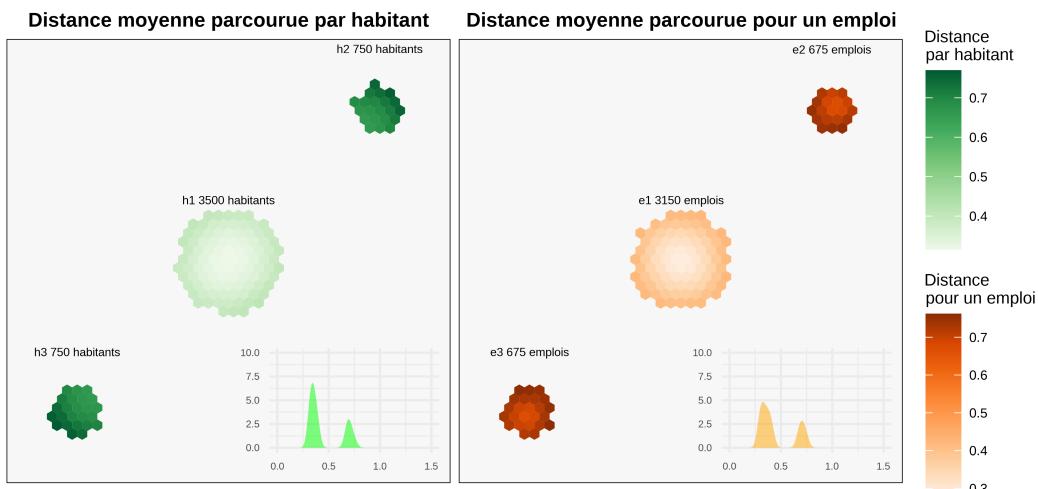


figure 4.3: Le graphique est construit comme le précédent, le pôle 3 est éloigné de 0.5 (70% plus loin) par rapport à 1.

## 4.2 Comparaison avec le modèle gravitaire

Comparer *MEAPS* au modèle gravitaire permet d'en comprendre les avantages. Pour ce faire, nous simulons un modèle gravitaire suivant l'équation 3.2, c'est-à-dire permettant le calage sur les lignes (chaque individu a un emploi) et sur les colonnes (chaque emploi est pourvu). Ce modèle est simulé au niveau désagrégé, c'est-à-dire dans ces simulations synthétiques au niveau de chaque individu et de chaque emploi à partir de la configuration géographique décrite plus haut en section 4.1. La spécification du modèle gravitaire est faite en utilisant comme fonction  $f$  l'expression suivante où  $\delta$  est un paramètre positif :

$$f(d) = e^{-d/\delta} \quad (4.1)$$

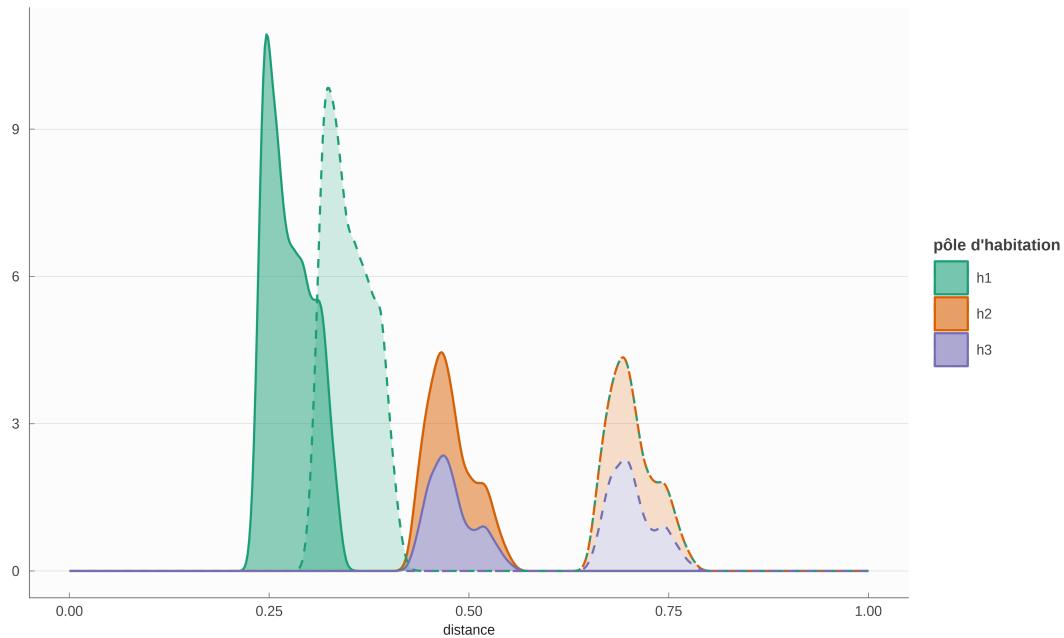


figure 4.4: Densités comparées des distances parcourues par habitant entre le scénario de référence et le scénario ‘pôle 3 plus loin’. Le trait pointillé est utilisé pour le scénario alternatif.

De plus le modèle gravitaire est normalisé en utilisant un algorithme de Furness (Dios Ortúzar et Willumsen 2011) dans lequel on normalise d’abord sur les lignes (chaque individu a un emploi et un seul en probabilité, en tenant compte du paramètre de fuite), puis sur les colonnes (chaque emploi est pourvu complètement). On itère ces normalisations en ligne puis en colonne jusqu’à obtenir une matrice de flux stable. Ces normalisations suivent les équation 3.3 et équation 3.4.

Ce modèle gravitaire ainsi spécifié est ajusté sur la simulation *MEAPS* en prenant comme référence les flux du tableau 4.2, construits par agrégation sur les groupes d’habitants et d’emplois – donc une matrice  $3 \times 3$ . L’ajustement est réalisé en calibrant le paramètre  $\delta$  de façon à minimiser l’entropie relative de Kullback-Leitner des distributions agrégées (cette notion d’entropie est détaillée dans la section 5.3). Le résultat de l’estimation est proposé dans le tableau 4.4 et correspond à une valeur de  $\delta \approx 0.65$

tableau 4.4: Modèle gravitaire calé sur la configuration de référence

MEAPS	Gravitaire

L’ajustement du modèle gravitaire donne un bon résultat. Une des raisons de ce bon résultat découle de la symétrie de la configuration géographique. Les deux satellites sont à même

distance du pôle central et la fonction  $f$  qui ne dépend que de la distance permet d'assurer une répartition des flux entre chacun des pôles sans trop de difficulté. Si on prend une configuration non symétrique, en éloignant un des deux satellites, l'autre restant à sa place, on obtient un schéma différent, le modèle gravitaire amplifiant les asymétries.

tableau 4.5: Modèle gravitaire pour un satellite éloigné

MEAPS (3 éloigné)	Gravitaire (3 éloigné)

Le modèle *MEAPS* conserve une configuration identique dans le cas de pôles satellitaires éloignés du centre, parce la configuration reste symétrique et qu'aucun rang n'est modifié. En revanche, le modèle gravitaire renvoie une réponse très différente de celle du cas de référence : les habitants des satellites se tournent plus vers les emplois de leur satellite et les flux entre pôles satellites et le pôle central se réduisent. Cette propriété du modèle gravitaire est attendue : la fonction  $f$  donne un poids plus faible aux emplois plus distants. A la limite où cet éloignement devient grand, les flux entre pôles satellites et le pôle central vont devenir très petits. Le paramètre estimé sur la simulation *MEAPS* est de l'ordre de 0,65, ce qui est l'ordre de grandeur du rayon du pôle central (0,4). Pour une distance de quelques fois 0,65, les flux entre pôles seront quasi nul. La réponse de *MEAPS* paraît ici plus adaptée à ce que l'on observe. Lorsque des communes sont satellites d'un pôle central à une distance de quelques dizaines de kilomètres, il existe des flux vers cette commune pour occuper des emplois, y compris lorsque la commune est plus éloignée. La faible sensibilité à cette échelle à la distance. Nous verrons lors de l'application à l'agglomération de la Rochelle, en utilisant des données décrivant les flux entre commune de résidence et commune d'emploi (issues de MOBPRO (2022)) que *MEAPS* permet une meilleure représentation de la réalité que le modèle gravitaire.

Si l'on reconduit la procédure d'estimation du paramètre  $\delta$  sur la configuration géographique où les pôles satellite sont éloignés on aboutit à  $\delta \approx 1.03$ . Cette valeur est très différente du paramètre précédent pour prendre en compte des flux identiques mais une distance plus grande entre pôles (tableau 4.6).

tableau 4.6: Modèle gravitaire réajusté, satellite éloigné

MEAPS (3 éloigné)	Gravitaire (3 éloigné)

### 4.3 Procédure d'estimation

Il est possible de modifier les pondérations des probabilités d'absorption de façon à modifier la table des flux. Ceci est illustré dans la table suivante où on a doublé pour chacune des 9 paires possibles de zone d'habitation (3) et de zone d'emploi (3) la probabilité relative d'absorption successivement. La configuration géographique est celle de la figure 4.1, avec un centre et deux satellites. Le centre comporte plus d'emplois que de résidents, ce qui

oblige à des flux entrants dans la zone 1 comme indiqués dans la tableau 4.2. On parle de doublement relatif de la probabilité, parce que les contraintes de constance de probabilité de fuite et de saturation des emplois imposent une réduction des probabilités d'absorption des autres emplois, ce qui est assuré dans l'algorithme qui implémente *MEAPS*.

Le tableau 4.7 décrit les variations de flux par rapport à une situation de référence (celle de tableau 4.2), arrondi à l'entier le plus proche. Il y a donc  $3 \times 3$  matrices  $3 \times 3$ . Chacune des sous matrices indique les variations de flux pour chaque paire origine destination et il y a 9 possibilités de doublement de la probabilité d'absorption qui constituent les lignes et les colonnes de la matrice englobante. On notera que les sommes des colonnes de chaque sous matrice sont nulles, ce qui indique le respect des contraintes en ligne et en colonne.

Conformément à l'intuition et malgré les effets induits par le respect des contraintes en ligne et en colonne, on observe bien que la paire zone d'habitation zone d'emploi qui se voit augmentée en probabilité relative connaît des flux supérieurs. Pour compenser ces flux supérieurs, dans la même colonne, c'est-à-dire pour les flux en provenance des autres zones d'habitation, on constate systématiquement une diminution des flux en provenance des autres zones d'habitation. Symétriquement un accroissement des flux de la zone d'habitation  $i$  vers la zone d'emploi  $j$  induit toujours une diminution des flux de  $i$  vers les autres zones d'emploi.

tableau 4.7: Modification de la probabilité d'absorption

		e1			e2			e3		
		e1	e2	e3	e1	e2	e3	e1	e2	e3
h1	h1	75	-38	-38	-72	55	17	-72	17	55
	h2	-38	27	11	81	-63	-18	-9	1	8
	h3	-38	11	27	-9	8	1	81	-18	-63
h2	h1	-59	74	-15	75	-76	1	2	-26	24
	h2	50	-57	7	-80	87	-7	7	-12	5
	h3	9	-17	8	5	-11	7	-9	39	-30
h3	h1	-59	-15	74	2	24	-26	76	0	-76
	h2	9	8	-17	-9	-30	39	5	7	-12
	h3	51	7	-57	7	5	-12	-80	-7	87

Le tableau représente l'écart entre les flux obtenus pour une probabilité d'absorption doublée pour la zone  $i$  d'habitation et la zone  $j$  d'emploi, pour chaque paire de zones habitation/emploi. La première matrice en haut à gauche indique donc que le flux entre la zone 1 d'habitation et la zone 1 d'emploi est accru de 39 lorsque la probabilité d'absorption relative est doublée. Pour compenser ce flux plus important entre 1 et 1, le flux en la zone d'habitation 2 et l'emploi 1 est réduit de 20, ce qui implique à son tour que ceux entre 2 et 2 et entre 2 et 3 s'accroissent.

Une propriété intéressante des matrices de la tableau 4.7 est que les 9 matrices  $3 \times 3$  forment un espace vectoriel de dimension 4<sup>1</sup>. Ceci est attendu, puisque les contraintes réduisent la

<sup>1</sup>Les valeurs propres de la matrice  $9 \times 9$  constituée des 9 vecteurs colonnes des 9 matrices "dérivées" sont (133.3, 97.3, -28.6, 22.0, 0, 0, 0, 0, 0). Les 5 valeurs propres nulles et les 4 non nulles permettent de

dimension de 9 ( $= 3 \times 3$ ) à 4, puisqu'il y a 3 contraintes dans chaque dimension (lignes et colonnes) et qu'une est redondante (si les sommes sur chaque ligne sont nulles, alors la somme de tous les coefficients est nulle et donc si les sommes sur deux colonnes sont nulles, la troisième l'est nécessairement). Cela indique que, au moins localement (au voisinage de la matrice de flux calculée en tableau 4.2), il est possible de modifier les probabilités d'absorption pour atteindre n'importe quelle matrice de flux. A l'approximation linéaire près, il est donc possible de reproduire n'importe quelle structure de flux agrégés par un jeu de paramètres saturant exactement la dimension de cette structure de flux. Cette propriété permet d'envisager différentes approches d'estimations, suivant les données dont on dispose et du nombre de degrés de liberté que l'on est prêt à consacrer à la reproduction des données.

Le temps de calcul peut être assez long du fait de la nécessité de répéter un grand nombre de tirages, mais la section suivante (section 4.4) montre que ce nombre peut rester raisonnable. Une estimation de ce type est mise en œuvre par une procédure itérative dans la section Chapitre 5, permettant de reproduire à l'aide de *MEAPS* les données issues de l'enquête mobilités professionnelles MOBPRO (2022) avec un schéma de calcul qui peut se mettre facilement en œuvre.

## 4.4 Ergodicité en pratique

L'utilisation de données synthétiques permet de tester simplement l'hypothèse d'ergodicité. On a conjecturé que les différentes grandeurs moyennes sur les permutations  $u$  étaient assimilables à des observations, éventuellement répétées. A ce stade de simulations synthétiques nous ne confrontons pas le modèle à des observations (voir Chapitre 5), mais nous allons montrer que l'estimation des valeurs moyennes ne demande pas l'examen des  $I!$  permutations possibles<sup>2</sup> et peut se contenter d'une agrégation spatiale et de quelques tirages de permutations.

Pour illustrer cette propriété, nous répétons les simulations du modèle pour plusieurs tirages de priorités (notés  $u$  dans la section section 3.3.3). En prenant la moyenne sur un échantillon de  $u$ , on peut construire un estimateur des grandeurs moyennes et montrer qu'avec un échantillon petit par rapport à  $I!$ , on peut les estimer avec fiabilité et dans un temps raisonnable. Cette propriété sera montrée sur la structure géographique particulière que nous avons synthétisée, sans que cela permette de la généraliser avec certitude. Il existe sans doute des configurations spatiales pathologiques qui contredisent cette conjecture.

La figure 4.5 illustre les processus stochastiques à l'œuvre dans le modèle et leur résolution par la moyennisation sur les tirages possibles. On applique le modèle en tirant aléatoirement des permutations de priorité de choix. On représente alors pour quelques hexagones d'habitation (tirés au sort) l'ensemble des choix de destination (carroyés dans les hexagones). Le carroyage opère déjà une moyennisation puisque chacun des individus de chaque hexagone a un ordre de priorité différent. On représente alors les quantités d'emplois (la probabilité de choisir comme emploi un emploi qui se trouve dans l'hexagone d'arrivée). Les lignes blanches illustrent la dépendance au tirage de priorité. Mais au bout de quelques tirages,

---

conclure que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les 9 matrices est 4.

<sup>2</sup>Par la formule de Stirling  $\log_{10}(I!) \approx (n + 1/2)\log_{10}n + \log_{10}\sqrt{2} - n\log_{10}e \approx 5 \times 10^5$  pour  $I = 10^5$ , ce qui fait un nombre de grande taille.

ces probabilités convergent en moyenne. Pour simuler le modèle, il n'est pas nécessaire (en toute vraisemblance) de parcourir l'univers entier des permutations.

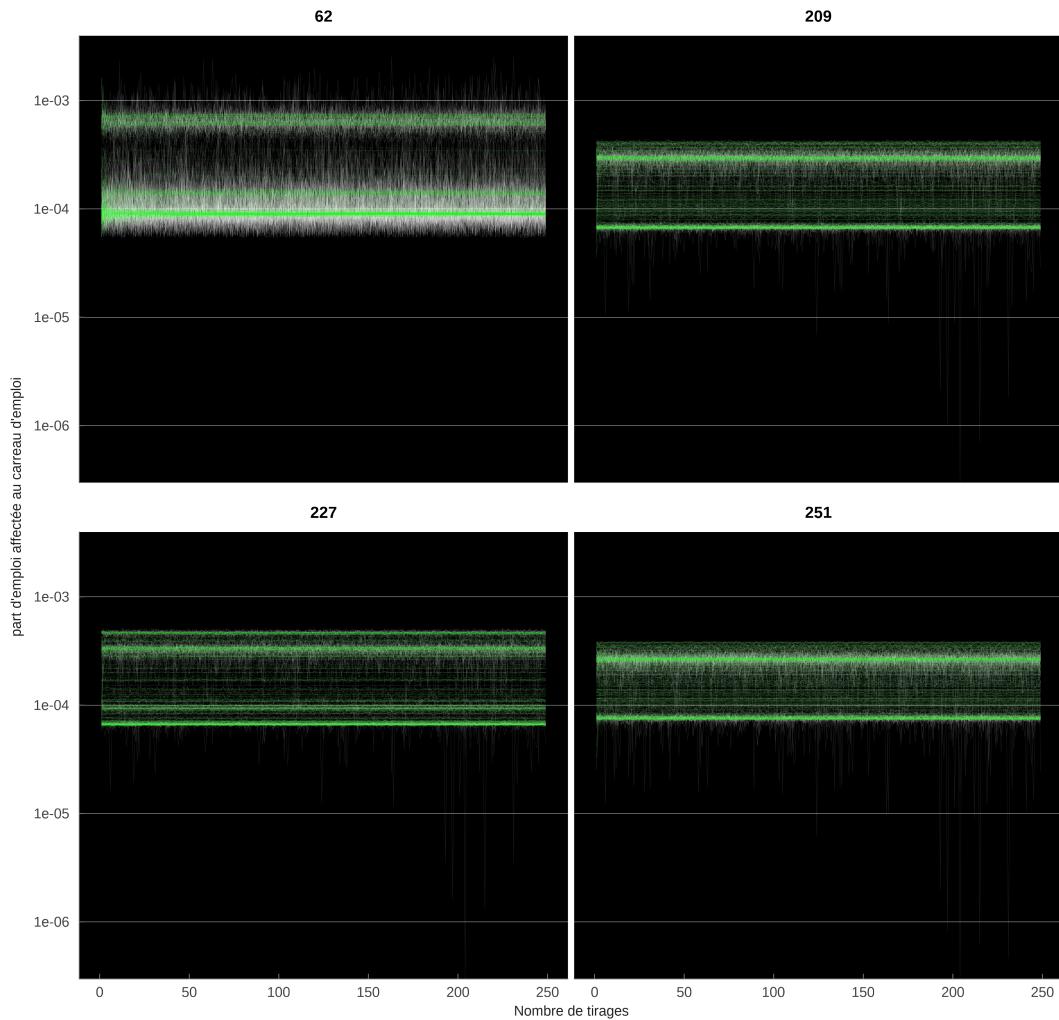


figure 4.5: Chaque ligne blanche représente pour un carreau de départ et d'arrivée (tous les carreaux d'arrivée sont représenté par une ligne, pour une sélection aléatoire de 4 carreaux de départ) la probabilité de prendre l'emploi dans le carreau d'arrivée en fonction du tirage aléatoire. Les lignes vertes représentent cette même probabilité prise en moyenne sur les tirages cumulés. L'échelle de l'axe des y est logarithmique.

Le tableau 4.8 indique les intervalles de confiance à 90% que l'on peut construire à partir des simulations précédentes. On obtient une stabilité satisfaisante, bien que les flux agrégés soient stochastiques. Pour une centaine de tirages on peut obtenir une précision supérieure à  $10^{-3}$ .

tableau 4.8: flux entre pôles, intervalles de confiance

	e1	e2	e3
h1	2482[2473; 2491] 0.1%	334[329; 339] 0.5%	333[329; 338] 0.5%
h2	334[327; 340] 0.5%	290[285; 295] 0.5%	51[49; 53] 2%
h3	334[327; 341] 0.6%	51[49; 53] 2%	291[286; 296] 0.5%

Source: MEAPS, intervalle à 95%, 1024 tirages

Le schéma de saturation et de priorité est illustré par la figure 4.6 ci-dessous. Pour chaque carreau d'arrivée (un emploi), on représente le rang moyen (gauche) et son écart type (droite) au moment de la saturation. La caractère stochastique découle du tirage aléatoire de l'ordre de chaque individu (les carreaux de départ). Pour la plupart des emplois, le rang moyen de saturation ergodique est atteint très rapidement. Les lignes blanches sont rapidement horizontales, indiquant une rapide convergence du rang moyen au fur et à mesure que les tirages s'accumulent. Ce graphique confirme qu'à quelques exceptions, l'état du système est stable après quelques tirages et le calcul de la moyenne. Le panneau de droite illustre l'écart type observé sur les tirages cumulés. La nature stochastique du modèle induite par les tirages est ainsi illustrée.

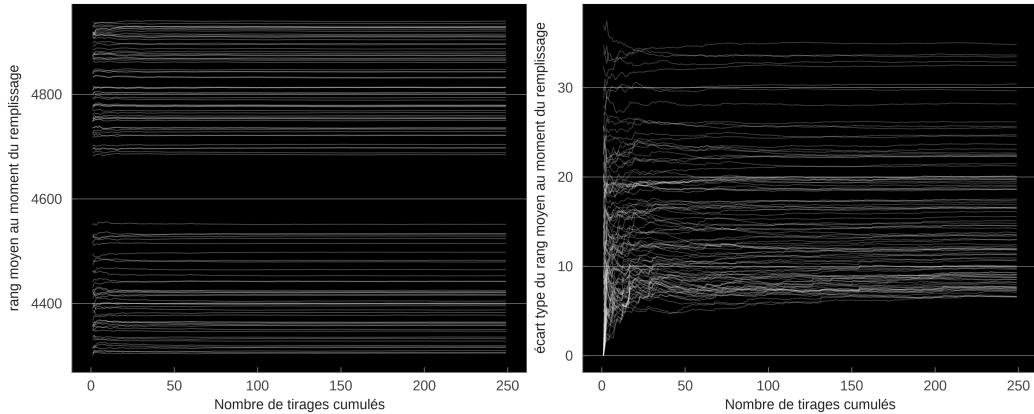


figure 4.6: Chaque ligne blanche représente pour un carreau d'arrivée (tous les carreaux d'arrivée sont représenté par une ligne) le rang moyen (panneau gauche) et l'écart type du rang (panneau de droite).

## 4.5 Tension

Le rang moyen au moment de la saturation est une information qui peut être utilisée pour construire un indicateur localisé de tension comme sur la figure 4.7. L'indicateur de tension donne une information distincte de la distance moyenne ou de la densité de population ou d'emploi. Les emplois les plus tendus se trouvent sur l'axe qui relie des pôles. Les emplois

situés à la périphérie du pôle central ont un niveau de tension proche (mais un peu supérieur) à ceux situés dans les satellites mais les plus proches du pôle central. Ces éléments peuvent être utilisés pour identifier les zones pertinentes de développement de l'emploi.

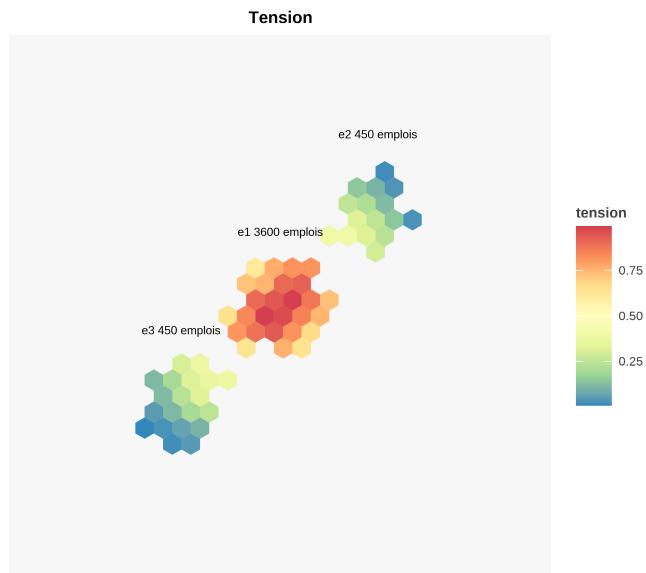


figure 4.7: Indicateur de tension relatif localisé égal au rang de saturation normalisé à 100% (0% pour l'emploi saturé le plus tard, 100% pour l'emploi saturé le plus tôt, en moyenne sur chaque hexagone d'emploi).

## 5 MEAPS : estimation à La Rochelle

Nous proposons ici une première application de *MEAPS* à l'agglomération de la Rochelle. Cette application est issue d'un travail de quantification de scénarios de politiques publiques visant à réduire l'empreinte carbone associée aux mobilités quotidiennes et au secteur résidentiel. La quantification demande à la fois de produire une cartographie très fine des émissions, en procédant par interpolation à partir de données plus macroscopiques mesurées par ailleurs et d'être en mesure de produire des évaluations des différences d'émissions localement et à l'échelle du territoire selon les différents scénarios. Nous présentons ici deux familles de scénarios pour lesquelles *MEAPS* a été mobilisé :

- Des scénarios de localisation de l'emploi : nous projetons la distribution des trajets en utilisant *MEAPS* sur deux structures spatiales de l'emploi différentes, tout en conservant la même quantité d'emploi globale. La différence entre les kilomètres parcourus suivant les différents modes dans les deux scénarios permet d'évaluer l'impact de la localisation, en distinguant la contribution du changement modal, la contribution des changements de distance pure (à mode et flux carreaux à carreaux inchangés) et la contribution des changements de flux.
- Des scénarios de modification de la structure du réseau de transport. Le principe est identique à celui pour la localisation de l'emploi. C'est la matrice des distances et des temps qui est modifiée par une modification des infrastructures de transports (par exemple une ligne de bus en plus). Cette matrice de distance différente induit des temps de trajet plus petits mais uniquement pour le mode transport en commun. Elle induit un changement modal (plus de transport en commun, moins des autres modes) et enfin conduit à un changement des rangs des opportunités et donc une redistribution des flux de carreau à carreau.

Dans les deux familles de scénarios, les simulations par *MEAPS* permettent de construire un contrefactuel et des alternatives à un niveau fin, croisant la localisation au carreau 200m pour les résidences (5 456 carreaux pour la Rochelle et le périmètre du SCOT) et les opportunités (6 326 carreaux dans le périmètre de 33km autour de l'agglomération de la Rochelle), soit 34,5 millions de flux et de modes. L'agrégation de ces informations est alors possible à des niveaux plus généraux pour analyser les impacts. La conversion des kilomètres ou des minutes en émissions de CO<sub>2</sub> pour la voiture est faite en appliquant des coefficients de conversion conventionnels, ce qui permet d'étendre les indicateurs au champ des émissions de gaz à effet de serre.

## 5.1 Emplois, résidents au carreau Inspire 200m

La carte de la zone considéré est représentée sur la figure 5.1. L'analyse est limitée aux résidents du périmètre du Schéma de COhérence Territoriale (SCOT) et considère les emplois dans un rayon 33 kilomètres autour de lieux de résidence. Cette carte est construite à partir des données carroyées de C200 (2022) à la résolution du carreau 200m Inspire<sup>1</sup>. Nous ajoutons à ces données la localisation de l'emploi sur la même grille en utilisant les fichiers fonciers et les données d'emplois localisés de MOBPRO (2022). La méthode consiste à imputer par code NAF les emplois de chaque commune selon MOBPRO (2022) aux surfaces professionnelles à la parcelle issues des fichiers fonciers. Cela permet ensuite de localiser au carreau 200m les emplois. Cette méthode est assez grossière, puisqu'en particulier la ratio personne/surface n'est pas constant d'une entreprise à l'autre, mais elle fournit une bonne première approximation d'autant que l'extrapolation ne dépasse pas l'échelle de la commune. Elle est en tout cas très supérieure à une imputation uniforme.



figure 5.1: Localisation es emplois et des résidents, zones de la Rochelle. Le périmètre de du SCOT de la Rochelle est indiqué ainsi que les limites administratives des communes et des EPCI le composant. Sources : OSM, Mapbox, IGN, carroyage INSEE 2017, Flores et fichiers fonciers 2018

<sup>1</sup>INfrastructure for SPatial InfoRmation in Europe est depuis 2007 une directive pour la production de données spatialisées. Inspire définit une grille de carroyage et son système de projection harmonisée. C'est ce qui suit l'INSEE dans la diffusion des données carroyées. Voir <https://inspire-geoportal.ec.europa.eu> pour la définition de la grille et des jeux de données.

## 5.2 Calcul des distances par mode

Un ingrédient important de l'analyse du territoire est la prise en compte des distances entre chaque paire possible résidence/emploi. Contrairement à l'analyse synthétique, nous ne nous contenterons pas de la distance euclidienne.

Pour ce faire nous calculons à partir d'un calculateur d'itinéraire ( $R^5$  de Conveyal (Conway, Byrd, et Linden 2017; Conway, Byrd, et Van Eggermond 2018; Conway et Stewart 2019) en utilisant le package `{r5r}` (Pereira et al. 2021) les distances et surtout les temps de transport pour quatre modes (voiture, vélo, transport en commun, marche à pied). Les temps de transport calculés pour chaque paire de carreaux de résidence et d'emploi, en retenant le centre des carreaux, tiennent compte des différentes contraintes de circulation (vitesses limites pour la voiture, sens de circulation, pénalité pour changement de direction, accès autorisé ou restreint suivant le mode, stress à vélo). Concernant les déplacements en voiture, nous ne prenons pas en compte à ce stade la congestion. Concernant les transports en commun, le niveau de détail est assez grand, puisque les fréquences de voyages ainsi que les correspondances sont prises en compte. Dans certaines villes, il est possible d'accéder à une information sur les temps de parcours effectifs (mesurant ainsi la congestion ou la disponibilité du réseau) en complément des horaires théoriques. Ces informations ne sont pas disponible pour l'agglomération de la Rochelle et donc cette possibilité n'est pas explorée. L'accès aux données GTFS impose quelques limites, comme par exemple la non prise en compte des réseaux scolaires ou d'autres réseaux locaux ou privés non publiés sous ce format. La modification du réseau de transport comme l'ouverture d'une ligne ou l'accroissement de fréquence est pris en compte en modifiant la matrice des distances et temps par mode entre chaque carreau de résidence et chaque carreau de destination. Dans le cas de l'agglomération de la Rochelle, le nombre de paires calculées est de l'ordre de 16 millions.

A partir des temps de trajets par mode, nous appliquons un modèle de choix discret, Random Utility Model (RUM) à la McFadden, estimé sur l'enquête mobilité des personnes MOBPERS (2021) en utilisant les données de mobilités professionnelles MOBPRO (2022) pour caler les flux commune à commune. L'estimation de ce modèle est détaillée dans un autre document (référence à insérer).

Les distances entre chaque paire de cases permettent de calculer un indicateur d'accessibilité qui joue un rôle central dans le modèle radiatif, et donc dans *MEAPS*, en remplaçant la distance par la somme des opportunités en deçà d'un seuil de temps. Les cartes des figure 5.2, figure 5.3, figure 5.4, figure 5.5 représentent les temps pour accéder entre 1 000 et 20 000 d'emplois en utilisant différents modes de transport.

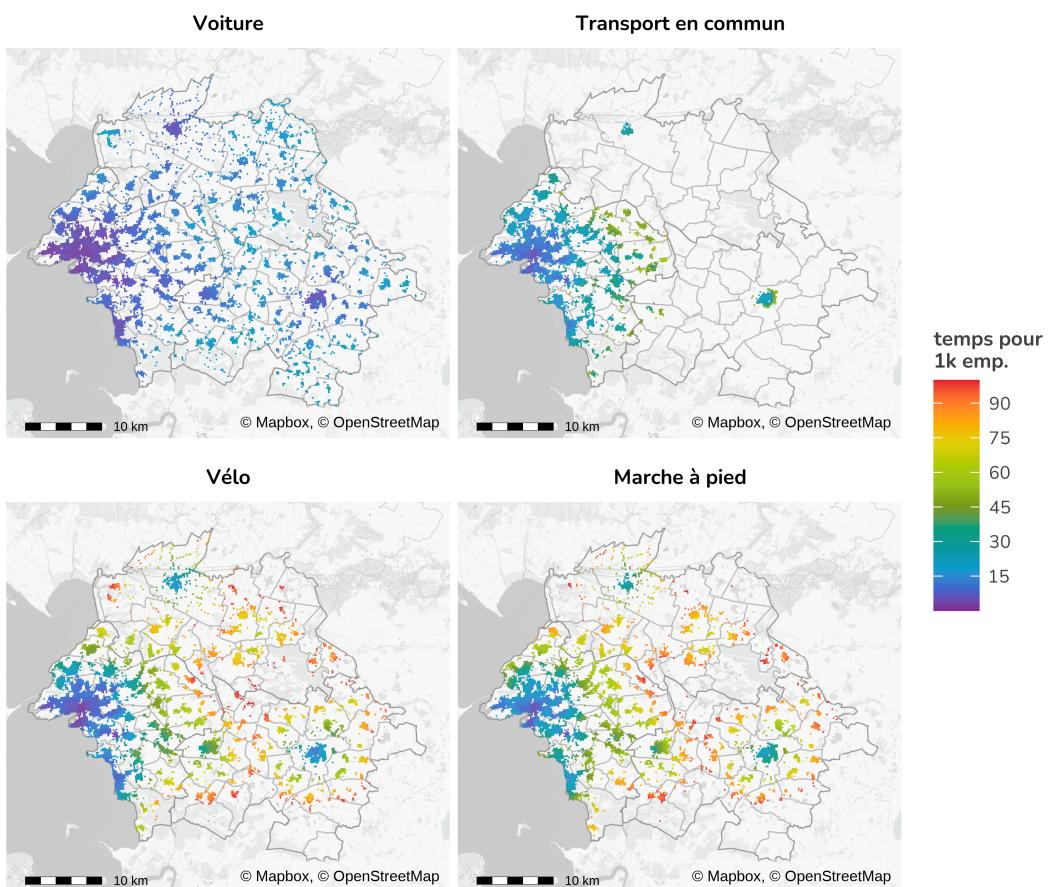


figure 5.2: Temps d'accès à 1 000 emplois. Pour chaque carreau de résidence, on détermine le temps minimal pour atteindre au moins 10 000 emplois suivant l'un des quatre modes considéré. Cette mesure remplace la distance dans le modèle radiatif. Calcul des auteurs. Source : OSM, Mapbox, IGN, Conveyal R5, carroyage INSEE 2017, Flores et fichiers fonciers 2018

#### 5.2.0.1 temps pour 1k

#### 5.2.0.2 temps pour 5k

#### 5.2.0.3 temps pour 10k

#### 5.2.0.4 temps pour 20k

Les courbes d'accessibilité de la figure 5.6 sont construites en prenant la moyenne par commune de résidence des temps d'accès pour les différents seuils d'emplois. C'est cette courbe

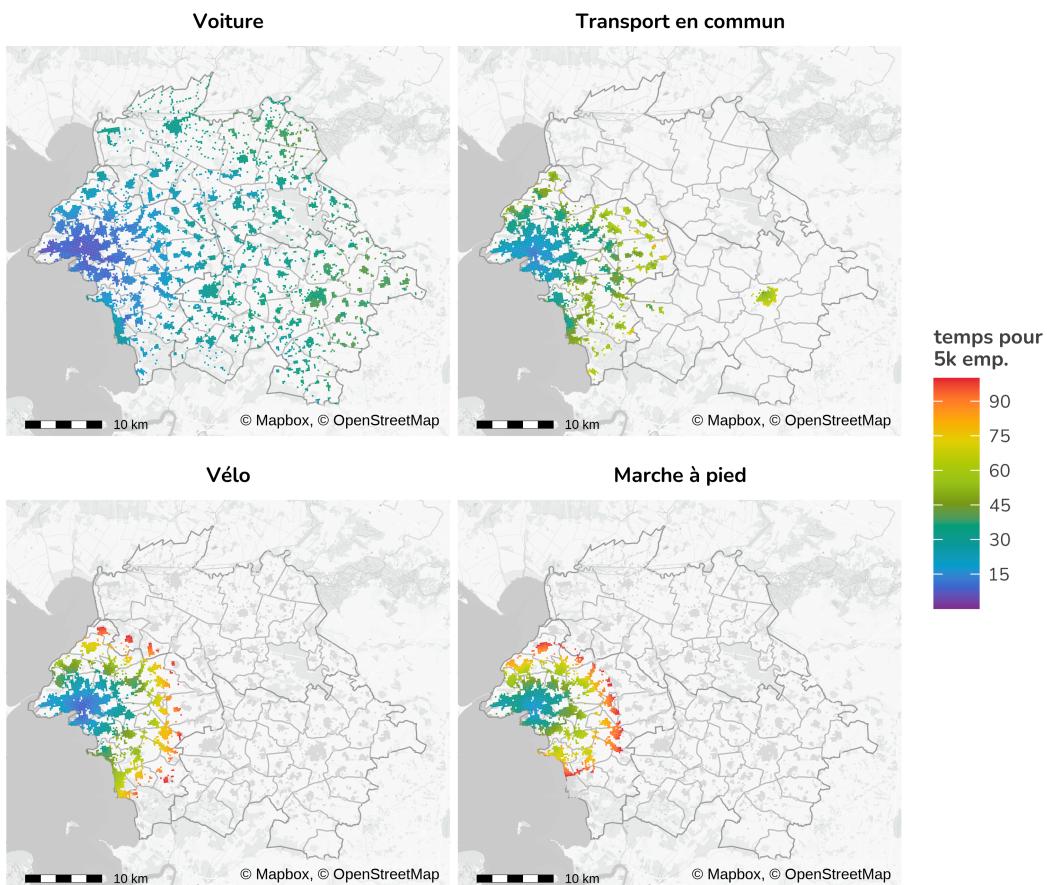


figure 5.3: Temps d'accès à 5 000 emplois. Pour chaque carreau de résidence, on détermine le temps minimal pour atteindre au moins 10 000 emplois suivant l'un des quatre modes considéré. Cette mesure remplace la distance dans le modèle radiatif. Calcul des auteurs. Calcul des auteurs. Source : OSM, Mapbox, IGN, Conveyal R5, carroyage INSEE 2017, Flores et fichiers fonciers 2018

qui découle du modèle théorique présenté plus haut (section 3.3) et qui détermine les choix individuels de déplacement comme de localisation. Ces courbes font apparaître une propriété propre aux villes littorales : si pour des temps courts ou des moyens de transport peu rapide, l'accès à l'emploi pour des temps courts est maximal à la Rochelle, en revanche, d'autres communes jouissent d'une position plus centrale lorsqu'on accepte des temps de trajets supérieurs à 30 minutes en voiture.

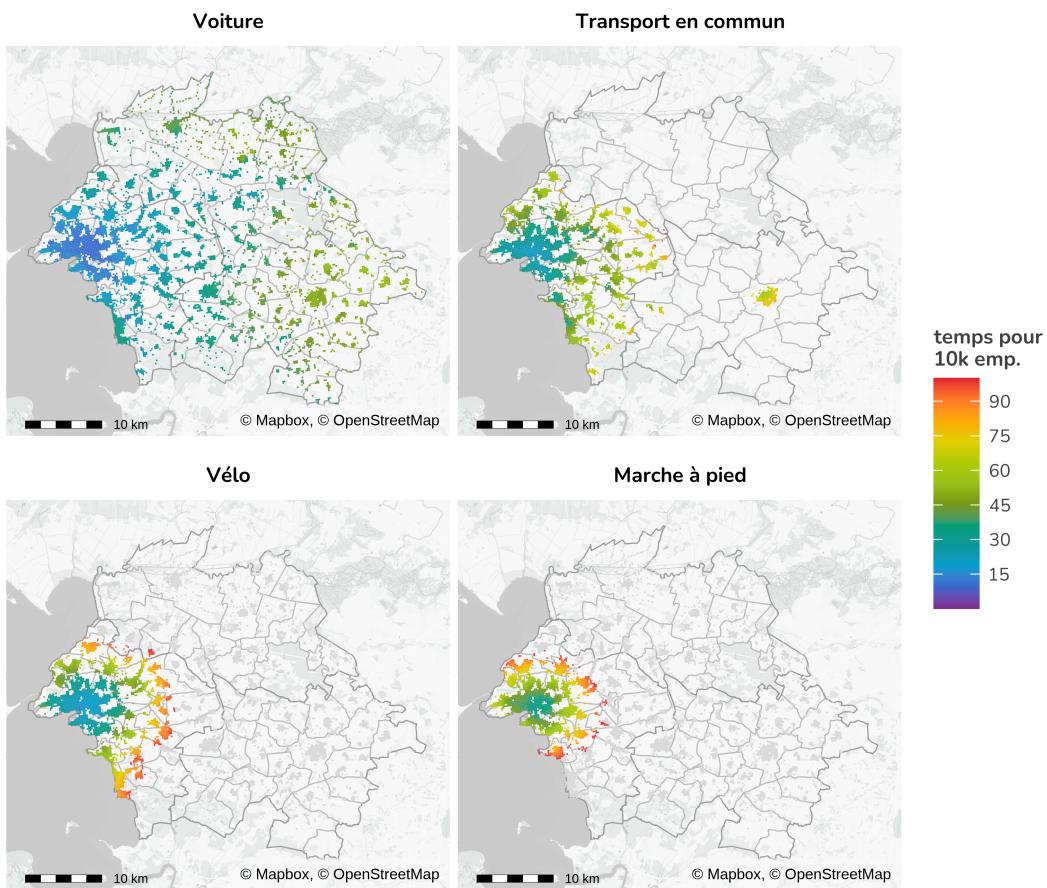


figure 5.4: Temps d'accès à 10 000 emplois. Pour chaque carreau de résidence, on détermine le temps minimal pour atteindre au moins 10 000 emplois suivant l'un des quatre modes considéré. Cette mesure remplace la distance dans le modèle radiatif. Calcul des auteurs. Calcul des auteurs. Source : OSM, Mapbox, IGN, Conveyal R5, carroyage INSEE 2017, Flores et fichiers fonciers 2018

## 5.3 Ajustement de *MEAPS* sur MOBPRO

### 5.3.1 Stratégie non paramétrique et paramétrique

La construction de la matrice de distance permet d'utiliser *MEAPS* pour déduire les flux carreau à carreau. Mais le fichier détail du recensement et son volet mobilités professionnelles nous donnent une information supplémentaire que nous pouvons utiliser pour calibrer au plus près des données *MEAPS*. Les mobilités professionnelles décrivent pour chaque paire de commune résidence-emploi les flux de mobilités professionnelles (de nombreuses paires de communes ont des flux nuls). Cette information est équivalente à celle produite par

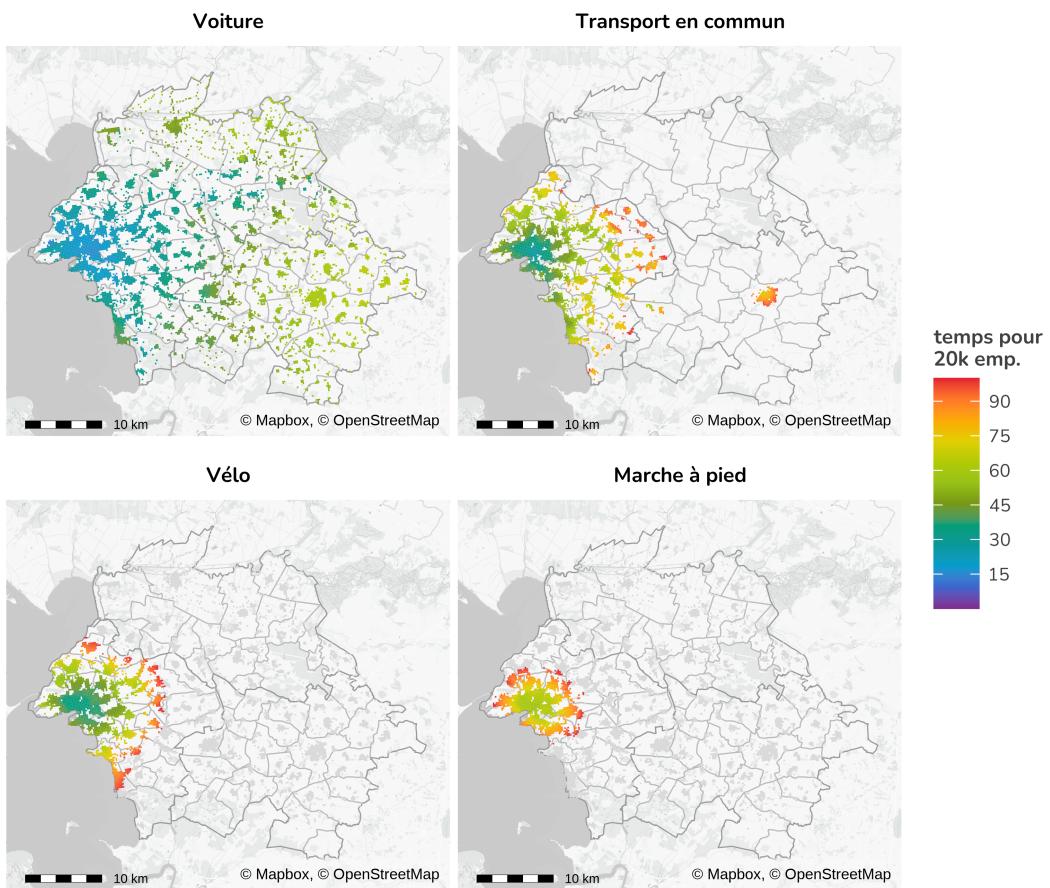


figure 5.5: Temps d'accès à 20 000 emplois. Pour chaque carreau de résidence, on détermine le temps minimal pour atteindre au moins 10 000 emplois suivant l'un des quatre modes considéré. Cette mesure remplace la distance dans le modèle radiatif. Calcul des auteurs. Calcul des auteurs. Source : OSM, Mapbox, IGN, Conveyal R5, carroyage INSEE 2017, Flores et fichiers fonciers 2018

*MEAPS* mais agrégée au niveau communal. Une première stratégie de calage de *MEAPS* est d'affecter aux probabilités d'absorption un facteur correcteur pour reproduire le plus fidèlement possible les flux agrégés de MOBPRO (2022).

Cette méthode conduit à saturer le modèle, d'autant plus que l'on estime un nombre de paramètres proche du nombre de degrés de liberté imposé par MOBPRO (2022). Poussée au maximum, elle permet une interpolation en calibrant des paramètres pour estimer ce que sont les valeurs des flux à un niveau infra-communal, par exemple au carreau 200m. Ce type d'approche s'apparente à une stratégie non paramétrique commune dans le domaine du *machine learning*. Une limite de cette approche est le sur-ajustement qu'elle induit et qui peut être limité en ajoutant une perte dans la fonction objectif liée à la complexité du

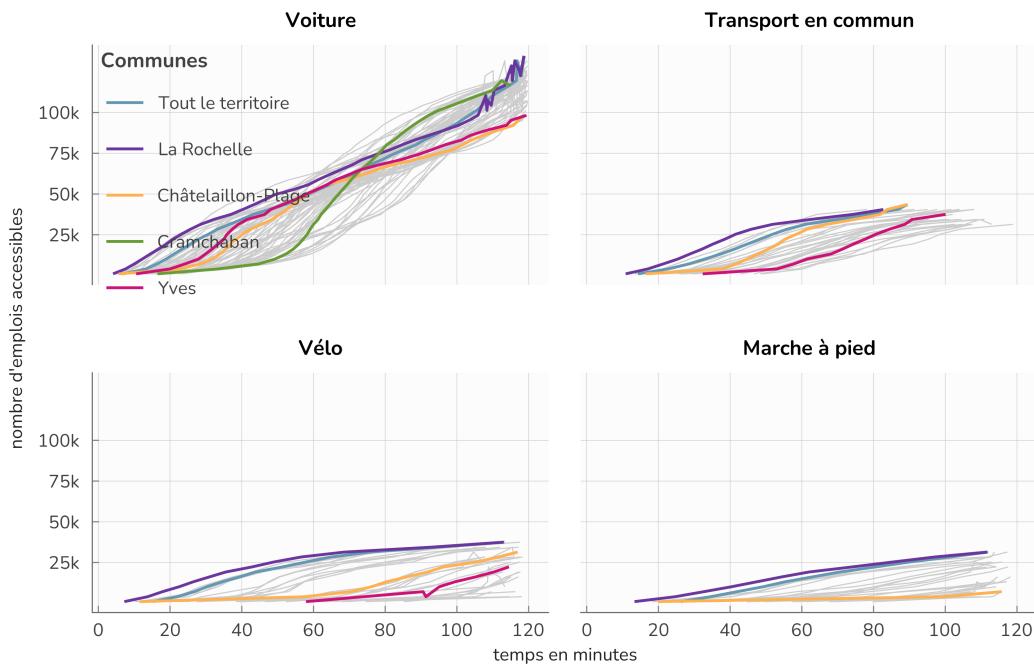


figure 5.6: Courbe du temps d'accès aux emplois. Pour chaque commune, on calcule la médiane, pondérée par le nombre d'habitants par carreau, du temps d'accès à différents seuils d'emplois. Cela permet de caractériser les communes par leur accessibilité à l'emploi, une mesure plus pertinente de la ‘distance à l'emploi’. Calcul des auteurs. Sources : OSM, Mapbox, IGN, Conveyal R5, carroyage INSEE 2017, Flores et fichiers fonciers 2018

modèle. Cela peut également se faire par *pruning*, c'est-à-dire en éliminant les paramètres dont la contribution à l'explication des données est inférieure à un seuil.

Les paramètres issues de cette approche non paramétrique contiennent une information qui peut ensuite être exploitée. Ils s'interprètent les déviations par rapport à un modèle construit à partir d'une hypothèse explicite. Dans notre cas, cette hypothèse explicite découle du modèle de référence où les *odd-ratios* tous égaux à 1, c'est-à-dire que les emplois sont équivalents pour les individus et qu'ils ne les distinguent que par leur ordre de classement en fonction de leur distance de trajet pour chaque individu.

L'approche non paramétrique pose généralement un problème difficile d'algorithme. Une approche brutale qui consiste à minimiser une fonction de perte mesurant l'écart entre les flux estimés et les flux observés se heurte à la grande dimension de l'espace des paramètres. En revanche, on peut utiliser des algorithmes approchés qui, s'ils ne garantissent pas de trouver un minimum, permettent rapidement d'en approcher un. Dans ce cas, la stratégie non paramétrique non brutale peut être efficace du point de vue du temps de calcul au prix de quelques approximations dont par exemple la fonction de perte.

Une seconde approche, beaucoup plus parcimonieuse en paramètres estimés, consiste à définir une forme fonctionnelle pour les *odd-ratios*. Cette forme fonctionnelle réduit alors le nombre

de paramètres drastiquement à quelques uns, voire un seul, et rend possible l'utilisation des algorithmes habituels de minimisation d'une fonction objectif. La connaissance de la matrice hessienne permet d'améliorer la performance de l'algorithme, mais elle est n'est pas toujours calculable et doit être approchée numériquement par itérations successives. Pour quelques paramètres à estimer, les algorithmes peuvent donner en un temps raisonnable une bonne solution au problème de minimisation de la fonction de perte.

### 5.3.2 Estimations non paramétriques

La stratégie d'estimation non paramétrique consiste à définir pour chaque paire origine destination, à la résolution spatiale nécessaire, un paramètre qui permettra de modifier le flux simulé afin de générer le flux souhaité. La modification des probabilités d'absorption est faite par l'ajout d'un facteur correcteur exprimé en "chance", c'est-à-dire que la probabilité modifiée l'est par la formule suivante où  $o_{i,j}$  est un nombre entre 0 et  $+\infty$  et  $i, j$  indexent les communes de départ et d'arrivée avec  $c_a = p_a/(1 - p_a)$  :

$$\tilde{p}_a = \frac{c_a \times o_{i,j}}{1 + c_a \times o_{i,j}} \quad (5.1)$$

A ce stade nous utilisons un algorithme naïf pour trouver une solution au problème posé. Nous calculons l'*odd-ratio* entre le résultat d'une simulation associée à un ensemble d' $o_{i,j}$  et celui défini par les données observées de MOBPRO (2022) en utilisant la formule suivante où  $\beta$  est un paramètre d'amortissement inférieur à 1 et positif et  $k$  indexe les itérations :

$$o_{i,j}^k = \left( \frac{\tilde{p}_a^k / (1 - \tilde{p}_a^k)}{p_a^{mobpro} / (1 - p_a^{mobpro})} \right)^\beta \times o_{i,j}^{k-1} \quad (5.2)$$

Nous modifions alors les  $o_{i,j}$  en fonction des écarts observés. Cela conduit à chercher un point fixe. Nous calculons ensuite un critère d'ajustement à partir de l'entropie relative de Kullback-Leibler (Kullback et Leibler 1951). L'entropie relative est définie pour deux distributions de probabilités  $p$  et  $q$  comme suit (dans le cas discret, le cas continu se généralise aisément) :

$$KL(p, q) = \sum_i p_i \times \log(p_i/q_i) \quad (5.3)$$

Cette mesure ressemble à une distance, mais n'est pas symétrique et ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Elle s'interprète dans le cadre de la théorie de l'information comme la quantité relative d'information supplémentaire nécessaire pour exprimer  $q$  à partir de  $p$ . En suivant Colin Cameron et Windmeijer (1997) on peut construire une mesure de la qualité de l'ajustement  $R_{KL}^2$  de la façon suivante, où  $\hat{q}$  et  $q_0$  sont deux distributions respectivement estimée et de référence que l'on compare à  $p$  :

$$R_{KL}^2 = 1 - \frac{KL(p, \hat{q})}{KL(p, q_0)} \quad (5.4)$$

La distribution de référence est choisie comme une distribution uniforme, par analogie avec le calcul de la variance dans un  $R^2$  habituel où l'on régresse sur une constante. On écrit :

$$\begin{aligned} KL(p, q_{ref}) &= \sum_i p_i \times \log(p_i/unif) \\ &= \sum_i p_i \times \log(p_i) + \log(N) \end{aligned} \tag{5.5}$$

qui n'est autre que l'entropie de la distribution  $p$  à une constante près ( $N$  est le nombre de résidents actifs ou d'emplois).

L'algorithme naïf est relativement efficace. Il converge en quelques dizaines d'itérations, s'avère stable et fait diminuer l'entropie relative. Il devra être affiné dans le futur afin de permettre une descente de gradient qui permet de minimiser explicitement l'entropie relative. L'algorithme naïf permet de réduire cette entropie relative sans assurer qu'elle est minimale.

Cet algorithme naïf a été utilisé avec différentes contraintes sur les paramètres. Le tableau 5.1 indique la qualité de l'ajustement obtenu dans ces différentes configurations. La première est celle où les probabilités d'absorption sont déterminées uniquement par les fuites par commune de résidence. C'est la configuration la plus parcimonieuse en termes de paramètres et qui sert de référence. Le  $R^2_{KL}$  vaut 88% ce qui est un ajustement élevé. La seconde configuration est celle où l'on ajuste des  $o_{i,j}$  uniquement pour les termes diagonaux ( $i = j$ ). Cette configuration ajuste donc un *odd-ratio* pour les résidents qui travaillent dans leur commune de résidence. Dans un certain nombre de communes, cet ajustement conduit à augmenter la probabilité d'absorption interne (figure 5.10), ce qui indique que le choix de résidence n'est pas indépendant de celui d'activité. Pour la commune la plus importante (la Rochelle), en revanche, l'*odd-ratio*  $o_{17300,17300}$  est proche de 1. Les deux configurations suivantes laissent beaucoup plus de degrés de liberté en estimant des  $o_{i,j}$  librement. La première de ces deux configurations limite les  $o_{i,j}$  estimés à ceux représentant un total cumulé des flux mesurés par MOBPRO (2022) égal à 99.4% pour 1 854  $o_{i,j}$  estimés. La seconde configuration estime tous les  $o_{i,j}$  sans limite (soit 2 033 paramètres pour 72 communes de résidence et 210 communes d'activité, avec un grand nombre de liaisons non considérées).

tableau 5.1: Ajustements non paramétriques, mobilités professionnelles la Rochelle

	RKL2	Degrés de liberté	odds estimés
Référence (odds unitaires)	88.0%	1752	0
Diagonale (résidence égale emploi)	95.0%	1681	71
90% des flux cumulés	97.4%	1027	725
99% des flux cumulés	99.4%	0	1854
100% des flux cumulés	99.8%	0	2033

Le nombre de degrés de liberté est le nombre de paires de flux non nuls dans MOBPRO, moins les contraintes en ligne et en colonne, plus un puisqu'elles sont redondantes moins le nombre de paramètres estimés. Le nombre de degré de liberté est nul pour les configurations 99% et 100% parce que le nombre de paramètres estimés est supérieur au produit des linges et des colonnes moins les contraintes. Il y a bien plus de paramètres estimés pour la configuration 100% que pour 99%. En conséquence, l'algorithme conduit à un résultat légèrement différent.

la figure 5.7 représente les flux observés et estimés pour les différentes configurations du tableau 5.1. Le gain à estimer les  $o_{i,i}$  diagonaux, pondérant les flux allant d'une commune de résidence vers elle-même est assez élevé, faisant passer le  $R^2_{KL}$  de 88% à 95% et réduisant les écarts entre flux observé et flux estimé comme le montrent les deux panneaux supérieurs de la figure 5.7. L'ajout de paramètres supplémentaires ne fait pas gagner beaucoup plus d'autant que les écarts pour les flux marginaux ne sont pas tant réduit que ça. La limite de l'algorithme naïf apparaît ici, puisque le modèle complètement saturé n'ajuste pas totalement la distribution. Différents détails de l'algorithme peuvent l'expliquer, notamment la censure des *odd-ratio* trop faibles ( $<0.0001$ ) ou trop importants ( $>10000$ ) ou la prise en compte des flux nuls. Au-delà de cet argument, il est probable que pour converger vers un ajustement plus strict, il serait nécessaire de calculer la matrice des quasi dérivées des flux par rapport aux  $o_{i,j}$ .

Mais le coût peut être très élevé puisque cette matrice (calculée dans la partie synthétique dans un cas simple) est d'une taille considérable ( $1\ 755 \times 1\ 755$  coefficients), surtout si l'on prend en compte que le calcul de chaque terme prend autour d'une minute<sup>2</sup>.

Notons que l'échantillon des mobilités donné par MOBPRO (2022) pour l'agglomération de la Rochelle est très particulier. Une commune (la Rochelle, dont le code géographique est 17300) représente presque 29% des flux de mobilité (de la Rochelle lieu de résidence vers la Rochelle lieu d'emploi). C'est donc un schéma monocentrique, où à la fois les résidents et les emplois sont concentrés sur un territoire réduit. La résolution spatiale de MOBPRO (2022) ne nous permet pas d'en détailler la structure plus fine.

Pour les 20 plus grandes communes de l'agglomération de la Rochelle – qui comptent plus de 1 000 résidents en activité – on peut représenter les *odd-ratios* estimées dans la configuration 100% des flux par rapport aux chances calculées dans le cas où tous les  $o_{i,j}$  sont égaux à 1 (des *odd-ratios* effectifs), en fonction de la distance de la commune de destination à la commune de résidence<sup>3</sup>. Ce diagramme, analogue à un spectre, peut aussi être construit par commune de destination, la distance  $d$  étant la distance aux différentes communes de résidence figure 5.9. L'élément le plus frappant est que les *odd-ratios* de  $i$  à  $i$  sont généralement supérieur à 1 (figure 5.8), à l'exception de la commune de la Rochelle. Il n'émerge pas de structure particulière par rapport à la distance, si ce n'est des *odd-ratios* élevés pour des distances importantes

La figure 5.10 permet de préciser la valeur élevée des *odd-ratios* pour les flux internes. Les communes où sont localisés de nombreux emplois ont un *odd-ratio* plutôt plus faible alors qu'ils sont estimés plus élevés dans les communes plus petites et moins desservies. Pour

<sup>2</sup>Autour de 6 années de vCPU...

<sup>3</sup>La distance est construite comme la distance moyenne pondérée entre les résidents de la commune de départ et les emplois de la commune d'arrivée. La pondération est le produit des emplois et des résidents pour chaque paire, normalisé à 1.

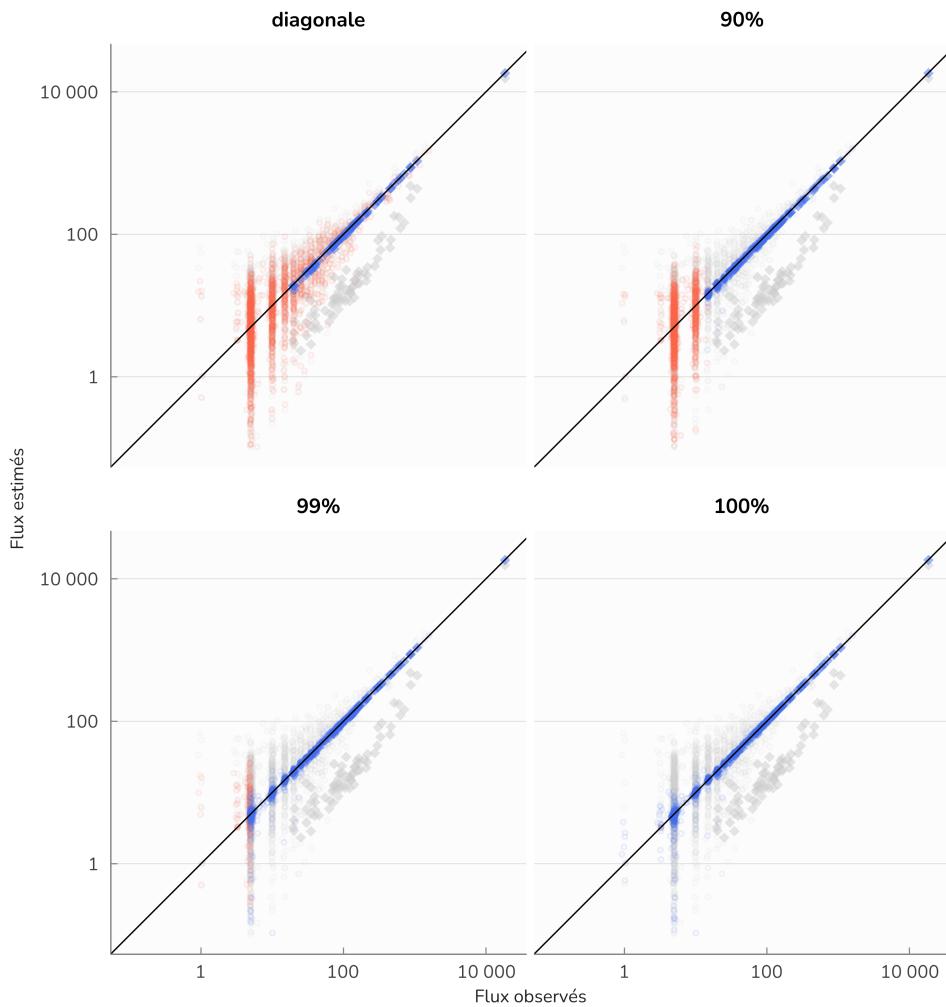


figure 5.7: La figure présente pour chaque configuration d'estimation le flux observé (axe des x) et le flux estimé (axe des y) en bleu lorsque  $oi,j$  est estimé et en rouge lorsque  $oi,j$  n'est pas estimé (les fuites sont toujours utilisées). La valeur de référence est répétée dans chaque panneau en gris clair.

les différentes procédures d'estimation et donc différents nombres de paramètres estimés, on observe une structure similaire dans la répartition géographique des *odd-ratio*, ce qui suggère que les *odd-ratios* estimés contiennent de l'information.

Un *odd-ratio* élevé dans la diagonale indique que les flux internes sont plus importants que dans le scénario de référence. Cela indique probablement un choix de résidence en lien avec l'emploi occupé en privilégiant la commune d'activité pour la résidence (ou l'inverse). Le spectre résident en fonction de la distance indique que ce phénomène, s'il est une hypothèse à très faible distance, ne persiste pas en dehors de la commune de résidence. En revanche,

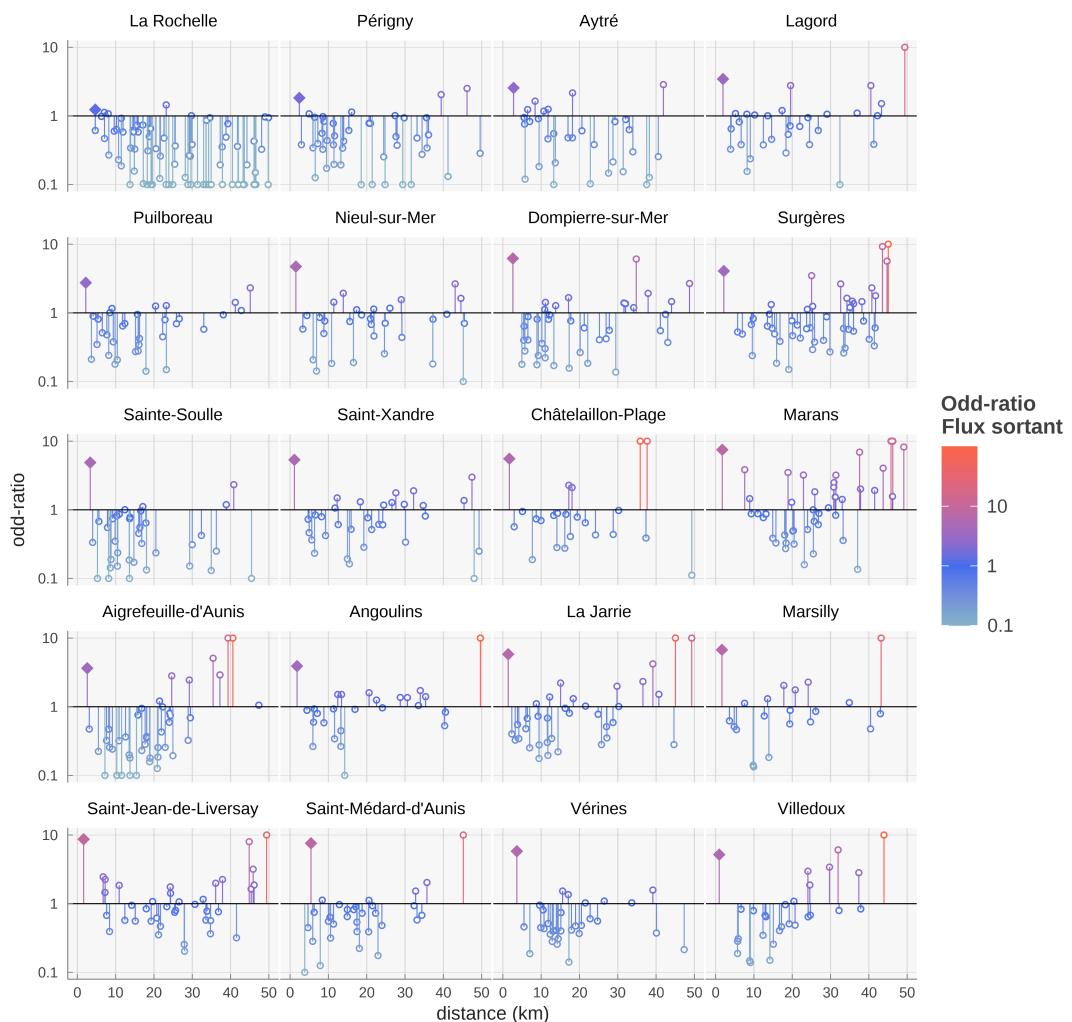


figure 5.8: La figure représente pour les 20 plus grandes communes de l'agglomération de la Rochelle les odd-ratios estimés (configuration 100% des flux) en fonction de la distance entre cette commune et les communes où travaillent les résidents. Les points marqués d'un petit point blancs sont les emplois situés hors du périmètre du SCoT.

la figure 5.9 suggère que dans certaines communes, notamment Surgères, on observe des *odd-ratios* supérieurs à 1 pour des distances faibles, ce qui s'interprète comme le fait que les habitants des communes alentour privilégiennent Surgères comme lieu d'emploi.

A ce stade, les observations sont limitées par le faible nombre de communes modélisées, mais on peut espérer que l'analyse des *odd-ratios* estimés pourra servir à caractériser les communes en fonction des choix de résidence et d'emploi. En multipliant cette analyse pour d'autres territoires, l'information apportée par les *odd-ratio* pourra être inférée. Il sera aussi

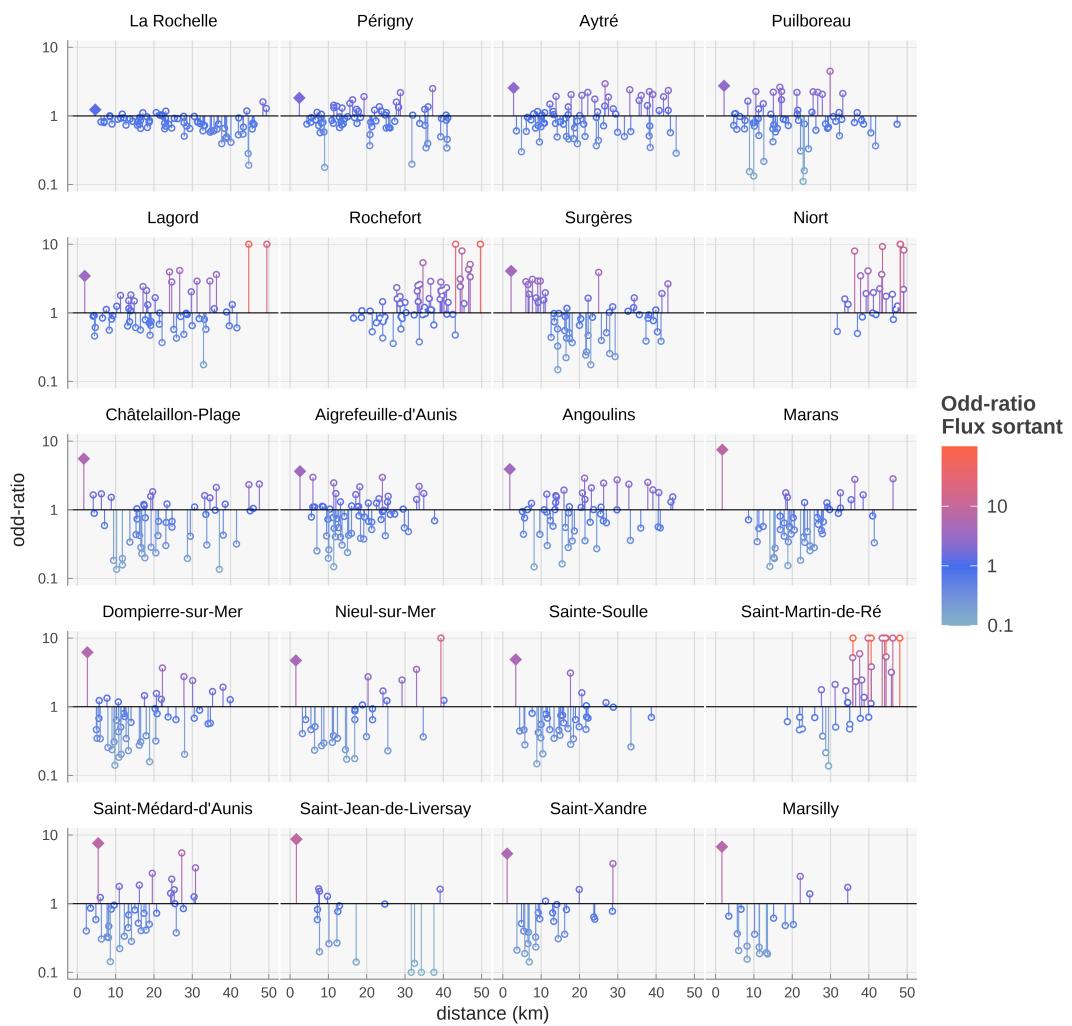


figure 5.9: La figure représente pour les 20 plus grandes communes d'emplois du périmètre géographique (33 km autour de l'agglomération de la Rochelle) les odd-ratios estimés (configuration 100% des flux) en fonction de la distance entre cette commune et les communes où résident les travailleurs de la commune.

possible de confronter ces éléments à d'autres variables, comme le prix de l'immobilier, les loyers résidentiels ou commerciaux, la densité d'emploi.

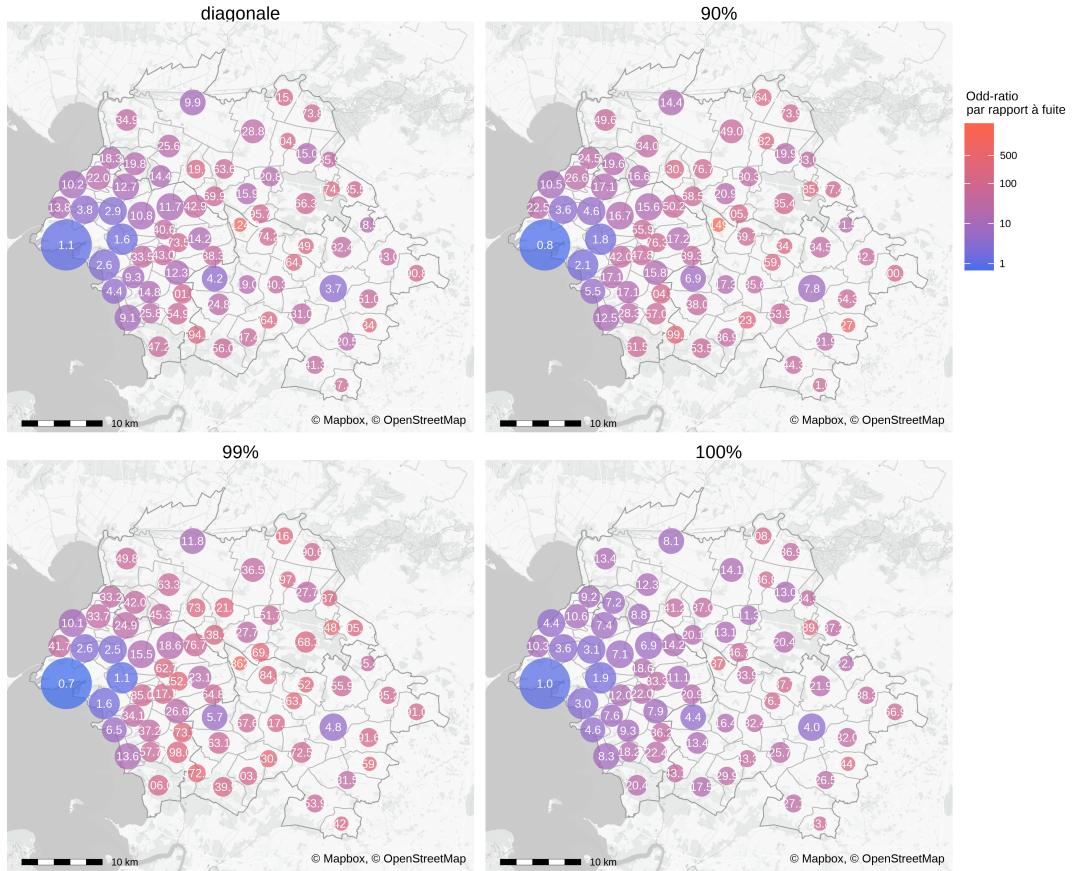


figure 5.10: Chaque cercle indique les odd-ratio estimés dans la diagonale (100% des flux).  
Les diamètres des cercles sont proportionnels aux flux internes (de  $i$  à  $i$ ).

### 5.3.3 Estimations paramétriques et comparaison avec le modèle gravitaire

En donnant une forme fonctionnelle paramétrisée aux *odd-ratios* correctifs  $\{o_{i,j}\}$  on peut ensuite déterminer les paramètres par un algorithme standard de minimisation de l'entropie relative, qui est le critère que nous avons choisi pour comparer les distributions. De plus, il est également possible de procéder à une telle estimation paramétrique pour le modèle gravitaire.

Nous explorons ici trois formes paramétriques pour MEAPS :

1. un paramètre pour les termes diagonaux, c'est-à-dire les flux allant d'une commune de résidence vers cette même commune pour l'emploi. Cette forme est proche de la forme "diagonale" estimé dans la section 5.3.2, mais un seul paramètre est estimé – par une minimisation de l'entropie relative – au lieu de 72 par l'algorithme itératif. Formellement,  $o_{i \neq j} = 1$  et  $o_{i,i} = o$ .
2. un paramètre pour les termes diagonaux, comme pour 1., et un paramètre pour les communes voisines d'emploi, c'est-à-dire un terme correctif reliant une commune de résidence aux communes qui en sont voisines, hormis la commune elle-même. Le même paramètre est estimé pour toutes les correspondances une commune et ses voisines. Une commune est voisine d'une autre si au moins 5% des trajets pondérés par les emplois et les résidents ont une distance kilométrique inférieure à 3km. Cette définition permet d'exclure des communes limitrophes mais dont les pôles principaux sont distants. Formellement,  $o_{i,i} = o_d$ ;  $o_{i,j \in \mathcal{V}(i)} = o_v$  et  $o_{i,j \neq i, j \notin \mathcal{V}(i)} = 1$ .
3. deux paramètres qui sont d'une part un paramètre de distance et d'autre part la distance de bascule. Formellement, en dessous d'une distance donnée  $d_c$  on définit un  $o_{i,j \in \mathcal{D}_{i,j} \leq d_c} = o$  et  $o_{i,j \in \mathcal{D}_{i,j} > d_c} = 1$ . Cette forme s'approche de la 1, mais estime la notion de proximité au lieu de reposer sur le découpage administratif. La différence entre 1.et 3. illustre les possibilités de la modélisation proposée.

Chacune de ces options vise à mesurer un biais intra-communal évoqué dans la section précédente qui peut s'expliquer par un choix de localisation de résidence et d'emploi joint. *MEAPS* offre ici la possibilité de mesurer l'intensité de cette déviation par rapport à l'hypothèse où les emplois sont considérés indépendamment de la localisation et sont tous homogènes. Il sera intéressant de comparer les territoires de ce point de vue et d'en déduire des régularités qui peuvent indiquer comment les spécificités locales, qu'elles concernent la géographie du territoire – sa structure en pôles ou en satellite–, la formation des prix de l'immobilier, le réseau de transport ou la nature de l'activité économique. On pourrait également chercher à exploiter l'information sectorielle – disponible dans MOBPRO (2022) au niveau de 5 secteurs – ou l'information sociale ou démographique – disponible au niveau communal ou de l'IRIS mais qui peut être exploitée également à un niveau plus fin avec Fidéli<sup>4</sup>.

A ces formes fonctionnelles pour *MEAPS*, nous ajoutons deux formes fonctionnelles pour le modèle gravitaire :

4. un modèle gravitaire suivant la définition équation 3.1 où  $f(d) = e^{-d/\delta}$ . Un seul paramètre  $\delta$  est estimé.
5. un modèle gravitaire "équilibré" en utilisant l'algorithme de Furness, tel que décrit dans section 4.2 et en estimant  $\delta$  comme dans le point 4.

On pourrait multiplier les modèles estimés<sup>5</sup>. Le propos est ici d'illustrer les possibilités de notre modélisation et de les comparer à celles du modèle gravitaire. Deux points émergent :

- *MEAPS* peut mieux reproduire les données, avec une qualité d'ajustement meilleure,

<sup>4</sup>Fichiers démographiques sur les logements et les individus, INSEE, <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/source/serie/s1019>.

<sup>5</sup>Par exemple, en faisant dépendre les *odd-ratios* non pas de la distance et d'une distance critique mais du rang et d'un rang critique.

- MEAPS ouvre des possibilités d'interprétation plus riches que celle du modèle gravitaire, parce que les fondements microscopiques de MEAPS sont explicites.

Le tableau tableau 5.2 résume les résultats des estimations. Le modèle de référence, dans lequel tous les emplois sont équivalents pour chaque individu, fait moins bien en termes d'ajustement que les autres modèles, à l'exception notable du modèle gravitaire non équilibré. Comme on avait pu le constater dans les estimations non paramétriques, le modèle de référence a, malgré son hypothèse simplificatrice, une bonne performance, ce qui est confirmé ici par la comparaison au modèle gravitaire simple.

tableau 5.2: Ajustements paramétriques, mobilités professionnelles la Rochelle

	RKL2	Degrés de liberté	Paramètres
Référence	88.0%	1752	
1. Commune vers commune	92.9%	1751	o 4.1
2. Commune vers commune et voisines	93.1%	1750	od 4.7 ov 1.4
3. Distance carreau 200m	94.0%	1750	dc 8.8 min o 19
4. Gravitaire sans Furness	82.6%	1961	20 min
5. Gravitaire avec Furness	90.7%	1751	16 min

Le nombre de degrés de liberté est le nombre de paires de flux non nuls dans MOBPRO, moins les contraintes en ligne et en colonne, plus un puisqu'elles sont redondantes moins le nombre de paramètres estimés. Les unités sont des minutes de trajet pour les paramètres homogènes à une distance et sans unité pour les *odd-ratios*.

Les estimations 1 à 3, dans lesquelles on explore un terme diagonal sous différentes formes, renforcent le diagnostic de biais communal noté dans les estimations non paramétriques. Il y a en moyenne 4 fois plus de chance de choisir un emploi (tableau 5.2, lignes 1 et 2) dans la commune de résidence. L'estimation 2. montre que les communes voisines ne connaissent pas un biais comparable, bien que la chance de choisir un emploi dans celles-ci soit supérieure à 1.

L'estimation 3. délivre une information importante. C'est probablement plus la distance que le découpage administratif qui explique ce biais communal, qu'il convient plutôt d'appeler un biais de proximité. En effet, le coefficient d'ajustement est supérieur de plus d'un point à celui obtenu en 1., en perdant uniquement 1 degré de liberté. La distance de bascule est faible, autour de 8 minutes, ce qui suggère que le périmètre communal est trop large pour capturer cet effet. La chance à plus courte distance est également nettement plus élevée puisqu'au lieu d'être approximativement de 4 elle est approximativement de 20, soit 5 fois plus.

Il convient à ce stade d'être prudent sur cette estimation, puisque la résolution des données est largement inférieure au seuil qui a été trouvé. La simulation est basée sur des distances et des localisations d'emplois au carreau 200m dont la précision est convaincante. Mais les flux dans MOBPRO (2022) ne sont connus que pour les communes d'origine et de départ et donc avec une résolution spatiale plus faible. La multiplication des observations peut palier à cette faible résolution spatiale, mais cela demandera d'établir une analyse des distances et des localisations sur des territoires plus grands et plus nombreux. L'utilisation de données de

flux plus précisément localisées, par exemple calculées à partir de Fidéli<sup>6</sup> ou, au prix d'une lourdeur de données bien plus importante par des traces numériques.

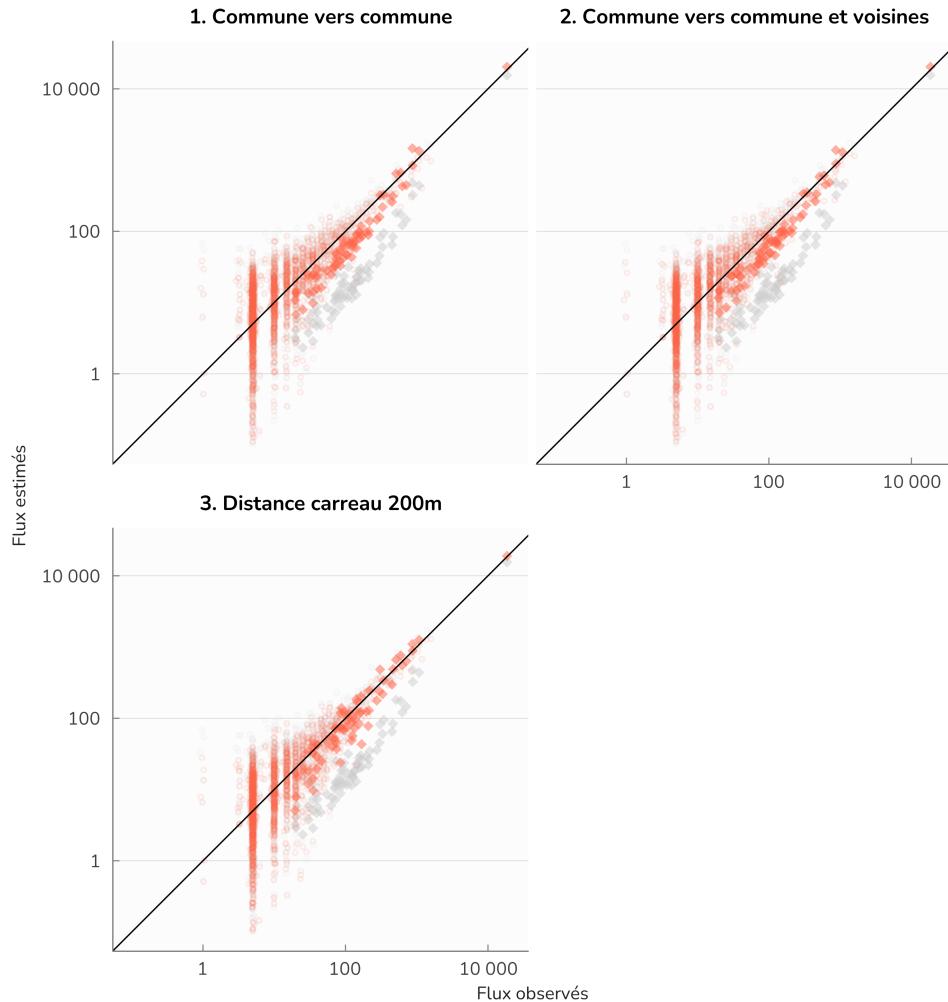


figure 5.11: La figure présente pour chaque configuration d'estimation le flux observé (axe des x) et le flux estimé (axe des y) en bleu lorsque  $oi,j$  est estimé et en rouge lorsque  $oi,j$  n'est pas estimé (les fuites sont toujours utilisées). La valeur de référence est répétée dans chaque panneau en gris clair.

Les estimations paramétriques indiquent une moins bonne performance du modèle gravitaire. Sans respect des contraintes en colonne, le modèle gravitaire donne une image assez faussée des trajets. Il peine à reproduire le biais de proximité et l'influence de la distance. Le premier

<sup>6</sup>A partir de Fidéli, on peut préciser la localisation de chaque individu et utiliser l'information sur la commune dans laquelle il travaille. On ne peut pas en revanche localiser plus précisément la localisation de l'emploi occupé.

tend à produire un paramètre  $\delta$  très élevé alors que le second devrait au contraire imposer un  $\delta$  plus faible pour rendre compte de trajets plus longs. L'application d'une même valeur de la distance suivant des milieux plus ou moins denses handicape cette représentation. La procédure de Furness améliore largement la capacité du modèle gravitaire à rendre compte des données. C'est au prix de la perte du lien avec la distance telle qu'elle est formulée dans le modèle gravitaire, à savoir homogène pour tous.

La figure 5.12 illustre ce qui est à l'œuvre dans le modèle gravitaire. La minimisation de l'entropie relative dépend beaucoup du flux entre la Rochelle et la Rochelle qui pèse 29% de l'échantillon. La prise en compte des autres communes diagonales n'est pas bonne, ce qui conduit à un  $R_{KL}^2$  moins bons que la référence de MEAPS (tous les emplois sont identiques pour chaque individu et ne diffèrent que par leur localisation). Le respect de la contrainte en colonne par la procédure de Furness permet une meilleure prise en compte des communes diagonales (dont le poids est de 35% dans l'échantillon la Rochelle), mais moins bonne que les modèles MEAPS paramétriques ou non.

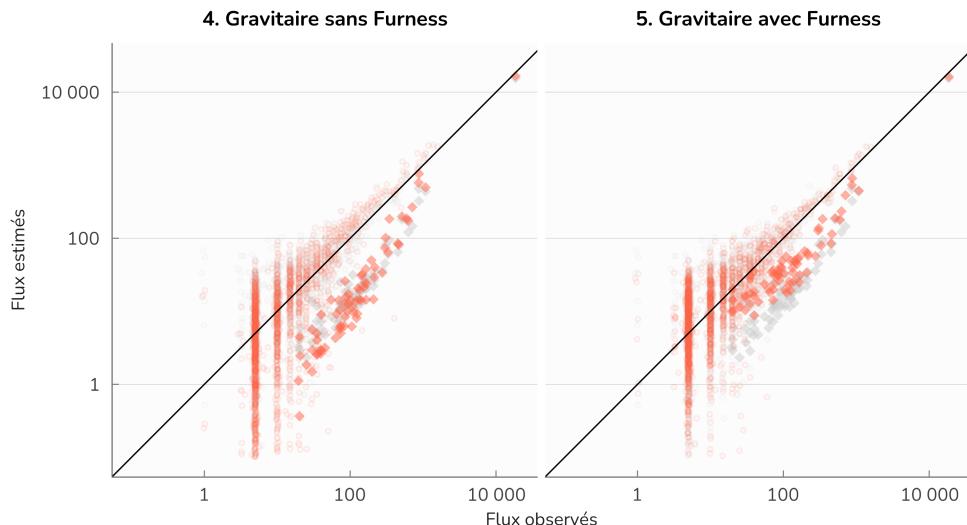


figure 5.12: La figure présente pour chaque configuration d'estimation le flux observé (axe des x) et le flux estimé (axe des y) en bleu lorsque  $oi,j$  est estimé et en rouge lorsque  $oi,j$  n'est pas estimé (les fuites sont toujours utilisées). La valeur de référence est répétée dans chaque panneau en gris clair.

La figure 5.13 confirme ce diagnostic. On y compare la distribution cumulée en fonction de la distance kilométrique pondérée entre chaque commune pour différentes estimations, les flux de MOBPRO (2022) étant utilisé comme référence. Les performances des modèles sont comparables pour les courtes distances (i.e la commune de la Rochelle vers elle-même). Le modèle gravitaire avec ou sans Furness pêche sur les distances intermédiaires et donne trop de poids aux distances très longues. Les estimations paramétriques à partir de MEAPS parviennent bien à reproduire la distribution cumulée des distances, notamment le modèle paramétrique 3. qui retient la distance au carreau 200m comme forme fonctionnelle.

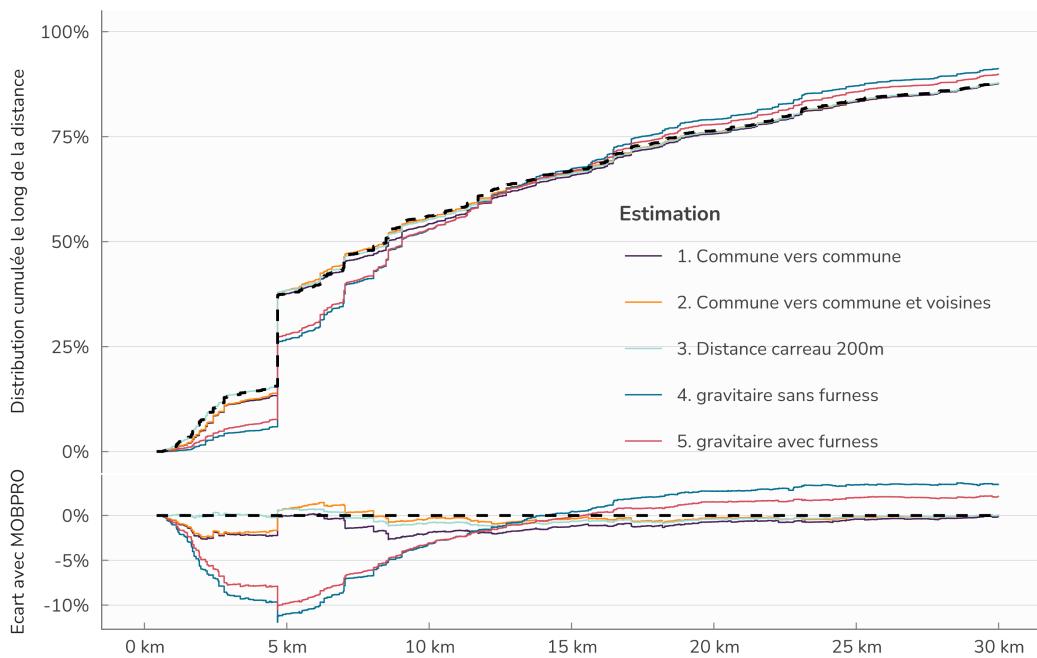


figure 5.13: Distributions empiriques cumulées des flux selon la distance. MOBPRO est indiqué en trait pointillé noir. La figure du haut est la distribution cumulée, celle du bas la différence entre la distribution et celle de MOBPRO

## 5.4 Une cartographie des émissions de CO<sub>2</sub>

La construction d'un modèle et sa calibration et sa validation sur des données permet de projeter dans des dimensions non observées les prédictions du modèle. Nous utilisons ici *MEAPS*, calibré sur les données MOBPRO (2022) sur l'agglomération de la Rochelle pour produire une carte au carreau 200m des émissions de CO<sub>2</sub> liées à la mobilité professionnelle quotidienne.

Le principe est assez simple : les seuls déplacements en voiture sont considérés comme étant émetteur de CO<sub>2</sub>, ce qui est une approximation raisonnable. Les émissions liées aux transports en commun, particulièrement les bus peu occupés pourraient être ajoutées, mais elles pèsent relativement peu dans le bilan des mobilités quotidiennes. Pour estimer les déplacements en voiture nous utilisons un modèle de choix discret évoqué dans la section 5.2. Ce modèle estimé sur MOBPERS (2021) ne pose à ce stade pas de difficulté particulière, si ce n'est un problème discuté à la fin de cette section.

# **6 Scénarios à la Rochelle**

La construction d'un modèle représentant de façon fine et fiable les déplacements permet de proposer des analyses pour des scénarios complexes. C'est le but d'une modélisation que de proposer des réponses convaincantes à des questions du type "Que se passerait-il si...". Dans la réponse à une telle question, on espère que la modélisation permet de la prendre en compte avec une profondeur suffisante et que les éléments calibrés sur les observations sont suffisamment invariants pour justifier une projection.

## **6.1 Re-localisation de l'emploi**

Le Schéma de Cohérence Territorial (SCoT) est un document de planification, établi et voté par les élus des communes composant le territoire et soumis à validation de l'État. Il définit, entre autres, des zones de développement économique, urbaines et des espaces naturels. C'est la loi SRU relative à la Solidarité et au Renouvellement Urbains du 13 décembre 2000 qui l'a défini et les contours en ont été modifiés au cours des dernières années.

Le schéma n'est pas qu'indicatif puisqu'il est opposable. En ce qui concerne le développement de l'emploi, la création de zones d'activité est rendue possible par le SCoT, mais la réalisation effective des créations d'emploi et surtout leur localisation nette des déplacements d'autres emplois découle des décisions de l'ensemble des acteurs et donc et donc de causalités diverses et variées. Nous évaluons ici des scénarios compatibles avec le SCoT sans pour autant nous prononcer quant à leur réalisme ou leur probabilité d'occurrence. Ainsi, nous analysons les localisations proposées à emploi total constant, c'est-à-dire vues comme des relocalisations de l'emploi vers les zones d'activités depuis leur localisation actuelle.

## **6.2 Reconfiguration du réseau de transport en commun**

L'analyse du territoire ne repose pas seulement sur la localisation de l'emploi, mais aussi sur une prise en compte détaillée des possibilités de transport.

# Références

- Ben-Akiva, Moshe, et Steven R. Lerman. 2018. *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*. Transportation Series. MIT Press.
- C200. 2022. « Revenus, pauvreté et niveau de vie en 2017 - Données carroyées. Dispositif Fichier localisé social et fiscal (Filosofi) ». INSEE; <https://www.insee.fr/fr/statistiques/6214811?sommaire=6215217>.
- Colin Cameron, A., et Frank A. G. Windmeijer. 1997. « An R-Squared Measure of Goodness of Fit for Some Common Nonlinear Regression Models ». *Journal of Econometrics* 77 (2): 329-42. [https://doi.org/10.1016/s0304-4076\(96\)01818-0](https://doi.org/10.1016/s0304-4076(96)01818-0).
- Conway, Matthew Wigginton, Andrew Byrd, et Marco van der Linden. 2017. « Evidence-Based Transit and Land Use Sketch Planning Using Interactive Accessibility Methods on Combined Schedule and Headway-Based Networks ». *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2653 (1): 45-53. <https://doi.org/10.3141/2653-06>.
- Conway, Matthew Wigginton, Andrew Byrd, et Michael Van Eggermond. 2018. « Accounting for uncertainty and variation in accessibility metrics for public transport sketch planning ». *Journal of Transport and Land Use* 11 (1). <https://doi.org/10.5198/jtlu.2018.1074>.
- Conway, Matthew Wigginton, et Anson F. Stewart. 2019. « Getting Charlie Off the MTA: A Multiobjective Optimization Method to Account for Cost Constraints in Public Transit Accessibility Metrics ». *International Journal of Geographical Information Science* 33 (9): 1759-87. <https://doi.org/10.1080/13658816.2019.1605075>.
- Dios Ortúzar, Juan de, et Luis G Willumsen. 2011. *Modelling transport*. John wiley & sons.
- Heanue, Kevin E., et Clyde E. Pyers. 1966. « A Comparative Evaluation of Trip Distribution Procedures ». *Highway Reserach Record*, n° 114: 20-50.
- Kullback, S., et R. A. Leibler. 1951. « On Information and Sufficiency ». *The Annals of Mathematical Statistics* 22 (1): 79-86. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729694>.
- Lasser, Jana. 2020. « Creating an Executable Paper Is a Journey Through Open Science ». *Communications Physics* 3 (1). <https://doi.org/10.1038/s42005-020-00403-4>.
- MOBPERS. 2021. « EMP 2019 Résultats détaillés de l'enquête mobilité des personnes de 2019 ». SDES, Ministère de la transition écologique et de la cohésion des territoires; <https://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr/resultats-detaillés-de-l'enquête-mobilite-des-personnes-de-2019>.
- MOBPRO. 2022. « Mobilités professionnelles en 2019 : déplacements domicile - lieu de travail Recensement de la population - Base flux de mobilité ». INSEE; <https://www.insee.fr/fr/statistiques/6454112>.
- Patrick Bonnel. 2001. « Prévision de la demande de transport ». Thèse de doctorat, Lyon, France.
- Pereira, Rafael H. M., Marcus Saraiva, Daniel Herszenhut, Carlos Kauê Vieira Braga, et Matthew Wigginton Conway. 2021. « r5r: Rapid Realistic Routing on Multimodal Transport Networks with R5 in R ». <https://doi.org/10.32866/001c.21262>.

- Simini, Filippo, Marta C. González, Amos Maritan, et Albert-László Barabási. 2012. « A Universal Model for Mobility and Migration Patterns ». *Nature* 484 (7392): 96-100. <https://doi.org/10.1038/nature10856>.
- Stouffer, Samuel A. 1940. « Intervening Opportunities: A Theory Relating Mobility and Distance ». *American Sociological Review* 5 (6): 845. <https://doi.org/10.2307/2084520>.
- Wilson, A. G. 1967. « A Statistical Theory of Spatial Distribution Models ». *Transportation Research* 1 (3): 253-69. [https://doi.org/10.1016/0041-1647\(67\)90035-4](https://doi.org/10.1016/0041-1647(67)90035-4).