中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第二章 逻辑代数基础

本章目录

§2.1 概述

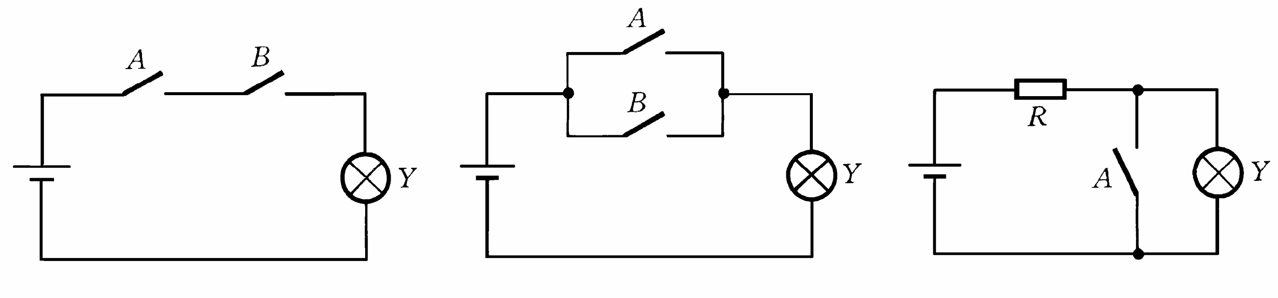
基本概念

- **逻辑**：事物的因果关系。
- **逻辑代数**：是描述客观事物逻辑关系的数学方法，是进行逻辑分析与逻辑综合的数学工具。
- **逻辑变量**：逻辑代数中的变量。逻辑变量的取值范围仅为"0"和"1"，且无大小、正负之分。
- **逻辑运算**：逻辑变量按照指定的某种因果关系进行推理运算的过程。

算术运算——普通代数（加减乘除）
逻辑运算——布尔代数（与或非等）

§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

逻辑代数的基本运算有与(AND)、或(OR)、非(NOT)三种。

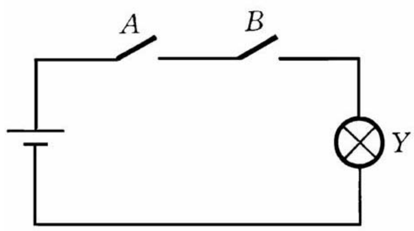


(a) (b) (c)

三种电路的因果关系不同。

§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

与运算：只有决定事物结果的条件同时具备时，结果才发生。



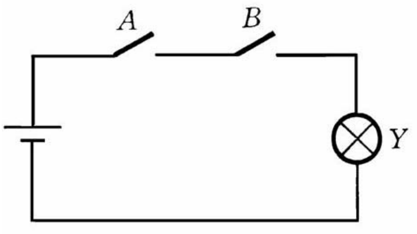
开关*A*	开关*B*	灯*Y*
断开	断开	不亮
断开	闭合	不亮
闭合	断开	不亮
闭合	闭合	亮

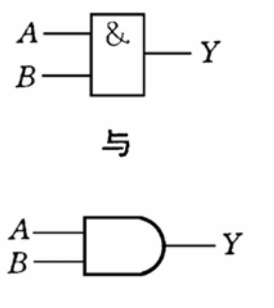
A	*B*	*Y*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

以A=1表示开关A闭合，A=0表示开关A断开；
以B=1表示开关B闭合，B=0表示开关B断开；
以Y=1表示灯亮，Y=0表示灯不亮。

§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

与运算： 只有决定事物结果的条件同时具备时，结果才发生。





A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Y=A\cdot B=AB$

运算规则：

$0\cdot 0=0$

$0\cdot 1=0$

$1\cdot 0=0$

$1\cdot 1=1$

一般形式：

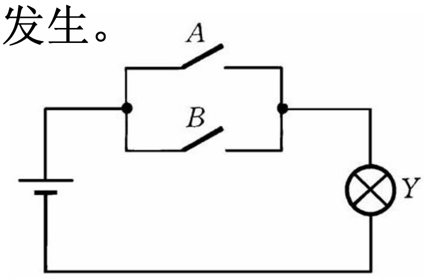
$0\cdot A=0$

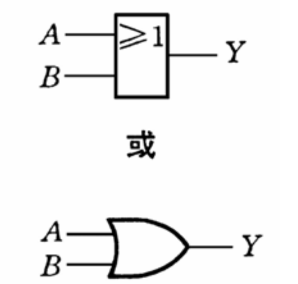
$1\cdot A=A$

$A\cdot A=A$

§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

或运算： 在决定事物结果的诸条件中只要有任何一个满足，结果就会发生。





A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$Y=A+B$

运算规则：

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+0=1$

$1+1=1$

一般形式：

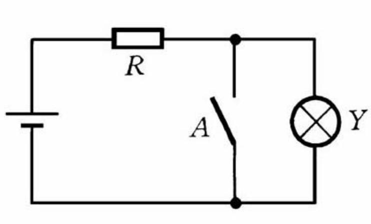
$0+A=A$

$1+A=1$

$A+A=A$

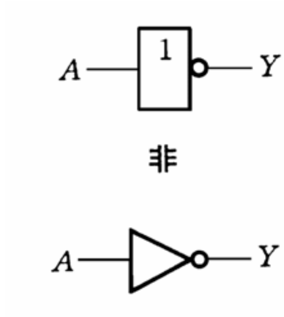
§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

非运算：只要条件具备了，结果便不会发生；而条件不具备时，结果一定发生。



A	Y
0	1
1	0

$$Y = A' = \overline{A}$$



运算规则：

$0' = 1$

$1' = 0$

一般形式：

$(A')' = A$

$A \cdot A' = 0$

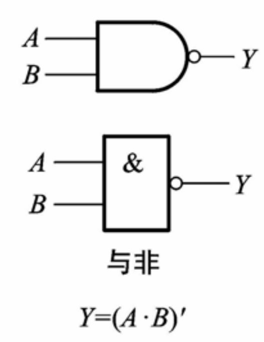
$A + A' = 1$

§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

几种常用的复合逻辑运算：与非、或非、与或非、异或、同或。

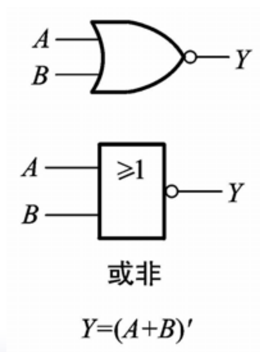
- 与非

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- 或非

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

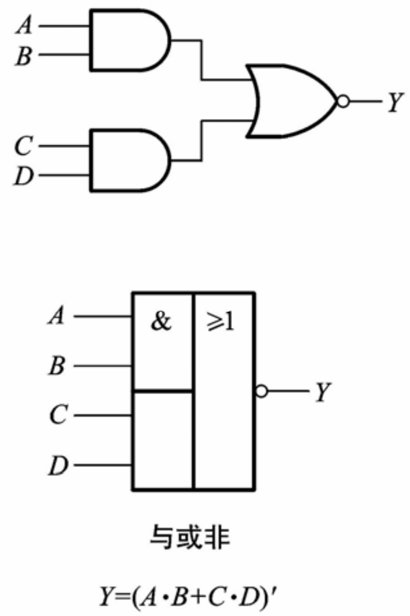


§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

几种常用的复合逻辑运算：与非、或非、与或非、异或、同或。

- 与或非

ABCD	Y	ABCD	Y
0000	1	1000	1
0001	1	1001	1
0010	1	1010	1
0011	0	1011	0
0100	1	1100	0
0101	1	1101	0
0110	1	1110	0
0111	0	1111	0

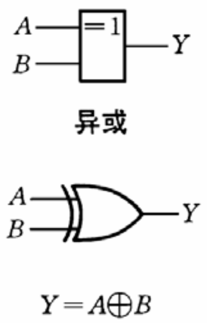


§ 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

几种常用的复合逻辑运算：与非、或非、与或非、异或、同或。

- 异或

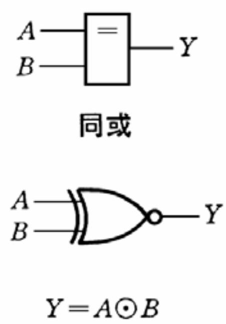
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$Y = A \oplus B = AB' + A'B$$

- 同或

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$$Y = A \odot B = AB + A'B'$$

$$A \oplus B = (A \odot B)'$$

$$A \odot B = (A \oplus B)'$$

§ 2.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

2.3.1 基本公式

- 根据与、或、非的定义，得表2.3.1的布尔恒等式

序号	公 式	序号	公 式
		10	$1'=0;\ 0'=1$
1	$0 \cdot A=0$	11	$1+A=1$
2	$1 \cdot A=A$	12	$0+A=A$
3	$A\,A=A$	13	$A+A=A$
4	$A\,A'=0$	14	$A+A'=1$
5	$A\,B=B\,A$	15	$A+B=B+A$
6	$A\,(B\,C)=(A\,B)\,C$	16	$A+(B+C)=(A+B)+C$
7	$A\,(B+C)=A\,B+A\,C$	17	$A+B\,C=(A+B)(A+C)$
8	$(A\,B)'=A'+B'$	18	$(A+B)'=A'B'$
9	$(A')'=A$		

§ 2.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

公式（17）的证明（真值表法）： $A+BC=(A+B)(A+C)$

ABC	*BC*	*A+BC*	*A+B*	*A+C*	*(A+B)(A+C)*
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

公式（8）和公式（18）的证明：$(AB)'=A'+B',(A+B)'=A'B'$

A	*B*	$(A\,B)'$	$A'+B'$	$(A+B)'$	$A'B'$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

§ 2.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

2.3.2 若干常用公式

序 号	公 式
21	$A + AB = A$
22	$A + A'B = A + B$
23	$AB + AB' = A$
24	$A(A + B) = A$
25	$AB + A'C + BC = AB + A'C$ $AB + A'C + BCD = AB + A'C$
26	$A(AB)' = AB'$; $A'(AB)' = A'$

§ 2.4 逻辑代数的基本定理

2.4.1 代入定理

在任何一个包含变量***A***的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式取代式中所有***A***的位置，则等式仍然成立。

例1：基本公式（17）

$$A+BC= (A+B)(A+C) \quad 用C\cdot D取代C$$

$$A+B(CD) = (A+B)(A+CD)$$
$$= (A+B)(A+C)(A+D)$$

例2：基本公式（18）

$$(A+B)' = A'\cdot B' \quad 用(B+C)取代B$$

$$\Rightarrow (A+(B+C))' = A'\cdot(B+C)' = A'\cdot B'\cdot C'$$

§ 2.4 逻辑代数的基本定理

2.4.2 反演定理

对于任意一个逻辑式**Y**，若将其中所有的“·”换成“+”，“+”换成“·”，**0**换成**1**，**1**换成**0**，原变量换成反变量，反变量换成原变量，则得到的结果就是Y'。

注意：

（1）需遵守“先括号、然后乘、最后加”的运算优先次序。

（2）不属于单个变量上的反号应保留不变。

例1：$Y = A(B+C)+CD$

$$Y' = (A'+B'C')(C'+D')$$

$$= A'C'+B'C'+A'D'+B'C'D' = A'C'+B'C'+A'D'$$

例2：$Y = ((AB'+C)'+D)'+C$

$$Y' = (((A'+B)C')'D')'C'$$

§ 2.4 逻辑代数的基本定理

2.4.3 对偶定理

若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。

对偶式：对于任意一个逻辑式**Y**，若将其中所有的“·”换成“+”，“+”换成“·”，**0**换成**1**，**1**换成**0**，则得到一个新的逻辑式Y^D，这个Y^D就称为**Y**的对偶式。

例1：$Y = AB+(C+D)'$

$$Y^D = (A+B)(CD)'$$

例2：证明表**2.3.1**中的式（**17**）$A+BC = (A+B)(A+C)$

证明：写出等式两边的对偶式

$$A(B+C)=AB+AC$$

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

2.5.1 逻辑函数

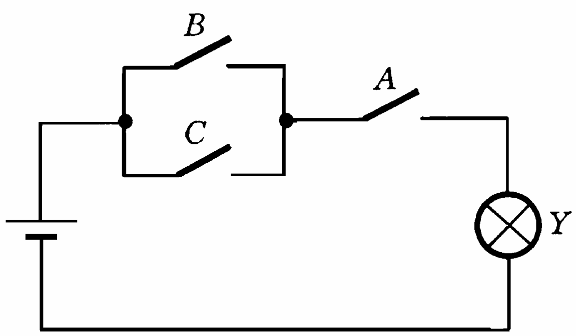
描述输入逻辑变量与输出逻辑变量之间因果关系的函数，写作：$Y=F(A,B,C,\cdots\cdots)$

注：在二值逻辑中，输入/输出都只有两种取值0/1。

例：举重裁判电路

若以1表示开关闭合，0表示开关断开；以1表示灯亮，0表示灯暗；则指示灯 Y 是开关A、B、C的二值逻辑函数，即

$$Y=F(A,B,C)$$



§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

2.5.2 逻辑函数的描述方法

一、常用的逻辑函数的描述方法

逻辑真值表、逻辑函数式、逻辑图、波形图、卡诺图和硬件描述语言。

逻辑真值表：输入逻辑变量所有可能的取值组合与对应的输出逻辑函数值构成的表格。

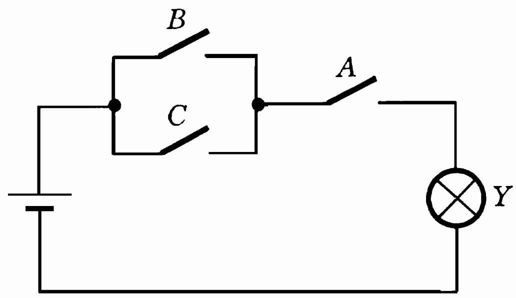
逻辑函数式：用与、或、非等运算组合起来，表示逻辑函数的输出与输入逻辑变量之间关系的逻辑代数式。

逻辑图：用与、或、非等逻辑符号表示输出与输入之间逻辑关系的图形。

波形图：将输入变量所有可能的取值组合与对应的输出按时间顺序依次排列起来画成的时间波形。

例：举重裁判电路

若以1表示开关闭合，0表示开关断开；以1表示灯亮，0表示灯暗；则指示灯*Y*是开关***A***、***B***、***C***的二值逻辑函数，即 ***Y=F(A,B,C)***

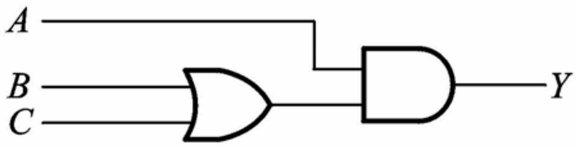


逻辑真值表：

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

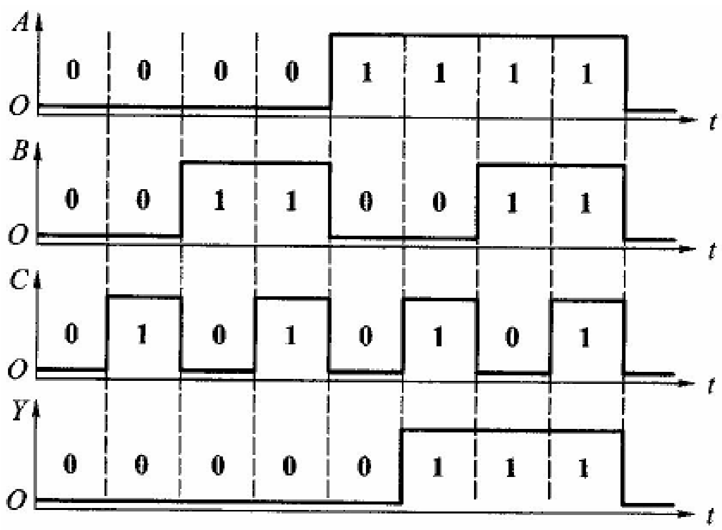
逻辑函数式：$Y = A\cdot(B+C)$

逻辑图：



§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

波形图：



二、各种描述方法间的相互转换

1 真值表与逻辑函数式的相互转换

（1）由真值表写出逻辑函数式

例：奇偶判别函数的真值表

- $A=0,B=0,C=0$使 $A'B'C'=1$
- $A=0,B=1,C=1$使 $A'BC=1$
- $A=1,B=0,C=1$使 $AB'C=1$
- $A=1,B=1,C=0$使 $ABC'=1$

这四种取值的任何一种都使$Y=1$,

所以 $Y=$ ？

$$Y= A'B'C'+ A'BC+AB'C +ABC'$$

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

由真值表写出逻辑函数式的一般方法：

①找出真值表中使 $Y=1$ 的输入变量取值组合。

②每组输入变量取值对应一个乘积项，其中取值为1的写原变量，取值为0的写反变量。

③将这些乘积项相加即得 Y。

（2）由逻辑函数式列出真值表

把输入变量取值的所有组合逐一代入逻辑式中求出函数值，列成表。

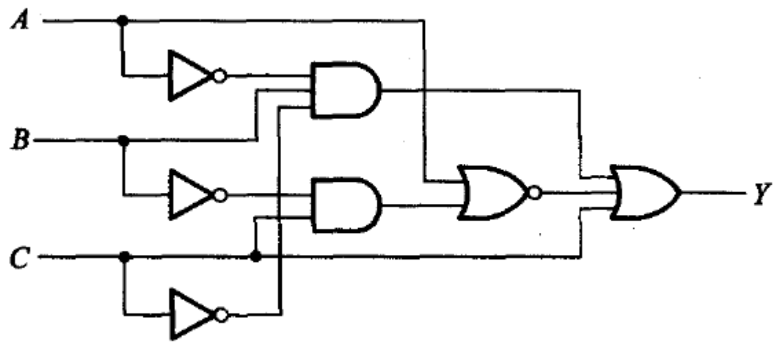
2 逻辑函数式与逻辑图的相互转换

（1）逻辑函数式转换为逻辑图

用逻辑图形符号代替逻辑函数式中的逻辑运算符号并按运算优先顺序将它们连接起来。

例：$Y=(A+B'C)'+A'BC'+C$

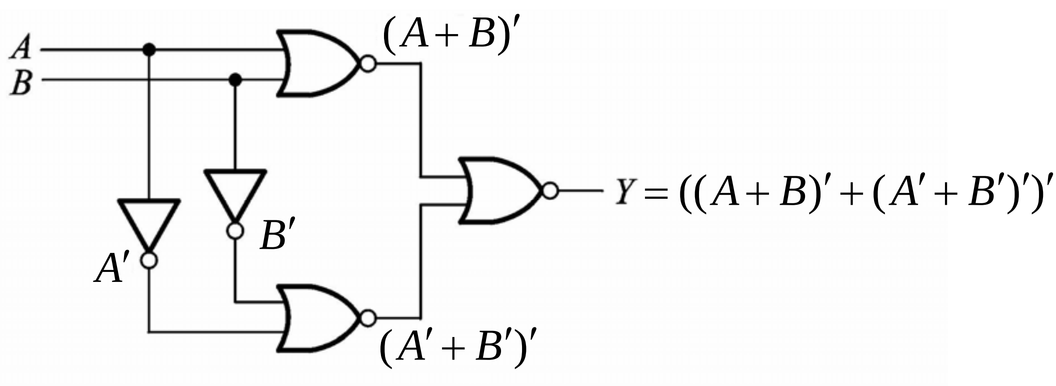
逻辑图：



（2）逻辑图转换为逻辑函数式

从逻辑图的输入到输出逐级写出每个图形符号的输出逻辑式。

例：



$$Y=((A+B)'+(A'+B')')'$$
$$=(A+B)(A'+B')$$
$$=AB'+A'B=A\oplus B$$

3 波形图与真值表的相互转换

（1）波形图转换为真值表

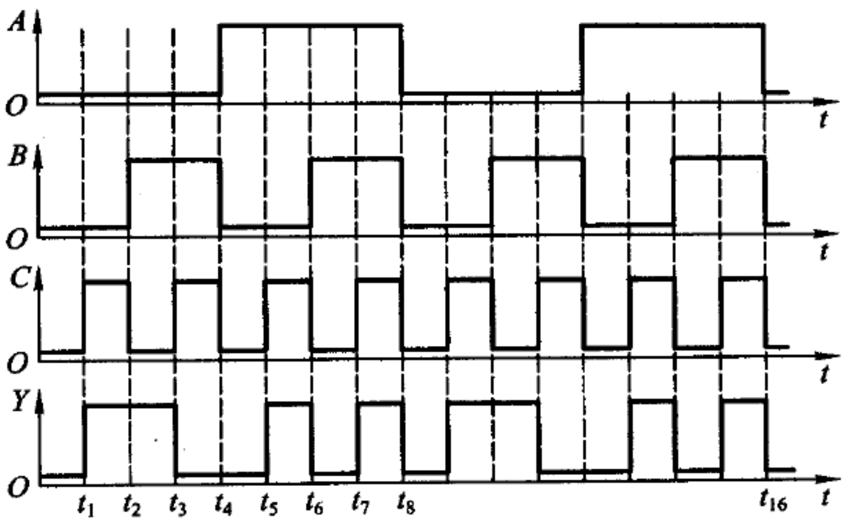
首先从波形图上找出每个时间段里输入变量与函数输出的取值，然后将这些输入、输出取值对应列表。

（2）真值表转换为波形图

将真值表中所有的输入变量与对应的输出变量取值依次排列画成以时间为横轴的波形。

例：波形图与真值表的相互转换

波形图



真值表

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

2.5.3 逻辑函数的两种标准形式

"最小项之和"和"最大项之积"

一、最小项和最大项

1 最小项

在n变量逻辑函数中，若m为包含n个因子的乘积项，而且这n个变量均以原变量或者反变量形式在m中出现一次，则称m为该组变量的最小项。

例：两变量**A, B**的最小项

$$A'B', A'B, AB', AB$$

例：三变量**A,B,C**的最小项

$$A'B'C', A'B'C, A'BC', A'BC, AB'C', AB'C, ABC', ABC$$

注：n变量共有2^n个最小项。

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

三变量最小项的编号表

最小项	使最小项为1的变量取值 A B C	对应的十进制数	编号
$A'B'C'$	0 0 0	0	m_0
$A'B'C$	0 0 1	1	m_1
$A'BC'$	0 1 0	2	m_2
$A'BC$	0 1 1	3	m_3
$AB'C'$	1 0 0	4	m_4
$AB'C$	1 0 1	5	m_5
ABC'	1 1 0	6	m_6
ABC	1 1 1	7	m_7

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

最小项的性质：

- 在输入变量的任一取值下，有且仅有一个最小项的值为**1**；
- 全体最小项之和为**1**；
- 任何两个最小项的乘积为**0**；
- 具有相邻性的两个最小项之和可以合并成一项并消去一对因子。

相邻性：若两个最小项只有一个因子不同，则称这两个最小项具有相邻性。

例：$A'BC'$与$A'BC$

$$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

***2** 最大项

在***n***变量逻辑函数中，若***M***为***n***个变量之和，而且这***n***个变量均以原变量或者反变量形式在***M***中出现一次，则称***M***为该组变量的最大项。

例：两变量***A, B***的最大项

$$A' + B', A' + B, A + B', A + B$$

例：三变量***A,B,C***的最大项

$$A' + B' + C', A' + B' + C, A' + B + C', A' + B + C,$$
$$A + B' + C', A + B' + C, A + B + C', A + B + C$$

注：***n***变量共有**2**^{n}个最大项。

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

三变量最大项的编号表

最大项	使最大项为0的变量取值 A B C	对应的十进制数	编号
$A'+B'+C'$	1 1 1	7	M_7
$A'+B'+C$	1 1 0	6	M_6
$A'+B+C'$	1 0 1	5	M_5
$A'+B+C$	1 0 0	4	M_4
$A+B'+C'$	0 1 1	3	M_3
$A+B'+C$	0 1 0	2	M_2
$A+B+C'$	0 0 1	1	M_1
$A+B+C$	0 0 0	0	M_0

§ 2.5 逻辑函数及其描述方法

最大项的性质：

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最大项的值为0；
- 全体最大项之积为0；
- 任意两个最大项之和为1；
- 只有一个变量不同的两个最大项的乘积等于各相同变量之和。

最大项和最小项间的关系：$M_i = m_i'$

例：$m_0 = A'B'C'$

则$m_0' = (A'B'C')' = A+B+C = M_0$

二、逻辑函数的最小项之和形式

将逻辑函数式化成最小项之和形式的方法：

首先将逻辑函数式化成若干乘积项之和的形式，

然后利用公式 $A+A'=1$将乘积项中缺少的因子补全。

例：$Y=AB'C'D+BCD'+B'C$

$$\begin{aligned}
&=AB'C'D+(A+A')BCD'+B'C(D+D')\\
&=AB'C'D+ABCD'+A'BCD'+B'CD+B'CD'\\
&=AB'C'D+ABCD'+A'BCD'+(A+A')B'CD+(A+A')B'CD'\\
&=AB'C'D+ABCD'+A'BCD'+AB'CD+A'B'CD+AB'CD'+A'B'CD'\\
&=m_9+m_{14}+m_6+m_{11}+m_3+m_{10}+m_2\\
&=\sum m(2,3,6,9,10,11,14)
\end{aligned}$$

*三、逻辑函数的最大项之积形式

将逻辑函数式化成最大项之积形式的方法：

首先把给定逻辑函数式化成若干多项式相乘的形式，

然后利用公式 $A\cdot A'=0$将多项式中缺少的变量补全。

例：$Y=A'B+AC$

$$\begin{aligned}
&=(A'B+A)(A'B+C)\\
&=(A+B)(A'+C)(B+C)\\
&=(A+B+CC')(A'+BB'+C)(AA'+B+C)\\
&=(A+B+C)(A+B+C')(A'+B+C)(A'+B'+C)\\
&=M_0\cdot M_1\cdot M_4\cdot M_6\\
&=\prod M(0,1,4,6)
\end{aligned}$$

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

引例： $Y_1 = ABC + B'C + ACD$

$Y_2 = AC + B'C$

A	*B*	*C*	*D*	Y_1	Y_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

逻辑函数的最简形式——最简与或式

在与或逻辑式中，若其中包含的乘积项已经最少，而且每个乘积项的因子也最少，称为最简与或逻辑式。

常用的化简方法：

●公式化简法
●卡诺图化简法
●奎恩-麦克拉斯基化简法（**Q-M**法）

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

2.6.1 公式化简法

一、并项法（利用公式***AB+AB'=A***）

例：$Y_1 = A'BC' + AB + A'BC = A'B(C' + C) + AB = A'B + AB = B$

$$Y_2 = A'B + BC' + ABC = (A' + C')B + ABC = (AC)'B + ABC = B$$

二、吸收法（利用公式***A+AB=A***）

例：$Y_1 = AB + ABC + ABCD = AB$

$$\begin{aligned} Y_2 &= AB + C' + ((AB)'C)'(A + ((CD)' + B)') \\ &= AB + C' + (AB + C')(A + ((CD)' + B)') \\ &= AB + C' \end{aligned}$$

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

三、消项法（利用公式***AB+A'C+BC=AB+A'C***

或***AB+A'C+BCD=AB+A'C***）

例：$Y_1 = ABC + (AB)'DE + CDEF \ = ABC + (AB)'DE$

$$Y_2 = ABC + A'B'C + A'BD + AB'D + CDE$$
$$= (AB + A'B')C + (A'B + AB')D + CDE$$
$$= (A \oplus B)'C + (A \oplus B)D + CDE \ = (A \oplus B)'C + (A \oplus B)D$$

四、消因子法（利用公式***A+A'B=A+B***）

例：$Y_1 = AB + (AB)'C + AC'D \ = AB + C + AC'D = AB + C + AD$

$$Y_2 = AB' + BC + A'C \ = AB' + (B + A')C = AB' + (AB')'C = AB' + C$$

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

五、配项法（利用公式***A+A=A***或***A+A'=1***）

例：$Y_1 = A'BC + AB'C + ABC' + ABC$

$$= (A'BC + ABC) + (AB'C + ABC) + (ABC' + ABC)$$
$$= BC + AC + AB$$

$$Y_2 = AB' + A'B + BC' + B'C$$
$$= AB' + A'B(C + C') + BC' + (A + A')B'C$$
$$= AB' + A'BC + A'BC' + BC' + AB'C + A'B'C$$
$$= (AB' + AB'C) + (BC' + A'BC') + (A'BC + A'B'C)$$
$$= AB' + BC' + A'C$$

复杂逻辑函数化简：

反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子。

例：$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$

$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$

$= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE$

$= A + B'C + BD' + CD'$

$= A + B'C + BD'$

公式化简法优缺点：

- 公式化简法不受输入变量数目限制；
- 公式化简法无固定的步骤；
- 有时难以判断化简结果是否为最简。

2.6.2 卡诺图化简法

一、逻辑函数的卡诺图表示法

1 基本概念

将 ***n*** 变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，所得到的图形称为***n*** 变量最小项的卡诺图。

逻辑相邻：两个最小项只有一个因子不同。

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

2 *n* 变量最小项的卡诺图

- 二变量卡诺图

A \ B	0	1
0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
1	AB' m_2	AB m_3

- 三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- 四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

- 五变量的卡诺图

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

➢五变量卡诺图已经不能直观地用平面上的几何相邻表示逻辑相邻，以中轴左右对称的最小项也是相邻的

➢超过**4**个变量后，卡诺图失去直观性的优点，一般不用这种方法表示、化简逻辑函数

3 用卡诺图表示逻辑函数

(1)将函数表示为最小项之和的形式。

(2)在卡诺图上与这些最小项对应的位置上填入**1**，其余位置填入**0**。

例：$Y = A'B'C'D + A'BD' + ACD + AB'$

$= \sum m(1,4,6,8,9,10,11,15)$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

例：

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

$Y = AB'C' + A'B'C + ABC + A'BC'$

卡诺图的实质：将逻辑函数的"最小项之和"形式以图形的方式表示出来。

二、用卡诺图化简逻辑函数

化简原理：具有相邻性的最小项可合并，消去不同因子。

在卡诺图中，最小项的相邻性可以从图形中直观地反映出来。

1 合并最小项的原则

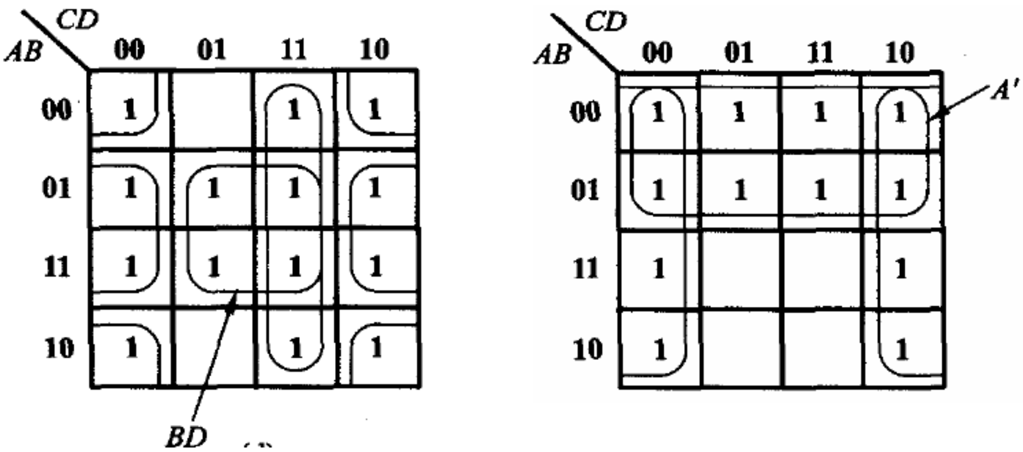
●两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

BC

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

●四个排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去两对因子



●八个排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去三对因子

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

2 用卡诺图化简函数

化简步骤：

（**1**）将函数化为最小项之和的形式。

（**2**）画出表示该逻辑函数的卡诺图。

（**3**）找出可以合并的最小项，把它们圈起来。

画圈的原则：

①圈内方块数必定是2^n个；

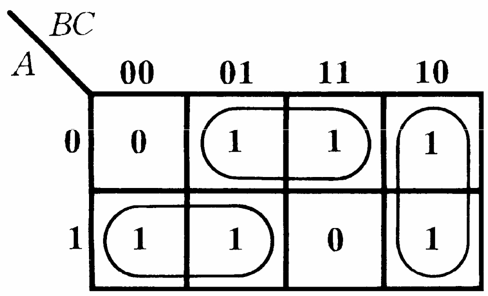
②圈内应覆盖卡诺图中所有的**1**；

③包围圈的数目要尽可能少；

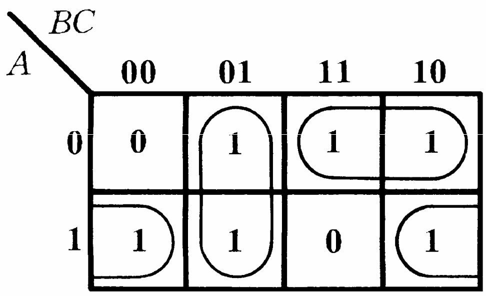
④包围圈内的方块数要尽可能多。

（**4**）化简后的乘积项相加。

例：$Y = AC' + A'C + B'C + BC'$



(a)

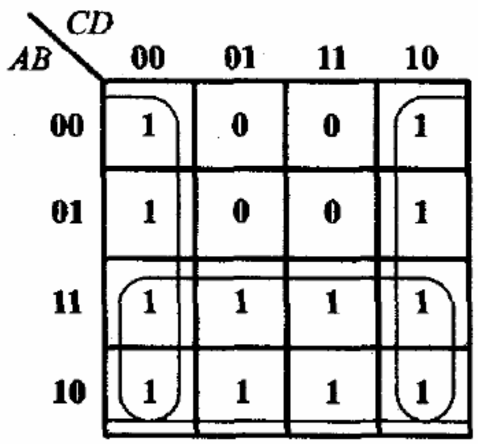


(b)

$Y = AB' + A'C + BC'$ $\qquad$ $Y = AC' + A'B + B'C$

注意：化 简 结 果 不 唯 一

例： $Y = ABC + ABD + AC'D + C'D' + AB'C + A'CD'$



$Y = A + D'$

合并**0**：

$Y' = A'D$

$Y = (A'D)' = A + D'$

注：需要求Y'的化简结果或将函数化为最简的与或非式时，采用合并0的方法最为适宜。

§ 2.6 逻辑函数的化简方法

*2.6.3 奎恩-麦克拉斯基化简法（Q-M法）

化简原理：合并相邻最小项并消去多余因子。

Q-M法优缺点：

- Q-M法不受输入变量数目限制；
- 有一定的规则和步骤可循；
- 化简过程繁琐，不适用于手工化简。

§ 2.7 具有无关项的逻辑函数及其化简

2.7.1 约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

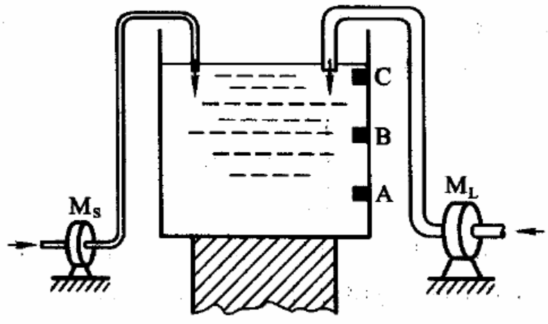
1 约束项

约束：在逻辑函数中，对输入变量取值所加的限制。

约束项：逻辑函数中，在输入变量取值所加的限制下所对应的最小项称为约束项。

§ 2.7 具有无关项的逻辑函数及其化简

例：图中水箱由大、小两台水泵M_L和M_S供水。水箱中设置了3个水位检测元件*A*、*B*、*C*。水位低于检测元件时，检测元件给出低电平；水位高于检测元件时，检测元件给出高电平。要求当水位超过C点时水泵停止工作；水位低于C点而高于B点时M_S单独工作；水位低于B点而高于A点时M_L 单独工作；水位低于A点时M_L和M_S同时工作。

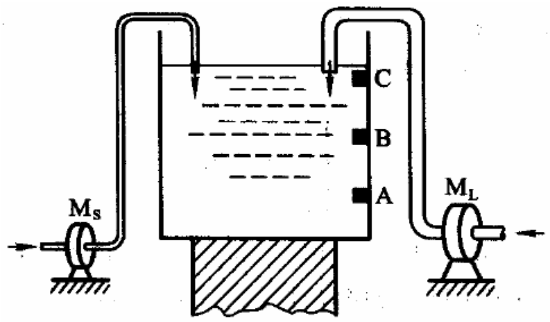


现以Y_L和Y_S分别表示M_L和M_S的启动控制信号，取值为1时水泵启动，取值为0时水泵停止。Y_L和Y_S的逻辑函数可写成：

$$Y_L = A'B'C' + AB'C' = B'C'$$

$$Y_S = A'B'C' + ABC'$$

§ 2.7 具有无关项的逻辑函数及其化简



现以Y_L和Y_S分别表示M_L和M_S的启动控制信号，取值为1时水泵启动，取值为0时水泵停止。Y_L和Y_S的逻辑函数可写成：

$$Y_L = A'B'C' + AB'C' = B'C'$$

$$Y_S = A'B'C' + ABC'$$

ABC的取值只能是**000**、**100**、**110**、**111**当中的一种，不能是**001**、**010**、**011**、**101**中的任何一种。

约束条件：$A'B'C = 0, A'BC' = 0, A'BC = 0, AB'C = 0$

或 $A'B'C + A'BC' + A'BC + AB'C = 0$

注：由于约束项始终等于**0**，所以将约束项写入或不写入函数式中不影响函数值。

2 任意项

在输入变量的某些取值下，函数值为1还是为0不影响电路的功能，在这些变量取值下为1的最小项称为任意项。

例：设计一逻辑电路，该电路能够判断出0~12范围内的数是否为质数。

3 逻辑函数中的无关项

约束项和任意项可以写入函数式，也可以不写入函数式中，因此统称为无关项。

卡诺图中无关项用×表示。

2.7.2 无关项在化简逻辑函数中的应用

合理地利用无关项，一般可得到更简单的化简结果。

是否加入无关项，应以化简后的结果乘积项数目最少，每个乘积项包含的因子最少为原则。

例：$Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

给定约束条件为:

$A'B'CD+A'BC'D+ABC'D'+AB'C'D+ABCD+ABCD'+AB'CD'=0$

可写成$Y(A,B,C,D) = \sum m(1,7,8) + d(3,5,9,10,12,14,15)$

$$
\begin{aligned}
Y &= (A'B'C'D + \underline{A'B'CD}) + (A'BCD + \underline{A'BC'D}) \\
&\quad + (AB'C'D' + \underline{ABC'D'}) + (\underline{ABCD'} + \underline{AB'CD'}) \\
&= (A'B'D + A'BD) + (AC'D' + ACD') \\
&= A'D + AD'
\end{aligned}
$$

§ 2.7 具有无关项的逻辑函数及其化简

例（补充）：已知$Y_1(A,B,C,D)=\sum m(2,4,6,9,10,12,13,14)$;

$Y_2(A,B,C,D)=\sum m(0,5,7,10,12,14)+d(2,8,13)$;

求复合函数$(Y_1 \cdot Y_2)'$和$Y_1 \oplus Y_2$的最简与或式。

●卡诺图的运算规则

·	0	1	X
0	0	0	0
1	0	1	X
X	0	X	X

与运算

+	0	1	X
0	0	1	X
1	1	1	1
X	X	1	X

或运算

⊕	0	1	X
0	0	1	X
1	1	0	X
X	X	X	X

异或运算

§ 2.8 多输出逻辑函数的化简

例：化简下面一组多输出逻辑函数

$$Y_1 = A'BC + AB'C + ABC$$
$$Y_2 = A'B'C' + AB'C' + AB'C$$

设计目标：整体最简。

设计考虑：在化简多输出逻辑函数时，应合理利用公共项。

§ 2.9 逻辑函数形式的变换

●逻辑函数式常见的 5 种形式：

$Y = AC + BC'$	与或式
$= ((AC)'(BC')')'$	与非-与非式
$= (A'C + B'C')'$	与或非式
$= (A+C')(B+C)$	或与式
$= ((A+C')' + (B+C)')'$	或非-或非式