中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第一章 数制和码制

本章目录

- 1.1 概述
- 1.2 几种常用的数制
- 1.3 不同数制间的转换
- 1.4 二进制算术运算
- 1.5 几种常用的编码

§1.1 概述

一、数制

定义：多位数码中每一位的构成方法和从低位到高位的进位规则。

二、码制

定义：编制代码时所遵循的规则。

1 编码

用文字、符号或者数字表示特定对象的过程。

2 代码

具有特定含义的数码，用来表示不同的事物或事物的不同状态。

注：二进制代码的位数(*n*)，与需要编码的事物的个数(*N*)之间应满足以下关系：

$$2^n \geqslant N$$

§ 1.2 几种常用的数制

● 常用的数制

十进制，二进制，十六进制，八进制

● 数的表示方法

位置记数法、多项式法

§ 1.2 几种常用的数制

一、十进制

每一位的构成：**0,1,2,3,4,5,6,7,8,9**

进位规则：逢十进一

任意一个**n**位整数、**m**位小数的十进制数可表示为

$$
\begin{aligned}
(D)_{10} &= k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_0.k_{-1}\cdots k_{-m} \\
&= k_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+k_0\times 10^0+k_{-1}\times 10^{-1}+\cdots+k_{-m}\times 10^{-m} \\
&= \sum_{i=-m}^{n-1} k_i \times 10^i
\end{aligned}
$$

推广：任意进制（***N***进制）数可表示为：$(D)_N=\sum k_i N^i$

k_i：第i位的系数；N：计数的基数；N^i：第i位的权

二、二进制

每一位的构成：**0,1**；进位规则：逢二进一

任意二进制数可表示为：$(D)_2 = \sum k_i 2^i$

三、八进制

每一位的构成：**0,1,2,3,4,5,6,7**；进位规则：逢八进一

任意八进制数可表示为：$(D)_8 = \sum k_i 8^i$

四、十六进制

每一位的构成：**0~9,A,B,C,D,E,F**；进位规则：逢十六进一

任意十六进制数可表示为：$(D)_{16} = \sum k_i 16^i$

不同进制数的对照表

十进制	二进制	八进制	十六进制
00	**0000**	**00**	**0**
01	**0001**	**01**	**1**
02	**0010**	**02**	**2**
03	**0011**	**03**	**3**
04	**0100**	**04**	**4**
05	**0101**	**05**	**5**
06	**0110**	**06**	**6**
07	**0111**	**07**	**7**
08	**1000**	**10**	**8**
09	**1001**	**11**	**9**
10	**1010**	**12**	**A**
11	**1011**	**13**	**B**
12	**1100**	**14**	**C**
13	**1101**	**15**	**D**
14	**1110**	**16**	**E**
15	**1111**	**17**	**F**

§ 1.3 不同数制间的转换

一、任意进制数转换为十进制数

利用公式：$(D)_N = \sum k_i N^i$

例：将下面给出的二进制、八进制和十六进制数转换为等值的十进制数。

$$\begin{aligned}(1011.01)_2 &= 1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}\\ &= (11.25)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(32.56)_8 &= 3\times8^1+2\times8^0+5\times8^{-1}+6\times8^{-2}\\ &= (26.71875)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2A.7F)_{16} &= 2\times16^1+10\times16^0+7\times16^{-1}+15\times16^{-2}\\ &= (42.49609375)_{10}\end{aligned}$$

§ 1.3 不同数制间的转换

二、十进制数转换为二进制数——基数乘除法

整数部分——基数除法

$$(S)_{10} = (k_n k_{n-1} k_{n-2} \cdots k_1 k_0)_2$$

$$(S)_{10} = k_n 2^n + k_{n-1} 2^{n-1} + k_{n-2} 2^{n-2} \cdots + k_1 2^1 + k_0 2^0$$

$$= 2(k_n 2^{n-1} + k_{n-1} 2^{n-2} + \cdots + k_1) + k_0$$

$$k_n 2^{n-1} + k_{n-1} 2^{n-2} + \cdots + k_1 = 2(k_n 2^{n-2} + k_{n-1} 2^{n-3} + \cdots + k_2) + k_1$$

……

§ 1.3 不同数制间的转换

例：$(173)_{10} = (\qquad\qquad)_2$

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & 173 & \cdots\cdots \text{余数 } 1(k_0) \\
\hline
2 & 86 & \cdots\cdots \text{余数 } 0(k_1) \\
\hline
2 & 43 & \cdots\cdots \text{余数 } 1(k_2) \\
\hline
2 & 21 & \cdots\cdots \text{余数 } 1(k_3) \\
\hline
2 & 10 & \cdots\cdots \text{余数 } 0(k_4) \\
\hline
2 & 5 & \cdots\cdots \text{余数 } 1(k_5) \\
\hline
2 & 2 & \cdots\cdots \text{余数 } 0(k_6) \\
\hline
2 & 1 & \cdots\cdots \text{余数 } 1(k_7) \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore (173)_{10} = (10101101)_2$

§ 1.3 不同数制间的转换

二、十进制数转换为二进制数——基数乘除法

小数部分——基数乘法

$$(S)_{10} = (0.k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m})_2$$

$$(S)_{10} = k_{-1}2^{-1} + k_{-2}2^{-2} + \cdots + k_{-m}2^{-m}$$

$$2(S)_{10} = k_{-1} + (k_{-2}2^{-1} + k_{-3}2^{-2} + \cdots + k_{-m}2^{-m+1})$$

$$2(k_{-2}2^{-1} + k_{-3}2^{-2} + \cdots + k_{-m}2^{-m+1}) = k_{-2} + (k_{-3}2^{-1} + \cdots + k_{-m}2^{-m+2})$$

$$\cdots\cdots$$

§ 1.3 不同数制间的转换

例：$(0.8125)_{10} = (\qquad)_2$

$$
\begin{array}{l}
0.8125 \\
\underline{\times \qquad 2} \quad \cdots\cdots \text{整数部分} = 1 = k_{-1} \\
1.6250 \\
0.6250 \\
\underline{\times \qquad 2} \quad \cdots\cdots \text{整数部分} = 1 = k_{-2} \\
1.2500 \\
0.2500 \\
\underline{\times \qquad 2} \quad \cdots\cdots \text{整数部分} = 0 = k_{-3} \\
0.5000 \\
0.5000 \\
\underline{\times \qquad 2} \quad \cdots\cdots \text{整数部分} = 1 = k_{-4} \\
1.0000
\end{array}
$$

$$\therefore (0.8125)_{10} = (0.1101)_2$$

§ 1.3 不同数制间的转换

三、二进制数转换为十六进制和八进制数

例：将（**1011110.1011001**）$_2$转换成十六进制和八进制数。

解：（**1011110.1011001**）$_2$ = **(0101 1110.1011 0010)** $_2$

= **(5E.B2)**$_{16}$

（**1011110.1011001**）$_2$ = （**001 011 110.101 100 100**）$_2$

= **(136.544)** $_8$

四、八进制和十六进制数转换为二进制数

例：将（**703.65**）$_8$和（**9FC.4A**）$_{16}$转换成二进制数。

解：（**703.65**）$_8$ = （**111 000 011.110 101**）$_2$

（**9FC.4A**）$_{16}$ = **(1001 1111 1100.0100 1010)**$_2$

§1.3 不同数制间的转换

五、八进制数和十六进制数的互相转换

八进制数→二进制数→十六进制数

十六进制数→二进制数→八进制数

六、十进制数转换为八进制和十六进制数

十进制数→二进制数→八进制数

十进制数→二进制数→十六进制数

§1.3 不同数制间的转换

例：对火星的首次探险发现的仅仅是文明的废墟。从石器和图片中，探险家们推断创造这些文明的生物有四条腿，其触角末端长着一些抓东西的“手指”。经过很多研究后，探险家们终于能够翻译火星人的数学，他们发现了下面的等式：

$$5x^2 - 50x + 125 = 0$$

所指出的解为**x=5**和**x=8**。其中**x=5**这个解看上去非常合理，但是**x=8**这个解就需要某种解释。于是，探险家们反思了地球的计数体制发展，并且发现了火星的计数体制也有类似历史发展的证据。你认为火星人有几个手指？（来自**1956**年**2**月的《**The Bent of Tau Beta Pi**》）

§ 1.4 二进制算术运算

1.4.1 二进制算术运算的特点

加法运算规则：

$0+0=0 \quad 0+1=1$

$1+0=1 \quad 1+1=0$（同时向相邻高位进 1）

减法运算规则：

$0-0=0 \quad 0-1=1$（同时向相邻高位借 1）

$1-0=1 \quad 1-1=0$

乘法运算规则：

$0\times0=0 \quad 0\times1=0$

$1\times0=0 \quad 1\times1=1$

除法运算规则：

$0\div1=0 \quad 1\div1=1$

§ 1.4 二进制算术运算

例：两个二进制数**1001**和**0101**的算术运算（加、减、乘、除）

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

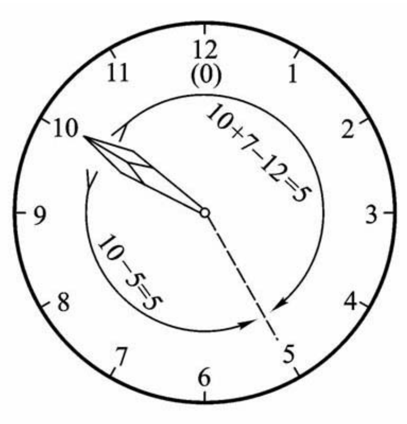
$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ \times\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.\ 1\ 1\ \ldots \\ 0\ 1\ 0\ 1\,\big)\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

二进制算术运算的特点：加、减、乘、除运算全部可以用“移位”和“相加”这两种操作实现。简化了电路结构。

§ 1.4 二进制算术运算

引例：在**5**点钟时发现手表停在**10**点，需把表针拨回**5**点。



$$10-5=5$$

$$10+7-12=5$$

↑

舍弃进位

7+5=12 产生进位的模

7是**–5**对模**12**的补码

说明：

在舍弃进位的条件下，减一个数可用加上该数的补码来代替

§ 1.4 二进制算术运算

1.4.2 反码、补码和补码运算

数的正、负如何表示？

一、原码

在二进制数的前面增加一位符号位。符号位为**0**表示正数，符号位为**1**表示负数。这种形式的数称为原码。

例：$\mathbf{(+2)_{10}=(0010)_2}$

$\mathbf{(-2)_{10}=(1010)_2}$

§ 1.4 二进制算术运算

二、补码

对于有效数字（不包括符号位）为**n**位的二进制数**N**，它的补码**(N)$_{COMP}$**表示方法为

$$(N)_{COMP}=\begin{cases}N & （当N为正数）\\ 2^n-N & （当N为负数）\end{cases}$$

三、反码

对于有效数字（不包括符号位）为**n**位的二进制数**N**，它的反码**(N)$_{INV}$**表示方法为

$$(N)_{INV}=\begin{cases}N & （当N为正数）\\ (2^n-1)-N & （当N为负数）\end{cases}$$

注：二进制负数的补码等于它的反码加**1**。

$$(N)_{COMP}=(N)_{INV}+1$$

§ 1.4 二进制算术运算

例**1.4.1** 写出带符号位二进制数**00011010(+26)**、**10011010(–26)**、**00101101(+45)**和**10101101(–45)**的反码和补码。

解：	原码	反码	补码
	00011010	**00011010**	**00011010**
	10011010	**11100101**	**11100110**
	00101101	**00101101**	**00101101**
	10101101	**11010010**	**11010011**

§ 1.4 二进制算术运算

● 两个补码表示的二进制数相加时，和的符号位讨论

例**1.4.2** 用二进制补码运算求出

13＋10 、13－10 、－13＋10 和－13－10

解：

十进制数	原码	反码	补码
+13	**001101**	**001101**	**001101**
-13	**101101**	**110010**	**110011**
+10	**001010**	**001010**	**001010**
-10	**101010**	**110101**	**110110**

+13	0 01101	+13	0 01101	−13	1 10011	−13	1 10011
+10	0 01010	−10	1 10110	+10	0 01010	−10	1 10110
+23	0 10111	+3	(1) 0 00011	−3	1 11101	−23	(1)1 01001

§ 1.4 二进制算术运算

● 两个补码表示的二进制数相加时，和的符号位讨论

例**1.4.2** 用二进制补码运算求出

13＋10 、13－10 、－13＋10 和－13－10

解：

+13	0 01101	+13	0 01101	−13	1 10011	−13	1 10011
+10	0 01010	−10	1 10110	+10	0 01010	−10	1 10110
+23	0 10111	+3	(1) 0 00011	−3	1 11101	−23	(1)1 01001

注：

（**1**）若将两个加数的符号位和来自最高有效数字位的进位相加，结果（舍弃产生的进位）就是和的符号；

（**2**）两个同符号数相加时，它们的绝对值之和不可超过有效数字位所能表示的最大值，否则会得出错误的计算结果。

§ 1.5 几种常用的编码

一、十进制代码

用二进制代码来表示十进制数的0~9十个状态。

十进制数	8421码	余3码	2421码	5211码	余3循环码
0	0000	0011	0000	0000	0010
1	0001	0100	0001	0001	0110
2	0010	0101	0010	0100	0111
3	0011	0110	0011	0101	0101
4	0100	0111	0100	0111	0100
5	0101	1000	1011	1000	1100
6	0110	1001	1100	1001	1101
7	0111	1010	1101	1100	1111
8	1000	1011	1110	1101	1110
9	1001	1100	1111	1111	1010
权	8421		2421	5211	

§ 1.5 几种常用的编码

二、格雷码

编码顺序	二进制码	格雷码	编码顺序	二进制码	格雷码
0	0000	0000	8	1000	1100
1	0001	0001	9	1001	1101
2	0010	0011	10	1010	1111
3	0011	0010	11	1011	1110
4	0100	0110	12	1100	1010
5	0101	0111	13	1101	1011
6	0110	0101	14	1110	1001
7	0111	0100	15	1111	1000

特点：相邻两个代码之间只有一位不同。

优点：代码转换过程中不会产生过渡“噪声”。

§ 1.5 几种常用的编码

三、美国信息交换标准代码(ASCII)

ASCII码是一组7位二进制代码，共128个。可以表示大、小写英文字母、十进制数、标点符号、运算符号、控制符号等。

应用：计算机和通信领域

例：写出以下**ASCII**码表示的含义。

1010101

1000110

1001111

$b_4b_3b_2b_1$	$b_7b_6b_5$							
	000	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	∧	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL