安徽大学 20<u>18</u> —20<u>19</u> 学年第 <u>1</u> 学期

《 概率论与数理统计 A 》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\dfrac{3}{5}$　　2. $\dfrac{9}{64}$　　3. $3e^{-2}$　　4. σ^2　　5. $(480.4, 519.6)$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. D　　7. C　　8. D　　9. A　　10. B

三、分析计算题（每小题 13 分，共 65 分）

11. 解：设 $A=$ “考生会解这道题”，$B=$ “考生选出正确答案”，则依题意得

$$P(A)=p,\quad P(\overline{A})=1-p,\quad P(B|A)=1,\quad P(B|\overline{A})=\frac{1}{n}.$$

（1） 由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{np-p+1}{n}.$$　　7 分

（2）由贝叶斯公式以及(1)的结果得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{np}{np-p+1}.$$　　13 分

12. 解：（1）由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

得 $k=4$.　　4 分

（2）

$$P(\text{方程有实根})=P(\Delta\ge 0)=P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\int_0^{1/2}4(1-x)^3dx=\frac{15}{16}.$$　　8 分

（3）首先随机变量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ P(X\le\sqrt{y}), & 0\le y<1,\\ 1, & 1\le y,\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-(1-\sqrt{y})^4, & 0\le y<1,\\ 1, & 1\le y,\end{cases}.$$

从而 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2\left(1-\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{y}} & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$　　13 分

13. 解：(1)由

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,$$

得

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{7}x^2+\dfrac{6}{7}x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ 4 分

(2)由于

$$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy,$$

故

$$P(X>Y)=\int_0^1\int_0^x\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dydx=\frac{15}{56}.$$ 8 分

(3)由于

$$f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2},y\right)}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)},$$

则

$$f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(y+1), & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

从而

$$P\left(Y<\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right)=\int_0^{1/2}f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)dy=\frac{5}{32}.$$ 13 分

14. 解：（1）由于

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12},\qquad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1}{6},$$

所以

$$P(X_1=1,\ X_2=1)=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P(X_1=1,\ X_2=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P(X_1=0,\ X_2=1)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P(X_1=0,\ X_2=0)=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

这样得到(X_1,X_2)联合分布及边际分布列如下表

X_1 \ X_2	0	1	
0	2/3	1/12	3/4
1	1/6	1/12	1/4
	5/6	1/6	

5 分

(2) 易见

$$P(X_1=0,\ X_2=0) \neq P(X_1=0)P(X_2=0),$$

所以 X_1 和 X_2 不独立. 9分

(3) 注意到

$$EX_1=\frac{1}{4},\ EX_2=\frac{1}{6},\ EX_1X_2=\frac{1}{12},$$

故

$$C\mathrm{ov}(X_1,X_2)=EX_1X_2-EX_1EX_2=\frac{1}{24}\neq 0,$$

故 X_1 与 X_2 相关. 又

$$DX_1=\frac{3}{16},\ DX_2=\frac{5}{36},$$

故 X_1 与 X_2 的相关系数为

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{C\mathrm{ov}(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1DX_2}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$ 13 分

15. 解：(1) 设总体 X 的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$，似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}x_i^2\right\},$$

取对数有

$$\ln L(\lambda)=n\ln 2-n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

由

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,$$

得到 λ 的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

故λ的最大似然估计量为$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.　　7 分

（2）由于

$$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\bullet\frac{2}{\lambda}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx=\lambda,$$

因此

$$E\hat{\lambda}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\lambda,$$

由此可知$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$是$\lambda$的无偏估计量.　　13 分

四、应用题（每小题 8 分，共 8 分）

16. 解：由题意得到

$$H_0:\mu=700;\quad H_1:\mu\neq 700$$

在H_0成立的前提下，

$$Z=\frac{\sqrt{9}(\bar{x}-700)}{20}\sim N(0,1)\qquad 4 分$$

这里$\alpha=0.05$，$u_{0.05}=1.96$，$\bar{x}=680$，因而有

$$|Z|=\left|\frac{\sqrt{9}(680-700)}{20}\right|=3>1.96$$

因而拒绝H_0，即认为这批钢索的断裂强度不为$700kg/cm^2$.　　8 分

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

17. 证明: 对任意的$k=0,1,\cdots$, 由于

$$\begin{aligned}P(X+Y=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)\\&=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\mu}\\&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}\\&=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)},\end{aligned}$$

从而$X+Y$服从参数为$\lambda+\mu$的泊松分布.　　7 分