安徽大学 2010-2011 学年第一学期
《高等数学 C（三）》考试试题（B 卷）
参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．B　　2．C　　3．C　　4．D　　5．B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6．$3p^2(1-p)^2$　7．$e^{\lambda}-1$　8．$1-\dfrac{1}{2n}$　9．$\dfrac{1}{4}$　10．$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=1$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

11．（本小题 10 分）【解】

设 B_i：从甲袋中取出的 2 球中恰好有 i 个白球（$i=0,1,2$）；

A：从乙袋中取出一球为白球；

（1）$P(A)=\sum\limits_{i=0}^{2} P(B_i)P(A|B_i)$

$$=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{4}{10}+\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}\cdot\frac{5}{10}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{13}{25}$$

（2）$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{5}{10}}{\dfrac{13}{25}}=\dfrac{15}{26}$

12．（本小题 8 分）【解】

（1）不放回——乘法公式

设 A_k 为“第 k 次打开门”$(k=1,2,\cdots,n)$，则

$P\{X=1\}=P(A_1)=\dfrac{1}{n}$，

$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}$，……，

$P\{X=n\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_n|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1})$

$=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{n}$。

即 X 分布律为：

X	1	2	……	n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	……	$\frac{1}{n}$

于是，$E(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$。

（2）放回——独立性+几何分布

设A_k为“第 k 次打开门”$(k=1,2,\cdots,n)$，则

$P\{X=1\}=P(A_1)=\frac{1}{n}$，

$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}$，

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

……,

$P\{X=n\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(A_n)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$，

……,

即 X 分布律为：

X	1	2	3	4	……	k	……
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$	……	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}$	……

于是，$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}=n$。

13.（本小题 12 分）【解】

（1）$P\{3<X<9\}=\frac{1}{9}\int_3^9 e^{-\frac{x}{9}}dx=-e^{-\frac{x}{9}}\Big|_3^9=e^{-\frac{1}{3}}-e^{-1}$；

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{0}0dx+\frac{1}{9}\int_0^x e^{-\frac{x}{9}}dx, & x>0,\\ \int_{-\infty}^{0}0dx, & x\le 0,\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{9}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$

（3）方法 1（公式法）因为

$$y=e^{\frac{x}{3}}\overset{\Delta}{=}g(x),g'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}>0,x=3\ln y\overset{\Delta}{=}h(y),h'(y)=\frac{3}{y},g(0)=1,g(+\infty)=+\infty,$$

所以，由公式得$Y=e^{\frac{X}{3}}$的概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]|h'(y)|, & y>1,\\ 0, & y\le 1,\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{9}e^{-\frac{\ln y}{3}}\cdot\frac{3}{y}, & y>1,\\ 0, & y\le 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{y^4}}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

方法 2（分布函数法）因为分布函数为：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}P\{\varphi\}, & y\le 1,\\ P\{X\le 3\ln y\}, & y>1\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ \int_{-\infty}^{3\ln y} f_X(x)dx, & y>1\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ \frac{1}{9}\int_{0}^{3\ln y} e^{-\frac{x}{9}}dx, & y>1\end{cases}$$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{9}e^{-\frac{3\ln y}{9}}\cdot\frac{3}{y}, & y>1,\\ 0, & y\le 1,\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{y^4}}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$

14. （本小题 14 分）【解】

（1）根据二维离散型随机变量分布律的性质得：$a+b+c=\frac{1}{4}$

由 $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$ 得：$a+b=\frac{1}{8}$

由 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{12}$ 得： $a=\frac{1}{12}$

$$a=\frac{1}{12},b=\frac{1}{24},c=\frac{1}{8},$$

（2）随机变量 Z 的分布律为：

$$Z\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{24} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}$$

（3）由边缘概率分布律可知 $P(Y=1)=\frac{3}{8}$

$$P(X+Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$$

$$P(X+Y=1,Y=1)=P(X=0,Y=1)=\frac{1}{6}$$

因为 $P(X+Y=1,Y=1)\ne P(X+Y=1)P(Y=1)$，所以不独立。

15. （本小题 12 分）【解】

（1）因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=A\int_0^1 xdx\int_x^1 dy=A\int_0^1 x(1-x)dx=A[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]\big|_0^1=\frac{A}{6}$；

所以 $A=6$。

（2） $P\left(Y\le\frac{1}{2}\right)=\iint\limits_{y\le\frac{1}{2}} f(x,y)dxdy=6\int_0^{\frac{1}{2}} xdx\int_x^{\frac{1}{2}} dy=6\int_0^{\frac{1}{2}} x(\frac{1}{2}-x)dx$

$=6(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3})\big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$。

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 6\int_x^1 xdy, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}=\begin{cases} 6x(1-x), & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} 6\int_0^y xdx, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}=\begin{cases} 3y^2, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

(4)因为在$0\le x\le y\le 1$内，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以，X,Y不相互独立。

16. （本小题 14 分）【解】（1） $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$$EX=\frac{\theta}{2}$$

由 $EX=\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=2\overline{X}$

（2）设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是来自总体 X 下的一组样本值，则似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta(i=1,2,\cdots,n), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

又因为$\theta>0$，所以$L(\theta)$随着θ的减小而增大，故$\hat{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$

则极大似然估计量为$\hat{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$。

四、应用题（本大题 10 分）

17. 【解】

设 $H_0:\mu=70$ $H_1:\mu\ne 70$

检验函数 $T=\dfrac{\overline{X}-70}{s^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$n=36,\overline{X}=66.5,s^*=15$代入得到$T=-1.4$

$|T|=1.4<t_{0.025}(35)=2.0301$

所以接受假设$H_0:\mu=70$，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。