安徽大学 2019—2020 学年第一学期《线性代数 A》期末考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 n 阶方阵 A 与 B 仅第 $j(1\le j\le n)$ 列元素不同，则下列关于行列式的结论**正确**的是（　）.

(A) $|A|+|B|=2^{n-1}|A+B|$　　(B) $|A|+|B|=2^{1-n}|A+B|$

(C) $|A|-|B|=2^{n-1}|A-B|$　　(D) $|A|-|B|=2^{1-n}|A-B|$

2. 设 A 是 n 阶实矩阵，且 $A^3=O$，则下列矩阵中不可逆的是（　）.

(A) $A-E$　　(B) $A+E$　　(C) A^2-A　　(D) A^3+E

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $AX=O$ 仅有零解的充要条件是（　）.

(A) A 的列向量组线性相关　　(B) A 的列向量组线性无关

(C) A 的行向量组线性相关　　(D) A 的行向量组线性无关

4. 设 A 是 $m\times n$ 的矩阵，$r(A)=m<n$，则下列**不正确**的是（　）.

(A) $A^TX=O$ 只有零解　　(B) $A^TAX=O$ 必有无穷多解

(C) 对于任意的 m 维向量 β，$AX=\beta$ 有无穷多解

(D) 对于任意的 n 维向量 β，$A^TX=\beta$ 有唯一解

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　）.

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似 (C) 不合同但相似 (D)不合同也不相似

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 A 是一个三阶方阵，且 $|A|=4$，则 $|A^*-A^{-1}|=$ ________.

7. 设 A,B 均为 4 阶方阵，A 的伴随矩阵分别为 A^*，且 $r(A)=3$，$r(B)=4$，则 $r(A^*B)=$ ____.

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, 从 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 的过渡矩阵为 P，则 $|P|=$ ________.

9. 设A是3阶可逆矩阵，且特征值为$1,1/2,1/3$， A_{11},A_{22},A_{33}是$|A|$的代数余子式，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$_______.

10. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$的规范形为_______.

三、计算题（每小题10分，共60分）

11. 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & & & & \\ b & a+b & a & & & \\ & b & a+b & a & & \\ & & b & a+b & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a \\ & & & & b & a+b \end{vmatrix}$(其中$a\neq b$).

12. 设3阶方阵A,B满足$A^{-1}BA=6A+BA$，且$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$，求$B$.

13. 设$\alpha_1=(1,0,2,4)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,0)^T$，$\alpha_3=(2,1,a+2,4)^T$，$\alpha_4=(2,-1,3,a+7)^T$线性相关，若$\beta=(3,-1,a+6,a+11)^T$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，求$a$值，并写出$\beta$由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$表示的线性表达式.

14. 设5×4矩阵A的秩$r(A)=2$，$(0,1,-3,0)^T$是方程组$AX=O$的解，已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为非齐次线性方程组$AX=b$的三个解，且$\alpha_1+\alpha_2=(4,6,-8,4)^T$，$\alpha_3=(1,2,-1,1)^T$，求方程组$AX=b$的通解.

15. 已知$\xi=(1,1,-1)^T$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量.

（1）确定参数a,b及ξ对应的特征值λ；（2）A是否相似于对角阵？说明理由.

16. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为1，特征值之积为$-12$.

（1）求a,b的值；（2）求将二次型化为标准形的正交变换$X=QY$.

四、证明题（每小题10分，共20分）

17. 设$A_{3\times3}$有三个不相等的$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，它们对应的特征向量分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

18. 设B是n阶反对称阵，E是n阶单位阵，$\lambda>0$，证明：$\lambda E-B^2$是正定阵.