安徽大学 20 19 —20 20 学年第 二 学期

《 线性代数 A 》（A 卷）期末考试试题参考答案

一．选择题

1. D　　2. C　　3.B　　4. D　　5.B

二．填空题

6. $n!$　　7. 3　　8.2　　9. 2　　10.1

三．计算题

11． $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\times a\times\begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

$=a^n+(-1)^{n+1}\times a^n$ . . . . (6 分)

所以，当 n 偶数时，$D_n=0$，

当 n 奇数时，$D_n=2\mathrm{a}^{\mathrm{n}}$，. . . . . (10 分)

12． $A-2B=AB\Rightarrow A=2B+AB=(2E+A)B$

因为 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $(2E+A)$ 可逆 ，. . . . . (4 分)

所以 $B=(2E+A)^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. . . . . (10 分)

13.

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ....（5 分）

令自由变量x_3, x_4分别等于单位向量，

可得基础解系为：$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, ...（8 分）

所以，方程组通解为$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$ ....（10 分）

14.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 11 & -5\\3 & 2 & 1 & 1\\-8 & -3 & -12 & 2\\2 & -7 & 34 & -16\\1 & 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 11 & -5\\0 & 8 & -32 & 16\\0 & -19 & 76 & -38\\0 & -3 & 12 & -6\\0 & 4 & -16 & 8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 11 & -5\\0 & 1 & -4 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ....（6 分）

所以，向量组的秩等于 2，极大线性无关组是α_1，α_2..................（10 分）

15.

引入标准正交基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$..................（2 分）

则由α_1，α_2，α_3到ε_1，ε_2，ε_3的过渡矩阵为A，

则$\left(\varepsilon_1^T，\varepsilon_2^T，\varepsilon_3^T\right)=\left(\alpha_1^T，\alpha_2^T，\alpha_3^T\right)A$..................（4 分）

由ε_1，ε_2，ε_3到β_1，β_2，β_3的过渡矩阵为B，

则

$\left(\beta_1^T，\beta_2^T，\beta_3^T\right)=\left(\varepsilon_1^T，\varepsilon_2^T，\varepsilon_3^T\right)B=\left(\alpha_1^T，\alpha_2^T，\alpha_3^T\right)AB$ ....（6 分）

所　　以　　，

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

. . . . .（10 分）

（注：不引入标准基直接计算，结果正确不扣分。）

16. $A=\begin{pmatrix}3&4&-2\\4&3&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-4&2\\-4&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-7)^2(\lambda+2)=0$，

$\lambda_1=\lambda_2=7$，$\lambda_3=-2$. . . . .（4 分）

$\lambda_1=\lambda_2=7$ 时，方程组（$7E-A$）$X=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-\frac{1}{2},0,1)^T$

正交化得 $\beta_1=(1,1,0)^T$，$\beta_2=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1)^T$

单位化得 $\gamma_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$，$\gamma_2=(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3})^{\mathrm{T}}$. . . . .（6 分）

$\lambda_3=-2$ 时，方程组（$-2E-A$）$X=0$ 的基础解系为 $\alpha_3=(2,-2,1)^T$，

单位化得 $\gamma_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$. . . . .（8 分）

所以，正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{6}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. . . . .（10 分）

17.

$A=\begin{pmatrix}2-a&1&0\\1&1&0\\0&0&a+3\end{pmatrix}$ 的各阶顺序主子式分别等于

$A_1=(2-a)>0\Rightarrow a<2$. . . . .（2 分）

$A_2=\begin{vmatrix}2-a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1-a)>0\Rightarrow a<1$. . . . . (5 分)

$A_3=\begin{vmatrix}2-a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a+3\end{vmatrix}=(a+3)(1-a)>0\Rightarrow -3<a<1$. . . . . (8 分)

所以，三式同时成立$\Leftrightarrow$ $-3<a<1$. . . . . (10 分)

四．证明题

18.

由齐次方程组解的线性性知 α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 仍然是方程组的解。. . . . . (2 分)

且向量组（I）α_1，α_2，α_3 与（II）α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 等价

所以 r（II）=3，所以 α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也是方程组的基础解系。. . . . . (5 分)

19. $AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_k)=0,$

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 均为方程组 $AX=0$ 的解。. . . . . (3 分)

$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$，构造齐次方程组 $AX=0$，解得方程组基础解系只含有一个解向量

$\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，所以 $r(B)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)\le 1$ . . . . (5 分)

（注：直接利用 $AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\le n,$ 不扣分。）