安徽大学 20 15—20 16 学年第一学期

《 高等数学 C(三) 》(A 卷)考试试题参考答案及评分标准

一. 选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. C; 2. D; 3. B; 4. C; 5. A.

二. 填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. $\frac{1}{6}$; 7. $\frac{36}{125}$; 8. 17; 9. $\frac{3}{4}$; 10. (14.754, 15.146).

三. 计算题(每小题 10 分,共 60 分)

11. 解: 记 $A=\{$取到的是甲厂生产的零件$\}$, $B=\{$取到的零件是次品$\}$

则 $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(\bar{A})=\frac{2}{5}$, $P(B\mid A)=0.05$, $P(B\mid \bar{A})=0.01$.

(1) 由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=\frac{3}{5}\times 0.05+\frac{2}{5}\times 0.01=0.034.$$

……………6分

(2) 由贝叶斯公式有

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}=\frac{0.03}{0.034}\approx 0.8824.$$

……………10分

12. 解: (1) $P(|X|>2)=P(|X|\le 2)=P(-2\le X\le 2)$

$$=P\left(\frac{-2-3}{2}\le\frac{X-3}{2}\le\frac{2-3}{2}\right)$$

$$=P\left(-2.5\le\frac{X-3}{2}\le -0.5\right)$$

$$=[\Phi(-0.5)-\Phi(-2.5)]$$

$$=[1-\Phi(0.5)]-[1-\Phi(2.5)]$$

$= \Phi(2.5) - \Phi(0.5) = 0.9983 - 0.6915 = 0.3023.$

……………6分

(2)解法1：由正态分布对称性知$c = 3$

解法2：由$P(X > c) = P(X \le c)$且$P(X > c) + P(X \le c) = 1$

知$P(X \le c) = \frac{1}{2}$

即$P(\frac{X-3}{2} \le \frac{c-3}{2}) = \frac{1}{2}$亦即$\Phi(\frac{c-3}{2}) = \frac{1}{2}$

故$\frac{c-3}{2} = 0$即$c = 3.$

……………10分

13.解: (1)由于

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-1}^{1} k|x|dx = 2k\int_0^1 xdx = k,$$

得$k = 1.$

……………3分

(2) $P(-\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{2}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} p(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} |x|dx$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-x)dx + \int_0^1 xdx = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$

……………6分

(3) $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$

$$= \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \int_{-1}^{x} (-t)dt & -1 \le x < 0, \\ \int_{-1}^{0} (-t)dt + \int_0^x tdt & 0 \le x < 1, \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < -1, \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & -1 \le x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & 0 \le x < 1, \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

……………10分

14. 解：(1) 由 $\sum_i \sum_j p_{ij}=1$，得 $0.8+a+b=1$.

又 $P(X\le 0, Y\le 1)=0.5$，则 $0.5+a=0.5$.

所以 $a=0, b=0.2$.

……………3分

(2)

Z=X+Y	−1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.4	0.3

……………6 分

(3)

X	-1	0	1
P	0.4	0.3	0.3

Y	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

由 $P(X=0,Y=0)\ne P(X=0)P(Y=0)$ 知 X,Y 不独立.

……………10 分

15. 解:(1) 由 X 与 Y 的联合分布列知

X	0	1	2
P	0.3	0.1	0.6

Y	0	1	2
P	0.3	0.3	0.4

从而 $XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$.

又 $E(X)=0\times 0.3+1\times 0.1+2\times 0.6=1.3$，

$E(Y)=0\times 0.3+1\times 0.3+2\times 0.4=1.1$，

$E(XY)=0\times 0.5+1\times 0.1+2\times 0.2+4\times 0.2=1.3$，

则 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1.3-1.3\times 1.1=-0.13$

……………6分

(2) 由 $E(X^2)=0\times 0.3+1\times 0.1+2^2\times 0.6=2.5$，

$E(Y^2)=0\times 0.3+1\times 0.3+2^2\times 0.4=1.9$，

可得$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.81$，

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.69$.

故$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=0.81+0.69+2\times(-0.13)=1.24.$

……………10分

16. 解：(1) $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dy & 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

$=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-x & 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dx & 0<y<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

$=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-y & 0<y<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

……………6分

(2) $p(X>2Y)=\iint\limits_{x>2y}p(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2y}^1(2-x-y)dx=\dfrac{7}{24}.$

……………10分

四. 解答题（每小题 10 分，共 10 分）

17. 解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,\theta)dx=\int_0^1x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx$

$=(\theta+1)\int_0^1x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=1-\dfrac{1}{\theta+2}$,

令$E(X)=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 即$1-\dfrac{1}{\theta+2}=\overline{X}$，

解得$\hat{\theta}=\dfrac{1}{1-\overline{X}}-2$，即为$\theta$的矩估计量.

……………5分

(2) 设$x_1,x_2,\cdots x_n$是样本$X_1,X_2,\cdots X_n$的一个样本观察值，

由已知得似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta} \qquad (0<x_1,x_2,\cdots x_n<1)$$

则 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ，

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ，

解得 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$，即为 θ 的极大似然估计值，

故 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$ 是 θ 的极大似然估计量.

……………10分