安徽大学 20 18 —20 19 学年第 1 学期

《 概率论与数理统计 A 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 三个人独立地破译一个密码, 他们单独破译出的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$, 则“此密码被破译出”的概率为________.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中随机事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数, 则 $P(Y=2)=$________.

3. 设随机变量 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布, 且满足 $P(\xi=1)=P(\xi=2)$, 则 $P(\xi^2<3)=$______.

4. 已知总体 X 的期望 $EX=0$, 方差 $DX=\sigma^2$, 从总体 X 中抽取容量为 n 的简单随机样本, 样本均值、样本方差分别记为 $\overline{X}$, S^2, 则 $E\left(\frac{n}{2}\overline{X}^2+\frac{1}{2}S^2\right)=$________.

5. 设某农作物的平均亩产量 X（单位：kg）服从 $N(\mu,100^2)$. 现随机抽取 100 亩进行试验, 观察其亩产量, 得到样本均值 $\overline{x}=500$ kg, 则总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为______________. （$\Phi(1.645)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$）

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 设 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, 且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$, 则(　　).

(A) 事件 A 与事件 B 互不相容　　(B) 事件 A 与事件 B 对立

(C) 事件 A 与事件 B 不独立　　(D) 事件 A 与事件 B 独立

7. 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则下列结论中正确的是（　）.

(A) $P(X-Y\le 0)=\frac{1}{2}$　　(B) $P(X-Y\le 1)=\frac{1}{2}$

(C) $P(X+Y\le 1)=\frac{1}{2}$　　(D) $P(X+Y\le 0)=\frac{1}{2}$

8. 如果随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有（　）.

(A) $D(X)D(Y)=0$　　(B) $D(X)=0$

(C) X 与 Y 相互独立　　(D) X 与 Y 不相关

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为一列独立同分布随机变量序列，其共同期望为 0，方差为 1. 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则以下正确的是（　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(n^{-\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\le x\right)=\Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(n^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\le x\right)=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\le x\right)=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(n\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\le x\right)=\Phi(x)$

10. 下列叙述正确的是（　）.

(A) 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

(B) 设 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$

(C) 设 θ_1 和 θ_2 都是参数 θ 的无偏估计，如果 $D\theta_1\le D\theta_2$，则 θ_2 比 θ_1 有效

(D) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ 为未知参数，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是一个统计量

得 分	

三、分析计算题（每小题 13 分，共 65 分）

11. 试卷中有一道选择题，共有 $n(n\ge 2)$ 个答案可供选择，其中只有一个答案是正确的. 任一考生如果会解这道题，则一定能选出正确答案；如果他不会解这道题，则他不妨任选其中一个答案. 设任一考生会解这道题的概率是 $p(0<p<1)$，

（1）求任一考生选出正确答案的概率；

（2）已知某考生所选答案是正确的，求他/她确实会解这道题的概率.

12. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} k(1-x)^3, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（1）求 k 的值；

（2）求关于 t 的一元二次方程 $t^2+\sqrt{2}t+X=0$ 有实根的概率；

（3）求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度函数.

13. 设二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}\left(x^2+\dfrac{xy}{2}\right), & 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（1）求X的边际密度函数；

（2）求概率$P(X>Y)$；

（3）求在$\left\{X=\dfrac{1}{2}\right\}$的条件下$Y$的条件概率密度$f_{Y|X}\left(y\left|\dfrac{1}{2}\right.\right)$以及概率$P\left(Y<\dfrac{1}{2}\left|X=\dfrac{1}{2}\right.\right)$.

14. 设A, B为两个随机事件，且$P(A)=\dfrac{1}{4}$、$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，令随机变量

$$X_1=\begin{cases}1, & A\text{ 发生}, \\ 0, & A\text{ 不发生}, \end{cases} \qquad X_2=\begin{cases}1, & B\text{ 发生}, \\ 0, & B\text{ 不发生}. \end{cases}$$

（1）求$\left(X_1, X_2\right)$的联合分布；

（2）判断X_1, X_2是否独立；

（3）判断X_1, X_2是否相关；如果相关，求X_1, X_2的相关系数.

15. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\lambda}e^{-\frac{x^2}{\lambda}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

（1）求参数 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$；

（2）判断 $\hat{\lambda}$ 是否为 λ 的无偏估计量.

得分	

四、应用题（每小题 8 分，共 8 分）

16. 假定某厂生产一种钢索，它的断裂强度 X （kg/cm^2）服从正态分布 $N(\mu,20^2)$. 从中选取一个容量为 9 的样本，得 $\bar{x}=680kg/cm^2$. 若取 $\alpha=0.05$，则能否据此样本认为这批钢索的断裂强度为 $700kg/cm^2$？（$\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$）

得分	

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

17. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ 与 μ 的泊松分布，试证：$X+Y$ 服从参数为 $\lambda+\mu$ 的泊松分布.