安徽大学 20 09 —20 10 学年第 一 学期

《 高等数学 C(三) 》(A 卷)考试试题参考答案及评分标准

一. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B;　2. D;　3. D;　4. A;　5. C.

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{3}{5}$;　7. $1-e^{-1}$;　8. $\frac{2}{\pi}$;　9. $\frac{2}{5}$;　10. $\frac{1}{2}$.

三. 解答题

11. 解：记 A_i =“从甲袋中所取两球中含有 i 个白球”，$i=0,1,2$，

B =“从乙袋中所取一球为白球”。则

$$P(A_0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}，\quad P(A_1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}，\quad P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},$$

则由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{13}{25}.$$

再利用贝叶斯公式有

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{15}{26}.$$

12. 解：(1) 首先注意到 $P(Y=2)=\frac{1}{9}+a$，由条件分布定义知，

$$P(X=1|Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{1}{9a+1},$$

$$P(X=2|Y=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{9a}{9a+1}.$$

(2) 首先由联合分布性质知，$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+a+b=1$，　①

另外，由 X 与 Y 独立，则 $P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$，得到

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{9}+a),$$　②

联合①，②解得，$a=\frac{2}{9},b=\frac{1}{9}$.

13. 解：(1) 由于

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty}Ae^{-(x+y)}dydx=\frac{1}{2}A,$$

得 $A=2$.

(2) 由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 得, 则当 $x>0$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x}^{+\infty}2e^{-(x+y)}dy=2e^{-2x},$$

从而 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，则当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}2e^{-(x+y)}dx=2e^{-y}(1-e^{-y}),$$

从而 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-y}(1-e^{-y}), & y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(3) 由卷积公式知, $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$,

故当 $z>0$ 时有

$$f_Z(z)=\int_{0}^{\frac{z}{2}}f(x,z-x)dx=\int_{0}^{z}2e^{-z}dx=ze^{-z}.$$

因此 Z 的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

14. 解：(1) $EZ=E(\frac{X}{3}-\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}EX-\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{3}.$

(2) $DZ=D(\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y)=D(\frac{X}{3})+D(-\frac{Y}{2})+2\operatorname{cov}(\frac{X}{3},-\frac{Y}{2})$

$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\times\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

$$=\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{4}\times16-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4=3$$

(3) $\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,\frac{X}{3}-\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,X)-\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{3}DX-\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=\frac{1}{3}\times3^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times4=0$$

故 $\rho_{XZ}=\frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0.$

15. 解：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本值, 则似然函数为：

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

故对数似然函数为

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n} x_i \ln p+(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-p),$$

而

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p},$$

再令 $\frac{d\ln L}{dp}=0$，即 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}=0$,可解得 p 的极大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

从而得 p 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

又 $E\hat{p}=E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i=p$，故 $\hat{p}$ 为参数 p 的无偏估计.

16. 解:由题意 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， μ 与 σ^2 皆未知. 今需检验假设: $H_0:\mu=500$，

选用统计量

$$t=\frac{\overline{X}-500}{s^*/\sqrt{n}}$$

故在 H_0 成立的条件下 $t \sim t(n-1)$，从而得到该假设检验问题的拒绝域为:

$$W=\left\{\left|\frac{\overline{X}-500}{s^*/\sqrt{n}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

将 $\overline{x}=510$， $s^*=20$， $n=9$， $\alpha=0.05$ 代入得，

$$\left|\frac{\overline{X}-500}{s^*/\sqrt{n}}\right|=1.5, \qquad \text{而}\ t_{0.025}(8)=2.31,$$

故样本值没有落入拒绝域中，从而接受原假设 H_0，即认为这批钢索的断裂强度仍

为 $500kg/cm^2$.