安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高等数学 C（三）》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D；　2. D；　3. D；　4. D；　5. D.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{3}{5}$ ；　7. $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$ ；　8. $\frac{1}{12}$ ；　9. $F(n-1,1)$ ；　10. 0.98.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：设 $B=\{$取到的产品为次品$\}$；

$A_1=\{$取到的产品来自于甲车间$\}$；

$A_2=\{$取到的产品来自于乙车间$\}$；

$A_3=\{$取到的产品来自于丙车间$\}$；

（1）由全概率公式有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=0.2\times0.05+0.35\times0.02+0.45\times0.04$$
$$=0.035;$$

（5 分）

（2）由贝叶斯公式有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.05}{0.035}=\frac{0.01}{0.035}=0.2857.$$ （10 分）

注：计算结果错误扣 1 分.

12．解：（1）由于是不放回抽取，取到正品时停止抽取，所以抽取次数 X 的可能值为$1,2,3$.

$$P(X=1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\ P(X=2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{45},\ P(X=3)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{8}=\frac{1}{45},$$

则随机变量 X 的分布列

X	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

（3分）

（2）由于 X 的分布函数 $F(x)=P(X\le x)$, 则

当 $x<1$ 时，$F(x)=P(X\le x)=0$；

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P(X\le x)=P(X=1)=\dfrac{4}{5}$；

当 $2\le x<3$ 时，$F(x)=P(X\le x)=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{44}{45}$；

当 $x\ge 3$ 时，$F(x)=P(X\le x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1.$

$$\text{所以 } F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{4}{5}, & 1\le x<2, \\ \dfrac{44}{45}, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

（7分）

(3) $P(X=3.5)=0$,

$P(X>-2)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$,

$P(1<X<3)=P(X=2)=\dfrac{8}{45}$.

（10分）

13. 解：（1）由于 $F(x)$ 具有连续性，有 $F(0\text{-}0)=F(0)$

即 $F(0\text{-}0)=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=0=A-1$，

因此 $A=1$；（4分）

（2）$p(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（7 分）

（3） $P(X\le 1)=F(1)=1-2e^{-1}$. （10分）

14. 解：$X\sim N(2,\sigma^2)$，

$P(1<X<3)=P(-\dfrac{1}{\sigma}<\dfrac{X-2}{\sigma}<\dfrac{1}{\sigma})=2\Phi(\dfrac{1}{\sigma})-1=0.6826$.

$\Phi(\dfrac{1}{\sigma})=0.8413$, 又由于 $\Phi(1)=0.8413$, 得 $\sigma=1$, 于是 $X\sim N(2,1)$.

从而

$$\begin{aligned} P(|X-1|\le 2)&=P(-1\le X\le 3)=P(-3\le \frac{X-2}{1}\le 1) \\ &=\Phi(1)-\Phi(-3) \\ &=\Phi(1)+\Phi(3)-1 \\ &=0.83995. \end{aligned}$$

（10 分）

15．解：（1）随机向量(X,Y)有4个可能值，$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$.

$P(X=-1,Y=-1)=P(U\le -1,U\le 1)=P(U\le -1)=\frac{1}{4}$,

$P(X=-1,Y=1)=P(U\le -1,U>1)=P(\phi)=0$,

$P(X=1,Y=-1)=P(U>-1,U\le 1)=P(-1<U\le 1)=\frac{1}{2}$,

$P(X=1,Y=1)=P(U>-1,U>1)=P(U>1)=\frac{1}{4}$.

于是X和Y的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（5分）

（2）$X+Y$和$(X+Y)^2$的概率分布相应为

$X+Y$	-2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$(X+Y)^2$	0	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

可得$E(X+Y)=0,\quad D(X+Y)=E(X+Y)^2=2.$　（10分）

16．解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=k\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(2x+3y)}dxdy$

$$=k\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-3y}dy$$

$$=k\cdot\frac{1}{6}\cdot e^{-2x}\big|_{+\infty}^{0}\cdot e^{-3y}\big|_{+\infty}^{0}=\frac{k}{6},$$

于是，$k=6$.　（4分）

（2）因(X,Y)关于X和Y的边缘概率密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0\ , & \text{其他}.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0,\\ 0\ , & \text{其他}.\end{cases}$$

则对任意的$(x,y)\in R^2$，$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$均成立，所以$X$和$Y$独立.

（7分）

(3) 求 $P(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 1) = \int_0^2 \int_0^1 6e^{-(2x+3y)} dxdy = \int_0^2 2e^{-2x} dx \cdot \int_0^1 3e^{-3y} dy$

$$= e^{-2x} \big|_2^0 \cdot e^{-3y} \big|_1^0$$

$$= (1-e^{-4})(1-e^{-3}).$$

(10 分)

四、解答题（每小题 10 分，共 10 分）

17. 解：（1）$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{p}$，令 $\frac{1}{p} = \overline{X}$，

解得 p 的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$；（5 分）

（2）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本值,

则似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} [(1-p)^{x_i - 1} p] = p^n \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n},$$

$$\ln L(p) = n \ln p + (\sum_{i=1}^{n} x_i - n) \cdot \ln(1-p),$$

令 $\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{n}{p} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i - n)}{1-p} = 0$，

解得 p 的最大似然估计值为 $\hat{p} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$,

从而得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$.（10 分）