安徽大学 20__19__—20__20__学年第__一__学期

《 概率论与数理统计 A 》考试试题（A 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D　　2. B　　3. A　　4. D　　5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $\frac{3}{4}$　　7. $\frac{1}{4}$　　8. 2　　9. μ^2　　10. $(3.412,4.588)$

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

11. 解：以 A_1 和 A_2 分别表示订阅了甲报和乙报，B 表示第二年续订．则

$$P(A_1\overline{A_2})=0.6-0.1=0.5, P(\overline{A_1}A_2)=0.5-0.1=0.4, P(A_1A_2)=0.1;,$$

$$P(B\mid A_1\overline{A_2})=0.7, P(B\mid \overline{A_1}A_2)=0.6, P(B\mid A_1A_2)=0.8.$$

（1）由全概率公式有

$$P(B)=P(\overline{A_1}A_2)P(B\mid A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)P(B\mid \overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)P(B\mid A_1A_2)$$
$$=0.5\times 0.7+0.4\times 0.6+0.1\times 0.8=0.67.$$

（2）利用贝叶斯公式有

$$P(A_1A_2\mid B)=\frac{P(A_1A_2)P(B\mid A_1A_2)}{P(B)}=\frac{0.1\times 0.8}{0.67}=\frac{8}{67}.$$ ……………12 分

12. 解：（1）易知 $a+b+1/3=1$，$EX=b+2/3=1$，故 $a=b=1/3$．

（2）注意到 $U\geq V$，故 $P(U=0,V=1)=P(U=0,V=2)=P(U=1,V=2)=0$，另外

$$P(U=0,V=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=1/9;$$

同理，

$$P(U=1,V=0)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=2/9;$$
$$P(U=1,V=1)=P(X=1,Y=1)=1/9;$$
$$P(U=2,V=0)=P(X=2,Y=0)+P(X=0,Y=2)=2/9;$$
$$P(U=2,V=1)=P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)=2/9;$$
$$P(U=2,V=2)=P(X=2,Y=2)=1/9.$$

从而 (U,V) 的概率分布为

$U \backslash V$	0	1	2
0	1/9	0	0
1	2/9	1/9	0
2	2/9	2/9	1/9

（3）$EUV = 1\times1\times1/9 + 2\times1\times2/9 + 2\times2\times1/9 = 1$，

$EU = 0\times1/9 + 1\times3/9 + 2\times5/9 = 13/9, EV = 0\times5/9 + 1\times3/9 + 2\times1/9 = 5/9,$

故$Cov(U,V) = EUV - EU\cdot EV = 1 - 65/81 = 16/81.$……………………………12 分

13. 解：（1）由 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ 得，当$x>0$时，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy = e^{-x},$$

从而 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

同理，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$，当$y>0$时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)}dx = \frac{1}{(1+y)^2},$$

从而

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（2）Z 的分布函数

$$F_Z(z) = P(XY \le z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \int_0^{\infty}\int_0^{z/x} xe^{-x(1+y)}dydx, & z>0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & z\le 0, \\ 1-e^{-z}, & z>0. \end{cases}$$

因此Z的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$ ……………………………………………12分

14. 解：（1）易见$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2}e^{-|x|}dx = 0,$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2}e^{-|x|}dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2,$$

从而$DX = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = 2.$

（2）$Cov(X,|X|)=EX|X|-EX\cdot E|X|=EX|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x|x|}{2}e^{-|x|}dx=0$，故 X 和 $|X|$ 不相关.

（3）对于给定的 $0<a<\infty$，由于事件 $(|X|\le a)\subset(X\le a)$，且

$P(X\le a)<1, P(|X|\le a)>0$，故 $P(X\le a,|X|\le a)=P(|X|\le a)$,

但 $P(X\le a)P(|X|\le a)<P(|X|\le a)$，所以

$P(X\le a,|X|\le a)\ne P(X\le a)P(|X|\le a)$，即 X 和 $|X|$ 不独立.……………………12 分

15. 解：（1）以 $\overline{X}$ 表示该样本均值，则 $\overline{X}\sim N(3.4,36/n)$，故 $\frac{\overline{X}-3.4}{6/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

从而有

$$P(1.4<\overline{X}<5.4)=P(|\overline{X}-3.4|<2)=P\left(\frac{|\overline{X}-3.4|}{6/\sqrt{n}}<\frac{2}{6/\sqrt{n}}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\ge 0.95,$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\ge 0.975$，即 $\frac{\sqrt{n}}{3}\ge 1.96$，从而 $n\ge(1.96\times 3)^2\approx 34.57$,所以 n 至少应取 35.

（2）由于 $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，故

$D(18S_n^2/36)=\frac{1}{4}DS_n^2=2(18-1)=34$，从而 $DS_n^2=136$. ……………………………12 分

16. 解：（1）矩估计：易见 $EX=\int_c^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-(x-c)/\theta}dx=\theta+c,$

$$EX^2=\int_c^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-(x-c)/\theta}dx=\theta^2+(\theta+c)^2.$$

令 $EX=\overline{x}$，$EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，则 θ 与 c 的矩估计值分别为

$$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\ \hat{c}=\overline{x}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}.$$

（2）极大似然估计：易见似然函数为

$$L(\theta,c)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-c)/\theta}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)/\theta},\ x_i\ge c,1\le i\le n,$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta,c) = -n\ln\theta - \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)/\theta,\ x_i \ge c, 1 \le i \le n.$$

故当 $x_i \ge c$，$1 \le i \le n$，即 $c \le \min(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_{(1)}$ 时，

$$\ln L(\theta,c) = -n\ln\theta - \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)/\theta,$$

由于

$$\frac{\partial \ln L(\theta,c)}{\partial c} = \frac{n}{\theta} > 0,$$

即 $L(\theta,c)$ 关于 c 单调递增，故为使 $L(\theta,c)$ 取到最大值，c 应取 $\min(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_{(1)}$，

即 c 的最大似然估计为 $\hat{c} = x_{(1)}$；再令

$$\frac{\partial \ln L(\theta,c)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)/\theta^2 = 0,$$

可得到 θ 的极大似然估计值为

$\hat{\theta} = \overline{x} - \hat{c} = \overline{x} - x_{(1)}$. ……………………………12 分

四、应用题（每小题 8 分，共 8 分）

17. 解：由题意 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 与 σ^2 皆未知. 需检验的假设为

$$H_0 : \mu = 500 \leftrightarrow H_1 : \mu \ne 500.$$

选用统计量

$$t = \frac{\overline{X} - 500}{s/\sqrt{n}},$$

故在 H_0 成立的条件下 $t \sim t(n-1)$，从而得到该假设检验问题的拒绝域为

$$W = \left\{ \left| \frac{\overline{X} - 500}{s/\sqrt{n}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}.$$

将 $\overline{x} = 510$，$s = 20$，$n = 9$，$\alpha = 0.05$ 代入得，

$$\left| \frac{\overline{X} - 500}{s/\sqrt{n}} \right| = 1.5, \qquad 而\ t_{0.025}(8) = 2.31,$$

故样本值没有落入拒绝域中，从而接受原假设 H_0，即认为这批钢索的断裂强度

仍为 $500kg/cm^2$. ……………………………………………………………8分