安徽大学2017-2018学年第二学期
《线性代数B》期末考试A卷参考答案与评分标准

一、填空题(本题共五小题，每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\dfrac{1}{24}}$. 2. $\underline{\ 2\ }$. 3. $\underline{\text{右}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. 4. $\underline{\ 5\ }$. 5. $\underline{\ 10\ }$.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分, 共15分)

6. B. 7. A. 8. B. 9. C. 10. D.

三、计算题 (本题共六小题，第11-15题每题10分，第16题15分，共65分)

11. 解. $D = \begin{vmatrix} 2+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i & x_2 & \cdots & x_n \\ 2+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i & 2+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i & x_2 & \cdots & 2+x_n \end{vmatrix}$

$= (2+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2^{n-1}(2+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i).$ .... (10分)

12. 解. $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 & 27 \\ 4 & 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}$ .... (5分)

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -12.$ .... (10分)

13. 解. 由$AB-2A=E$可知，$A(B-2E)=E$. 故$B=A^{-1}+2E$. …….(3分)

用初等行变换法可得$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

故$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. ……………………………………………(10分)

14. 解. 原方程组系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & a\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -3\end{pmatrix}$.

由Cramer法则可知，$|A|=-(a+1)(a-1)^2=0$，即$a=\pm 1$.

若$a=1$，则$r(A)=1$, $r(A,\beta)=2$. 此时原方程无解. 故$a=-1$. ……….(5分)

对$(A|\beta)$作初等行变换得$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

导出组的基础解系为$\xi=(1,0,1)^T$，特解为$\eta=(2,-1,0)^T$.

于是，原方程组的通解为$(2,-1,0)^T+k(1,0,1)^T$，其中k为任意常数. …(10分)

15. 解. 令$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)$. 对$A$作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$ ……………….(6分)

由此可知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为原向量组的一个极大无关组，且秩为3. ……….(10分)

16. 解. (1) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$. ....(2分)

$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$. A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=0$. ....(5分)

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$, $(3E-A)X=0$的基础解系为$\alpha_1=(1,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,-1)^T$. 故对应于特征值$\lambda_{1,2}=3$的特征向量为$k_1(1,-1,0)^T+k_2(1,0,-1)^T$，其中$k_1,k_2$为任意不全为零的常数.

对于特征值$\lambda_3=0$, $(0E-A)X=0$的基础解系为$\alpha_3=(1,1,1)^T$. 故对应于特征值$\lambda_3=0$的特征向量为$k_3(1,1,1)^T$，其中k_3为任意非零常数. ....(9分)

(2) 由(1)，对$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$作Schmidt正交化得

$\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0)^T$, $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1)^T$.

$\beta_3=\alpha_3=(1,1,1)^T$.

再作单位化得$\xi_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\xi_2=(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}})^T,\xi_3=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})^T$.

令$Q=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\dfrac{2}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，作正交线性替换$X=QY$，

则$f(x_1,x_2,x_3)=3y_1^2+3y_2^2$. ....(15分)

四、证明题（本题共5分）

17. 证明：A为正交阵，则$A^TA=E$.

设X为A的对应特征值λ_0的特征向量. 则$AX=\lambda_0X$. 则$X^TA^T=\lambda_0X^T$.

故$X^TX=X^TA^TAX=\lambda_0^2X^TX$. 由特征向量$X\neq0$可知，$X^TX\neq0$.

故$\lambda_0^2=1$，即$\lambda_0=\pm1$. ....(5 分)