安徽大学 2016-2017 学年第一学期

《高等代数 A（三)》（线性代数）参考答案（A 卷）

（闭卷　时间 120 分钟）

一．选择题（**每小题 2 分，共 10 分**）

（1） A
（2） C
（3） B
（4） D
（5） C

二.填空题（**每小题 2 分，共 10 分**）

（6） 0

（7） $-\frac{1}{2}(A+2E)$

（8）8

（9） $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

（10） $l > \frac{\sqrt{5}}{2}$

三．计算题（**每小题 13 分，共 65 分**）

11．解：$D = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!$

………………………… (13 分)

12．解：$AB = 2B + A$，有 $(A-2E)B = A$

于是

$$A-2E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

而$\left(A-2E \quad A\right)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & 3 & -8 & -6 \\ & 1 & & 2 & -9 & -6 \\ & & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

于是$B=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

………………………… (13 分)

13.解：（1）$\begin{vmatrix} 1+l & 1 & 1 \\ 1 & 1+l & 1 \\ 1 & 1 & 1+l \end{vmatrix} = l^2(l+3)$，故

当 $l \neq 0$，$l \neq -3$时，b 可由a_1，a_2，a_3线性表示，且表示法唯一。

（2）当 $l=0$时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$

b 可由a_1，a_2，a_3线性表示，且表示法不唯一。

（3）当 $l=-3$时，$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，无解

b 不能由a_1，a_2，a_3线性表示。

………………………… (13 分)

14.解（1）因$A \sim B$，故$\begin{cases} 2+0+a=2+b-1 \\ |A|=|B| \end{cases}$，解得$a=0$，$b=1$

（2）A的特征值为 2，1，-1

对 $l_1=2$解$\left(2E-A\right)X=0$得基础解系$a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

对 $l_2=1$解$\left(E-A\right)X=0$得基础解系$a_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对 $l_3=-1$解$\left(-E-A\right)X=0$得基础解系$a_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

则 $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 即为所求。

……………………… (13 分)

15．解　$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$|lE-A|=\begin{vmatrix}l-1 & -1 & -1\\ -1 & l-1 & -1\\ -1 & -1 & l-1\end{vmatrix}=l^2(l-3)$，故 $l_1=0$（二重），$l_2=3$

对 $l_1=0$，解 $AX=0$ 得基础解系 $a_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，

正交化 $b_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$b_2=a_2-\dfrac{(a_2,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)}b_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

单位化 $h_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$h_2=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^T$，

对 $l_2=3$，解 $(3E-A)X=0$ 得基础解系 $a_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，单位化 $h_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

则令 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，作 $X=QY$，$f=3y_3^2$

……………………… (13 分)

四、证明题（第 16 题 8 分，第 17 题 7 分，共 15 分）

16. 证明：考虑 $k_0 a_0 + k_1(a_0 + a_1) + \cdots + k_{n-r}(a_0 + a_{n-r}) = 0$ 可得

$$(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})a_0 + k_1 a_1 + \cdots + k_{n-r} a_{n-r} = 0 \qquad （1）$$

则 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$ ，（2）否则 a_0 可由 a_1，...，a_{n-r} 线性表示

即 a_0 是 $AX = 0$ 的解，矛盾。

从而由（1）知，$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_{n-r} a_{n-r} = 0$，因 a_1，...，a_{n-r} 是 $AX = 0$ 的基础解系，故线性无关。从而得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r}$ 代（2）得 $k_0 = 0$ 即线性无关。

………………………… (8 分)

17. 证明：显然 $\left(A^T A\right)^T = A^T A$ 为实对称阵，又 $r(A) = n$，故 $AX = 0$ 仅有零解。

即对 $\forall X \neq 0$，$X \in R^n$ 有 $AX \neq 0$ 令为 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in R^n$，

则

$$X^T(A^T A)X = (AX)^T(AX) = b_1^2 + \cdots + b_n^2 > 0$$

故二次型 $X^T(A^T A)X$ 为正定二次型，从而 $A^T A$ 为正定矩阵。

………………………… (7 分)