安徽大学 2018—2019 学年第一学期
《概率论与数理统计 A》（A 卷）考试
试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、 $\dfrac{3}{5}$　2、$\dfrac{9}{64}$　3、 $3e^{-2}$　4、σ^2　5、$(480.4,519.6)$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、 D　7、C　8、 D　9、A　10、B

4

三、分析计算题（每小题 13 分，共 65 分）

11、解：设 A：考生会解这道题；B：考生选出正确答案；则由题意得：

$$P(A)=p,P(\overline{A})=1-p,P(B\mid A)=1,P(B\mid \overline{A})=\frac{1}{n}$$ 4 分

（1）由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=p+(1-p)\frac{1}{n}=\frac{np-p+1}{n},$$ 7 分

（2）由贝叶斯公式以及（1）的结果得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{np}{np-p+1}$$ 13 分

12、解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow 1=\int_0^1 k(1-x)^3dx$ 3 分

解得 $k=4$ 4 分

（2）$P(\text{方程有实根})=P(\Delta\ge 0)=P(X\le \frac{1}{2})$ 6 分

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}4(1-x)^3dx=\frac{15}{16}$$ 8 分

（3）$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

① $y<0$，$F_Y(y)=P(\Phi)=0$

② $0\le y<1$，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(0\le X<\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}4(1-x)^3dx=1-(1-\sqrt{y})^4$

③ $y\ge 1$，$F_Y(y)=P(\Omega)=1$

则 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 1-(1-\sqrt{y})^4 & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$ 12 分

从而概率密度函数为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2(1-\sqrt{y})^3}{\sqrt{y}} & 0\le y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 13 分

13、解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 2 分

$$=\begin{cases}\int_0^2\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

H324

$$=\begin{cases}\frac{12}{7}x^2+\frac{6}{7}x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 4 分

（2）$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy$$ 7 分

$$=\frac{15}{56}$$ 8 分

（3）在$0<x<1$下，有 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)}{f_X(x)}=\frac{\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)}{\frac{12}{7}x^2+\frac{6}{7}x} & 0<y<2\\ \frac{0}{f_X(x)}=0 & \text{其它}\end{cases}$

则

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{1}{4}(y+1) & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 12 分

从而

$$P(Y<\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}(y+1)dy=\frac{5}{32}$$ 13 分

14、解：（1）由于

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12},P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$$

所以

$$P(X_1=1,X_2=1)=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P(X_1=0,X_2=0)=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

得(X_1,X_2)的联合分布律及边缘分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

5 分

（2）利用同一表格法得边缘分布律为：

X_1 \ X_2	0	1	$P(X_1=x_i)$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$P(X_2=x_j)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

8 分

因为$P(X_1=0,X_2=0)\neq P(X_1=0)P(X_2=0)$，所以$X_1$和$X_2$不独立. 9 分

（3）注意到$EX_1=\frac{1}{4},EX_2=\frac{1}{4},EX_1X_2=\frac{1}{12}$，

故

$$Cov(X_1,X_2)=EX_1X_2-EX_1EX_2=\frac{1}{24}\neq 0$$ 11 分

故X_1和X_2相关，又$DX_1=\frac{3}{16},DX_2=\frac{5}{36}$，

则 X_1和X_2的相关系数为

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1DX_2}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$ 13 分

15、解：（1）设总体X的样本值为$x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots n)$，

则似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot e^{-\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}x_i^2}$$ 4 分

取对数有

$$\ln L(\lambda)=n\ln 2-n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

由

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

得到λ的极大似然估计值为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$ 6 分

故得到λ的极大似然估计量为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$ 7 分

（2）由于

$$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{2}{\lambda}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx=\lambda$$ 10 分

因此

$$E\hat{\lambda}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\lambda$$ 12 分

由此可知 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 时 λ 的无偏估计量. 13 分

四、应用题（每小题 8 分，共 8 分）

16、解：由题意得到

$$H_0:\mu=700;\qquad H_1:\mu\neq700$$

在 H_0 成立的前提下，

$$Z=\frac{\sqrt{9}\left(\overline{X}-700\right)}{20}\sim N(0,1)$$ 4 分

这里 $\alpha=0.05,u_{0.025}=1.96,\overline{x}=680$，

因而有

$$|z|=\left|\frac{\sqrt{9}\left(680-700\right)}{20}\right|=3>1.96$$ 7 分

因而拒绝 H_0，即认为这批钢索的断裂强度不为 $700kg/cm^2$. 8 分

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

17、证明：因为 X 与 Y 独立且分别服从参数为 λ 和 μ 的泊松分布，则

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}，\ P(Y=j)=\frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!}，\ i,j=0,1,2,\cdots$$ 2 分

对任意的 $k=0,1,2,\cdots$，由于

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$ 4 分

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$ 5 分

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{k-i}e^{-\mu}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}$$ 7 分

从而 $X+Y$ 服从参数为 $\lambda+\mu$ 的泊松分布.