安徽大学 2015—2016 学年第一学期
《高等数学 A（三)》（线性代数）考试试卷（A 卷）
试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

(1) B　(2) A　(3) A　(4) C　(5) D

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

(6) $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

(7) 6

(8) -2 和 1

(9) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(10) $-\frac{4}{5} < a < 0$

三、计算题（每小题 13 分，共 65 分)

(11) 解：$2A_{11}-4A_{12}-A_{13}-3A_{14}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$ ....(6 分）

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & 2 \\ -9 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$ ....(7 分）

(12) 解：由 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$，得 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$

而 $A^{-1}XA=6A+XA$，得（$A^{-1}-E)XA=6A$

又 $A^{-1}-E$ 可逆，且 $(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$

故 $X=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ ....（13 分）

(13) 解：设方程组为 AX=b ，其导出组为 AX=0

由题意知 $A\alpha_i=b \quad i=1,2,3$

从而 $A(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1)=0$

即 $\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1=(-3,9,-2,10)$ 为导出组 AX=0 的解。 ....(6 分)

又 $r(A)=3$ ，故 AX=0 的基础解系为 $(-3,9,-2,10)$，于是

AX=b 的全部解为 $(2,0,5,-1)+k(-3,9,-2,10)$，其中 k 为任意常数。......（7 分）

(14) 解：属于特征值-1 的特征向量令为 $X=(x_1,x_2,x_3)$ 则

$\begin{cases}(\alpha_1,X)=0\\(\alpha_2,X)=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=(1,-1,0)$

故属于特征值-1 的全部特征向量为 $k(1,-1,0)$ $(k\neq 0)$ ....(6 分)

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,X)$，则

$AP=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$， 即 $A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}P^{-1}$ ，于是

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ ....(7 分)

(15) 解：二次型所对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & a\\0 & a & 3\end{pmatrix}$

由条件知，其特征值为 1 , 2 , 5

而 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -a \\ 0 & -a & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3-a)(\lambda-3+a)$

由于 $a>0$，得 $a=2$ ....(6 分)

对 $\lambda_1=1$，由（$(E-A)X=0$，解得 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

对 $\lambda_3=5$，由 $(5E-A)X=0$，解得 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，单位化为 $\eta_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

故作正交变换的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ....(7 分)

四、证明题（第 16 题 8 分，第 17 题 7 分，共 15 分）

(16) 证明：由 $B^T=(\lambda E+A^TA)^T=\lambda E+A^TA=B$，故 B 为实对称阵 ....(2 分）

又对任意 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，

有 $X^TBX=X^T(\lambda E+A^TA)^T=\lambda X^TX+(AX)^T(AX)$

令 $AX=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in R^n$ ，于是

$X^TBX=\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$

当 $\lambda>0$ 时 ， $X^TBX>0$ ，即 B 为正定矩阵。 ....(6 分)

(17) 证明：由 $r(A)=n-1$ 知，A 中至少有一 $n-1$ 阶子式不为零。

故 $r(A^*)\geq 1$，（1）且 $AA^*=0$ ....(3 分)

从而 $r(A)+r(A^*)\leq n$，即 $r(A^*)\leq n-r(A)=1$，（2）

由（1）（2）知，$r(A^*)=1$ ....(4 分)