安徽大学 2017—2018 学年第一学期
《高等数学 A（三）》（概率论与数理统计）考试试卷（A 卷）
试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、 0.8　　2、$\dfrac{1}{4}$　　3、 $3p^2(1-p)^2$　　4、$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{5}{9} & \dfrac{4}{9} \end{pmatrix}$　　5、$\dfrac{5}{9}$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、 C　　7、B　　8、C　　9、 D　　10、B

三、计算题（每小题 13 分，共 65 分）

11、解：设 A:从乙袋中取出一产品是正品；

B_i:从甲袋中取出的 2 件产品中恰有 i 件正品，$i=0,1,2$；则

（1）$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\,|\,B_i)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{4}{10}+\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{5}{10}+\dfrac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{6}{10}=\dfrac{13}{25}$； 8 分

（2）$P(B_1\,|\,A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A\,|\,B_1)}{p}=\dfrac{\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{5}{10}}{\dfrac{13}{25}}=\dfrac{15}{26}$. 13 分

12、解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-|x|}dx=2C\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$； 4 分

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^t\,dt, & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^t\,dt+\int_0^x\dfrac{1}{2}e^{-t}\,dt, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^x, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$ 8 分

（3）$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(\phi)=0$；

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P\left(-y<X<y\right)=\int_{-y}^{y}\dfrac{1}{2}e^{-|x|}dx=2\int_0^y\dfrac{1}{2}e^{-x}dx=1-e^{-y}$；

则 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ e^{-y}, & y\ge 0\end{cases}$. 13 分

13、解：（1）X_1 的可能取值为 0，1；X_2 的可能取值为 0，1，2，则由乘法公式得：

$P(X_1=0,X_2=0)=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{56}$，$P(X_1=0,X_2=1)=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{C_2^1C_5^1}{C_7^2}=\dfrac{5}{28}$，

$$P(X_1=0,X_2=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{5}{28}，\quad P(X_1=1,X_2=0)=\frac{5}{8}\cdot\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{5}{56}，$$

$$P(X_1=1,X_2=1)=\frac{5}{8}\cdot\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\frac{5}{14}，\quad P(X_1=1,X_2=2)=\frac{5}{8}\cdot\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{5}{28}，$$

得联合分布律和边缘分布律如下表所示：

X_1 \ X_2	0	1	2	$P(X_1=i)$
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{5}{56}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{8}$
$P(X_2=j)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$	1

7 分

（2）$P(X_1X_2=0)=1-P(X_1X_2\neq 0)=1-\left[P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=2)\right]$

$$=1-\left(\frac{5}{14}+\frac{5}{28}\right)=\frac{13}{28}；$$ 9 分

（3）由边缘分布可知 $EX_1=\frac{5}{8}$，$EX_2=\frac{5}{4}$，$E\left(X_1X_2\right)=\frac{5}{7}$，故

$$Cov(X_1,X_2)=E\left(X_1X_2\right)-EX_1EX_2=-\frac{15}{224}，$$

则 X_1 与 X_2 相关. 13 分

14、解：由题意可知，联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,|y|<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ 4 分

（1）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1<y<0,\\ \int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & |y|\ge 1.\end{cases}$ 7 分

（2）当 $|y|<1$ 时，有 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 10 分

或者写成：

当 $-1<y<0$ 时，有 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+y}, & -y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当$0 \le y < 1$时，有 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ （10 分）

（3）$P\left(X>\dfrac{1}{2}\middle|Y>0\right)=\dfrac{P\left(X>\dfrac{1}{2},Y>0\right)}{P(Y>0)}\overset{几何意义可知}{=}\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+1\right)\cdot\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1}=\dfrac{3}{4}$. 13 分

15、解：（1）$E(X)=-2\theta+3$，$\overline{X}=\dfrac{1}{6}(1+1+2+1+3+2)=\dfrac{5}{3}$，

令$E(X)=\overline{X}\Rightarrow -2\theta+3=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}$； 6 分

（2）根据题意，得似然函数

$$L(\theta)=\left(\theta^2\right)^3\left[2\theta(1-\theta)\right]^2(1-\theta)^2=4\theta^8(1-\theta)^4,$$

取对数，得：$\ln L=\ln 4+8\ln\theta+4\ln(1-\theta)$，

则$\dfrac{dLnL}{d\theta}=\dfrac{8}{\theta}-\dfrac{4}{1-\theta}$，令$\dfrac{dLnL}{d\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}$. 13 分

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16、解：H_0：$\mu=1000$；H_1：$\mu\ne1000$， 2 分

① 已知$\sigma=100$，当H_0为真时，检验统计量及其分布为$U=\dfrac{\bar{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；

计算统计量的值为$U=-2.5$；$u_{0.025}=1.96$，$|U|>1.96$；

故拒绝H_0，则元件不符合规定要求. 6 分

② 未知σ，当H_0为真时，检验统计量及其分布为$T=\dfrac{\bar{X}-1000}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$；

计算统计量的值为$T=-\dfrac{5}{3}$；$t_{0.025}(24)=2.0639$，$|T|<2.0639$；

故接受H_0，则元件符合规定要求. 10 分

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

17、因为$\overline{X}$与S^2独立，则$DT=D\left(\overline{X}^2-\dfrac{1}{n}S^2\right)=D\left(\overline{X}^2\right)+\dfrac{1}{n^2}D\left(S^2\right)$，

因为$\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，有$\sqrt{n}\,\overline{X}\sim N(0,1)$，进而$n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$，

$$D(n\overline{X}^2)=2\Rightarrow D(\overline{X}^2)=\frac{2}{n^2};$$

而$\frac{(n-1)S^2}{1}\sim\chi^2(n-1)$，所以$D((n-1)S^2)=2(n-1)$，故$D\left(S^2\right)=\frac{2}{n-1}$；

则$DT=\frac{2}{n(n-1)}$. 5 分