

安徽大学 2016—2017 学年第一学期
《高等数学 A (三)》(概率论与数理统计) 考试试卷 (A 卷)
试题参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、 0.7 2、 $1-2e^{-1}$ 3、 20 4、 -1 5、 0.954

二、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6、 C 7、 A 8、 D 9、 B 10、 A

三、计算题 (每小题 12 分, 共 60 分)

11、【解】 设 A : 考生对相关知识完全掌握; B : 考生对相关知识部分掌握; C : 考生对相关知识完全不掌握; D : 考生选对答案;

则由题意可知: $P(D|A)=1, P(D|B)=0.5, P(D|C)=0.25$

$$(1) \quad P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ = 0.6 \times 1 + 0.2 \times 0.5 + 0.2 \times 0.25 = 0.75 \quad 8 \text{ 分}$$

$$(2) \quad P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.6 \times 1}{0.75} = 0.8 \quad 12 \text{ 分}$$

$$12、【解】 (1) \quad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} Axe^{-x^2} dx = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 2 \quad 4 \text{ 分}$$

$$(2) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad 8 \text{ 分}$$

$$(3) \quad P(-1 \leq X < 2) = \int_0^2 2xe^{-x^2} dx = 1 - e^{-4} \quad 12 \text{ 分}$$

13、【解】 (1) 由题设条件 $P(X^2 = Y^2) = 1$ 可知 $P(X^2 \neq Y^2) = 0$, 结合边缘与联合关系得 (X, Y) 的联合分布律为

$\begin{matrix} Y \\ \backslash \\ X \end{matrix}$	-1	0	1	$P(X = x_i)$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(Y = y_j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

4 分

(2) 利用同一表格法得 Z 的分布律为:

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

8 分

$$(3) EX = \frac{2}{3}, \quad EY = 0, \quad EXY = EZ = 0,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY = 0, \quad \text{则 } \rho_{XY} = 0 \quad 12 \text{ 分}$$

$$14、【解】 f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^1 1 dy = 1+x, & -1 < x \leq 0, \\ \int_x^1 1 dy = 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad 5 \text{ 分}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^y 1 dx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, \quad 10 \text{ 分}$$

显然 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 则 X, Y 不独立. 12 分

$$15、【解】 (1) E(X) = \int_0^1 x \cdot (\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2},$$

$$\text{令 } E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}} \quad 6 \text{ 分}$$

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本观测值, 则似然函数:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} (\theta+1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^\theta, & 0 < x_i < 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 < x_i < 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, $\ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$,

$$\text{两边对 } \theta \text{ 求导, 得 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0,$$

$$\text{解得 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i},$$

$$\text{则对应的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} \quad 12 \text{ 分}$$

四、应用题 (每小题 5 分, 共 5 分)

16、【解】设 X 为需要赔偿的车主人人数, 得 $X \sim B(10000, 0.006)$, $EX = 60, DX = 59.64$, 则保险公司在一年获利不少于 60000 元的概率为:

$$P(120000 - 1000X > 60000),$$

利用中心极限定理可知

$$P(120000 - 1000X > 60000) = P(X < 60) = P\left(\frac{X-60}{\sqrt{59.64}} < \frac{60-60}{\sqrt{59.64}}\right) \approx \Phi(0) = \frac{1}{2}. \quad 5 \text{ 分}$$

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

17、【证明】取 $U = X_1 - X_2$ ，则 $EU = 0$ ， $DU = 1$ ，则 $U \sim N(0,1)$ ； 1 分

又因为 $X_i \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $\frac{X_i - 0}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}X_i \sim N(0,1)$ ，

进而 $V = (\sqrt{2}X_3)^2 + (\sqrt{2}X_4)^2 \sim \chi^2(2)$ 3 分

U, V 相互独立，则 $Y = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{2}}} \sim t(2)$ ． 5 分