安徽大学 2013—2014 学年第一学期

《高等数学 C（三）》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D；　2. B；　3. C；　4. A；　5. D.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $1-\frac{C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{41}{42}\approx 0.976$；　7. -1；　8. 3/5；

9. $(1-e^{-2})(1-e^{-6})$；　10. [5.608,6.392].

三、解答题（每小题 12 分，共 72 分）

11．解：以 A_1,A_2,A_3 分别表示该生报考普通高中、报考中专和报考职业高中，以 B 记该生按志愿被录取，则

$$\begin{aligned}&P(A_1)=0.5,P(A_2)=0.4,P(A_3)=0.1,\\&P(B\,|\,A_1)=0.8,P(B\,|\,A_2)=0.5,P(B\,|\,A_3)=0.4.\end{aligned}\quad\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

（1）利用全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\,|\,A_i)=0.64.\quad\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

（2）由条件概率的定义得

$$P(A_1\,|\,B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\,|\,A_1)}{P(B)}=\frac{0.5\times0.8}{0.64}=0.625.\cdots\cdots 12\text{ 分}$$

12．解：（1）因为 $X\sim N(10,16)$，所以 $\frac{X-10}{4}\sim N(0,1)$，从而

$$P(|X-10|<4)=P\left(\left|\frac{X-10}{4}\right|<1\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

（2）因为 $P(X>c)=P(X\le c)$，所以

$$1=P(X>c)+P(X\le c)=2P(X\le c)=2P\left(\frac{X-10}{4}\le\frac{c-10}{4}\right)=2\Phi\left(\frac{c-10}{4}\right),$$

从而 $\Phi\left(\frac{c-10}{4}\right)=\frac{1}{2}$，故 $\frac{c-10}{4}=0$，所以 $c=10$. ……………………12 分

注：本题也可通过$F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-10}{4}\right)$来做.

13．解：（1）由于$p(x)$为概率密度函数，故

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_{-1}^{1}A|x|dx=2A\int_0^1 xdx=A,$$

即$A=1$.……………………………………………………………………4 分

（2）随机变量X的分布函数为

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt$$

$$=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \int_{-1}^{x}(-t)dt, & -1\le x<0,\\ \int_{-1}^{0}(-t)dt+\int_0^x tdt, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<-1,\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & -1\le x<0,\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$ ………………………………8 分

（3）$Y=2X+1$的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+1\le y)=P\left(X\le\frac{y-1}{2}\right)=F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0, & y<-1,\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}, & -1\le y<1,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}, & 1\le y\le 3,\\ 1, & y>3,\end{cases}$$

从而$Y=2X+1$的概率密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y^{'}(y)=\begin{cases}-\frac{y-1}{4}, & -1\le y<1,\\ \frac{y-1}{4}, & 1\le y\le 3,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}\left|\frac{y-1}{4}\right|, & -1\le y\le 3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ …………12 分

注：本题第（3）问也可用公式法求解。

14．解：（1）由于 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 X 的边缘概率密度函数为

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 2dy, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ……………4 分

Y 的边缘概率密度函数为

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2dx, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ …………8 分

（2）X 和 Y 不独立。因为当 $0<x<1$，$0<y<x$ 时，$p(x,y)\neq p_X(x)\cdot p_Y(y)$，故 X 和 Y 不独立。 ……………………………………………………………………12 分

15．解：（1）由于 $P(XY=2)=0$，所以

$$P(X=1,Y=2)=P(X=2,Y=1)=0;$$

而

$$P(XY=1)=P(X=1,Y=1)=1/3, P(XY=4)=P(X=2,Y=2)=1/12,$$

从而 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

……………………………………………………………………………………6 分

（2）$U=\max(X,Y)$ 的分布列为

$U=\max(X,Y)$	0	1	2
P	1/4	1/3	5/12

故 $U=\max(X,Y)$ 的期望为

$$EU=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{12}=\frac{7}{6}$$ ……………………………………12 分

16．解：（1）由于

$$EX=1\times q^2+2\times 2q(1-q)+3(1-q)^2=3-2q,$$

令 $3-2q=\bar{X}$，得 q 的矩估计量为 $\hat{q}=\dfrac{3-\bar{X}}{2}$，由于样本值为 $x_1=1,x_2=2,x_3=3$，

从而得到 q 的矩估计值为 $\hat{q}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………6 分

（2）由于样本值为 $x_1=1,x_2=2,x_3=3$，从而样本的似然函数为

$$L(q)=q^2\times 2q(1-q)\times(1-q)^2=2q^3(1-q)^3,$$

两边取对数得对数似然函数为

$$\ln L(q)=\ln 2+3\ln q+3\ln(1-q),$$

令 $\dfrac{d\ln L(q)}{dq}=\dfrac{3}{q}-\dfrac{3}{1-q}=0$，得 q 的最大似然估计值为 $\hat{q}=\dfrac{1}{2}$. ………………12 分

四、应用题（每小题 8 分，共 8 分）

17．解：要检验的假设为：

$$H_0: m=0.618 \leftrightarrow H_1: m\neq 0.618.$$

选用统计量

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-m)}{S},$$

其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，在 H_0 成立的条件下，$T\sim t(19)$，因此该假设检验问题的拒绝域为

$$W=\left\{\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-0.618)}{s}\right|>t_{\frac{a}{2}}(19)\right\}$$ ……………………………………………4 分

将 $\sqrt{20}\approx 4.47$，$\bar{x}=0.660$，$s=0.0925$，$a=0.05$，$t_{\frac{a}{2}}(19)=t_{0.025}(19)=2.093$ 代入得

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-0.618)}{s}\right|=2.030<2.093,$$

所以在 $a=0.05$ 下，接受原假设 $H_0: m=0.618$. ………………………………8 分