的鲁棒半径为从 $[u_1, u_2]^T$ 到 $[e_1, e_2]^T$ 的传递函数 H_∞ 范数的倒数:

$$b_{P,C} = \left\| \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} (I - CP)^{-1}(I, C) \right\|_\infty^{-1}. \quad (1)$$

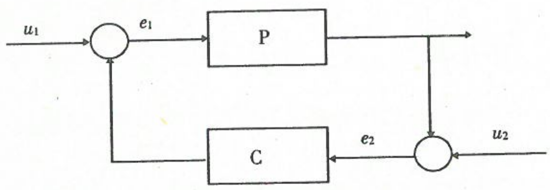

图1 标准反馈结构

Fig.1 Standard feedback structure

下面的定理表明了鲁棒半径的性质,也是用间隔度量进行鲁棒反馈镇定设计的依据,其作用相当于范数摄动鲁棒反馈镇定问题中的小增益定理.

定理[4] 下述条件等价:

(1) C 镇定 P,且 $b \leqslant b_{P,C}$;

(2) 对于任意满足下面条件的 C_1 和 P_1,C_1 镇定 P_1;

$$\delta(P, P_1) + \delta(C, C_1) < b_{P,C}, \quad (2)$$

这里 $\delta(*, *)$ 表示系统的间隔. 式(2)表明对象和控制器的间隔度量摄动可同时被镇定. 对鲁棒半径 $b_{P,C}$ 的优化,可获得最优鲁棒反馈镇定控制器:

$$b_{opt}(P) = \sup_{C镇定P}(b_{P,C}),$$

其中 $0 \leqslant b_{opt} \leqslant 1$. 这个优化过程与规范互质分解摄动的鲁棒稳定性优化问题等价[3,4].

应用中摄动的间隔可能超出最大鲁棒半径 b_{opt},这样就无法直接应用上述定理进行鲁棒反馈镇定设计,这种情况被称为间隔度量的保守性. 因此需要研究间隔接近于最大值1时系统的结构特点,以便预先加以补偿. 由于间隔度量不具有物理意义,本文则通过考察其下界接近于1的情况来研究间隔接近1的充分条件,得到的结果可通过Bode图反映出来,适合于应用.

2 间隔度量下界极大的充要条件

对于SISO系统 P_1、P_2,其间隔 $\delta(P_1, P_2)$ 的一个下界为[4]

$$l = \sup_\omega \frac{|P_1(j\omega) - P_2(j\omega)|}{\sqrt{1 + |P_1(j\omega)|^2}\sqrt{1 + |P_2(j\omega)|^2}},$$

其中 $0 \leqslant l \leqslant \delta(P_1, P_2) \leqslant 1$. 下面分两种情形讨论下界 l 等于最大值1的条件.

(1)非奇异情形:当 $\sup_\omega |P_i(j\omega)| \neq \infty$ 时,设在频率 $\omega = \omega_0$ 处可使 $l = 1$,则必有 $|P_i(j\omega_0)| \neq 0$,记 $P_i(j\omega_0) = M_i e^{j\phi_i}$,$M_i$ 和 ϕ_i 分别为第 i 个系统在 ω_0 处的幅值和相位,于是有

$$l = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{|P_1(j\omega) - P_2(j\omega_0)|}{\sqrt{1 + |P_1(j\omega)|^2}\sqrt{1 + |P_2(j\omega)|^2}},$$

$M_i \neq 0$,

$$\Leftrightarrow (M_1\cos\phi_1 - M_2\cos\phi_2)^2 + (M_1\sin\phi_1 - M_2\sin\phi_2)^2 = 1 + M_1^2 + M_2^2 + M_1^2 M_2^2,$$

$$\Leftrightarrow M_2^2\left[\left(M_1\cos\phi_1 + \frac{M_2\cos\phi_2}{M_2^2}\right)^2 + \left(M_1\sin\phi_1 + \frac{M_2\sin\phi_2}{M_2^2}\right)^2\right] = 0,$$

$$\Leftrightarrow P_1(j\omega_0) \cdot P_2(j\omega_0) = -1,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20\log M_1 = -20\log M_2, \\ \phi_1 + \phi_2 = (2k+1)\pi, \ k \text{ 为任意整数}. \end{cases}$$

上式表明在使下界 $l = 1$ 的频率上,两系统的幅值特性按零分贝线对称,相位和为180°的奇数倍,分别称之为非奇异情形的幅值条件和相位条件;

(2)奇异情形:当两系统其一 $\sup_\omega |P_i(j\omega)| = \infty$ 成立时,不妨设 $|P_1(j\omega)|_{\omega \to \omega_1} \to \infty$,若在 ω_1 点达到式(1)上确界,则有

$$|P_2(j\omega_1)| = 0.$$

同理可知 $\sup_\omega |P_2(j\omega)| = \infty$ 时的结果. 可以看到,奇异情形对系统的相位没有要求,只要在某频率上,当一系统的幅值为无穷大,另一系统幅值为零时,便有下界 $l = 1$.

3 应用中的保守性研究

在应用中,只需考察摄动间隔接近1的情况,这时间隔易于超出最大鲁棒半径以至于不能直接用式(2)设计. 下面两种情形分别讨论下界 l 接近于1的情形.

(1)非奇异情形的应用:一般地,系统在剪切频率附近的增益微小摄动很容易使幅值特性按零分贝线对称,从而满足非奇异情形的幅值条件,因此相位条件是决定这种保守性的关键.

中频段谐振的频率摄动:这时对象的谐振频率与剪切相率相近,由于谐振频率附近的相位变化很大,因此微小摄动容易满足非奇异情形的相位条件,使下界 l 的值很大. 如下例.

例1 设 $P_1 = \dfrac{s^2 + 0.1s + 1}{s^2(s^2 + 0.1s + 2)}$,$P_2 = \dfrac{s^2 + 0.1s + 1.3}{s^2(s^2 + 0.1s + 3)}$,(Bode图如图1)谐振的中心频率分别为 $\omega_1 = \sqrt{1.4133 \times 0.9987} = 1.1880$,