$\omega_2 = \sqrt{1.7313 \times 1.1391} = 1.4043$, P_2 的谐振中心频率仅提高了 0.1821 倍，但间隔 $\delta(P_1, P_2) \geqslant 0.993$. 上述对象的最大鲁棒半径分别为

$$b_{opt}(P_1) = 0.4172, \ b_{opt}(P_2) = 0.4131.$$

可见两对象的间隔超出了最大鲁棒半径，故不能直接对上述对象进行基于间隔度量的鲁棒镇控制器设计.

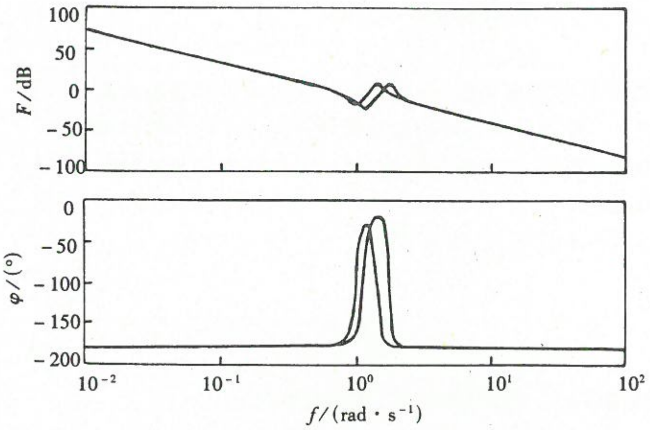

图 2　中频段谐振的频率摄动 Bode 图

Fig.2　Frequency perturbation Bode plot in mid-frequency band

(2)奇异情形的应用：在使下界接近于 1 的频率上，如果两个系统的幅值特性分别具有高增益(趋近于无穷大)和低增益(趋近于零)，这时系统的间隔比较大. 下面的两种情况最早曾由 Hsieh 和 Safonov 研究过[7]，本文则从更一般的观点来说明这种保守性的本质.

1)高增益系统虚轴上的零点摄动：在虚轴零点所对应的频率上，系统的增益为零，如果摄动系统增益足够大，便满足奇异情形，使下界接近 1.

例 2　设 $P_1\left(\left(\frac{s}{w_0}\right)^2 + 1\right)P_0(s)$, $P_2 = \left(\left(\frac{s}{w_0}\right)^2 + 1 + \frac{\varepsilon_1}{w_0}s + \frac{\varepsilon_2}{w_0}\right)P_0(s)$，其中 $P_0(jw_0) \neq 0$，ε_1 和 ε_2 为摄动参数. 于是，

$$\delta(P_1, P_2) \geqslant \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{w_0^2}} \cdot |P_0(jw_0)|}{\sqrt{1 + \left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{w_0^2}\right)|P_0(jw_0)|^2}}.$$

当 $|P_0(jw_0)| >> 1$ 时，对任意小的摄动，$\delta(P_1, P_2)$ 接近于 1，易于超出最大鲁棒半径以至于不能直接设计.

2)低增益系统虚轴上的极点摄动：在虚轴极点所对应的频率上，系统的增益为无穷大，如果摄动系统增益足够小，便满足奇异情形，使下界接近 1.

例 3　设 $P_1 = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{w_0}\right)^2 + 1\right)}P_0(s)$, $P_2 = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{w_0}\right)^2 + 1 + \frac{\varepsilon_1}{w_0}s + \frac{\varepsilon_2}{w_0}\right)}P_0(s)$，其中 $P_0(jw_0) \neq \infty$，ε_1 和 ε_2 为摄动参数. 于是

$$\delta(P_1, P_2) \geqslant \frac{\left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{w_0^2}\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{w_0^2}\right) + |P_0(jw_0)|^2}}.$$

当 $|P_0(jw_0)|$ 足够小时，对任意小的摄动，$\delta(P_1, P_2)$ 接近于 1，易于超出最大鲁棒半径以至于不能直接设计.

4　结论

为消除间隔度量的保守性对应用的影响，需要研究保守性条件的物理意义以便进行预补偿. 本文基于 SISO 系统间隔度量的一个下界，给出了该下界为 1 时的充要条件，以及对应的系统幅值特性和相位特性. 进一步地，以中频段谐振的频率摄动和虚轴零极点摄动为例，讨论了这两种情形在应用中的体现. 本文结论有助于推广间隔度量在鲁棒反馈镇定设计中的应用.

参考文献:

[1]　ZAMES G, EL-SAKKARY A K. Unstable systems and feedback: the gap metric[A]. Proc. 16th allerton Conf [C]. 1980.

[2]　ZHU S Q. Graph topology and gap topology for unstable systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 1989, 34: 848-855.

[3]　MACFARLANE D C, GLOVER K. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions [M]. Bearlin: Springer-Verlag, 1989. 138.

[4]　GEORGIOU T T, SMITH M C. Optimal robustness in the gap metric[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35: 673-686.

[5]　QIU L, DAVISION E J. Pointwise gap metrics on transfer matrices[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37: 741-758.

[6]　VINNICOMBE G. Feqeuency domain uncertainty and the graph topology[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38: 1371-1383.

[7]　HSIEH G C, SAFONOV M G. Conservatism of the gap metric[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38: 594-598.

(责任编辑：王小唯)