

的鲁棒半径为从 $[u_1, u_2]^T$ 到 $[e_1, e_2]^T$ 的传递函数 H_{∞} 范数的倒数:

$$b_{P,C} = \left\| \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} (I - CP)^{-1} (I, C) \right\|_{\infty}^{-1} \quad (1)$$

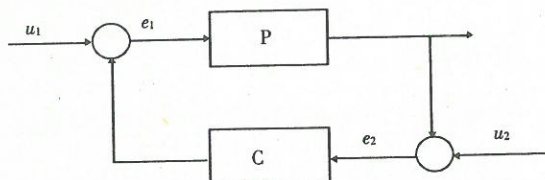


图1 标准反馈结构

Fig.1 Standard feedback structure

下面的定理表明了鲁棒半径的性质,也是用间隔度量进行鲁棒反馈镇定设计的依据,其作用相当于范数摄动鲁棒反馈镇定问题中的小增益定理.

定理^[4] 下述条件等价:

- (1) C 镇定 P , 且 $b \leq b_{P,C}$;
- (2) 对于任意满足下面条件的 C_1 和 P_1 , C_1 镇定 P_1 ;

$$\delta(P, P_1) + \delta(C, C_1) < b_{P,C}, \quad (2)$$

这里 $\delta(*, *)$ 表示系统的间隔. 式(2)表明对象和控制器的间隔度量摄动可同时被镇定. 对鲁棒半径 $b_{P,C}$ 的优化, 可获得最优鲁棒反馈镇定控制器:

$$b_{\text{opt}}(P) = \sup_{C \text{ 镇定 } P} (b_{P,C}),$$

其中 $0 \leq b_{\text{opt}} \leq 1$. 这个优化过程与规范互质分解摄动的鲁棒稳定性优化问题等价^[3,4].

应用中摄动的间隔可能超出最大鲁棒半径 b_{opt} , 这样就无法直接应用上述定理进行鲁棒反馈镇定设计, 这种情况被称为间隔度量的保守性. 因此需要研究间隔接近于最大值 1 时系统的结构特点, 以便预先加以补偿. 由于间隔度量不具有物理意义, 本文则通过考察其下界接近于 1 的情况来研究间隔接近 1 的充分条件, 得到的结果可通过 Bode 图反映出来, 适合于应用.

2 间隔度量下界极大的充要条件

对于 SISO 系统 P_1, P_2 , 其间隔 $\delta(P_1, P_2)$ 的一个下界为^[4]

$$l = \sup_{\omega} \frac{|P_1(j\omega) - P_2(j\omega)|}{\sqrt{1 + |P_1(j\omega)|^2} \sqrt{1 + |P_2(j\omega)|^2}},$$

其中 $0 \leq l \leq \delta(P_1, P_2) \leq 1$. 下面分两种情形讨论下界 l 等于最大值 1 的条件.

(1) 非奇异情形: 当 $\sup_{\omega} |P_i(j\omega)| \neq \infty$ 时, 设在频率 $\omega = \omega_0$ 处可使 $l = 1$, 则必有 $|P_i(j\omega_0)| \neq 0$,

记 $P_i(j\omega_0) = M_i e^{j\phi_i}$, M_i 和 ϕ_i 分别为第 i 个系统在 ω_0 处的幅值和相位, 于是有

$$l = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{|P_1(j\omega) - P_2(j\omega_0)|}{\sqrt{1 + |P_1(j\omega)|^2} \sqrt{1 + |P_2(j\omega)|^2}},$$

$$M_i \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow (M_1 \cos \phi_1 - M_2 \cos \phi_2)^2 + (M_1 \sin \phi_1 - M_2 \sin \phi_2)^2 = 1 + M_1^2 + M_2^2 + M_1^2 M_2^2,$$

$$\Leftrightarrow M_2^2 \left(M_1 \cos \phi_1 + \frac{M_2 \cos \phi_2}{M_2^2} \right)^2 +$$

$$\left(M_1 \sin \phi_1 + \frac{M_2 \sin \phi_2}{M_2^2} \right)^2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow P_1(j\omega_0) \cdot P_2(j\omega_0) = -1,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20 \log M_1 = -20 \log M_2, \\ \phi_1 + \phi_2 = (2k+1)\pi, k \text{ 为任意整数.} \end{cases}$$

上式表明在使下界 $l = 1$ 的频率上, 两系统的幅值特性按零分贝线对称, 相位和为 180° 的奇数倍, 分别称之为非奇异情形的幅值条件和相位条件;

(2) 奇异情形: 当两系统其一 $\sup_{\omega} |P_i(j\omega)| = \infty$ 成立时, 不妨设 $|P_1(j\omega)|_{\omega \rightarrow \omega_1} \rightarrow \infty$, 若在 ω_1 点达到式(1)上确界, 则有

$$|P_2(j\omega_1)| = 0.$$

同理可知 $\sup_{\omega} |P_2(j\omega)| = \infty$ 时的结果. 可以看到, 奇异情形对系统的相位没有要求, 只要在某频率上, 当一系统的幅值为无穷大, 另一系统幅值为零时, 便有下列 $l = 1$.

3 应用中的保守性研究

在应用中, 只需考察摄动间隔接近 1 的情况, 这时间隔易于超出最大鲁棒半径以至于不能直接用式(2)设计. 下面两种情形分别讨论下界 l 接近于 1 的情形.

(1) 非奇异情形的应用: 一般地, 系统在剪切频率附近的增益微小摄动很容易使幅值特性按零分贝线对称, 从而满足非奇异情形的幅值条件, 因此相位条件是决定这种保守性的关键.

中频段谐振的频率摄动: 这时对象的谐振频率与剪切频率相近, 由于谐振频率附近的相位变化很大, 因此微小摄动容易满足非奇异情形的相位条件, 使下界 l 的值很大. 如下例.

例 1 设 $P_1 = \frac{s^2 + 0.1s + 1}{s^2(s^2 + 0.1s + 2)}$, $P_2 = \frac{s^2 + 0.1s + 1.3}{s^2(s^2 + 0.1s + 3)}$, (Bode 图如图 1) 谐振的中心频率分别为 $\omega_1 = \sqrt{1.4133 \times 0.9987} = 1.1880$,

$\omega_2 = \sqrt{1.7313 \times 1.1391} = 1.4043$, P_2 的谐振中心频率仅提高了 0.1821 倍, 但间隔 $\delta(P_1, P_2) \geq 0.993$. 上述对象的最大鲁棒半径分别为

$$b_{\text{opt}}(P_1) = 0.4172, \quad b_{\text{opt}}(P_2) = 0.4131.$$

可见两对象的间隔超出了最大鲁棒半径, 故不能直接对上述对象进行基于间隔度量的鲁棒镇控制器设计.

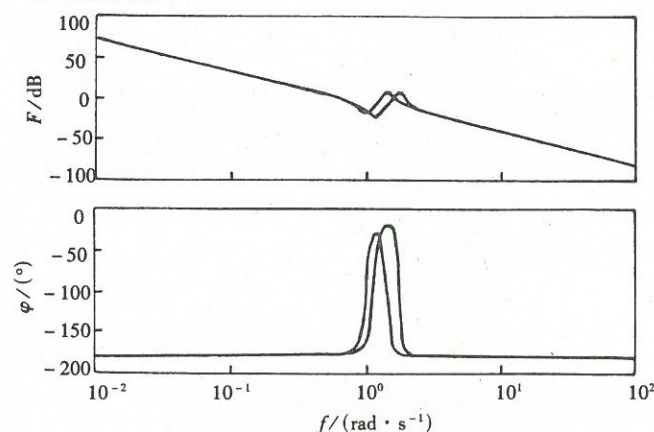


图2 中频段谐振的频率摄动 Bode 图

Fig.2 Frequency perturbation Bode plot in mid-frequency band

(2) 奇异情形的应用: 在使下界接近于 1 的频率上, 如果两个系统的幅值特性分别具有高增益(趋近于无穷大)和低增益(趋近于零), 这时系统的间隔比较大. 下面的两种情况最早曾由 Hsieh 和 Safonov 研究过^[7], 本文则从更一般的观点来说明这种保守性的本质.

1) 高增益系统虚轴上的零点摄动: 在虚轴零点所对应的频率上, 系统的增益为零, 如果摄动系统增益足够大, 便满足奇异情形, 使下界接近 1.

例 2 设 $P_1 = \left(\left(\frac{s}{w_0} \right)^2 + 1 \right) P_0(s)$, $P_2 = \left(\left(\frac{s}{w_0} \right)^2 + 1 + \frac{\epsilon_1}{w_0} s + \frac{\epsilon_2}{w_0^2} \right) P_0(s)$, 其中 $P_0(jw_0) \neq 0$, ϵ_1 和 ϵ_2 为摄动参数. 于是,

$$\delta(P_1, P_2) \geq \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 + \frac{\epsilon_2^2}{w_0^2}} \cdot |P_0(jw_0)|}{\sqrt{1 + \left(\epsilon_1^2 + \frac{\epsilon_2^2}{w_0^2} \right) |P_0(jw_0)|^2}}.$$

当 $|P_0(jw_0)| \gg 1$ 时, 对任意小的摄动, $\delta(P_1, P_2)$ 接近于 1, 易于超出最大鲁棒半径以至于不能直接设计.

2) 低增益系统虚轴上的极点摄动: 在虚轴极点所对应的频率上, 系统的增益为无穷大, 如果摄动系统增益足够小, 便满足奇异情形, 使下界接近 1.

例 3 设 $P_1 = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{w_0} \right)^2 + 1 \right) P_0(s)}$, $P_2 = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{w_0} \right)^2 + 1 + \frac{\epsilon_1}{w_0} s + \frac{\epsilon_2}{w_0^2} \right) P_0(s)}$, 其中 $P_0(jw_0) \neq \infty$, ϵ_1 和 ϵ_2 为摄动参数. 于是

$$\delta(P_1, P_2) \geq \frac{\left(\epsilon_1^2 + \frac{\epsilon_2^2}{w_0^2} \right)}{\sqrt{\left(\epsilon_1^2 + \frac{\epsilon_2^2}{w_0^2} \right) + |P_0(jw_0)|^2}}.$$

当 $|P_0(jw_0)|$ 足够小时, 对任意小的摄动, $\delta(P_1, P_2)$ 接近于 1, 易于超出最大鲁棒半径以至于不能直接设计.

4 结论

为消除间隔度量的保守性对应用的影响, 需要研究保守性条件的物理意义以便进行预补偿. 本文基于 SISO 系统间隔度量的一个下界, 给出了该下界为 1 时的充要条件, 以及对应的系统幅值特性和相位特性. 进一步地, 以中频段谐振的频率摄动和虚轴零点摄动为例, 讨论了这两种情形在应用中的体现. 本文结论有助于推广间隔度量在鲁棒反馈镇定设计中的应用.

参考文献:

- [1] ZAMES G, EL-SAKKARY A K. Unstable systems and feedback: the gap metric[A]. Proc. 16th allerton Conf [C]. 1980.
- [2] ZHU S Q. Graph topology and gap topology for unstable systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 1989, 34: 848-855.
- [3] MACFARLANE D C, GLOVER K. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 138.
- [4] GEORGIU T T, SMITH M C. Optimal robustness in the gap metric[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35: 673-686.
- [5] QIU L, DAVISION E J. Pointwise gap metrics on transfer matrices[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37: 741-758.
- [6] VINNICOMBE G. Frequency domain uncertainty and the graph topology[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38: 1371-1383.
- [7] HSIEH G C, SAFONOV M G. Conservatism of the gap metric[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38: 594-598.

(责任编辑: 王小唯)