PRÁCTICA DE MÉTODOS DE CÁLCULO NUMÉRICOS

REALIZADA POR:

Jesús Ángel Pérez-Roca Fernández (infjpf02)
José Antonio Pereira Suárez (infjps00)

Ecuación del péndulo

El problema consiste en encontrar y tal que ly''+ky'+gsen(y)=0, teniendo como condiciones iniciales $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$. Esta es una ecuación no lineal de 2º orden que habría que resolver por métodos numéricos(por ejemplo, por Euler explícito).

Se puede hacer una aproximación de sen(y) por y, usando para ello el desarrollo de Taylor en torno a y=0, para sen(y):
$sen(y) = sen\ 0 + cos\ 0\ (y/1!) - sen\ 0\ (y^2/2!) - cos\ 0\ (y^3/3!) + ... \Rightarrow sen(y) \approx y$

Por lo tanto la ecuación queda así: ly''+ky'+gy=0 , con $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$.

Esta aproximación es buena para valores iniciales pequeños, como se compobará posteriormente en los casos de prueba.

Para el caso lineal se calcularán las soluciones usando tanto la solución exacta, como usando los métodos numericos de Euler explícito y del Trapecio.

Para calcular la solución exacta hay que contemplar los siguientes casos:

1. Si k = 0, se calcula de la siguiente forma:

r_1=sqrt(-g/l)
r_2=-sqrt(-g/l)
$c_1=y_0$
$c_2=y_0'$/sqrt(g/l)
w_0=sqrt(g/l)
R=sqrt($c_1^2+c_2^2$)
phi=acos(c_1/sqrt($c_1^2+c_2^2$))
x(t)=R*(cos(w_0*t-phi))

Siendo r1 y r2 dos raíces imaginarias.

2. Si $k^2 = 4gl$, se calcula así:

r=(-k/2*l)
$c_1=y_0$
$c_2=y_0'$+(k/2*l)*c_1
x(t)=c_1*e^{r*t} + c_2*t*e^{r*t}

En este caso, r es una raíz doble.

3. Si $k^2 > 4gl$, se calcula así:

r_1=(-k+sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
r_2=(-k-sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
c_2=(y_0'-r_1*y_0)/(r_2-r_1)
c_1=y_0-c2
x(t)=c_1*e^{r1*t} + c_2*e^{r2*t}

En este caso, las raíces r1 y r2 son reales.

4. Por último, si $k^2 < 4gl$, entonces la solución se calcula así:

r_1=(-k+sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
r_2=(-k-sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
c_1=y_0
c_2=(y_0'*2*l+k*y_0)/sqrt(4*l*g-k^2)
w_0=sqrt(4*l*g-k^2)/(2*l)
R=sqrt(c_1^2+c_2^2)
phi=acos(c_1/sqrt(c_1^2+c_2^2))
x(t)=R*$e^{(-k*t)/(2*l)}$ * cos(w_0*t-phi)

En este caso, r1 y r2 son raíces complejas.

Fichero principal (p1.m)

```
clear all
disp('Practica 1 de MCN')
disp('')
disp('1. Pendulo lineal solucion exacta')
disp('2. Pendulo lineal euler explicito')
disp('3. Pendulo lineal metodo trapecio')
disp('4. Pendulo no lineal euler explicito')
disp('5. Comprobacion no lineal tiende a lineal')
disp('')
opcion = input('Elige una opcion: ')
if (opcion==1)
   disp('')
   disp('ly''''+ky''+gy=0, y(0)=y0, y''(0)=y''0')
   disp('')
   l=input('Introduce el valor de l: ')
   k=input('Introduce el valor de k: ')
   g=input('Introduce el valor de g: ')
   t0=input('Introduce el valor de y0: ')
   v0=input('Introduce el valor de y''0: ')
   N=input('Introduce el numero de puntos en que toma valores la funcion y: ')
   b=input('Introduce el extremo final del intervalo: ');
   h=b/(N+1);
   puntos=[0:h:b];
   x=pen_lin_ex(l,k,g,t0,v0,N,b);
   figure;
   plot(puntos,x);
   title('Pendulo lineal solucion exacta');
elseif(opcion==2)
   disp('')
   disp('ly''''+ky''+gy=0, y(0)=y0, y''(0)=y''0')
   disp('')
   l=input('Introduce el valor de l: ')
   k=input('Introduce el valor de k: ')
   g=input('Introduce el valor de g: ')
   t0=input('Introduce el valor de y0: ')
   v0=input('Introduce el valor de y''0: ')
   N=input('Introduce el numero de puntos en que toma valores la funcion y: ')
   b=input('Introduce el extremo final del intervalo: ');
   h=b/(N+1);
   puntos=[0:h:b];
   Z=pen_lin_ee(l,k,g,t0,v0,N,b,h);
   figure;
   plot(puntos,Z(1,:));
   title('Pendulo lineal euler explicito');
elseif(opcion==3)
   disp('')
   disp('ly''''+ky''+gy=0, y(0)=y0, y''(0)=y''0')
   disp('')
   l=input('Introduce el valor de l: ')
```

```
    k=input('Introduce el valor de k: ')
    g=input('Introduce el valor de g: ')
    t0=input('Introduce el valor de y0: ')
    v0=input('Introduce el valor de y''0: ')
    N=input('Introduce el numero de puntos en que toma valores la funcion y: ')
    b=input('Introduce el extremo final del intervalo: ');
    h=b/(N+1);
    puntos=[0:h:b];
    Z=pen_lin_trap(l,k,g,t0,v0,N,b,h);
    figure;
    plot(puntos,Z(1,:));
    title('Pendulo lineal metodo trapecio');
elseif(opcion==4)
    disp('')
    disp('ly''''+ky''+gsen(y)=0, y(0)=y0, y''(0)=y''0')
    disp('')
    l=input('Introduce el valor de l: ')
    k=input('Introduce el valor de k: ')
    g=input('Introduce el valor de g: ')
    t0=input('Introduce el valor de y0: ')
    v0=input('Introduce el valor de y''0: ')
    N=input('Introduce el numero de puntos en que toma valores la funcion y: ')
    b=input('Introduce el extremo final del intervalo: ');
    h=b/(N+1);
    puntos=[0:h:b];
    Z=pen_nolin_ee(l,k,g,t0,v0,N,b,h);
    figure;
    plot(puntos,Z(1,:));
    title('Pendulo no lineal euler explicito');
else
    disp('')
    l=input('Introduce el valor de l: ')
    k=input('Introduce el valor de k: ')
    g=input('Introduce el valor de g: ')
    t0=input('Introduce el valor de y0: ')
    v0=input('Introduce el valor de y''0: ')
    N=input('Introduce el numero de puntos en que toma valores la funcion y: ')
    b=input('Introduce el extremo final del intervalo: ');
    h=b/(N+1);
    puntos=[0:h:b];
    Z1=pen_lin_ee(l,k,g,t0,v0,N,b,h);
    Z2=pen_nolin_ee(l,k,g,t0,v0,N,b,h);
    figure;
    plot(puntos,Z1(1,:),'r');
    hold on;
    plot(puntos,Z2(1,:),'b');
    hold off;
    title('Solucion lineal en rojo y solucion no lineal en azul');
end
```

Péndulo lineal Solución exacta

```
function x =pen_lin_ex(l,k,g,t0,v0,N,b)
h=b/(N+1);
puntos=[0:h:b];
num_puntos=length(puntos);
x(1)=0;
if (k==0)
   r1=sqrt(-g/l)
   r2=-sqrt(-g/l)
   c1=t0
   c2=v0/sqrt(g/l)
   w0=sqrt(g/l)
   R=sqrt(c1^2+c2^2)
   if (c1==0)
      if (c2==0)
         x=0
      end
   else
      phi=acos(c1/sqrt(c1^2+c2^2))
      for I = 2:num_puntos
         x(I)=R*(cos(w0*puntos(I)-phi));
      end
   end
elseif (k^2==4*g*l)
   r=(-k/2*l)
   c1=t0
   c2=v0+(k/2*l)*c1
   for I = 2:num_puntos
      x(I)=c1*exp(r*puntos(I))+c2*puntos(I)*exp(r*puntos(I));
   end
elseif (k^2>4*g*l)
   r1=(-k+sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
   r2=(-k-sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
   c2=(v0-r1*t0)/(r2-r1)
   c1=t0-c2
   for I = 2:num_puntos
      x(I)=c1*exp(r1*puntos(I))+c2*exp(r2*puntos(I));
   end
else
   r1=(-k+sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
   r2=(-k-sqrt(k^2-4*g*l))/(2*l)
   c1=t0
   c2=(v0*2*l+k*t0)/sqrt(4*l*g-k^2)
   w0=sqrt(4*l*g-k^2)/(2*l)
   R=sqrt(c1^2+c2^2)
   if (c1==0)
      if (c2==0)
         x=0
      end
   else
```

```
        phi=acos(c1/sqrt(c1^2+c2^2))
        for I = 2:num_puntos
            x(I)=R*exp((-k*puntos(I))/(2*l))*cos(w0*puntos(I)-phi);
        end
    end
end
```

Péndulo lineal Euler explícito

```
function Z=pen_lin_ee(l,k,g,t0,v0,N,b,h)
z1(1)=t0
z2(1)=v0
Z=[z1; z2]
puntos=[0:h:b];
num_puntos=length(puntos);
for I = 2:num_puntos
    f1(I-1)=z2(I-1);
    f2(I-1)=(1/l)*(-g*z1(I-1)-k*z2(I-1));
    z1(I)=z1(I-1)+h*f1(I-1);
    z2(I)=z2(I-1)+h*f2(I-1);
end
Z=[z1 ; z2]
end
```

Péndulo lineal Método trapecio

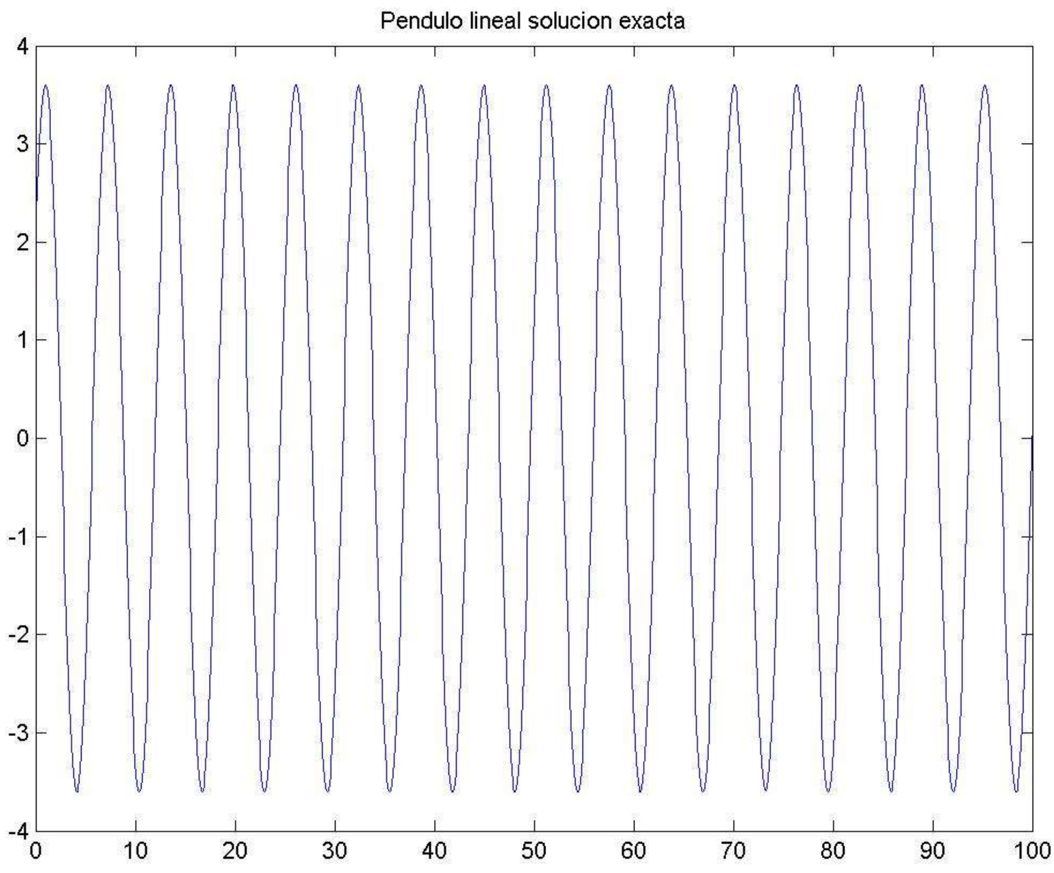
```
function Z=pen_lin_trap(l,k,g,t0,v0,N,b,h)
z1(1)=t0
z2(1)=v0
Z=[z1; z2]
puntos=[0:h:b];
num_puntos=length(puntos);
for I = 2:num_puntos
    z2(I)=((1-((h*k)/2*l)-((g*h^2)/4*l))*z2(I-1)-(((h*g)/2*l)+((g*h)/2*l))*z1(I-1))/(1+((k*h)/2*l)+
((g*h^2)/4*l));
    z1(I)=z1(I-1)+(h/2)*(z2(I-1)+z2(I));
end
Z=[z1 ; z2]
end
```

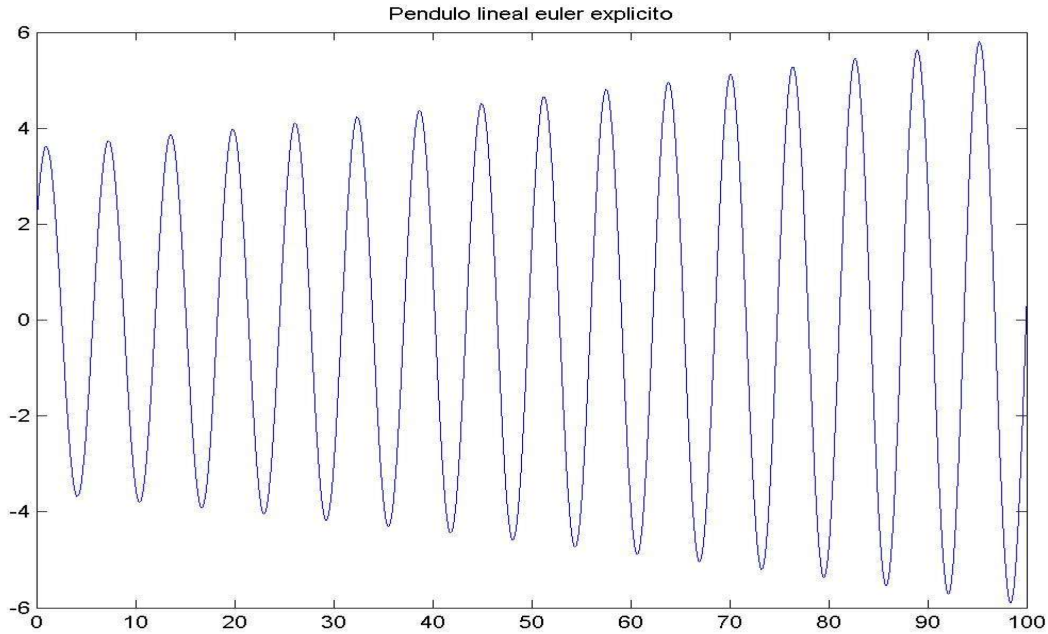
Péndulo no lineal Euler explícito

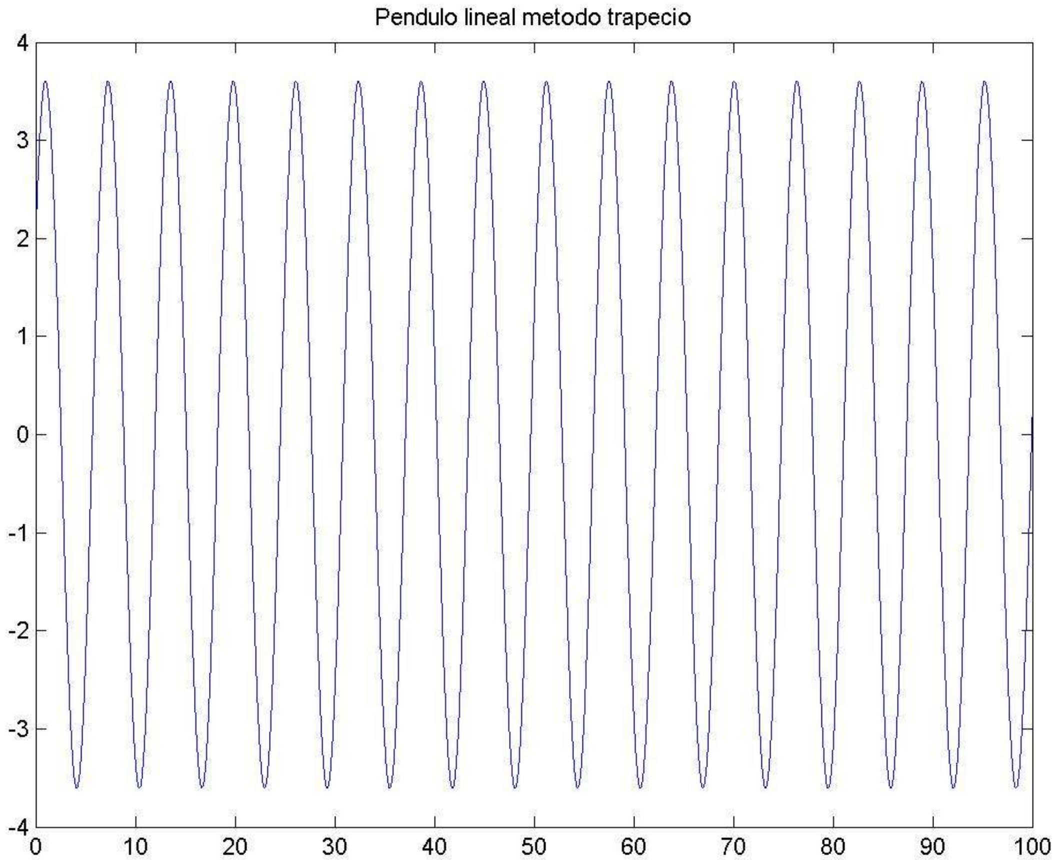
```
function Z=pen_nolin_ee(l,k,g,t0,v0,N,b,h)
z1(1)=t0
z2(1)=v0
Z=[z1; z2]
puntos=[0:h:b];
num_puntos=length(puntos);
for I = 2:num_puntos
   f1(I-1)=z2(I-1);
   f2(I-1)=(1/l)*(-g*sin(z1(I-1))-k*z2(I-1));
   z1(I)=z1(I-1)+h*f1(I-1);
   z2(I)=z2(I-1)+h*f2(I-1);
end
Z=[z1 ; z2]
end
```

CASOS DE PRUEBA

1. y''+y=0, y(0)=2, y'(0)=3, N=1000

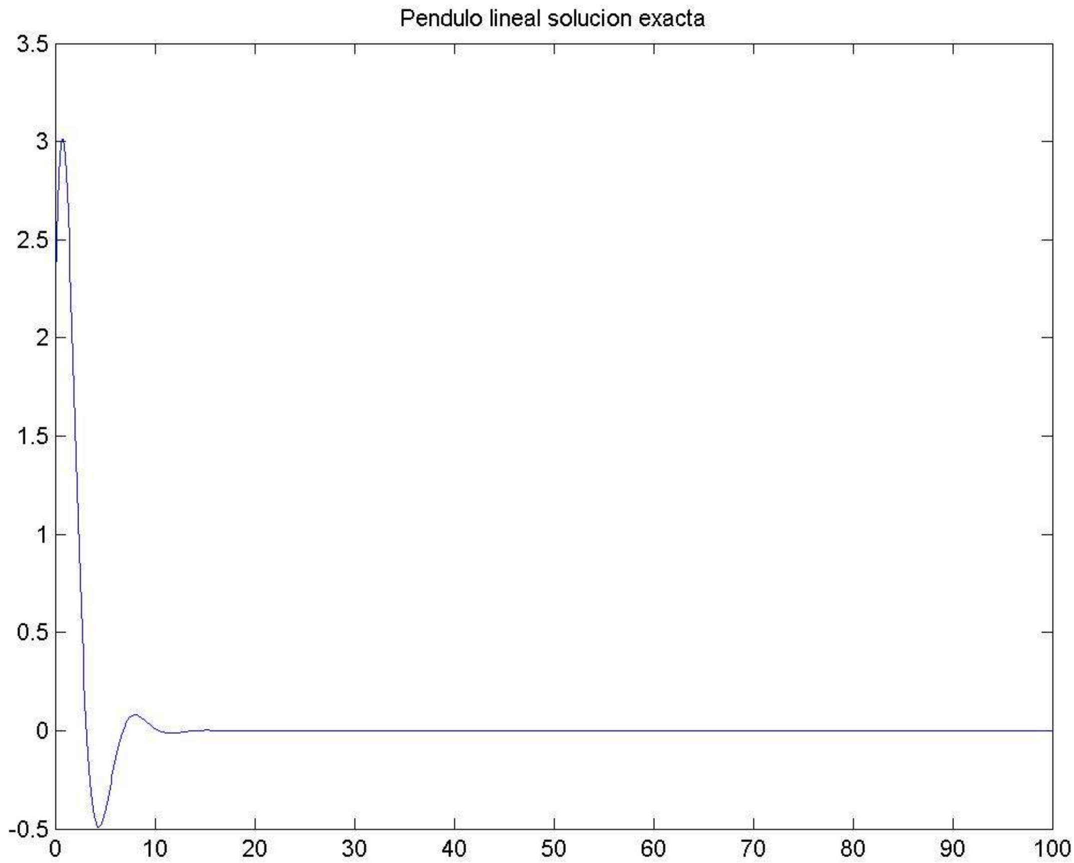


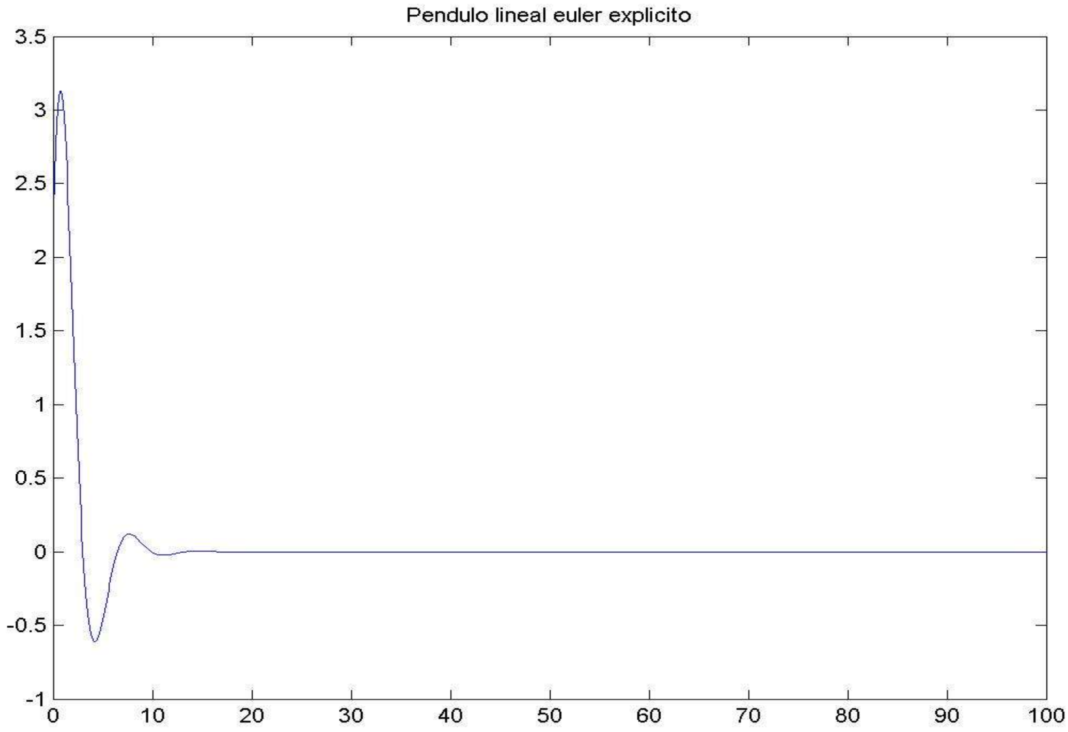

Pendulo lineal euler explicito
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

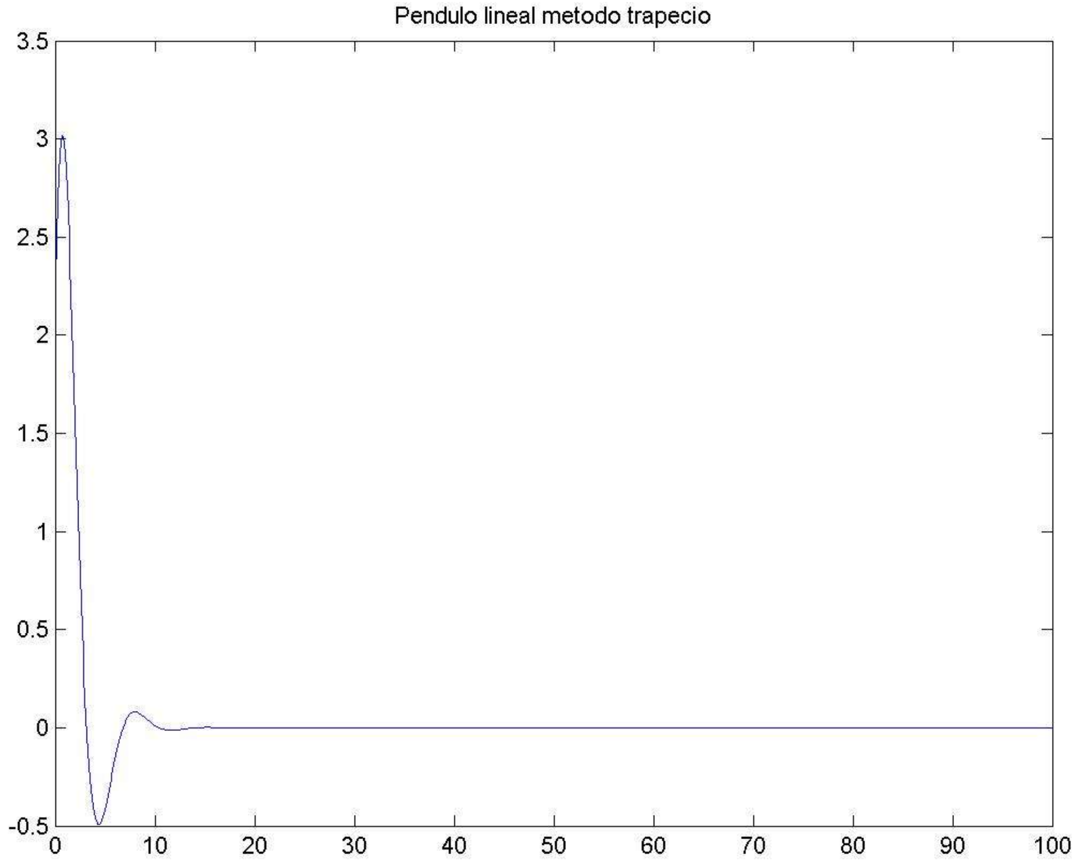

Pendulo lineal metodo trapecio
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

NOTA: Para el caso de euler explícito se usaron 10000 puntos en lugar de 1000 para mejorar la aproximacion a la solución exacta.

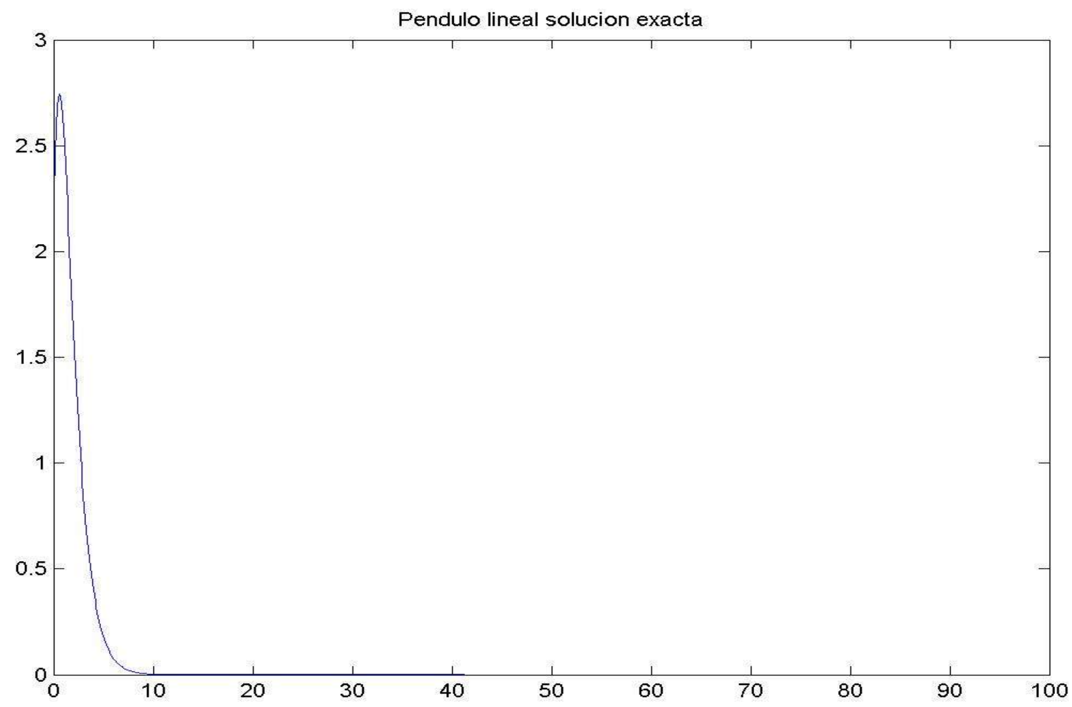
2. $y''+y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$, $N=1000$

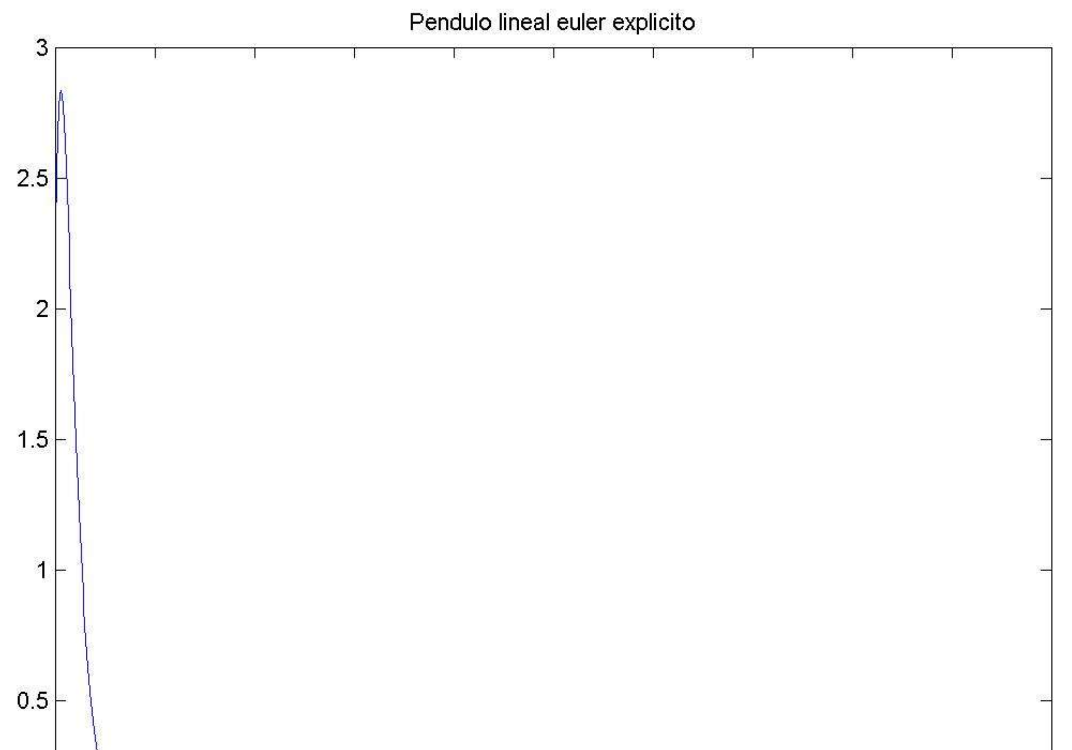


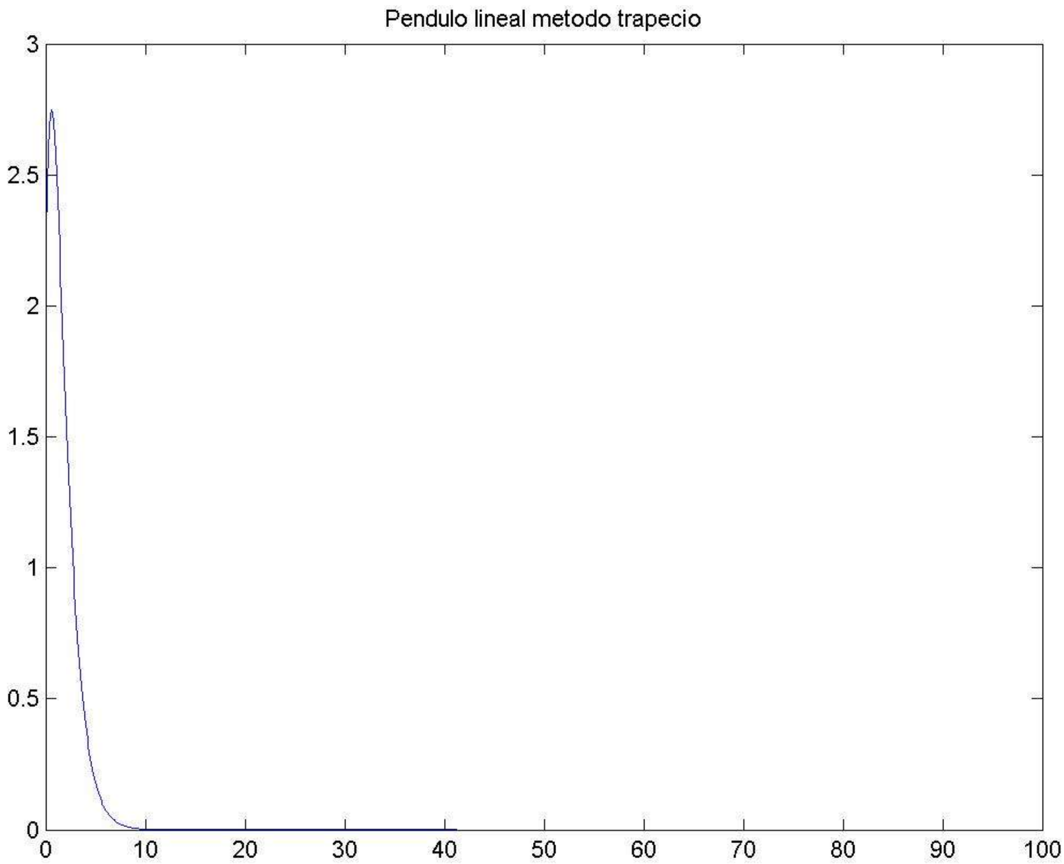

Pendulo lineal euler explicito
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


Pendulo lineal metodo trapecio
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

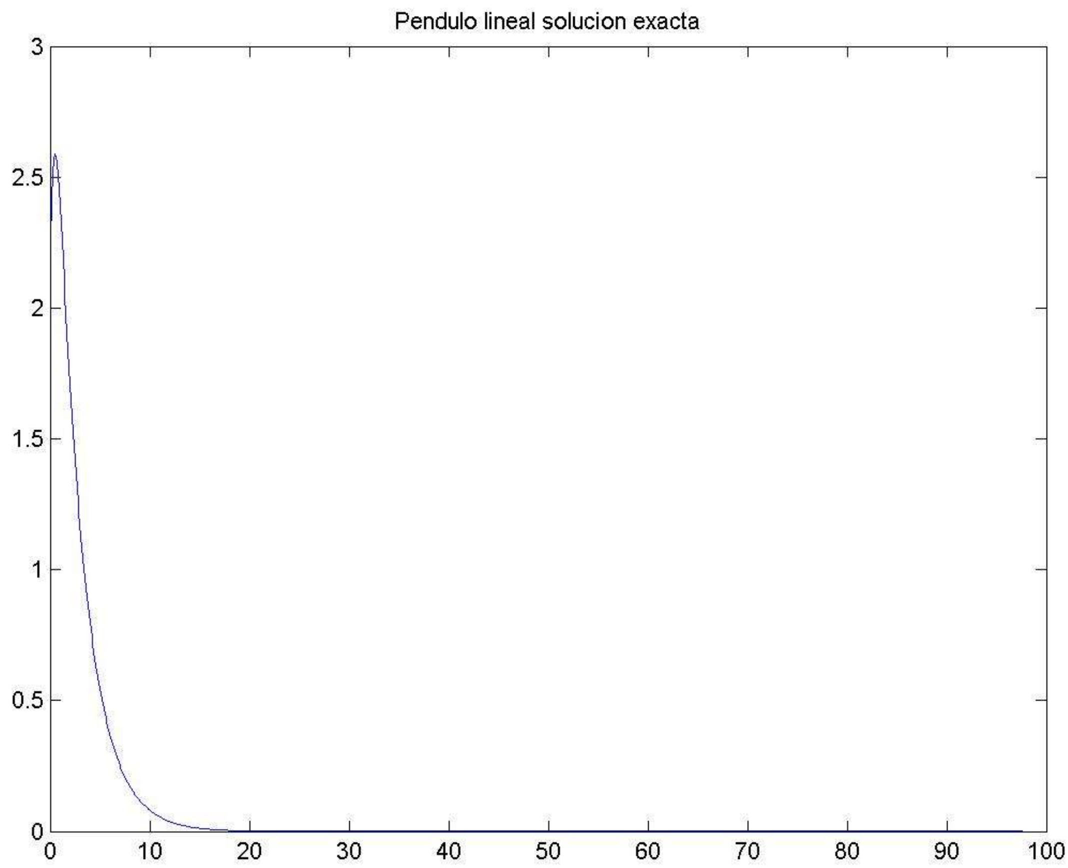
3. y''+2y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=3, N=1000

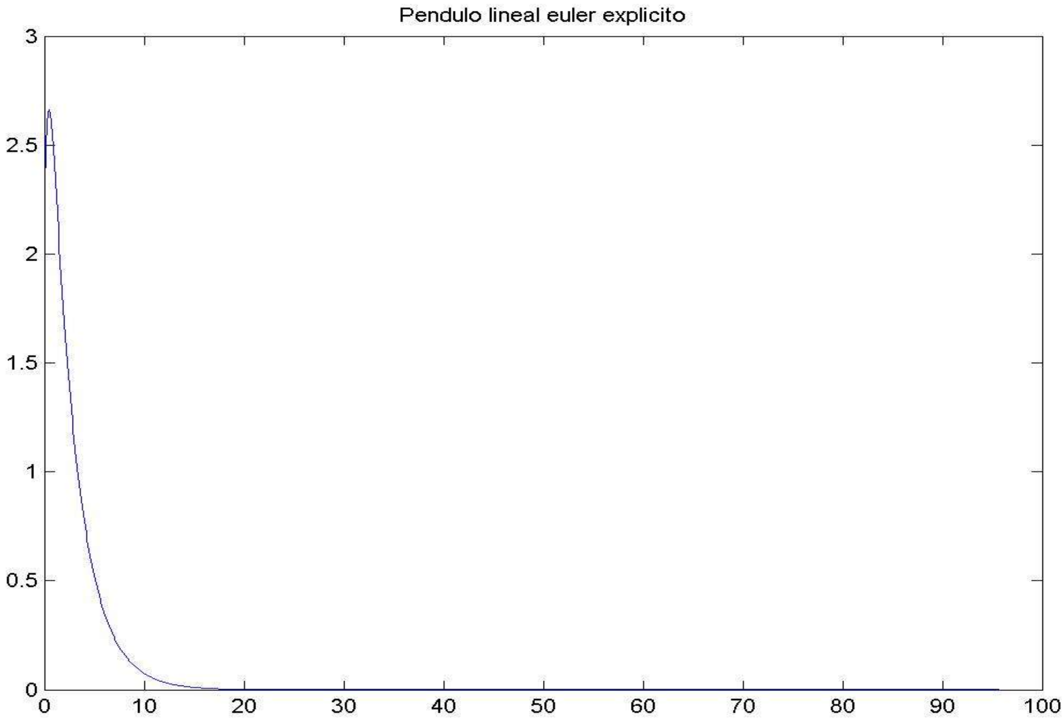


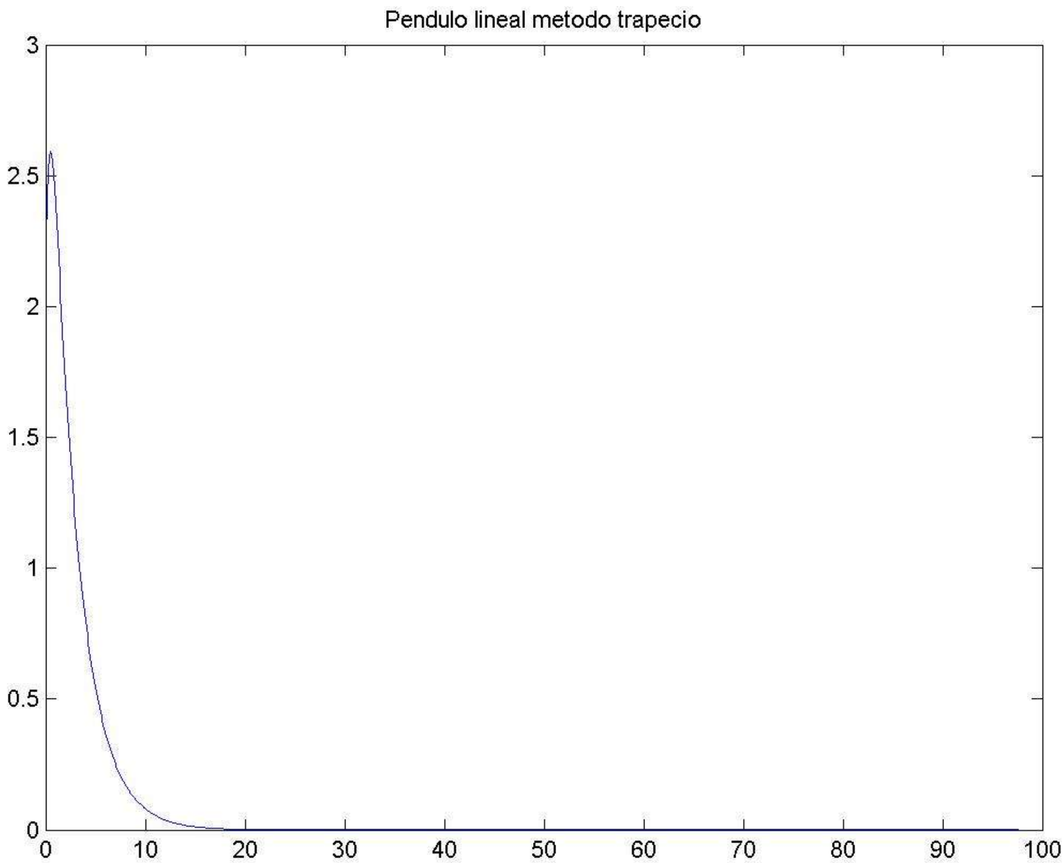



Pendulo lineal metodo trapecio
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

4. y''+3y'+y=0, y(0)=0, y'(0)=0, N=1000

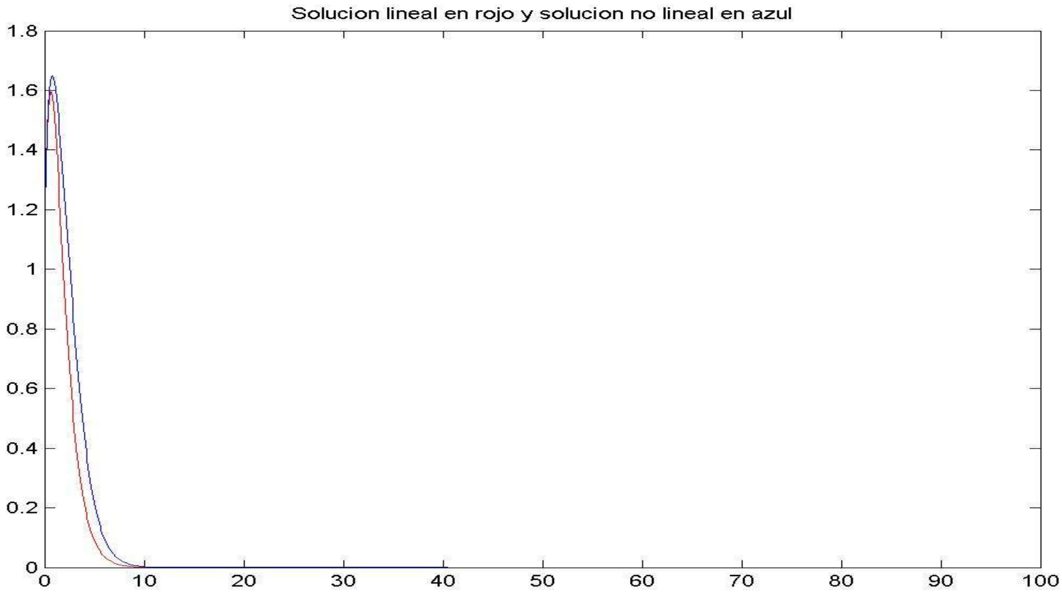



Pendulo lineal euler explicito
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


Pendulo lineal metodo trapecio
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

5. Comparación pendulo lineal y no lineal

- **$y''+2y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $N=1000$**



- $y''+2y'+y=0,\ y(0)=0.5,\ y'(0)=0.7,\ N=1000$