

4. Aşağıdaki belirsiz integralleri bulunuz.

(a) $\int \sqrt{1+\sin(x)} \cos(x) dx$ [10 PUAN]

Değişken değiştirme:

$$1+\sin x = u$$

$$\cos x dx = du$$

$$\int \sqrt{1+\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1+\sin x)^{3/2} + C$$

(b) $\int x^{103} \ln(x) dx$ [10 PUAN]

Kısmi integrasyon:

$$u = \ln x \quad dv = x^{103} dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^{104}}{104}$$

$$\begin{aligned} \int x^{103} \ln x dx &= uv - \int v du \\ &= \frac{x^{104}}{104} \ln x - \int \frac{x^{104}}{104} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^{104}}{104} \ln x - \frac{1}{104} \int x^{103} dx \\ &= \frac{x^{104}}{104} \ln x - \frac{1}{104^2} x^{104} + C \end{aligned}$$

(c) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)} dx$ [10 PUAN]

Basit kesirlere ayırma:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 \\ &= (A+C)x^2 + (A+B)x + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A+C &= 1 \\ A+B &= 1 \\ B &= 1 \end{aligned} \Rightarrow A=0, B=1, C=1 \Rightarrow \int \frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)} dx = \int \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \ln|x+1| + C$$



TOBB-ETÜ. MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2019-2020 GÜZ DÖNEMİ
MAT 103, GENEL MATEMATİK I, FİNAL
28 KASIM 2019

Adı Soyadı: Zehi Çalışkan

No: 3,14159265

İMZA:

1. (25 p.)	2. (20 p.)	3. (25 p.)	4. (30 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1}$ [12 PUAN]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{-\sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{-\cos x} \stackrel{L'Hospital}{=} \frac{1}{-1} = -1$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 + 1]^{1/x^2}$ [13 PUAN]

1^∞ belirsizliği

$$y = (x^2 + 1)^{1/x^2}$$

$$\ln y = \ln (x^2 + 1)^{1/x^2} = \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + 1) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{1/x^2} = e$$

2. (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 103$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini hesaplayınız. [10 PUAN]

$[0, 3]$ aralığının uç noktalarını ve bu aralıkta türevi sıfır yapan noktaları dikkate almalıyız.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x=2 \in [0, 3] \\ x=-1 \notin [0, 3]$$

$$f(0) = 103 \rightarrow \text{mutlak max}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 103 = 83 \rightarrow \text{mutlak min}$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 103 = 94$$

- (b) Kâr amacı gütmeyen bir üniversite, kayıt yaptıran x bin öğrenciden $G(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 65$ TL gelir

sağlayacağını öngörürken, bu öğrencilerin eğitimi ve yaşam koşulları için en az $M(x) = 40 \ln(x+1)$ TL yatırım yapması gerektiğini planlamaktadır. Bu üniversite amacına uygun bir eğitim vermesi için kaç öğrenci kontenjanı açmalıdır ve bu durumda kaç TL kâr elde eder? [10 PUAN]

$$\text{Kâr fonksiyonu } K(x) = G(x) - M(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 65 - 40 \ln(x+1), x \in [0, \infty)$$

$$K'(x) = x + 4 - \frac{40}{x+1} = \frac{x^2 + x + 4x + 4 - 40}{x+1} = \frac{x^2 + 5x - 36}{x+1} = \frac{(x+9)(x-4)}{x+1}$$

$$K'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+9)(x-4)}{x+1} = 0 \Rightarrow x=4 \in [0, \infty) \\ x=-9 \notin [0, \infty)$$

	0	4	
$K'(x)$	-	+	
$K(x)$	\searrow	\nearrow	
	65	89-40ln5	

Amacına uygun olması için kârı en az almalı. Bu da tablodan görüldüğü üzere $x=4$ 'te elde edilir. Demek ki bu üniversite 4000 öğrenci kontenjanı açmalı, bu durumda $K(4) = 89 - 40 \ln 5$ bin TL kâr elde eder.
 $\approx 24,6225$ bin TL

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ fonksiyonun

- (a) Tanım kümesini, eksenleri kestiği noktaları ve asimptotlarını bulunuz. [5 PUAN]

$$T.K = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \quad (0, -\frac{1}{2})$$

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}=0 \Rightarrow x=-1 \quad (-1, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ yatay as.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-2} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ yatay as.}$$

$$x=2 \text{ dikey as.}$$

- (b) Varsa kritik noktalarını ve artan-azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. [5 PUAN]

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2} \neq 0 \text{ kritik nokta yok.}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0 \text{ olduğundan } \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) \text{ aralığında azalan}$$

- (c) Varsa büküm noktalarını bulunuz ve konkav-konveks olduğu aralıkları belirleyiniz. [5 PUAN]

$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3} \neq 0 \text{ büküm noktası yok}$$

$$f''(x) \begin{cases} - & + \\ \cap & \cup \end{cases} \Rightarrow (-\infty, 2) \text{ de konkav, } (2, \infty) \text{ de konveks}$$

- (d) Yukarıdaki tüm durumları içeren işaret değişim tablosunu oluşturunuz. [5 PUAN]

	2	
$f''(x)$	-	+
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	\nearrow	\searrow
	1	-∞ +∞

- (e) İşaret değişim tablosundan yararlanarak grafiğini çiziniz. [5 PUAN]

