5. $f(x) = \dfrac{x-9}{2x-6}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre

(a) Tanım Kümesi

$T.K_f = \mathbb{R} - \{3\}$

(b) Eksenleri Kestidiği Noktalar ve Asimtotlar

$x=0$ için $y=\frac{3}{2}$

$y=0$ için $x=9$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x-9}{2x-6} = \frac{1}{2}$ olup yatay asimtot $y=\frac{1}{2}$ doğrusudur.

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-9}{2x-6} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-9}{2x-6} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$

$\Big\}$ $x=3$ Düşey Asimtottur.

(c) Ekstremum Noktaları, Artan/Azalan Aralıklar

$$f'(x) = \frac{1.(2x-6)-(x-9)2}{(2x-6)^2} = \frac{\cancel{2x}-6-\cancel{2x}+18}{(2x-6)^2} = \frac{12}{(2x-6)^2} > 0$$

olduğundan fonksiyon tanım kümesindeki her x değeri için artandır.

(d) Büküm Noktası, Konkavlık

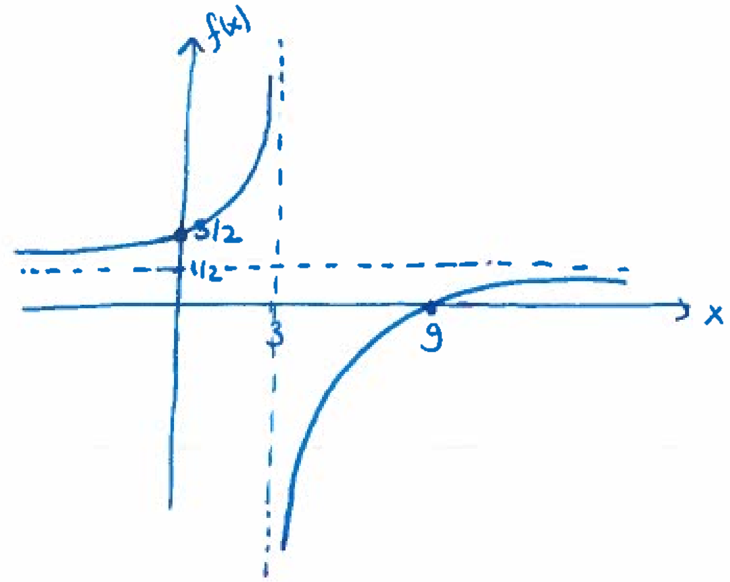
$$f''(x) = \frac{0-2.(2x-6).2.12}{(2x-6)^4} = \frac{-48}{(2x-6)^3}$$

	3	
+		−
∪		∩

$(-\infty,3)$ aralığında yukarı konkav, $(3,\infty)$ aralığında aşağı konkavdır.

(e) Grafiği çiziniz.

		3	
f'	↗ +		+ ↗
f''	∪ +		− ∩



TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2018-2019 BAHAR DÖNEMİ
MAT 103, GENEL MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
2 NİSAN 2019

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (30p.)	2. (10 p.)	3. (15 p.)	4. (20 p.)	5. (25 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 120 dakikadır. Başarılar.

1. Aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to(-1)} \dfrac{x|x+1|}{x+1}$

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x.\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to(-1)^+} x = -1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x.-\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to(-1)^-} -x = 1$$

$\Big\rangle$ sağ ve sol limit birbirine eşit olmadığından limit yoktur.

(b) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x-1})$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x+1)-(e^x-1)}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}}$$

$$= \frac{2}{\infty} = 0$$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{101x} - 3^{-x}}{3^{101x} + 3^{-x}}$ $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{3^{-x}}(3^{102x}-1)}{\cancel{3^{-x}}(3^{102x}+1)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^{102x}-1}{3^{102x}+1}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3^{102x}.102.\ln 3}}{\cancel{3^{102x}.102.\ln 3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1$$

$$= 1$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x < 1, \\ \sqrt{x} + b, & x \geq 1, \end{cases}$ fonksiyonunun her yerde türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?

Fonksiyon her yerde türevlenebilir ise her noktada sürekli olmalıdır. $x=1$ noktasındaki süreklilik için $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ olmalıdır.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} + b = 1+b$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+ax) = 1+a$

$\cancel{1}+b = \cancel{1}+a \quad \boxed{b=a}$

$x=1$ noktasındaki sağ ve sol türevin eşit olması gerektiğinden;

$f'_+(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$

$f'_-(x) = 2x + a\Big|_{x=1} = 2+a$

$2+a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{-3}{2}$ bulunur. $b = a = \frac{-3}{2}$ dir.

3. Bir şirket her yıl tanesi p TL' den x adet kalem satmaktadır. Fiyat-talep denklemi $p = 10 - (0,002)x$ dir. Şirket maksimum gelir elde edebilmek için kalemlerin tanesini kaç TL'den satmalıdır? Kaç tane kalem satıldığında maksimum gelir elde edilir? Maksimum gelir nedir?

Gelir = Fiyat . Miktar

$R(x) = (10 - 0{,}002x).x = 10x - 0{,}002x^2$

$R'(x) = 10 - 0{,}004x \qquad R'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 0{,}004x = 0 \Leftrightarrow x = 2.500$ Tek Kritik Nokta

$R''(x) = -0{,}004$, $R''(2.500) < 0$ olduğundan $x = 2.500$ kalem üretildiğinde gelir maksimum olur. ($x = 2.500$ mutlak maksimum noktasıdır.)

$p = 10 - 0{,}002x \Rightarrow p(2.500) = 10 - 5 = 5$ TL'den kalem satılmalıdır.

$R(2500) = 10.2500 - 0.002.(2.500)^2 = 12.500$ TL maksimum gelir elde edilmiş olur.

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int x\sqrt{3x^2+7}\,dx = \int \sqrt{u}\,.\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^{1/2}\,du$

$3x^2+7 = u$ olsun.

$6x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{du}{6}$

$= \frac{1}{6}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} + C\right]$

$= \frac{1}{9}u^{3/2} + \tilde{C}$

$= \frac{1}{9}(3x^2+7)^{3/2} + \tilde{C}$

(b) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int e^u.du = e^u + C = e^{-\frac{1}{x}} + C$

$\frac{-1}{x} = u$ olsun.

$\frac{1}{x^2}dx = du.$