

Hartshorne Exercise I.4.9

ゆじ

2021 年 12 月 15 日

このノートでは、[Ha, 演習 I.4.9] に幾何的な解答を与え、いくつかの関連する結果について証明する。基礎体 k は代数閉体であるとする。

Exercise ([Ha, 演習 I.4.9]). $X \subset \mathbb{P}^N$ を r 次元の部分多様体とし、 $N \geq r + 2$ とする。 $P \notin X$ と線形部分空間 $\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ を適当にとるとき、点 P から \mathbb{P}^{N-1} への射影は X から像 $X' \subset \mathbb{P}^{N-1}$ への双有理射を引き起こすことを証明せよ。

1 定義や記号について

まずこのノートで用いる記号について説明しておく。

Notations. 体 k は代数閉体とする。

- 線形空間 V や代数多様体 X 上の局所自由層 E に対し、 V^\vee や E^\vee などでその双対を表す。
- 線形空間 V や代数多様体 X 上の局所自由層 E に対し、 $\mathbb{P}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Proj}(\text{Sym}(V))$, $\mathbb{P}_X(E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Proj}_X(\text{Sym}(E))$ と置く。 V の 0 でない元 $v \in V$ は全射 $V^\vee \rightarrow k \cdot v^\vee$ を定め、この全射が $\mathbb{P}(V^\vee)$ の点を一意的に定める。逆に $\mathbb{P}(V^\vee)$ の点は V の 0 でない元を定数倍を除いて定める。
- 線形空間 V に対し、 $\mathbb{G}(V, r)$ で次元 r の線形空間への全射 $V \rightarrow W$ の同値類 (核が等しいときに同値と定める) を閉点とするグラスマン多様体を表す。特に、 $\mathbb{G}(V, 2)$ は $\mathbb{P}(V)$ 内の直線を閉点とする多様体である。同じく、代数多様体 X 上の局所自由層 E に対し、 $\mathbb{G}_X(E, r)$ でグラスマン束を表す。
- 代数多様体 X に対し、 $\text{Hilb}^n(X)$ で X 上の二点のなす Hilbert スキームを表す。 $\text{Hilb}^n(X)$ の閉点は X の長さ n の閉部分スキームと 1:1 に対応する。

2 平面と多様体の交差について

この演習問題を証明するために、 X と \mathbb{P}^N 内の線形部分多様体がどれくらい・どのように交わるかについて調べておく。なお、以下の Lemma 2.1 (ii) はこのノートでは用いないが、全く同じ方法でわかることなので記述しておく。

Lemma 2.1. V を次元 $r + 1$ の線形空間、 $0 < s < r$ を整数とする。

- (i) $X \subset \mathbb{P}(V)$ を次元 $d < r - s$ の閉部分多様体とする。このとき、 X と交わらない $\mathbb{P}(V)$ 内の次元 s の平面は $\mathbb{G}(V, s + 1)$ の開集合をなす。

(ii) $X \subset \mathbb{P}(V)$ を次元 $d = r - s$ の閉部分多様体とする。このとき、 X と高々有限個の点でのみ交わる $\mathbb{P}(V)$ 内の次元 s の平面は $\mathbb{G}(V, s+1)$ の開集合をなす。

証明. まずはグラスマン多様体 $\mathbb{G}(V, s+1)$ によってパラメタライズされた $\mathbb{P}(V)$ 内の次元 s の平面の族について調べる。 $\mathbb{G}(V, s+1)$ 上のトートロジカルな全射を $V_{\mathbb{G}(V, s+1)} \rightarrow \mathcal{U}$ と置く。ここで \mathcal{U} はランク $s+1$ の局所自由層である。この全射が引き起こす閉埋め込み

$$\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$$

を $\mathbb{P}(V)$ 側から調べる。各点 $p \in \mathbb{P}(V)$ 上の $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})$ の fiber $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})|_p \subset \mathbb{G}(V, s+1)$ は点 p を通る次元 s の平面を閉点とする多様体である：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\text{proj.}} & \mathbb{P}(V) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow p \\ \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})|_p & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) & \longrightarrow & * \end{array}$$

点 p を与える全射も同じ記号 $p: V \rightarrow k$ で表す。 $\mathbb{P}(V)$ 内の次元 s の平面は次元 $s+1$ の線形空間 W への全射 $V \rightarrow W$ と対応し、その平面が点 p を通ることは、全射 $V \rightarrow W$ の核が $\ker(p)$ に含まれることを意味する。従って、点 p を通る次元 s の平面は、次元 s の線形空間 W' への全射 $\ker(p) \rightarrow W'$ と対応する：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(p) & \longrightarrow & V & \xrightarrow{p} & k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & k \longrightarrow 0 \end{array}$$

$p: V \rightarrow k$ は $\mathbb{P}(V)$ 上のトートロジカルな全射 $V_{\mathbb{P}(V)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ の点 p への pull-back であり、従って $\ker(p)$ は $\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)$ の点 p への pull-back であることに注意する (cf. [4], Remark 4)。以上より、 $\mathbb{P}(V)$ 上の多様体の同型

$$\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \cong \mathbb{G}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1), s)$$

が得られる。

Lemma 2.1の証明を完了するため、 $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$ と $\mathbb{G}(V, s+1) \times X$ の交差を考える。 $Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{G}(V, s+1) \times X)$ と置く (スキーム論的交差)。射影 $Y \rightarrow X$ はグラスマン束 $\mathbb{G}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1), s) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ の X への引き戻しであるから、 $Y \cong \mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s)$ である。従って

$$\dim Y = d + s(r - s) = rs - s^2 + d$$

となることがわかる。射影 $f: Y \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$ の像 $\text{Im}(f)$ は、ちょうど X と交わる s 次元の平面 $H \subset \mathbb{P}(V)$ を閉点とする $\mathbb{G}(V, s+1)$ の閉部分多様体であり、さらに各点 $[H] \in \text{Im}(f)$ での f の fiber は $H \cap X$ と同型である。

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{G}(V, s+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H \cap X & \longrightarrow & [H]. \end{array}$$

$\dim(\mathbb{G}(V, s+1)) = (r - s)(s + 1) = rs - s^2 + r - s$ であることに注意する。(i) を示す。 $d < r - s$ なので、 $\dim Y < \dim(\mathbb{G}(V, s+1))$ であり、特に、射影 $f: Y \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$ の像は真の閉部分集合である。この

ことは (i) を示している。(ii) を示す。 $d + s = r$ なので X と次元 s の任意の平面 $\subset \mathbb{P}(V)$ が交わることから、射影 $f : Y \rightarrow \mathbb{G}(V, s + 1)$ は全射である。一方、 $\dim Y = rs - s^2 + d = rs - s^2 + r - s = \dim(\mathbb{G}(V, s + 1))$ であるから、 f は生成点で有限である。すなわち、 $\mathbb{G}(V, s + 1)$ のある開集合上で f の fiber は有限集合となる。このことは (ii) を示している。以上で Lemma 2.1 の証明を完了する。 \pencil

Lemma 2.1 (i) をより詳しく調べる。

Lemma 2.2. V を次元 $r + 1$ の線形空間、 $0 < s < r$ を整数、 $X \subset \mathbb{P}(V)$ を次元 $d < r - s$ の閉部分多様体とする。このとき、 X と交わる $\mathbb{P}(V)$ 内の次元 s の平面のうちほとんどは X と一点で交わる。

証明. 2 点以上で交わる次元 s の平面の集合を調べる。 $\text{Hilb}^2(X)$ を X 上の 2 点の Hilbert スキーム、 $\mathcal{U} \subset \text{Hilb}^2(X) \times X$ を普遍的な閉部分スキーム、つまり長さ 2 の閉部分スキーム $Z \subset X$ に対応する点 $[Z] \in \text{Hilb}^2(X)$ 上で

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\subset} & \text{Hilb}^2(X) \times X & \xrightarrow{p} & \text{Hilb}^2(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{U}|_{[Z]} \cong Z & \xrightarrow{\subset} & X & \longrightarrow & * \end{array}$$

となる閉部分スキームとする。ただし $p : \text{Hilb}^2(X) \times X \rightarrow \text{Hilb}^2(X)$ は射影である。特に合成 $\mathcal{U} \subset \text{Hilb}^2(X) \times X \xrightarrow{p} \text{Hilb}^2(X)$ は有限平坦射でランク 2 である。閉埋め込み $X \subset \mathbb{P}(V)$ を与える全射 $V_X \rightarrow L$ を $\text{Hilb}^2(X) \times X$ 上へ pull-back すれば、射の列

$$V_{\text{Hilb}^2(X) \times X} \rightarrow L_{\text{Hilb}^2(X) \times X} \rightarrow L_{\mathcal{U}}$$

を得る。これを射影 p で $\text{Hilb}^2(X)$ 上へ push すれば、ランク 2 の局所自由層への射

$$\Psi : V_{\text{Hilb}^2(X)} \rightarrow p_*(L_{\mathcal{U}})$$

を得る。 $V_X \rightarrow L$ が閉埋め込みを与えることから (各 $\text{Hilb}^2(X)$ の閉点の上に基底変換して確かめることで) 射 Ψ が全射であることがわかる。

各長さ 2 の閉部分スキーム $Z \subset X$ に対し、全射 $\Psi_Z : V \rightarrow L_Z$ が $\mathbb{P}(V)$ 内の直線を定める。全射 $V \rightarrow W$ がこの直線を含む次元 s の平面 $\subset \mathbb{P}(V)$ を定めるとする。このとき次元 $s - 1$ の線形空間への全射 $\ker(\Psi_Z) \rightarrow W'$ が引き起こされる：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\Psi_Z) & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\Psi_Z} & L_Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & L_Z \longrightarrow 0. \end{array}$$

逆に次元 $s - 1$ の線形空間への全射 $\ker(\Psi_Z) \rightarrow W'$ は包含射 $\ker(\Psi_Z) \subset V$ で push-out をとることで次元 $s + 1$ の線形空間への全射 $V \rightarrow W$ を引き起こし、これらは 1:1 に対応する。 $\text{Hilb}^2(X)$ 上の包含射 $\ker(\Psi) \subset V_{\text{Hilb}^2(X)}$ はグラスマン束の間の閉埋め込み

$$\mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s - 1) \subset \mathbb{G}(V, s + 1) \times \text{Hilb}^2(X)$$

を引き起こすが、以上の議論により、各閉点 $[Z] \in \text{Hilb}^2(X)$ の fiber は

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s-1) & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) \times \text{Hilb}^2(X) & \xrightarrow{p} & \text{Hilb}^2(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow [Z] \\ \mathbb{G}(\ker(\Psi_Z), s-1) & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) & \longrightarrow & * \end{array}$$

となり、すなわち、 $\mathbb{P}(V)$ 内の次元 s の平面のうち Z の定める $\mathbb{P}(V)$ 内の直線を通るものたちをパラメタライズする多様体が現れる。従って、射影 $g: \mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s-1) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$ の像はちょうど X と二点以上で交わる次元 s の平面たちからなる多様体である。特に、射影 $f: \mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$ の像に含まれる (f については Lemma 2.1 の証明中を参照)。

$X \subset \mathbb{P}(V)$ を超平面で d 回切ったのちできる 0 次元スキームのある点を選び、その点を通るように異なる超平面をいくつか選ぶことで、 f のある fiber が 0 次元であることがわかる。従って fiber の次元の上半連続性 (cf. [Ha, Exercise II.3.22]) より f は generically finite であることがわかる。従って $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s))$ である。また、

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s-1)) &= 2d + (s-1)((r+1-2) - (s-1)) = 2d + (s-1)(r-s) \\ &< d + s(r-s) = \dim(\mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s)) = \dim(\text{Im}(f)) \end{aligned}$$

であるから、 $\text{Im}(g)$ は $\text{Im}(f)$ の真の閉部分集合となる。このことは X と交わる次元 s の平面のうちほとんどは X と 1 点で交わるということを示している。以上で Lemma 2.2 の証明を完了する。 \square

3 証明

この節では、冒頭の問題 [Ha, 演習 I.4.9] を少し一般的な形で証明する。

Proposition 3.1. $X \subset \mathbb{P}^N$ を r 次元の部分多様体、 s を $N \geq r + s + 2$ となる自然数とする。次を満たす線形部分多様体 $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^N$ を閉点に持つ $\mathbb{G}(N+1, s+1)$ の部分空間はある稠密開集合を含む：

- $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^N$ は $X \subset \mathbb{P}^N$ と交わらず、 \mathbb{P}^s に沿った射影 $\mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-s}$ は X から像 $X' \subset \mathbb{P}^{N-s}$ への双有理射を引き起こす。

証明. $V = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ と置き、 $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ と書く。 $\mathbb{G}(V, s+1)$ 上のトートロジカルな全射を $V_{\mathbb{G}(V, s+1)} \rightarrow \mathcal{U}$ と置き、その核を \mathcal{K} とする。閉埋め込み $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$ に沿った爆発を B と置くと、[ϕ, Corollary 9] より B は $R \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{K})$ 上の \mathbb{P}^{s+1} -束であり、 R 上の \mathbb{P}^{s+1} -束の構造は、

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_R & \longrightarrow & V_R & \longrightarrow & \mathcal{U}_R \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{R/\mathbb{G}(V, s+1)}(1) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{U}_R \longrightarrow 0 \end{array}$$

という完全列の間の射ができるようなランク $s+2$ の R 上の局所自由層 \mathcal{E} により $B \cong \mathbb{P}_R(\mathcal{E})$ で与えられている。全射 $V_R \rightarrow \mathcal{E}$ はグラスマン多様体への射 $q: \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+2)$ を引き起こすことに注意する。 $\mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$ における $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})$ と $\mathbb{G}(V, s+1) \times X$ のスキーム論的交差を D と置き、

$\mathbb{G}(V, s+1) \times X$ の D に沿った爆発を B_X と置く。以下の図式ができる (以下のように射に名前をつける) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_X & \hookrightarrow & B & \xrightarrow[\sigma]{\mathbb{P}^{s+1}\text{-束}} & R & \xrightarrow{q} & \mathbb{G}(V, s+2) \\
 \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow p & & \\
 \mathbb{G}(V, s+1) \times X & \hookrightarrow & \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\text{proj.}} & \mathbb{G}(V, s+1) & &
 \end{array}$$

閉点 $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{K})$ は p, q での像をとることで $p(x) \in \mathbb{G}(V, s+1)$ に対応する $\mathbb{P}(V)$ の s 次元平面 $H_{p(x)}$ と $q(x) \in \mathbb{G}(V, s+2)$ に対応する $\mathbb{P}(V)$ の $s+1$ 次元平面 $H_{q(x)}$ を定め、 $H_{p(x)} \subset H_{q(x)}$ となる。さらに σ での x の fiber $\sigma^{-1}(x)$ の π での像は、ちょうど $H_{q(x)}$ となる、つまり $\pi(\sigma^{-1}(x)) = H_{q(x)}$ である。

$Z \subset \mathbb{G}(V, s+2)$ を X と交わる $s+1$ 次元平面のなす閉部分集合とする。各 s 次元平面 $H \subset \mathbb{P}(V)$ に対して、 H に含まれない X の点が存在しないならば、 $X \subset H$ であるから、点 $[H] \in \mathbb{G}(V, s+1)$ の fiber $p^{-1}([H])$ と $q^{-1}(Z)$ は明らかに交わり、 H に含まれない X の点が存在するならば、その点をとることで構成される新たな $s+1$ 次元平面 H' の定める R の点は $q^{-1}(Z)$ と $p^{-1}([H])$ のどちらにも含まれる。従って射 $p|_{q^{-1}(Z)} : q^{-1}(Z) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$ は全射である。 $N \geq r+s+2$ であるから、Lemma 2.2 より、 X とちょうど 1 点で交わる $s+1$ 次元平面からなる稠密開集合 $V \subset Z$ がある。 $V \subset Z$ は稠密であり、 $p|_{q^{-1}(Z)} : q^{-1}(Z) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$ は全射であるから、 $p(q^{-1}(V)) \subset \mathbb{G}(V, s+1)$ は稠密な構成可能集合であり、特に開である。

$N \geq r+s+2$ であるから、Lemma 2.1 より、 X と交わらない s 次元平面のなす空でない開集合 $U \subset \mathbb{G}(V, s+1)$ がある。各点 $[H] \in U$ に対し、 H を軸とする射影 $\mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K}_{[H]}) \cong \mathbb{P}^{N-s}$ を X に制限したものは (H が X と交わらないことから) $\mathbb{G}(V, s+1)$ 上の二つの射 $B_X \rightarrow B \rightarrow R$ の合成射 $r : B_X \rightarrow R$ の点 $[H]$ での fiber に他ならない。点 $x \in R$ について

$$\begin{aligned}
 & x \in \text{Im}(r : B_X \rightarrow R) \\
 \iff & \pi(\sigma^{-1}) \cap X \neq \emptyset \\
 \iff & X \text{ と } q(x) \text{ に対応する } \mathbb{P}(V) \text{ の } s+1 \text{ 次元平面が交わる} \\
 \iff & x \in q^{-1}(Z)
 \end{aligned}$$

であるから、 $\text{Im}(r) = q^{-1}(Z)$ となる。点 $x \in q^{-1}(V)$ の $r : B_X \rightarrow R$ での fiber はちょうど X と $q(x)$ に対応する $\mathbb{P}(V)$ の $s+1$ 次元平面のスキーム論的交差であり、すなわちスキーム論的に 1 点である。従って、 r は空でない開集合 $r^{-1}(q^{-1}(V)) \subset B_X$ 上で同型射である。

$W \stackrel{\text{def}}{=} p(q^{-1}(V)) \cap U \subset \mathbb{G}(V, s+1)$ と置く。各点 $[H] \in W$ に対して、 $p^{-1}([H]) \cap q^{-1}(V) \neq \emptyset$ であるから H を軸とする射影 $r_H : X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K}_{[H]}) \cong \mathbb{P}^{N-s}$ は像への双有理射である。また、 $W \subset U$ であるから、 s 次元平面 H は X とは交わらない。よって W は所望の開集合である。以上で証明を完了する。 \pencil

参考文献

- [Ha] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Text in Mathematics, No. 52.
- [ゆ] ゆじノート, *Blowing Up along Linear Subvariety*.