Hartshorne Exercise II.8.2

ゆじ

2021 年 12 月 6 日

このノートでは、[Ha, 演習 II.8.2] に解答を与える。k を基礎体とする。

Exercise. X を k 上 n 次元の代数多様体、$\mathcal{E}$ を X 上のランク $r > n$ の局所自由層、$V \subset H^0(X, \mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ を生成する大域切断のなす部分空間とする。このとき、大域切断 $0 \neq s \in V$ であって、対応する射 $s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ の余核が局所自由となるものが存在することを示せ。

V を有限次元と仮定しても良いことに注意しておく：$f : V_X \to \mathcal{E}$ を $V \subset H^0(X, \mathcal{E})$ に対応する射とする。仮定から f は全射である。$V = \bigcup_{i \in I} V_i$ と有限次元部分空間の和として表す。$f_i : V_{i,X} \to \mathcal{E}$ を $V_i \subset V$ の $X \to \mathrm{Spec}(k)$ に沿った基底変換と f の合成とする。このとき $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Im}(f_i) = \mathcal{E}$ であるが、$X = \bigcup_{j \in J} U_j$ と有限個のアフィンスキームで覆えば、各 j に対して i_j が存在して $\mathrm{Im}(f_{i_j}|_{U_j}) = \mathcal{E}|_{U_j}$ となることがわかり、これらの i_j より大きな i をとることで、十分大きな i に対して $\mathrm{Im}(f_i) = \mathcal{E}$ となることがわかる。すなわち、ある有限次元部分空間 $V_0 \subset V$ が存在して、$\mathcal{E}$ は V_0 に属する大域切断で生成される。

V を有限次元として話を進める。

Notations.

- 基礎体を k と置く。
- スキームの射 $f : T \to S$ と S 上の対象 F (S-スキームや、S 上のスキームの射や、S 上の準連接層など) に対し、F_T や $F|_T$ や f^*F で F の射 $T \to S$ による基底変換を表す。

1 大域切断の零点集合

n 次元代数多様体 X 上のランク r の局所自由層 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}$ を生成する大域切断のなす d-次元部分線形空間 $V \subset H^0(X, \mathcal{E})$ を与える。元 $s \in V$ を取り、s の零点集合を調べる。

まず、$s = 0$ で定まる X の閉部分スキームがどのように構成されるか見る。

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{s_X} V_X \to \mathcal{E}$$

を点 $p \in X$ に基底変換すると、

$$k(p) \xrightarrow{s} V \to \mathcal{E}_p$$

を得る。$s(p) = 0$ の意味は、この射の列の合成が 0 射だということである。双対をとることで、$s(p) = 0$ は

$$\mathcal{E}_p^\vee \to V^\vee \xrightarrow{s^\vee} k(p)$$

の合成が 0 射であることと同値である。従って、$s=0$ という閉部分スキームは

$$(s=0) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{coker}(\mathcal{E}^\vee \to V_X^\vee \xrightarrow{s_X^\vee} \mathcal{O}_X)$$

と定義される。

閉部分スキーム $(s=0)$ は、s を 0 でない定数倍で置き換えても変わらない注意する。すると、各 $\mathbb{P}(V^\vee)$ の元に対して X の閉部分スキームが定まることになり、$\mathbb{P}(V^\vee)$ でパラメーター付けられた X の閉部分スキームの族

$$H \subset \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$$

で、各 $s \in V$ に対して、対応する $\mathbb{P}(V^\vee)$ の fiber が $s=0$ となるもの、の存在を期待したくなる。この H を構成する。

$\mathcal{K} :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker(V_X^\vee \to \mathcal{E})$ と置くと、双対をとることで全射

$$V_X^\vee \to \mathcal{K}$$

を得る。この全射は X 上の射影束の閉埋め込み

$$j : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \to \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$$

を定める。j が求める $H \subset \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$ を定めることを示す。元 $0 \neq s \in V$ を取れば、一点からの射 $\mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{s} \mathbb{P}(V^\vee)$ が定まり、基底変換することで閉埋め込み $i_s : X \to \mathbb{P}(V)^\vee \times_k X$ を得る。j を i_s に沿って基底変換すると、X の閉部分スキーム $s_0 : Y \subset X$ が定まる：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_s} \\ \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X. \end{array}$$

この X 上の図式を点 $p \in X$ まで基底変換すれば、図式

$$\begin{array}{ccc} Y_p & \longrightarrow & p \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ \mathbb{P}(\mathcal{K}^\vee|_p) & \xrightarrow{j_p} & \mathbb{P}(V^\vee). \end{array}$$

を得る。ここで Y_p は p または $\varnothing$ である。

$$Y_p \cong p \iff s \in \mathrm{Im}(j_p) \iff s \in \mathrm{Im}(\mathcal{K}|_p \to V) \iff s \in \ker(V \to \mathcal{E}_p)$$

であるから、Y は $s=0$ で定まる閉部分スキームである。Y は j と射影 $\mathbb{P}(V^\vee) \times_k X \to \mathbb{P}(V^\vee)$ の合成の s が定める $\mathbb{P}(V^\vee)$ の点での fiber であるから、よって閉埋め込み $j : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \to \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$ は、各 $s \in V$ に対して、対応する $\mathbb{P}(V^\vee)$ の fiber が $s=0$ となるような、$\mathbb{P}(V^\vee)$ でパラメーターづけられた X の閉部分スキームの族を定める。

2　問題の解答

この節では、Section 1の議論を念頭において、問題に解答を与える。

Proof. $\mathcal{E}$ は自由層でないとして良い。

$d = \dim V$ と置くと、全射 $V_X \to \mathcal{E}$ の存在から $d > r > n$ である。$\mathcal{K} :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker(V_X \to \mathcal{E})$ と置くと、$\mathcal{K}$ のランクは $d - r > 0$ である。双対をとることで全射 $V|_X^\vee \to \mathcal{K}^\vee$ を得る。この全射が引き起こす X 上の射影束の閉埋め込み

$$j : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \to \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$$

と射影 $\mathbb{P}(V^\vee) \times_k X \to \mathbb{P}(V^\vee)$ を合成すると、射

$$f : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \to \mathbb{P}(V^\vee)$$

を得る。$\dim(\mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee)) = d - r + n - 1 < d - 1 = \dim \mathbb{P}(V^\vee)$ なので f は全射ではない。この f の像に入らない点 $\bar{s} \in \mathbb{P}(V^\vee)$ を与える元 $0 \neq s \in V$ を取れば、$\bar{s}$ の fiber は $\varnothing$ であるから、$(s = 0) = \varnothing$ となる。ここで、元 $s \in V$ の定める射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{s_X} V_X \to \mathcal{E}$ の双対

$$\mathcal{E}^\vee \to V_X^\vee \xrightarrow{s_X^\vee} \mathcal{O}_X$$

の余核がちょうど $s = 0$ で定まる閉部分スキームの構造層であることに注意すると、今、$(s = 0) = \varnothing$ であるから、$\mathcal{E}^\vee \to V_X^\vee \xrightarrow{s_X^\vee} \mathcal{O}_X$ の合成が全射であることがわかる。従って s が所望の大域切断である。 ✎

参考文献

[Ha] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New Tork, 1977. Graduate Text in Mathematics, No. 52.