

Equational Criterion of Flatness

ゆじ

2021 年 12 月 11 日

これは平坦性の Equational Criterion などに関するノートである。このノートでは、可換環のことをたんに環と呼ぶ。平坦加群の定義は、以下を採用する：

Definition 0.1. A を環とする。 A -加群 M が**平坦** (flat) であるとは、任意の単射 $N_1 \rightarrow N_2$ に対して $N_1 \otimes_A M \rightarrow N_2 \otimes_A M$ も単射であることを言う。

$$\int_0^\infty \text{Faltings}(x) dx = asrf \tag{1}$$
$$= href. \tag{2}$$

1 定義など

圏 \mathcal{C} と対象 $x \in \mathcal{C}$ に対して、 $\mathcal{C}_{/x}$ により slice 圏を表す。圏 $\mathcal{C}_{/x}$ の対象は x への \mathcal{C} の射 $y \rightarrow x$ であり、圏 $\mathcal{C}_{/x}$ の射は x への射と可換であるような \mathcal{C} の射である。

Definition 1.1. 圏 I が **filtered** であるとは、以下の条件を満たすことを言う：

- (i) $I \neq \emptyset$ である。
- (ii) 任意の対象 $i, j \in I$ に対し、対象 $k \in I$ と射 $i \rightarrow k, j \rightarrow k$ が存在する。
- (iii) 任意の対象 $i, j \in I$ と任意の射 $f, g : i \rightarrow j$ に対し、ある射 $h : j \rightarrow k$ が存在し、 $h \circ f = h \circ g$ となる。

このノートの話は、filtered category の定義の条件 (iii) が本質的な役割を果たす話である。

Definition 1.2. filtered category I の充満部分圏 J が **cofinal** であるとは、任意の対象 $i \in I$ に対してある対象 $j \in J$ と I の射 $i \rightarrow j$ が存在することを言う。

filtered category の cofinal な部分圏はまた filtered となることが容易に確認できる。

2 有限表示加群

この節では有限表示加群とコンパクト性に関する Remark をする。

Definition 2.1. A を環、 M を A -加群とする。圏 \mathcal{I}_M を以下で定める：

- 圏 \mathcal{I}_M の対象は、 A -加群の射の列

$$F_2 \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{p_\varphi} M$$

であり、以下を満たすものである：

- (i) F_1, F_2 は有限ランク自由加群。
- (ii) $p_\varphi \circ \varphi = 0$.

圏 \mathcal{I}_M の対象はたんに $\varphi : F_2 \rightarrow F_1$ や φ のように表される。

- 二つの対象 $\varphi : F_2 \rightarrow F_1, \varphi' : F'_2 \rightarrow F'_1$ の間の射の集合は、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}_M}(\varphi, \varphi') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Mod}_A)/M}(\mathrm{coker}(\varphi), \mathrm{coker}(\varphi'))$$

と定める。

$(\mathrm{Mod}_A)/M$ の有限表示部分加群のなす充満部分圏を FP/M と置く。定義から、函手

$$\mathcal{I}_M \rightarrow \mathrm{Mod}_A, (\varphi : F_2 \rightarrow F_1) \mapsto \mathrm{coker}(\varphi)$$

により \mathcal{I}_M は FP/M と圏同値となる。

Remark 2.2. 圏 \mathcal{I}_M の二つの対象 $\varphi : F_2 \rightarrow F_1, \varphi' : F'_2 \rightarrow F'_1$ と任意の射 $f : \mathrm{coker}(\varphi) \rightarrow \mathrm{coker}(\varphi')$ に対し、ある $f_2 : F_2 \rightarrow F'_2, f_1 : F_1 \rightarrow F'_1$ が存在して f は f_1, f_2 が余核の間に引き起こす射と一致する。証明は、射影分解の取り方が up to quasi-isomorphism で一意であることの証明と全く同様である。これから、圏 \mathcal{I}_M の射は二つの射 $f_2 : F_2 \rightarrow F'_2, f_1 : F_1 \rightarrow F'_1$ で図式

$$\begin{array}{ccccc} F'_2 & \xrightarrow{\varphi'} & F'_1 & \longrightarrow & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \parallel \\ F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \longrightarrow & M \end{array}$$

が可換となるものにより代表できる。

Lemma 2.3. 任意の環 A と任意の A -加群 M に対して \mathcal{I}_M は filtered である。

Proof. FP/M が filtered であることから従う。 ✎

Remark 2.4. 環 A と A -加群 M に対し、以下が成り立つ：

$$M \cong \mathrm{colim}_{N \in \mathrm{FP}/M} N \cong \mathrm{colim}_{\varphi \in \mathcal{I}_M} \mathrm{coker}(\varphi).$$

自然な射 $\mathrm{colim}_{N \in \mathrm{FP}/M} N \rightarrow M$ は明らかに全射である。単射であることは FP/M が filtered であることから従う。特に、任意の A -加群は有限表示 A -加群の filtered colimit として表せる。

Remark 2.5. M が有限表示加群であれば、明らかに圏 $\mathcal{I}_M \cong \mathrm{FP}/M$ は終対象を持つ。

Remark 2.6. F を有限ランク自由加群とし、 $N_i, i \in I$ を A -加群の filtered な族とする。このとき自然な射

$$\mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(F, N_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(F, \mathrm{colim}_{i \in I} N_i)$$

は同型射である。従ってとくに、任意の射 $F \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ はある $i \in I$ に対する自然な射 $N_i \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ を経由し、また、与えられた射 $F \rightarrow N_i$ が $N_i \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ と合成することで 0-射となるならば、ある

$N_i \rightarrow N_j$ があって $F \rightarrow N_i \rightarrow N_j$ の合成が 0-射となる。以上の議論により、任意の対象 $\varphi \in \mathcal{I}_{\text{colim}_{i \in I} N_i}$ に対しある $i \in I$ が存在して、 φ は $N_i \rightarrow \text{colim}_{i \in I} N_i$ を合成することにより定まる函手 $\mathcal{I}_{N_i} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{colim}_{i \in I} N_i}$ の像に属する、ということがわかる。

M を有限表示加群とすると、圏 \mathcal{I}_M は終対象を持つ (cf. Remark 2.5)。任意の射 $M \rightarrow \text{colim}_{i \in I} N_i$ に対して、この射を合成することにより定まる函手 $\mathcal{I}_M \rightarrow \mathcal{I}_{\text{colim}_{i \in I} N_i}$ での終対象の像は、ある i に対する函手 $\mathcal{I}_{N_i} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{colim}_{i \in I} N_i}$ の像に属する。このことは、射 $M \rightarrow \text{colim}_{i \in I} N_i$ がある $N_i \rightarrow \text{colim}_{i \in I} N_i$ を経由することを示している。従って、自然な射

$$\text{colim}_{i \in I} \text{Hom}_A(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{colim}_{i \in I} N_i)$$

は全射である。

Remark 2.7. M を A -加群であって、任意の A -加群の filtered な族 $N_i, i \in I$ に対して自然な射

$$\varphi : \text{colim}_{i \in I} \text{Hom}_A(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{colim}_{i \in I} N_i)$$

が全射であるとする。このとき、 M を有限表示 A -加群の filtered colimit として $M \cong \text{colim}_{j \in J} M_j$ と表示することで、ある j が存在して $\text{id} : M \rightarrow M \cong \text{colim}_{j \in J} M_j$ が $M_j \rightarrow \text{colim}_{j \in J} M_j$ を経由する。従って M は有限表示加群のレトラクトとなり、有限表示であることがわかる。Remark 2.6の結果とあわせると、以下が同値であることがわかったことになる：

- (i) M は有限表示加群である。
- (ii) 任意の A -加群の filtered な族 $N_i, i \in I$ に対して自然な射

$$\varphi : \text{colim}_{i \in I} \text{Hom}_A(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{colim}_{i \in I} N_i)$$

は全射である。

3 テンソル積

この節ではテンソル積に関する Remark をする。

Definition 3.1. A -加群 M, N の**テンソル積**とは、次を満たす加群 $M \otimes_A N$ のことである：任意の A -加群 L に対して自然に

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L))$$

となる。

Remark 3.2. $\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L)) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_A(M, L))$ であるから $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ である。

Remark 3.3. テンソル積の存在は次のように示される：まず M, N の一方が自由加群である場合、 $M \cong A^{\oplus I}$ とすれば、 $\text{Hom}_A(M, -) \cong (-)^{\Pi I}$ となるので

$$\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L)) \cong \text{Hom}_A(N, L)^{\Pi I} \cong \text{Hom}_A(N^{\Pi I}, L)$$

となる。つまりテンソル積 $A^{\oplus I} \otimes_A N$ は存在して自然な同型 $A^{\oplus I} \otimes_A N \cong N^{\oplus I}$ が成り立つ。次に M, N を任意の A -加群とする。 M を自由加群の射の余核として表す。すなわち、

$$A^{\oplus I} \rightarrow A^{\oplus J} \rightarrow M \rightarrow 0$$

という完全列をひとつとる。 $\text{Hom}_A(-, \text{Hom}_A(N, L))$ は左完全であるから、

$$\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L)) \cong \ker(\text{Hom}_A(N^{\Pi J}, L) \rightarrow \text{Hom}_A(N^{\Pi I}, L)) \cong \text{Hom}_A(\text{coker}(N^{\oplus I} \rightarrow N^{\oplus J}), L)$$

となることがわかる。特にテンソル積 $M \otimes_A N$ は存在する。

Lemma 3.4 (cf. [後藤渡辺, 1.106]). A を環、 P を A -加群、 M, N を A -加群、 $f : P \rightarrow M \otimes_A N$ を A -加群の射とする。

- (i) P が有限表示であるとき、有限生成部分加群 $i : M_0 \hookrightarrow M, j : N_0 \hookrightarrow N$ と射 $g : P \rightarrow M' \otimes_A N'$ が存在し、 $f = (i \otimes j) \circ g$ となる。特に、射 $h_1 : P \rightarrow M' \otimes_A N, h_2 : P \rightarrow M \otimes_A N'$ が存在し、 $f = (i \otimes \text{id}_N) \circ h_1, f = (\text{id}_M \otimes j) \circ h_2$ となる。
- (ii) P が有限表示射影的であるとき、有限生成自由加群 F_1, F_2 、射 $i : F_1 \rightarrow M, j : F_2 \rightarrow N$ 、射 $g : P \rightarrow F_1 \otimes_A F_2$ が存在し、 $f = (i \otimes j) \circ g$ となる。特に、射 $h_1 : P \rightarrow F_1 \otimes_A N, h_2 : P \rightarrow M \otimes_A F_2$ が存在し、 $f = (i \otimes \text{id}_N) \circ h_1, f = (\text{id}_M \otimes j) \circ h_2$ となる。

Proof. M, N を有限生成部分加群の filtered colimit として表すことで、[Remark 2.7](#)より (i) がわかる。(ii) は (i) よりただちに従う。 ✍

Remark 3.5. [Lemma 3.4 \(ii\)](#) を $P = A$ として適用することで、テンソル積 $M \otimes_A N$ の元はすべて有限個の $m_i \in M, n_i \in N$ により $\sum m_i \otimes n_i$ のように表せることがわかる。

4 平坦加群

Definition 4.1. A を環、 M を A -加群とする。 $0 \rightarrow F_1$ という対象からなる \mathcal{I}_M の充満部分圏を \mathcal{J}_M と書く。これは $(\text{Mod}_A)_{/M}$ の有限ランク自由加群のなす充満部分圏と自然に圏同値である。

\mathcal{I}_M は filtered であったが、 \mathcal{J}_M は filtered とは限らない。本節ではそのことを見ていく。 \mathcal{J}_M は filtered category の条件 [Definition 1.1 \(iii\)](#) 以外を満たすことは容易にわかる ([Lemma 2.3](#)の証明と同じようにする)。

Lemma 4.2 (Equational Criterion of Flatness; cf. [松村, 定理 7.6]). A を環、 M を平坦 A -加群とする。

$$F_2 \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{p} M$$

を圏 \mathcal{I}_M の対象とする。このとき、以下の図式が可換となるような有限自由加群 F' と射 $f : F_1 \rightarrow F', r : F' \rightarrow M$ が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

特に、 M が平坦であれば \mathcal{J}_M は \mathcal{I}_M において cofinal である。

Proof. 有限自由加群 F と A -加群 M に対して、自然な同型 $M \otimes_A F^* \cong \text{Hom}_A(F, M)$ により両辺を同一視する。

$\varphi^* : F_1^* \rightarrow F_2^*$ を φ の双対とし、 $k : \ker(\varphi^*) \rightarrow F_1^*$ を自然な包含射とする。 M は平坦なので、自然な射 $M \otimes_A \ker(\varphi^*) \rightarrow \ker(\text{id}_M \otimes \varphi^*)$ は同型射であり、特に全射である (この証明では、この射が全射であることしか必要ない! [Remark 4.3](#) も見よ)。 $p \circ \varphi = 0$ であるから $p \in \ker(\text{id}_M \otimes \varphi^*)$ であり、よってある元 $q \in M \otimes_A \ker(\varphi^*)$ が存在して $p = (\text{id}_M \otimes k)(q)$ となる。よって、[Lemma 3.4 \(ii\)](#) を $M = M, N = \ker(\varphi^*), P = A, f(1) = q \in M \otimes_A \ker(\varphi^*)$ として適用することで、ある有限ランク自由加群 F' と射 $g : F'^* \rightarrow \ker(\varphi^*)$ が $q \in \text{Im}(\text{id}_M \otimes g)$ となるようにとれる。すると、ある元 $r \in M \otimes_A F'^*$ が存在して $q = (\text{id}_M \otimes g)(r)$ となる。自然な同型 $M \otimes_A F'^* \cong \text{Hom}_A(F', M)$ のもとで $r : F' \rightarrow M$ と考える。 $f : F_1 \rightarrow F'$ を合成 $F'^* \xrightarrow{g} \ker(\varphi^*) \subset F_1^*$ の双対とする。図式

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{r} & M \end{array}$$

は r の取り方と f^* が $\ker(\varphi^*)$ を経由することから可換である。 ✎

Remark 4.3. 一般に、 A -加群の射 $f : N_1 \rightarrow N_2$ と A -加群 M に対して、自然な射 $\varphi : M \otimes_A \ker(f) \rightarrow \ker(\text{id}_M \otimes f)$ は全射ですらない。図式

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes_A \ker(f) & \longrightarrow & M \otimes_A N_1 & \longrightarrow & M \otimes_A \text{Im}(f) & \longrightarrow & 0. \\ \varphi \downarrow & & \parallel & & \downarrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\text{id}_M \otimes f) & \longrightarrow & M \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{id}_M \otimes f} & M \otimes_A N_2 \end{array}$$

を見れば、 $\text{coker}(\varphi) \cong \ker(\psi)$ である。 M が平坦でなければ ψ は一般に単射とはならないことは、平坦加群という用語が存在することからも十分に納得できる。

Remark 4.4. [Lemma 4.2](#) をより具体的に記述すると次のようになる： M が平坦 A -加群であるとき、

$$a_{ij} \in A, m_j \in M, (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n) \text{ が } \sum_j a_{ij} m_j = 0, (\forall i) \text{ を満たす}$$

ならば、正の整数 s と $b_{jk} \in A, n_k \in M, (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s)$ が存在して、

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0, (\forall i, k), \quad m_j = \sum_k b_{jk} n_k, (\forall j)$$

が成り立つ。実際、 m_j を与える自由加群からの射 $p : A^n \rightarrow M$ と a_{ij} を与える射 $\varphi : A^r \rightarrow A^n$ を取れば、条件 $\sum_j a_{ij} m_j = 0$ は $p \circ \varphi = 0$ ということである。さらに [Lemma 4.2](#) から射 $f : A^n \rightarrow A^s, r' : A^s \rightarrow M$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc} A^r & \xrightarrow{\varphi} & A^n & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A^s & \xrightarrow{r'} & M \end{array}$$

が可換となるが、 f を与えることは b_{jk} を与えることと等しく、 r' を与えることは n_k を与えることに等しく、 $f \circ \varphi = 0$ は等式 $\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0$ を意味し、 $p = r' \circ f$ は等式 $m_j = \sum_k b_{jk} n_k$ を意味する。

Lemma 4.5. A を環、 M を A -加群とする。このとき、次は同値：

- (i) M は平坦である。
- (ii) \mathcal{J}_M は \mathcal{I}_M において cofinal である。
- (iii) \mathcal{J}_M は filtered である。
- (iv) \mathcal{J}_M は filtered であり、 $M \cong \operatorname{colim}_{(F \rightarrow M) \in \mathcal{J}_M} F$ である。

Proof. (i) \Rightarrow (ii) は Lemma 4.2 そのものである。(ii) \Rightarrow (iii) は初等的な圏論によりわかる。また、(iv) \Rightarrow (i) は平坦加群の filtered colimit が平坦であることから従う。

(iii) \Rightarrow (iv) を確かめる。 \mathcal{J}_F が filtered であると仮定する。自然な射 $\varphi : \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F \rightarrow M$ は明らかに全射である。単射であることを示す。 $A \rightarrow \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F$ を φ の核を与える射とすると、これはある自然な射 $F \rightarrow \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F$ を経由し、射 $f : A \rightarrow F$ を得る。また、 $A \rightarrow F \rightarrow M$ の合成は 0-射である。 f と 0-射という二つの射 \mathcal{J}_M の射 $A \Rightarrow F$ に \mathcal{J}_M が filtered であることの条件を使うと、ある $g : F \rightarrow F'$ が存在して $g \circ f = 0$ となることがわかる。従って $A \rightarrow \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F$ は 0-射であり、 φ は単射である。以上ですべて示された。 ✎

Corollary 4.6 (Lazard の定理: cf. [Stacks, Tag 058G]). A を環、 M を A -加群とする。このとき M が平坦であることと、 M が有限自由加群の filtered colimit として表せることは同値である。

Proof. Lemma 4.5 より直ちに従う。 ✎

Corollary 4.7. A を環、 M を有限表示平坦 A -加群とする。このとき M は射影的である。

Proof. 有限自由加群 F_2, F_1 と射 $F_2 \rightarrow F_1$ で

$$F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が完全となるものを一つとる。Equational Criterion より、以下の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

ここで F は有限自由加群である。図式の可換性から $r : F \rightarrow M$ は全射である。また、 (f_2, f_1) が余核の間に引き起こす射 $M \rightarrow F$ は r の分裂を与える。よって M は射影加群である。 ✎

Remark 4.8. 有限生成平坦加群は一般に射影的とはならない (cf. [Stacks, Tag 00NY]).


Corollary 4.9. A を局所環、 k を A の剰余体、 M を有限生成平坦 A -加群とする。このとき M は自由 A -加群である。

Proof. M は有限生成なので、有限自由加群 F_1 と全射 $p : F_1 \rightarrow M$ で $p \otimes 1 : F_1 \otimes_A k \rightarrow M \otimes_A k$ が同型となるものが存在する。 p が同型射であれば良い。有限自由加群 F_2 と射 $\varphi : F_2 \rightarrow F_1$ で $p \circ \varphi = 0$ となるものを任意にとる。 φ が 0-射であることを示せば良い。Equational Criterion より、以下の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

ここで F は有限自由加群である。図式の可換性から r は全射である。また p が全射であることと F が自由加群であることから、射 $g: F \rightarrow F_1$ が存在して以下の図式が可換となる：

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & F_1 \\ p \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow p \\ M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M. \end{array}$$

図式全体に k をテンソルして中山の補題を用いることで、 $g \circ f: F_1 \rightarrow F_1$ は全射であることがわかる。 F_1 は有限自由加群であるので、よって $g \circ f$ は同型射であり、特に f は単射であることがわかる。一方、 $f \circ \varphi = 0$ であったから、 φ は 0-射である。従って p は単射となる。 


5 ねじれなし加群

この節はおまけみたいな感じで書いてます。


Definition 5.1. A を整域、 M を A -加群とする。 M が**ねじれなし** (torsion free) であるとは、任意の元 $0 \neq a$ に対して a 倍写像 $M \rightarrow M$ が単射であることを言う。

Lemma 5.2. A を整域、 M を A -加群、 K を A の商体とする。以下は同値：

- (i) M はねじれなしである。
- (ii) 自然な包含射 $A \subset K$ により引き起こされる射 $M \rightarrow M \otimes_A K$ は単射である。
- (iii) 任意の一元生成イデアル I に対して、 $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ である。
- (iv) 任意の素イデアル \mathfrak{p} に対して $M_{\mathfrak{p}}$ はねじれなし $A_{\mathfrak{p}}$ -加群である。
- (v) 任意の極大イデアル \mathfrak{m} に対して $M_{\mathfrak{m}}$ はねじれなし $A_{\mathfrak{m}}$ -加群である。


Proof. (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) は定義より従う。局所化は平坦であるから、(ii) \Leftrightarrow (iv) が従う。(iv) \Leftrightarrow (iii) は自明である。 A -加群 $\ker(M \rightarrow M \otimes_A K)$ が 0 かどうかは、任意の極大イデアルによる局所化で 0 となるかどうかであるから、(v) \Leftrightarrow (ii) が従う。以上ですべて示された。 

Corollary 5.3. 平坦加群はねじれなし加群である。


Proof. Lemma 5.2 の (i) \Leftrightarrow (iii) より従う。 

Definition 5.4. 整域 A が **Prüfer 整域** であるとは、すべてのねじれなし加群が平坦であることを言う。

Corollary 5.5. 任意の局所環が付値環であれば Prüfer 整域である。特に、Dedekind 環と付値環は Prüfer 整域である。

Proof. 環 A は任意の局所環が付値環であるとする。 M を A 上のねじれなし加群とする。局所化をすることで、 A は付値環であるとしても良い。よって A の任意の有限生成イデアルは一元生成である。従って (i) \Leftrightarrow (iii) より M は平坦となる (cf. [アティマク, 演習 2.26])。 

Proposition 5.6. A を Prüfer 整域とする。このとき任意の素イデアル \mathfrak{p} に対して $A_{\mathfrak{p}}$ は付値環である。特に、Noether な Prüfer 整域は Dedekind 環となる。

Proof. A を局所 Prüfer 整域として、 A が付値環であることを示せば良い。 I を A の有限生成イデアルとする。 A が付値環であることを示すには、 I が一元生成であることを示せば良い (cf. [Stacks, Tag 090Q]). I はねじれなし A -加群 A の部分加群なのでねじれなしである。従って平坦である。一方、 A は局所環であり、 I は有限生成平坦加群であるので、Corollary 4.9 より I は有限自由加群である。単射 $I \subset A$ の存在は、 I が一元生成であることを示している (cf. [アティマク, 演習 2.11]). 

参考文献

- [アティマク] M. Atiyah, I. Macdonald, (新妻 弘 訳), 「可換代数入門」, 共立出版, (2006).
- [後藤渡辺] 後藤 四郎, 渡辺 敬一, 「可換環論」, 日本評論社, (2011).
- [松村] 松村 英之, 「可換環論」, 共立出版, (1980).
- [Stacks] The Stacks Project Authors, [Stacks Project](#).