

# Equational Criterion of Flatness

ゆじ

2021 年 12 月 11 日

これは平坦性の Equational Criterion などに関するノートである。このノートでは、可換環のことをたんに環と呼ぶ。平坦加群の定義は、以下を採用する：

**Definition 0.1.**  $A$  を環とする。 $A$ -加群  $M$  が**平坦** (flat) であるとは、任意の単射  $N_1 \rightarrow N_2$  に対して  $N_1 \otimes_A M \rightarrow N_2 \otimes_A M$  も単射であることを言う。

## 1 定義など

圏  $\mathcal{C}$  と対象  $x \in \mathcal{C}$  に対して、 $\mathcal{C}_{/x}$  により slice 圏を表す。圏  $\mathcal{C}_{/x}$  の対象は  $x$  への  $\mathcal{C}$  の射  $y \rightarrow x$  であり、圏  $\mathcal{C}_{/x}$  の射は  $x$  への射と可換であるような  $\mathcal{C}$  の射である。

**Definition 1.1.** 圏  $I$  が **filtered** であるとは、以下の条件を満たすことを言う：

- (i)  $I \neq \emptyset$  である。
- (ii) 任意の対象  $i, j \in I$  に対し、対象  $k \in I$  と射  $i \rightarrow k, j \rightarrow k$  が存在する。
- (iii) 任意の対象  $i, j \in I$  と任意の射  $f, g : i \rightarrow j$  に対し、ある射  $h : j \rightarrow k$  が存在し、 $h \circ f = h \circ g$  となる。

このノートの話は、filtered category の定義の条件 (iii) が本質的な役割を果たす話である。

**Definition 1.2.** filtered category  $I$  の充満部分圏  $J$  が **cofinal** であるとは、任意の対象  $i \in I$  に対してある対象  $j \in J$  と  $I$  の射  $i \rightarrow j$  が存在することを言う。

filtered category の cofinal な部分圏はまた filtered となることが容易に確認できる。

## 2 有限表示加群

この節では有限表示加群とコンパクト性に関する Remark をする。

**Definition 2.1.**  $A$  を環、 $M$  を  $A$ -加群とする。圏  $\mathcal{I}_M$  を以下で定める：

- 圏  $\mathcal{I}_M$  の対象は、 $A$ -加群の射の列

$$F_2 \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{p_\varphi} M$$

であり、以下を満たすものである：

- (i)  $F_1, F_2$  は有限ランク自由加群。

(ii)  $p_\varphi \circ \varphi = 0$ .

圏  $\mathcal{I}_M$  の対象はたんに  $\varphi : F_2 \rightarrow F_1$  や  $\varphi$  のように表される。

- 二つの対象  $\varphi : F_2 \rightarrow F_1, \varphi' : F'_2 \rightarrow F'_1$  の間の射の集合は、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}_M}(\varphi, \varphi') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Mod}_A)_{/M}}(\mathrm{coker}(\varphi), \mathrm{coker}(\varphi'))$$

と定める。

$(\mathrm{Mod}_A)_{/M}$  の有限表示部分加群のなす充満部分圏を  $\mathrm{FP}_{/M}$  と置く。定義から、函手

$$\mathcal{I}_M \rightarrow \mathrm{Mod}_A, (\varphi : F_2 \rightarrow F_1) \mapsto \mathrm{coker}(\varphi)$$

により  $\mathcal{I}_M$  は  $\mathrm{FP}_{/M}$  と圏同値となる。

**Remark 2.2.** 圏  $\mathcal{I}_M$  の二つの対象  $\varphi : F_2 \rightarrow F_1, \varphi' : F'_2 \rightarrow F'_1$  と任意の射  $f : \mathrm{coker}(\varphi) \rightarrow \mathrm{coker}(\varphi')$  に対し、ある  $f_2 : F_2 \rightarrow F'_2, f_1 : F_1 \rightarrow F'_1$  が存在して  $f$  は  $f_1, f_2$  が余核の間に引き起こす射と一致する。証明は、射影分解の取り方が up to quasi-isomorphism で一意であることの証明と全く同様である。これから、圏  $\mathcal{I}_M$  の射は二つの射  $f_2 : F_2 \rightarrow F'_2, f_1 : F_1 \rightarrow F'_1$  で図式

$$\begin{array}{ccccc} F'_2 & \xrightarrow{\varphi'} & F'_1 & \longrightarrow & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \parallel \\ F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \longrightarrow & M \end{array}$$

が可換となるものにより代表できる。

**Lemma 2.3.** 任意の環  $A$  と任意の  $A$ -加群  $M$  に対して  $\mathcal{I}_M$  は filtered である。

*Proof.*  $\mathrm{FP}_{/M}$  が filtered であることから従う。 ✎

**Remark 2.4.** 環  $A$  と  $A$ -加群  $M$  に対し、以下が成り立つ：

$$M \cong \mathrm{colim}_{N \in \mathrm{FP}_{/M}} N \cong \mathrm{colim}_{\varphi \in \mathcal{I}_M} \mathrm{coker}(\varphi).$$

自然な射  $\mathrm{colim}_{N \in \mathrm{FP}_{/M}} N \rightarrow M$  は明らかに全射である。単射であることは  $\mathrm{FP}_{/M}$  が filtered であることから従う。特に、任意の  $A$ -加群は有限表示  $A$ -加群の filtered colimit として表せる。

**Remark 2.5.**  $M$  が有限表示加群であれば、明らかに圏  $\mathcal{I}_M \cong \mathrm{FP}_{/M}$  は終対象を持つ。

**Remark 2.6.**  $F$  を有限ランク自由加群とし、 $N_i, i \in I$  を  $A$ -加群の filtered な族とする。このとき自然な射

$$\mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(F, N_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(F, \mathrm{colim}_{i \in I} N_i)$$

は同型射である。従ってとくに、任意の射  $F \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$  はある  $i \in I$  に対する自然な射  $N_i \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$  を経由し、また、与えられた射  $F \rightarrow N_i$  が  $N_i \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$  と合成することで 0-射となるならば、ある  $N_i \rightarrow N_j$  があって  $F \rightarrow N_i \rightarrow N_j$  の合成が 0-射となる。以上の議論により、任意の対象  $\varphi \in \mathcal{I}_{\mathrm{colim}_{i \in I} N_i}$  に対しある  $i \in I$  が存在して、 $\varphi$  は  $N_i \rightarrow \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$  を合成することにより定まる函手  $\mathcal{I}_{N_i} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathrm{colim}_{i \in I} N_i}$  の像に属する、ということがわかる。

$M$  を有限表示加群とすると、圏  $\mathcal{I}_M$  は終対象を持つ (cf. [Remark 2.5](#))。任意の射  $M \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} N_i$  に対して、この射を合成することにより定まる函手  $\mathcal{I}_M \rightarrow \mathcal{I}_{\operatorname{colim}_{i \in I} N_i}$  での終対象の像は、ある  $i$  に対する函手  $\mathcal{I}_{N_i} \rightarrow \mathcal{I}_{\operatorname{colim}_{i \in I} N_i}$  の像に属する。このことは、射  $M \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} N_i$  がある  $N_i \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} N_i$  を経由することを示している。従って、自然な射

$$\operatorname{colim}_{i \in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{colim}_{i \in I} N_i)$$

は全射である。

**Remark 2.7.**  $M$  を  $A$ -加群であって、任意の  $A$ -加群の filtered な族  $N_i, i \in I$  に対して自然な射

$$\varphi : \operatorname{colim}_{i \in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{colim}_{i \in I} N_i)$$

が全射であるとする。このとき、 $M$  を有限表示  $A$ -加群の filtered colimit として  $M \cong \operatorname{colim}_{j \in J} M_j$  と表示することで、ある  $j$  が存在して  $\operatorname{id} : M \rightarrow M \cong \operatorname{colim}_{j \in J} M_j$  が  $M_j \rightarrow \operatorname{colim}_{j \in J} M_j$  を経由する。従って  $M$  は有限表示加群のレトラクトとなり、有限表示であることがわかる。[Remark 2.6](#)の結果とあわせると、以下が同値であることがわかったことになる：

- (i)  $M$  は有限表示加群である。
- (ii) 任意の  $A$ -加群の filtered な族  $N_i, i \in I$  に対して自然な射

$$\varphi : \operatorname{colim}_{i \in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{colim}_{i \in I} N_i)$$

は全射である。

### 3 テンソル積

この節ではテンソル積に関する Remark をする。

**Definition 3.1.**  $A$ -加群  $M, N$  の**テンソル積**とは、次を満たす加群  $M \otimes_A N$  のことである：任意の  $A$ -加群  $L$  に対して自然に

$$\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, L))$$

となる。

**Remark 3.2.**  $\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, L)) \cong \operatorname{Hom}_A(N, \operatorname{Hom}_A(M, L))$  であるから  $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$  である。

**Remark 3.3.** テンソル積の存在は次のように示される：まず  $M, N$  の一方が自由加群である場合、 $M \cong A^{\oplus I}$  とすれば、 $\operatorname{Hom}_A(M, -) \cong (-)^{\Pi I}$  となるので

$$\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, L)) \cong \operatorname{Hom}_A(N, L)^{\Pi I} \cong \operatorname{Hom}_A(N^{\oplus I}, L)$$

となる。つまりテンソル積  $A^{\oplus I} \otimes_A N$  は存在して自然な同型  $A^{\oplus I} \otimes_A N \cong N^{\oplus I}$  が成り立つ。次に  $M, N$  を任意の  $A$ -加群とする。 $M$  を自由加群の射の余核として表す。すなわち、

$$A^{\oplus I} \rightarrow A^{\oplus J} \rightarrow M \rightarrow 0$$


という完全列をひとつとる。  $\text{Hom}_A(-, \text{Hom}_A(N, L))$  は左完全であるから、

$$\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L)) \cong \ker(\text{Hom}_A(N^{\Pi^J}, L) \rightarrow \text{Hom}_A(N^{\Pi^I}, L)) \cong \text{Hom}_A(\text{coker}(N^{\oplus I} \rightarrow N^{\oplus J}), L)$$

となることがわかる。特にテンソル積  $M \otimes_A N$  は存在する。

**Lemma 3.4** (cf. [後藤渡辺, 1.106]).  $A$  を環、 $P$  を  $A$ -加群、 $M, N$  を  $A$ -加群、 $f : P \rightarrow M \otimes_A N$  を  $A$ -加群の射とする。

- (i)  $P$  が有限表示であるとき、有限生成部分加群  $i : M_0 \hookrightarrow M, j : N_0 \hookrightarrow N$  と射  $g : P \rightarrow M' \otimes_A N'$  が存在し、 $f = (i \otimes j) \circ g$  となる。特に、射  $h_1 : P \rightarrow M' \otimes_A N, h_2 : P \rightarrow M \otimes_A N'$  が存在し、 $f = (i \otimes \text{id}_N) \circ h_1, f = (\text{id}_M \otimes j) \circ h_2$  となる。
- (ii)  $P$  が有限表示射影的であるとき、有限生成自由加群  $F_1, F_2$ 、射  $i : F_1 \rightarrow M, j : F_2 \rightarrow N$ 、射  $g : P \rightarrow F_1 \otimes_A F_2$  が存在し、 $f = (i \otimes j) \circ g$  となる。特に、射  $h_1 : P \rightarrow F_1 \otimes_A N, h_2 : P \rightarrow M \otimes_A F_2$  が存在し、 $f = (i \otimes \text{id}_N) \circ h_1, f = (\text{id}_M \otimes j) \circ h_2$  となる。

*Proof.*  $M, N$  を有限生成部分加群の filtered colimit として表すことで、[Remark 2.7](#)より (i) がわかる。(ii) は (i) よりただちに従う。 

**Remark 3.5.** [Lemma 3.4 \(ii\)](#) を  $P = A$  として適用することで、テンソル積  $M \otimes_A N$  の元はすべて有限個の  $m_i \in M, n_i \in N$  により  $\sum m_i \otimes n_i$  のように表せることがわかる。

## 4 平坦加群

**Definition 4.1.**  $A$  を環、 $M$  を  $A$ -加群とする。  $0 \rightarrow F_1$  という対象からなる  $\mathcal{I}_M$  の充満部分圏を  $\mathcal{J}_M$  と書く。これは  $(\text{Mod}_A)_{/M}$  の有限ランク自由加群のなす充満部分圏と自然に圏同値である。

$\mathcal{I}_M$  は filtered であったが、 $\mathcal{J}_M$  は filtered とは限らない。本節ではそのことを見ていく。 $\mathcal{J}_M$  は filtered category の条件 [Definition 1.1 \(iii\)](#) 以外を満たすことは容易にわかる ([Lemma 2.3](#)の証明と同じようにする)。

**Lemma 4.2** (Equational Criterion of Flatness; cf. [松村, 定理 7.6]).  $A$  を環、 $M$  を平坦  $A$ -加群とする。

$$F_2 \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{p} M$$

を圏  $\mathcal{I}_M$  の対象とする。このとき、以下の図式が可換となるような有限自由加群  $F'$  と射  $f : F_1 \rightarrow F', r : F' \rightarrow M$  が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

特に、 $M$  が平坦であれば  $\mathcal{J}_M$  は  $\mathcal{I}_M$  において cofinal である。

*Proof.* 有限自由加群  $F$  と  $A$ -加群  $M$  に対して、自然な同型  $M \otimes_A F^* \cong \text{Hom}_A(F, M)$  により両辺を同一視する。

$\varphi^* : F_1^* \rightarrow F_2^*$  を  $\varphi$  の双対とし、 $k : \ker(\varphi^*) \rightarrow F_1^*$  を自然な包含射とする。 $M$  は平坦なので、自然な射  $M \otimes_A \ker(\varphi^*) \rightarrow \ker(\text{id}_M \otimes \varphi^*)$  は同型射であり、特に全射である (この証明では、この射が全射であ

ることしか必要ない！ [Remark 4.3](#)も見よ）。 $p \circ \varphi = 0$  であるから  $p \in \ker(\text{id}_M \otimes \varphi^*)$  であり、よってある元  $q \in M \otimes_A \ker(\varphi^*)$  が存在して  $p = (\text{id}_M \otimes k)(q)$  となる。よって、[Lemma 3.4 \(ii\)](#) を  $M = M, N = \ker(\varphi^*), P = A, f(1) = q \in M \otimes_A \ker(\varphi^*)$  として適用することで、ある有限ランク自由加群  $F'$  と射  $g : F'^* \rightarrow \ker(\varphi^*)$  が  $q \in \text{Im}(\text{id}_M \otimes g)$  となるようにとれる。すると、ある元  $r \in M \otimes_A F'^*$  が存在して  $q = (\text{id}_M \otimes g)(r)$  となる。自然な同型  $M \otimes_A F'^* \cong \text{Hom}_A(F', M)$  のもとで  $r : F' \rightarrow M$  と考える。 $f : F_1 \rightarrow F'$  を合成  $F'^* \xrightarrow{g} \ker(\varphi^*) \subset F_1^*$  の双対とする。図式

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{r} & M \end{array}$$

は  $r$  の取り方と  $f^*$  が  $\ker(\varphi^*)$  を経由することから可換である。 ✎

**Remark 4.3.** 一般に、 $A$ -加群の射  $f : N_1 \rightarrow N_2$  と  $A$ -加群  $M$  に対して、自然な射  $\varphi : M \otimes_A \ker(f) \rightarrow \ker(\text{id}_M \otimes f)$  は全射ですらない。図式

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes_A \ker(f) & \longrightarrow & M \otimes_A N_1 & \longrightarrow & M \otimes_A \text{Im}(f) & \longrightarrow & 0. \\ \varphi \downarrow & & \parallel & & \downarrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\text{id}_M \otimes f) & \longrightarrow & M \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{id}_M \otimes f} & M \otimes_A N_2 \end{array}$$

を見れば、 $\text{coker}(\varphi) \cong \ker(\psi)$  である。 $M$  が平坦でなければ  $\psi$  は一般に単射とはならないことは、平坦加群という用語が存在することからも十分に納得できる。

**Remark 4.4.** [Lemma 4.2](#) をより具体的に記述すると次のようになる： $M$  が平坦  $A$ -加群であるとき、

$$a_{ij} \in A, m_j \in M, (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n) \text{ が } \sum_j a_{ij} m_j = 0, (\forall i) \text{ を満たす}$$

ならば、正の整数  $s$  と  $b_{jk} \in A, n_k \in M, (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s)$  が存在して、

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0, (\forall i, k), \quad m_j = \sum_k b_{jk} n_k, (\forall j)$$

が成り立つ。実際、 $m_j$  を与える自由加群からの射  $p : A^n \rightarrow M$  と  $a_{ij}$  を与える射  $\varphi : A^r \rightarrow A^n$  を取れば、条件  $\sum_j a_{ij} m_j = 0$  は  $p \circ \varphi = 0$  ということである。さらに [Lemma 4.2](#) から射  $f : A^n \rightarrow A^s, r' : A^s \rightarrow M$  が存在して

$$\begin{array}{ccccc} A^r & \xrightarrow{\varphi} & A^n & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A^s & \xrightarrow{r'} & M \end{array}$$

が可換となるが、 $f$  を与えることは  $b_{jk}$  を与えることと等しく、 $r'$  を与えることは  $n_k$  を与えることに等しく、 $f \circ \varphi = 0$  は等式  $\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0$  を意味し、 $p = r' \circ f$  は等式  $m_j = \sum_k b_{jk} n_k$  を意味する。

**Lemma 4.5.**  $A$  を環、 $M$  を  $A$ -加群とする。このとき、次は同値：

- (i)  $M$  は平坦である。
- (ii)  $\mathcal{J}_M$  は  $\mathcal{I}_M$  において cofinal である。
- (iii)  $\mathcal{J}_M$  は filtered である。

(iv)  $\mathcal{J}_M$  は filtered であり、 $M \cong \operatorname{colim}_{(F \rightarrow M) \in \mathcal{J}_M} F$  である。

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) は Lemma 4.2 そのものである。(ii)  $\Rightarrow$  (iii) は初等的な圏論によりわかる。また、(iv)  $\Rightarrow$  (i) は平坦加群の filtered colimit が平坦であることから従う。

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) を確かめる。 $\mathcal{J}_F$  が filtered であると仮定する。自然な射  $\varphi : \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F \rightarrow M$  は明らかに全射である。単射であることを示す。 $A \rightarrow \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F$  を  $\varphi$  の核を与える射とすると、これはある自然な射  $F \rightarrow \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F$  を経由し、射  $f : A \rightarrow F$  を得る。また、 $A \rightarrow F \rightarrow M$  の合成は 0-射である。 $f$  と 0-射という二つの射  $\mathcal{J}_M$  の射  $A \rightrightarrows F$  に  $\mathcal{J}_M$  が filtered であることの条件を使うと、ある  $g : F \rightarrow F'$  が存在して  $g \circ f = 0$  となることがわかる。従って  $A \rightarrow \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{J}_M} F$  は 0-射であり、 $\varphi$  は単射である。以上ですべて示された。  $\pencil$

**Corollary 4.6** (Lazard の定理).  $A$  を環、 $M$  を  $A$ -加群とする。このとき  $M$  が平坦であることと、 $M$  が有限自由加群の filtered colimit として表せることは同値である。

*Proof.* Lemma 4.5 より直ちに従う。  $\pencil$

**Corollary 4.7.**  $A$  を環、 $M$  を有限表示平坦  $A$ -加群とする。このとき  $M$  は射影的である。

*Proof.* 有限自由加群  $F_2, F_1$  と射  $F_2 \rightarrow F_1$  で

$$F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が完全となるものを一つとる。Equational Criterion より、以下の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

ここで  $F$  は有限自由加群である。図式の可換性から  $r : F \rightarrow M$  は全射である。また、 $(f_2, f_1)$  が余核の間に引き起こす射  $M \rightarrow F$  は  $r$  の分裂を与える。よって  $M$  は射影加群である。  $\pencil$

**Remark 4.8.** 有限生成平坦加群は一般に射影的とはならない (cf. [Stacks, Tag 00NY])。

**Corollary 4.9.**  $A$  を局所環、 $k$  を  $A$  の剰余体、 $M$  を有限生成平坦  $A$ -加群とする。このとき  $M$  は自由  $A$ -加群である。


*Proof.*  $M$  は有限生成なので、有限自由加群  $F_1$  と全射  $p : F_1 \rightarrow M$  で  $p \otimes 1 : F_1 \otimes_A k \rightarrow M \otimes_A k$  が同型となるものが存在する。 $p$  が同型射であれば良い。有限自由加群  $F_2$  と射  $\varphi : F_2 \rightarrow F_1$  で  $p \circ \varphi = 0$  となるものを任意にとる。 $\varphi$  が 0-射であることを示せば良い。Equational Criterion より、以下の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

ここで  $F$  は有限自由加群である。図式の可換性から  $r$  は全射である。また  $p$  が全射であることと  $F$  が自由加

群であることから、射  $g: F \rightarrow F_1$  が存在して以下の図式が可換となる：

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & F_1 \\ p \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow p \\ M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M. \end{array}$$

図式全体に  $k$  をテンソルして中山の補題を用いることで、 $g \circ f: F_1 \rightarrow F_1$  は全射であることがわかる。 $F_1$  は有限自由加群であるので、よって  $g \circ f$  は同型射であり、特に  $f$  は単射であることがわかる。一方、 $f \circ \varphi = 0$  であったから、 $\varphi$  は 0-射である。従って  $p$  は単射となる。 


## 5 ねじれなし加群

この節はおまけみたいな感じで書いてます。


**Definition 5.1.**  $A$  を整域、 $M$  を  $A$ -加群とする。 $M$  が**ねじれなし** (torsion free) であるとは、任意の元  $0 \neq a$  に対して  $a$  倍写像  $M \rightarrow M$  が単射であることを言う。

**Lemma 5.2.**  $A$  を整域、 $M$  を  $A$ -加群、 $K$  を  $A$  の商体とする。以下は同値：

- (i)  $M$  はねじれなしである。
- (ii) 自然な包含射  $A \subset K$  により引き起こされる射  $M \rightarrow M \otimes_A K$  は単射である。
- (iii) 任意の一元生成イデアル  $I$  に対して、 $\text{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  である。
- (iv) 任意の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して  $M_{\mathfrak{p}}$  はねじれなし  $A_{\mathfrak{p}}$ -加群である。
- (v) 任意の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に対して  $M_{\mathfrak{m}}$  はねじれなし  $A_{\mathfrak{m}}$ -加群である。


*Proof.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) は定義より従う。局所化は平坦であるから、(ii)  $\Leftrightarrow$  (iv) が従う。(iv)  $\Leftrightarrow$  (iii) は自明である。 $A$ -加群  $\ker(M \rightarrow M \otimes_A K)$  が 0 かどうかは、任意の極大イデアルによる局所化で 0 となるかどうかであるから、(v)  $\Leftrightarrow$  (ii) が従う。以上ですべて示された。 

**Corollary 5.3.** 平坦加群はねじれなし加群である。

*Proof.* Lemma 5.2 の (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) より従う。 


**Definition 5.4.** 整域  $A$  が **Prüfer 整域** であるとは、すべてのねじれなし加群が平坦であることを言う。

**Corollary 5.5.** 任意の局所環が付値環であれば Prüfer 整域である。特に、Dedekind 環と付値環は Prüfer 整域である。

*Proof.* 環  $A$  は任意の局所環が付値環であるとする。 $M$  を  $A$  上のねじれなし加群とする。局所化をすることで、 $A$  は付値環であるとしても良い。よって  $A$  の任意の有限生成イデアルは一元生成である。従って (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) より  $M$  は平坦となる (cf. [アティマク, 演習 2.26])。 

**Proposition 5.6.**  $A$  を Prüfer 整域とする。このとき任意の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して  $A_{\mathfrak{p}}$  は付値環である。特に、Noether な Prüfer 整域は Dedekind 環となる。

*Proof.*  $A$  を局所 Prüfer 整域として、 $A$  が付値環であることを示せば良い。 $I$  を  $A$  の有限生成イデアルとす

る。 $A$  が付値環であることを示すには、 $I$  が一元生成であることを示せば良い (cf. [Stacks, Tag 090Q])。  $I$  はねじれなし  $A$ -加群  $A$  の部分加群なのでねじれなしである。従って平坦である。一方、 $A$  は局所環であり、 $I$  は有限生成平坦加群であるので、Corollary 4.9より  $I$  は有限自由加群である。単射  $I \subset A$  の存在は、 $I$  が一元生成であることを示している (cf. [アティマク, 演習 2.11])。 

## 参考文献

[アティマク] M. Atiyah, I. Macdonald, (新妻 弘 訳), 「可換代数入門」, 共立出版, (2006).

[後藤渡辺] 後藤 四郎, 渡辺 敬一, 「可換環論」, 日本評論社, (2011).

[松村] 松村 英之, 「可換環論」, 共立出版, (1980).

[Stacks] The Stacks Project Authors, [Stacks Project](#).