

# Hartshorne Exercise II.8.2

ゆじ

2021 年 12 月 15 日

このノートでは、[Ha, 演習 II.8.2] に解答を与える。 $k$  を基礎体とする。

**Exercise.**  $X$  を  $k$  上  $n$  次元の代数多様体、 $\mathcal{E}$  を  $X$  上のランク  $r > n$  の局所自由層、 $V \subset H^0(X, \mathcal{E})$  を  $\mathcal{E}$  を生成する大域切断のなす部分空間とする。このとき、大域切断  $0 \neq s \in V$  であって、対応する射  $s : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}$  の余核が局所自由となるものが存在することを示せ。

$V$  を有限次元と仮定しても良いことに注意しておく： $f : V_X \rightarrow \mathcal{E}$  を  $V \subset H^0(X, \mathcal{E})$  に対応する射とする。仮定から  $f$  は全射である。 $V = \bigcup_{i \in I} V_i$  と有限次元部分空間の和として表す。 $f_i : V_{i,X} \rightarrow \mathcal{E}$  を  $V_i \subset V$  の  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  に沿った基底変換と  $f$  の合成とする。このとき  $\bigcup_{i \in I} \text{Im}(f_i) = \mathcal{E}$  であるが、 $X = \bigcup_{j \in J} U_j$  と有限個のアフィンスキームで覆えば、各  $j$  に対して  $i_j$  が存在して  $\text{Im}(f_{i_j}|_{U_j}) = \mathcal{E}|_{U_j}$  となることがわかり、これらの  $i_j$  より大きな  $i$  をとることで、十分大きな  $i$  に対して  $\text{Im}(f_i) = \mathcal{E}$  となることがわかる。すなわち、ある有限次元部分空間  $V_0 \subset V$  が存在して、 $\mathcal{E}$  は  $V_0$  に属する大域切断で生成される。

$V$  を有限次元として話を進める。

**Notations.**      • 基礎体を  $k$  と置く。

- スキームの射  $f : T \rightarrow S$  と  $S$  上の対象  $F$  ( $S$ -スキームや、 $S$  上のスキームの射や、 $S$  上の準連接層など) に対し、 $F_T$  や  $F|_T$  や  $f^*F$  で  $F$  の射  $T \rightarrow S$  による基底変換を表す。

## 1 大域切断の零点集合

$n$  次元代数多様体  $X$  上のランク  $r$  の局所自由層  $\mathcal{E}$  と  $\mathcal{E}$  を生成する大域切断のなす  $d$ -次元部分線形空間  $V \subset H^0(X, \mathcal{E})$  を与える。元  $s \in V$  を取り、 $s$  の零点集合を調べる。

まず、 $s = 0$  で定まる  $X$  の閉部分スキームがどのように構成されるか見る。

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{s_X} V_X \rightarrow \mathcal{E}$$

を点  $p \in X$  に基底変換すると、

$$k(p) \xrightarrow{s} V \rightarrow \mathcal{E}_p$$

を得る。 $s(p) = 0$  の意味は、この射の列の合成が 0 射だということである。双対をとることで、 $s(p) = 0$  は

$$\mathcal{E}_p^\vee \rightarrow V^\vee \xrightarrow{s^\vee} k(p)$$

の合成が 0 射であることと同値である。従って、 $s = 0$  という閉部分スキームは

$$(s = 0) \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker}(\mathcal{E}^\vee \rightarrow V_X^\vee \xrightarrow{s_X^\vee} \mathcal{O}_X)$$

と定義される。

閉部分スキーム  $(s = 0)$  は、 $s$  を 0 でない定数倍で置き換えても変わらない注意する。すると、各  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の元に対して  $X$  の閉部分スキームが定まることになり、 $\mathbb{P}(V^\vee)$  でパラメーター付けられた  $X$  の閉部分スキームの族

$$H \subset \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$$

で、各  $s \in V$  に対して、対応する  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の fiber が  $s = 0$  となるもの、の存在を期待したくなる。この  $H$  を構成する。

$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \ker(V_X^\vee \rightarrow \mathcal{E})$  と置くと、双対をとることで全射

$$V_X^\vee \rightarrow \mathcal{K}$$

を得る。この全射は  $X$  上の射影束の閉埋め込み

$$j : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$$

を定める。 $j$  が求める  $H \subset \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$  を定めることを示す。元  $0 \neq s \in V$  を取れば、一点からの射  $\text{Spec}(k) \xrightarrow{s} \mathbb{P}(V^\vee)$  が定まり、基底変換することで閉埋め込み  $i_s : X \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$  を得る。 $j$  を  $i_s$  に沿って基底変換すると、 $X$  の閉部分スキーム  $s_0 : Y \subset X$  が定まる：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow i_s \\ \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X. \end{array}$$

この  $X$  上の図式を点  $p \in X$  まで基底変換すれば、図式

$$\begin{array}{ccc} Y_p & \longrightarrow & p \\ \downarrow & & \downarrow s \\ \mathbb{P}(\mathcal{K}^\vee|_p) & \xrightarrow{j_p} & \mathbb{P}(V^\vee). \end{array}$$

を得る。ここで  $Y_p$  は  $p$  または  $\emptyset$  である。

$$Y_p \cong p \iff s \in \text{Im}(j_p) \iff s \in \text{Im}(\mathcal{K}|_p \rightarrow V) \iff s \in \ker(V \rightarrow \mathcal{E}_p)$$

であるから、 $Y$  は  $s = 0$  で定まる閉部分スキームである。 $Y$  は  $j$  と射影  $\mathbb{P}(V^\vee) \times_k X \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$  の合成の  $s$  が定める  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の点での fiber であるから、よって閉埋め込み  $j : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$  は、各  $s \in V$  に対して、対応する  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の fiber が  $s = 0$  となるような、 $\mathbb{P}(V^\vee)$  でパラメーターづけられた  $X$  の閉部分スキームの族を定める。

## 2 問題の解答

この節では、[Section 1](#)の議論を念頭において、問題に解答を与える。

*Proof.*  $\mathcal{E}$  は自由層でないとして良い。

$d = \dim V$  と置くと、全射  $V_X \rightarrow \mathcal{E}$  の存在から  $d > r > n$  である。 $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \ker(V_X \rightarrow \mathcal{E})$  と置くと、 $\mathcal{K}$  のランクは  $d - r > 0$  である。双対をとることで全射  $V|_X^\vee \rightarrow \mathcal{K}^\vee$  を得る。この全射が引き起こす  $X$  上の射影束の閉埋め込み

$$j : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times_k X$$

と射影  $\mathbb{P}(V^\vee) \times_k X \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$  を合成すると、射

$$f : \mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$$

を得る。 $\dim(\mathbb{P}_X(\mathcal{K}^\vee)) = d - r + n - 1 < d - 1 = \dim \mathbb{P}(V^\vee)$  なので  $f$  は全射ではない。この  $f$  の像に入らない点  $\bar{s} \in \mathbb{P}(V^\vee)$  を与える元  $0 \neq s \in V$  を取れば、 $\bar{s}$  の fiber は  $\emptyset$  であるから、 $(s = 0) = \emptyset$  となる。ここで、元  $s \in V$  の定める射  $\mathcal{O}_X \xrightarrow{s_X} V_X \rightarrow \mathcal{E}$  の双対

$$\mathcal{E}^\vee \rightarrow V_X^\vee \xrightarrow{s_X^\vee} \mathcal{O}_X$$

の余核がちょうど  $s = 0$  で定まる閉部分スキームの構造層であることに注意すると、今、 $(s = 0) = \emptyset$  であるから、 $\mathcal{E}^\vee \rightarrow V_X^\vee \xrightarrow{s_X^\vee} \mathcal{O}_X$  の合成が全射であることがわかる。従って  $s$  が所望の大域切断である。  $\pencil$

## 参考文献

[Ha] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New Tork, 1977. Graduate Text in Mathematics, No. 52.