

# Hartshorne Exercise I.4.9

ゆじ

2021 年 12 月 15 日

このノートでは、[Ha, 演習 I.4.9] に幾何的な解答を与え、いくつかの関連する結果について証明する。基礎体  $k$  は代数閉体であるとする。

**Exercise** ([Ha, 演習 I.4.9]).  $X \subset \mathbb{P}^N$  を  $r$  次元の部分多様体とし、 $N \geq r + 2$  とする。 $P \notin X$  と線形部分空間  $\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$  を適当にとるとき、点  $P$  から  $\mathbb{P}^{N-1}$  への射影は  $X$  から像  $X' \subset \mathbb{P}^{N-1}$  への双有理射を引き起こすことを証明せよ。

## 1 定義や記号について

まずこのノートで用いる記号について説明しておく。

**Notations.** 体  $k$  は代数閉体とする。

- 線形空間  $V$  や代数多様体  $X$  上の局所自由層  $E$  に対し、 $V^\vee$  や  $E^\vee$  などでその双対を表す。
- 線形空間  $V$  や代数多様体  $X$  上の局所自由層  $E$  に対し、 $\mathbb{P}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Proj}(\text{Sym}(V))$ ,  $\mathbb{P}_X(E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Proj}_X(\text{Sym}(E))$  と置く。 $V$  の 0 でない元  $v \in V$  は全射  $V^\vee \rightarrow k \cdot v^\vee$  を定め、この全射が  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の点を一意的に定める。逆に  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の点は  $V$  の 0 でない元を定数倍を除いて定める。
- 線形空間  $V$  に対し、 $\mathbb{G}(V, r)$  で次元  $r$  の線形空間への全射  $V \rightarrow W$  の同値類 (核が等しいときに同値と定める) を閉点とするグラスマン多様体を表す。特に、 $\mathbb{G}(V, 2)$  は  $\mathbb{P}(V)$  内の直線を閉点とする多様体である。同じく、代数多様体  $X$  上の局所自由層  $E$  に対し、 $\mathbb{G}_X(E, r)$  でグラスマン束を表す。
- 代数多様体  $X$  に対し、 $\text{Hilb}^n(X)$  で  $X$  上の二点のなす Hilbert スキームを表す。 $\text{Hilb}^n(X)$  の閉点は  $X$  の長さ  $n$  の閉部分スキームと 1:1 に対応する。

## 2 平面と多様体の交差について

この演習問題を証明するために、 $X$  と  $\mathbb{P}^N$  内の線形部分多様体がどれくらい・どのように交わるかについて調べておく。なお、以下の Lemma 2.1 (ii) はこのノートでは用いないが、全く同じ方法でわかることなので記述しておく。

**Lemma 2.1.**  $V$  を次元  $r + 1$  の線形空間、 $0 < s < r$  を整数とする。

- (i)  $X \subset \mathbb{P}(V)$  を次元  $d < r - s$  の閉部分多様体とする。このとき、 $X$  と交わらない  $\mathbb{P}(V)$  内の次元  $s$  の平面は  $\mathbb{G}(V, s + 1)$  の開集合をなす。

(ii)  $X \subset \mathbb{P}(V)$  を次元  $d = r - s$  の閉部分多様体とする。このとき、 $X$  と高々有限個の点でのみ交わる  $\mathbb{P}(V)$  内の次元  $s$  の平面は  $\mathbb{G}(V, s+1)$  の開集合をなす。

**証明.** まずはグラスマン多様体  $\mathbb{G}(V, s+1)$  によってパラメタライズされた  $\mathbb{P}(V)$  内の次元  $s$  の平面の族について調べる。 $\mathbb{G}(V, s+1)$  上のトートロジカルな全射を  $V_{\mathbb{G}(V, s+1)} \rightarrow \mathcal{U}$  と置く。ここで  $\mathcal{U}$  はランク  $s+1$  の局所自由層である。この全射が引き起こす閉埋め込み

$$\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$$

を  $\mathbb{P}(V)$  側から調べる。各点  $p \in \mathbb{P}(V)$  上の  $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})$  の fiber  $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})|_p \subset \mathbb{G}(V, s+1)$  は点  $p$  を通る次元  $s$  の平面を閉点とする多様体である：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\text{proj.}} & \mathbb{P}(V) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow p \\ \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})|_p & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) & \longrightarrow & * \end{array}$$

点  $p$  を与える全射も同じ記号  $p: V \rightarrow k$  で表す。 $\mathbb{P}(V)$  内の次元  $s$  の平面は次元  $s+1$  の線形空間  $W$  への全射  $V \rightarrow W$  と対応し、その平面が点  $p$  を通ることは、全射  $V \rightarrow W$  の核が  $\ker(p)$  に含まれることを意味する。従って、点  $p$  を通る次元  $s$  の平面は、次元  $s$  の線形空間  $W'$  への全射  $\ker(p) \rightarrow W'$  と対応する：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(p) & \longrightarrow & V & \xrightarrow{p} & k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & k \longrightarrow 0 \end{array}$$

$p: V \rightarrow k$  は  $\mathbb{P}(V)$  上のトートロジカルな全射  $V_{\mathbb{P}(V)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$  の点  $p$  への pull-back であり、従って  $\ker(p)$  は  $\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)$  の点  $p$  への pull-back であることに注意する (cf. [4], Remark 4)。以上より、 $\mathbb{P}(V)$  上の多様体の同型

$$\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \cong \mathbb{G}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1), s)$$

が得られる。

**Lemma 2.1**の証明を完了するため、 $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$  と  $\mathbb{G}(V, s+1) \times X$  の交差を考える。 $Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{G}(V, s+1) \times X)$  と置く (スキーム論的交差)。射影  $Y \rightarrow X$  はグラスマン束  $\mathbb{G}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1), s) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  の  $X$  への引き戻しであるから、 $Y \cong \mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s)$  である。従って

$$\dim Y = d + s(r - s) = rs - s^2 + d$$

となることがわかる。射影  $f: Y \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$  の像  $\text{Im}(f)$  は、ちょうど  $X$  と交わる  $s$  次元の平面  $H \subset \mathbb{P}(V)$  を閉点とする  $\mathbb{G}(V, s+1)$  の閉部分多様体であり、さらに各点  $[H] \in \text{Im}(f)$  での  $f$  の fiber は  $H \cap X$  と同型である。

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{G}(V, s+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H \cap X & \longrightarrow & [H]. \end{array}$$

$\dim(\mathbb{G}(V, s+1)) = (r - s)(s + 1) = rs - s^2 + r - s$  であることに注意する。(i) を示す。 $d < r - s$  なので、 $\dim Y < \dim(\mathbb{G}(V, s+1))$  であり、特に、射影  $f: Y \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$  の像は真の閉部分集合である。この

ことは (i) を示している。(ii) を示す。 $d + s = r$  なので  $X$  と次元  $s$  の任意の平面  $\subset \mathbb{P}(V)$  が交わることから、射影  $f : Y \rightarrow \mathbb{G}(V, s + 1)$  は全射である。一方、 $\dim Y = rs - s^2 + d = rs - s^2 + r - s = \dim(\mathbb{G}(V, s + 1))$  であるから、 $f$  は生成点で有限である。すなわち、 $\mathbb{G}(V, s + 1)$  のある開集合上で  $f$  の fiber は有限集合となる。このことは (ii) を示している。以上で Lemma 2.1 の証明を完了する。  $\pencil$

Lemma 2.1 (i) をより詳しく調べる。

**Lemma 2.2.**  $V$  を次元  $r + 1$  の線形空間、 $0 < s < r$  を整数、 $X \subset \mathbb{P}(V)$  を次元  $d < r - s$  の閉部分多様体とする。このとき、 $X$  と交わる  $\mathbb{P}(V)$  内の次元  $s$  の平面のうちほとんどは  $X$  と一点で交わる。

**証明.** 2 点以上で交わる次元  $s$  の平面の集合を調べる。 $\text{Hilb}^2(X)$  を  $X$  上の 2 点の Hilbert スキーム、 $\mathcal{U} \subset \text{Hilb}^2(X) \times X$  を普遍的な閉部分スキーム、つまり長さ 2 の閉部分スキーム  $Z \subset X$  に対応する点  $[Z] \in \text{Hilb}^2(X)$  上で

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\subset} & \text{Hilb}^2(X) \times X & \xrightarrow{p} & \text{Hilb}^2(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{U}|_{[Z]} \cong Z & \xrightarrow{\subset} & X & \longrightarrow & * \end{array}$$

となる閉部分スキームとする。ただし  $p : \text{Hilb}^2(X) \times X \rightarrow \text{Hilb}^2(X)$  は射影である。特に合成  $\mathcal{U} \subset \text{Hilb}^2(X) \times X \xrightarrow{p} \text{Hilb}^2(X)$  は有限平坦射でランク 2 である。閉埋め込み  $X \subset \mathbb{P}(V)$  を与える全射  $V_X \rightarrow L$  を  $\text{Hilb}^2(X) \times X$  上へ pull-back すれば、射の列

$$V_{\text{Hilb}^2(X) \times X} \rightarrow L_{\text{Hilb}^2(X) \times X} \rightarrow L_{\mathcal{U}}$$

を得る。これを射影  $p$  で  $\text{Hilb}^2(X)$  上へ push すれば、ランク 2 の局所自由層への射

$$\Psi : V_{\text{Hilb}^2(X)} \rightarrow p_*(L_{\mathcal{U}})$$

を得る。 $V_X \rightarrow L$  が閉埋め込みを与えることから (各  $\text{Hilb}^2(X)$  の閉点の上に基底変換して確かめることで) 射  $\Psi$  が全射であることがわかる。

各長さ 2 の閉部分スキーム  $Z \subset X$  に対し、全射  $\Psi_Z : V \rightarrow L_Z$  が  $\mathbb{P}(V)$  内の直線を定める。全射  $V \rightarrow W$  がこの直線を含む次元  $s$  の平面  $\subset \mathbb{P}(V)$  を定めるとする。このとき次元  $s - 1$  の線形空間への全射  $\ker(\Psi_Z) \rightarrow W'$  が引き起こされる：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\Psi_Z) & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\Psi_Z} & L_Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & L_Z \longrightarrow 0. \end{array}$$

逆に次元  $s - 1$  の線形空間への全射  $\ker(\Psi_Z) \rightarrow W'$  は包含射  $\ker(\Psi_Z) \subset V$  で push-out をとることで次元  $s + 1$  の線形空間への全射  $V \rightarrow W$  を引き起こし、これらは 1:1 に対応する。 $\text{Hilb}^2(X)$  上の包含射  $\ker(\Psi) \subset V_{\text{Hilb}^2(X)}$  はグラスマン束の間の閉埋め込み

$$\mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s - 1) \subset \mathbb{G}(V, s + 1) \times \text{Hilb}^2(X)$$

を引き起こすが、以上の議論により、各閉点  $[Z] \in \text{Hilb}^2(X)$  の fiber は

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s-1) & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) \times \text{Hilb}^2(X) & \xrightarrow{p} & \text{Hilb}^2(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow [Z] \\ \mathbb{G}(\ker(\Psi_Z), s-1) & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{G}(V, s+1) & \longrightarrow & * \end{array}$$

となり、すなわち、 $\mathbb{P}(V)$  内の次元  $s$  の平面のうち  $Z$  の定める  $\mathbb{P}(V)$  内の直線を通るものたちをパラメタライズする多様体が現れる。従って、射影  $g: \mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s-1) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$  の像はちょうど  $X$  と二点以上で交わる次元  $s$  の平面たちからなる多様体である。特に、射影  $f: \mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$  の像に含まれる ( $f$  については Lemma 2.1 の証明中を参照)。

$X \subset \mathbb{P}(V)$  を超平面で  $d$  回切ったのちできる 0 次元スキームのある点を選び、その点を通るように異なる超平面をいくつか選ぶことで、 $f$  のある fiber が 0 次元であることがわかる。従って fiber の次元の上半連続性 (cf. [Ha, Exercise II.3.22]) より  $f$  は generically finite であることがわかる。従って  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s))$  である。また、

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{G}_{\text{Hilb}^2(X)}(\ker(\Psi), s-1)) &= 2d + (s-1)((r+1-2) - (s-1)) = 2d + (s-1)(r-s) \\ &< d + s(r-s) = \dim(\mathbb{G}_X(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X, s)) = \dim(\text{Im}(f)) \end{aligned}$$

であるから、 $\text{Im}(g)$  は  $\text{Im}(f)$  の真の閉部分集合となる。このことは  $X$  と交わる次元  $s$  の平面のうちほとんどは  $X$  と 1 点で交わるということを示している。以上で Lemma 2.2 の証明を完了する。  $\square$

### 3 証明

この節では、冒頭の問題 [Ha, 演習 I.4.9] を少し一般的な形で証明する。

**Proposition 3.1.**  $X \subset \mathbb{P}^N$  を  $r$  次元の部分多様体、 $s$  を  $N \geq r + s + 2$  となる自然数とする。次を満たす線形部分多様体  $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^N$  を閉点に持つ  $\mathbb{G}(N+1, s+1)$  の部分空間はある稠密開集合を含む：

- $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^N$  は  $X \subset \mathbb{P}^N$  と交わらず、 $\mathbb{P}^s$  に沿った射影  $\mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-s}$  は  $X$  から像  $X' \subset \mathbb{P}^{N-s}$  への双有理射を引き起こす。

**証明.**  $V = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$  と置き、 $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$  と書く。 $\mathbb{G}(V, s+1)$  上のトートロジカルな全射を  $V_{\mathbb{G}(V, s+1)} \rightarrow \mathcal{U}$  と置き、その核を  $\mathcal{K}$  とする。閉埋め込み  $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$  に沿った爆発を  $B$  と置くと、[ϕ, Corollary 9] より  $B$  は  $R \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{K})$  上の  $\mathbb{P}^{s+1}$ -束であり、 $R$  上の  $\mathbb{P}^{s+1}$ -束の構造は、

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_R & \longrightarrow & V_R & \longrightarrow & \mathcal{U}_R \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{R/\mathbb{G}(V, s+1)}(1) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{U}_R \longrightarrow 0 \end{array}$$

という完全列の間の射ができるようなランク  $s+2$  の  $R$  上の局所自由層  $\mathcal{E}$  により  $B \cong \mathbb{P}_R(\mathcal{E})$  で与えられている。全射  $V_R \rightarrow \mathcal{E}$  はグラスマン多様体への射  $q: \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+2)$  を引き起こすことに注意する。 $\mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V)$  における  $\mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{U})$  と  $\mathbb{G}(V, s+1) \times X$  のスキーム論的交差を  $D$  と置き、

$\mathbb{G}(V, s+1) \times X$  の  $D$  に沿った爆発を  $B_X$  と置く。以下の図式ができる (以下のように射に名前をつける) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_X & \hookrightarrow & B & \xrightarrow[\sigma]{\mathbb{P}^{s+1}\text{-束}} & R & \xrightarrow{q} & \mathbb{G}(V, s+2) \\
 \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow p & & \\
 \mathbb{G}(V, s+1) \times X & \hookrightarrow & \mathbb{G}(V, s+1) \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\text{proj.}} & \mathbb{G}(V, s+1) & & 
 \end{array}$$

閉点  $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{G}(V, s+1)}(\mathcal{K})$  は  $p, q$  での像をとることで  $p(x) \in \mathbb{G}(V, s+1)$  に対応する  $\mathbb{P}(V)$  の  $s$  次元平面  $H_{p(x)}$  と  $q(x) \in \mathbb{G}(V, s+2)$  に対応する  $\mathbb{P}(V)$  の  $s+1$  次元平面  $H_{q(x)}$  を定め、 $H_{p(x)} \subset H_{q(x)}$  となる。さらに  $\sigma$  での  $x$  の fiber  $\sigma^{-1}(x)$  の  $\pi$  での像は、ちょうど  $H_{q(x)}$  となる、つまり  $\pi(\sigma^{-1}(x)) = H_{q(x)}$  である。

$Z \subset \mathbb{G}(V, s+2)$  を  $X$  と交わる  $s+1$  次元平面のなす閉部分集合とする。各  $s$  次元平面  $H \subset \mathbb{P}(V)$  に対して、 $H$  に含まれない  $X$  の点が存在しないならば、 $X \subset H$  であるから、点  $[H] \in \mathbb{G}(V, s+1)$  の fiber  $p^{-1}([H])$  と  $q^{-1}(Z)$  は明らかに交わり、 $H$  に含まれない  $X$  の点が存在するならば、その点をとることで構成される新たな  $s+1$  次元平面  $H'$  の定める  $R$  の点は  $q^{-1}(Z)$  と  $p^{-1}([H])$  のどちらにも含まれる。従って射  $p|_{q^{-1}(Z)} : q^{-1}(Z) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$  は全射である。 $N \geq r+s+2$  であるから、Lemma 2.2 より、 $X$  とちょうど 1 点で交わる  $s+1$  次元平面からなる稠密開集合  $V \subset Z$  がある。 $V \subset Z$  は稠密であり、 $p|_{q^{-1}(Z)} : q^{-1}(Z) \rightarrow \mathbb{G}(V, s+1)$  は全射であるから、 $p(q^{-1}(V)) \subset \mathbb{G}(V, s+1)$  は稠密な構成可能集合であり、特に開である。

$N \geq r+s+2$  であるから、Lemma 2.1 より、 $X$  と交わらない  $s$  次元平面のなす空でない開集合  $U \subset \mathbb{G}(V, s+1)$  がある。各点  $[H] \in U$  に対し、 $H$  を軸とする射影  $\mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K}_{[H]}) \cong \mathbb{P}^{N-s}$  を  $X$  に制限したものは ( $H$  が  $X$  と交わらないことから)  $\mathbb{G}(V, s+1)$  上の二つの射  $B_X \rightarrow B \rightarrow R$  の合成射  $r : B_X \rightarrow R$  の点  $[H]$  での fiber に他ならない。点  $x \in R$  について

$$\begin{aligned}
 & x \in \text{Im}(r : B_X \rightarrow R) \\
 \iff & \pi(\sigma^{-1}) \cap X \neq \emptyset \\
 \iff & X \text{ と } q(x) \text{ に対応する } \mathbb{P}(V) \text{ の } s+1 \text{ 次元平面が交わる} \\
 \iff & x \in q^{-1}(Z)
 \end{aligned}$$

であるから、 $\text{Im}(r) = q^{-1}(Z)$  となる。点  $x \in q^{-1}(V)$  の  $r : B_X \rightarrow R$  での fiber はちょうど  $X$  と  $q(x)$  に対応する  $\mathbb{P}(V)$  の  $s+1$  次元平面のスキーム論的交差であり、すなわちスキーム論的に 1 点である。従って、 $r$  は空でない開集合  $r^{-1}(q^{-1}(V)) \subset B_X$  上で同型射である。

$W \stackrel{\text{def}}{=} p(q^{-1}(V)) \cap U \subset \mathbb{G}(V, s+1)$  と置く。各点  $[H] \in W$  に対して、 $p^{-1}([H]) \cap q^{-1}(V) \neq \emptyset$  であるから  $H$  を軸とする射影  $r_H : X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K}_{[H]}) \cong \mathbb{P}^{N-s}$  は像への双有理射である。また、 $W \subset U$  であるから、 $s$  次元平面  $H$  は  $X$  とは交わらない。よって  $W$  は所望の開集合である。以上で証明を完了する。  $\pencil$

## 参考文献

- [Ha] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Text in Mathematics, No. 52.
- [ゆ] ゆじノート, *Blowing Up along Linear Subvariety*.