Equational Criterion of Flatness

ゆじ

2021 年 12 月 15 日

これは平坦性の Equational Criterion などに関するノートである。このノートでは、可換環のことをたんに環と呼ぶ。平坦加群の定義は、以下を採用する：

Definition 0.1. A を環とする。A-加群 M が**平坦** (flat) であるとは、任意の単射 $N_1 \to N_2$ に対して $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ も単射であることを言う。

1 定義など

圏 $\mathcal{C}$ と対象 $x \in \mathcal{C}$ に対して、$\mathcal{C}_{/x}$ により slice 圏を表す。圏 $\mathcal{C}_{/x}$ の対象は x への $\mathcal{C}$ の射 $y \to x$ であり、圏 $\mathcal{C}_{/x}$ の射は x への射と可換であるような $\mathcal{C}$ の射である。

Definition 1.1. 圏 I が **filtered** であるとは、以下の条件を満たすことを言う：

(i) $I \neq \varnothing$ である。
(ii) 任意の対象 $i, j \in I$ に対し、対象 $k \in I$ と射 $i \to k, j \to k$ が存在する。
(iii) 任意の対象 $i, j \in I$ と任意の射 $f, g : i \to j$ に対し、ある射 $h : j \to k$ が存在し、$h \circ f = h \circ g$ となる。

このノートの話は、filtered category の定義の条件 (iii) が本質的な役割を果たす話である。

Definition 1.2. filtered category I の充満部分圏 J が **cofinal** であるとは、任意の対象 $i \in I$ に対してある対象 $j \in J$ と I の射 $i \to j$ が存在することを言う。

filtered category の cofinal な部分圏はまた filtered となることが容易に確認できる。

2 有限表示加群

この節では有限表示加群とコンパクト性に関する Remark をする。

Definition 2.1. A を環、M を A-加群とする。圏 $\mathcal{I}_M$ を以下で定める：

- 圏 $\mathcal{I}_M$ の対象は、A-加群の射の列
$$F_2 \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{p_\varphi} M$$
であり、以下を満たすものである：
(i) F_1, F_2 は有限ランク自由加群。

(ii) $p_\varphi \circ \varphi = 0$.
圏 $\mathcal{I}_M$ の対象はたんに $\varphi : F_2 \to F_1$ や φ のように表される。

- 二つの対象 $\varphi : F_2 \to F_1, \varphi' : F_2' \to F_1'$ の間の射の集合は、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}_M}(\varphi, \varphi') :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{(\mathsf{Mod}_A)_{/M}}(\mathrm{coker}(\varphi), \mathrm{coker}(\varphi'))$$

  と定める。

$(\mathsf{Mod}_A)_{/M}$ の有限表示部分加群のなす充満部分圏を $\mathsf{FP}_{/M}$ と置く。定義から、函手

$$\mathcal{I}_M \to \mathsf{Mod}_A, (\varphi : F_2 \to F_1) \mapsto \mathrm{coker}(\varphi)$$

により $\mathcal{I}_M$ は $\mathsf{FP}_{/M}$ と圏同値となる。

Remark 2.2. 圏 $\mathcal{I}_M$ の二つの対象 $\varphi : F_2 \to F_1, \varphi' : F_2' \to F_1'$ と任意の射 $f : \mathrm{coker}(\varphi) \to \mathrm{coker}(\varphi')$ に対し、ある $f_2 : F_2 \to F_2', f_1 : F_1 \to F_1'$ が存在して f は f_1, f_2 が余核の間に引き起こす射と一致する。証明は、射影分解の取り方が up to quasi-isomorphism で一意的であることの証明と全く同様である。これから、圏 $\mathcal{I}_M$ の射は二つの射 $f_2 : F_2 \to F_2', f_1 : F_1 \to F_1'$ で図式

$$\begin{tikzcd}
F_2' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f_2"'] & F_1' \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M \arrow[d, equal] \\
F_2 \arrow[r, "\varphi"] & F_1 \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

が可換となるものにより代表できる。

Lemma 2.3. 任意の環 A と任意の A-加群 M に対して $\mathcal{I}_M$ は filtered である。

Proof. $\mathsf{FP}_{/M}$ が filtered であることから従う。

Remark 2.4. 環 A と A-加群 M に対し、以下が成り立つ：

$$M \cong \mathrm{colim}_{N \in \mathsf{FP}_{/M}} N \cong \mathrm{colim}_{\varphi \in \mathcal{I}_M} \mathrm{coker}(\varphi).$$

自然な射 $\mathrm{colim}_{N \in \mathsf{FP}_{/M}} \to M$ は明らかに全射である。単射であることは $\mathsf{FP}_{/M}$ が filtered であることから従う。特に、任意の A-加群は有限表示 A-加群の filtered colimit として表せる。

Remark 2.5. M が有限表示加群であれば、明らかに圏 $\mathcal{I}_M \cong \mathsf{FP}_{/M}$ は終対象を持つ。

Remark 2.6. F を有限ランク自由加群とし、$N_i, i \in I$ を A-加群の filtered な族とする。このとき自然な射

$$\mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(F, N_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(F, \mathrm{colim}_{i \in I} N_i)$$

は同型射である。従ってとくに、任意の射 $F \to \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ はある $i \in I$ に対する自然な射 $N_i \to \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ を経由し、また、与えられた射 $F \to N_i$ が $N_i \to \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ と合成することで 0-射となるならば、ある $N_i \to N_j$ があって $F \to N_i \to N_j$ の合成が 0-射となる。以上の議論により、任意の対象 $\varphi \in \mathcal{I}_{\mathrm{colim}_{i \in I} N_i}$ に対しある $i \in I$ が存在して、φ は $N_i \to \mathrm{colim}_{i \in I} N_i$ を合成することにより定まる函手 $\mathcal{I}_{N_i} \to \mathcal{I}_{\mathrm{colim}_{i \in I} N_i}$ の像に属する、ということがわかる。

M を有限表示加群とすると、圏 $\mathcal{I}_M$ は終対象を持つ (cf. Remark 2.5)。任意の射 $M \to \operatorname{colim}_{i\in I} N_i$ に対して、この射を合成することにより定まる函手 $\mathcal{I}_M \to \mathcal{I}_{\operatorname{colim}_{i\in I} N_i}$ での終対象の像は、ある i に対する函手 $\mathcal{I}_{N_i} \to \mathcal{I}_{\operatorname{colim}_{i\in I} N_i}$ の像に属する。このことは、射 $M \to \operatorname{colim}_{i\in I} N_i$ がある $N_i \to \operatorname{colim}_{i\in I} N_i$ を経由することを示している。従って、自然な射

$$\operatorname{colim}_{i\in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{colim}_{i\in I} N_i)$$

は全射である。

Remark 2.7. M を A-加群であって、任意の A-加群の filtered な族 $N_i, i \in I$ に対して自然な射

$$\varphi : \operatorname{colim}_{i\in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{colim}_{i\in I} N_i)$$

が全射であるとする。このとき、M を有限表示 A-加群の filtered colimit として $M \cong \operatorname{colim}_{j\in J} M_j$ と表示することで、ある j が存在して $\mathrm{id} : M \to M \cong \operatorname{colim}_{j\in J} M_j$ が $M_j \to \operatorname{colim}_{j\in J} M_j$ を経由する。従って M は有限表示加群のレトラクトとなり、有限表示であることがわかる。Remark 2.6の結果とあわせると、以下が同値であることがわかったことになる：

(i) M は有限表示加群である。

(ii) 任意の A-加群の filtered な族 $N_i, i \in I$ に対して自然な射

$$\varphi : \operatorname{colim}_{i\in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{colim}_{i\in I} N_i)$$

は全射である。

3 テンソル積

この節ではテンソル積に関する Remark をする。

Definition 3.1. A-加群 M, N の**テンソル積**とは、次を満たす加群 $M \otimes_A N$ のことである：任意の A-加群 L に対して自然に

$$\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, L))$$

となる。

Remark 3.2. $\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, L)) \cong \operatorname{Hom}_A(N, \operatorname{Hom}_A(M, L))$ であるから $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ である。

Remark 3.3. テンソル積の存在は次のように示される：まず M, N の一方が自由加群である場合、$M \cong A^{\oplus I}$ とすれば、$\operatorname{Hom}_A(M, -) \cong (-)^{\prod I}$ となるので

$$\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, L)) \cong \operatorname{Hom}_A(N, L)^{\prod I} \cong \operatorname{Hom}_A(N^{\oplus I}, L)$$

となる。つまりテンソル積 $A^{\oplus I} \otimes_A N$ は存在して自然な同型 $A^{\oplus I} \otimes_A N \cong N^{\oplus I}$ が成り立つ。次に M, N を任意の A-加群とする。M を自由加群の射の余核として表す。すなわち、

$$A^{\oplus I} \to A^{\oplus J} \to M \to 0$$

という完全列をひとつとる。$\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_A(N, L))$ は左完全であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L)) &\cong \ker(\mathrm{Hom}_A(N^{\prod J}, L) \to \mathrm{Hom}_A(N^{\prod I}, L)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{coker}(N^{\oplus I} \to N^{\oplus J}), L)\end{aligned}$$

となることがわかる。特にテンソル積 $M \otimes_A N$ は存在する。

Lemma 3.4 (cf. [後藤渡辺, 1.106])**.** A を環、P を A-加群、M, N を A-加群、$f : P \to M \otimes_A N$ を A-加群の射とする。

(i) P が有限表示であるとき、有限生成部分加群 $i : M_0 \overset{\subset}{\to} M, j : N_0 \overset{\subset}{\to} N$ と射 $g : P \to M' \otimes_A N'$ が存在し、$f = (i \otimes j) \circ g$ となる。特に、射 $h_1 : P \to M' \otimes_A N, h_2 : P \to M \otimes_A N'$ が存在し、$f = (i \otimes \mathrm{id}_N) \circ h_1, f = (\mathrm{id}_M \otimes j) \circ h_2$ となる。

(ii) P が有限表示射影的であるとき、有限生成自由加群 F_1, F_2、射 $i : F_1 \to M, j : F_2 \to N$、射 $g : P \to F_1 \otimes_A F_2$ が存在し、$f = (i \otimes j) \circ g$ となる。特に、射 $h_1 : P \to F_1 \otimes_A N, h_2 : P \to M \otimes_A F_2$ が存在し、$f = (i \otimes \mathrm{id}_N) \circ h_1, f = (\mathrm{id}_M \otimes j) \circ h_2$ となる。

Proof. M, N を有限生成部分加群の filtered colimit として表すことで、Remark 2.7より (i) がわかる。(ii) は (i) よりただちに従う。 ✎

Remark 3.5. Lemma 3.4 (ii) を $P = A$ として適用することで、テンソル積 $M \otimes_A N$ の元はすべて有限個の $m_i \in M, n_i \in N$ により $\sum m_i \otimes n_i$ のように表せることがわかる。

4 平坦加群

Definition 4.1. A を環、M を A-加群とする。$0 \to F_1$ という対象からなる $\mathcal{I}_M$ の充満部分圏を $\mathcal{J}_M$ と書く。これは $(\mathsf{Mod}_A)_{/M}$ の有限ランク自由加群のなす充満部分圏と自然に圏同値である。

$\mathcal{I}_M$ は filtered であったが、$\mathcal{J}_M$ は filtered とは限らない。本節ではそのことを見ていく。$\mathcal{J}_M$ は filtered category の条件 Definition 1.1 (iii) 以外を満たすことは容易にわかる (Lemma 2.3の証明と同じようにする)。

Lemma 4.2 (Equational Criterion of Flatness; cf. [松村, 定理 7.6])**.** A を環、M を平坦 A-加群とする。

$$F_2 \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{p} M$$

を圏 $\mathcal{I}_M$ の対象とする。このとき、以下の図式が可換となるような有限自由加群 F' と射 $f : F_1 \to F', r : F' \to M$ が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{r} & M. \end{array}$$

特に、M が平坦であれば $\mathcal{J}_M$ は $\mathcal{I}_M$ において cofinal である。

Proof. 有限自由加群 F と A-加群 M に対して、自然な同型 $M \otimes_A F^* \cong \mathrm{Hom}_A(F, M)$ により両辺を同一視する。

$\varphi^* : F_1^* \to F_2^*$ を φ の双対とし、$k : \ker(\varphi^*) \to F_1^*$ を自然な包含射とする。M は平坦なので、自然な射 $M \otimes_A \ker(\varphi^*) \to \ker(\mathrm{id}_M \otimes \varphi^*)$ は同型射であり、特に全射である (この証明では、この射が全射であることしか必要ない！ Remark 4.3も見よ)。$p \circ \varphi = 0$ であるから $p \in \ker(\mathrm{id}_M \otimes \varphi^*)$ であり、よってある元 $q \in M \otimes_A \ker(\varphi^*)$ が存在して $p = (\mathrm{id}_M \otimes k)(q)$ となる。よって、Lemma 3.4 (ii) を $M = M, N = \ker(\varphi^*), P = A, f(1) = q \in M \otimes_A \ker(\varphi^*)$ として適用することで、ある有限ランク自由加群 F' と射 $g : F'^* \to \ker(\varphi^*)$ が $q \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes g)$ となるようにとれる。すると、ある元 $r \in M \otimes_A F'^*$ が存在して $q = (\mathrm{id}_M \otimes g)(r)$ となる。自然な同型 $M \otimes_A F'^* \cong \mathrm{Hom}_A(F', M)$ のもとで $r : F' \to M$ と考える。$f : F_1 \to F'$ を合成 $F'^* \xrightarrow{g} \ker(\varphi^*) \subset F_1^*$ の双対とする。図式

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{r} & M \end{array}$$

は r の取り方と f^* が $\ker(\varphi^*)$ を経由することから可換である。 ✎

Remark 4.3. 一般に、A-加群の射 $f : N_1 \to N_2$ と A-加群 M に対して、自然な射 $\varphi : M \otimes_A \ker(f) \to \ker(\mathrm{id}_M \otimes f)$ は全射ですらない。図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & M \otimes_A \ker(f) & \longrightarrow & M \otimes_A N_1 & \longrightarrow & M \otimes_A \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & 0. \\ & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\mathrm{id}_M \otimes f) & \longrightarrow & M \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes f} & M \otimes_A N_2 & & \end{array}$$

を見れば、$\mathrm{coker}(\varphi) \cong \ker(\psi)$ である。M が平坦でなければ ψ は一般に単射とはならないことは、平坦加群という用語が存在することからも十分に納得できる。

Remark 4.4. Lemma 4.2をより具体的に記述すると次のようになる：M が平坦 A-加群であるとき、

$a_{ij} \in A, m_j \in M, (1 \le i \le r, 1 \le j \le n)$ が $\sum_j a_{ij} m_j = 0, (\forall i)$ を満たす

ならば、正の整数 s と $b_{jk} \in A, n_k \in M, (1 \le j \le n, 1 \le k \le s)$ が存在して、

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0, (\forall i, k), \qquad m_j = \sum_k b_{jk} n_k, (\forall j)$$

が成り立つ。実際、m_j を与える自由加群からの射 $p : A^n \to M$ と a_{ij} を与える射 $\varphi : A^r \to A^n$ を取れば、条件 $\sum_j a_{ij} m_j = 0$ は $p \circ \varphi = 0$ ということである。さらに Lemma 4.2から射 $f : A^n \to A^s, r' : A^s \to M$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc} A^r & \xrightarrow{\varphi} & A^n & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| \\ 0 & \longrightarrow & A^s & \xrightarrow{r'} & M \end{array}$$

が可換となるが、f を与えることは b_{jk} を与えることと等しく、r' を与えることは n_k を与えることに等しく、$f \circ \varphi = 0$ は等式 $\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0$ を意味し、$p = r' \circ f$ は等式 $m_j = \sum_k b_{jk} n_k$ を意味する。

Lemma 4.5. A を環、M を A-加群とする。このとき、次は同値：

(i) M は平坦である。

(ii) $\mathcal{J}_M$ は $\mathcal{I}_M$ において cofinal である。

(iii) $\mathcal{J}_M$ は filtered である。

(iv) $\mathcal{J}_M$ は filtered であり、$M \cong \operatorname{colim}_{(F\to M)\in\mathcal{J}_M} F$ である。

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) は Lemma 4.2そのものである。(ii) $\Rightarrow$ (iii) は初等的な圏論によりわかる。また、(iv) $\Rightarrow$ (i) は平坦加群の filtered colimit が平坦であることから従う。

(iii) $\Rightarrow$ (iv) を確かめる。$\mathcal{J}_F$ が filtered であると仮定する。自然な射 $\varphi : \operatorname{colim}_{F\in\mathcal{J}_M} F \to M$ は明らかに全射である。単射であることを示す。$A \to \operatorname{colim}_{F\in\mathcal{J}_M} F$ を φ の核を与える射とすると、これはある自然な射 $F \to \operatorname{colim}_{F\in\mathcal{J}_M} F$ を経由し、射 $f : A \to F$ を得る。また、$A \to F \to M$ の合成は 0-射である。f と 0-射という二つの射 $\mathcal{J}_M$ の射 $A \rightrightarrows F$ に $\mathcal{J}_M$ が filtered であることの条件を使うと、ある $g : F \to F'$ が存在して $g \circ f = 0$ となることがわかる。従って $A \to \operatorname{colim}_{F\in\mathcal{J}_M} F$ は 0-射であり、φ は単射である。以上ですべて示された。

Corollary 4.6 (Lazard の定理)**.** A を環、M を A-加群とする。このとき M が平坦であることと、M が有限自由加群の filtered colimit として表せることは同値である。

Proof. Lemma 4.5より直ちに従う。

Corollary 4.7. A を環、M を有限表示平坦 A-加群とする。このとき M は射影的である。

Proof. 有限自由加群 F_2, F_1 と射 $F_2 \to F_1$ で

$$F_2 \to F_1 \to M \to 0$$

が完全となるものを一つとる。Equational Criterion より、以下の可換図式が存在する：

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "r"] & M.
\end{tikzcd}$$

ここで F は有限自由加群である。図式の可換性から $r : F \to M$ は全射である。また、(f_2, f_1) が余核の間に引き起こす射 $M \to F$ は r の分裂を与える。よって M は射影加群である。

Remark 4.8. 有限生成平坦加群は一般に射影的とはならない (cf. [Stacks, Tag 00NY])。

Corollary 4.9. A を局所環、k を A の剰余体、M を有限生成平坦 A-加群とする。このとき M は自由 A-加群である。

Proof. M は有限生成なので、有限自由加群 F_1 と全射 $p : F_1 \to M$ で $p \otimes 1 : F_1 \otimes_A k \to M \otimes_A k$ が同型となるものが存在する。p が同型射であれば良い。有限自由加群 F_2 と射 $\varphi : F_2 \to F_1$ で $p \circ \varphi = 0$ となるものを任意にとる。φ が 0-射であることを示せば良い。Equational Criterion より、以下の可換図式が存在する：

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "r"] & M.
\end{tikzcd}$$

ここで F は有限自由加群である。図式の可換性から r は全射である。また p が全射であることと F が自由加

群であることから、射 $g: F \to F_1$ が存在して以下の図式が可換となる：

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r"] & F_1 \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, equal] & M. \end{tikzcd}$$

図式全体に k をテンソルして中山の補題を用いることで、$g \circ f : F_1 \to F_1$ は全射であることがわかる。F_1 は有限自由加群であるので、よって $g \circ f$ は同型射であり、特に f は単射であることがわかる。一方、$f \circ \varphi = 0$ であったから、φ は 0-射である。従って p は単射となる。 ✎

5 ねじれなし加群

この節はおまけみたいな感じで書いてます。

Definition 5.1. A を整域、M を A-加群とする。M が**ねじれなし** (torsion free) であるとは、任意の元 $0 \neq a$ に対して a 倍写像 $M \to M$ が単射であることを言う。

Lemma 5.2. A を整域、M を A-加群、K を A の商体とする。以下は同値：

(i) M はねじれなしである。
(ii) 自然な包含射 $A \subset K$ により引き起こされる射 $M \to M \otimes_A K$ は単射である。
(iii) 任意の一元生成イデアル I に対して、$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ である。
(iv) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $M_\mathfrak{p}$ はねじれなし $A_\mathfrak{p}$-加群である。
(v) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $M_\mathfrak{m}$ はねじれなし $A_\mathfrak{m}$-加群である。

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は定義より従う。局所化は平坦であるから、(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) が従う。(iv) $\Leftrightarrow$ (iii) は自明である。A-加群 $\ker(M \to M \otimes_A K)$ が 0 かどうかは、任意の極大イデアルによる局所化で 0 となるかどうかであるから、(v) $\Leftrightarrow$ (ii) が従う。以上ですべて示された。 ✎

Corollary 5.3. 平坦加群はねじれなし加群である。

Proof. Lemma 5.2の (i) $\Leftrightarrow$ (iii) より従う。 ✎

Definition 5.4. 整域 A が **Prüfer 整域**であるとは、すべてのねじれなし加群が平坦であることを言う。

Corollary 5.5. 任意の局所環が付値環であれば Prüfer 整域である。特に、Dedekind 環と付値環は Prüfer 整域である。

Proof. 環 A は任意の局所環が付値環であるとする。M を A 上のねじれなし加群とする。局所化をすることで、A は付値環であるとしても良い。よって A の任意の有限生成イデアルは一元生成である。従って (i) $\Leftrightarrow$ (iii) より M は平坦となる (cf. [アティマク, 演習 2.26])。 ✎

Proposition 5.6. A を Prüfer 整域とする。このとき任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $A_\mathfrak{p}$ は付値環である。特に、Noether な Prüfer 整域は Dedekind 環となる。

Proof. A を局所 Prüfer 整域として、A が付値環であることを示せば良い。I を A の有限生成イデアルとす

る。A が付値環であることを示すには、I が一元生成であることを示せば良い (cf. [Stacks, Tag 090Q])。I はねじれなし A-加群 A の部分加群なのでねじれなしである。従って平坦である。一方、A は局所環であり、I は有限生成平坦加群であるので、Corollary 4.9より I は有限自由加群である。単射 $I \subset A$ の存在は、I が一元生成であることを示している (cf. [アティマク, 演習 2.11])。

参考文献

[アティマク] M. Atiyah, I. Macdonald, (新妻 弘 訳), 「可換代数入門」, 共立出版, (2006).

[後藤渡辺] 後藤 四郎, 渡辺 敬一, 「可換環論」, 日本評論社, (2011).

[松村] 松村 英之, 「可換環論」, 共立出版, (1980).

[Stacks] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*.