p-進 Weiestrass の準備定理

ゆじとも

2021 年 12 月 15 日

このノートでは、p 進 Weierstrass の準備定理を証明します。Math Advent Calendar 2021 用のノートです。あまり難しい話題ばかりなのも良くないかなと思うので、やさしめな話題を選びました。作業 (=苦労) をすれば証明できる定理ですが、そのような苦労が可換環論の常識に帰着されることが嬉しい、という話です。

定理 (p 進 Weierstrass の準備定理)**.** A を完備離散付値環、π を素元、$f \in A[\![t]\!]$ を 0 でないべき級数とする。このとき、ある distinguished な多項式 p と単元 $u \in (A[\![t]\!])^\times$ とある $n \geq 0$ が存在して、$f = \pi^n pu$ が成り立つ。

このノートでは上の定理を証明します。

1 定義など

定義 1.1. このノートでは、最高次係数が単元であるような多項式のことを**モニック**と言います。さらに、局所環係数のモニック f に対して、f の最高次以外の係数が極大イデアルの元であるとき、f は **distinguished** であると言います。

2 本題

まず完備離散付値環に関する以下の定理を思い出します：

定理 2.1 (cf. [Serre, II. Proposition 3])**.** A を完備離散付値環、K を A の商体、L を K の有限次拡大とする。このとき、A の L での整閉包 B は A 上有限な完備離散付値環である。

解答. 簡単に説明を加えておく。A の完備性より、L の位相は $[L : K]$ 個の K の直積位相と一致し、A の位相と両立的な L の付値が一意的であることがわかる。これから B が完備離散付値環であることが従う。B が A 上有限であることが残っている。L/K が分離拡大であれば簡単 (cf. [アティマク, 命題 5.17]) なので、純非分離拡大の場合が問題となる。この場合は、$\pi \in A$ を素元として、$B/\pi B$ の $A/(\pi)$-線形空間としての基底の B 上へ持ち上げが A 上一次独立となる。それらで生成された部分 A-加群 $E \subset B$ を考えると、任意の $b \in B$ が $b_0 \in E$ と $b_1 \in B$ によって $b = b_0 + \pi b_1$ と表されるので、これを繰り返すと A の完備性によって $E = B$ が従う。

ノート. 完備ネーター局所環は Japanese 環であるという一般論もある。[永田, 定理 8.2.1] 参照。もしくは、[Stacks, Tag 032W] と [Stacks, Tag 0334] を組み合わせても良い。

系 2.2. A を完備離散付値環、π を素元、K を A の商体、$k = A/(\pi)$ を剰余体、L を K の有限次拡大、$A \subset B \subset L$ を A 上一元生成整域で、$B \cong A[t]/(f)$ であるとする。このとき f はモニックである。

解答. B は一次元なので、A の L での整閉包に含まれる。従って $t \in B$ は A 上整であり、その最小多項式 f の最高次係数は単元である。

系として以下が従います：

系 2.3. A を完備離散付値環、$f \in A[t]$ を素元とする。K を A の商体とする。

(1) f はモニックである。
(2) $f \in (\pi, t)$ であれば、f は distinguished である。

解答. (1) は系 2.2の直接の帰結である。(2) を示す。$k :\overset{\mathrm{def}}{=} A/(\pi)$ とおき、$\bar{f}$ を $k[t]$ での f の像とすると、定理 2.1より $\mathrm{Spec}(k[t]/(\bar{f}))$ は一点集合である。$f \in (\pi, t)$ であるから、$\bar{f} \in (t)$ であり、よって f の最高次以外の係数は π で割り切れる。

ノート. $A[t]/(f)$ が A 上完全分岐していれば、f は Eisenstein 多項式になります (cf. [Serre, I. Proposition 18])。

次に、A を完備ネーター局所環、$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとします。t を不定元として、べき級数環 $A[\![t]\!]$ について考えます。$\mathfrak{m}$ と f で生成される多項式環 $A[t]$ のイデアルを $(\mathfrak{m}, t)$ で表すと、局所化 $A[t]_{(\mathfrak{m},t)}$ から自然な射 $A[t]_{(\mathfrak{m},t)} \to A[\![t]\!]$ が出ます。この射は、ネーター局所環 $A[t]_{(\mathfrak{m},t)}$ をその極大イデアル $(\mathfrak{m}, t)$ で完備化するという射ですから、忠実平坦になっています (cf. [アティマク, 命題 10.14, 演習問題 3.16, 演習問題 3.18])。

補題 2.4. $(A, \mathfrak{m})$ を完備ネーター局所環、$f \in A[t]$ を多項式とする。

(1) $A[t]/(f) \to A[t]_{(\mathfrak{m},t)}/(f)$ から完備化により引き起こされる射
$$A[\![t]\!]/(f) \to \widehat{A[t]_{(\mathfrak{m},t)}}/(f)$$
は同型射である。
(2) f がモニックであれば、$A[t]/(f) \to A[\![t]\!]/(f)$ から局所化により引き起こされる射
$$A[t]_{(\mathfrak{m},t)}/(f) \to A[\![t]\!]/(f)$$
は同型射である。

解答. (1) は、$A[t]_{(\mathfrak{m},t)}/(f)$ が有限生成 $A[t]_{(\mathfrak{m},t)}$-加群であることから従う (cf. [アティマク, 命題 10.13])。(2) の状況では、$A[t]_{(\mathfrak{m},t)}/(f)$ は有限 A-加群なので、A の完備性より、$A[t]_{(\mathfrak{m},t)}/(f)$ は $(\mathfrak{m}, t)$-進完備であることが従う。よって自然な射 $A[t]_{(\mathfrak{m},t)}/(f) \to \widehat{A[t]_{(\mathfrak{m},t)}}/(f)$ は同型射である。あとは (1) より従う。

疑問. ネーターじゃない場合はどうなんでしょうね？

系 2.5. A を完備離散付値環とする。このとき、$A[t]$ の素元は $A[\![t]\!]$ の素元でもあり、逆に $A[\![t]\!]$ の素元はすべて $A[t]$ の素元と単元の積で表すことができる。

解答. 系 2.3と補題 2.4 (2) より、$\mathrm{Spec}(A[\![t]\!]) \to \mathrm{Spec}(A[t]_{(\pi,t)})$ は全単射となる。これは系 2.5を示している。

定理 2.6 (p 進 Weierstrass の準備定理)**.** A を完備離散付値環、π を素元、$f \in A[\![t]\!]$ を 0 でないべき級数とする。このとき、ある distinguished な多項式 p と単元 $u \in (A[\![t]\!])^\times$ とある $n \geq 0$ が存在して、$f = \pi^n pu$ が成り立つ。

解答. まず、$A[\![t]\!]$ は二次元正則局所環 $A[t]_{(\pi,t)}$ の完備化なので正則局所環であり、とくに UFD である。よって、f は π^n と、いくつかの素元の積 $q = q_1, \cdots, q_r$ を用いて、$f = \pi^n q_1 \cdots q_r$ と表すことができる。さらに系 2.3と系 2.5より、$A[\![t]\!]$ の素元 q_i は、distinguished な既約多項式 $q_i' \in A[t]$ と単元 $u_i' \in (A[\![t]\!])^\times$ の積として $q_i = q_i' u_i$ と表すことができる。$q_1' \cdots q_r' = p$ とおくと、$p \in A[t]$ は distinguished な多項式であり、$u = u_1 \cdots u_r$ とおくと、$u \in (A[\![t]\!])^\times$ は単元である。代入すると $f = \pi^n pu$ となる。これは所望の結果である。

参考文献

[アティマク] アティマク.

[永田] 永田可換環論.

[Serre] Local Fields.

[Stacks] *Stacks Project*.