

p -進 Weierstrass の準備定理

ゆじとも

2021 年 12 月 14 日

このノートでは、 p 進 Weierstrass の準備定理を証明します。[Math Advent Calendar 2021](#) 用のノートです。あまり難しい話題ばかりなのも良くないかなと思うので、やさしめな話題を選びました。作業 (= 苦労) をすれば証明できる定理ですが、そのような苦労が可換環論の常識に帰着されることが嬉しい、という話です。

定理 (p 進 Weierstrass の準備定理). A を完備離散付値環、 π を素元、 $f \in A[[t]]$ を 0 でないべき級数とする。このとき、ある distinguished な多項式 p と単元 $u \in (A[[t]])^\times$ とある $n \geq 0$ が存在して、 $f = \pi^n pu$ が成り立つ。

このノートでは上の定理を証明します。


1 定義など

定義 1.1. このノートでは、最高次係数が単元であるような多項式のことを**モニック**と言います。さらに、局所環係数のモニック f に対して、 f の最高次以外の係数が極大イデアルの元であるとき、 f は **distinguished** であると言います。

2 本題


まず完備離散付値環に関する以下の定理を思い出します：

定理 2.1 (cf. [\[Serre, II. Proposition 3\]](#)). A を完備離散付値環、 K を A の商体、 L を K の有限次拡大とする。このとき、 A の L での整閉包 B は A 上有限な完備離散付値環である。

解答. 簡単に説明を加えておく。 A の完備性より、 L の位相は $[L : K]$ 個の K の直積位相と一致し、 A の位相と両立的な L の付値が一意的であることがわかる。これから B が完備離散付値環であることが従う。 B が A 上有限であることが残っている。 L/K が分離拡大であれば簡単 (cf. [\[アティマク, 命題 5.17\]](#)) なので、純非分離拡大の場合が問題となる。この場合は、 $\pi \in A$ を素元として、 $B/\pi B$ の $A/(\pi)$ -線形空間としての基底の B 上へ持ち上げが A 上一次独立となる。それらで生成された部分 A -加群 $E \subset B$ を考えると、任意の $b \in B$ が $b_0 \in E$ と $b_1 \in B$ によって $b = b_0 + \pi b_1$ と表されるので、これを繰り返すと A の完備性によって $E = B$ が従う。 

ノート. 完備ネーター局所環は Japanese 環であるという一般論もある。[\[永田, 定理 8.2.1\]](#) 参照。もしくは、[\[Stacks, Tag 032W\]](#) と [\[Stacks, Tag 0334\]](#) を組み合わせても良い。


系 2.2. A を完備離散付値環、 π を素元、 K を A の商体、 $k = A/(\pi)$ を剰余体、 L を K の有限次拡大、 $A \subset B \subset L$ を A 上一元生成整域で、 $B \cong A[t]/(f)$ であるとする。このとき f はモニックである。

解答. B は一次元なので、 A の L での整閉包に含まれる。従って $t \in B$ は A 上整であり、その最小多項式 f の最高次係数は単元である。 

系として以下が従います：

系 2.3. A を完備離散付値環、 $f \in A[t]$ を素元とする。 K を A の商体とする。

- (1) f はモニックである。
- (2) $f \in (\pi, t)$ であれば、 f は distinguished である。

解答. (1) は系 2.2 の直接の帰結である。(2) を示す。 $k \stackrel{\text{def}}{=} A/(\pi)$ とおき、 \bar{f} を $k[t]$ での f の像とすると、定理 2.1 より $\text{Spec}(k[t]/(\bar{f}))$ は一点集合である。 $f \in (\pi, t)$ であるから、 $\bar{f} \in (t)$ であり、よって f の最高次以外の係数は π で割り切れる。 

ノート. $A[t]/(f)$ が A 上完全分岐していれば、 f は Eisenstein 多項式になります (cf. [Serre, I. Proposition 18])。

次に、 A を完備ネーター局所環、 \mathfrak{m} をその極大イデアルとします。 t を不定元として、べき級数環 $A[[t]]$ について考えます。 \mathfrak{m} と f で生成される多項式環 $A[t]$ のイデアルを (\mathfrak{m}, t) で表すと、局所化 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}$ から自然な射 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)} \rightarrow A[[t]]$ が出ます。この射は、ネーター局所環 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}$ をその極大イデアル (\mathfrak{m}, t) で完備化するという射ですから、忠実平坦になっています (cf. [アティマク, 命題 10.14, 演習問題 3.16, 演習問題 3.18])。

補題 2.4. (A, \mathfrak{m}) を完備ネーター局所環、 $f \in A[t]$ を多項式とする。

- (1) $A[t]/(f) \rightarrow A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}/(f)$ から完備化により引き起こされる射


$$A[t]/(f) \rightarrow A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}^{\wedge}/(f)$$

は同型射である。

- (2) f がモニックであれば、 $A[t]/(f) \rightarrow A[[t]]/(f)$ から局所化により引き起こされる射


$$A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}/(f) \rightarrow A[[t]]/(f)$$

は同型射である。


解答. (1) は、 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}/(f)$ が有限生成 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}$ -加群であることから従う (cf. [アティマク, 命題 10.13])。(2) の状況では、 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}/(f)$ は有限 A -加群なので、 A の完備性より、 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}/(f)$ は (\mathfrak{m}, t) -進完備であることが従う。よって自然な射 $A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}/(f) \rightarrow A[t]_{(\mathfrak{m}, t)}^{\wedge}/(f)$ は同型射である。あとは (1) より従う。 

疑問. ネーターじゃない場合はどうなのでしょうね？

系 2.5. A を完備離散付値環とする。このとき、 $A[t]$ の素元は $A[[t]]$ の素元でもあり、逆に $A[[t]]$ の素元はすべて $A[t]$ の素元と単元の積で表すことができる。

解答. 系 2.3 と補題 2.4 (2) より、 $\text{Spec}(A[[t]]) \rightarrow \text{Spec}(A[t]_{(\pi, t)})$ は全単射となる。これは系 2.5 を示している。 

定理 2.6 (p 進 Weierstrass の準備定理). A を完備離散付値環、 π を素元、 $f \in A[[t]]$ を 0 でないべき級数とする。このとき、ある distinguished な多項式 p と単元 $u \in (A[[t]])^\times$ とある $n \geq 0$ が存在して、 $f = \pi^n pu$ が成り立つ。

解答. まず、 $A[[t]]$ は二次元正則局所環 $A[t]_{(\pi, t)}$ の完備化なので正則局所環であり、とくに UFD である。よって、 f は π^n と、いくつかの素元の積 $q = q_1 \cdots q_r$ を用いて、 $f = \pi^n q_1 \cdots q_r$ と表すことができる。さらに系 2.3 と系 2.5 より、 $A[[t]]$ の素元 q_i は、distinguished な既約多項式 $q'_i \in A[t]$ と単元 $u'_i \in (A[[t]])^\times$ の積として $q_i = q'_i u'_i$ と表すことができる。 $q'_1 \cdots q'_r = p$ とおくと、 $p \in A[t]$ は distinguished な多項式であり、 $u = u_1 \cdots u_r$ とおくと、 $u \in (A[[t]])^\times$ は単元である。代入すると $f = \pi^n pu$ となる。これは所望の結果である。 

参考文献

[アティマク] [アティマク](#).

[永田] [永田可換環論](#).

[Serre] [Local Fields](#).

[Stacks] [Stacks Project](#).