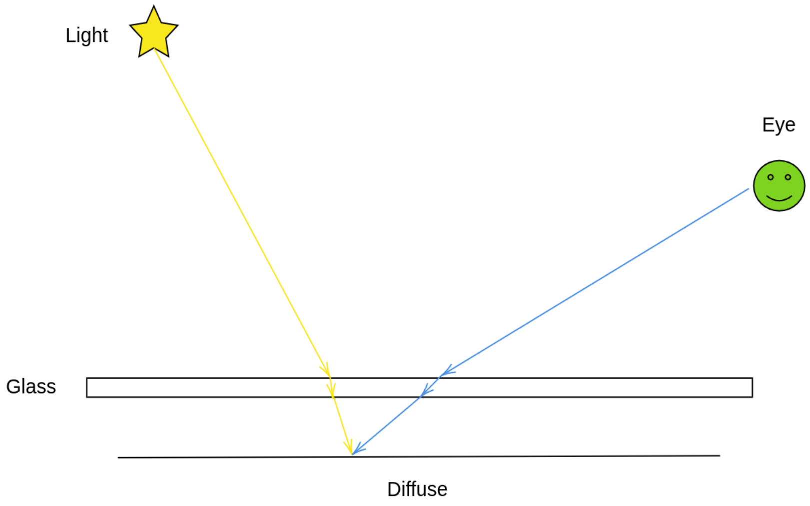
# フォトンマッピングをパス空間から考える

レイトレ合宿9

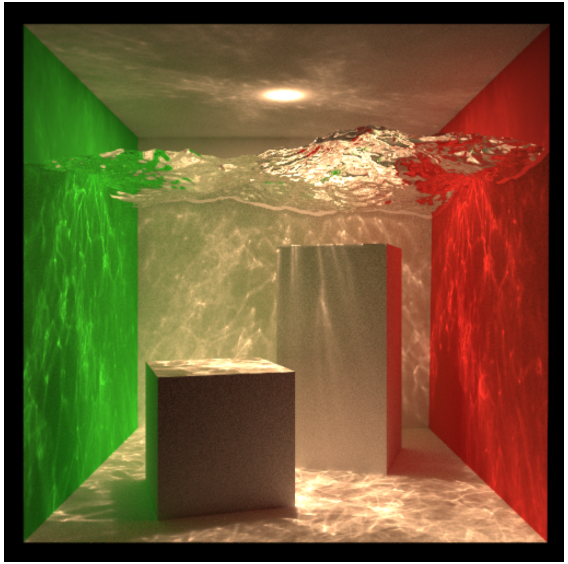
@yumcyawiz

# フォトンマッピング

- 双方向光輸送アルゴリズムの1つ
- 集光模様の表現に強い
- **SDSパスが表現可能**



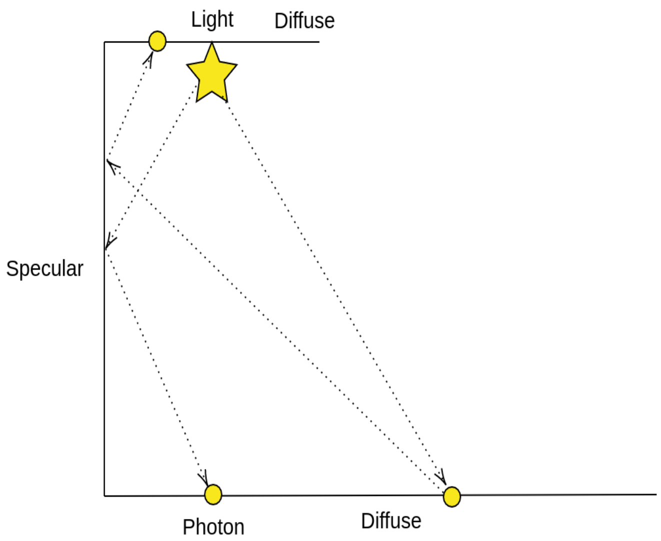

SDSパス



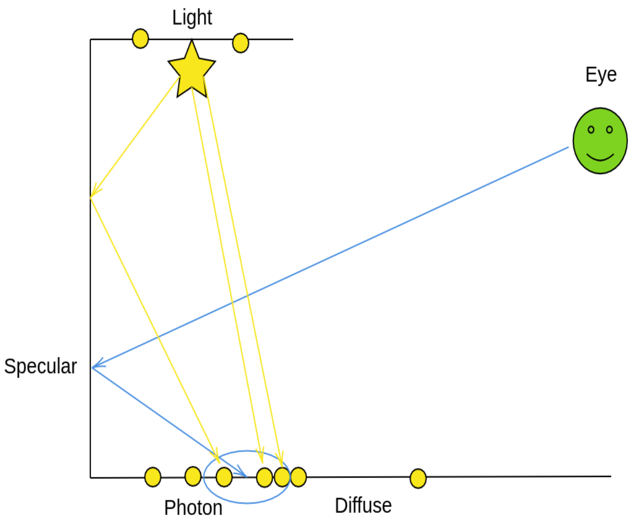
集光模様

# フォトンマッピングのアルゴリズム

1. フォトントレーシング




2. 視点からのトレーシング

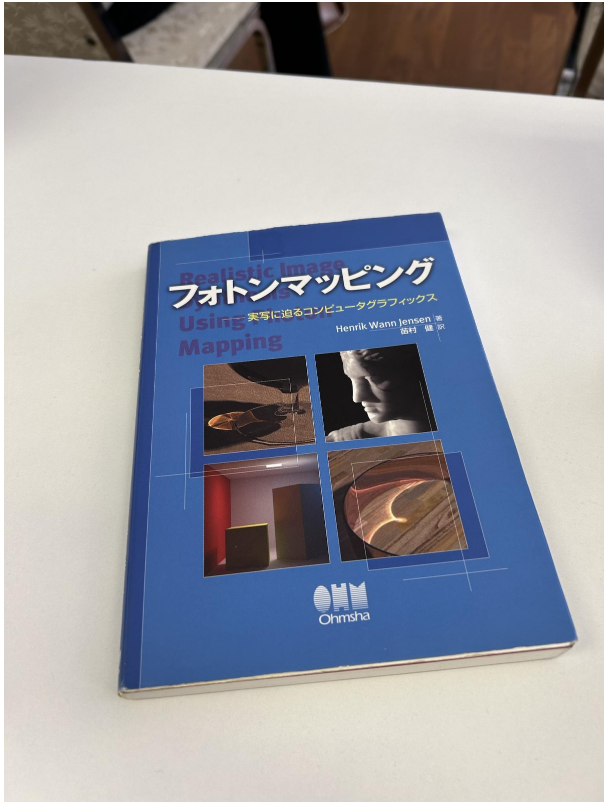



光源からのパスと視点からのパスを "緩く" 繋げる

# 青い本

- フォトンマッピングで有名な本(通称: 青い本)
- 前半は物理ベースレンダリング周りの基礎知識の習得に最適
- 後半はフォトンマッピングだが分かりにくい・・
  - アルゴリズムがモンテカルロ積分の形で表されていない😦

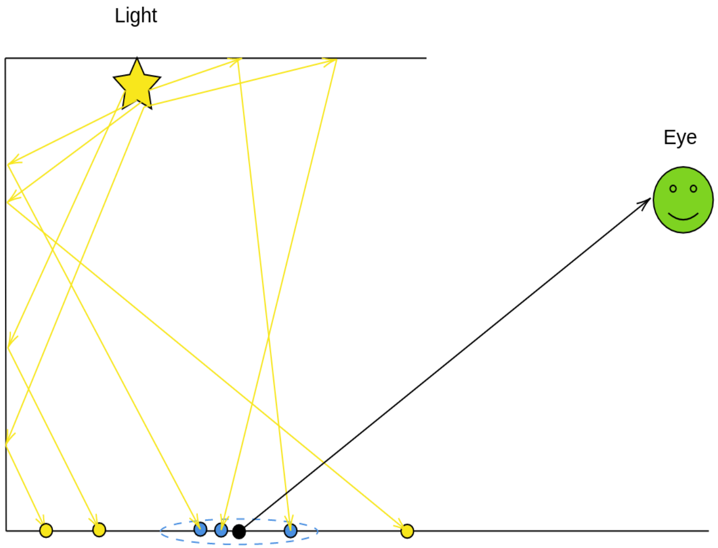
> 青い本の説明の例
>
> > $$L_r(x,\vec{\omega}) \approx \sum_{p=1}^{n} f_r(x,\vec{\omega}_p,\vec{\omega}) \frac{\Delta\Phi_p(x,\vec{\omega}_p)}{\Delta A} \qquad (7.4)$$
> >
> > 位置$x$周辺のフォトン密度に関係する$\Delta A$が含まれている. 物体表面が位置$x$付近で局所的に平らであると仮定することによって, 球面を物体表面に投影し, ...



# モンテカルロレイトレーシング

- モンテカルロレイトレーシングでは **光輸送方程式 (LTE)** をモンテカルロ積分する
- フォトンマッピングのアルゴリズムもこのような形式で表せないか?

$$\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(\mathbf{x}_i)}{p(\mathbf{x}_i)}$$




フォトンマッピング

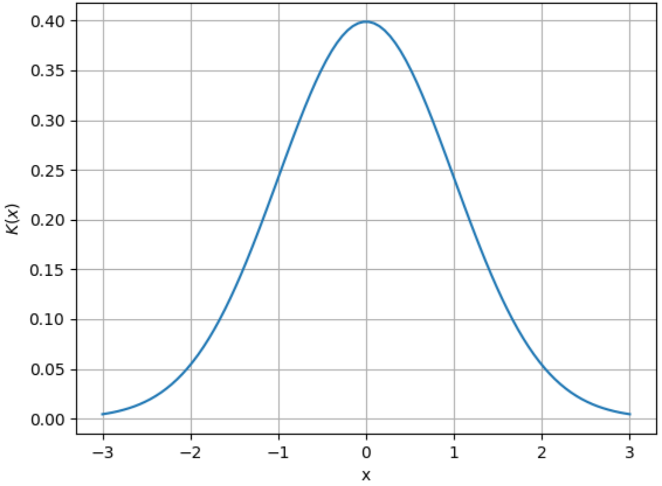
# カーネル関数近似

- **カーネル関数**: 積分して1となるような関数

$$\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$$

- **カーネル関数近似**: 点$x$の値を$x$周辺の値を使って近似

$$f(x) \approx \int_{\mathbb{R}^3} K(\|x-y\|)f(y)dy$$

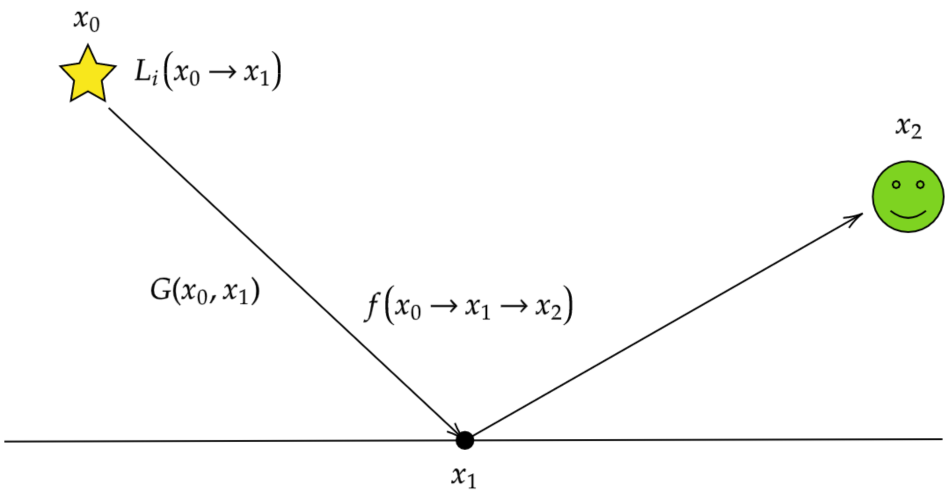



$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2)$$

ガウシアンカーネル

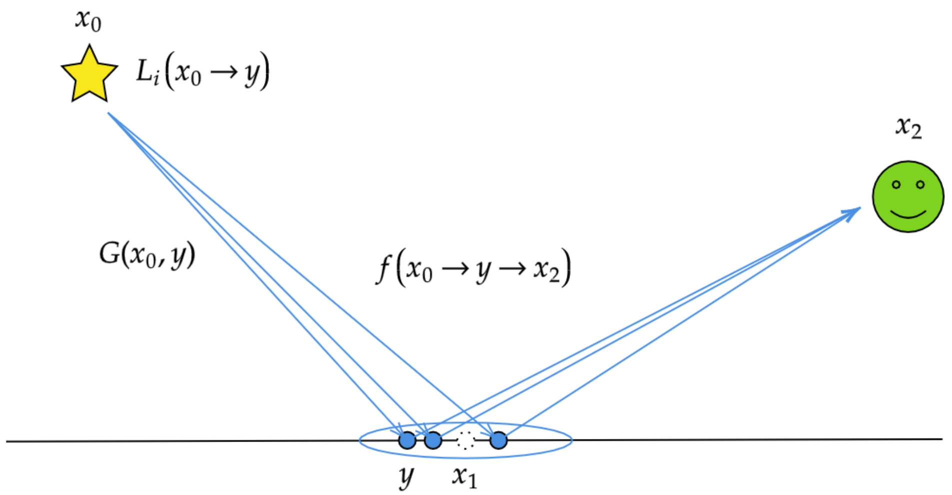
# ３点形式のLTE

$$L_o(x_1 \to x_2) = \int_{\mathcal{M}} L_i(x_0 \to x_1) f(x_0 \to x_1 \to x_2) G(x_0, x_1) dA(x_0)$$



# ３点形式のLTE(カーネル関数近似)

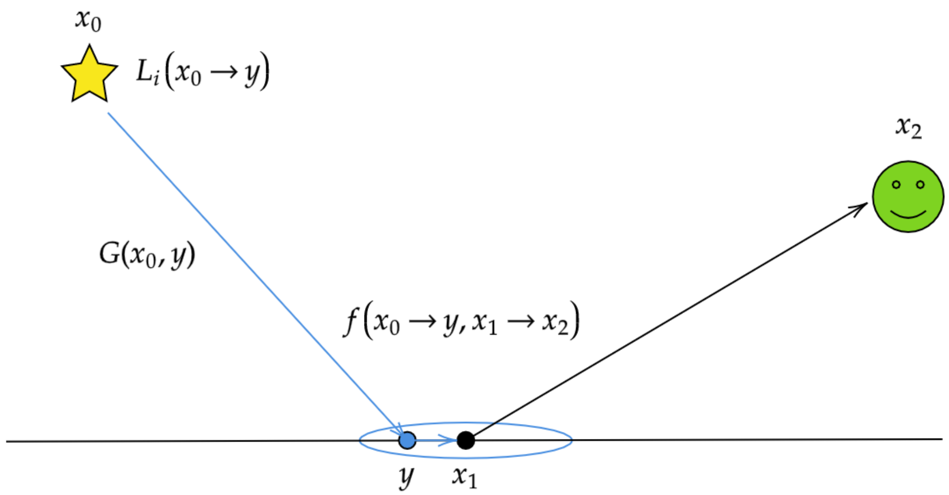
$$L_o(x_1 \to x_2) = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} K(y, x_1) L_i(x_0 \to y) f(x_0 \to y \to x_2) G(x_0, y) dA(x_0) dA(y)$$




カーネル関数近似の適用

# ３点形式のLTE(緩い接続)

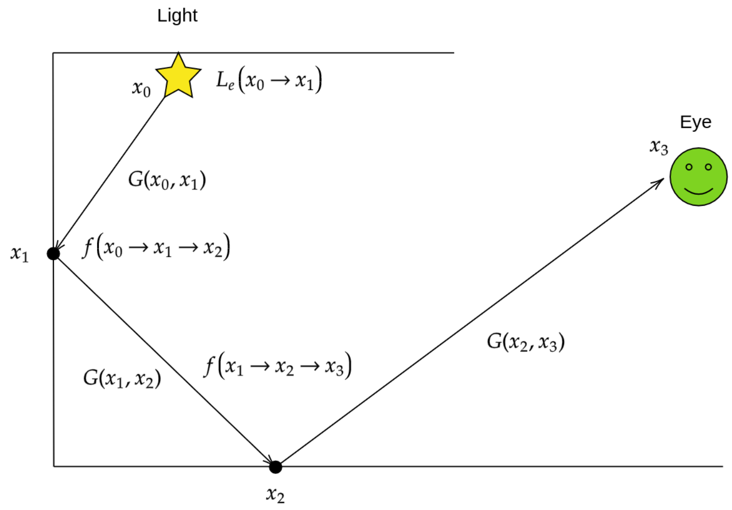
$$L_o(x_1 \to x_2) = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} K(y, x_1) L_i(x_0 \to y) f(x_0 \to y, x_1 \to x_2) G(x_0, y) dA(x_0) dA(y)$$




緩い接続の適用

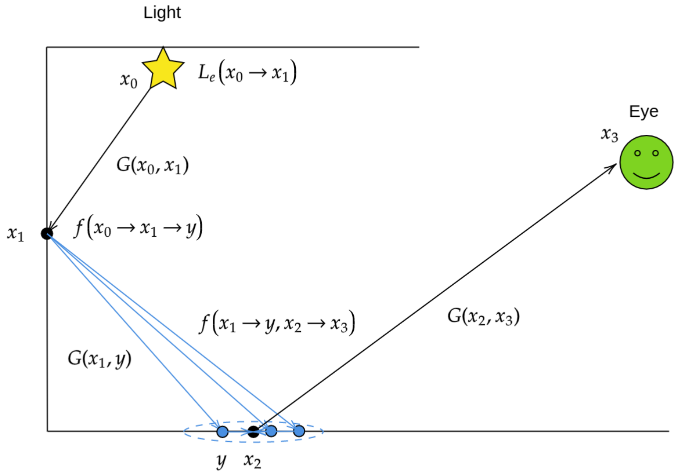
# 経路積分形式のLTE

$$I_j = \int_{\mathcal{M}^4} L_e(x_0 \to x_1) G(x_0, x_1) f(x_0 \to x_1 \to x_2) G(x_1, x_2) f(x_1 \to x_2 \to x_3) G(x_2, x_3) W_e^j(x_2 \to x_3) \, dA(x_0) dA(x_1) dA(x_2) dA(x_3)$$



# 経路積分形式のLTE(緩い接続)

$$I_j = \int_{\mathcal{M}^5} L_e(x_0 \to x_1)G(x_0, x_1)f(x_0 \to x_1 \to y)G(x_1, y)K(y, x_2)f(x_1 \to y, x_2 \to x_3)G(x_2, x_3)$$
$$W_e^j(x_2 \to x_3)dA(x_0)dA(x_1)dA(y)dA(x_2)dA(x_3)$$

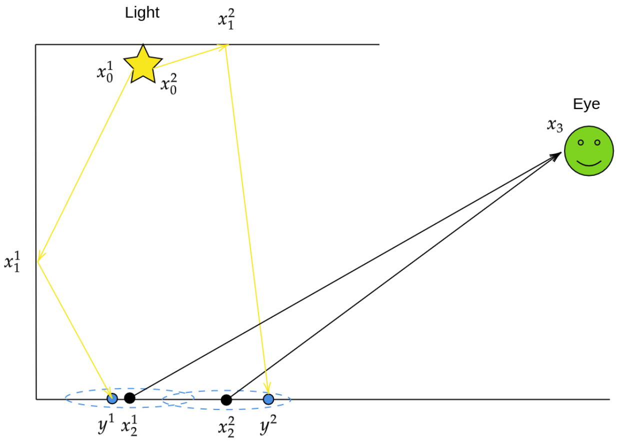



緩い接続の適用

# 経路積分LTE(緩い接続)のモンテカルロ積分

- $(x_0, x_1, y)$: 光源側からのパス
- $(x_3, x_2)$: カメラ側からのパス

$$I_j \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{L_e(x_0^i \to x_1^i)G(x_0^i, x_1^i)f(x_0^i \to x_1^i, \to y^i)G(x_1^i, y^i)K(y^i, x_2^i)f(x_1^i \to y^i, x_2^i \to x_3^i)G(x_2^i, x_3^i)W_e^j}{p(x_0^i)p(x_1^i|x_0^i)p(y^i|x_1^i)p(x_2^i|x_3^i)p(x_3^i)}$$



# 経路積分LTE(緩い接続)のモンテカルロ積分

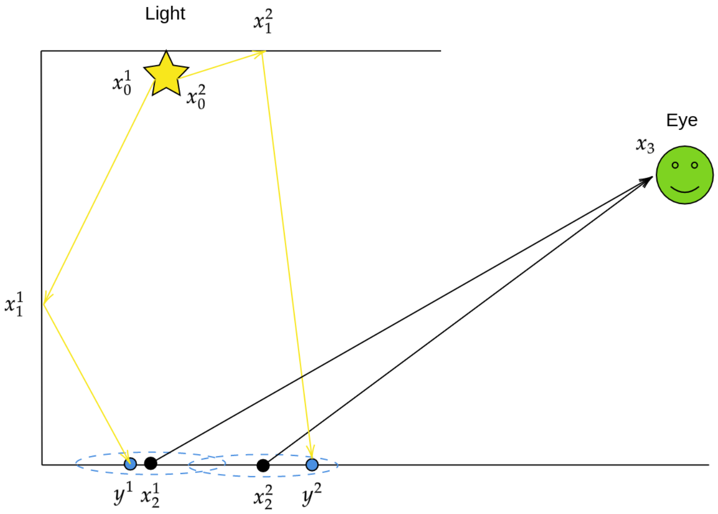
- フォトンのThroughput

$$\beta_i = \frac{L_e(x_0^i \to x_1^i)G(x_0^i, x_1^i)f(x_0^i \to x_1^i, \to y^i)G(x_1^i, y^i)}{p(x_0^i)p(x_1^i|x_0^i)p(y^i|x_1^i)}$$

- カメラ側からのレイのThroughput

$$T_i = \frac{G(x_2^i, x_3^i)W_e^j(x_2^i \to x_3^i)}{p(x_2^i|x_3^i)p(x_3^i)}$$

$$I_j \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \beta_i K(y^i, x_2^i) f(x_1^i \to y^i, x_2^i \to x_3^i) T_i$$



# フォトンマッピング

予め光源側からのパスを$N_p$個生成しておくと…

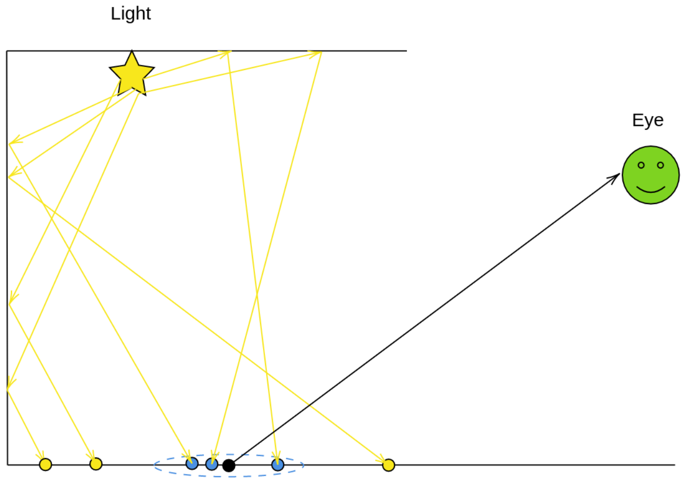
- 光源側から放たれたフォトンの総数: $N_p$
- カメラ側からのサンプル数: $N$

$$I_j \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N_p}\sum_{p=1}^{N_p}\beta_p K(y^p, x_2^i) f(x_1^p \to y^p, x_2^i \to x_3^i)\right)T_i$$

密度推定(Density estimation) と呼ばれる式

青い本だと以下の式に対応

$$L_r(x,\vec{\omega}) = \frac{1}{\pi r^2}\sum_{p=1}^{N} f_r(x,\vec{\omega}_p,\vec{\omega})\Delta\Phi_p(x,\vec{\omega}_p) \qquad (7.6)$$




フォトンマッピング

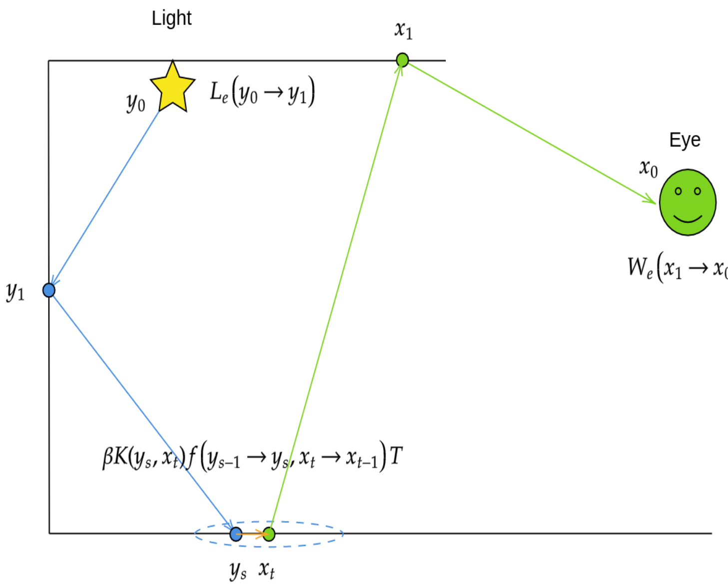
# フォトンマッピング

一般化すると

$$I_j \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N_p}\sum_{p=1}^{N_p}\beta_p K\left(y^p_{s(p)}, x^i_{t(i)}\right) f\left(y^p_{s(p)-1} \to y^p_{s(p)}, x^i_{t(i)} \to x^i_{t(i)-1}\right)\right) T_i$$

$$\beta_p = \frac{L_e(y^p_0 \to y^p_1) G(y^p_0, y^p_1)}{p(y^p_0)} \frac{\prod_{k=1}^{s(p)-1} f(y^p_{k-1} \to y^p_k, \to y^p_{k+1}) G(y^p_k, y^p_{k+1})}{\prod_{k=1}^{s(p)} p(y^p_k | y^p_{k-1})}$$

$$T_i = \frac{\prod_{k=1}^{t(i)-1} f(x^i_{k+1} \to x^i_k \to x^i_{k-1}) G(x^i_{k+1}, x^i_k)}{\prod_{k=1}^{t(i)} p(x^i_k | x^i_{k-1})} \frac{G(x^i_1, x^i_0) W^j_e(x^i_1 \to x^i_0)}{p(x^i_0)}$$



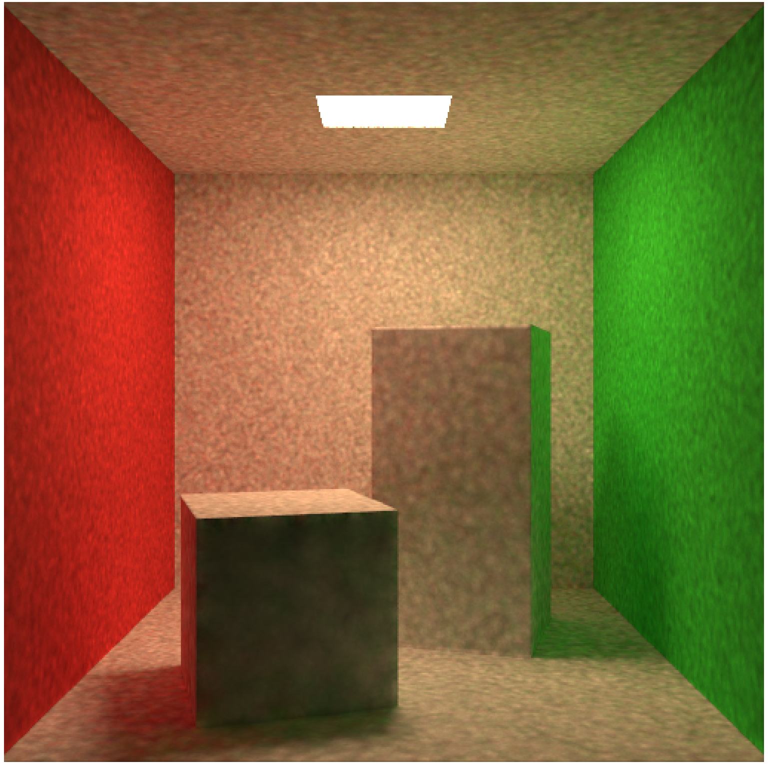
# まとめ

- フォトンマッピングの肝は **緩い接続**
- カーネル関数近似によって緩い接続を表現
  - $f(x)$の値を周辺の値から計算
- 経路積分形式のLTEにカーネル関数近似を適用
  - モンテカルロ積分 → フォトンマッピング
- より複雑なアルゴリズムを考えることができる?
  - 緩い接続を1点だけではなく, 複数点で行うなど

# おまけ(フォトンマッピングの実装に必要なもの)

- 光源側からのレイトレーシング
  - BSDFの非対称性
  - シェーディング法線
- フォトンのThroughput $\beta_p$ の計算
- カメラ側からのレイのThroughput $T_i$ の計算
- 点$x$において$K(x) > 0$となるような近傍フォトンを探す仕組み
  - Uniform grid, Octree, Kd-tree, Spatial hashing, etc...

# おまけ(レンダリング結果)



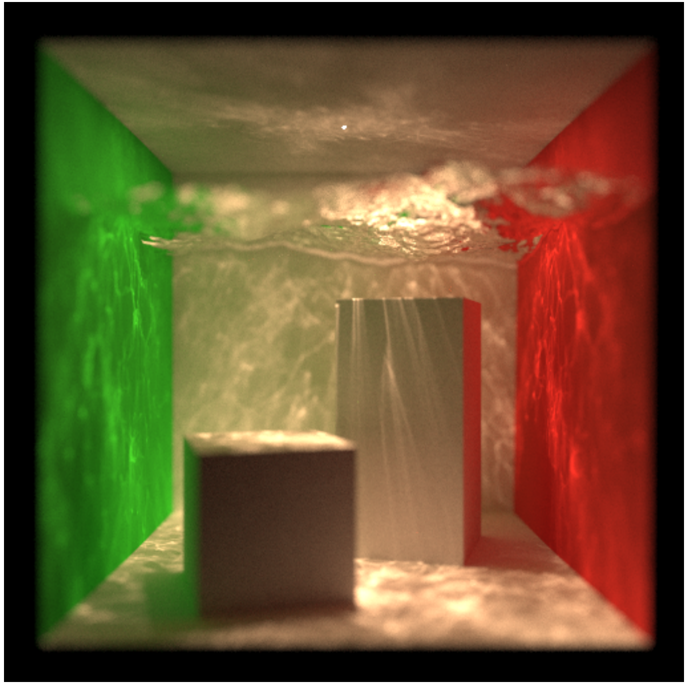
カーネル近似の誤差によるアーティファクトが目立つ😦

# おまけ(フォトンマッピング)

- ナイーブな実装ではアーティファクトが目立つ😦
  - Final gathering, PPM, SPPM
- フォトンマップを格納するのに大量のメモリが必要😦
  - PPM, SPPM
- ボリュームにも対応可能😆

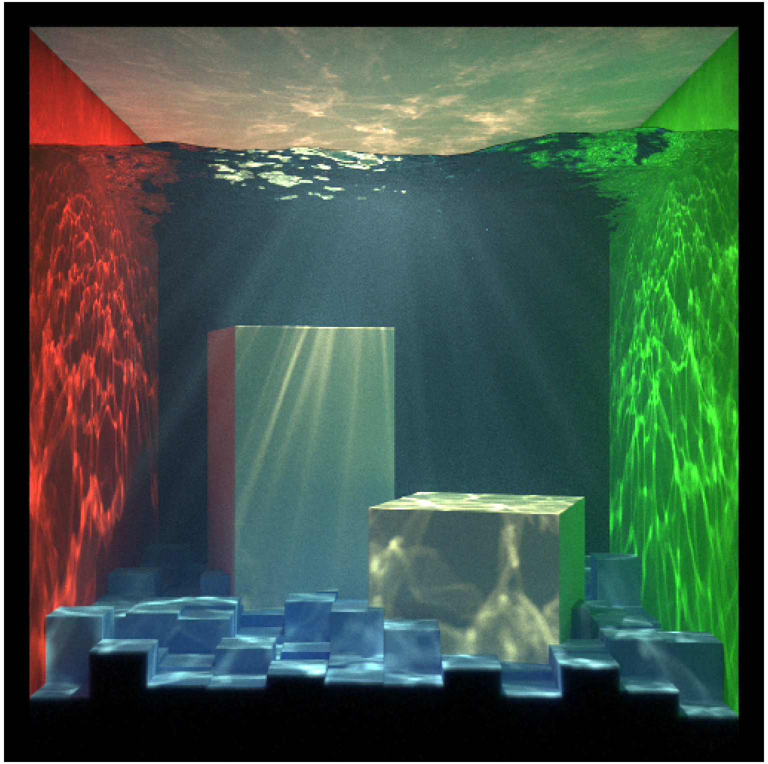
# おまけ(SPPM)

各Iterationでフォトンマップ生成, カメラ側からのトレーシングを繰り返す



Iterationを増やしていくと誤差が0に近づいていく(Consistency)

# おまけ(SPPM(Volume))



ボリュームにも対応可能😆

# References


- Jensen, Henrik Wann. Realistic image synthesis using photon mapping. AK Peters/crc Press, 2001.
- https://pbr-book.org/3ed-2018/Light_Transport_III_Bidirectional_Methods/Stochastic_Progressive_Photon_Mapping#
- Jensen, Henrik Wann. "Global illumination using photon maps." Eurographics workshop on Rendering techniques. Springer, Vienna, 1996.
- Veach, Eric. Robust Monte Carlo methods for light transport simulation. Stanford University, 1998.
- Hachisuka, Toshiya, Jacopo Pantaleoni, and Henrik Wann Jensen. "A path space extension for robust light transport simulation." ACM Transactions on Graphics (TOG) 31.6 (2012): 1-10.