

Нетипизированное λ -исчисление

Юрий Литвинов
y.litvinov@spbu.ru

19.02.2026

Лямбда-исчисление

Математическая основа функционального программирования

- ▶ Формальная система, основанная на λ -нотации, ещё одна формализация понятия «вычисление», помимо машин Тьюринга (и нормальных алгоритмов Маркова, если кто-то про них помнит)
- ▶ Введено Алонзо Чёрчем в 1930-х для исследований в теории вычислимости
- ▶ Имеет много разных модификаций, включая «чистое» λ -исчисление и разные типизированные λ -исчисления
- ▶ Реализовано в языке LISP, с тех пор прочно вошло в программистский обиход (даже анонимные делегаты в C# называют лямбда-функциями, как вы помните)

Лямбда-нотация

Способ вводить функции, не придумывая для них название каждый раз

$$x \rightarrow t[x] \implies \lambda x. t[x]$$

Например,

$$\lambda x. x$$

$$\lambda x. x^2$$

Применение функции (или аппликация)

Математически привычно

$$f(x)$$

Но непонятно, о чём идёт речь — о функции f , принимающей аргумент x , или о результате применения f к x .

В лямбда-исчислении $f(x)$ обозначается как

$$f\ x$$

При этом принято, что

$$\lambda x.x + y = \lambda x.(x + y), \quad \lambda x.x + y \neq (\lambda x.x) + y$$

Примеры записи:

$$(\lambda x.x^2)\ 5 = 25$$

$$(\lambda x.\lambda y.x + y)\ 2\ 5 = 7$$

Каррирование (Currying)

В λ-исчислении не нужны функции нескольких переменных:

$$\lambda x. \lambda y. x + y \stackrel{def}{=} \lambda x y. x + y$$

Можно понимать как функцию, которая возвращает функцию:

$$\lambda x. \lambda y. x + y \equiv \lambda x. (\lambda y. x + y)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$

Частичное применение:

$$(\lambda x. \lambda y. x + y) 5 \equiv \lambda x. (x + 5)$$

λ-исчисление как формальная система

Внезапно, математика на парах по проге

Всё, что было выше, хорошо, но неформально. Формализуем, чтобы иметь возможность применять математические методы.

Нетипизированное лямбда-исчисление:

- ▶ Всё — λ -термы (числа и операции вводятся через них)
 - ▶ Не делается различий между данными и функциями, можно применять функцию к функции (вообще говоря, есть только функции, они же являются данными)
- ▶ Процесс вычисления вводится как набор формальных преобразований над λ -термами
 - ▶ **Операционная семантика**

λ-термы

λ-терм — это:

- ▶ Переменная: $v \in V$, где V — некоторое множество, называемое множеством переменных
- ▶ Аппликация: если A и B — λ-термы, то AB — λ-терм.
- ▶ λ-абстракция: если A — λ-терм, а v — переменная, то $\lambda v.A$ — λ-терм
- ▶ Других способов получить λ-терм нет

Соглашения об ассоциативности

Чтобы не надо было писать кучу скобок

- ▶ Аппликация левоассоциативна: $F X Y = (F X) Y$
- ▶ λ-абстракция правоассоциативна: $\lambda x y.M = \lambda x.(\lambda y.M)$
- ▶ λ-абстракция распространяется вправо настолько, насколько возможно: $\lambda x.M N = (\lambda x.M N)$

Свободные и связанные переменные

- ▶ λ-абстракция $\lambda x. T[x]$ **связывает** переменную x в терме $T[x]$
- ▶ Если значение выражения зависит от значения переменной, то говорят, что переменная **свободно** входит в выражение

Пример:

$$\sum_{m=1}^n m = \frac{n(n+1)}{2}$$

Здесь n входит свободно, а m связана. Имя связанной переменной можно менять:

$$\int_0^x 2y + a \, dy = x^2 + ax \longrightarrow \int_0^x 2z + a \, dz = x^2 + ax$$

НО

$$\int_0^x 2a + a \, da \neq x^2 + ax$$

Свободные и связанные переменные, формально

Как обычно, определение рекурсивно по структуре терма:

- ▶ $FV(x) = x$
- ▶ $FV(S\ T) = FV(S) \cup FV(T)$
- ▶ $FV(\lambda x.S) = FV(S) \setminus \{x\}$
- ▶ $BV(x) = \emptyset$
- ▶ $BV(S\ T) = BV(S) \cup BV(T)$
- ▶ $BV(\lambda x.S) = BV(S) \cup \{x\}$

Примеры:

$$S = (\lambda x\ y.x)(\lambda x.z\ x) \Rightarrow FV(S) = \{z\}, BV(S) = \{x, y\}$$

Подстановка

$T[x := S]$ - подстановка в терме T терма S вместо всех свободных вхождений переменной x (например, $x[x := T] = T$).

Проблема:

$$(\lambda y. x + y)[x := y] = \lambda y. y + y$$

Решения:

- ▶ Запретить свободным переменным иметь одинаковые имена и называться так же, как связанные (соглашение Барендрегта)
- ▶ Переименовывать связанные переменные «на лету» перед выполнением подстановки

Подстановка, формально

- ▶ $x[x := T] = T$
- ▶ $y[x := T] = y$
- ▶ $(S_1 S_2)[x := T] = S_1[x := T] S_2[x := T]$
- ▶ $(\lambda x.S)[x := z] = \lambda x.S$
- ▶ $(\lambda y.S)[x := T] = \lambda y.(S[x := T])$, если $y \notin FV(T)$ или $x \notin FV(S)$
- ▶ $(\lambda y.S)[x := T] = \lambda z.(S[y := z][x := T])$, иначе (z при этом выбирается так, что $z \notin FV(S) \cup FV(T)$)

Зачем мы это делали

Можно ввести отношение **равенства** над термами, имеющее физический смысл «термы означают одно и то же» и отношение **редукции**, означающее «термы имеют одинаковое **значение**», что нужно для определения **вычисления** (хотя заметьте, что пока в формальной системе даже понятия «значение» нет).
Делать это мы будем, определив аксиомы и правила вывода над термами, через **преобразования** термов.

Преобразования

α-преобразование : $\lambda x. S \rightarrow_\alpha \lambda y. S[x := y]$ при условии, что $y \notin FV(S)$. Даёт возможность переименовывать связанные переменные.

β-преобразование : $(\lambda x. S) T \rightarrow_\beta S[x := T]$. Определяет процесс вычисления.

η-преобразование : $\lambda x. T x \rightarrow_\eta T$, если $x \notin FV(T)$. Обеспечивает **экстенциональность** — две функции экстенционально эквивалентны, если на всех одинаковых входных данных дают одинаковый результат:

$$\forall x \ F \ x = G \ x$$

Аксиомы равенства λ-термов

$$\frac{S \rightarrow_{\alpha} T \text{ или } S \rightarrow_{\beta} T \text{ или } S \rightarrow_{\eta} T}{S = T}$$

$$\overline{T = T}$$

$$\overline{S = T}$$

$$\overline{T = S}$$

$$S = T \wedge T = U$$

$$\overline{S = U}$$

$$\overline{S = T}$$

$$\overline{S U = T U}$$

$$\overline{S = T}$$

$$\overline{U S = U T}$$

$$\overline{S = T}$$

$$\overline{\lambda x. S = \lambda x. T}$$

Вычисление, что мы хотим

Очевидно, что равенство — это отношение эквивалентности. Оно «не даёт терять информацию», потому что всегда можно вернуться к исходному терму. А мы хотим вычислять значение терма, то есть всё-таки терять информацию о синтаксисе терма, сохраняя его «смысл». Так что уберём симметричность, получив отношение **β -редукции**, которое уже не эквивалентность и позволяет делать с термом что-то осмысленное.

Аксиомы β -редукции

$$\frac{S \rightarrow_{\alpha} T \text{ или } S \rightarrow_{\beta} T \text{ или } S \rightarrow_{\eta} T}{S \rightarrow_{\beta} T}$$

$$\overline{T \rightarrow_{\beta} T}$$

$$\frac{S \rightarrow_{\beta} T \wedge T \rightarrow_{\beta} U}{S \rightarrow_{\beta} U}$$

$$\frac{S \rightarrow_{\beta} T}{S U \rightarrow_{\beta} T U}$$

$$\frac{S \rightarrow_{\beta} T}{U S \rightarrow_{\beta} U T}$$

$$\frac{S \rightarrow_{\beta} T}{\lambda x. S \rightarrow_{\beta} \lambda x. T}$$

Пример

Редукция не всегда уменьшает размер терма

$$(\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) \rightarrow_{\beta}$$

$$(\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) \rightarrow_{\beta}$$

$$(\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) \rightarrow_{\beta} \dots$$

так что

$$(\lambda x. y) ((\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x)) \rightarrow_{\beta}$$

$$(\lambda x. y) ((\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x)) \rightarrow_{\beta}$$

$$(\lambda x. y) ((\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x)) \rightarrow_{\beta} \dots$$

НО

$$(\lambda x. y) ((\lambda x. x \ x \ x) (\lambda x. x \ x \ x)) \rightarrow_{\beta} y$$

Редексы

Reducible expressions

Редэксом называется пара термов, в которой можно выполнить подстановку, или выражение вида

$$(\lambda x. S) T$$

По правилу β -редукции

$$(\lambda x. S) T \rightarrow_{\beta} S[x := T]$$

Например,

$$(\lambda f. \lambda x. f \ x \ x) + \rightarrow_{\beta} \lambda x. + \ x \ x$$

Терм без редэков называется термом в **нормальной форме** (он вычислен, его нельзя дальше упростить)

Стратегии редукции

При выполнении редукции можно выбрать, какой редэкс заменять, это и есть стратегия редукции.

аппликативная стратегия — заменяем самый левый редэкс, не содержащий в себе других редэксов (самое маленькое подвыражение)

нормальная стратегия — заменяем самый левый самый внешний редэкс

Аппликативная стратегия соответствует передаче параметра по значению (сначала вычисляем параметр, потом передаём его в функцию), нормальная стратегия соответствует передаче параметра по имени (или ленивому вычислению), когда мы откладываем вычисление параметра до последнего, в надежде, что он нам не понадобится.

Какая стратегия лучше

Теорема (Карри о нормализации)

Если у терма есть нормальная форма, то последовательное сокращение самого левого внешнего редекса приводит к ней.

Теорема (Чёрча-Россера)

Если терм M β -редукцией редуцируется к термам N и K , то существует терм L такой, что к нему редуцируются и N , и K .

То есть нормальная форма не всегда есть (см. пример про $(\lambda x.x \ x \ x) (\lambda x.x \ x \ x)$), но если она есть, её можно получить нормальной стратегией, причём нормальная форма единственная.

Комбинаторы

Комбинатор формально — это λ -терм без свободных переменных. Неформально — функция, которая позволяет комбинировать функции, без упоминания данных.

Известные комбинаторы:

$I \equiv \lambda x. x$ — тождественная функция

$\omega \equiv \lambda s. s s$ — комбинатор самоприменимости

$\Omega \equiv \omega \omega \equiv (\lambda s. s s)(\lambda s. s s)$ — расходящийся комбинатор

$K \equiv \lambda x y. x$ — канцеллятор (первый элемент пары)

$K_* \equiv \lambda x y. y$ — второй элемент пары

$S \equiv \lambda x y z. x z (y z)$ — коннектор

$B \equiv \lambda f g x. f (g x)$ — композиция

Комбинаторы, примеры

$$I I \equiv (\lambda x.x)(\lambda x.x) \rightarrow_{\beta} \lambda x.x \equiv I$$

$$\begin{aligned} K I &\equiv (\lambda x.\lambda y.x)(\lambda x.x) \rightarrow_{\beta} \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.(\lambda x.x) \rightarrow_{\alpha} \lambda x.\lambda y.y \equiv K_* \end{aligned}$$

Или на F#:

let K x y = x

let K_star x y = y

Check.Quick (**fun** a1 a2 -> (K id) a1 a2 = K_star a1 a2)

Комбинатор неподвижной точки

Теорема (О неподвижной точке)

Для любого λ -терма F существует неподвижная точка:

$$\forall F \exists X : F X = X$$

Теорема (О комбинаторе неподвижной точки)

Существует комбинатор неподвижной точки

$$Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

такой, что

$$\forall F \quad F (Y F) = Y F$$

Доказательство.

$$Y F \equiv (\lambda x. F (x x)) (\lambda x. F (x x)) = F ((\lambda x. F (x x)) (\lambda x. F (x x))) = F (Y F)$$

Зачем это надо

Рекурсия. Проблема λ -исчисления в том, что у функций нет имён, поэтому они не могут вызывать сами себя, вообще.

Например,

$$factorial = \lambda n. if (isZero\ n) 1 (mult\ n (factorial\ (pred\ n)))$$

Но так писать нельзя, *factorial* в правой части. Перепишем, применив η -преобразование:

$$factorial = (\lambda f. \lambda n. if (isZero\ n) 1 (mult\ n (f\ (pred\ n)))) factorial$$

Внезапно,

$$factorial = Y(\lambda f. \lambda n. if (isZero\ n) 1 (mult\ n (f\ (pred\ n))))$$

(ну, $F(YF) = YF$, тут *factorial* выступает в роли неподвижной точки, а F — штуки в скобках).

Пример

$$\begin{aligned}
 factorial\ 3 &= (Y\ F)\ 3 \\
 &= F\ (Y\ F)\ 3 \\
 &= if\ (isZero\ 3)\ 1\ (mult\ 3\ ((Y\ F)\ (pred\ 3))) \\
 &= mult\ 3\ ((Y\ F)\ 2) \\
 &= mult\ 3\ (F\ (Y\ F)\ 2) \\
 &= mult\ 3\ (mult\ 2\ ((Y\ F)\ 1)) \\
 &= mult\ 3\ (mult\ 2\ (mult\ 1\ ((Y\ F)\ 0))) \\
 &= mult\ 3\ (mult\ 2\ (mult\ 1\ 1)) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

(очень рекомендую курс “Системы типизации лямбда-исчисления” Дениса Москвина на <https://www.lektorium.tv>, примеры и часть дальнейшего изложения — оттуда)

Булевы выражения

Пока что на λ-исчислении факториал не написать, нет чисел и *if*-ов. Начнём с булевых выражений:

$$TRUE \equiv \lambda x. \lambda y. x$$

$$FALSE \equiv \lambda x. \lambda y. y$$

Ну и оператор **IF**:

$$IF \equiv \lambda b. \lambda t. \lambda f. b \ t \ f$$

— обратите внимание, булевы константы вводились так, чтобы *IF* получился таким простым

Булевы операторы

Ввести булевы операторы очень просто через *IF*:

$$AND \equiv \lambda a b. IF\ a\ b\ FALSE$$

$$OR \equiv \lambda a b. IF\ a\ TRUE\ b$$

$$NOT \equiv \lambda b. IF\ b\ FALSE\ TRUE$$

Какова нормальная форма терма *NOT*?

Ответ

$$\begin{aligned}
 NOT &= \lambda b. IF\ b\ FALSE\ TRUE \\
 &= \lambda b. ((\lambda b'. \lambda t. \lambda f. b' t f)\ b\ (\lambda x. \lambda y. y)\ (\lambda x. \lambda y. x)) \\
 &\rightarrow_{\beta} \lambda b. ((\lambda t. \lambda f. b\ t f)\ (\lambda x. \lambda y. y)\ (\lambda x. \lambda y. x)) \\
 &\rightarrow_{\beta} \lambda b. ((\lambda f. b\ (\lambda x. \lambda y. y)\ f)\ (\lambda x. \lambda y. x)) \\
 &\rightarrow_{\beta} \lambda b. (b\ (\lambda x. \lambda y. y)\ (\lambda x. \lambda y. x))
 \end{aligned}$$

А если b может быть только $TRUE$ и $FALSE$, всё проще:

$$NOT = \lambda b\ t\ f. b\ f\ t$$

Легко убедиться подстановкой $TRUE$ и $FALSE$ в обе формулы

Нумералы Чёрча

Теория чисел может быть введена через λ-исчисление. Числа вводятся так (нумералы Чёрча):

$$0 \equiv \lambda s z. z$$

$$1 \equiv \lambda s z. s z$$

$$2 \equiv \lambda s z. s (s z)$$

$$3 \equiv \lambda s z. s (s (s z))$$

$$4 \equiv \lambda s z. s (s (s (s z)))$$

Арифметические операции

$$S \equiv \lambda n. \lambda f. \lambda x. f (n f x)$$

то есть

$$\begin{aligned} S n &= (\lambda n f x. f (n f x)) n \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda f x. f (n f x) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Сложение:

$$ADD \equiv \lambda m n. (m S) n$$

или

$$ADD \equiv \lambda m n. \lambda f x. (m f) (n f x)$$

Умножение и степень, проверка на 0

$$MUL \equiv \lambda m \ n.m \ (ADD \ n) \ 0$$

$$EXP \equiv \lambda m \ n.m \ (MUL \ n) \ 1$$

$$ISZRO \equiv \lambda n.n \ (\lambda x.FALSE) \ TRUE$$

Пары

Конструктор пары:

$$PAIR \equiv \lambda x y f.f x y$$

идея такая же, как у булевых констант и *IF*-а — обернуть значения в аппликацию функции. Конкретная пара:

$$PAIR a b = \lambda f.f a b$$

Проекции:

$$FST \equiv \lambda p.p \ TRUE$$

$$SND \equiv \lambda p.p \ FALSE$$

Почему

Потому что мы так определили *TRUE* и *FALSE*:

$$FST (PAIR a b) = PAIR a b TRUE$$

$$\equiv (\lambda x y f.f x y) a b TRUE$$

$$= TRUE a b$$

$$= (\lambda x.\lambda y.x) a b$$

$$= a$$

$$SND (PAIR a b) = PAIR a b FALSE$$

$$\equiv (\lambda x y f.f x y) a b FALSE$$

$$= FALSE a b$$

$$= (\lambda x.\lambda y.y) a b$$

$$= b$$

Функция предшествования

Вспомогательные функции:

$$ZP \equiv PAIR\ 0\ 0$$

$$SP \equiv \lambda p. PAIR\ (SND\ p)\ (SUCC\ (SND\ p))$$

- ▶ ZP — ZeroPair
- ▶ $SP\ (PAIR\ i\ j) = PAIR\ j\ (j + 1)$

Функция предшествования:

$$PRED \equiv \lambda m. FST\ (m\ SP\ ZP)$$

Примитивная рекурсия

$$XZ \equiv \lambda x. PAIR\ x\ 0$$

$$FS \equiv \lambda f\ p. PAIR\ (f\ (FST\ p)\ (SND\ p))\ (SUCC\ (SND\ p))$$

$$REC \equiv \lambda m\ f\ x. FST\ (m\ (FS\ f)\ (XZ\ x))$$

Получаем:

$$(x, 0) \rightarrow$$

$$(f\ x\ 0, 1) \rightarrow$$

$$(f\ (f\ x\ 0)\ 1, 2) \rightarrow$$

$$(f\ (f\ (f\ x\ 0)\ 1)\ 2, 3) \rightarrow \dots$$

В частности,

$$PRED = \lambda m. REC\ m\ (\lambda x\ y. y)\ 0$$

Списки

$$NIL \equiv \lambda c n. n$$

$$CONS \equiv \lambda e l c n. c e (l c n)$$

Например,

$$[] \equiv NIL \equiv \lambda c n. n$$

$$[5; 3; 2] \equiv CONS\ 5\ (CONS\ 3\ (CONS\ 2\ NIL)) \equiv \lambda c n. c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))$$

Стандартные функции:

$$EMPTY \equiv \lambda l. l\ (\lambda h\ t. FALSE)\ TRUE$$

$$HEAD \equiv \lambda l. l\ (\lambda h\ t. h)\ 0$$

Например

$$\begin{aligned}
 \text{HEAD } (\text{CONS } 2 \text{ NIL}) &\equiv \lambda l. l (\lambda h t. h) 0 (\text{CONS } 2 \text{ NIL}) \rightarrow_{\beta} \\
 &(\text{CONS } 2 \text{ NIL}) (\lambda h t. h) 0 \equiv \\
 &((\lambda e l c n. c e (l c n)) 2 \text{ NIL}) (\lambda h t. h) 0 \rightarrow_{\beta} \\
 &(\lambda c n. c 2 (\text{NIL } c n)) (\lambda h t. h) 0 \rightarrow_{\beta} \\
 &(\lambda c n. c 2 n) (\lambda h t. h) 0 \rightarrow_{\beta} \\
 &(\lambda h t. h) 2 0 \rightarrow_{\beta} \\
 &2
 \end{aligned}$$