无穷

杜升华　胡悦科　石权　吴昊

2008 年 6 月

编者按：*本文是 2008 年春季学期数学史课的课程论文，选入本刊时添加了对文中涉及的数学家的简介。作者分别来自基数 53、基数 52、基数 51、基数 51。我们希望通过这篇文章为读者（尤其新生）提供一个了解数学思想发展历程、领略数学名家风采的平台。*

伟大的德国数学家大卫 · 希尔伯特[1]说："无穷！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观点都不曾如此有效地激励人类的智力；然而，没有任何概念比无穷更需要澄清……" [1]

"无穷" 这个概念在数学理论和数学发展史上占有特殊的重要地位。E.T. 贝尔[2] 在其名著《数学精英》中写道 [2]："从最早的时期开始，两个互相对立、有时又互相促进的趋势就统治着数学全部复杂的发展。粗略地说，这些就是*离散*和*连续*。" "连续" 意味着从一个点到下一点没有 "最短的" 步长，或者说，根本就没有 "下一个" 点；这一概念同 "无穷小" 密切相关。而 "离散" 的正整数序列又涉及 "无限" 或 "无穷大" 的问题。因此，从这个意义上说，对关于 "无穷" 的问题的认识过程是数学发展的一条主线。

在两千多年的数学史上，人们对 "无限" "无穷大" "无穷小" "极限" "连续" ……这些概念的认识曾是如此的含糊不清，以至于三次震惊整个数学界的数学危机都由它们引起：第一次数学危机，是无理数的发现违背了毕达哥拉斯学派关于任何数都能用整数通过有限步四则运算表示的信条；第二次数学危机，是 "无穷小" 等概念的模糊性动摇了微积分的基础；第三次数学危机，是有关无穷集合的理论的创立带来了悖论。

在对待 "无穷" 这一重要概念及其引发的数学危机的态度上，存在着两大对立的数学思想学派 [2]：毁灭性的批判学派和建设性的批判学派。前者是谨慎的怀疑主义者，克罗内克[3]、布劳威尔[4]对近代数学分析基础的批判足以显示出这一派数学家思想的深刻性和敏锐性，不过拒绝继续前进走向新数学的他们在几乎没有犯什么错误的同时，也同样没

[1]D. Hilbert, 1862–1943, 20 世纪最伟大的数学家之一。其数学贡献是巨大和多方面的，研究领域涉及代数不变式、代数数域、几何基础、变分法、积分方程、无穷维空间、物理学和数学基础等。他的公理化思想和在 1900 年国际数学家大会上提出的 23 个问题深刻影响着整个数学的发展。

[2]E. T. Bell, 1883–1960, 英国 – 美国数学家，在数值分析、解析数论和数学史等方面做出了贡献，其《数学精英》《数学的发展》等书在数学史上很有价值。

[3]L. Kronecker, 1823–1891，德国数学家，主要贡献在数论、代数学、函数论、拓扑学等方面。

[4]L. E. J. Brouwer, 1881–1966，荷兰数学家，主要贡献在数学基础和拓扑学方面。

有发现多少真理；后者是勇敢的先驱者，维尔斯特拉斯[5]、戴德金[6]、康托尔[7]建立的关于无限和连续的现代理论是这一派数学家创造的“对数学和一般的合理思想都具有高度意义的东西”，然而其中的一些可能遭到毁灭性的批判。这两大思想学派的斗争——其中大多与“无穷”相关——贯穿于整个数学发展的历史。让我们首先回溯它们的源头，看看古希腊数学中蕴含着哪些现代头脑。

§1 古代形体中的现代头脑

如果说“证明”是现代数学理所当然的真正精神，那么信奉“万物皆数”的古希腊毕达哥拉斯[8]学派最大的功绩就是把证明引入了数学。然而恰恰由于毕达哥拉斯定理（在我国亦称勾股定理），如下事实得到了证明：等腰直角三角形的斜边长与直角边长之比不是有理数，换句话说，它不能用整数通过有限步四则运算表示。这一严重冲击毕达哥拉斯学派信条的发现，打开了包含着无穷思想的潘多拉盒子。

无理数的发现引起的第一次数学危机，就像数学世界中的一场大地震。摆在此时的数学家面前的，有两种选择：一是停留在原地，并且要求别人也不要靠近那危险的裂痕；二是勇敢地跳过去，因为或许彼岸更安全。让我们先来看看一个拒绝一跳的人。

芝诺[9]提出了四个著名的悖论，深刻地反映了早期探索连续和无限的人们所遇到的困难。第一，二分法悖论。运动是不可能的，因为运动的物体在到达目的地之前必须到达路程的中间点，而在它到达中间点之前，它又必须到达路程的四分之一点，等等，*没有穷尽*。因此运动甚至永远不能开始。第二，阿基里斯[10]悖论。奔跑中的阿基里斯永远也不能超过在他前面慢慢爬行的乌龟，因为他必须首先到达乌龟的出发点，而当他到达那一点时，乌龟又向前爬了，所以仍在他前面。重复这个论点，我们很容易看出乌龟总是在前面。第三，箭的悖论，飞矢在任何瞬间都是既非静止也非运动。如果瞬刻是不可分的，箭就不能运动，因为如果它动了，瞬刻就立即是可分的了。但是时间由瞬刻组成，如果箭在任一瞬刻都不动，它在任何时间内也不能动，因此它总是保持静止。第四，操场悖论。这一悖论主要涉及相对运动，与无穷关系不大，此处略去。

我们认为，芝诺的前两个悖论有一定相似之处。他都将一个事件描述为无穷过程，比如阿基里斯不断赶上之前的差距。然后他断言，因为过程的无穷，所以事件实际上无法发生（永远追不上）。从一方面看，他采用了不同的计算时间的度量，从而导致结论的不同；另一方面，这也反映了他对无穷过程的排斥，认为无穷无法达到。这与古希腊几何倡导的有限步实现的思想形成了有趣的照应。

这四个悖论对数学界和人类思想的影响是巨大的。“全部四个悖论构成了一堵铁墙，阻挡了一切进步的可能”。[2] 但仍有人越过铁墙，继续前进。欧多克斯[11]提出划时代的比

[5]K. T. W. Weierstrass, 1815–1897, 伟大的德国数学家，主要贡献在数学分析、解析函数论、变分法、微分几何学等方面。他是把严格的论证引进分析学的一位大师。他的批判精神对 19 世纪数学产生很大影响。

[6]J. W. R. Dedekind, 1831–1916, 德国数学家，高斯的得意门生，主要贡献在实数理论和代数数论方面。

[7]G. F. L. P. Cantor, 1845–1918, 伟大的德国数学家，集合论的创始人。

[8]Pythagoras, 约前 569– 约前 500, 希腊哲学家、数学家、天文学家。

[9]Zeno, 约前 495– 约前 435, 希腊数学家、哲学家。

[10]Achilles, 希腊神话中的神行太保。

[11]Eudoxus, 约前 408– 约前 355, 希腊天文学家、数学家。

例理论，使得人们可以像处理有理数一样处理具有无理数长度的几何量，在几何上回避了无理数的存在性问题，从而在当时的认识水平上解决了第一次数学危机。当然，这一问题的根本解决，要等到 19 世纪后半叶严格的实数理论建立之时才真正实现。阿基米德[12]发明了几个求曲线围成的平面图形的面积和求曲面围成的体积的方法，将穷竭法的威力发挥到极致；从这种无限地加细分割并取和的极限值的方法上看，阿基米德已领先于牛顿[13]和莱布尼茨[14]近两千年而发明了积分学。此外，欧几里得[15] 关于素数有无穷多个的经典证明，被哈代[16]作为第一流的“真正”的数学定理的例证而引用 [3]；而在这里得到发扬光大的“反证法”（以及作为其逻辑基础的排中律），是与“无穷”有关的重要话题，我们在论及二十世纪初关于数学基础的激烈辩论时还会回到这点上来。

尽管古希腊有关“无穷”的思想和成就并不能与近现代无穷理论同日而语，但有了这些作为准备，一千多年后一门几乎处处涉及无穷的重要学科——分析学——的诞生，就不是偶然的了。

§2　无穷小分析的诞生与神学家的发难

虽然阿基米德穷竭法求解面积问题就已经有了微积分的思想，但穷竭法相当复杂，而且用途有限 [13]。尽管逻辑基础尚不完备，不必说微分和积分，甚至连函数这样的简单概念都存在问题（比如无理数取值的问题），但微积分已经显示出了巨大威力，解决了很多重要问题。17 世纪最伟大的数学家们，包括开普勒[17]，卡瓦列里[18]，费马[19]，当然还有牛顿和莱布尼茨，[13] 意识到了逻辑基础的缺陷，开始处理微积分的概念。他们每个人都做了自己的定义，其中以牛顿和莱布尼茨的贡献最大，两人被公认为微积分的奠基人。

他们的主要功绩在于：1. 把各种问题的解法统一成一种方法——微分法和积分法；2. 有明确的计算微分法的步骤；3. 微分法和积分法互为逆运算。由于运算的完整性和运用的广泛性，微积分成为解决问题的重要工具。同时关于微积分基础的问题也越来越严重——无穷小量究竟是什么。

牛顿制定微积分的过程先后经历了四个阶段 [4]，即：(1) 流数论的初建——《流数简论》。(2) 向不可分量的摇摆。(3) 成熟的《流数法》。《流数法》不再使用不可分无限小瞬而全面恢复了运动学观点。(4) “首末比法”的提出与改进。从 17 世纪 80 年代中期开始，牛顿关于微积分的基础在观念上发生了变革，这就是作为极限概念先导的“首末比法”的提出。摘录其中一部分：a. 在这里，我用连续运动来描述数学量，而不把它们看成由很小的部分组成。b. 考虑那些在相等时间内增长并通过增长而生成的量，它们变化的快慢取

[12]Archimedes，前 287– 前 212，古希腊最伟大的数学家、力学家，同时也是有史以来最伟大的数学家之一。

[13]I. Newton，1642–1727，英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家，经典力学的奠基人和历史上最伟大的数学家之一。

[14]G. W. Leibniz，1646–1716，德国数学家、自然科学家、哲学家。

[15]Euclid，约前 330– 约前 275，希腊数学家，其著作《几何原本》（也涉及数论）两千多年来一直是几何学的经典。

[16]G. H. Hardy，1877–1947，英国数学家，对分析学和解析数论有杰出贡献。

[17]J. Kepler，1571–1630，德国天文学家、数学家，以行星运动定律的提出者而著称。

[18]F. B. Cavalieri，1598–1647，意大利数学家。

[19]P. de Fermat，1601–1665，法国数学家，“业余数学家之王”，早期微积分学的先驱之一，对数论的发展和解析几何、概率论的创立有突出贡献。

决于增长与生成速度的大小；我找到了一种由运动或增长速度来计算以该速度生成的量的方法，并称这种运动或增长的速度为流数，称那些被生成的量为流量。c. 流数非常接近于在相等却很小的时间间隔内生成的流量的增量。

与牛顿运动学观点的流数论相比，莱布尼茨的微积分则具有强烈的哲学背景并从几何角度着手 [4]。他的富有启发意义的符号远比牛顿使用的优越，对于微积分的传播、发展影响颇大。莱布尼茨在第一篇微分学论文中试图对微分的实质作出解释：微分乃是无限小差。但对无限小量的定义，莱布尼茨的思想始终踌躇不定。通常认为莱布尼茨的无限小量是实在的、确定的量，即不等于零却比任何正数都小的量，但进一步研究表明，莱布尼茨并不坚持无限小量的实在性，他在后来的一些手稿中，有时也将无限小量理解成变化的和不确定的量。

虽然牛顿与莱布尼兹没有给出“流数”、“无穷小量”等概念的明确定义，但他们分别开创了处理“无穷小”概念的两条途径：一是把它理解为一个变化的过程，一是把它理解为一个实实在在的量。我们指出，这两条途径分别对应于以“$\varepsilon-\delta$”语言为代表的严格化了的古典分析和 20 世纪 60 年代新出现的非标准分析。不过，17、18 世纪的数学家正忙于开拓微积分的广泛应用而无暇顾及基础理论，直到一个神学家的发难改变了这种状况。

1734 年，英国哲学家和牧师伯克莱出版了一本小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》，点名道姓地攻击牛顿、莱布尼兹及其拥护者的微积分成果是诡辩 [10]。

“一种推导任意次幂的流数的方法如下：设量 x 均匀地流动，欲求 x^n 的流数。与通过流动变为 $x+o$ 的同时，幂 x^n 变成 $(x+o)^n$，也就是说，使用无穷级数的方法有

$$x^n+nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$$

而增量 o 与 $nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$ 之比为

$$1:nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}ox^{n-2}+\cdots$$

现在假设增量消失，它们最终之比将是 $1:nx^{n-1}$。”

接着伯克莱指出“这种推理看来是不合理和不能令人信服的”，并提出了后来以他的名字命名的著名悖论：“*在推导任意次幂的流数时，如果让增量消失，亦即让增量变成零，那么原来的关于增量存在的假设也就不能成立，而由这一假设引出的结果即借助于增量而得到的表达式却必须保留*，这种推理是站不住脚的。因为我们如果假设增量消失了，理所应当也就必须假设它们的比、它们的表达式以及由于假设其存在而导出的一切东西都必须随之消失。”接下来他说了些很难听的话：“这些消逝的量是什么呢？难道我们不能称它们为消逝的鬼魂吗？”“分明是诡辩，是招摇撞骗，把人们引入歧途。”……

现在是数学家拿自己的理论来反驳关于无穷小量鬼魂的神话的时候了。

§3 抛弃无穷小，走向严格化

18 世纪最伟大的数学家、“分析的化身”欧拉[20] 解释道 [5]：“一个无限小量无非是一个消失的量，因此事实上将 =0。无限小的这一定义，是与它的另一种定义即比任意给定量还要小的量相符的。”“对于那些质问何为数学中的无限小量的人，我们的回答是：它事实上 =0。”“由此可以得出一条多数人能接受的法则，这就是：与有限量相比，无限小量成为零，因此相对于有限量而言可忽略不计。”我们认为，这些哲学层面的论述并没有击中伯克莱悖论的要害——既然无穷小量等于 0，为什么它还可以作除数？由此可见，18 世纪数学家无法真正严格地解释“无穷小”。

事实上，18 世纪的数学思想的确是不严密的，强调形式的计算而不管基础的可靠。其中特别是：1. 没有清楚的无穷小概念，从而导数、微分、积分等概念不清楚；2. 对无穷大概念不清楚；3. 发散级数求和的任意性；4. 不考虑连续性就进行微分，不考虑导数及积分的存在性以及可否展成幂级数等。没有严密的数学理论作为基础，自然不可能出现可以自圆其说的数学哲学。于是，在这场数学与神学、科学与宗教的辩论中，伯克莱的批判对前者来说几乎是毁灭性的。这就是第二次数学危机。

在解决这场危机的过程中，高斯[21]的建设性的批判使他成为这方面的一位先驱者。他早年研究了二项式定理 [2]：

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\times 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^3 + \cdots$$

当 n 不是正整数时，右边的级数是无限的，必须研究对 x 和 n 加什么限制，才能使级数收敛到一个确定的、有限的极限。因为，如果 $x=-2$，$n=-1$，我们就会得出荒唐的结论 $-1 = 1+2+4+8+\cdots$，这是胡扯。《数学精英》对此的评价是很精辟的：“*在年轻的高斯向自己提出无穷级数是否收敛，是否真能使我们计算出用它们表示的数学表达式（函数）以前，较早的分析学家们并未费脑筋去解释由于不加鉴别地使用无限过程而引起的神秘（和胡扯）。高斯与二项式定理的很早的相遇，鼓舞他作出他的一些最伟大的工作，他成了第一个‘严格主义者’。……分析学的真正精髓在于正确使用无限过程。*”

对于分析学的严格化，另一位重要的先驱是柯西[22]。他对涉及无限过程的许多基本概念给出了定义，例如 [6]：

极限 “当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差要多小就多小，那么最后这个定值就称为所有其他值的极限。”

无限小量 “当同一变量逐次所取的绝对值无限减小，以致比任意给定的数还要小，这个变量就是所谓的无限小或无限小量，这样的变量将以 0 为极限。”

[20] L. Euler, 1707–1783，伟大的瑞士数学家，数学史上最多产的数学家之一，其论著几乎涉及当时数学的所有领域，如微积分、数论、微分方程、微分几何、拓扑学、数学物理……

[21] C. F. Gauss, 1777–1855，德国数学家，“数学王子”，历史上最伟大的数学家之一。其数学研究几乎遍及当时所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献，还把数学应用于天文学、大地测量学和电磁学的研究。他对待学问十分严谨，只是把他自己认为是十分成熟的作品发表出来。

[22] A. L. Cauchy, 1789–1857，伟大的法国数学家，著作甚丰，在微积分、复变函数论、微分方程、代数学、数学物理等方面有杰出贡献。

无限大量 “如果同一变量的绝对值不断增加，以致比任意给定的数还要大，那么当考虑的是正变量时，就说这个变量以正无限大为极限，并用符号 ∞ 表示；当所考虑的是负变量时，就说这个变量以负无限大为极限，并用符号 $-\infty$ 表示。正、负无限大统称为无限大量。”

收敛性 “级数 $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$ 收敛的充分必要条件是：当 n 无限增大时，和 $s_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$ 趋向于一个确定的极限。换句话说，该级数收敛的充分必要条件是：对于无限大的 n 值，和 $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$ 与有限数 s 之差，从而它们相互之差，是无限小量。”

柯西等人的工作对分析学朝向严格化方向的发展起了很大作用。然而一位更加严格的数学家——维尔斯特拉斯——批评前人“无限趋向于”“要多小就多小”仍未脱离直观的运动学涵义，并以“$\varepsilon-\delta$”语言重建了整个数学分析体系。这就是“现代分析学之父”所倡导的“分析的算术化”运动。维尔斯特拉斯还注意到，柯西的微积分理论存在着极限与实数概念循环定义的逻辑缺陷，为此他给出了实数的一种严格定义方式，但其工作未曾正式发表。随后戴德金和康托尔分别发表了他们对实数的定义：前者采用戴德金分割 [7]：“这个分割具有这样的性质：或者在第一类的数中存在最大数；或者在第二类的数中存在最小数。……每个确定的分割对应于一个确定的有理数或无理数，并且当且仅当两个数对应于本质上不同的两个分割时我们认为它们是不同的或不相等的。”后者采用有理数基本列的等价类。

随着实数系的严格化，分析的算术化运动基本完成。这场运动对数学分析产生了深远影响，例如众所周知的由“$\varepsilon-\delta$”语言[23]给出的函数极限概念，今天早已成为微积分教科书普遍采用的标准定义；它标志着分析学已被改造为与粗糙的微积分截然不同的精密学科。至此，第二次数学危机基本宣告解除。人们终于对曾经令人困惑的无限过程及与此相关的“极限”“连续”等概念有了清晰的认识。例如，证明 $f(x)=x^n$ 的导数为 $f'(x)=nx^{n-1}$ 的方法如下：

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得当 $|h|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|=\left|\sum_{k=2}^{n}C_n^k h^{k-1}x^{n-k}\right|\le\sum_{k=2}^{n}C_n^k\delta^{k-1}|x|^{n-k}<\varepsilon,$$

因此

$$f'(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=nx^{n-1}.$$

这样，“无穷小量”的鬼魂基本上可以被摆脱了——尽管，我们提醒读者注意，约一个世纪以后，它将以另一种面貌复生。可问题是，“无穷”仅仅应当被理解为一种过程吗？

§4 潜无穷与实无穷

1831 年，高斯如下表达了他对“实际无穷的恐惧”[2]：“我反对把无穷量作为一个完满的东西来使用，在数学中决不允许有这样的用法。无穷只是一种说话的方式，真正的意

[23]设 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域 E 中的一个值，A 为一个实数。如果对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta, x\in E$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x（在 E 中）趋于 x_0 时，$f(x)$ 的极限是 A。

义是指一些比值，在其它一些比值被允许无限制地增加时，无限趋近的极限。”

康托尔既同意又不同意高斯的见解。他在 1866 年写到实在（高斯称为完满的）无穷时，说 [2]:“尽管在*潜在*无穷和*实在*无穷之间有本质的差别，前者意味着一个增加到超出所有有限的限制的可变有限量，而后者是一个超出所有有限量的*固定*的常量，只是它出现得太经常，因而它们被混淆了。”

正如前面所说，康托尔属于建设性的批判学派。他的一个突出建树是，他所创立的集合论突破了自古希腊以来严谨的数学家只承认潜无穷而否认实无穷的限制，第一次把无穷的事物作为一个整体来考虑，并得出了大量违反直觉然而又千真万确的结论，从而大大丰富了人们对无穷的认识。这些结果是如此的惊人，以至于康托尔本人甚至在给戴德金的信中说:“我看到了，但我简直不能相信它!”

康托尔创造了“势”（或称“基数”）的概念。两个集合称为等势（或者具有相同基数），当且仅当它们之间能够建立一一对应的关系，这是对两个有限集合元素个数相等这一概念的推广。可是一旦涉及无穷，就会出现人们意想不到的结果。以下列举康托尔证明的一些定理：

- 至多可数个可数集的并是可数集，特别地，有理数集是可数集，即它与自然数集等势。这冲击了自亚里士多德时代以来人们从有限的事物中得出的“整体大于部分”的哲学观念。事实上，戴德金甚至建议把“能够与自身的一个真子集等势”作为无穷集合的定义——这是有史以来首次以一种清晰而精确的方式定义这个概念。

- 任何一个集合与它的幂集合（即所有子集之集）不等势。这意味着，存在各种不同的“无穷”，它们之间还有“多”与“少”的区别。

- 实数集 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 等势。这意味着，平面上的点与直线上的点，从一一对应的角度看，是一样多的。

- 实数集是不可数的。由于代数数是有理系数代数方程的根，从而代数数集是可数的，因此由这一定理推出，超越数不仅存在，而且其全体与实数集等势；换句话说，超越数比代数数还要多得多。康托尔本人的评价是 [9]:“定理表明了实数集所以构成一个所谓连续统的原因……由此我发现了连续统与像全体实代数数那样的集合之间的明显区别。”

上述关于超越数的结论突出地显示了康托尔集合论的威力。历史上，超越数的存在性直到 1844 年才被刘维尔[24]证明，用的是构造性的方法。判断一个具体的数是不是超越数是非常困难的问题，比如埃尔米特[25]、林德曼[26]分别对 e（1873 年）和 π（1882 年）的超越性的证明都是载入史册的重大贡献，而欧拉常数[27]是否是超越数（甚至无理数）的问题直至今天仍未解决。值得注意的是，在当时的数学界，对涉及存在性的问题，只有构造性

[24]J. Liouville, 1809–1882，法国数学家，著名的法文杂志《纯粹与应用数学杂志》的创办者，研究领域涉及椭圆函数、解析函数、微分方程等众多分支。

[25]C. Hermite, 1822–1901，法国数学家，在特殊函数论、数论、高等代数、数学分析等方面做出了重要贡献。

[26]F. von Lindemann, 1852–1939，德国数学家。

[27]$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$

的证明才是大家普遍接受的。康托尔没有给出任何超越数的具体构造方法，就敢断言超越数甚至比代数数还要多得多，这种思想有鲜明的革命性。

康托尔掀起的革命远不仅如此。在《集合论基础》一书中，康托尔更是大胆地提出了作为自然数系独立和扩充的超穷数。超穷数的建立，带来对实无穷的理解又一次震撼：实无穷甚至可以作为数存在！康托尔深信“超穷数终将被承认是对数概念最简单，最适当和最自然的扩充”。康托尔认为，超穷数有真实的存在性。每个超穷数表示无穷良序集的顺序的编号。通过这一概念，康托尔还给出关于有穷和无穷的新见解：一个集合是有限的，当且仅当它所有排列的编号相同。[9]

借助超穷数理论，康托尔不仅知道无穷集最小的势是自然数集的势，还精确构造出了比可数无穷更高阶“第二类数的势”，并且“第二类数的势”与自然数的势之间不存在中间势。[9] 超穷数理论是康托尔对描述任意无穷集的势的重要探索。

康托尔的革命性观念使他处于传统观念的对立面，因而受到某些保守的怀疑主义者的责难是不可避免的。最猛烈的攻击来自他的老师克罗内克。按照这位杰出的代数学家的看法，“上帝创造了正整数，其余的数都是人造的”。他甚至不承认无理数的存在，更不能接受他视作“危险的数学疯狂”的非构造性证明。“克罗内克看见数学在康托尔的领导下走向疯人院，便热烈地致力于他所认为的数学真理，用他能够抓到的一切武器，猛烈地、恶毒地攻击‘正确的无穷理论’和它的过于敏感的作者。”[2]

悲剧的结局不是数学进了疯人院，而是康托尔进了疯人院。可怜的康托尔此后一些最好的工作是在两次发作之间的间歇时完成的。然而克罗内克的批判并不能逆转数学发展的历史潮流。正如存在性证明最终为人所接受一样，康托尔开创的集合论逐渐成为现代数学的基础。正如希尔伯特所指出的 [8]，关于无穷的实质的这一最深刻的洞察，堪称“数学天才最优秀的作品”和“人类纯粹智力活动的最高成就之一”。

然而问题远非简单。关于无穷的理论，似乎总有无穷多的困难。其中之一便是作为著名的希尔伯特问题之首的连续统假设，即可数的无穷集与实数的连续统之间是否还存在其他的势。康托尔猜想没有，但无法证明。这个问题直到 1963 年才被以一种出人意料的方式解决[28]。另一个困难是，既然任何一个集合的势都严格小于它的幂集合的势，那就不存在具有最大基数的集合；可是如果能够把所有集合的全体视为一个集合，那它显然是具有最大基数的。这意味着，不加限制地讨论“所有集合的集合”恐怕会出问题。康托尔已意识到这一点，尽管他还没来得及给集合论构筑更加坚实的基础。

§5 关于无穷的理论引发的悖论与论战

历史表明上述担心不是多余的。1902 年，英国数理逻辑学家罗素提出了下述著名的悖论：作集合

$$E = \{A : A \notin A\}$$

[28]美国数学家科恩 (P. J. Cohen, 1934–) 证明了连续统假设相对于 ZFC（含有选择公理的策梅罗 – 弗伦克尔公理体系）是独立的。这个结果与哥德尔于 1938–1939 年证明的连续统假设相对于 ZFC 的相容性合起来，意味着在现行最常用的公理体系之内这个问题是不可判定的。

即 E 由这样的元素 A 组成，A 是一个集合，同时它不是自身的元素。问题是：E 是否属于 E? 容易看出，无论怎样回答都会引出矛盾[29]。这一悖论引起数学界极大的震惊，它使人们看到集合论的体系是不完善的，需要利用公理对所讨论的对象和研究的手段加以限制。有人甚至认为数学的基础由此发生动摇，于是称这一事件为第三次数学危机。

在这场危机面前，贯穿于整个数学史的两大数学思想学派之间的争论从来没有像现在这样激烈。热衷于这场关于数学的基础与本质的论战的数学家明显地分为三个学派：逻辑主义、形式主义、直觉主义。这场危机的发起者罗素——逻辑主义学派的代表人物——试图通过把全部数学建立在逻辑的基础上来解决它；以希尔伯特为代表的形式主义者为此提出了一整套方案，后面将加以介绍。与此相反，直觉主义者——克罗内克和庞加莱[30]是其始祖——采取的不是建设性的批判态度。

以布劳威尔为代表的直觉主义者，否定实无穷，坚持“存在”即被构造，反对把康托尔集合论和传统逻辑的排中律用于无穷集合。他们认为 [2]，亚里士多德发明的逻辑，是建立在关于有限集的人类经验基础上的规则，没有任何理由认为对于 有限 适用的逻辑当应用到 无限 时，会继续产生一致的（无矛盾的）结果。出于这种哲学观点，布劳威尔否认古典数学中的大量的非构造性定义和纯存在性证明，甚至心甘情愿地放弃自己证明的著名的不动点定理[31]。

希尔伯特称这种做法归根到底是在步克罗内克的后尘。“他们要将一切他们感到麻烦的东西扫地出门，以此来挽救数学……他们要对这门科学大砍大杀。如果听从他们所建议的这种改革，我们就要冒险，就会丧失大部分最宝贵的财富！”[8] 他列举了一些例子：无理数的一般概念；函数，“甚至数论函数”；康托的超限数；在无限多个正整数中有一个最小数的定理；逻辑排中律。尤其是，“禁止数学家使用排中律，就好比是禁止天文学家使用望远镜或禁止拳师使用他们的拳头”。“按照你的方法”，他对布劳威尔说，“现代数学的大部分成果都要被抛弃，但对于我来说，重要的不是抛弃，而是要获得更多的成果。”

希尔伯特认为：产生悖论的原因不在于“实无穷”，而在于对“实无穷”的错误认识；有一种“充分满意的方法，可以避免集合论悖论，而又毋需背弃我们的科学”。同时，他也承认：“绝对无穷概念的命题确实是超越人们直观性证据之外”的东西，“是通过人们的心智过程被插入或外推出来的概念”。由于无穷不能在经验中直接验证，故希尔伯特称之为理想元素，并将古典数学中以实无穷为前提的命题称做理想命题，有直观意义的命题称做现实命题，将古典数学分成涉及实无穷的“理想数学”和以“有穷主义”为特征的现实数学（即构造性数学）。希尔伯特认为：理想元素方法在数学中是常用的，行之有效的方法，问题不在于使用理想元素，而在于说明使用理想元素不会带来矛盾，因为（至少在他看来）数学的可靠性就在于它的协调性（即无矛盾性）。为了以一种连他的对手也能接受的方式证明数学的协调性，希尔伯特提出了如下计划：

[29]假如 E 属于 E，那么根据 E 的定义，它不是自身的元素，即 $E \notin E$，矛盾；假如 E 不属于 E，同样根据 E 的定义，推出它是自身的元素，即 $E \in E$，又是矛盾。

[30]H. Poincaré, 1854–1912，伟大的法国数学家，19、20 世纪之交最重要的数学家之一，在微分方程、自守函数、拓扑学、数学物理等方面有开创性的杰出贡献。

[31]Brouwer 不动点定理是：从 n 维闭球体 B^n 到自身的任何连续映射必有不动点。这是代数拓扑学中一个十分重要的基本定理。毫无疑问，这一定理的证明方法是（也只能是）纯存在性的，即通过假设没有不动点来导出矛盾。

1. 将所要讨论的古典数学理论公理化，并表成由一些形式符号和公式组成的形式理论系统，以此来摹写原理论中的现实命题和理想命题以及其间的逻辑关系；
2. 采用有穷方法[32]建立一个逻辑和数论系统（希尔伯特称之为元数学），作为研究形式理论系统的工具；
3. 用元数学来证明在上述形式理论中，不会有某个论断与其否定同时可以推出的情况出现，也就是证明该形式理论的协调性，从而推出所讨论的古典数学理论的协调性，亦即其中的现实命题和理想命题都可以保留。

希尔伯特在他的计划中强调了两个原则：其一为彻底地形式化；其二为有穷主义。他希望以此把有穷主义观点下的构造性与涉及实无穷的理想元素在应用上的有效性统一起来，从而在直觉主义者能够接受的意义下保卫古典数学的成果。希尔伯特计划约在 1922 年问世，曾经引起相当普遍的重视，吸引了许多数学家（包括象哥德尔[33]这样的大数学家）为促其实现而努力。一些较为简单的对象理论，诸如命题演算，一阶谓词演算，只含加法的算术等的协调性已被先后证得，这些工作促进了数理逻辑的发展也增强了对计划的信心。但是 1931 年 K. 哥德尔发表了著名的不完备性定理[34]，这给希尔伯特的证明论计划以沉重打击。希尔伯特本人虽因此而感到震惊，但并不认为自己的计划已被否定，而认为只需将有穷方法加以扩充，再增加超限归纳法[35]作为证明论的工具，原计划还是可行的。1936 年 G. 根岑[36]用超限归纳法证明了纯数论的协调性，但这已不是希尔伯特原来的计划。

希尔伯特的计划虽然未能实现，但它对现代数学的发展有很大贡献。尤其是，这一计划所强调的公理化方法，已深入到现代数学的几乎每个分支。20 世纪很多重要的新兴学科，诸如泛函分析、抽象代数、拓扑学，都是以形式的公理体系作为其理论基础的；像概率论这样的古典学科，也通过公理化方法得到了严格化。我们很快就会看到，这一方法还使一度被抛弃了的“无穷小量”获得了重生。

---

[32]简言之，希尔伯特的有穷方法是指不涉及实无穷的、直观上明显可靠的、能在有穷步骤内根据确定的机械的办法实施的推理方法，并可终结。这种方法是与直觉主义者的观点相一致的。

[33]K. Gödel, 1906–1978，奥地利 – 美国数学家、逻辑学家。

[34]设有一个以皮亚诺自然数论为其子系统的不自相矛盾的（即自身协调的）形式系统，暂记为 U；在形式系统中凡不含自由变元的公式叫做语句；如果语句 A 和 $\neg A$（非 A）在某形式系统内均不可证，则 A 就叫做该形式系统的不可判定语句。不完全性定理说，任何一个上述的系统 U 都必有一个不可判定语句 A。依据排中律，A 和 $\neg A$ 之间必有一个是真语句，故不完全性定理可改为：任何一个上述系统 U 都必有一个真语句是不能推出的。如果一个系统对任何语句 A 都能推出 A 或推出 $\neg A$，则这个系统叫做完全系统，这样不完全性定理又可改述为：任何一个上述的系统 U 必是不完全的。[11]

[35]设 $(X, \leq)$ 是一个良序集，对任意 $a \in X$，$X_a = \{b \in X | b < a\}$ 被称为在 X 中由 a 所确定的截断。$E \subset X$ 被称为归纳子集，如果对于任何 $a \in X$，只要截断 $X_a \subset E$，就有 $a \in E$。超限归纳法：设 E 为良序集 $(X, \leq)$ 的归纳子集，则 $E = X$。[11]

[36]G. Gentzen, 1909–1945，德国数学家。

§6 非标准分析——无穷小量的重生

前面提到，莱布尼兹在创建微积分理论时，利用了无穷小这一概念。这个量既可以作为分母出现在求导运算中，又可以将其看作零而忽略不计。这一观点具有直观、方便的优点，但其逻辑一直倍受数学家们的质疑。在 19 世纪柯西及维尔斯特拉斯使用并完善了 $\varepsilon-\delta$ 语言后，无穷小这一概念基本上为主流数学所摒弃了。

然而在 20 世纪 60 年代，A. 鲁宾逊[37]利用数理逻辑中模型论的方法，给出了无穷小这一概念一个坚实的逻辑基础。他的基本思想是，既然人们在实数范围内无法接受一个非 0 但又比任一正实数都小的无穷小数的存在，那么就应该考虑实数系统 $\mathbb{R}$ 的一个扩张 $*\mathbb{R}$，在其上保持原来的序关系、代数关系，同时无穷小数又是新系统中一个实际存在的数。在 $*\mathbb{R}$ 上，就可以用无穷小语言严格地重建微积分的数学基础，从而在新的水平上恢复并发展了莱布尼兹的精神。A. 鲁宾逊将他的方法称为“非标准分析”。

除了给出无穷小量方法严格的基础，非标准分析也被成功应用于拓扑、实变函数、复变函数、泛函分析、微分方程、概率论等诸领域。在非标准分析中有重要的转换原理: 每一个关于 $\mathbb{R}$ 可形式化的命题对 $\mathbb{R}$ 成立者，经适当解释对 $*\mathbb{R}$ 也成立, 反之亦然。这里,“适当解释”是指在命题中出现的对象（如集合、关系、函数等）在 $\mathbb{R}$ 中都被解释为相应的内对象。有了这条转换原理，就可以借助于标准分析以了解非标准结构并运用非标准分析来解决标准分析的问题。当然，非标准分析并不仅仅是一种简化的平行理论，它也能解决一些传统分析尚未解决的问题。比如 A. 鲁宾逊利用非标准分析首次证明了 Hilbert 空间中有紧致平方的线性算子具有一个非平凡的不变子空间。著名的逻辑学家 K. 哥德尔曾高度评价非标准分析:“……相反地，我们有充分的理由相信，以这种或那种形式表示的非标准分析，将成为未来的分析学。”

下面沿用参考文献 [12] 初步介绍非标准分析引入无穷小量的一种方式。一个自然的方式是把实数序列看作某种意义下的数，即考虑交换环 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$。在其上定义等价关系：$(a_n)\sim(b_n)$ 当且仅当集合 $\{n|a_n\neq b_n\}$ 为有限集合。用 $[a_n]$ 表示 (a_n) 所属的等价类，并定义等价类间的加法和数乘：$[a_n]+[b_n]=[a_n+b_n]$ $[a_n]\cdot[b_n]=[a_n\cdot b_n]$，则 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim,+,\cdot)$ 也是一个交换环。在其上引进序 $\leq$：$[a_n]\leq[b_n]$ 当且仅当集合 $\{n|a_n>b_n\}$ 为有限集。将常数列看做实数，则考虑 $[\frac{1}{n}]$，易知在上述序关系下它小于任一正实数，同时它又不为 0，因此可以看作是一个无穷小量。当然，上述定义方式存在缺陷，即 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$ 不是一个域，并且序 $\leq$ 也只是偏序关系。原因是构造 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$ 时的等价关系过强了。要引进合适的等价关系，需要滤、超滤的概念，这里不再介绍。

上面引入无穷小量的方式，不由使人想起利用有理数列定义实数的方式。从这个角度看，引入无穷小量也是十分自然的。

§7 总结与思考

回顾两千多年的数学史，我们看到，关于“无穷”的问题在数学思想的发展历程中可以说居于核心地位。数学的几乎所有分支都涉及无穷集合，例如数学分析在一定的意义

[37]A. Robinson，1918–1974，美国数学家，生于德国。

上就是一首“无穷的交响乐”。无处不在的“无穷”，正如希尔伯特所说，深刻地影响着人类的精神，有效地激励着人类的智力。

人类对于这一重要概念的认识，经历一个不断深化、扩展、向前推移的发展过程：深化，包括以数学分析为代表的关于“无穷”的学科——乃至整个数学——的严密化、抽象化；扩展，包括从潜无穷到实无穷的历史性跨越，从无穷小量到 $\varepsilon-\delta$ 语言再到非标准分析的否定之否定的螺旋上升；向前推移，包括致力于保卫古典数学成果的“希尔伯特计划”在对手不承认“实无穷”的背景下的提出，及其遭遇了哥德尔不完备性定理打击后的修改。

希尔伯特曾在著名的《数学问题》演讲中乐观地提出这样的信念 [8]：“每个确定的数学问题都应该能得到明确的解决，或者是成功地对所给的问题作出回答，或者是证明该问题解的不可能性，从而指明解答原问题的一切努力都肯定要归于失败。”尽管哥德尔不完全性定理指出存在着不可判定的命题，但从人类对于“无穷”的认识发展历程中，我们有理由相信，如果考虑到第三种可能性，那么人类终将获得对数学问题的正确认识：或者成功地对所给问题作出回答，或者证明该问题解的不可能性，或者证明其在某一公理体系内不可判定。

总之，希尔伯特的乐观主义精神，将继续激励未来的数学家在认识世界的道路上勇往直前，正如他的墓碑上所刻的那句名言：

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.[38]

参考文献

[1] [以色列]伊莱·马奥尔，*无穷之旅*，王前、武学民、金敬红译，上海教育出版社，2000 年 8 月第 1 版

[2] E. T. Bell, *MAN OF MATHEMATICS*, 中译本*数学精英 – 数学家的故事*

[3] G. H. Hardy, *一个数学家的辩白*，*科学家的辩白*，江苏人民出版社，1999 年 9 月第 1 版

[4] 李文林（主编），《数学珍宝 — 历史文献精选》，科学出版社，1998 年 10 月第 1 版

[5] L. Euler, *Institutiones Calculi differentialis*, 1755, 中译文摘自如上书籍。

[6] A. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*,1821, 中译文出处同上。

[7] J. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*,1872, 中译文出处同上。

[8] [美]康斯坦丝·瑞德，*希尔伯特 — 数学世界的亚历山大*，袁向东、李文林译，上海科学技术出版社，2001 年 8 月第 1 版

[9] [美]周·道本，*康托的无穷的数学和哲学*，郑毓信、刘晓力编译，江苏教育出版社，1989 年 10 月第 1 版

[38]我们必须知道。我们必将知道。

[10] 王树禾，数学演义，科学出版社，2004 年 10 月第 1 版

[11] 杜瑞芝（主编）：《数学史辞典》，http://166.111.121.20:9080/mathdl/search_service/browse.htm

[12] 李邦河，《非标准分析基础》，上海科学技术出版社

[13] M. 克莱因，数学：确定性的丧失，李宏魁译，湖南科学技术出版社

****

数学家趣闻

▲维纳（1894-1964）是最早为美洲数学赢得国际荣誉的大数学家，维纳最有名的故事是有关搬家的事。一次维纳乔迁，妻子知道维纳没什么脑子，搬家前一天晚上再三提醒他。她还找了一张便条，上面写着新居的地址，并用新居的房门钥匙换下旧房的钥匙。第二天维纳带着纸条和钥匙上班去了。白天恰有一人问他一个数学问题，维纳把答案写在那张纸条的背面递给人家。晚上维纳习惯性地回到旧居。他很吃惊，家里没人。从窗子望进去，家具也不见了。掏出钥匙开门，发现根本对不上齿。于是使劲拍了几下门，随后在院子里踱步。突然发现街上跑来一小女孩。维纳对她讲："小姑娘，我真不走运。我找不到家了，我的钥匙插不进去。" 小女孩说道："爸…爸爸，妈妈让我来找你。"

▲刘维尔曾经激励著名的苏格兰物理学家威廉·汤姆森，即开尔文勋爵，给数学家下了一个所有定义中最令人满意的定义，回想起这件事是很有趣的。"你们知道数学家是什么样的人吗？" 开尔文有一次问班上的学生。他走到黑板面前，写下了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

然后他用手指着写下的式子，转身对学生们说，"一个数学家就是对说他说来，这就像二加二等于四对你们一样明显的人。刘维尔就是一个数学家。"（摘自《数学精英》中译本 526 页）

▲ von Neumann 曾经碰到别人问他一个估计中国小学生都很熟的问题，就是两个人相向而行，中间有一只狗跑来跑去，问两个人相遇之后，狗走了多少的这种。应该先求出相遇的时间，再乘狗的速度。如果没有什么记错的话，小时候听说过苏步青先生在德国的一个什么公共汽车上，就有人问他这个问题，他老人家当然不会感到有什么困难了。von Neumann 也是瞬间给出了答案，提问的人很失望，说你以前一定听说过这个诀窍吧，他指的是上面的这个做法。von Neumann 说："什么诀窍？我所做的就是把狗每次跑的都算出来，然后算出那个无穷的级数……。"