

2009.7.

五字班毕业论文特刊



## 刊首语

数学系五字班的各位同学：

我们当中有谁不想追寻前辈的足迹，看一看在过去的一个世纪里我们这门科学取得的成就和进展呢？有谁不想探索数学世界的真理，为这株已经枝繁叶茂的老树再添一根新枝呢？又有谁不想把自己的成果展示给即将分别的同学，留下一份特别的毕业纪念呢？

数学的历史告诉我们，杰出的数学家往往是在良好的数学氛围中成批涌现的。仰望与数学圣地 Göttingen 相联的那些伟大名字，俯观作为 Bourbaki 成员激烈讨论的结晶的那些不朽著作，回首老清华数学系群星璀璨的那段光辉岁月，我们难道不该为这样一种氛围的营造和清华数学的复兴做点什么吗？

是的，正是为此，才诞生了我们的《荷思》杂志。它如同一株一岁多的幼苗，正在园丁的培育下茁壮成长，同时更需要每一个人的关怀与呵护；三十年后，必将成为参天大树！

现在，包括创刊者在内的我们数学系五字班即将毕业。在这样一个时刻，除一期毕业论文特刊之外，还有什么更好的方式，能够展示我们四年来的收获与感悟，并激励后来者沿着我们所开辟的道路继续勇往直前呢？

同学们，朋友们，让我们最后一次再现为共同的事业辛勤工作的美好情景，给四年大学生活画上一个圆满的句号，并留下一份难忘的回忆吧！

《荷思》编辑部

# 目录

变分和拓扑方法与微分方程 .....	陈凌骅	1
紧黎曼流形谱理论综述 .....	杜升华	16
根系的分拆 .....	黄瀚贤	33
对任意平移不变Borel测度均零测或非 $\sigma$ -有限的Borel集 .....	姜多	44
数独中的数学应用 .....	王琢	59
阿基米德的数学及其现代解法 .....	张程业	79
毕业感言 .....	杜升华	94
毕业感言 .....	吴昊	96

# 变分和拓扑方法与微分方程

陈凌骅\*

指导教师：邹文明教授

## 摘要

本文中我们首先介绍了变分方法的基本概念，尤其是微分方程与其能量泛函之间的联系。之后具体考虑非线性微分方程组的球对称驻波解

$$\begin{cases} -\Delta u + u + V(x)u = f(x, u) \\ -\Delta V(x) = \lambda u^2. \end{cases}$$

并且对非线性项  $f(x, u)$  三种不同的增长水平分别加以考虑。通过应用一个抽象结果以及有关拓扑度的方法，对此三种情况均得到了多解的结果。

关键词：变分方法；Schrödinger-Poisson方程组；多解

## §1 引言

### §1.1 变分方法与一些基本定义

微分方程中的变分方法是将微分方程化为变分问题以探讨解的存在与否，以及解的个数等等的方法。古典变分法的基本内容是确定泛函的极值与极值点。确定泛函的极值点与确定线性微分方程的解这两个问题在一定条件下可以互相转化。

而近代变分法中，问题的范围扩大到非线性椭圆方程，其对应的能量泛函结构更加复杂，可能既没有上界也没有下界。此时方程的弱解只是对应着其能量泛函的临界点，而未必是极值点。在非线性方程解的存在性的研究中，极小极大原理（minimax principle）是重要技巧之一，这种方法不仅给出泛函的临界点，而且对相应的临界值作出了估计。在1973年，Ambrosetti A. 与 Rabinowitz P. H. 给出了所谓的“山路引理”，这个引理是极小极大原理的一个重要的具体形式，它形象的说明

---

\* 基数52

是，从盆地中心出发到盆地外部，必有一条道路从盆地周围山脉的最低点通过，而这个最低点就是泛函的一个临界点。近几十年来，山路引理和各种山路定理在非线性微分方程各种问题的应用中取得了许多有重要意义的新结果，大大推动了临界点理论的发展。

在开始具体讨论之前，我们先给出一些基本定义。

**定义 1.1.** 设  $E$  为 Banach 空间，称集合  $A \subset E$  对称，如果  $u \in A \Leftrightarrow -u \in A$ 。

与函数的可微相似，也可以定义泛函的可微性：

**定义 1.2.** 设  $E$  为 Banach 空间，对偶空间为  $E'$ 。 $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  为泛函， $u \in E$ 。如果存在  $A(u) \in E'$ ，使得

$$I(u + \phi) = I(u) + \langle A(u), \phi \rangle + o(\|\phi\|), \quad \|\phi\| \rightarrow 0,$$

则称  $I$  在  $u$  点 Fréchet 可微， $A(u)$  称为  $I$  在  $u$  的 Fréchet 导数，记  $A(u) =: I'(u)$ 。如果  $I$  在  $E$  上每一点可微，则记  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ 。

**定义 1.3.** 设泛函  $I$  在  $u \in E$  点可微，并且  $I'(u) = 0$ ，则称  $u$  为  $I$  的一个临界点， $I(u)$  称为相应的临界值。

**定义 1.4.** 称泛函  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  满足 Palais-Smale 条件，简称 (PS) 条件，如果任意序列  $\{u_n\} \subset E$  使得  $\{I(u_n)\}$  有界，并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} I'(u_n) = 0$ ，都存在收敛子列。

在应用变分法证明泛函的临界点存在时，经常涉及临界序列的收敛性。而证明泛函满足 (PS) 条件便是常用方法之一。

在本文的证明过程中，需要用到伪梯度向量场，以及拓扑度的概念及性质，更多的讨论可以参考 [2]。

**定义 1.5.** 设  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ 。

- 如果  $u, v \in E$  满足  $\|v\| \leq 2\|I'(u)\|$ ,  $\langle I'(u), v \rangle \geq \|I'(u)\|^2$ ，则称  $v$  是  $I$  在  $u$  处的伪梯度向量；
- 如果  $S \subset E$ ,  $X \in C(E, E)$ , 并且对任意  $u \in S$ ,  $X(u)$  是  $I$  在  $u$  处的伪梯度向量，则称  $X$  为  $I$  在  $S$  上的伪梯度向量场。

**定义 1.6.** 设  $A \subset E$  为子集合，称  $A$  的拓扑度为  $n$ ，记  $\gamma(A) = n$ ，如果  $n$  为使得映射  $\phi \in C(A, \mathbb{R}^n - 0)$  存在的最小自然数。当这样的  $n$  不存在时，约定  $\gamma(A) = \infty$ ，并且还约定  $\gamma(\emptyset) = 0$ 。

由于后续证明的需要，我们在这里给出如下命题，具体证明可以参见 [2]。

**命题 1.1.** 设  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ ,  $K := \{u \in E : I'(u) = 0\}$  为临界点集合, 如果  $\tilde{E} := E - K \neq \emptyset$ , 则存在  $I$  的局部 Lipschitz 连续的伪梯度向量场  $X : \tilde{E} \rightarrow E$ 。进一步, 如果  $I$  为偶泛函, 则可选取  $X$  为奇算子。

## §1.2 一个具体问题

本文具体考虑一个三维空间中的非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi - V(x)\psi + f(x, |\psi|) \frac{\psi}{|\psi|} = 0^1, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

考虑方程的驻波解, 则令  $\psi(t, x) = \exp\{i\omega t\}u(x)$ , 其中  $u(x) \in \mathbb{R}$ , 则  $u$  满足不含时间的非线性 Schrödinger 方程

$$-\Delta u + (\omega + V(x))u - f(x, u) = 0.$$

一个被广泛研究的情形是势函数  $V(x)$  由波函数本身的电荷决定, 即满足 Poisson 方程

$$-\Delta V(x) = \lambda |\psi|^2, \quad \text{这里 } \lambda > 0.$$

另外, 由于频率  $\omega > 0$  是一个确定的数, 所以不妨取定  $\omega = 1$ 。此时, 我们需要考虑的是有一个 Schrödinger 方程和一个 Poisson 方程的方程组

$$\begin{cases} -\Delta u + u + V(x)u = f(x, u) \\ -\Delta V(x) = \lambda u^2. \end{cases} \quad (1)$$

十年来这个问题有一系列的结果, 最早在 V. Benci 与 D. Fortunato 的 1998 年的文章 [7] 中处理了有界定域 Dirichlet 边界条件且  $f(x, u) \equiv 0$  的情形, 并得到无穷多解的结果。在 2004 年 T. D’Aprile 与 D. Mugnai [5] 中, 处理了  $\lambda = 4\pi$ ,  $f(x, u) = |u|^{p-1}u$ ,  $3 \leq p < 5$  的情形, 得到一个非平凡解。在 D. Ruiz 的 [12] 中,  $f(x, u) = |u|^{p-1}u$ , 作者分别得到当  $2 < p < 5$ , 对任意  $\lambda > 0$ , 方程组至少有一对正解  $\{\pm u\}$ ; 当  $1 < p < 2$  方程组至少有两对正解  $\{\pm u, \pm v\}$ ; 当  $p = 2$ , 存在  $\Lambda' \in (0, 1/4)$ , 使得当  $\lambda \in (0, \Lambda')$ , 方程组至少有一对正解  $\{\pm u'\}$ 。不久之后 A. Ambrosetti, D. Ruiz 在文章中推广了 [12] 的结果, 证明了更多球对称解的存在。

---

<sup>1</sup>由下文中  $f(x, u)$  满足的条件易见

$$\lim_{|\psi| \rightarrow 0} f(x, |\psi|) \frac{\psi}{|\psi|} = 0.$$

近几年，围绕这个问题国内外也还有很多其他的研究，譬如 [1], [15], [10], [8]，不过迄今为止，还未发现有文献将该问题的非线性项替换为更为一般的函数而得到多解的结果。

在本文中，作者尝试将 [3] 中的非线性项  $|u|^{p-1}u$  推广为更加一般的函数  $f(x, u)$ ，并且得到与 [3] 相同的多解性结论。由于作者水平所限，本文整体的结构仍旧来源于 [3]。

### §1.3 问题的初步处理

在本文之后的讨论中，如果不加特殊声明， $C, C'$  等等均表示推导过程中某个具体数值无关紧要的常数， $\int$  表示在  $\mathbb{R}^3$  上对变量  $x$  积分，方程的解表示球对称弱解。

首先我们将问题化为一个非线性 Schrödinger 方程。记  $H^{1,2}(\mathbb{R}^3), D^{1,2}(\mathbb{R}^3) := \{u \in L^6(\mathbb{R}^3) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$  为普通的 Sobolev 空间，分别赋以范数

$$\|u\|^2 := \int (|\nabla u|^2 + u^2) dx, \quad \|u\|_D^2 := \int |\nabla u|^2 dx,$$

并且记  $H_r^1 \subset H^{1,2}(\mathbb{R}^3), D_r^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$  为相应的球对称函数子空间。由于我们的目标是寻找方程组的球对称解，所以下文的工作全部在 Hilbert 空间  $E := H_r^1$  中展开。

由算子理论中的 Lax-Milgram 定理，对任意  $u \in E$ ，存在唯一的  $\phi_u = \frac{1}{|x|} * u^2 \in D_r^{1,2}$ ，使得  $-\Delta \phi_u = u^2$ 。具体证明过程参见 [5]。带入 (1) 得到

$$-\Delta u + u + \lambda \phi_u(x)u = f(x, u), \quad u \in E. \quad (2)$$

方程 (2) 可以通过变分方法来处理。实际上，定义泛函  $G : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(u) := \int \phi_u(x)u^2(x)dx.$$

这样得到一个连续可微泛函

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}G(u) - \int F(x, u)dx, \quad u \in E, \quad (3)$$

其中  $F(x, u) := \int_0^u f(x, z)dz$ ，为  $f(x, u)$  的原函数。这个泛函的临界点对应着方程 (2) 的解。

在本文的讨论中， $f(x, u)$  满足以下条件：

**f.1**  $f(x, u) \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ；

**f.2**  $f(x, -u) = -f(x, u)$ ，并且  $f(x, u)$  为球对称函数；

**f.3** 存在常数  $a > 0, b > 0, s \in [0, 5]$ , 使得  $|f(x, u)| \leq a + b|u|^s$  对任意  $(x, u)$  成立;

**f.4**  $\lim_{u \rightarrow 0} f(x, u)/u = 0$  对  $x \in \mathbb{R}^3$  一致成立。

而  $f(x, u)$  以及它的原函数  $F(x, u)$  还满足以下三个条件之一:

**f.5**  $0 \leq F(x, u)$  对一切  $u \in \mathbb{R}$  成立; 存在常数  $p > 3, r \geq 0$ , 使得  $0 < pF(x, u) \leq uf(x, u)$  对任意  $|u| \geq r$  成立; 存在常数  $A \in (0, \frac{p-2}{p+2})$  使得,  $|f(x, u)| \leq A|u|$  对任意  $|u| < r$  成立;

**f.6** 存在常数  $3 > p > 2, r \geq 0$ , 使得  $0 < pF(x, u) \leq uf(x, u)$  对任意  $|u| \geq r$  成立; 并且有  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(x, u)/u^3 = 0$  对  $x \in \mathbb{R}^3$  一致成立。

**f.7**  $0 \leq F(x, u)$  对一切  $u \in \mathbb{R}$  成立; 存在常数  $r \geq 0, B_1 > B_2 > 0, B_3 \in (0, \frac{1}{5})$ , 使得  $B_2|u|^3 \leq F(x, u) \leq B_1|u|^3$  对任意  $|u| \geq r$  成立; 并且当  $|u| < r$ , 有  $|f(x, u)| \leq B_3|u|$ 。

我们将证明对新的非线性项  $f(x, u)$  成立平行于 [3] 中结论的以下:

**定理 1.1.** 当  $f(x, u)$  满足条件 **f.1-f.4, f.5**, 则对于任意  $\lambda > 0$ , 方程组 (2) 在  $E$  中存在无穷多对解  $\{\pm u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , 并且当  $k \rightarrow \infty$ ,  $I_\lambda(\pm u_k) \rightarrow +\infty$ 。

**定理 1.2.** 当  $f(x, u)$  满足条件 **f.1-f.4, f.6**, 则对于任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $\Lambda_k > 0$  对任意  $\lambda \in (0, \Lambda_k)$ , 方程 (2) 在  $E$  中有至少  $k$  对解  $\{\pm u_{k,\lambda}\}$ , 使得  $I_\lambda(\pm u_{k,\lambda}) > 0$ , 还有另外  $k$  对解  $\{\pm v_{k,\lambda}\}$ , 使得  $I_\lambda(\pm v_{k,\lambda}) < 0$ 。此外, 有估计  $\Lambda_k \leq \Lambda_{k-1} \leq \dots \leq \Lambda_1$ 。

**定理 1.3.** 当  $f(x, u)$  满足条件 **f.1-f.4, f.7**, 则对于任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $\Lambda'_k > 0$  对任意  $\lambda \in (0, \Lambda'_k)$ , 方程 (2) 在  $E$  中有至少  $k$  对解  $\{\pm u_{k,\lambda}\}$ , 使得  $I_\lambda(\pm u_{k,\lambda}) > 0$ 。此外, 有估计  $\Lambda'_k \leq \Lambda'_{k-1} \leq \dots \leq \Lambda'_1$ 。

对于  $p \in (2, 3) \cup (4, 6)$ , 由 [5] 中的结果可知相应泛函满足 (PS) 条件, 因此以上这些结果都可以由山路引理的对称版本得到, 参见 [4]。然而, 对于  $p \in [3, 4]$ , 泛函的几何结构更加复杂, 无法用标准的方法加以描述; 并且对于  $p \in [3, 4]$ , 尚无法验证 (PS) 条件是否被满足。为了克服这些困难, 我们引入一个辅助泛函

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}G(u) - \mu \int F(x, u)dx, \quad \frac{1}{2} \leq \mu \leq 1, \quad (4)$$

并且证明对于几乎每一个  $\mu$  该泛函存在多个临界点。这个证明实际上是一个抽象结果的具体应用, 该抽象结果的原型来自于 L. Jeanjean 的文章 [9], 其中用到了 Struwe 在 [14] 提出的“单调性技巧 (monotonicity trick)”。对于  $3 < p < 4$  可以证明几乎每一个  $\mu \in$

$[\frac{1}{2}, 1]$ 与任意  $k \in \mathbb{N}$ , 泛函  $I_{\lambda,\mu}$  存在一个临界值  $c_{k,\mu}$ , 相应临界点为  $u_{k,\mu} \in E$ 。之后对于固定的  $k$ , 令一列  $\mu_n \nearrow 1$ , 可以证明序列  $u_{k,\mu_n}$  收敛到 (2) 的解  $u_k$ 。最后通过与泛函

$$I_0(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x, u)dx$$

的比较可知  $I_\lambda(\pm u_k) \rightarrow +\infty$ 。

对于  $p = 3$ , 泛函  $I_{\lambda,\mu}$  的结构有所不同, 当  $\lambda > 0$  充分小, 对于几乎每一个  $\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 仅仅存在有限个临界值  $c_{\mu,k}$ 。我们同样通过  $\mu_n \nearrow 1$  来得到  $I_\lambda$  的临界点。最后, 为了证明该泛函多个临界点的存在性, 需要令  $\lambda \rightarrow 0$ , 并且利用  $I_0(u)$  存在无穷多个相异临界点的事实。

本文后续内容的结构安排如下——在第二节提出那个抽象结果; 在第三节中证明定理1.1。定理1.2以及定理1.3的证明细节由于完全类似于文献 [3] 以及 [12] 中的特殊情形, 限于毕业特刊的篇幅, 故在此略去。

## §2 一个抽象结果

该抽象结果的原型来自于 L. Jeanjean 的文章 [9], 在 [3] 中 A. Ambrosetti 提出了这个具体的形式。实际上, 在下文的证明中可见, 如果  $\alpha(u), \beta(u)$  都是偶泛函, 则可以选取具有对称性, 即在奇异同伦下稳定的集合族  $\mathcal{F}$ , 并证明成立同样的抽象结果。这仅仅需要对 [3] 中原有的证明过程稍加修饰。实际上本文将处理的具体问题 (3) 正是偶泛函。另外原证明相对简略, 在此本文作者按照自己的理解较为细致地对偶泛函情形作出证明。

考虑一个 Hilbert 空间  $E$ , 以及泛函  $\Phi_\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ , 有形式  $\Phi_\mu = \alpha(u) - \mu\beta(u)$ ,  $\mu > 0$ 。假设  $\alpha(u), \beta(u)$  都是偶泛函,  $\alpha \in C^1$ , 并且满足强制性条件, 即  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \alpha(u) = +\infty$ , 并且  $\beta \in C^1$ ,  $\beta(u) \geq 0$ ,  $\beta, \beta'$  将有界集合映为有界集合。另外, 存在对称集合  $K \subset E$  与  $E$  中的一族对称紧子集  $\mathcal{F}$ , 满足如下条件:

**S.1**  $K \subset A$  对任意  $A \in \mathcal{F}$  成立, 并且  $\sup_K \Phi_\mu < c_\mu$ , 其中

$$c_\mu := \inf_{A \in \mathcal{F}} \max_{u \in A} \Phi_\mu;$$

**S.2** 如果  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  为一个奇同伦, 使得  $\eta(0, \cdot) = I_E$ ,  $\eta(t, \cdot)$  为同胚, 并且  $\eta(t, x) = x$  对任意  $x \in K$  成立, 则有  $\eta(t, A) \in \mathcal{F}$  对任意  $A \in \mathcal{F}$  成立。

首先需要推导  $c_\mu$  的基本性质, 归结为如下

**引理 2.1.** 在以上条件下,  $\mu \mapsto c_\mu$  为单调非增左连续映射。

*Proof.* 由 $\beta(u) \geq 0$ 以及 $c_\mu$ 的定义, 显然该映射单调非增。

现假设 $\mu_n \nearrow \mu$ , 则有 $c_{\mu_n} \geq c_\mu$ 。任意 $\epsilon > 0$ , 存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $\max_{u \in A} \Phi_\mu < c_\mu + \epsilon$ 。由于 $A$ 为紧集, 所以当 $n >> 1$ , 有 $\max_{u \in A} |\Phi_{\mu_n} - \Phi_\mu| < \epsilon$ 。因此得出 $c_\mu \leq c_{\mu_n} \leq \max_{u \in A} \Phi_{\mu_n} \leq c_\mu + 2\epsilon$ 。故左连续性得证。  $\square$

由以上引理即知映射 $\mu \mapsto c_\mu$ 几乎处处可微。记 $\mathcal{J} \subset (0, +\infty)$ 为该映射的可微点集合。

**命题 2.1.** 对任意 $\mu \in \mathcal{J}$ , 存在一个关于水平 $c_\mu$ 的有界 (PS) 序列, 即存在 $\{u_n\} \subset E$ 使得

$$\Phi_\mu(u_n) \rightarrow c_\mu, \quad \Phi'_\mu(u_n) \rightarrow 0.$$

*Proof.* 令 $\mu_k \nearrow \mu$ ; 由于 $\mu \in \mathcal{J}$ , 则 $\frac{c_\mu}{\mu}$ 在 $\mu$ 点也可微, 因而有

$$\frac{\frac{c_{\mu_k}}{\mu_k} - \frac{c_\mu}{\mu}}{\mu - \mu_k} \leq C \quad (5)$$

对于某常数 $C > 0$ 成立。因为 $\alpha(u)$ 满足强制性条件, 故可选择 $R > 0$ , 使得

$$\alpha(u) \leq C\mu^2 + 2\mu \Rightarrow \|u\| < R. \quad (6)$$

假设命题结论不真, 则存在 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$\|\Phi'_\mu(u)\| \geq 2\delta, \quad \forall u \in M := \{u \in E : |\Phi_\mu(u) - c_\mu| < 2\delta, \|u\| < 2R\}.$$

此外, 定义集合

$$N := \{u \in E : |\Phi_\mu(u) - c_\mu| < \delta, \|u\| < R\} \subset M.$$

在后文中我们会证明 $N \neq \emptyset$ 。

由 $\beta, \beta'$ 将有界集合映为有界集合, 并且 $\mu \mapsto c_\mu$ 左连续, 故可以取定 $k$ 充分大, 使得

- a.  $(\mu - \mu_k)\|\beta'(u)\| < \delta$ , 对于任意 $\|u\| \leq 2R$ 成立;
- b.  $(\mu - \mu_k)|\beta(u)| < \frac{\delta}{3}$ , 对于任意 $\|u\| \leq R$ 成立;
- c.  $|c_\mu - c_{\mu_k}| < \frac{\delta}{3}$ ;
- d.  $|\mu - \mu_k| < \frac{\delta}{3}$ .

令  $X : M \rightarrow E$  为  $\Phi_\mu$  的伪梯度向量场，并且为奇映射； $\chi : E \rightarrow [0, +\infty)$  Lipschitz 连续，并且为偶函数，使得在  $N$  中  $\chi = 1$ ，在  $E - M$  中  $\chi = 0$ 。考虑由  $X, \chi$  诱导的流

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t}(u, t) &= -\frac{1}{4\delta} \chi(\psi(u, t)) X(\psi(u, t)) \\ \psi(u, 0) &= u.\end{aligned}$$

由定义

$$\frac{d}{dt} \Phi_\mu(\psi(u, t)) = -\frac{1}{4\delta} \langle \Phi_\mu(\psi(u, t))', \chi(\psi(u, t)) X(\psi(u, t)) \rangle.$$

因此，结合伪梯度向量场的定义以及假设 a，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Phi_\mu(\psi(u, t)) &\leq 0 \quad \forall u \in E; \\ \frac{d}{dt} \Phi_{\mu_k}(\psi(u, t)) &\leq 0 \quad \forall u \in E; \\ \frac{d}{dt} \Phi_\mu(\psi(u, t)) &\leq -\delta \quad \text{当 } \psi(u, t) \in N.\end{aligned}$$

选取  $A \in \mathcal{F}$ ，使得  $\max_{u \in A} \Phi_{\mu_k} < c_{\mu_k} + (\mu - \mu_k)$ 。当  $u \in E$ ，记  $u_t := \psi(u, t)$ ,  $A_t := \psi(A, t)$ 。当选取  $\delta < \frac{1}{2}|c_\mu - \sup_{u \in K} \Phi_\mu(u)|$  时，由假设 S.1，可知  $K \cap M = \emptyset$ ，因此  $\psi$  在  $K$  上对于  $t$  为常数。再由假设 S.2 得出  $A_t \in \mathcal{F}$ 。

在此断言：

- 如果  $u \in A$  对某  $t \geq 0$  成立  $\Phi_\mu(u_t) > c_{\mu_k} - (\mu - \mu_k)$ ，则  $u_t \in N$ 。

由这个断言立即可以得出  $N \neq \emptyset$  的结论。实际上，由  $c_\mu$  的定义可知存在  $u \in A$  使得  $\Phi_\mu(u) \geq c_\mu$ 。由此断言即知  $u \in N$ 。

下面分两步来证明这个断言。

### i. $\|u_t\| < R$ .

首先由流的下降性以及我们对集合  $A$  的选择可知

$$\Phi_{\mu_k}(u_t) \leq \Phi_{\mu_k}(u) \leq c_{\mu_k} + (\mu - \mu_k).$$

由此不等式以及断言中的假设，有

$$\begin{aligned}\alpha(u_t) &= \mu \mu_k \frac{\frac{\Phi_{\mu_k}(u_t)}{\mu_k} - \frac{\Phi_\mu(u_t)}{\mu}}{\mu - \mu_k} \\ &\leq \mu \mu_k \frac{\frac{c_{\mu_k}}{\mu_k} - \frac{c_\mu}{\mu}}{\mu - \mu_k} + (\mu + \mu_k) \leq C\mu^2 + 2\mu.\end{aligned}$$

由 (5) 即得  $\|u_t\| < R$ 。

ii.  $|\Phi_\mu(u_t) - c_\mu| < \delta$ .

由断言中的假设以及 **d**, 我们有

$$\Phi_\mu(u_t) > c_\mu - (\mu - \mu_k) > c_\mu - \delta.$$

结合第一步以及 **b**, **c**, **d**, 得到

$$\Phi_\mu(u_t) \leq \Phi_{\mu_k}(u_t) + \frac{\delta}{3} \leq \Phi_{\mu_k}(u) + \frac{\delta}{3} < c_\mu + (\mu - \mu_k) + \frac{\delta}{3} < c_\mu + \delta.$$

即得第二步结论, 于是断言得证。

最后我们将证明  $\max_{u \in A_2} \Phi_\mu(u) \leq c_\mu - (\mu - \mu_k)$ , 由 **S.2**,  $A_2 \in \mathcal{F}$ , 因而这与  $c_\mu$  的定义矛盾, 于是假设错误, 即命题得证。

若不然, 则存在  $u \in A$ , 使得  $\Phi_\mu(u) > c_\mu - (\mu - \mu_k)$ 。特别, 由流的下降性可知  $\Phi_\mu(u_t) > c_\mu - (\mu - \mu_k)$  对一切  $t \in [0, 2]$  成立。定义  $g(t) := \Phi_\mu(u_t)$ , 得到如下矛盾:  $g(0) < c_\mu + \delta$ ,  $g(2) > c_\mu - \delta$ , 然而  $g'(t) < -\delta$ 。 $\square$

### §3 当 $3 < p < 6$ 时方程组的多解性

#### §3.1 极小极大值

本节我们将上一节的抽象结果用于偶泛函 (4), 在此  $E = H_r^1$ ,  $\alpha(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\lambda G(u)$ ,  $\beta(u) = \int F(x, u)dx$ 。

在构造集合族  $\mathcal{F}$  之前, 先做一些准备工作。

现在设  $u_t(x) = u(tx)$ , 推导  $I_{\lambda, \mu}(t^2 u_t)$ 。直接计算可知

$$\begin{aligned} \int |\nabla u_t(x)|^2 dx &= \frac{1}{t} \int |\nabla u(y)|^2 dy \\ \int u_t^q(x) &= \frac{1}{t^3} \int u^q(y) dy, \quad 2 \leq q \leq 6. \end{aligned}$$

此外, 记  $\phi^*(x)$  为方程  $-\Delta \phi^* = (t^2 u_t)^2$  的解, 则有  $\phi^*(x) = t^2 \phi_u(tx)$ 。由此可知

$$\begin{aligned} G(t^2 u_t) &= \int \phi^* t^4 u_t^2(x) dx = t^6 \int \phi_u(tx) u^2(tx) dx \\ &= t^3 \int \phi_u(y) u^2(y) dy = t^3 G(u). \end{aligned}$$

由以上推导得到

$$I_{\lambda, \mu}(t^2 u_t) = \frac{t^3}{2} \int |\nabla u|^2 dx + \frac{t}{2} \int u^2 dx + \frac{\lambda t^3}{4} G(u) - \mu \int F(x, t^2 u_t) dx.$$

下面设  $u \neq 0$ , 并做一些具体的估计。由条件 **f.3**, **f.4**, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在常数  $C > 0$ , 使得

$$|f(x, u)| \leq \epsilon |u| + C|u|^s, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}. \quad (7)$$

两边对  $u$  积分得

$$|F(x, u)| \leq \int_0^u |f(x, z)| dz \leq \frac{\epsilon}{2} |u|^2 + C|u|^{s+1}. \quad (8)$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int F(x, t^2 u_t) dx \right| &\leq \int \left( \frac{\epsilon}{2} t^4 |u(tx)| + C t^{2s+2} |u(tx)|^{s+1} \right) dx \\ &= t \frac{\epsilon}{2} \int |u(y)|^2 dy + t^{2s-1} C \int |u(y)|^{s+1} dy. \end{aligned}$$

现在取  $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ , 则对任意  $u \neq 0$ , 当  $t > 0$  充分小, 有

$$I_{\lambda, \mu}(t^2 u_t) \geq t \frac{\epsilon_0}{2} \int u^2 dx > 0. \quad (9)$$

另一方面, 由条件 **f.5**, 当  $|u| \geq r$

$$\frac{p}{u} \leq \frac{f(x, u)}{F(x, u)},$$

两边积分得

$$p \ln(|u|) \leq \ln(|F(x, u)|), \quad |u| \geq r,$$

即

$$|F(x, u)| \geq C|u|^p, \quad |u| \geq r. \quad (10)$$

另一方面, 仍然由条件 **f.5**, 对任意  $u \in \mathbb{R}$  总有  $F(x, u) \geq 0$ 。结合以上讨论, 以及  $F(x, u)$  关于  $u$  为偶函数, 最终我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} F(x, t^2 u(tx)) dx \\ &= \int_{\{x: |t^2 u(tx)| \geq r\}} F(x, t^2 u(tx)) dx + \int_{\{x: |t^2 u(tx)| < r\}} F(x, t^2 u(tx)) dx \\ &\geq \int_{\{x: |t^2 u(tx)| \geq r\}} C |t^2 u(tx)|^p dx \\ &= C t^{2p-3} \int_{\{y: |t^2 u(y)| \geq r\}} |u(y)|^p dy. \end{aligned}$$

由 Levi 单调收敛定理知, 对于确定的  $r > 0$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\{y: |t^2 u(y)| \geq r\}} |u(y)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^3} |u(y)|^p dy.$$

故, 当  $t > 0$  充分大, 由  $3 < p < 6$  可知

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x, t^2 u(tx)) dx \geq \frac{C}{2} t^{2p-3} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^p dx.$$

因此, 当  $t > 0$  充分大,  $u \neq 0$ ,

$$I_{\lambda,\mu}(t^2 u_t) \leq \frac{t^3}{2} \int |\nabla u|^2 dx + \frac{t}{2} \int u^2 dx + \frac{\lambda t^3}{4} G(u) - \mu \frac{C}{2} t^{2p-3} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^p dx.$$

记  $B$  为  $E$  中单位球,  $S := \partial B$ 。由以上推导可知  $\forall u \in S$ , 存在唯一最小的  $T = T(u) > 0$ , 使得

$$I_{\lambda,\frac{1}{2}}(T^2 u_T) = 0, \quad (11)$$

$$I_{\lambda,\frac{1}{2}}(t^2 u_t) < 0 \quad \forall t > T(u), \quad (12)$$

$$\max_{t \in [0, T(u)]} I_{\lambda,\frac{1}{2}}(t^2 u_t) > 0. \quad (13)$$

对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 选取  $E$  的  $k$ -维子空间  $E_k \subset E$ , 并且  $E_k \subset E_{k+1}$ 。记  $S_k := S \cap E_k$ 。由于  $S_k \ni u \mapsto T(u)$  为连续映射, 并且  $S_k$  为紧集, 故  $T_k := \sup\{T(u) : u \in S_k\} < +\infty$ 。进而集合

$$A_k := \{v \in E : v = t^2 u_t, t \in [0, T_k], u \in S_k\}$$

为紧集。同时, 由于  $I_{\lambda,\mu}$  为偶泛函, 故  $A_k$  是对称集合。由于  $T_k \geq T(u)$ ,  $\forall u \in S_k$ , 因此

$$I_{\lambda,\frac{1}{2}}(v) \leq 0, \quad \forall v \in \partial A_k. \quad (14)$$

下面设

$$H_k := \{g : E \rightarrow E \text{ 奇同胚, 使得 } g(v) = v, \forall v \in \partial A_k\}$$

并考虑

$$G_k := \{g(A_k) : g \in H_k\}.$$

定义

$$c_{k,\mu} := \inf_{A \in G_k} \max_{u \in A} I_{\lambda,\mu}(u).$$

由于  $A_k \subset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ , 则有  $c_{k,\mu} \geq c_{k-1,\mu} \geq \dots \geq c_{1,\mu} > 0$ 。此式最后一个不等号成立是因为  $c_{1,\mu}$  正是由山路引理得到的  $I_{\lambda,\mu}$  的临界水平。

现在来证明  $G_k$  可以作为第二节抽象结果中的集合族  $\mathcal{F}$ 。实际上, 取  $K = \partial A_k$ , 由 (14) 以及不等式  $I_{\lambda,\mu}(u) \leq I_{\lambda,\frac{1}{2}}(v)$ ,  $\forall \mu \in [\frac{1}{2}, 1]$  得到

$$\sup_{v \in \partial A_k} I_{\lambda,\mu}(v) \leq 0. \quad (15)$$

然而  $c_{k,\mu} > 0$ , 故条件 **S.1** 满足。

另一方面, 对于所有满足条件 **S.2** 的奇映射  $\eta$ , 以及所有  $g \in H$ , 我们有  $\tilde{g} := \eta(t, g) \in H$ , 于是条件 **S.2** 满足。

**引理 3.1.** 存在  $\mathcal{M} \subset [1/2, 1]$ , 使得  $[1/2, 1] - \mathcal{M}$  为零测集, 并且对一切  $\mu \in \mathcal{M}$  以及  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_{k,\mu}$  为  $I_{\lambda,\mu}$  的临界值。

*Proof.* 对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 以  $\mathcal{M}_k \subset [1/2, 1]$  记  $\mu \mapsto c_{k,\mu}$  可微点的集合。记  $\mathcal{M} := \cap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$ ; 显然  $[1/2, 1] - \mathcal{M}$  为零测集。

对于固定的  $k \in \mathbb{N}$  与  $\mu \in \mathcal{M}$ , 对  $\Phi_\mu = I_{\lambda,\mu}$ ,  $\mathcal{F} = G_k$  应用第二节抽象结果, 得到有界序列  $\{u_n\}$ , 使得  $I_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow c_{k,\mu}$ ,  $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow 0$ 。则因为  $E$  为自反可分的 Banach 空间, 所以任意有界序列中存在子序列  $u_n \rightharpoonup u_0$ 。而另一方面 [12] 中的引理 2.1 告诉我们当  $u_n \rightharpoonup u_0$  弱收敛于  $E = H_r^1$ , 则  $\phi_{u_n} \rightarrow \phi_{u_0}$  强收敛于  $D_r^1$ 。这个结果与  $H_r^1 \hookrightarrow L^{s+1}$  的紧嵌入性质结合, 可知实际上  $u_n \rightarrow u_0$  强收敛于  $E$ 。引理得证。  $\square$

### §3.2 $I_\lambda$ 的临界值

在确定  $I_\lambda$  的临界值之前, 我们先建立一个引理:

**引理 3.2.** 设  $\mathcal{M} \ni \mu_n \nearrow 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  固定。选取  $u_n \in E$  使得  $I_{\lambda,\mu_n}(u_n) = c_{k,\mu_n}$ ,  $I'_{\lambda,\mu_n}(u_n) = 0$ 。则存在子序列  $u_n \rightarrow u \in E$  使得  $I_\lambda(u) = c_{k,1}$ ,  $I'_\lambda(u) = 0$ 。

*Proof.* 我们首先要证明序列  $\{u_n\}$  在  $E$  中有界, 之后的步骤都是标准的。

显然  $\{c_{k,\mu_n}\}$  为单调非增的正序列, 因而有界。由条件可知  $I_{\lambda,\mu_n}(u_n) = c_{k,\mu_n}$ ,  $\langle I'_{\lambda,\mu_n}(u_n), u_n \rangle = 0$ , 即

$$\int \left[ \frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_{u_n} u_n^2 - \mu_n F(x, u_n) \right] dx = c_{k,\mu_n}, \quad (16)$$

$$\int [|\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \lambda \phi_{u_n} u_n^2 - \mu_n u_n f(x, u_n)] dx = 0. \quad (17)$$

这是因为  $\{u_n\}$  满足方程

$$-\Delta u_n + u_n + \lambda \phi(x) u_n = \mu_n f(x, u_n). \quad (18)$$

而方程 (18) 的解满足 Pohozaev 等式。具体证明见文献 [6]。在此, Pohozaev 等式的具体形式为

$$\int \left[ \frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 + \frac{3}{2} u_n^2 + \frac{5\lambda}{4} \phi_{u_n} u_n^2 - 3\mu_n F(x, u_n) \right] dx = 0. \quad (19)$$

为记号简便, 下面记  $\alpha_n := \int |\nabla u_n|^2$ ,  $\beta_n := \int u_n^2$ ,  $\gamma_n := \lambda \int \phi_{u_n} u_n^2$ ,  $\delta_n = \mu_n \int F(x, u_n)$  以及  $\epsilon_n = \mu_n \int u_n f(x, u_n)$ 。于是根据 (16), (17) 以及 (19), 得到以下线性方程组

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\gamma_n - \delta_n &= c_{k,\mu_n} \\ \alpha_n + \beta_n + \gamma_n - \epsilon_n &= 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{3}{2}\beta_n + \frac{5}{4}\gamma_n - 3\delta_n &= 0\end{aligned}$$

下面用  $\frac{12-5p}{2}$ ,  $1$ ,  $\frac{p-4}{2}$  依次乘以上述三个等式, 相加后得到

$$(p-3)\alpha_n + \frac{p-2}{2}\beta_n = \frac{5p-12}{2}c_{k,\mu_n} + p\delta_n - \epsilon_n. \quad (20)$$

由条件 **f.5**,  $3 < p$ , 而且上式中

$$p\delta_n - \epsilon_n = \mu_n \int (pF(x, u_n) - u_n f(x, u_n))dx \leq \frac{p+2}{2}A\beta_n < \frac{p-2}{2}\beta_n.$$

再由  $\{c_{k,\mu_n}\}$  有界,  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  均为正数, 我们得出  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  均有界。于是序列  $\{u_n\}$  在  $E$  中有界。

通过与引理**3.1**证明中相同的推导可知,  $u_n \rightarrow u$  强收敛于  $E$ 。特别有  $I'_\lambda(u) = 0$ 。

最后, 由于映射  $\mu \rightarrow c_{k,\mu}$  左连续, 以及  $\mu_n \nearrow 1$ , 我们有  $I_\lambda(u) = c_{k,1}$ 。  $\square$

### §3.3 完成证明定理**1.1**

下文中记  $c_k := c_{k,1}$ 。值得注意的是上一引理实际上并没有得出多解的结论, 因为那些临界点以及临界值可能重合在一起。下面的命题才真正说明泛函  $I_\lambda$  的确有无穷多个临界值, 于是完成了定理**1.1**的证明。

**命题 3.1.** 当  $k \rightarrow \infty$ ,  $c_k \rightarrow +\infty$ .

*Proof.* 由于  $\lambda > 0$  以及  $G(u) \geq 0$ , 我们有

$$I_\lambda(u) \geq I_0(u), \quad \forall u \in E, \quad (21)$$

其中  $I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x, u)dx$ ,  $u \in E$ 。令  $B^k := E_k \cap B$ , 以及

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_k &= \{g \in C(B^k, E) : g \text{ 为奇同胚}, I_0(g(y)) \leq 0, \forall y \in \partial B^k\}, \\ \tilde{G}_k &= \{A \subset E : A = g(B^k), g \in \tilde{\Gamma}_k\}, \\ \tilde{b}_k &= \inf_{A \in \tilde{G}_k} \max_{u \in A} I_0(u).\end{aligned}$$

由 [4] 中推论**2.16** 以及定理**3.14** 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{b}_k = +\infty. \quad (22)$$

值得指出的是 [4] 中定理3.14是对在  $H_0^1(\Omega)$  上定义的泛函  $I_0$  得出的，其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为有界区域。实际上这个设定仅仅是为了保证嵌入  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < 2^*$  的紧性，然而在球对称 Sobolev 空间中，这种紧性仍旧得以保持。

现在我们断言  $G_k \subset \tilde{G}_k$ 。为此，令  $A \in G_k$ ，则存在  $g \in H$  使得  $A = g(A_k)$ 。首先，存在一个奇同胚  $\varphi : B^k \rightarrow A_k$ ,

$$\varphi(u) = T_k^2 \|u\| u(T_k \|u\| x) \quad u \in B_k.$$

因而  $A = g \circ \varphi(B^k)$ 。显然  $\tilde{g} := g \circ \varphi$  为奇同胚，所以对任意  $y \in \partial B^k$ ，有  $v := \varphi(y) \in \partial A_k$ 。由  $g \in H$ ，知  $g(v) = v$ 。因此由 (21) 与 (15) 得

$$I_0(g(v)) = I_0(v) \leq I_\lambda(v) \leq 0.$$

这就证明了我们的断言，并且得出  $c_k \geq \tilde{b}_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . 于是有  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = +\infty$ ，定理1.1 证毕。  $\square$

#### §4 结论

至此，我们完全证明了第一章中的第一个定理，即推广了文献[3]中的第一个结果。然而不得不说的是，虽然将方程组的非线性项由具体的函数  $|u|^p u$  换为了更一般的  $f(x, u)$ ，但是我们仅仅走出了一小步。因为一般来说，只对  $f(x, u)$  在 0 点附近和  $u$  充分大时的行为加以限制。然而我们在第三章以及第五章的证明中，还对  $0 < |u| < r$  时  $f(x, u)$  的行为加以限制，并且假设了  $0 \leq F(x, u)$  对一切  $u \in \mathbb{R}$  成立。这些分别是为了解释序列  $\beta_n := \int u_n^2 dx$  的有界性，以及应用第二章的抽象结果而需要保证辅助泛函  $I_{\lambda, \mu}$  对参数  $\mu$  的单调性。以前文献中的函数  $|u|^p u$  自然满足这两个限制。

值得注意的是，由条件 f.4，当  $|u| > 0$  充分小，后一限制条件自然满足。而且，如果方程是建立在某有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  中，则无需限制  $0 < |u| < r$  时  $f(x, u)$  的行为。然而本文中处理的定义域是  $\mathbb{R}^3$  本身，所以一些保证有界性的方法无法直接在此应用。

限于作者水平，尚不了解这两条限制，尤其是前一条，是否有关问题的本质，抑或只是技巧的不到位。

#### 参考文献

- [1] A. Ambrosetti, *On Schrödinger-Poisson Systems*, Milan J. Math. 76 (2008), 257-274
- [2] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 104. Cambridge Univ. Press, 2007.

- [3] A. Ambrosetti, D. Ruiz, *Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson equation*, Comm. Contemp. Math. 10 (2008) 1-14.
- [4] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.
- [5] T. D'Aprile and D. Mugnai, *Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 134 (2004) 893-906.
- [6] T. D'Aprile, D. Mugnai, *Non-existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. 4 (2004) 307-322.
- [7] V. Benci, Donato Fortunato, *An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations*, Topo. Meth. Nonl. Anal. 11, (1998), 283-293
- [8] Hiroaki Kikuchi, *On the existence of a solution for elliptic system related to the Maxwell-Schrödinger equations*, Nonlinear Analysis 67 (2007) 1445-1456.
- [9] L. Jeanjean, *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and applications to a Landesman-Lazer type problem set on RN*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 129 (1999) 787-809.
- [10] João Marcos do Ó, Everaldo Medeiros, Uberlandio Severo, *On the existence of signed and sign-changing solutions for a class of superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 432-445.
- [11] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, AMS, 1986.
- [12] D. Ruiz, *The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term*, J. Funct. Anal. 237 (2006) 655-674.
- [13] W.A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. 55 (1977) 149-162.
- [14] M. Struwe, *Variational Methods*, Ergeb. der Math. u. Grenzgeb, Vol. 34 (Springer-Verlag, 1996).
- [15] Leiga Zhao, Fukun Zhao, *On the existence of solutions for the Schrödinger-Poisson equations*, J. Math. Anal. Appl. 346 (2008) 155-169

# 紧黎曼流形谱理论综述\*

杜升华<sup>†</sup>

指导教师：马力教授

## 摘要

本文由两个独立的部分组成：第一部分是对紧致黎曼流形的Laplace算子特征值理论的初步综述，参照有关文献介绍了该领域中一些基本概念和经典结果；第二部分计算了 $\mathbb{R}^3$ 中光滑曲线的半径为 $\rho$ 的扰动的管状邻域曲面的平均曲率当 $\rho \rightarrow 0$ 时的展开式。

关键词：黎曼流形；谱几何；Laplace算子；特征值

## §1 引言

关于本文将介绍的这一学科分支，其历史背景要从两位德国数学大师的伟大工作讲起。

20世纪初，David Hilbert（大卫·希尔伯特）致力于积分方程的研究。他所引进的概念和方法，成为希尔伯特空间理论乃至泛函分析学科的源泉，启发了后人大量的工作，意义远超过积分方程本身。此间，希尔伯特在讨论特征值问题时，创造了“谱”这个术语，开辟了算子的谱理论这一研究方向；后来，谱分析理论成为研究量子力学的合适工具，甚至在物理光谱理论中也获得了出人意料的应用。

1910年，希尔伯特邀请了荷兰物理学家Lorentz（洛伦兹）来Göttingen（哥廷根）大学讲学。洛伦兹提出了来自电磁辐射理论的一个问题，其在数学上与Laplace算子特征值的渐近分布有关。1911年，希尔伯特最优秀的学生、著名数学家Hermann Weyl（赫尔曼·外尔）运用积分方程理论解决了这个问题<sup>1</sup>，这是谱理论早期的一个重要结果。

\*原题为“紧黎曼流形谱理论综述与管状邻域曲面的平均曲率展开式”，选入本刊的是原文的第一部分，并作了适当删节。

<sup>†</sup>基数53

<sup>1</sup>即[27]中的Satz X：微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的属于面积为 $J$ 的任意区域 $J$ 和边界条件 $u = 0$ 的特征值 $\lambda_n$ ，按大小排序，满足等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{J}{4\pi}$ 。

另一方面，同样在哥廷根大学，1854年，Bernhard Riemann（波恩哈德·黎曼）在其申请讲师职位的演讲 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*（关于作为几何基础的假设）中，提出了一系列研究几何对象的深刻思想，标志着几何学的一个至今仍在蓬勃发展的领域——黎曼几何学——的诞生。后经Christoffel、Ricci、Levi-Civita等人的发展，到20世纪初，黎曼几何已初具规模，为广义相对论奠定了合适的数学基础。

黎曼流形的谱理论正是上述两大领域的结合点。具体说来，黎曼流形的“谱”是其上Laplace算子的特征值的全体，对此的研究又称为谱几何。本文第二章从相关的基本概念开始，关于这一学科作一初步综述，介绍该领域的一些基本结果和研究进展。本文作者由于不懂法文，只引用了英文和德文的外文参考文献；限于篇幅，所考虑的主要是紧致无边的黎曼流形和定义在函数空间上的Laplace算子。

## §2 紧黎曼流形的谱理论

### §2.1 基本概念

首先我们回顾一些有关算子的特征值的一般概念与结论，然后给出黎曼流形上Laplace算子的定义。

#### §2.1.1 有关算子的特征值的一般概念与结论

设 $V$ 为一个实（或复）线性空间，其上带有一个正定对称双线性型（或正定Hermite型） $(\cdot, \cdot)$ ，则称 $V$ 为一个内积空间（或拟Hilbert空间）， $(\cdot, \cdot)$ 称为 $V$ 上的内积。

关于内积有如下众所周知的Cauchy-Schwarz不等式与Minkowski不等式：

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y), \quad \forall x, y \in V, \quad (2-1)$$

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \quad \forall x, y \in V. \quad (2-2)$$

故可由内积诱导范数 $\|\cdot\|$ :  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ 。若 $V$ 关于此范数所诱导的度量是完备的，则称之为Hilbert空间。一个重要事实是任何度量空间都有在等距意义下唯一的完备化，详见[5]§9.5。

设 $W$ 为另一个内积空间，内积仍用 $(\cdot, \cdot)$ 表示。设 $L : V \rightarrow W$ 为一线性算子，令 $D = \{y \in W \mid \exists z \in V \text{ 使得 } (Lx, y) = (x, z), \forall x \in V\}$ ，则可在 $D$ 上定义算子 $L^*$ ， $L^*y$ 等于使

$$(Lx, y) = (x, z), \quad \forall x \in V$$

成立的 $z \in V$ （容易验证此 $z$ 是唯一的）。称 $L^* : D \rightarrow X$ 为 $L$ 的伴随算子， $D$ 就是 $L^*$ 的定义域。

设  $T : V \rightarrow V$  为一个线性变换，若存在  $\lambda \in \mathbb{R}$  (或  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) 和非零向量  $x \in V$  使得  $Tx = \lambda x$ ，则称  $\lambda$  为  $T$  的一个特征值， $x$  为相应于特征值  $\lambda$  的一个特征向量，所有这些  $x$  的全体构成一个线性空间，叫做相应于特征值  $\lambda$  的特征子空间。

若  $T$  的伴随算子  $T^*$  在其定义域上与  $T$  相等，则称  $T$  为对称的；若对称算子  $T$  的伴随算子  $T^*$  可定义在全空间  $V$  上，则称  $T$  是自伴随的。若对任意非零向量  $x$ ，均有  $(Tx, x) > 0$  (或  $(Tx, x) \geq 0$ )，则称  $T$  是正定的 (或半正定的)。

下面列举一些简单但十分有用的一般结论。

- 自伴随算子的特征值都是实数；特别地，半正定自伴随算子的特征值都是非负实数。这由

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

立即可得，其中  $x$  是相应于自伴随算子  $T$  的特征值  $\lambda$  的特征向量。

- 设  $T : V \rightarrow V$  为内积空间  $V$  上的自伴随线性变换， $x$  和  $y$  分别是相应于特征值  $\lambda$  与  $\mu$  的特征向量，其中  $\lambda \neq \mu$ ，则  $(x, y) = 0$ 。这是因为，

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

- 设  $L : V \rightarrow W$  是两个内积空间之间的线性算子，其对偶算子  $L^*$  的定义域包含  $L$  的值域。令  $N = L^*L : V \rightarrow V$ ，则对任意  $x, y \in V$  有

$$(Nx, y) = (L^*Lx, y) = (Lx, Ly) = (x, L^*Ly) = (x, Ny),$$

$$(Nx, x) = (L^*Lx, x) = (Lx, Lx) \geq 0,$$

故  $N$  是一个半正定自伴随算子。

接下来回顾有关 Fourier 级数的一些基本概念和定理：

设  $H$  为一 Hilbert 空间，若  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  是  $H$  中一列两两正交的单位向量，且  $\forall x \in H$  都能写成它们的有限或无限线性组合 (无穷级数的收敛按内积诱导的范数意义理解)，则称  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  是  $H$  的一组标准正交基。若一列向量的有限线性组合在  $H$  中是稠密的，则称其在  $H$  中是完全的。一个熟知的事实是，对一列两两正交的单位向量来说，它们构成  $H$  的标准正交基等价于在  $H$  中是完全的，而且等价于下面的 Fourier 展开式(2-3)和 Parseval 等式(2-4)：

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i) x_i, \quad \forall x \in H, \tag{2-3}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)|^2, \quad \forall x \in H. \tag{2-4}$$

### §2.1.2 黎曼流形上Laplace算子的定义

事实上，常用的Laplace算子定义有两种，以下分别介绍。

设 $(M, g)$ 为一定向的 $n$ 维紧致无边黎曼流形。设 $\nabla$ 为光滑函数的梯度算子， $\text{div}$ 为光滑向量场的散度算子。定义**Beltrami-Laplace算子**为 $\Delta = \text{div} \circ \nabla$ ，即：对任意光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ ，有 $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$ 。取流形 $M$ 上的局部坐标系 $\{x^1, \dots, x^n\}$ ，设 $(g_{ij}) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ 为度量矩阵， $(g^{ij})$ 为其逆矩阵， $\Gamma_{ij}^k$ 为相应于Levi-Civita联络 $\nabla$ 的Christoffel符号，则 $\Delta f$ 在局部坐标系下的表达式为<sup>2</sup>

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (2-5)$$

在欧氏空间情形， $g_{ij} = \delta_{ij}$ ，上式化归为经典的欧氏空间中Laplace算子：

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

这一定义有一种等价表述方式： $\Delta f = \text{trHess } f$ 。其中Hess $f$ 为函数 $f$ 的Hessian张量，对任意向量场 $X, Y$ ，其取值为

$$\text{Hess } f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y). \quad (2-6)$$

在局部坐标系 $\{x^1, \dots, x^n\}$ 下，记Hess $f$ 的分量为 $f_{i,j} = \text{Hess } f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ ，则

$$\Delta f = g^{ij} f_{i,j},$$

$$|\text{Hess } f|^2 = g^{ik} g^{jl} f_{i,j} f_{k,l}.$$

易见 $\Delta f$ 与 $|\text{Hess } f|^2$ 分别是矩阵 $(g^{ik} f_{k,j})$ 的特征值之和与特征值平方之和。由Cauchy不等式立得

$$|\text{Hess } f|^2 \geq \frac{1}{n} |\Delta f|^2. \quad (2-7)$$

这一关系式将在后面定理2.9的证明中用到。

下面介绍另一种Laplace算子，以线性算子同其对偶算子的乘积的形式定义的Hodge-Laplace算子（暂记为 $\tilde{\Delta}$ ），这恰是谱几何的主要研究对象，并与前一种Laplace算子密切相关。为此必须先在 $M$ 的光滑函数空间 $C^\infty(M)$ 与一阶光滑微分形式空间 $\Lambda^1(M)$ 上引入内积。

---

<sup>2</sup>本文全篇采用Einstein求和约定，即上下指标重复代表对该指标从1到 $n$ 求和。

因为 $M$ 是定向的，所以 $n$ -形式 $dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 不依赖于局部坐标的选取，并可定义其积分（详见[5]第15章）。称 $dV_g$ 为 $(M, g)$ 的体积形式， $\int_M dV_g$ 就是 $(M, g)$ 的体积，记作 $Vol(M, g)$ 。由此可定义 $C^\infty(M)$ 上的内积

$$(f, h) = \int_M fhdV_g, \quad (2-8)$$

其中 $f, h \in C^\infty(M)$ 。

利用黎曼度量 $g$ ，不难在切向量场空间 $\Gamma(M)$ 上也定义一个内积（为记号简便，仍用 $(\cdot, \cdot)$ 表示，下同）：设 $X, Y \in \Gamma(M)$ ，定义

$$(X, Y) = \int_M g(X, Y)dV_g. \quad (2-9)$$

为把内积的定义推广到一阶外微分形式空间 $\Lambda^1(M)$ 上，需要用到1-形式与向量场之间的“音乐同构” $\sharp$ 与 $\flat$ ([1]§7.4)：若 $X$ 为向量场，则对应的1-形式 $X^\flat$ 定义为 $X^\flat(Y) = g(X, Y), \forall Y \in \Gamma(M)$ ；若 $\omega$ 为1-形式，则对应的向量场 $\omega^\sharp$ 由下式唯一确定： $\omega(Y) = g(\omega^\sharp, Y), \forall Y \in \Gamma(M)$ 。在局部坐标系下，设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ， $X^\flat = X_i dx^i$ ， $\omega = \omega_i dx^i$ ， $\omega^\sharp = \omega^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ，则有

$$X_i = g_{ij} X^j, \quad (2-10)$$

$$\omega^i = g^{ij} \omega_j, \quad (2-11)$$

即向量场与1-形式之间的转换对应着指标的升降，因而采用了音乐的记号。

于是可定义 $\omega, \eta \in \Lambda^1(M)$ 之间的内积为：

$$(\omega, \eta) = \int_M g(\omega^\sharp, \eta^\sharp)dV_g. \quad (2-12)$$

容易验证以上定义的这些内积确实满足正定性、对称性、双线性性。

现在，函数的微分映射 $d : C^\infty(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ 是内积空间之间的线性映射。定义它的伴随算子为 $\delta : \Lambda^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ，即 $\delta$ 满足

$$(\phi, df) = (\delta\phi, f), \quad \forall \phi \in \Lambda^1(M), \forall f \in C^\infty(M). \quad (2-13)$$

值得注意的是， $\delta$ 确实可在整个 $\Lambda^1(M)$ 上定义（甚至可以在任意阶微分形式空间上定义 $\delta : \Lambda^{r+1}(M) \rightarrow \Lambda^r(M), 0 \leq r \leq n - 1$ ，称之为余微分算子）；利用Hodge星算子 $* : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{n-r}, 0 \leq r \leq n$ ，可将其在 $\Lambda^1(M)$ 上的定义表达为

$$\delta = -* \circ d \circ * : \Lambda^1(M) \rightarrow C^\infty(M). \quad (2-14)$$

这里略去相关的细节。重要的是,  $\delta$  的定义域包含  $d$  的值域, 因而可以定义  $C^\infty(M)$  上的 **Hodge-Laplace 算子**:  $\tilde{\Delta} = \delta \circ d$ 。由上节的一般结论立即可知  $\tilde{\Delta}$  是自伴随的、半正定的线性算子。

两种 Laplace 算子之间有着紧密的联系。事实上, 我们有如下命题(证明参见[2]§2.5):

**命题2.1.** *Hodge-Laplace 算子  $\tilde{\Delta}$  与 Beltrami-Laplace 算子  $\Delta$  具有如下关系:*

$$\tilde{\Delta} = -\Delta.$$

需要指出的是, 在黎曼几何的文献中, Laplace 算子  $\Delta$  通常是按照 Beltrami-Laplace 算子的方式定义的, 以此作为欧氏空间中经典 Laplace 算子的自然推广; 而在研究流形上算子的特征值时, 人们往往选择半正定的 Hodge-Laplace 算子, 因为这时其特征值都是非负的。为协调这种不一致性, 以下简称 Hodge-Laplace 算子为 Laplace 算子, 但记为  $-\Delta$ 。有时在上标位置标注流形名称以示区别。

现在给出黎曼流形的谱的确切定义:

**定义2.1.** 称黎曼流形  $(M, g)$  上 Hodge-Laplace 算子  $-\Delta$  的特征值的集合为  $(M, g)$  的谱, 记作  $\text{Spec}(M, g)$ 。

下面叙述几个将在后面经常用到的基本定理及其推论:

**定理2.1.** (紧致无边流形的 Stokes 定理) 设  $M$  为一个定向的  $n$  维紧致无边光滑流形,  $\omega$  为  $M$  上一个光滑的  $n-1$  次微分形式, 则

$$\int_M d\omega = 0. \quad (2-15)$$

**定理2.2.** (紧致无边黎曼流形的散度定理) 设  $(M, g)$  为定向的紧致无边黎曼流形,  $X$  为  $M$  上的光滑向量场, 则

$$\int_M \text{div} X dV_g = 0. \quad (2-16)$$

上述两定理的证明分别可参见[5]§15.3 和 [2]§2.5。特别地, 取  $X = \nabla f$ , 其中  $f$  为  $M$  上的光滑函数, 则  $\text{div} X = \Delta f$ 。因此在上述条件下有如下重要推论:

$$\int_M \Delta f dV_g = 0. \quad (2-17)$$

此外, 设  $Y$  为  $M$  上另一光滑向量场, 由  $\text{div}(fY) = g(\nabla f, Y) + f \text{div} Y$  可得分部积分公式:

$$\int_M g(\nabla f, Y) dV_g = - \int_M f \text{div} Y dV_g. \quad (2-18)$$

特别地，取 $Y = \nabla h$ ，其中 $h$ 为 $M$ 上的光滑函数，则有

$$-\int_M h\Delta f dV_g = \int_M g(\nabla f, \nabla h) dV_g = -\int_M f\Delta h dV_g. \quad (2-19)$$

接下来叙述著名的Stone-Weierstrass定理（证明参见[5]§16.4）。在此之前先引入两个定义：

**定义2.2.** 称集合 $X$ 上的函数集 $S$ 分离 $X$ 中的点，如果对任意一对不同的点 $x_1, x_2 \in X$ 存在一个函数 $f \in S$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

**定义2.3.** 称集合 $X$ 上的函数族 $\mathcal{F}$ 在 $X$ 上非退化，如果对每一点 $x_0 \in X$ 存在一个函数 $f_0 \in \mathcal{F}$ 使得 $f_0(x_0) \neq 0$ 。

特别地，当非零常值函数属于 $\mathcal{F}$ 时，显然 $\mathcal{F}$ 是非退化的。在如下定理的应用中，这是一个很常用的条件。

**定理2.3.** (*Stone-Weierstrass定理*) 令 $A$ 为一个定义在紧集 $K$ 上的连续实值函数的代数<sup>3</sup>，若 $A$ 分离 $K$ 中的点且在 $K$ 上非退化，则 $A$ 是 $K$ 上实值连续函数空间 $C(K, \mathbb{R})$ 的一个到处稠密子空间（即在一致收敛范数意义下稠密）。若 $A$ 为复值连续函数的代数且加上自伴随性条件（即 $f \in A$ 可推出 $\bar{f} \in A$ ，其中 $\bar{f}$ 为 $f$ 的共轭），则在同样假定下 $A$ 在 $C(K, \mathbb{C})$ 中稠密。

上述定理包含了Weierstrass的一个经典结果作为特例：

**定理2.4.** (*Weierstrass多项式一致逼近定理*) 设 $K$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个紧集， $f \in C(K, \mathbb{R})$ （或 $C(K, \mathbb{C})$ ），则存在多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $K$ 上一致收敛于 $f$ ；当 $f$ 为实值时， $\{P_n\}$ 亦可取成实值的。

在分析学中，内积空间的完备性往往起着至关重要的作用。按照经典的测度与积分理论，平方可积函数空间 $L^2(M)$ 与Sobolev空间 $H^1(M)$ 分别可看作 $C^\infty(M)$ 在范数 $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ 与 $\|f\|_1 = \sqrt{(f, f) + (df, df)}$ 意义下的完备化。限于篇幅，这里不再讨论其详细定义，但引述一个重要的不等式：

**定理2.5.** (*Poincaré不等式*) 令 $H_0^1(M) = \{f \in H^1(M) | \int_M f dV_g = 0\}$ ，则存在常数 $C > 0$ 使得 $\forall f \in H_0^1(M)$ ，有

$$\int_M |\nabla f|^2 dV_g \geq C \int_M |f|^2 dV_g. \quad (2-20)$$

Poincaré不等式是分析学中的一个重要定理，[9]§8.11的证明可以平行地搬到紧黎曼流形上来；后面将看到谱理论同该不等式的密切联系。

---

<sup>3</sup>即 $A$ 是 $C(K, \mathbb{R})$ 的一个线性子空间，且对乘法封闭。

## §2.2 重要性质

本节介绍紧致黎曼流形的谱的一些重要性质。

### §2.2.1 基本定理

首先，引述有关Laplace算子特征值与特征子空间的一个基本定理（其叙述引自[4]136页定理4.1，证明参见[6]定理14.6和第16节）：

**定理2.6.** (1) 紧致黎曼流形的谱  $\text{Spec}(M, g)$  构成趋向于  $+\infty$  的离散序列  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ; (2) 每个特征值  $\lambda_i$  的特征子空间  $\mathcal{P}_i(M, g)$  都是有限维的; (3) 在一致收敛的拓扑意义下  $(M, g)$  的特征子空间  $\mathcal{P}(M, g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_i(M, g)$  在  $C^\infty(M)$  内稠密，在二次均方收敛意义下也稠密。

由此，利用前面的一般结论不难看出，存在Laplace算子的一列特征函数  $\{\varphi_0, \varphi_{1_1}, \dots, \varphi_{1_{d_1}}, \dots, \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d_i}}, \dots\}$ ，其中  $\varphi_{i_\alpha}$  是相应于特征值  $\lambda_i$  的特征函数， $1 \leq \alpha \leq d_i = \dim \mathcal{P}_i(M, g)$ ，使其成为  $L^2(M)$  的一组标准正交基。上述定理还可推出一个很有用的命题，可用于在某些情况下完全确定一个黎曼流形的谱。

**命题2.2.** 设  $\forall i \in \mathbb{N}$  给定非零向量空间  $V_i \subset C^\infty(M)$ ，满足 (1)  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$  使得  $\forall \varphi \in V_i$  均有  $-\Delta\varphi = \lambda_i\varphi$ ，(2)  $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$  在二次均方收敛意义下在  $C^\infty(M)$  中稠密，则  $\text{Spec}(M, g) = \{\lambda_i\}$ ，且每个  $V_i$  都是相应  $\lambda_i$  的特征子空间。

证明（参照[4]137页命题4.2）：根据定义，显然  $\{\lambda_i\} \subset \text{Spec}(M, g)$  且  $V_i$  包含于  $\lambda_i$  的特征子空间  $\mathcal{P}_i(M, g)$ 。假设  $\exists \lambda \in \text{Spec}(M, g)$  而  $\lambda \notin \{\lambda_i\}$ ，则存在相应于  $\lambda$  的非零特征向量  $v$ ， $v$  与所有  $\mathcal{P}_i(M, g)$  正交，从而与  $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$  正交，这与条件(2)矛盾。故必有  $\text{Spec}(M, g) = \{\lambda_i\}$ 。假设某个  $V_i$  是  $\lambda_i$  的特征子空间  $\mathcal{P}_i(M, g)$  的真子空间，根据定理2.6， $\mathcal{P}_i(M, g)$  是有限维空间，故存在  $w_i \in \mathcal{P}_i(M, g) - V_i$  使得  $w_i$  与  $V_i$  正交。易见  $w_i$  与所有的  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  都正交，这又与条件(2)矛盾。所以  $V_i = \mathcal{P}_i(M, g)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ 。

### §2.2.2 乘积流形的谱

作为应用，我们可以由两个黎曼流形的谱来决定它们的乘积流形的谱。

设  $(M \times N, g \times h)$  是两个黎曼流形  $(M, g)$  与  $(N, h)$  的乘积流形，其中  $g \times h = p^*g + q^*h$ ， $p$  和  $q$  分别为  $M \times N$  到  $M$  和  $N$  上的投影。对于  $\lambda \in \mathcal{P}(M, g)$ ,  $\mu \in \mathcal{P}(N, h)$ ，令

$$p^*\mathcal{P}_\lambda(M, g) \otimes q^*\mathcal{P}_\mu(N, h) = \{(f_1 \circ p) \cdot (f_2 \circ q) | f_1 \in \mathcal{P}_\lambda(M, g), f_2 \in \mathcal{P}_\mu(N, h)\}.$$

以及

$$p^*\mathcal{P}(M, g) \otimes q^*\mathcal{P}(N, h) = \{(f_1 \circ p) \cdot (f_2 \circ q) | f_1 \in \mathcal{P}(M, g), f_2 \in \mathcal{P}(N, h)\}.$$

下面参照[4]§4.1.3来证明如下结果:

**定理2.7.** (i)  $\mathcal{P}(M \times N, g \times h) = p^* \mathcal{P}(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}(N, h)$ ; (ii)  $\text{Spec}(M \times N, g \times h) = \{\lambda + \mu | \lambda \in \text{Spec}(M, g), \mu \in \text{Spec}(N, h)\}$ , 且  $\forall \gamma \in \text{Spec}(M \times N, g \times h)$ , 有

$$\mathcal{P}_\gamma(M \times N, g \times h) = \sum_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(M, g) \\ \mu \in \text{Spec}(N, h) \\ \lambda + \mu = \gamma}} p^* \mathcal{P}_\lambda(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}_\mu(N, h).$$

证明: 将  $M \times N$ ,  $M$  和  $N$  上的 Levi-Civita 联络分别用  $\nabla^{M \times N}$ ,  $\nabla^M$  和  $\nabla^N$  表示。设  $\lambda$  与  $\mu$  分别是  $-\Delta^M$  与  $-\Delta^N$  的特征值,  $f_1$  与  $f_2$  分别是相应于  $\lambda$  与  $\mu$  的特征函数。

易证 (参见[4]第117-118页)

$$\begin{aligned} \nabla^{M \times N}(f_1 \circ p) &= (\nabla^M f_1) \circ p, \\ \Delta^{M \times N}(f_1 \circ p) &= (\Delta^M f_1) \circ p, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & -\Delta^{M \times N}((f_1 \circ p) \cdot (f_2 \circ q)) \\ = & -\Delta^{M \times N}(f_1 \circ p) \cdot (f_2 \circ q) - 2g \times h(\nabla^{M \times N}(f_1 \circ p), \nabla^{M \times N}(f_2 \circ q)) \\ & + (f_1 \circ p) \cdot (-\Delta^{M \times N})(f_2 \circ q) \\ = & (-\Delta^M f_1) \circ p \cdot (f_2 \circ q) - 2g \times h(\nabla^M(f_1 \circ p), \nabla^N(f_2 \circ q)) + (f_1 \circ p) \cdot ((-\Delta^N f_2) \circ q) \\ = & \lambda(f_1 \circ p) \cdot (f_2 \circ q) + (f_1 \circ p) \cdot \mu(f_2 \circ q) \\ = & (\lambda + \mu)(f_1 \circ p) \cdot (f_2 \circ q). \end{aligned}$$

由此可见  $p^* \mathcal{P}_\lambda(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}_\mu(N, h) \subset \mathcal{P}_{\lambda+\mu}(M \times N, g \times h)$ 。进一步, 如令

$$W_\gamma = \sum_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(M, g) \\ \mu \in \text{Spec}(N, h) \\ \lambda + \mu = \gamma}} p^* \mathcal{P}_\lambda(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}_\mu(N, h),$$

则有  $W_\gamma \subset \mathcal{P}_\gamma(M \times N, g \times h)$ 。

注意到  $p^* \mathcal{P}(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}(N, h) = \sum_\gamma W_\gamma$ , 其中  $\gamma \in \{\lambda + \mu | \lambda \in \text{Spec}(M, g), \mu \in \text{Spec}(N, h)\}$ , 且  $W_\gamma$  满足命题2.2中的条件(1)。因此为得出定理的结论, 只需验证命题2.2中的条件(2), 即  $p^* \mathcal{P}(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}(N, h)$  在  $\mathcal{P}(M \times N, g \times h)$  中的稠密性。

事实上, 由定理2.6知  $\mathcal{P}(M, g)$  与  $\mathcal{P}(N, h)$  分别在  $C^\infty(M)$  与  $C^\infty(N)$  中在一致收敛意义下稠密, 从而  $p^* \mathcal{P}(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}(N, h)$  在相同意义下在  $p^* C^\infty(M) \otimes q^* C^\infty(N)$  中稠密。另一方面,  $p^* C^\infty(M) \otimes q^* C^\infty(N)$  显然是  $C^\infty(M \times N)$  的一个子代数, 满足 Stone-Weierstrass 定理的条件, 故在后者当中在一致收敛意义下稠密。因此  $p^* \mathcal{P}(M, g) \otimes q^* \mathcal{P}(N, h)$  在  $C^\infty(M \times N)$  中在一致收敛意义下稠密, 当然也在  $\mathcal{P}(M \times N, g \times h)$  中在均方收敛意义下稠密。证毕。

### §2.2.3 $\lambda_1$ 的极大极小原理及其估计

本小节参照[4]§5.1给出Laplace算子第一非零特征值 $\lambda_1$ (以下简称第一特征值)的一种变分刻画，并引述有关 $\lambda_1$ 上、下界估计的一些经典结果。

**定理2.8.** ( $\lambda_1$ 的极大极小原理) 设黎曼流形 $(M, g)$ 谱的第一特征值为 $\lambda_1$ , 则

$$\lambda_1 = \inf_{f \in H_0^1(M)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}. \quad (2-21)$$

证明：设 $(M, g)$ 的谱为 $\{\lambda_i\}$ , 根据定理2.6, 可找到Laplace算子的特征函数组成的 $L^2$ 标准正交基 $\{\varphi_{i_\alpha}\}$ , 其中 $\varphi_{i_\alpha}$  相应于特征值 $\lambda_i$ 。设 $f \in H_0^1(M)$ , 令 $(f, \varphi_{i_\alpha}) = a_{i_\alpha}$ , 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\nabla f - \sum_{i_\alpha} a_{i_\alpha} \nabla \varphi_{i_\alpha}\|^2 \\ &= \|\nabla f\|^2 - 2 \sum_{i_\alpha} a_{i_\alpha} (\nabla f, \nabla \varphi_{i_\alpha}) + \sum_{i_\alpha} a_{i_\alpha}^2 \|\nabla \varphi_{i_\alpha}\|^2 \\ &= \|\nabla f\|^2 - 2 \sum_{i_\alpha} a_{i_\alpha} (f, -\Delta \varphi_{i_\alpha}) + \sum_{i_\alpha} a_{i_\alpha}^2 (\varphi_{i_\alpha}, -\Delta \varphi_{i_\alpha}) \\ &= \|\nabla f\|^2 - \sum_{i_\alpha} a_{i_\alpha}^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

根据Parseval等式并考虑到 $(f, 1) = 0$ , 有 $\sum_{i \neq 0} a_{i_\alpha}^2 = \|f\|^2$ , 故

$$\|\nabla f\|^2 \geq \sum_{i_\alpha} \lambda_i a_{i_\alpha}^2 \geq \lambda_1 \sum_{i \neq 0} a_{i_\alpha}^2 = \lambda_1 \|f\|^2. \quad (2-22)$$

此外, 当 $f$ 是相应于 $\lambda_1$ 的特征向量时上式等号成立:

$$\|\nabla f\|^2 = (\nabla f, \nabla f) = (f, -\Delta f) = (f, \lambda_1 f) = \lambda_1 \|f\|^2,$$

所以 $\lambda_1 = \inf_{f \in H_0^1(M)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}$ 。

第一特征值 $\lambda_1$ 的这种极小值原理给出了Poincaré不等式中的常数的一个几何解释: 该式的最佳常数就是 $\lambda_1$ 。下面的定理利用曲率信息给出 $\lambda_1$ 的一个下界估计, 从而也就把Poincaré不等式常数的下界与流形的几何性质联系在一起。

**定理2.9.** (*Lichnerowicz定理*) 设 $(M, g)$ 为 $n$ 维紧致黎曼流形, Ric为其Ricci曲率张量, 若存在正数 $k > 0$ 使 $\text{Ric} \geq kg$ , 则对 $-\Delta$ 的第一特征值 $\lambda_1$ 有如下估计:

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} \cdot k. \quad (2-23)$$

证明：首先引用一个著名的微分恒等式（它是被称作Weitzenböck公式的一系列公式中的一个，证明参见[4]§3.2或[8]§12）：

**引理2.1.** (*Bochner公式*) 对黎曼流形 $(M, g)$ 上的光滑函数 $f$ , 有

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + g(\nabla f, \nabla \Delta f) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (2-24)$$

在Bochner公式中, 取 $f$ 为 $-\Delta$ 的相应于特征值 $\lambda_1$ 的特征函数, 则有

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\text{Hess } f|^2 - \lambda_1 g(\nabla f, \nabla f) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

在 $(M, g)$ 上积分并利用Cauchy-Schwarz不等式 $\|\text{Hess } f\|^2 \geq \frac{1}{n}\|\Delta f\|^2$ 得

$$\begin{aligned} 0 &= \|\text{Hess } f\|^2 - \lambda_1 \|\nabla f\|^2 + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV_g \\ &\geq \frac{1}{n} \|\Delta f\|^2 - \lambda_1 \|\nabla f\|^2 + k \|\nabla f\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \lambda_1 \langle f, -\Delta f \rangle + (k - \lambda_1) \|\nabla f\|^2 \\ &= \frac{\lambda_1}{n} \|\nabla f\|^2 + (k - \lambda_1) \|\nabla f\|^2, \end{aligned}$$

故 $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} \cdot k$ 。

与此相关, Sobolev不等式<sup>4</sup>中的常数也与谱值有密切联系, 参见[16], 限于篇幅, 不再详述。下面列举有关第一特征值 $\lambda_1$ 的估计同流形几何性质的关系的另一些基本定理:

**定理2.10.** (*Obata[22]*) 在定理2.9的条件下, 若(2-23)中等号成立, 即

$$\lambda_1 = \frac{n}{n-1} k,$$

则 $(M, g)$ 与标准球面 $(S^n, g_0)$ 等距。

**定理2.11.** (*Cheeger[10]*) 对于任一自然数 $n$ , 存在一数 $k(n) > 0$ , 使得对任意非负截面曲率的 $n$ 维黎曼流形 $(M, g)$ 都有<sup>5</sup>

$$\lambda_1 \leq \frac{k(n)}{d^2},$$

其中 $d$ 为 $(M, g)$ 的直径, 即 $M$ 上任意两点间距离的上确界。

---

<sup>4</sup>若 $M$ 为紧致无边 $n$ 维黎曼流形, 则存在常数 $C$ 使得对一切 $f \in H_0^1(M)$ , 有 $C \left( \int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_M |\nabla f|$ , 详见[3]§3.1及[9]第8章。

<sup>5</sup>在[10]中给出了常数 $k(n)$ 的具体估计:  $4\sqrt{e^3(n+2)^3} \cdot \sqrt{1/\lambda_1} \geq d$ , 其中 $e$ 为自然对数底数。

**定理2.12.** (*Cheeger*) 设  $(M, g)$  为连通的紧致黎曼流形, 定义等周常数

$$h = \inf_S \left\{ \frac{\text{Vol}(S)}{\min\{\text{Vol}(M_1), \text{Vol}(M_2)\}} \right\},$$

其中  $S$  取遍  $M$  中超曲面, 它将  $M$  分成以  $S$  为共同边界的两部分  $M_1$  和  $M_2$ 。则有

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{4}.$$

关于  $\lambda_1$  的上界估计, [3]§3.3 中给出了 S. Y. Cheng 在 [13] 中建立的特征值比较定理:

**定理2.13.** (*S. Y. Cheng*) 设  $M$  是完备的  $n$  维黎曼流形, 其 Ricci 曲率  $\geq (n-1)k$ 。以  $B(x_0, r)$  表示  $M$  中以  $x_0$  为中心、 $r$  为半径的测地球; 再以  $V(k, r)$  表示单连通的  $n$  维具常曲率  $k$  的空间形式中半径为  $r$  的测地球, 则对 Dirichlet 边界条件<sup>6</sup> 而言

$$\lambda_1(B(x_0, r)) \leq \lambda_1(V(k, r)).$$

关于  $\lambda_1$  的下界估计, [3]§3.4 对非负 Ricci 曲率流形给出了一个很简洁的不等式:

**定理2.14.** <sup>7</sup> (*Li-Yau*) 设  $M$  为紧致无边黎曼流形,  $\text{Ric}(M) \geq 0$ , 又  $d$  表示  $M$  的直径, 则

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{d} \right)^2.$$

### §2.3 例子

黎曼流形的谱的计算是一个很复杂的问题, 甚至对于  $\mathbb{R}^2$  中任意三角形的内部这样看似简单的区域, 该问题都没有完全解决。不过对于具有高度对称性的流形, 人们可以碰巧发现其上 Laplace 算子的一些特征值与特征函数, 有时甚至能证明这些特征值就是其全部的谱! 这里命题 2.2 起到至关重要的作用。下面参照 [4] 第四章介绍两个典型的例子——标准球面与平坦环面。(限于篇幅, 后一例子略去, 编者注。)

#### §2.3.1 标准球面的谱

令  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$  为  $\mathbb{R}^{n+1}$  的单位球面, 赋予其由欧氏空间的平坦度量所诱导的标准度量  $g_0$ , 则有如下结果:

**命题2.3.** 标准球面  $(S^n, g_0)$  的谱是由  $\lambda_k = k(n+k-1)$  ( $k \geq 0$ ) 形成的集合,  $\lambda_k$  所对应的特征子空间等于  $\mathbb{R}^{n+1}$  上  $k$  次齐次调和多项式在  $S^n$  上的限制所组成的空间  $\tilde{\mathcal{H}}_k$ 。

<sup>6</sup> 对带边流形, Dirichlet 边界条件是指将 Laplace 算子的定义域限制在  $C_0^\infty(M)$  的完备化空间  $\hat{H}^1(M)$  上, 其中  $C_0^\infty(M)$  是  $M$  上紧支集光滑函数全体。详见 [3]§3.1。

<sup>7</sup> 以此定理的方法为基础, 钟家庆与杨洪苍将结论改进为  $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}$ , 详见 [3]§3.4。

为证明此命题，首先要计算齐次调和多项式在标准球面上的Laplace，为此需要 $S^n$ 与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的Laplace算子的如下关系（证明参见[4]第125页命题3.8，但那里的 $\Delta$ 表示本文中的Hodge-Laplace算子 $-\Delta$ ）：

**引理2.2.** 球面 $(S^n, g_0)$ 上的Beltrami-Laplace算子 $\Delta^{S^n}$ 与 $R^{n+1}$ 中的经典Beltrami-Laplace算子 $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}$ 具有如下关系；设 $f$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的光滑函数， $r$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中点到原点的距离，则

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{S^n} + n \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{S^n}. \quad (2-25)$$

现设 $H = r^k H|_{S^n}$ 是一个 $k$ 次齐次调和多项式。对 $r$ 求导得

$$\frac{\partial H}{\partial r} = kr^{k-1} H|_{S^n}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)r^{k-2} H|_{S^n}.$$

代入上述公式得

$$0 = \Delta^{S^n}(H|_{S^n}) + k(n+k-1)H|_{S^n},$$

即 $H|_{S^n}$ 是相应于 $-\Delta^{S^n}$ 的特征值 $k(n+k-1)$ 的特征向量：

$$-\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = k(n+k-1)H|_{S^n}.$$

记 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上 $k$ 次齐次调和多项式所成向量空间为 $\mathcal{H}_k$ ，其在 $S^n$ 上的限制所成向量空间为 $\tilde{\mathcal{H}}_k$ ，则有 $\tilde{\mathcal{H}}_k \subset \mathcal{P}_{k(n+k-1)}(S^n, g_0)$ 。

因此根据命题2.2，为证命题2.3，只需验证 $\bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_k$ （在均方收敛意义下）在 $C^\infty(S^n)$ 中的稠密性。

记 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上 $k$ 次齐次多项式所成向量空间为 $\mathcal{P}_k$ ，其在 $S^n$ 上的限制所成向量空间为 $\tilde{\mathcal{P}}_k$ 。记 $\tilde{f}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上函数 $f$ 在 $S^n$ 上的限制。在多项式空间 $\mathcal{P} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{P}_k$ 中引入内积： $\langle P, Q \rangle = \int_{S^n} \tilde{P} \tilde{Q} dV_{g_0}$ 。则有（参见[4]第157-159页）

**引理2.3.** 对所有 $k \geq 0$ ，

$$\mathcal{P}_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{P}_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1,$$

其中各子空间相对于如上引进的内积是两两正交的。

由上述引理立得 $\bigoplus_{l \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_l = \bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{P}}_k$ ，而根据Weierstrass多项式一致逼近定理，后者在 $C^\infty(S^n)$ 中在一致收敛意义下稠密，故 $\bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_k$ 在均方收敛意义下在 $C^\infty(S^n)$ 中也是稠密的。证毕。

### §2.3.2 平坦环面的谱(略)

## §2.4 谱几何的简单应用与研究进展

众所周知, 处理几何对象分类问题的有效办法是找出在保持几何结构的映射下的不变量。例如, 基本群是同胚映射的不变量, 那么基本群不同的拓扑空间必然是不同胚的, 从而具有相同基本群是两个拓扑空间(在同胚意义下)属于同一类的必要条件。同样地, 由于黎曼流形的谱由黎曼度量完全决定, 因此谱不同的黎曼流形必然不是等距的。也就是说, 具有相同谱值为把两个黎曼流形按等距归为一类提供了必要条件。

很自然的问题是上述条件是否充分。遗憾的是分类问题从来不会这样简单, 正如基本群不能完全决定拓扑结构一样, 谱也不能完全决定黎曼度量。在这方面, Milnor给出了一个著名的反例[25]: 存在两个16维平坦环面, 它们谱值相同, 但不是等距的, 详见[4]§4.3。更多反例参见[18], [19], [20]。尽管如此, 从谱值中仍可获得许多几何信息, 例如下面的命题(为表述方便起见, 首先给出一个定义):<sup>8</sup>

**定义2.4.** 如果  $\text{Spec}(M, g) = \text{Spec}(N, h)$ , 则称两个黎曼流形  $(M, g)$  和  $(N, h)$  是等谱的。

**命题2.4.** 等谱的黎曼流形具有相同的维数和体积。

**命题2.5.** 2维黎曼流形的 Euler-Poincaré 示性数  $\chi$  由谱唯一确定, 因而谱能够决定定向的闭黎曼曲面的拓扑。

**命题2.6.** 设  $(M, g)$  与  $(N, h)$  为等谱的  $n$  维黎曼流形,  $n = 2, 3$ , 若  $M$  的截面曲率为常数  $k$ , 则  $N$  的截面曲率也为常数  $k$ 。当  $n = 4$  时, 加上  $\chi(M) = \chi(N)$  的条件, 则同样结论成立。

特别是, 对于旋转曲面, 黎曼度量可由谱决定, 即[17]中的如下定理:

**定理2.15.** 令  $M, \tilde{M}$  为两个黎曼流形, 分别等距于  $(S^2, g)$  和  $(S^2, \tilde{g})$ , 其中  $g, \tilde{g}$  是在绕  $z$  轴的旋转与关于  $(x, y)$  平面的反射下不变的度量。则如下说法等价:

- (i)  $M$  与  $\tilde{M}$  等距,
- (ii)  $M$  与  $\tilde{M}$  有相同的谱。<sup>9</sup>

不仅如此, 从 Laplace 算子的特征函数也能得到不少有用的信息, 例如:

**命题2.7.** [11] 设  $M$  是同胚于  $S^2$  的黎曼流形,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  是平方和为常数的第一特征函数, 则  $M$  等距于常截面曲率的球面。

<sup>8</sup> 这里采用了比[4]§6.3更简洁的表述方式, 在那里可以找到相应命题的证明。

<sup>9</sup> [17]还证明了定理2.15中的两种说法等价于  $M$  与  $\tilde{M}$  有相同的  $S^1$ -不变谱, 即拥有在绕  $z$  轴旋转下不变的特征函数的那些特征值的全体。

以上这种由谱几何的信息导出黎曼流形几何性质的问题（一个通俗说法是“听音辨鼓”，参见[26]），是谱几何研究的一个重要方面，被称作谱几何的“反问题”。“正问题”指的是，由黎曼几何的性质导出Hilbert空间算子理论的谱的特性，包括一些流形的谱的计算、关于特征值的信息和谱的简单应用。

特征值的估计是一个重要的研究课题。这方面的经典结果已在前面有所介绍，以下列举一些研究进展。例如，Buser在[12]中用Ricci曲率和流形的体积给出了第 $k$ 特征值 $\lambda_k$ 的一个上界估计（Satz 7）：

**命题2.8.** 对每个Ricci曲率有下界 $-\kappa^2(n-1)$ ,  $\kappa > 0$ 的 $n$ 维紧致黎曼流形 $M$ ，有

$$\lambda_k \leq (j_{\frac{n}{2}-1})^2 \left( 2\kappa + \sigma(n) \left( \frac{k}{\text{Vol}(M)} \right)^{1/n} \right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

其中 $\sigma(n) = 2\sqrt[n]{b_n}$ ,  $b_n = \pi^{n/2}\Gamma(n/2+1)$ 为 $n$ 维欧氏单位球面的体积,  $j_{\frac{n}{2}-1}$ 是Bessel函数 $J_{\frac{n}{2}-1}$ 的最小正零点。

对非负Ricci曲率的黎曼流形，Cheng在[13]中用流形的直径给出了 $\lambda_k$ 的另一个上界估计（Corollary 2.2），并改进了Cheeger的结果：

**命题2.9.** 设 $M$ 为一个非负Ricci曲率的紧致 $n$ 维黎曼流形，则

$$\lambda_k \leq \frac{2k^2 n(n+4)}{d^2},$$

其中 $d$ 为 $M$ 的直径。

关于Cheeger的定理2.12和等周常数 $h$ 的讨论，可参考[14], [15]；关于特殊流形（例如代数流形）的特征值估计，可参考[23], [24]。

黎曼几何的问题往往归结为黎曼流形上的偏微分方程。为了研究其解的存在性，常需考虑某个线性算子（如Laplace算子加上一个常数）的零空间；刻画这样一个算子的零空间正是谱几何理论的简单应用之所在。例如在附录A中翻译的文献[21]（限于篇幅，略去，编者注）里，需要考虑 $m$ 维标准球面 $S^m$ 上算子 $\Delta + m$ 的零空间。这正是Laplace算子相应于特征值 $m$ 的特征子空间，因而可以根据前面的结论得到完全的描述：它恰由 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中齐次线性函数在 $S^m$ 上的限制构成，从而可以写成 $\{g(\Theta, \Xi) | \Xi \in \mathbb{R}^{m+1}\}$ ，其中 $g$ 为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的标准内积， $\Theta \in S^m$ 为自变量，视作 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的向量。这个问题正是促使本文作者学习谱几何理论的主要动机。

最后应当指出，虽然本文介绍的主要是在紧致无边黎曼流形的函数空间上的Laplace算子的谱理论，但谱几何的研究范围也包括带边流形、非紧流形和定义在微分形式空间上的Laplace算子。具体研究课题，可参考[4]第254-255页列出的12个部分。

## 参考文献

- [1] PETERSEN P. Riemannian Geometry (影印版) [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [2] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论(上册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [3] 丘成桐, 孙理察. 微分几何讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 马传渔. 黎曼流形的谱[M]. 南京: 南京大学出版社, 1993.
- [5] ZORICH V A. Mathematical Analysis II[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- [6] AGMON S. Lectures on Elliptic boundary value problems[M]. Princeton: Van Nostrand, 1956.
- [7] EGOROV Y, KONDRATIEV V. On Spectral Theory of Elliptic Operators[M]. Basel, Boston: Birkhäuser Verlag, 1996.
- [8] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989.
- [9] LIEB E H, LOSS M. Analysis[M]. 2nd ed. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.
- [10] CHEEGER J. The relation between the Laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature[J]. Archiv der Mathematik: 1968, XIX: 558-560.
- [11] CHENG S Y. A Characterization of the 2-Sphere by Eigenfunctions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society: 1976, 55(2): 379-381.
- [12] BUSER P. Beispiele für  $\lambda_1$  auf kompakten Mannigfaltigkeiten[J]. Mathematische Zeitschrift: 1979, 165: 107-133.
- [13] CHENG S Y. Eigenvalue Comparison Theorems and Its Geometric Applications[J]. Mathematische Zeitschrift: 1975, 143: 289-297.
- [14] YAU S T. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold[J]. Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure: 1975, Série 4 tome 8: 487-507.
- [15] BUSER P. Über eine Ungleichung von Cheeger[J]. Mathematische Zeitschrift: 1978, 158: 245-252.
- [16] LI P. On the Sobolev constant and the  $p$ -spectrum of a compact Riemannian manifold[J]. Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure: 1980, Série 4 tome 13: 451-468.
- [17] BRÜNING J, HEINTZE E. Spektrale Starrheit gewisser Drehflächen[J]. Mathematische Annalen: 1984, 269: 95-101.

- [18] KNESER M. Lineare Relationen zwischen Darstellungsanzahlen quadratischer Formen[J]. *Mathematische Annalen*: 1967, 168: 31-39.
- [19] KITAOKA Y. Positive definite quadratic forms with the same representation numbers[J]. *Archiv der Mathematik*: 1977, XXVIII: 495-497.
- [20] IKEDA J. On lens spaces which are isospectral but not isometric[J]. *Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure*: 1980, Série 4 tome 13: 303-315.
- [21] PARCARD F, XU X. Constant mean curvature spheres in Riemannian manifolds[J]. *manuscripta mathematica*: 2009, 128(3): 275-295.
- [22] OBATA M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere[J]. *Journal of the Mathematical Society of Japan*: 1962, 14(3): 333-340.
- [23] GROMOV M. Spectral geometry of semi-algebraic sets[J]. *Annales de l'institut Fourier*: 1992, 42: 249-274.
- [24] BOURGUIGNON J P, LI P, YAU S T. Upper bound for the first eigenvalue of algebraic submanifolds[J]. *Commentarii mathematici Helvetici*: 1994, 69: 199-207.
- [25] MILNOR J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*: 1964, 51(4): 542.
- [26] KAC M. Can One Hear the Shape of a Drum?[J]. *The American Mathematical Monthly*: 1966, 73(4, part 2: Papers in Analysis): 1-23.
- [27] WEYL H. Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte[J]. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*: 1911: 110-117.

# 根系的分拆

黄瀚贤<sup>1</sup>

指导教师：张贺春教授

## 摘要

根系是欧几里得空间中满足某些公理的有限集，在李群、李代数与代数群理论中起着非常重要的作用。对根系深入研究可以使我们对代数学诸领域有更深入的认识。

用外尔群作为基本工具，我们研究了把根系中的正根和全根系分拆成两个加法封闭集合的必要和充分条件，给出了这两种二分拆的完全分类。

关键词：根系；外尔群；加法封闭；分拆

## 背景和现状

在数学中，根系是欧几里得空间中满足某些公理的有限集，在李群、李代数与代数群理论中起着非常重要的作用。对于根系的研究是李群、李代数与代数群理论中重要研究课题；而在研究根系分类时所发展出的主要工具——邓肯图，也见诸奇异性理论等与李群并无显著关系的学科。至今根系仍然是李群和李代数的工作者重要的研究对象。

由李代数的根分解，可知道中心以外的子空间对李代数的运算满足加法封闭性（详见[1]）。因此如果能把根系拆成一些集合的并，从而满足加法封闭性，就可以同样的分解李代数空间，使得括号运算在该集合内为封闭。

本文所关心的问题是根系被分拆成两个集合的情况下，在什么条件下两个集合均为加法封闭？[2]内给出一部分答案。正根系一个加法封闭的2-分拆，即正根系被分拆成两个不交的加法封闭集，则这些集合有一个固定的形式，而且这种形式与二分集的关系一一对应。由此产生了进一步的问题：能不能由此结论，或者另辟方法，研究全根系的二分拆的表达形式？

---

<sup>1</sup>基数 52

## 根系——定义和简介

在我们开始我们的讨论以前，我们先介绍一下一些名词和符号。

### 定义 1 (根系)

根系  $R$  是欧几里得  $n$  维空间  $E$  中的一个子集，满足公理：

- A.  $R$  有限，张成  $E$ ，不包含  $0$ 。
- B. 若  $\alpha \in \Phi$ ，则  $k\alpha \in R$  当且仅当  $k = \pm 1$ ，即只有  $\pm\alpha$  属于  $R$ 。
- C. 若  $\alpha \in \Phi$ ，反射  $\sigma_\alpha$  维持  $\Phi$  不变
- D. 如果  $\alpha, \beta \in \Phi$ ，则  $2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbf{Z}$ 。

$2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$  是  $\beta$  沿垂直于  $\alpha$  的超平面（记为  $P_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta \in E | (\beta, \alpha) = 0\}$ ）反射所出现的系数，即

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)\alpha}{(\alpha, \alpha)}$$

为方便起见，我们记

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$$

在一个基（下面将定义）下，一个根被称为正根，如果它在基的线性和中的系数全非负。所有的正根组成正根系集。而所有系数非正的根（负根）组成的集合为负根系。

定义 2 (基) 根系的一个子集  $\Pi$  称为基，如果：

- A.  $\Pi$  是  $E$  的一组基
- B. 根系的每一个根  $\beta$  可以记为基的整线性和

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \quad \alpha \in \Pi, \quad k_\alpha \in \mathbf{Z},$$

且所有  $k_\alpha$  全为非负或全为非正。

属于基的根被称为单根。因为根系的基也是相应欧氏空间的基。

每个根系都有基（且不唯一），证明可参考 [1]。

在一个基下，每一个根  $\beta$  可以定义其高度：对于  $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \quad \alpha \in \Pi, \quad k_\alpha \in \mathbf{Z}$ ,

$$\text{ht}\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha$$

有了基以后我们可以定义

**定义 3** (反射和外尔群) 一个反射是欧几里得空间的一个可逆线性映射，固定一个超平面，并把一个向量  $\alpha$  映成它的负向量。文中将把这些反射记为  $\sigma_\alpha$ 。因为对于  $\alpha \in R$ ，根系  $R$  对反射  $\sigma_\alpha$  不变。因此所有  $\sigma_\alpha, \alpha \in \Pi$  生成欧氏空间线性变换的一个子集，这个子集称为（对应于根系  $R$  的）外尔群。

外尔群是由反射生成的，自然就是保距变换，也即

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \omega(\beta), \omega(\alpha) \rangle$$

外尔群的每个元素  $\omega$  都是由  $\sigma_\alpha, \alpha \in \Pi$  生成的，因此可以表达为单根反射  $\omega = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_n}$  的乘积。取元素个数最少的表示，其个数  $n$  定义为  $\omega$  的长度。换句话说，长度  $l(\omega) = n$ ，若  $\omega = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_n}$ ，且对于  $k < n$ ，不存在  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ ，使  $\omega = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_k}$ 。

以下三个定义跟本文的研究密切相关，也在此表述。

**定义 4** (支撑集) 对于每一个根  $\beta$ ，定义支撑

$$\text{supp}\beta = \{\alpha \in \Pi | \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \quad k_\alpha \neq 0\}$$

是基的一个子集。

明显的，

$$\sum_{\alpha \in \text{supp } \beta} k_\alpha \alpha = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha = \beta$$

且

$$k_\alpha = 0, \alpha \notin \text{supp } \beta$$

**定义 5** (加法封闭) 根系  $R$  中的一个子集  $S$  称为加法封闭的，当

$$\alpha, \beta \in S, \alpha + \beta \in R \Rightarrow \alpha + \beta \in S$$

本文以后把加法封闭称为封闭。

**定义 6** (子根系) 对于基  $\Pi$  的一个子集  $S$ ，记

$$R(S) = \langle S \rangle \cap R$$

为  $S$  所生成的子根系。

注  $R(S)$  对于  $\langle S \rangle$ ，一个欧氏子空间，是其上的一个根系。从邓肯图的角度来看， $R(S)$  的邓肯图就是由原邓肯图中去掉不在  $S$  中的点的邓肯图。

为以后方便起见，本文中定义分拆为：把一个集合分解成两个加法封闭的集合的并，而且两个集不交，符号  $\dot{\cup}$  除了表示并以外，表示其前后两个集合不交。

我们以下叙述一些根系中比较显然或者广为人知的定理。

**命题 1** 对于  $\omega \in W, S_1$  闭  $\Leftrightarrow \omega(S_1)$  闭

**命题 2** 如果  $S \in R$  是闭的，则  $S \cap R^+$  和  $S \cap R^-$  均为闭的。

这是因为， $R^+$  和  $R^-$  都是闭的。

**命题 3** 如果

$$\alpha, \beta \in R, (\alpha, \beta) < 0$$

则  $\alpha + \beta \in R$

**命题 4** 外尔群忠实地作用在基上。换句话说，

$$\omega(\Pi) = \Pi \Leftrightarrow \omega = 1$$

**命题 5** 对于  $\alpha \in \Pi$ ，

$$\sigma_\alpha(R^+) = R^+ - \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}$$

即  $\sigma_\alpha$  反射  $\alpha$ ，且对其他正根进行排列。

## 根系的二分拆

### 正根系的二分拆

正如引言所说，这个问题的结论已经由[2]给出。但是由于研究目的的不同，在此提供一个比较简单的证明。在此以前我们先定义

**定义 7** 对于外尔群的元素  $\omega$ ，定义

$$N(\omega) = \{\alpha \in R^+ \mid \omega(\alpha) \in R^-\}$$

即被  $\omega$  映到负根的正根的集合。

容易观察到  $N(\omega)$  是一个闭集，因为

$$\omega(\alpha) + \omega(\beta) = \omega(\alpha + \beta)$$

一个比较常见和常用的结果是， $N(\omega)$  的元素个数，正是  $\omega$  的长度。

**命题 6**  $\#N(\omega) = l(\omega)$

**推论** 外尔群  $W$  内最长的元素把正根系映为负根系，即

$$\omega(R^+) = R^-, \quad \omega \text{ 为外尔群内最长元素。}$$

考虑到外尔群忠实地作用在基上（命题 4），因为  $-\Pi$  也是一组基，因此必有元素  $\omega$ ，使  $\omega(\Pi) = -\Pi$ 。所以  $\omega(R^+) = -R^+ = R^-$ 。由命题该元素必为最长元素。

[2]给出了下面定理的一个等价形式，但其证明较为复杂。下面我们提供一个比较简洁的证明。

**定理 1** 对于  $R^+$  的一个闭的分拆，即

$$R^+ = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

存在一个外尔群的元素  $\omega$ ，使得

$$S_1 = N(\omega), \quad S_2 = N(\omega_0\omega)$$

其中  $\omega_0$  是外尔群内最长的元素。

**证明：**首先，如果  $S_1 = N(\omega)$ ，则由命题 6 的推论，

$$S_2 = R^+ - S_1 = \{\alpha \in R^+ | \omega(\alpha) \in R^+\} = \{\alpha \in R^+ | \omega_0\omega(\alpha) \in R^-\} = N(\omega_0\omega)$$

所以我们只需要证明定理的第一段。

如果  $S_1 = \emptyset$ ，则  $S_1 = N(1)$

剔除了上述情形，我们断言，

$$S_1 \cap \Pi \neq \emptyset$$

如果不正确，则  $S_2$  包含  $\Pi$ ，由  $S_2$  闭知  $S_2 = R^+ \Rightarrow S_1 = \emptyset$ ，与断言条件矛盾。

由此，我们用对于  $S_1$  中的元素个数 ( $S_1$  是有限的) 进行数学归纳法：

如果  $S_1$  有一个元素，则它必然是一个单根  $\alpha$ ，则

$$S_1 = N(\sigma_\alpha)$$

定理在  $S_1$  有一个根时正确。

如果定理在  $S_1$  有  $n$  个根时正确，在  $\#S_1 = n + 1$  时，存在一个单根，仍记为  $\alpha$ ，则

$$\sigma_\alpha(S_1) \cap R^+ = \sigma_\alpha(S_1 - \{\alpha\}) = S_1'$$

是一个闭集。注意到  $S_1'$  有  $n$  个元素。

现在考虑  $R^+ - S_1' = S_2'$ ，往证  $S_2'$  是一个闭集。

首先把  $S_2'$  显性表出：

$$S_2' = R^+ - S_1' = R^+ - \sigma_\alpha(S_1 - \{\alpha\})$$

以  $\sigma_\alpha$  作用于上式，可得

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha S_2' &= \sigma_\alpha(R^+ - S_1') = \sigma_\alpha R^+ - (S_1 - \{\alpha\}) \\ &= R^+ - \{\alpha\} \cup \{-\alpha\} - (S_1 - \{\alpha\}) = R^+ - S_1 \cup \{-\alpha\} = S_2 \cup \{-\alpha\} \end{aligned}$$

只要证明上述集合为闭的，即可完成  $S_2'$  闭的证明。

由  $S_2$  是闭的，我们只需证，对于  $\beta \in S_2$ ,  $-\alpha + \beta \in S_2$ . 如果  $-\alpha + \beta \notin S_2$ ,

则  $-\alpha + \beta \in R \Rightarrow -\alpha + \beta \in S_1$ , 如此则有  $\alpha + (-\alpha + \beta) = \beta \in S_1$ , 与原条件矛盾。

因此,  $S_1'$ ,  $S_2'$  是正根系的一个闭分拆而且  $\#S_1' = n$ , 由题设可知  $S_1' = N(\omega)$ .

因此  $(S_1) = \sigma_\alpha S_1' + \{\alpha\} = N(\sigma_\alpha \omega)$ . 从而完成了证明。 ■

由  $N(\omega)$  的闭性可知以上的关系是等价的。

这个定理也明显的给出正根系内闭分拆的个数：

**推论** 正根系内闭分拆的个数，是外尔群元素个数的一半减一。

**证明：** 明显的，如果  $N(\omega_1) = N(\omega_2)$  则  $\omega_1 = \omega_2$ . 因此不同外尔群元素生成的集合各不相同。考虑一个分拆需要两个不同的元素（定理中为  $\omega$  和  $\omega_0 \omega$ ），可知共有  $n/2$  个分拆方法，而其中一对是由  $\omega_0$  和 1 生成的全正根集和空集. 去掉该对组合即为推论。 ■

完成正根系分拆以后，自然希望能用上述结果，或者其它方法能完成全根系的分拆。在下一节，我们用另一个方法去讨论全根系的分拆。

## 全根系的二分拆

我们首先证明两个简单的命题：

**命题 6**  $R^+ - R(A)$  是闭的。

**证明:** 对于  $\alpha, \beta \in R^+ - R(A)$ , 存在  $\gamma \in R(A), \gamma \in \text{supp}\alpha$ , 因为  $\alpha, \beta$  均为正根, 所以  $\gamma \in \text{supp}(\alpha + \beta)$ , 可得  $\alpha + \beta \in R(A)$ 。由于所讨论的均为正根, 结论明显。 ■

**命题 7** 一个根  $\beta$  的支撑集不能被分解成两个相互垂直的集合的并, 即

$$\text{supp}\beta = A_1 \dot{\cup} A_2, A_1 \perp A_2 \Rightarrow A_1 = \emptyset \text{ 或 } A_2 = \emptyset$$

**证明:** 如果可以的话, 则因垂直,  $R(\text{supp}\beta) = R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$  且最后一个等号右端的两者不交。因此  $\beta \in R(A_1)$  或者  $\beta \in R(A_2)$ 。然而这意味着  $\beta$  垂直于  $A_2$  或者  $A_1$ 。明显地这与  $\beta$  本身的设定矛盾。 ■

现在我们研究互为正负的两个根土  $\alpha$ 。

**引理 1** 如果有一个全根系  $R$  的分拆:  $R = S_1 \dot{\cup} S_2$ , 而且  $\pm\alpha \in S_1$ ,  $\pm\beta \in S_2$ , 则  $\alpha$  垂直于  $\beta$ , 即  $(\alpha, \beta) = 0$

**证明:** (反证) 如果  $(\alpha, \beta) \neq 0$ , 不妨设  $(\alpha, \beta) < 0$ , 则  $\alpha + \beta \in R$ , 所以  $\alpha + \beta \in S_1$  或者  $\alpha + \beta \in S_2$ 。如果  $\alpha + \beta \in S_1$ , 则由  $S_1$  闭可得  $(\alpha + \beta) + (-\alpha) = \beta \in S_1$ ; 如果  $\alpha + \beta \in S_2$ , 则由  $S_2$  闭可得  $(\alpha + \beta) + (-\beta) = \alpha \in S_2$ 。均与题设矛盾。 ■

**推论** 如果有一个全根系  $R$  的分拆:  $R = S_1 \dot{\cup} S_2$ , 而且

$$R(A) \in S_1, R(B) \in S_2$$

则  $R(A)$  垂直于  $R(B)$ 。

**引理 2** 对于  $\beta \in R^+$ ,  $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ ,  $\sum k_\alpha = n$ ,  $\gamma \in \text{supp}\beta$ , 存在一个序列(根列)  $\{\beta_i\}_{i=1 \dots n}$  满足

1.  $\beta_i \in R^+$ ,
2.  $\beta_i - \beta_{i-1} \triangleq \gamma_i \in \Pi$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ ,
3.  $\beta_1 \triangleq \gamma_1 = \gamma$ 。

**证明:** 此引理的第一、第二个条件只是根的分解: 对于每个根  $\beta$ ,  $ht\beta = n$ , 必存在一个单根  $\alpha$ , 使  $(\beta, \alpha) > 0^2$ 。因此  $\beta - \alpha \in R^+$  是一个根, 且  $ht(\beta - \alpha) = n - 1$ , 由根的高度归纳法即得首两个条件。

我们继而用对根的高度的归纳法证明第三个条件:

当  $ht(\alpha) = 1$  时, 结论显然, 因为  $supp\beta = \{\alpha\}$ 。

假设对根高为  $n - 1, n \geq 2$  成立, 则对于根  $\beta$ ,  $ht(\beta) = n$ , 必存在单根  $\alpha$  使  $\beta - \alpha \in R^+, ht(\beta - \alpha) = n - 1$ 。如果  $\gamma_1 = \gamma \neq \alpha$ , 则  $\gamma \in \beta - \alpha$ , 由归纳法可证。如果  $\gamma = \alpha$ , 且  $\gamma$  在  $\beta$  中的系数大于 1, 则  $\gamma \in supp\beta$  命题仍成立。最后只剩下  $\gamma = \alpha$ , 且  $\gamma$  在  $\beta$  中的系数等于 1, 则对于  $\beta - \alpha$  我们按引理建立序列  $\{\beta_i\}_{i=1}^{n-1}$ 。由于  $\gamma \in supp(\beta - \alpha)$ , 且  $(\gamma, \beta_i) \leq 0$ , 故  $\gamma + \beta_i$  为根。故建立新序列

$\overline{\beta_1} = \gamma, \overline{\beta_{i+1}} = \gamma + \beta_i$  即可满足要求。 ■

我们现在表述主要的分拆定理。

**定理 2** 如果有一个全根系  $R$  的分拆:  $R = S_1 \dot{\cup} S_2$ , 则存在外尔群的元素  $\omega$ , 使

$$\begin{aligned}\omega(S_1) &= R^+ - R(A) \cup R(B) \\ \omega(S_2) &= R^- - R(B) \cup R(A)\end{aligned}$$

其中  $A, B \in \Pi$ , 且  $A$  垂直于  $B$ 。

**证明:** 我们选择一个  $\omega$ , 使得  $\omega(S_1) \cap R^+$  的元素个数达到最大。

对于这样的  $\omega$ , 我们建立如下引理

**引理 3** 如果一个单根  $\alpha$  属于  $\omega(S_2)$ , 则  $-\alpha$  也属于  $\omega(S_2)$ 。

**证明:** 如果一个单根,  $\alpha$ , 属于  $\omega(S_2)$  而  $-\alpha$  属于  $\omega(S_1)$ , 则  $\sigma_\alpha \omega$  是外尔群的一个元素, 并且

<sup>2</sup> 否则,  $\{\alpha\} \cup \Pi$  是一个基, 是不可能的。详见[1]

$$\sigma_\alpha \omega(S_1) \cap R^+ = \omega(S_1) \cap R^+ + \{\alpha\}$$

与  $\omega$  的假设矛盾。 ■

在此以后的证明，我们把  $\omega(S_1)$  和  $\omega(S_2)$  直接写成  $S_1$  和  $S_2$ 。例如上述引理 3 变为

$$\alpha \in S_2 \Rightarrow -\alpha \in S_2$$

现在，我们考虑  $\beta = S_2 \cap R^+$ ，即  $S_2$  内的正根。我们将证明， $\text{supp}\beta$  包含于  $S_2$ 。

由引理 2，对于这个根，记为  $\beta_n$ ，有一个根列  $\{\beta_i\}$ ，根列中的元素有

$$\beta_i = \beta_{i-1} + \gamma_i, \gamma_i \in \Pi, i = 1 \dots n$$

(补充定义  $\beta_0 = 0$ ) 将用归纳法证明  $\beta_i \in S_2$ 。

显然  $\beta_n \in S_2$ 。如果  $\beta_i \in S_2$ ，则必有  $\beta_{i-1} \in S_2$  或者  $\gamma_i \in S_2$ ，如果  $\beta_{i-1} \in S_2$ ，则归纳条件已达成，否则  $\gamma_i \in S_2$ 。但由引理 3， $-\gamma_i \in S_2$ ，也就由  $\beta_i + (-\gamma_i) = \beta_{i-1}$  知  $\beta_{i-1} \in S_2$ 。所以归纳可得  $\beta_i \in S_2$ ， $i = 1 \dots n$ ，特别  $\beta_1 \in S_2$ 。

因为根列中的第一个元素能取遍  $\text{supp}\beta$ ，因此  $\text{supp}\beta$  包含于  $S_2$ 。

取遍  $S_2 \cap R^+$  中所有的根，可知  $\bigcup_{\beta \in S_2 \cap R^+} \text{supp } \beta$  包含于  $S_2$ ，记  $\bigcup_{\beta \in S_2 \cap R^+} \text{supp } \beta = A$ ，再由引理 3，以及  $S_2$  的闭性，知  $R(A)$  包含于  $S_2$ 。且显然没有  $R(A)$  以外的正根包含于  $S_2$ 。总结以上结论，可知  $R^+ - R(A)$  包含于  $S_1$ ， $R(A)$  包含于  $S_2$ 。

回顾我们所定的那个外尔群元素  $\omega$ ，该元素使  $S_1$  包含于正根的根个数最大化，因此也把  $S_2$  包含于负根的根个数最大化。重复上述的证明，可知存在一集合  $B \in \Pi$ ，使  $R^- - R(B)$  包含于  $S_2$ ， $R(B)$  包含于  $S_1$ 。综合这两个结果，即可得定理结论，而  $A$ ， $B$  之间的关系则明显可由引理 1 的推论给出。 ■

由这个结论，我们希望，这样形式的集合都是加法封闭的。以下定理就是说明这点，从而完成等价关系的证明。

**定理 3** 如下的集合

$$R^+ - R(A) \cup R(B), A \text{ 垂直于 } B$$

是闭的。

**证明:** 由引理, 已知  $R^+ - R(A)$  和  $R(B)$  是封闭的。因此只需证明, 如果  $\alpha \in R^+ - R(A)$ ,  $\beta \in R(B)^-$ , 则

$$\alpha + \beta \in R^+ \Rightarrow \alpha + \beta \in R(A), \text{ 和}$$

$$\alpha + \beta \in R^- \Rightarrow \alpha + \beta \in R(B)^-.$$

对于第一个, 如果  $\alpha + \beta \in R(A)$ , 则  $(\alpha + \beta) + (-\beta) = \alpha$ ,  $\text{supp}\alpha = A \cup B$ , 与命题 7 矛盾。

对于第二个,  $\alpha + \beta \in R^-$  推出  $\text{supp}\beta$  包含  $\text{supp}\alpha$ , 因此  $\alpha \in R(B)$ , 所以  $\alpha + \beta \in R(B)$ 。

也就完成了证明。 ■

## 参考文献

- [1] James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Second printing, revised. New York, Springer. 1972.
- [2] Papi Paolo, A characterization of a special ordering in a root system. *Proceedings of the A.M.S.*, 120, 661-665, 1994.

# 对任意平移不变 Borel 测度均零测或非 $\sigma$ -有限的 Borel 集

姜多<sup>1</sup>

指导教师：文志英教授

## 摘要

本文是阅读以参考文献[4]为主的相关文献的读书报告，其中补全并修改了原文献的部分结论和证明，并综合讨论了几个相关文献的结论。对于拓扑空间中一些常见的、“定义良好”的 Borel 集，我们常常希望有不变测度使其成为正测度、 $\sigma$ -有限集。本文讨论了  $\mathbf{R}^n$  中在任意平移不变测度下都为零测集或非  $\sigma$ -有限集的 Borel 集，给出了此类集合的两个充分条件。文章包含的一个主要结果是，Liouville 数集属于此类集合，特别地，对任意量纲函数，Liouville 数集的 Hausdorff 测度均为 0 或非  $\sigma$ -有限的。另外， $\mathbf{R}$  中此类集合的 Hausdorff 维数可以是 0 到 1 之间任意实数。

关键词：平移不变测度；Liouville 数；Hausdorff 测度； $\sigma$ -有限

## 第1章 引言

### 1.1 问题的提出

给定  $\mathbf{R}^n$  上 Borel 集，希望用一个平移不变的 Borel 测度来衡量其“大小”。 $\mathbf{R}^n$  中常见的平移不变测度包括 Lebesgue 测度  $\lambda$ ，Hausdorff 测度和填充测度等等。先叙述后两者的定义如下：

**定义 1.1.1** 设  $F \subset \mathbf{R}^n$ ， $s$  是非负实数，任给  $\delta > 0$ ，定义

$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 为 } \mathbf{R}^n \text{ 中可列个直径不超过 } \delta \text{ 的集合, 它们覆盖 } F \right\}$ ,  
又定义  $\mathbf{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$ ，称为  $F$  的  $s$  维 Hausdorff 测度。

---

<sup>1</sup> 基数 52

**定义 1.1.2** 设  $s$  为非负实数, 任给  $\delta > 0$ , 定义

$$\mathbf{P}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \text{ 是一族球心在 } F \text{ 上、互不相交且半径至多为 } \delta \text{ 的球} \right\},$$

定义  $P_0^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P_\delta^s(F)$ 。为保证可列可加性, 再定义

$$\mathbf{P}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathbf{P}_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_i F_i \right\}, \text{ 称为 } F \text{ 的 } s \text{ 维填充测度}.$$

为更精确地量化 Borel 集  $B$  的“大小”, 我们常希望用一个“精细程度”合适的测度, 使它限制在  $B$  上为正有限的(从而, 可以归一化得到一个概率测度)。比如, 对于 Lebesgue 测度为 0 的 Borel 集, 如果存在正实数  $s$  使得,

$0 < \mathbf{H}^s(B) < +\infty$ , 则称  $B$  为  $s$ -集, 此时我们认为  $s$  维 Hausdorff 测度是精细程度刚好适合的尺子。

但是存在这样的集合, 它在任何维数均不能使其 Hausdorff 测度为正有限, 例如一些 McMullen 集 ([11, 13])。为此, 引入量纲函数来推广 Hausdorff 测度。

**定义 1.1.3** 设  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  为增函数, 它在 0 右连续且  $g(0) = 0$ , 则称  $g$  为量纲函数。对  $F \subset \mathbf{R}^n$  定义  $\mathbf{H}_\delta^g(F) = \inf \left\{ \sum_i g(|U_i|) : \{U_i\} \text{ 是 } F \text{ 的 } \delta \text{-覆盖} \right\}$ , 又定义  $\mathbf{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{H}_\delta^s(F)$ , 称为  $F$  的  $g$ -Hausdorff 测度。类似地可定义  $F$  的  $g$ -填充测度。

一个自然的问题是, 是否任何 Borel 集, 都可以找到量纲函数, 使其 Hausdorff 测度或填充测度正有限。[13, 12]对此给出了否定回答。那么, 对于那些任何 Hausdorff (或填充) 测度都不能“精确”刻画  $B \in \mathbf{B}^n$ , 是否总可以找到其它平移不变测度? 注意到, 对无界集来说, 希望找到正有限测度是不现实的, 合理的做法是把有限的要求放宽为  $\sigma$ -有限。因此, 问题变为: 是否对于任意  $B \in \mathbf{B}^n$ , 均存在平移不变的 Borel 测度, 使其有正测度且  $\sigma$ -有限? R. D. Mauldin ([3]) 还针对著名的 Liouville 集提出了以上问题。为清晰、方便起见, 引入下面两个定义:

**定义 1.1.4** Borel 测度指定义在一个包含 Borel 集类的  $\sigma$  代数上的可列可加测度。

**定义 1.1.6** 非空 Borel 集  $B \subset \mathbf{R}$  被称为无法量度的, 如果任何  $\mathbf{R}$  上的平移不变测度  $\mu$  在  $B$  上均为 0 或非  $\sigma$ -有限的。

[4]的主要结果是证明了 Liouville 数集是无法量度的, 从而无法量度集不仅是存在的, 而且一些重要的, 看起来定义简单、性质良好的集合也是无法量

度的（如非正规数集等）。我们还得到判别无法量度性的充分条件。另外，[4]通过构造，证明 0 到 1 之间任何 Hausdorff 维数的实数集都有可能是无法量度的。

## 1.2 基本定义与性质介绍

### 1.2.1 三种维数的定义与性质

**定义 1.2.1** 设  $F \subset \mathbf{R}^n$ ，定义  $\dim_H = \inf\{s : \mathbf{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathbf{H}^s(F) = +\infty\}$ ，称为  $F$  的 Hausdorff 维数。类似地定义

$\dim_p = \inf\{s : \mathbf{P}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathbf{P}^s(F) = +\infty\}$ ，称为  $F$  的填充维数。

**定义 1.2.2** 设  $F \subset \mathbf{R}^n$ ， $F(\varepsilon) := \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, F) \leq \varepsilon\}$  为  $F$  的  $\varepsilon$  平行体。令

$\mathbf{M}^{*s}(F) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(F(\varepsilon))}{(2\varepsilon)^{n-s}}$  为  $F$  的上 Minkowski 容度。定义

$\overline{\dim}_M F = \sup\{s : \mathbf{M}^{*s}(F) = +\infty\} = \inf\{s : \mathbf{M}^{*s}(F) = 0\}$ ，称为  $F$  的上 Minkowski 维数。

**性质 1.2.3**  $\mathbf{R}^n$  中有形式的集合  $\{x \in \mathbf{R}^n : k_i 2^{-m} \leq x < (k_i + 1)2^{-m}, k_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, \dots, n\}$

称为  $k$  阶二进方体。设  $F \subset \mathbf{R}^n$  为有界集合。则  $\overline{\dim}_M F = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \omega_m(F)}{k \log 2}$ ，

其中  $\omega_m(F)$  表示  $F$  与  $k$  阶二进方体相交的个数。等式右边也称为计盒维数<sup>1</sup>。

**性质 1.2.4** 设  $X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m$ ，则

$$(1) \quad \dim_H(X \times Y) \leq \dim_H X + \dim_p Y;$$

$$(2) \quad \dim_p(X \times Y) \leq \dim_p X + \dim_p Y;$$

(3) 设  $f : X \rightarrow \mathbf{R}^m$  为 Lipschitz 变换。则

$$\dim_H f(X) \leq \dim_H X \text{ 且 } \dim_p f(X) \leq \dim_p X;$$

$$(4) \quad \dim_p X \leq \overline{\dim}_M X.$$

### 1.2.2 描述性集合论中的两个命题

**命题 1.2.5**  $\mathbf{R}$  中的非第一纲的 Borel 子群只有  $\mathbf{R}$  本身。

**证明** 设  $\mathbf{R}$  的子群  $B$  是非第一纲的 Borel 集。由[8]定理 4.3， $B$  有 Baire 性质（见 [9] 第 19 页），即存在开集  $G$  和第一纲集  $P$  使  $B = G \Delta P$ ，其中  $P$  非空。设开集  $G$

---

<sup>1</sup> box-counting dimension, 编者注。

包含区间  $I$ , 用  $|I|$  表示其长度。来证区间  $(-|I|, |I|) \subset B - B$ 。当  $|x| < |I|$  时,  $(x + I) \cap I$  包含一个区间,  $P \cup (x + P)$  为第一纲集, 所以

$B \cap (x + B) \supset (x + I) \cap I = P \cup (x + P)$  非空, 即  $x \in B - B$ 。因此  $(-|I|, |I|) \subset B - B$ 。又因为  $B$  是群, 所以  $B \subset \mathbf{R}$ 。  $\square$

**命题 1.2.6<sup>1</sup>** 设  $M \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$  为第一纲集。则存在紧集  $C \subset \mathbf{R}$  满足下列条件:

- (1) 由  $C$  生成的群与  $M$  不交;
- (2)  $C$  是 Cantor 集, 其元素关于有理数线性独立。

证明  $M$  的补集一定包含某些可列个开稠集之交。先证对某个给定开稠集  $U$ , “典型的紧集”  $C$  生成的群在  $U$  内, 即这些紧集  $C$  组成的集合在  $K(X)$  ( $X$  上所有紧集的空间, 赋予 Vietoris 拓扑, 见[9]第 24 页) 中为某第一纲集的补集。对于  $(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l') \in (\mathbf{N} \setminus \{0\})^{k+l}$ , 定义

$$C(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l') = \{n_1 c_1 + \dots + n_k c_k - n_1' c_1' - \dots - n_l' c_l' : c_i, c_j' \in C \text{ 两两不同}\},$$

并令  $C(\emptyset) = \{0\}$ 。当  $(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l')$  跑遍  $(\mathbf{N} \setminus \{0\})^{k+l}$  时, 上述集合的可列并构成  $C$  生成的群。因此只需证对典型的紧集  $C$ ,  $C(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l') \subset U$ 。定义映射

$$f : \mathbf{R}^{k+l} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 为 } f(x_1, \dots, x_k, x_1', \dots, x_l') = n_1 x_1 + \dots + n_k x_k - n_1' x_1' - \dots - n_l' x_l'.$$

则  $f$  是开映射且连续, 所以  $f^{-1}(U)$  在  $\mathbf{R}^{k+l}$  中开稠。由[9]定理 19.1 知, 对典型的紧集  $C$ , 集合  $(C)^{k+l} := \{(c_1, \dots, c_k; c_1', \dots, c_l') : c_i, c_j' \in C \text{ 两两不同}\} \subset f^{-1}(U)$ , 即  $C(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l') \subset U$ 。因此, 对典型的紧集  $C$ ,  $(C)^{k+l}$  包含于可列个开稠集的交的  $f$ -原象中。故典型的紧集  $C$  满足 (1)。再看 (2)。 $\forall i \geq 1$ , 定义

$$R_i = \{(x_1, \dots, x_i) \in \mathbf{R}^i : \text{对 } \forall (q_1, \dots, q_i) \in \mathbf{Q}^i \text{ 且 } q \text{ 不全为 } 0, \text{ 有 } \sum_{k=1}^i q_k x_k \neq 0\} \subset \mathbf{R}^i,$$

$$R_i^c = \bigcup_{\substack{q_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ 1 \leq k \leq i}} \{(x_1, \dots, x_i) \in \mathbf{R}^i : \sum_{k=1}^i q_k x_k = 0\} \equiv \bigcup_{\substack{q_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ 1 \leq k \leq i}} A_{q_{\dots} q_i}^i \text{ 为可列并, 其中 } A_{q_{\dots} q_i}^i \text{ 为闭集}$$

且无内点, 故  $R_i^c$  为第一纲集。由[9]定理 19.1, 典型的紧集  $C$  满足

$(C)^i \subset R_i, \forall i \geq 1$ , 即其元素关于有理数线性独立。综上, 典型的紧集  $C$  满足 (1) 和“元素关于有理数线性独立”。再由[9] 8.8 知, 存在 Cantor 集  $C$  满足 (1) 和 (2)。  $\square$

---

<sup>1</sup> 我们将[4]中的“典型的紧集  $C$ ”满足性质修改成了存在一个  $C$  满足性质。

## 第2章 Liouville 数集的无法量度性

### 2.1 一个判定定理

**定理 2.1.1<sup>1</sup>** 如果非空  $G_\delta$  集  $B \subset \mathbf{R}^n$  是 Lebesgue 零测集, 且集合  $\{t \in \mathbf{R}^n : B + t \subset B\}$  在  $\mathbf{R}^n$  中稠密, 则  $B$  是无法量度的。

这给出  $\mathbf{R}^n$  上为第一纲集的补集的 Borel 集无法量度的一个充分条件。上述定理的证明用到以下两个引理:

**引理 2.1.2** 设  $B \subset \mathbf{R}^n$  为 Lebesgue 零集, 且存在  $\mathbf{R}^n$  上的 Borel 测度  $\mu$  使得  $B$  正、 $\sigma$ -有限。则

- (1) 对  $\lambda$ -几乎所有  $t$ ,  $\mu(B \cap (B + t)) = 0$ ;
- (2) 存在紧集  $C \subset B$  满足  $\mu(C) > 0$  且  $\text{int}(C - C) = \emptyset$ 。

引理 2.1.2 说明, 如果一个 Borel 集  $B$  不是无法量度的, 那么对于相应测度, 可以找到其紧子集对  $C$  不太稀疏 ( $\mu(C) > 0$ ), 而其平移之间“大多”是不相交的 ( $C - C = \{t : C \cap (C + t) \neq \emptyset\}$  无处稠密)。这提供了无法量度的一个充分条件。

**引理 2.1.3** 设  $B$  为稠密的  $G_\delta$  集使得  $\{t \in \mathbf{R}^n : B + t \subset B\}$  在  $\mathbf{R}^n$  中稠密。 $C \subset B$  为紧集, 满足  $\text{int}(C - C) = \emptyset$ 。那么, 在  $B$  中存在  $C$  的不可列多个不交平移。

**引理 2.1.2 的证明:** (1) 设  $\mu$  定义在一个包含  $\mathbf{B}^n$  的  $\sigma$ -代数  $\mathbf{S}$  上。定义测度  $\mu_s$  为:

$$\mu_s(S) = \mu(S \cap B), \text{ 对任意 } S \in \mathbf{S}.$$

则  $\mu_s$  是  $\mathbf{R}^n$  上  $\sigma$ -有限的 Borel 测度。只需证  $\mu_s(B + t) = 0$  对  $\lambda$ -几乎所有  $t$ , 即需证  $\int_{\mathbf{R}} \mu_s(B + t) d\lambda(t) = 0$ 。而由 Fubini 定理 (注意  $\mu_s$  和  $\lambda$  均  $\sigma$ -有限),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \mu_s(B + t) d\lambda(t) &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{x \in B+t} d\mu_s(x) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{t \in x-B} d\lambda(t) d\mu_s(x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda(x - B) d\mu_s(x) = 0 \end{aligned}$$

(2) 只需证存在 Borel 集  $B' \subset B$  满足  $\mu(B') > 0$  且  $\text{int}(B' - B') = \emptyset$ 。假设如此, 则因  $B$  在  $\mu$  下正且是  $\sigma$ -有限的, 故  $B'$   $\sigma$ -有限, 所以存在  $A \subset B'$  使  $0 < \mu(A) < +\infty$ , 即  $\mu'(\cdot) = \mu(\cdot \cap A)$  为  $\mathbf{R}^n$  中 Borel 集上的有限测度, 因此  $\mu'$  内正

---

<sup>1</sup> 在[4]中, 定理是在  $\mathbf{R}$  叙述的, 这里我们将定理及其证明在  $\mathbf{R}^n$  中给出。

则[9]。而  $\mu'(B') = \mu(B' \cap A) = \mu(A) > 0$ ，则存在紧集  $C \subset B' \subset B$ ，满足  $\mu(C) > 0$ 。又  $\text{int}(C - C) \subset \text{int}(B' - B') = \emptyset$ ，即  $\text{int}(C - C) = \emptyset$ 。

因此只需找到 Borel 集  $B' \subset B$  满足  $\mu(B') > 0$  且  $\text{int}(B' - B') = \emptyset$  即可。由 (1) 知，可选出可数稠密集  $D \subset \{t \in \mathbf{R}^n : \mu(B \cap (B + t)) = 0\}$ 。令

$$B' = B \setminus \bigcup_{d \in D} (B + d)。$$

因为  $\mu(B \cap (B + d)) = 0, \forall d \in D$ ，所以

$\mu(B') = \mu(B) > 0$  且  $D \cap (B' - B') = \emptyset$  即  $\text{int}(B' - B') = \emptyset$ 。(2) 得证。□

**引理 2.1.3 的证明：**由于  $B$  是  $G_\delta$  的，故可将  $B$  写成一列开集的交  $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ 。

于是

$$T := \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset B\} = \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset U_n\},$$

即  $T = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ ，其中  $G_n = \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset U_n\}$ 。因为  $C$  为紧集， $U_n$  为开集，故  $G_n$  开。

有因  $T$  稠密，故  $G_n$  为开稠集。

按如下方式归纳地定义  $P \subset T$ ：对任意自然数  $n$ ，每个长度为  $n$  的 0-1 序列，我们将要定义  $\mathbf{R}^n$  中非退化矩体  $I_s$ 。第 0 步，固定  $I_\emptyset \subset G_\emptyset$ 。假设前  $n$  步已完毕，在第  $n+1$  步，取  $x \in I_s \cap G_{n+1}$ 。希望再取  $y \in I_s \cap G_{n+1}$  使得  $(C + x) \cap (C + y) = \emptyset$ ，这等价于  $y \in (I_s \cap G_{n+1}) \setminus (C - C + x)$ 。而因为  $I_s \cap G_{n+1}$  是包含开集，且  $\text{int}(C - C) = \emptyset$ ，所以可以选定这样的  $y$ 。而因  $C$  是紧集，故可以找到分别包含  $x, y$  的矩体  $I_{s^\wedge 0}, I_{s^\wedge 1} \subset I_s \cap G_{n+1}$  满足  $(C + I_{s^\wedge 0}) \cap (C + I_{s^\wedge 1}) = \emptyset$ 。第  $n+1$  步结束。在上述过程中，总可保证每个  $I_s$  的直径不超过  $1/n$ 。

令  $P = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \text{ 是长度为 } n \text{ 的 } 0-1 \text{ 序列}} I_s$ 。则  $P \subset T$  满足， $\forall p_1, p_2 \in P, p_1 \neq p_2$  有

$(C + p_1) \cap (C + p_2) = \emptyset$ 。同时  $P$  的势  $|P| = 2^{\aleph_0}$ ，即  $P$  不可列。证毕。□

**定理 2.1.1 的证明** 设  $B$  满足定理的条件，假设存在平移不变的 Borel 测度  $\mu$  使  $B$  正且  $\sigma$ -有限。由引理 2.1.2，存在紧集  $C \subset B$  使  $\mu(C) > 0$  且  $\text{int}(C - C) = \emptyset$ 。再由引理 2.1.3 及平移不变性，存在  $\{C_t, t \in T\}$ ， $T$  不可列，使

$$C_t \subset B, \mu(C_t) = \mu(C) > 0, \forall t \in T \text{ 且 } C_t \text{ 之间不交}。$$

因为  $\mu$  使  $B\sigma$ -有限，故存在  $B_n \uparrow \subset B, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  且  $\mu(B_n) < +\infty, \forall n$ 。因为  $T$  不可列，故存在  $n$  使  $T_0 := \{t \in T : \mu(B_n \cap C_t) > 0\}$  不可列。但这与  $\mu(B_n) < +\infty$  矛盾 ( $\exists \varepsilon > 0$  使  $\{t \in T : \mu(B_n \cap C_t) > \varepsilon\}$  为无穷集，则  $\mu(B_n) \leq \sum_{t: \mu(B_n \cap C_t) > \varepsilon} \varepsilon = +\infty$ )。  $\square$

## 2.2 Liouville 数集的无法量度性

在丢番图逼近中，很重要的一类集合是 Liouville 数，其定义如下：

**定义 2.2.1**  $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \forall n \in \mathbf{N} \exists p, q \in \mathbf{Z} (q \geq 2) \text{ 使得 } \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \}$ 。

$\mathbf{L}$  有以下易于验证的等价定义：

**定理 2.2.2**  $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} \exists p, q \in \mathbf{Z} (q \geq 2) \text{ 使得 } 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \}$ 。

证明 只需证  $\mathbf{L} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 。

$\forall r \in \mathbf{Q}$ , 设  $r = \frac{p_0}{q_0} (q_0 \geq 2)$ 。取  $n \in \mathbf{N}$ , 使  $2^{n-1} > q_0$ 。则

$$\forall p, q \in \mathbf{N} (q \geq 2) \text{ 有 } q^{n-1} > q_0。$$

若  $\left| r - \frac{p}{q} \right| \neq 0$ , 即  $p_0 q - q_0 p \geq 1$ , 则

$$\frac{p_0}{q_0} - \frac{p}{q} = \frac{p_0 q - q_0 p}{qq} \geq \frac{1}{q_0 q} > \frac{1}{q^n}。$$

故  $r \notin \mathbf{L}$ 。  $\square$

**定理 2.2.3** Liouville 数集是无法量度的。

证明 由定理 2.1.1, 只需证  $\mathbf{L} \subset \mathbf{R}$  是  $G_\delta$  的 Lebesgue 零集, 且  $\{t \in \mathbf{R} : \mathbf{L} + t \subset \mathbf{L}\}$  在  $\mathbf{R}$  中稠密。这些都是 Liouville 数集的经典性质, 现简要证明如下。

(1) 采用定理 2.2.2 中的等价定义。

$$\mathbf{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ x \in \mathbf{R} : 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} V_{n,p,q} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

$V_{n,p,q}$  为开集, 故  $U_n$  开, 所以  $\mathbf{L}$  是  $G_\delta$  集。

(2)  $\forall q \geq 2, n \geq 3$  定义  $L_{q,n} = \bigcup_{p=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$ 。则  $\mathbf{L} \subset \bigcup_{q=2}^{+\infty} L_{q,n}$ 。

于是  $\forall M > 0$ ，

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{L} \cap (-M, M)) &\leq \lambda\left(\bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p=-Mq}^{Mq} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)\right) \leq \bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p=-Mq}^{Mq} \frac{2}{q^n} \\ &= \bigcup_{q=2}^{+\infty} \frac{2(2Mq+1)}{q^n} \leq (4M+1) \bigcup_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \\ &\leq (4M+1) \int_1^{\infty} \frac{dq}{q^{n-1}} \leq \frac{4M+1}{n-2} \quad \forall n \geq 3\end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$  得  $\lambda(\mathbf{L} \cap (-M, M)) = 0$ 。因此  $\lambda(\mathbf{L}) = 0$ 。

(3) 来证,  $\mathbf{L} + r \subset \mathbf{L}, \forall r \in \mathbf{Q}$ 。

设  $r = \frac{p_0}{q_0}$ 。 $\forall n \in \mathbf{N}$ , 取  $N \in \mathbf{N}$ , 使  $q_0^n < 2^{N-n}$ 。

$\forall x \in \mathbf{L}$ , 对  $N \in \mathbf{N}$ , 存在  $p, q (q \geq 2)$  使  $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^N}$ 。

而  $(qq_0)^n = q^n q_0^n < q^n \cdot 2^{N-n} < q^N$ ,

故  $\left| (x+r) - \left( \frac{pq_0 + qp_0}{qq_0} \right) \right| = \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^N} < \left( \frac{1}{qq_0} \right)^n$ 。故  $x+r \in \mathbf{L}$ 。□

## 2.3 一些其他例子

本部分进一步讨论由定理 2.1.1 给出的其他无法量度集的例子。关于无法量度性, 我们有以下简单引理:

**引理 2.3.1** (1) 若  $B_n \subset \mathbf{R}^n, n \geq 1$  是一列无法量度集, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  无法量度;

(2) 若  $A \Delta B$  为可列集, 则  $A$  与  $B$  的无法量度性等价。

**证明** (1) 任意平移不变测度  $\mu$ , 若任意  $n$  有  $\mu(B_n) = 0$ , 则  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$ 。否

则, 若存在  $B_n$  非  $\sigma$ -有限, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  亦非  $\sigma$ -有限。综上,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  为无法量度集。

(2) 当  $A$  与  $B$  可列时, 计数测度使二者均正、 $\sigma$ -有限。现设  $A$  与  $B$  同时不可列, 只需证  $A$  非无法量度蕴含  $B$  非无法量度。设平移不变测度  $\mu$  使  $A$  正、 $\sigma$ -

有限。由平移不变性，单点集为  $\mu$ -零集，因此可列集为  $\mu$ -零集，故  $\mu$  亦使  $B$  正、 $\sigma$ -有限。于是  $B$  非无法量度。  $\square$

### 2.3.1 非正规数集

我们首先讨论简单正规数的情形。

**定义 2.3.2** 实数  $x \in \mathbf{R}$  称为简单正规数，如果 10 进制展开的小数部分

$\{x\} = 0.d_1d_2\dots$  满足：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = k\}}{n} = \frac{1}{10}, \forall 0 \leq k \leq 9.$$

用  $N$  记简单正规数全体的集合。

由大数定律易得  $\lambda(\mathbf{R} \setminus N) = 0$ 。是否存在更精确的测度刻画  $\mathbf{R} \setminus N$  呢？

**定理 2.3.3**  $\mathbf{R} \setminus N$  是无法量度集。

证明 有理数的 10 进制展开可以有不唯一形式，而由引理 2.3.1 (2)，只需证

$(\mathbf{R} \setminus N) \setminus \mathbf{Q}$  无法量度。 $(\mathbf{R} \setminus N) \setminus \mathbf{Q} = \bigcup_{k=0}^9 \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^k \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^k \right)$ ，其中

$$A_j^k = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = k\}}{n} \geq 0.1 + \frac{1}{j}\},$$

$$B_j^k = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = k\}}{n} \leq 0.1 - \frac{1}{j}\}.$$

由引理 2.3.1 (1)，只需证每个  $A_j^k$  和  $B_j^k$  无法量度，这里只证  $A_j^k$ ，同理易得  $B_j^k$ 。

应用定理 2.1.1，需验证  $A_j^k$  为 Lebesgue 零集（显然），关于某稠密集平移不变，且  $G_\delta$ 。注意到， $x \in A_j^k$  与否跟  $x$  的前有限位小数无关，所以  $A_j^k$  对小数部分仅有有限位非零的数（组成稠密集）平移不变。又

$$A_j^k = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = k\}}{n} \geq 0.1 + \frac{1}{j} - \frac{1}{l}\}$$

而  $\{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = k\}}{n} \geq 0.1 + \frac{1}{j} - \frac{1}{l}\}$  只与前有限位小数有关，故为开集。

因此  $A_j^k$  为  $G_\delta$  集。证毕。  $\square$

正规数的一般定义为：

**定义 2.3.4** 设实数  $x \in \mathbf{R}$  的 10 进制展开小数部分  $\{x\} = 0.d_1d_2\dots$ ，则  $x$  称为正规数，如果任意给定的  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  中的有限序列  $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_m$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = \omega_1, d_{i+1} = \omega_2, \dots, d_{i+m-1} = \omega_m\}}{n} = \frac{1}{10^m}.$$

我们记正规数全体为  $N_1$ 。

显然,  $N_1 \subset N$ , 且三者均为 Lebesgue 全测集。

**推论 2.3.5** 非正规数集  $\mathbf{R} \setminus N_1$  为无法量度集。

证明  $\mathbf{R} \setminus N_1 = \bigcup_{\omega \text{ 长度为 } m} \bigcup_{\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_m} C_\omega$  为可列并, 其中

$$C_\omega = \{x \in \mathbf{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n : d_i = \omega_1, d_{i+1} = \omega_2, \dots, d_{i+m-1} = \omega_m\}}{n} = \frac{1}{10^m}\}.$$

$C_\omega$  的无法量度性与定理 2.3.3 证明类似。□

### 2.3.2 非 Besicovitch-Eggleston 数集

Beskclvitch-Eggleston 数指小数部分“每个数字的渐进频率均存在”的实数。

**定义 2.3.6** 设  $x \in \mathbf{R}$  的  $b$  进制展开小数部分  $\{x\} = 0.d_1 d_2 \dots$ , 其中, 如果展式不唯一, 取有限位非零的那个。 $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{b-1})$  为概率向量,  $\alpha_d \geq 0, \sum_{d=0}^{b-1} \alpha_d = 1$ . 定义

$$\text{BE}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{b-1}) := \{x \in \mathbf{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n, d_i = d\}}{n} = \alpha_d \ \forall 0 \leq d \leq b-1\}.$$

$\text{BE}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{b-1})$  表示  $b$  进制展开小数部分中, 各数字的渐进频率为  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{b-1})$  的数的全体。

使  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{b-1})$  跑遍  $b$  维概率向量, 则所有  $\text{BE}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{b-1})$  称为 Besicovitch-Eggleston 数, 记作  $\text{BE}_b$ .

**定理 2.3.7** 设  $b \geq 2$ , 则  $\mathbf{R} \setminus \text{BE}_b$  无法量度。

证明 为了避开有理数展式的不确定性, 我们只考虑  $(\mathbf{R} \setminus \text{BE}_b) \setminus \mathbf{Q}$ , 试图把它写成可列并的形式:

$$(\mathbf{R} \setminus \text{BE}_b) \setminus \mathbf{Q} = \bigcup_{d=0}^{b-1} \bigcup_{p,q \in \mathbf{Q} \cap [0,1]} (C_q^d \cap D_p^d),$$

其中

$$C_q^d = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n, d_i = d\}}{n} \geq q\},$$

$$D_p^d = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n, d_i = d\}}{n} \leq p\}.$$

应用定理 2.1.1, 只需证  $C_q^d$  满足相应条件 ( $D_p^d$  同理)。根据大数定律,  $C_q^d$  是 Lebesgue 零集 (事实上,  $\lambda(\text{BE}(\frac{1}{b}, \frac{1}{b}, \dots, \frac{1}{b})) = 1$ )。且  $C_q^d$  关于小数部分只有有限位非零的数 (组成稠密集) 平移不变。只需  $C_q^d$  为  $G_\delta$  集。而

$$C_q^d = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n, d_i = d\}}{n} > q - \frac{1}{l}\}.$$

综上,  $\mathbf{R} \setminus \text{BE}_b$  无法量度。  $\square$

### 2.3.3 更多无法量度集的构造

根据定理 2.1.1, 还可以给出更多无法量度的 Lebesgue 零测集。事实上, 对任意 Lebesgue 零测集 (不要求 Borel), 都可以在其基础上, 用下面步骤得到一个无法量度集。

设  $A \subset \mathbf{R}$  为非空 Lebesgue 零测集, 则  $A + \mathbf{Q}$  仍是 Lebesgue 零集。根据 Lebesgue 的定义, 存在包含  $A + \mathbf{Q}$  的  $G_\delta$  集  $B$ , 它本身也是 Lebesgue 零集。考虑  $\bigcap_{q \in \mathbf{Q}} (B + q)$ 。它是  $G_\delta$  集, Lebesgue 测度为 0, 且关于有理数的平移不变。因此定理 2.1.1 指出,  $\bigcap_{q \in \mathbf{Q}} (B + q)$  无法量度。上述讨论在  $\mathbf{R}^n$  也成立。因此, 对每个 Lebesgue 零测集, 我们得到了一个包含它的无法量度集。

## 第3章 任意 Hausdorff 维数的无法量度集

本部分的主要目的是证明,  $\mathbf{R}$  上任何 0 到 1 之间的 Hausdorff 维数的集类里, 都有存在无法量度集。进一步, 我们可以要求这样的集合为加法群。

### 3.1 另一个判定定理

**定理 3.1.1** 设  $B \subset \mathbf{R}$  为 Borel 集, 满足  $B + B \subset B$  (于是  $B - B$  为  $B$  生成的群)。如果  $B - B$  不是  $F_\sigma$  的, 则  $B$  无法量度。

特别地,

**定理 3.1.2** 若  $G \subset \mathbf{R}$  为加法群, 它是 Borel 但非  $F_\sigma$  的, 则  $G$  无法量度。

**定理 3.1.1 的证明** 用反证法。假设存在平移不变测度  $\mu$  使  $B$  正、 $\sigma$ -有限。则由引理 2.1.2, 存在正测度紧集  $C \subset B$  使  $\text{int}(C - C) = \emptyset$ 。采用与定理 3.1.2 证明中

类似的思路，希望证出  $B$  包含  $C$  的不可列个不交平移。为此，希望构造一个超限数列  $T = \{t_\alpha, \alpha < \omega_1\} \subset B$ ，满足  $C + t_\alpha$  两两不交，其中  $\omega_1$  表示最小的不可列序数。尝试用超限归纳法定义  $T$ ，只需保证归纳过程不会在某个可列序数  $\alpha$  处停止。设对一切  $\beta < \alpha$ ， $t_\beta$  均已定义好。只需存在  $t_\alpha \in B$  使

$$(C + t_\alpha) \cap (C + t_\beta) = \emptyset \text{ 即 } t_\alpha \notin C - C + t_\beta, \forall \beta < \alpha, \text{ 于是只要证}$$

$$B \not\subset \bigcup_{\beta < \alpha} C - C + t_\beta.$$

$$\text{假设 } B \subset \bigcup_{\beta < \alpha} C - C + t_\beta. \text{ 则 } B - B \subset \bigcup_{\beta, \gamma < \alpha} [(C - C + t_\beta) - (C - C + t_\gamma)].$$

$$\text{而 } B - B \text{ 是群, 故实际上 } B - B = \bigcup_{\beta, \gamma < \alpha} [(C - C + t_\beta) - (C - C + t_\gamma)]. \text{ 而 } C \text{ 为紧集,}$$

即  $(C - C + t_\beta) - (C - C + t_\gamma)$  为闭集, 因此  $B - B$  是  $F_\sigma$  集。与假设矛盾。这样得超限数列  $T$ 。与定理 3.1.2 证明类似, 可证  $\mu$  在  $B$  上非  $\sigma$ -有限的。因此  $G$  无法量度。□

### 3.2 任意 Hausdorff 维数的无法量度集的构造

本部分用到[7]中构造的一系列集合  $\{G_\alpha \subset \mathbf{R}, 0 < \alpha < 1\}$ , 我们将[6]中我们需要的结论写成如下引理:

**引理 3.1.3** 存在一列  $\mathbf{R}$  的加法子群  $\{G_\alpha \subset \mathbf{R}, 0 < \alpha < 1\}$ , 满足

$$\dim G_\alpha = \alpha, \text{ 且若 } \alpha < \beta, \text{ 有 } G_\alpha \subset G_\beta.$$

**定理 3.1.4** 对任意  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 存在  $\mathbf{R}$  中 Hausdorff 维数为  $\alpha$  的无法量度集。特别地, 可以取这些集合为  $\mathbf{R}$  的加法子群。

[6]中的  $G_\alpha$  是  $F_\sigma$  的, 为由  $G_\alpha$  构造非  $F_\sigma$  的 Hausdorff- $\alpha$  维集, 给出以下引理:

**引理 3.1.5<sup>1</sup>**  $\mathbf{R}$  的每个 Cantor 子集  $K$  包含一个填充维数为 0 的不可列、Polish 子集  $K_0$  (即可分、可完备度量化, 详见[9])。

**定理 3.1.4 的证明** 首先考虑  $0 \leq \alpha < 1$  情形。当  $0 < \alpha < 1$  时, 令  $G_\alpha$  为引理 3.1.3 中的子群; 当  $\alpha$  为 0 时, 令  $G_\alpha = \{0\}$ 。由命题 1.2.5 知,  $G_\alpha$  是第一纲集。令

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (G_{\frac{1}{n}} \setminus \{0\}), \text{ 则 } M \text{ 也是第一纲的, 由命题 1.2.6 得到 Cantor 集 } C \subset M.$$

<sup>1</sup> 本定理将[4]中  $K_0$  是 Cantor 集的条件弱化为不可列的 Polish 空间, 这使证明思路更清晰, 对定理 3.1.4 的证明也足够。

再根据引理 3.1.5, 存在不可列、Polish 的  $C_0 \subset C$  使  $\dim_p C_0 = 0$ , 于是存在 Borel 但非  $F_\sigma$  的子集  $B \subset C_0$  (存在性见[9]定理 22.4)。定义  $H$  为由  $B$  生成的加法群, 令  $G_\alpha' = G_\alpha + H$ 。因为对  $\alpha < \beta$  有  $G_\alpha \subset G_\beta$ , 所以

$$G_\alpha \cap H = \{0\} \text{ 对一切 } 0 \leq \alpha < 1。$$

下面我们验证  $G_\alpha'$  是 Borel 集, 但不  $F_\sigma$ , 且  $\dim_H G_\alpha' = \alpha, \forall 0 \leq \alpha < 1$ 。

(1) 作为  $B$  生成的群,  $H$  可表示为所有  $B(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l')$  (记号的定义见命题 1.2.6 的证明) 之并。因为  $B$  关于整数线性独立, 所以  $B(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l')$  是 Borel 集( $B$ ) $^{k+l}$  的一个双射的象, 即  $B(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l')$  也是 Borel 集, 从而  $H$  是 Borel 集。考虑从  $G_\alpha \times H \subset \mathbf{R}^2$  到  $G_\alpha' = G_\alpha + H$  上自然定义的映射, 它显然是连续的。而假设  $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ , 则  $g_1 - g_2 = h_1 - h_2 \in G_\alpha \cap H = \{0\}$ , 所以该映射也是单射。这样,  $G_\alpha'$  也某个是 Borel 集的双射象, 因而是 Borel 集。

(2) 下证  $G_\alpha'$  不是  $F_\sigma$  集。因为  $C_0$  是紧集而  $B$  不  $F_\sigma$ , 故只需证  $G_\alpha' \cap C_0 = B$ 。设  $\forall g' = g + h \in C_0, g \in G_\alpha, h \in H$ , 则  $g = g' - h \in (C_0 - H) \cap G_\alpha \subset C \cap (M \cup \{0\})$ 。由命题 1.2.6 (2) 知,  $g=0$ , 即  $h \in H \cap C_0$ 。 $H$  为  $B$  生成的群, 且  $B$  线性无关, 因此  $g' = h \in B$ 。所以  $G_\alpha' \cap C_0 = B$ , 于是  $G_\alpha'$  非  $F_\sigma$ 。

(3) 最后正  $\dim_H G_\alpha' = \alpha, \forall 0 \leq \alpha < 1$ 。因为  $G_\alpha' \supset G_\alpha$ , 只需证  $\dim_H G_\alpha' \leq \alpha$ 。因  $G_\alpha \times H \subset \mathbf{R}^2$  到  $G_\alpha' = G_\alpha + H$  的自然映射是 Lipschitz 的, 所以由性质 1.2.4 (1) 和 (3),

$\dim_H G_\alpha' \leq \dim_H (G_\alpha \times H) \leq \dim_H G_\alpha + \dim_p H = \alpha + \dim_p H$ 。故只要证  $\dim_p H = 0$ 。由性质 1.2.4 (2), 只需  $\dim_p B(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l') = 0$ 。而  $B(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l')$  可以由  $B^{k+l}$  的一个 Lipschitz 映射象覆盖, 故

$$\dim_p B(n_1, \dots, n_k; n_1', \dots, n_l') \leq \dim_p B^{k+l} \leq (k+l) \dim_p B = 0。$$

综上, 再应用定理 3.1.2 得到,  $G_\alpha'$  是 hausdorff 维数为  $\alpha$  的无法量度加群,  $0 \leq \alpha < 1$ 。当  $\alpha = 1$  时,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$  即为满足条件的无法量度加群。□

**引理 3.1.5 的证明** 因为  $K$  有界<sup>n</sup>, 不妨设  $K \subset [0,1]$ 。对每个  $m \geq 1$ , 将单位区间等分成  $2^m$  个子区间, 希望归纳地从中选出一族开区间  $I_m$ , 满足要求:

- (1)  $|I_m| \leq m, \text{int}(I) \cap K \neq \emptyset$  且当  $m < n$  时,  $\cup I_m \subset \cup I_n$ ;
- (2)  $\forall I \in I_m, \exists n \in \mathbf{N}$  和  $J, J' \in I_n, J \neq J'$  使得  $J, J' \subset I$ .

这些条件是容易满足的，例如，可以在  $m=1$  时，从两个区间中选内部与  $K$  交非空的一个； $m \geq 2$  时，每次选出与同时满足  $K$  交非空的 1 到 2 个子区间（只有在仅有一个区间与  $K$  相交的情况下，才放弃选择两个）。注意从某个  $I_m$  开始，之后不可能每步都只能从之选出 1 个与  $K$  相交的子区间，否则由闭区间套引理， $K$  在  $I_m$  有孤立点，这与  $K$  是 Cantor 集矛盾，这样 (2) 也满足。

令  $K_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\cup I_m)$ 。显然  $K_0$  是闭集，因此可完备度量化。由  $K_0$  的构造方法，有无穷多步都选出了 2 个区间，故  $|K_0| \geq 2^N$ ，即  $K_0$  不可列。每个  $I_m$  与  $K_0$  的交集非空，故可从此非空交集中选出一个点，于是得到可列个  $K_0$  中的点，由于  $m$  增大时， $I_m$  的长度趋于 0，所以这可列个点构成  $K_0$  的稠密子集，因此  $K_0$  可分。综上， $K_0$  是不可列、Polish 子集。下面再证  $\dim_p K_0 = 0$ 。由性质 1.2.4 (4) 只需证  $\overline{\dim}_H E = 0$ 。再根据性质 1.2.3，用计盒维数计算。

$$\overline{\dim}_H K_0 = \limsup_{k \rightarrow 0} \frac{\log \omega_k(K_0)}{k \log 2} \leq \limsup_{k \rightarrow 0} \frac{\log k}{k \log 2} = 0。 \text{ 证毕。 } \square$$

## 第4章 结论

在进一步的研究中，我们可以问如下的问题：

**问题 4.1** 为了使某 Borel 集测度正、 $\sigma$ -有限，存在一个合适的平移不变测度是否比存在某量纲函数对应的 Hausdorff 测度和填充测度更弱。换句话说，如果对 Borel 集  $B$ ，不存在量纲函数使其 Hausdorff 测度或填充测度正、 $\sigma$ -有限，那么是否  $B$  一定无法量度？

Peres 在[12]中给出了一些集合的例子，它们对任意量纲函数的填充测度都非正或非  $\sigma$ -有限，而[6]中证明了上述的集合都不是无法量度的。但是有关 Hausdorff 测度，目前还没有相应的结果。

另一方面（参见注 1.1.5），[5]构造了一个不等价于 Lebesgue 测度的平移不变测度的例子，它定义在一个严格包含 Borel 集的  $\sigma$  代数上，且在整个  $\mathbf{R}^n$  上  $\sigma$ -有限。因此我们看到，只有不把  $\sigma$  代数局限于 Borel 集，我们还有除 Hausdorff 测度或填充测度外更多的选择平移不变测度的余地。

然而，对问题 4.1 的完全的回答还有待于进一步研究。

## 参考文献

- [1] 文志英. 分形几何的数学基础[C]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.
- [2] 瞿燕辉. 分形测度的比较, 周期  $\beta$  展式与高位周期词[D]. 北京: 科学出版社, 1999: 32-36
- [3] Csörnyei M. Open problems [J]. Periodica Mathematica Hungarica, 1998, 37: 227-237
- [4] Elekes M., Keleti T. Borel sets which are null or non- $\sigma$ -finite for every translation invariant measure [J]. Advances in Mathematics, 2006, 201:102-115
- [5] Elekes M., Keleti T. Is Lebesgue measure the only  $\sigma$ -finite invariant Borel measures? [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 321: 445-451
- [6] Elekes M., Keleti T., Mathé A. Self-similar and self-affine sets; measure of the intersection of tow copies [EB/OL]. arXiv: math.GM/0704.3727 v2.[2008-07-18].  
<http://arxiv.org/pdf/0704.3727>
- [7] Erdös P., Volkmann B. Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension [J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1966, 221:203-208
- [8] Oxtoby J. Measure and category (Graduate Texts in Mathematics vol. 2) [M]. 2<sup>nd</sup> ed. Berlin: Springer, 1980
- [9] Kechris S. Classical Descriptive Set Theory (Graduate Texts in Mathematics, vol. 15) [M]. Berlin: Springer, 1995
- [10] Larman D. The approximation of  $G_\delta$ -sets, in measure, by  $F_\sigma$ -sets [J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1965, 61:105-107
- [11] McMullen C. The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets [J]. The Nagoya Mathematical Journal, 1984, 96: 1-9
- [12] Peres Y. The packing measure of self-affine carpets [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1994, 115: 437-450
- [13] Peres Y. The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1994, 116: 513-526

# 数独中的数学应用\*

王琢<sup>†</sup>

指导教师：白峰杉教授

## 摘要

本文以数独为研究对象。数独是一种依据一定规则在九宫格内填写数字的游戏，文中介绍了其背景和近期的研究进展。围绕数独问题，本文提出了几个新问题并提出了一种解决的办法。

本文首先分析了求解数独常用的逻辑算法和机器算法，加以分类整理，并为每一类算法编程，制作了一个简易的数独逻辑求解程序。再利用随机过程方面的知识，对玩家求解数独的过程进行了建模。本文给出的办法，使得我们能够检测玩家求解数独是否异常，评估玩家对于每一类逻辑的熟练程度，并且能够给出一种与玩家水平相关的难度评估办法。

**关键词：**数独 逻辑解法 机器解法 异常检测 水平评估 难度评估

## 主要符号对照表

$G$	格子(Grid)，数独中最小的单元
$G_{mn}$	第 $m$ 行，第 $n$ 列的格子，也记做 $RmCn$
$r(G)$	$G$ 所在的行数
$c(G)$	$G$ 所在的列数
$b(G)$	$G$ 所在的宫数，从左至右，从上至下标记为1-9
$v(G)$	$G$ 中所填的数字
$R$	行(Row)，由横向的一行9个格子组成
$R_n$	$R_n = \{G   r(G) = n\}$
$C$	列(Column)，由纵向的一行9个格子组成

\*编者注：收入本刊时删节了原文第二章“数独逻辑解法”.

<sup>†</sup>基数51

$C_n$	$C_n = \{G   c(G) = n\}$
$B$	宫(box), 由相邻的 $3 \times 3$ 的9个格子组成
$B_n$	$B_n = \{G   b(G) = n\}$
$U$	泛指某个单元(unit), 可以是 $R$ , $C$ 或者 $B$ 之一
$N$	$N = 1, 2, \dots, 9$
$x, y, z$	用来代替某个特定的数字, $x \in \mathbb{N}$
$Cand(G)$	$G$ 中当前所有合理候选数(Candidates)组成的集合, $Cand(G) \subseteq \mathbb{N}$
$S$	$S = G_1, G_2, \dots, G_k$
$Cand(S)$	$Cand(S) = \bigcup_{G \in S} Cand(G)$
$X_k$	表示不同的逻辑种类
$D(X_k)$	逻辑 $X_k$ 的难度, 具体函数形式需要设定
$T_{X_k}$	随机变量, 完成逻辑 $X_k$ 所需要的时间
$S_n$	表示数独题的局面, 可以是未填过的状态, 也可以是填完之后的状态, 或者填写过程中的任一中间状态
$D(S_n)$	局面 $S_n$ 的难度, 具体函数形式需要设定
$T_{S_n}$	随机变量, 在局面 $S_n$ 停留的时间

## 第一章 引言

### 1.1 数独背景

数独起源于18世纪末的瑞士, 最早的雏形由欧拉提出。此后数独在美国发展、又在日本得以发扬光大, 因此它的国际通用名称是Sudoku, 也就是日文数独的意思。我们最常见的数独盘面是个九宫格, 每一宫又分为九个小格。在这81格中给出一定的已知数字和解题条件, 主要利用逻辑推理, 辅以少量的穷举法, 在空格中填入数字1-9。使1-9每个数字在每一行、每一列和每一宫中都只出现一次。

这种游戏全面考验做题者的观察能力和推理能力, 被许多人认为是训练头脑、锻炼逻辑能力的绝佳方式。其数字排列方式和解题方法却变化繁复:

2005年, Felgenhauer和Jarvis在[2]中给出数独的总个数为:

$$6,670,903,752,021,072,936,960. \quad (1.1)$$

如果不计重复(例如置换数字, 几何对称), 那么 [4]声称还剩下的数独个数为:

$$5,472,730,538 \quad (1.2)$$

关于置换数字，几何对称等，在下文的“数独命题”部分(本章第1.5小节)还会有所提及。

## 1.2 数独定义

**定义1.**  $n$ 阶数独题是指一个 $n^2 \times n^2$ 的方形格子 $S$ ，由 $n^2$ 个 $n \times n$ 的子方格拼成。在 $n^2 \times n^2$ 个格子中，一些已经预先填好了 $1 \sim n$ 的数字，其他留白。

当 $n = 3$ 时，就是我们通常见到的 $9 \times 9$ 的数独。对于其他 $n$ 的情形，仅有 $n = 2$ 或 $n = 4$ 时的迷你数独和大数独题目已在市面上出现，更高阶的数独由于难度过高，所以受玩家关注极少。

**定义2.**  $n$ 阶数独题的解是指将 $n^2 \times n^2$ 的方形格子 $S$ 全部用 $1 \sim n^2$ 填满，对于给定数值的格子，不能改变。剩余的格子必须满足：每行、每列、以及每个 $n \times n$ 的子方格均由 $1 \sim n^2$ 填满，数字不得缺少或重复。

另外还有一个附加性质，对于广义的数独不必满足。但是我们通常遇到的数独题目都被预先假定满足解的唯一性：

**定义3.** 标准 $n$ 阶数独题是指其解存在且唯一的 $n$ 阶数独题。

## 1.3 数独题求解的计算复杂度

要求解 $n$ 阶数独，或者判断一个 $n$ 阶数独的解是否唯一，是一个NP-Complete的问题。这在T.Yato和T.Seta的文章中已经被证明[5]。I.Lynce等在2006年，证明了 $n$ 阶数独题可以在多项式时间内转化为一个确定规模的适定性问题(Satisfiability Problem, SAT)[3]。然而SAT问题已经被证明是一个NP-Complete的问题，所以 $n$ 阶数独题也是一个NP-Complete的问题。

此外， $n$ 阶数独也可以被转化为精确覆盖问题(Exact Cover Problem, ECP)，和整数线性规划问题(Integral Linear Programming, ILP)。这两种转化方式得到的结论与SAT问题一致， $n$ 阶数独是一个NP-Complete的问题。

## 1.4 数独题解法简介

从现在起，我们将讨论的范围限制在3阶数独，也就是我们通常所说的数独上。对于3阶数独来说，计算机采用暴力破解的办法求解也不过是一瞬间的事情。最简单的一种机器求解办法如下，也即搜索算法：

首先按数独规则整理出每个格子中当前可以用来候选的数字，即填入这个数字不破坏数独题目所要求的定义<sup>2</sup>。然后逐一尝试每个可能的取值，直到填满所有的格子或者发现矛盾之处（即某个格子不存在任何候选值），则回溯到上一假设并删除相应的候选数值。

对于机器来说，用不同种类的回溯算法解决一个3阶数独一般只需要几个毫秒。但是对于玩家来说，回溯却是最后的选择。虽然对于某些很难的题目来说，无论人或计算机都无法回避这种办法。但是对于绝大多数的问题，这种方法却并不是解题所必须的。人们解题的目的并不是仅仅想知道答案，解题的过程才是最大的挑战与享受。

## 1.5 数独命题

通常数独命题有两大类方法。一类是基于已有的题库，对已经给出的数独问题进行可能的数字置换，镜像、旋转等来变成新的题目[4]。数独上能够进行的变换主要有以下几种：

1. 对数字1～9作置换。
2. 以三行或三列为单位置换（比如将123列的位置与456列对换，但不能将234列与567列对换）。
3. 在三行或三列内置换（比如对换1列与2列，但不能对换3列与4列）。
4. 对整体做镜像或旋转。

另一类是不基于已有题库的生成方式。其一可以通过往空白的格子里逐个填上一些数字，直到它有唯一解。其二可以从一个已经填好的数独中逐个减少已知数的个数，并保持解的唯一性，直到数字不能再减少或者难度已经达到要求。

## 1.6 题目难度评估与玩家水平评估

对数独进行难度评估是一项复杂而又艰巨的任务。对计算机而言，数独题目的难度完全可以用解题时间来衡量。但是这种衡量方式并不适用于玩家。正如前面所述，玩家求解数独时更多的是在使用逻辑推理，而不是枚举和回溯。所以评价一个数独的难度应当考虑的是推理的难度和数量，以及推理突破点的寻找的困难程度。

具体一道题目的难度也在一定程度上是因人而异的，对于推理能力相似，但是思维习惯不同的两个人来说，解决同一道题目所花的时间也是不一样的。本文希望从这方面加以突破，得出一种更深入的分析方式，来评估玩家对不同种类逻辑推理的熟练程度。这一方

面也给出了某个玩家在整体上的水平。另一方面，如果得到一些人的平均熟练程度，就可以客观地评价一道题目的难度。

## 第二章 解题过程的建模

在本章中，我们将对玩家求解数独的过程进行建模。本章将不同的逻辑方式表示为 $X_i(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 。

每种逻辑方式 $X_i$ 有一个难易程度 $D(X_i)$ ，相互之间有严格的序关系。 $D(X_1) < D(X_2)$ 即表示 $X_1$ 比 $X_2$ 容易。但是请注意，这个序关系是因人而异的，也就是说这个序关系是在某一个总体下而言的。这个总体可以是一名玩家，也可以是某一类玩家，也可以是全部玩家的集合。此外，记 $T_{X_i}$ 为完成逻辑 $X_i$ 所花费的时间，它是一个取正值的随机变量。

不同的局面被记做 $S_n$ ，从刚拿到手的数独题目，或者填到一半的数独题，或者全部解出来的数独题，都是不同的局面。如果在某个局面 $S_1$ 下，可以使用的逻辑多于并且简单于局面 $S_2$ ，那么我们说局面 $S_1$ 的难度 $D(S_1)$ 要小于 $S_2$ 的难度 $D(S_2)$ 。

### 2.1 背景与基本假设

基于玩家解题时消耗时间的数据，我们有以下几个事实：

- a. 如果 $D(X_1) < D(X_2)$ ，那么期望值 $E(T_{X_1}) < E(T_{X_2})$ 。
- b. 如果 $D(S_1) < D(S_2)$ ，那么期望值 $E(T_{S_1}) < E(T_{S_2})$ 。

考虑到同一种逻辑 $X_i$ 的应用范围只是局部的，那么在某个局面下，就可能有多个可以应用 $X_i$ 的地方。而它们可能都可以推算出某个格子的取值。

- c. 如果 $G_{mn}$ 可以由 $a$ 个 $X_1$ 中任意一个推出结果，而 $G_{pq}$ 可以由 $b$ 个 $X_1$ 中任意一个推出结果，且 $a > b$ ，那么下一步推算出 $G_{mn}$ 的概率要大于下一步推算出 $G_{pq}$ 。
- d. 推算出全部格子所需的时间如图2.1和图2.2分布[1]，且根据题目难度<sup>1</sup>的不同有不同的期望值。由图中可以看出，这两个时间大概是某种指数族的分布。

根据上述事实，我们可以假设 $T_{X_k}$ 满足指数分布，其参数为 $\lambda_{X_k}$ 。

$$T_{X_k} \sim \exp(\lambda_{X_k}) \quad (2.1)$$

而 $\lambda_{X_k}$ 的倒数则可以用作衡量逻辑 $X_k$ 难度的方式：

---

<sup>1</sup>此处的题目难度是[1]自行分类的结果，分类方法不详

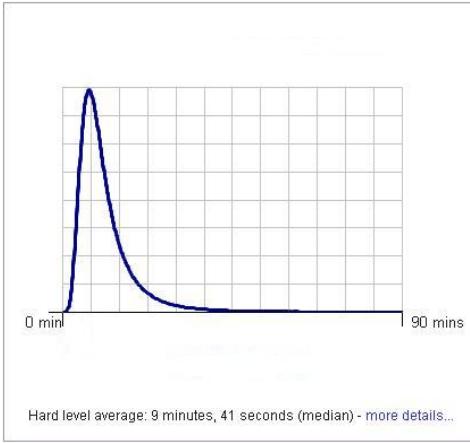


图 2.1: 困难等级题目完成所需时间

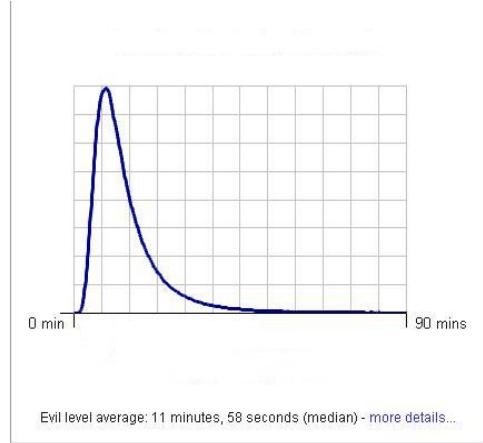


图 2.2: 特难等级题目完成所需时间

$$D(X_k) = \frac{1}{\lambda_{X_k}} = E(T_{X_k}) \quad (2.2)$$

自此，我们假定  $D$  是一个难度函数，其量纲为时间，用来表示完成某一步骤、某一逻辑或者完成某一道题目所需要的平均时间。

## 2.2 单一局面下的模型

### 2.2.1 逻辑路径 $L$

假设当前局面为  $S_0$ ，那么我们可以用程序计算出当前所有可能的逻辑方法，以及这些逻辑的推论：下一个可以填入的数字。在填入这些数字后，局面成为  $S_n$ 。

记  $L_m$  为所有可能的逻辑“路径”。不同的  $L$  可能使用同样的逻辑  $X_k$ ，例如图 2.3:  $L_1, L_5, L_6$  都使用逻辑  $X_1$ ；不同的  $L$  也可能导出同样的结果，例如  $L_1, L_2$  都能推出  $S_1$  所代表的格子的数值。

### 2.2.2 逻辑路径 $L_m$ 的先验概率 $P(L = L_m)$

假设我们知道每种逻辑  $X_k$  的难度参数  $\lambda_{X_k}$ ，那么每一步逻辑推断  $X_k$  所需要的时间为：

$$T_{X_k} \sim \text{Exp}(\lambda_{X_k}) \quad (2.3)$$

所以不同逻辑路径需要的时间  $T_{L_m}$  为：

$$T_{L_m} = T_{X(L_m)} \quad (2.4)$$

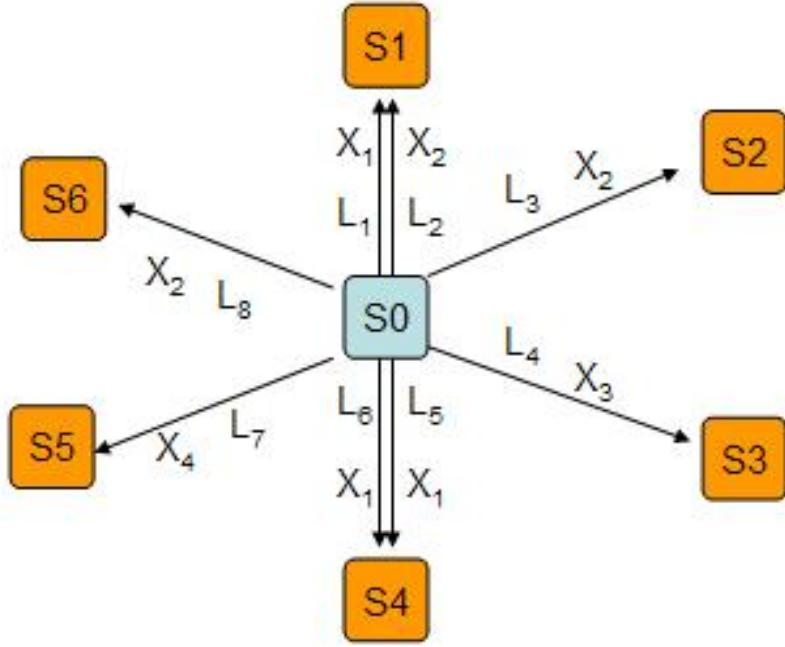


图 2.3: 单一局面

由于  $T_{L_m}$  是指数分布的随机变量(见式2.1)，那么  $L_i$  在所有  $L_m$  中最先发生的概率为：

$$P(L = L_i) = \frac{\lambda_{X(L_i)}}{\sum_{m=1}^M \lambda_{X(L_m)}} \quad (2.5)$$

### 2.2.3 逻辑路径 $L_m$ 在时间 $T = t_0$ 时的后验概率 $P(L = L_m | T = t_0)$

如果已知在当前状态停留的时间  $T = t_0$ ，那么不同逻辑路径发生的概率则会有所变化。由Bayesian公式：

$$\begin{aligned} P(L = L_i | T = t_0) &= \frac{P(L = L_i)P(T = t_0 | L = L_i)}{\sum_{m=1}^M P(L = L_m)P(T = t_0 | L = L_m)} \\ &= \frac{P(L = L_i)P(T_{L_i} = t_0)}{\sum_{m=1}^M P(L = L_m)P(T_{L_m} = t_0)} \\ &= \frac{P(L = L_i)f_{L_i}(t_0)}{\sum_{m=1}^M P(L = L_m)f_{L_k}(t_0)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中  $P(L = L_i)$  即为第2.2.2小节所计算的先验概率(式2.5)。 $f_{L_i}(t)$  是随机变量  $T_{L_i}$  的概率密度函数(Probability Density Function, PDF)。

在计算出这个后验概率之后，就可以计算在  $S = S_0$  状态下，经过时间  $T = t_0$  后，填出

格子 $S_n$ 的概率：

$$P(S = S_n | T = t_0) = \sum_{L_m \text{ leads to } S_n} P(L = L_m | T = t_0) \quad (2.7)$$

### 2.3 完整的数独解题模型

在讨论完单一局面下的解题模型之后，我们可以开始研究整体求解数独的模型。求解数独的过程就是不断处理单一的状态。每填入一个数字之后即从原先的状态转移到一个新状态，如图2.4所示

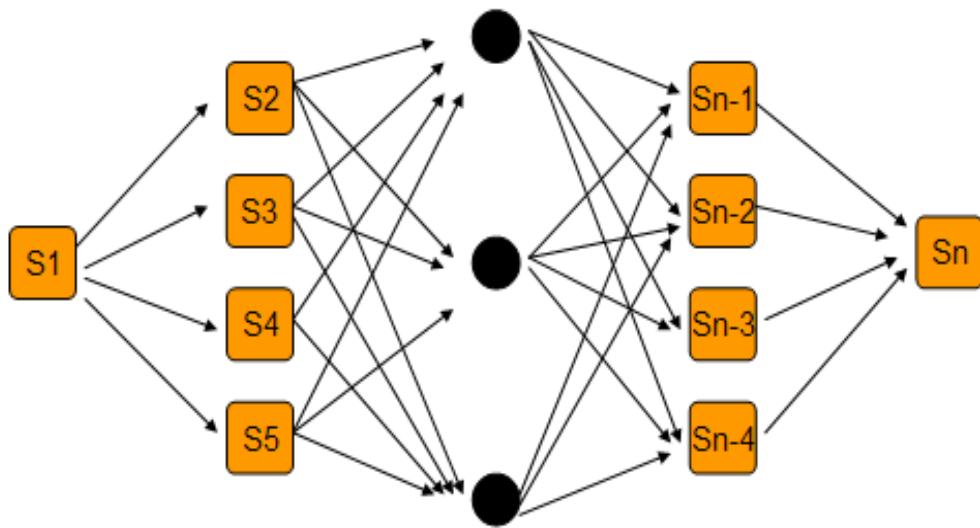


图 2.4: 完整的解题过程

但是对于一个数独题目来说，存在的状态实在太多，比如一道数独题，有50个空格，那么所有可能的状态就有 $2^{50}$ 个。要求遍历每个状态的运算进行起来将非常困难，我们采用两种方法来利用这个模型。

#### 2.3.1 单链模型

既然无法对全局进行计算，那么计算玩家求解数独的过程，只需要计算大约50个状态的详细数据，也就是图2.4中从 $S_1$ 到 $S_n$ 任意的一条链。用这种方法可以进行求解数独过程的异常检测，而且可以实时进行。

每一步填入某个格子的概率可以被计算出来。为了比较的需要，这个概率的绝对数值没有太大的意义，考虑它的似然比对于我们的检验更加方便。详细过程可以参见3.1。

### 2.3.2 近似模型

无法承受过于庞大的运算，可以在有条件近似的前提下大幅削减计算量。比如在评估题目难度的时候，可以用近似的办法计算出题目难度的一个下界。

题目的难度应该为每条链难度 $D(Chain)$ 的加权平均值：

$$D(S_0) = \sum_{Chain} P(Chain)D(Chain) \quad (2.8)$$

但是每条链必然包含每个空格一次，所以难度还有另外一种求和方法：

$$\begin{aligned} D(S_0) &= \sum_G D(G) \\ &= \sum_G \left( \sum_k P(X_k|G)D(X_k) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

于是可以将最简单的逻辑 $X_1$ <sup>2</sup>能推断出来的空格 $G$ 直接先填妥，其他的部分再用其他逻辑方法遍历来确定。如果在 $S_0$ 状态能用 $X_1$ 填出 $n$ 个空格，并设填好后的中间状态为 $M$ ，其难度为 $D(S_M)$

$$D(S_0) \geq nD(X_1) + D(S_M) \quad (2.10)$$

再重复对 $S_M$ 状态做类似分析，即可估算出数独题目难度的一个下界。具体的算例请参见第3.3节。

### 2.3.3 参数 $\lambda_{X_k}$

第2.2节我们讨论了在已知参数 $\lambda_{X_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots$ )以及停留时间 $T = t_0$ 的情况下如何计算填入每一个格子的先验概率(式2.5)和后验概率(式2.6)。下面我们将要推导如何根据已有样本来确定这组衡量了逻辑难度的参数 $\lambda_{X_k}$ 。

我们能够利用的每个样本是这样的，给定当前状态 $S_j$ ，同时知道玩家下一步填写的格子 $G_j$ 和所用时间 $t_j$ 。首先我们可以分析出 $G_j$ 能用到的逻辑的种类和个数。例如图2.3中，填出 $S_1$ 格子可以用1个 $X_1$ 或1个 $X_2$ 逻辑推断出来。

为了计算方便，我们将逻辑的种类限定为两种： $X_A$ 和 $X_B$ 。它们需要的时间为 $T_A$ 和 $T_B$ ，分别服从参数为 $\lambda_A$ 和 $\lambda_B$ 的指数分布。对于逻辑种类更多的情形，我们一会将会看到其并不影响最终解的形式。

在 $S_j$ 状态，填出 $G_j$ 所需要的时间为 $T_j$ ，可能的逻辑种类为 $a_j$ 种 $X_A$ 和 $b_j$ 种 $X_B$ 。那么我们希望选取最好的参数 $\lambda_A$ 和 $\lambda_B$ 来使得 $\prod_j f_j(t_j)$ 取到极大值。

$$T_j \sim \exp(\lambda_j) \quad (2.11)$$

---

<sup>2</sup>此处最简单的逻辑可能因样本来自的群体而不同

其中：

$$\lambda_j = \frac{a_j \lambda_A + b_j \lambda_B}{a_j + b_j} \quad (2.12)$$

同时我们有：

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_A} = \frac{a_j}{a_j + b_j} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_B} = \frac{b_j}{a_j + b_j} \quad (2.14)$$

下面我们计算概率密度函数  $f_j(t_j)$  及其对  $\lambda_j$  的偏导数：

$$f_j(t_j) = \lambda_j e^{-\lambda_j t_j} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial f_j(t_j)}{\partial \lambda_j} = (1 - \lambda_j t_j) e^{-\lambda_j t_j} \quad (2.16)$$

如此即可计算  $f_j(t_j)$  对  $\lambda_A$  和  $\lambda_B$  的偏导数：

$$\frac{\partial f_j(t_j)}{\partial \lambda_A} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_A} \frac{\partial f_j(t_j)}{\partial \lambda_j} = \frac{a_j}{a_j + b_j} (1 - \lambda_j t_j) e^{-\lambda_j t_j} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f_j(t_j)}{\partial \lambda_B} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_B} \frac{\partial f_j(t_j)}{\partial \lambda_j} = \frac{b_j}{a_j + b_j} (1 - \lambda_j t_j) e^{-\lambda_j t_j} \quad (2.18)$$

需要假设  $f_j(t_j) \neq 0$  对于任意的  $j$ 。那么  $\max \prod_j f_j(t_j)$  就等价于：

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_A} \prod_j f_j(t_j) = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_B} \prod_j f_j(t_j) = 0 \quad (2.20)$$

由求导的链法则，在两边同时除以  $\prod_j f_j(t_j)$ ，就得到：

$$\sum_j \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda_A} f_j(t_j)}{f_j(t_j)} = 0 \quad (2.21)$$

$$\sum_j \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda_B} f_j(t_j)}{f_j(t_j)} = 0 \quad (2.22)$$

这等价于

$$\sum_j \frac{a_j}{a_j + b_j} \left( \frac{1}{\lambda_j} - t_j \right) = 0 \quad (2.23)$$

$$\sum_j \frac{b_j}{a_j + b_j} \left( \frac{1}{\lambda_j} - t_j \right) = 0 \quad (2.24)$$

这个方程的形式无关于逻辑的种类是 $A, B$ , 还是 $X_1, \dots, X_k$ 。计入多少种逻辑就可以得到多少个未知数和方程。用数值解法求解这个方程组就可以得到参数 $\lambda_A$ 和 $\lambda_B$ 的最优估计。

具体的计算样例请参见第3.2节。

## 第三章 模型的应用

### 3.1 解题过程的异常检验

这个模型最简单的应用就是针对玩家解题过程的异常检测。玩家在解数独题过程中，通常都是采用符合逻辑的方式。那么只要鉴定出玩家的每一步是否有背后的逻辑作支撑，就可以从某种程度上检测出异常。

玩家填写每一步所消耗的时间也是一个重要的因素。如果玩家用较短的时间填写了一个需要逻辑难度较高的格子，或者用较长的时间填写了一个非常容易就能推算出的格子，在某种程度上来说都是异常的表现。

#### 3.1.1 单步过程的异常检验

如果要分析完整的路线是否异常，首先需要分析单步的过程是否存在异常。我们任意选取一个数独题，如图3.1所示。我们直接分析第一步在什么时间，填在何处最为合理。

首先我们将计算机搜索的逻辑范围限定在Singles<sup>1</sup>，即不考虑其他可能的逻辑方式。并且假定我们已知参数：

$$\lambda_A = \frac{1}{15} \text{s}^{-1} \quad (3.1)$$

$$\lambda_B = \frac{1}{10} \text{s}^{-1} \quad (3.2)$$

我们用程序分析图3.1中的这个局面，得到了所有可以使用的逻辑，如下表所示：

---

<sup>1</sup>编者注：Singles及下文的Hidden Single, Naked Single, Hidden Pair为原文第二章“数独逻辑解法”中介绍的逻辑解法

Number	Row	Column	Logic Type	Remark
1	2	6	Hidden Single	R
2	2	6	Hidden Single	B
3	3	4	Hidden Single	C
4	3	4	Hidden Single	B
5	4	6	Naked Single	
6	8	4	Naked Single	

表中的每一行代表了一条逻辑路径。例如第一行就表示：在R2C6格，有一个候选数在该行是唯一候选数。

现在我们一共得到了6条逻辑路径 $L_1, \dots, L_6$ 。如果未知时间 $T$ ，那么我们可以计算 $L_i$ 的先验概率 $P(L_i) = \frac{\lambda_{L_i}}{\sum_{i=1}^6 \lambda_{L_i}}$ ：

$$P(L_i) = 0.1875, i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3)$$

$$P(L_i) = 0.1250, i = 5, 6. \quad (3.4)$$

假设已知时间 $T = t_0$ ，那么我们就可以计算 $L_i$ 的后验概率。例如 $t_0 = 10\text{s}$ ，我们得到如下结果：

$$P(L_i|T = 10\text{s}) = 0.1908, i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.5)$$

$$P(L_i|T = 10\text{s}) = 0.1184, i = 5, 6. \quad (3.6)$$

可以据此计算出填出每个格子的概率：

$$P(R2C6|T = 10\text{s}) = P(L_1|T = 10\text{s}) + P(L_2|T = 10\text{s}) \quad (3.7)$$

$$P(R3C4|T = 10\text{s}) = P(L_3|T = 10\text{s}) + P(L_4|T = 10\text{s}) \quad (3.8)$$

$$P(R4C6|T = 10\text{s}) = P(L_5|T = 10\text{s}) \quad (3.9)$$

$$P(R8C4|T = 10\text{s}) = P(L_6|T = 10\text{s}) \quad (3.10)$$

数值上：

$$P(R2C6|T = 10\text{s}) = P(R3C4|T = 10\text{s}) = 0.3816 \quad (3.11)$$

$$P(R4C6|T = 10\text{s}) = P(R8C4|T = 10\text{s}) = 0.1184 \quad (3.12)$$

绘制成图的结果参见图3.2。

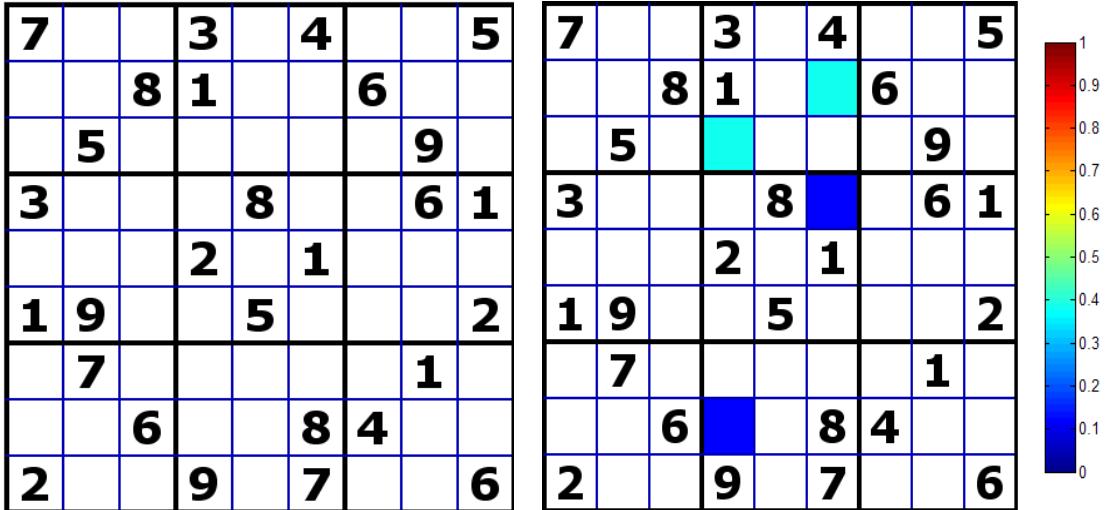


图 3.1: 例题1

图 3.2: 填出每个格子的概率  $t_0 = 10\text{s}$

类似地, 我们还可以计算出任意时间下, 填出这几个格子的概率。以  $T = 30\text{s}$  和  $T = 120\text{s}$  为例:

$$P(R2C6|T = 30\text{s}) = P(R3C4|T = 30\text{s}) = 0.3117 \quad (3.13)$$

$$P(R4C6|T = 30\text{s}) = P(R8C4|T = 30\text{s}) = 0.1883 \quad (3.14)$$

$$P(R2C6|T = 120\text{s}) = P(R3C4|T = 120\text{s}) = 0.0381 \quad (3.15)$$

$$P(R4C6|T = 120\text{s}) = P(R8C4|T = 120\text{s}) = 0.4619 \quad (3.16)$$

绘制成图的结果参见图3.3和3.4

### 3.1.2 完整过程的异常检验

我们选取一个难度为简单的数独题, 如图3.5所示。请一位玩家现场做题, 我们用程序记录下玩家每一次正确填入的格子, 和所花掉的时间。对于那些错误的填入, 不计入考虑。同时将计算机搜索的逻辑范围限定在Singles。

如此我们得到如附录A所示的一个记录文件。

对于每个单步, 我们计算第2.2.3节所分析的后验概率  $P(L = L_i|T = t_0)$ , 并计算在  $t_0$  时刻填出每个格子的概率:  $P(S = S_n|T = t_0)$ , 和填出每个格子的似然比(Likelihood Ratio)  $LR(S = S_n|T = t_0)$ 。其中:

$$LR(S = S_n|T = t_0) = \frac{P(S = S_n|T = t_0)}{\max_n P(S = S_n|T = t_0)} \quad (3.17)$$

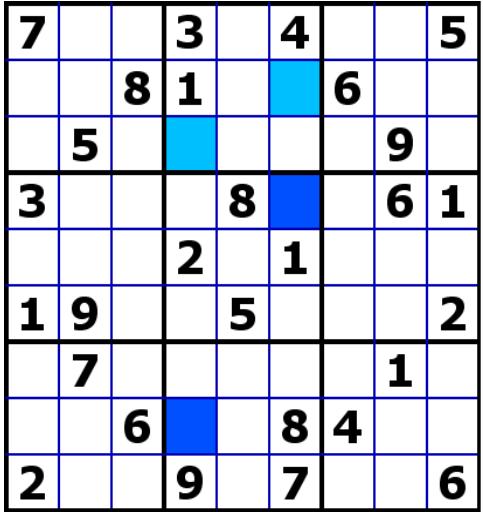


图 3.3: 填出每个格子的概率  $t_0 = 30\text{s}$

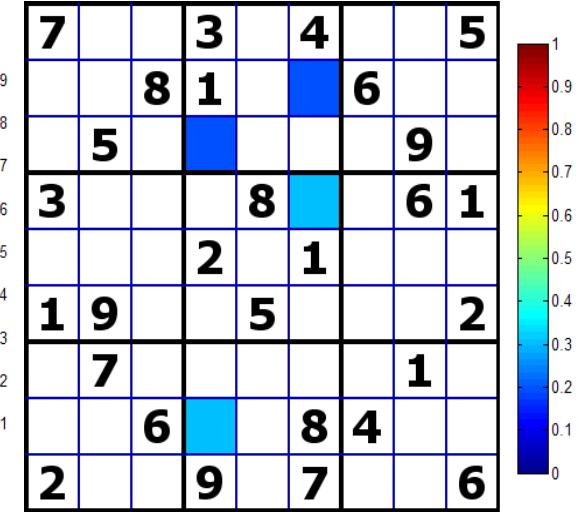


图 3.4: 填出每个格子的概率  $t_0 = 120\text{s}$

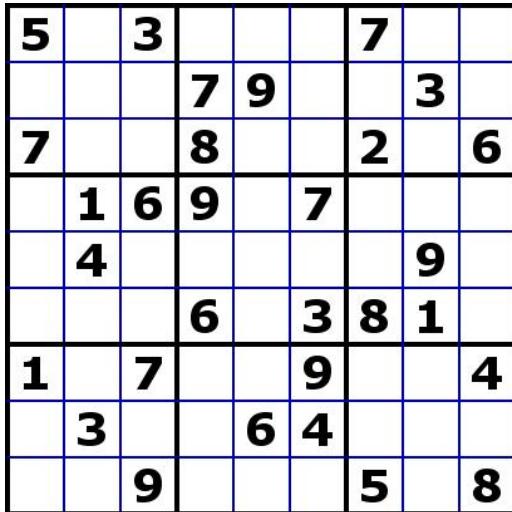


图 3.5: 例题2

以第一步为例，得到如图3.6和图3.7所示的结果：

核对附录A中的记录，第一步填入的格子为R3C5，于是第一步的似然比为：

$$LR_1 = 1 \quad (3.18)$$

类似地，我们可以求出每一步的似然比  $LR_n$ ，于是我们可以绘制出  $LR_n$  关于  $n$  的图像，如图3.8所示。几乎全部的步骤都有较大的似然比，所以这是一个相对正常的解题过程。在第42步出现了  $LR_{42} = 0$ ，这种情况出现只有两个原因，一是由于玩家采用了没有被电脑计

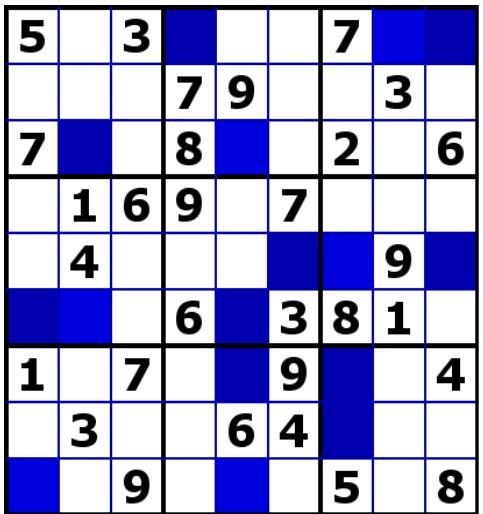


图 3.6: 填出每个格子的概率

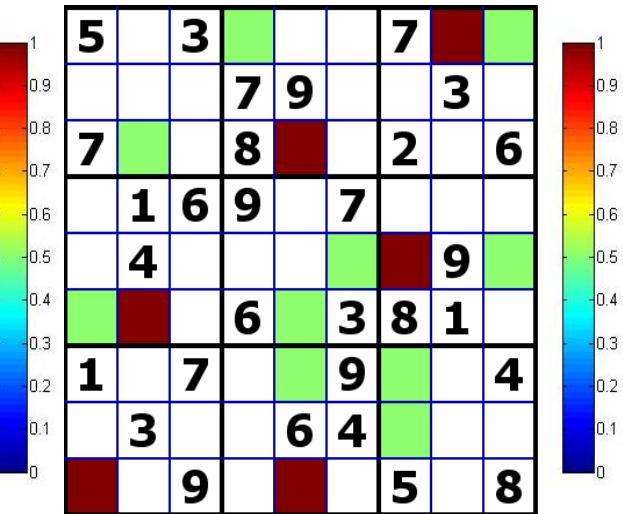


图 3.7: 填出每个格子的似然比

入搜索范围的逻辑方法，另外一个就是确实发生了异常，例如玩家偷看答案等。

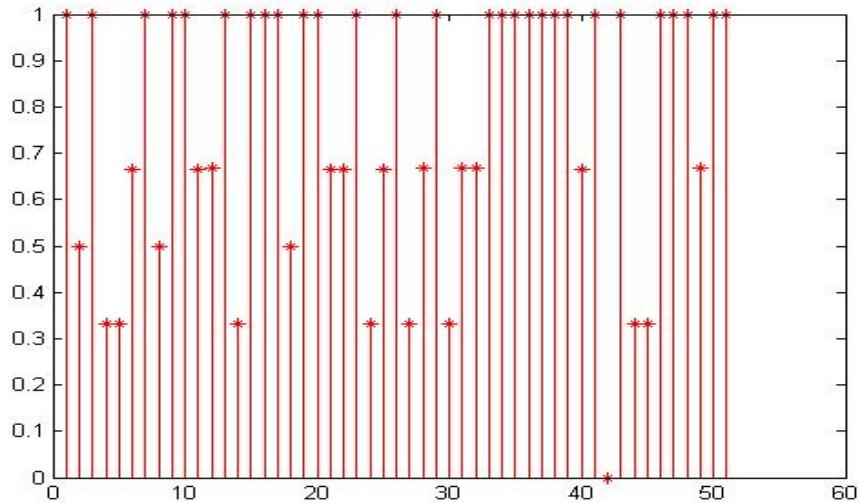


图 3.8: 正常过程对应的LR图

对于非正常的过程，我们也选取了两个样本，一个是附录A记录文件打乱次序，另外一个是请人隔一定的时间按照答案往上随机抄写一个数字。两种方法得到的似然比结果如图3.9和图3.10所示。

由图3.9和图3.10可以看出，在解题的早期，出现了较多不合逻辑的行为。因此很容易

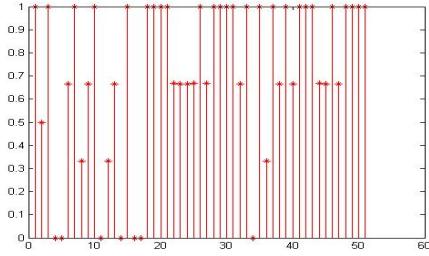


图 3.9: 打乱次序对应的LR图

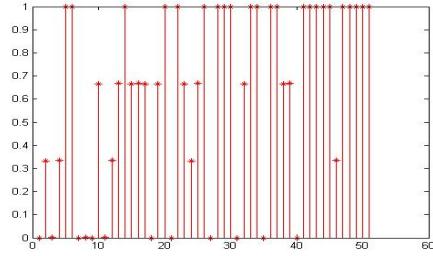


图 3.10: 抄写答案对应的LR图

判断出这两个都是异常的进度。

这种方法可以在一定程度上检测出解题过程的异常，但是仍然有它的缺陷，因为许多能通过这个检验的进程其实也可能存在不同程度的异常。例如图3.10中，对于后期的步骤，无法检测出这样的异常，只要抄写答案的次序合理，也会被这种检验方式判定为正常过程。

### 3.2 逻辑难度评估

由第2.3.3节提供的方法，我们可以计算出每种逻辑对于一个玩家或者一类玩家的难易程度。以下我们仍然将逻辑范围限定在Singles，利用与附录A中同时分析获得的数据来估算Naked Single和Hidden Single两种逻辑所需要的时间。

需要注意的是，评估逻辑水平的数据不一定要来自同一道数独题，也不一定来自同一名玩家。如果所有数据来自同一名玩家的解题过程，那么这个分析得到的结果就是各种逻辑对该玩家而言的难易程度。不同玩家的数据可能得到完全不同的结果。而如果数据来自全体玩家，那么这个分析得到的结果就是针对全体玩家而言。某种程度上说，这个结果应当就是这种逻辑的真实难度。

我们以两种逻辑对应的参数 $\lambda_A$ 和 $\lambda_B$ 为变量，代入方程2.23 以及2.24。得到如下结果：

$$r_1(\lambda_A, \lambda_B) = \sum_j \frac{a_j}{a_j + b_j} \left( \frac{1}{\lambda_j} - t_j \right) \quad (3.19)$$

$$r_2(\lambda_A, \lambda_B) = \sum_j \frac{b_j}{a_j + b_j} \left( \frac{1}{\lambda_j} - t_j \right) \quad (3.20)$$

式子中， $\lambda_j$ 的定义为：

$$\lambda_j = \frac{a_j \lambda_A + b_j \lambda_B}{a_j + b_j} \quad (3.21)$$

为了使得 $r_1(\lambda_A, \lambda_B)$ 和 $r_2(\lambda_A, \lambda_B)$ 更接近0，我们设：

$$r(\lambda_A, \lambda_B) = r_1^2(\lambda_A, \lambda_B) + r_2^2(\lambda_A, \lambda_B) \quad (3.22)$$

并取合适的范围绘制图像，求 $r(\lambda_A, \lambda_B)$ 的极小值点。我们选取合适的范围，按次序计算三次，所得图像见图3.11，3.12和3.13。

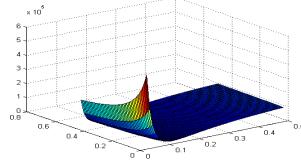


图 3.11: 第一次网格抽样

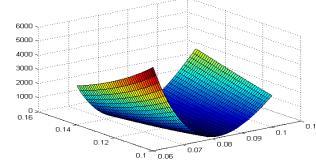


图 3.12: 第二次网格抽样

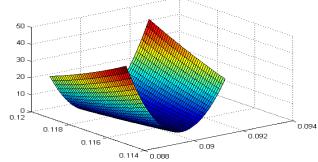


图 3.13: 第三次网格抽样

第一次抽样的范围我们依据数据定为0.04-0.50s，步长设置为0.01s。而三次抽样的得到的最优解和最优值分别为：

第一次	第二次	第三次
$\lambda_A = 0.08$	$\lambda_A = 0.090$	$\lambda_A = 0.0904$
$\lambda_B = 0.12$	$\lambda_B = 0.117$	$\lambda_B = 0.1169$
$r = 29.0853$	$r = 0.0553$	$r = 0.0056$

取最后一次得到的数值作为近似解。我们可以计算出Naked Single( $A$ )和Naked Single( $B$ )相对该玩家而言的难度：

$$D(A) = E(A) = \frac{1}{\lambda_A} = 11.0619\text{s} \quad (3.23)$$

$$D(B) = E(B) = \frac{1}{\lambda_B} = 8.5543\text{s} \quad (3.24)$$

对于多于2种逻辑的情况，仍然可以使用近似数值求解的办法，找到 $r(\lambda_{X_1}, \dots, \lambda_{X_k})$ 的极小值点。不过无法像本例一样绘制出曲面的三维图像。

### 3.3 题目难度评估

作者编写了一个小程序，用来分析最简单的解题路线需要多少种、什么类型的逻辑方式。同时考虑上述3.2节的分析，再进行题目难度评估就并不算困难了。我们仍然以图3.5中的例题来举例。经过分析，这个题目可以全部用Hidden Single这种逻辑方式按一定先后顺序完成。因此，这道题目难度的下界就是(式2.10)：

$$D \geq 51D(\text{Hidden Single}) = 476\text{s} \quad (3.25)$$

对于其他情况，问题并没有如此简单。例如图3.14中所示的数独题目，其难度的下界是：

$$D \geq 50D(\text{Hidden Single}) + D(\text{Hidden Pair}) \quad (3.26)$$

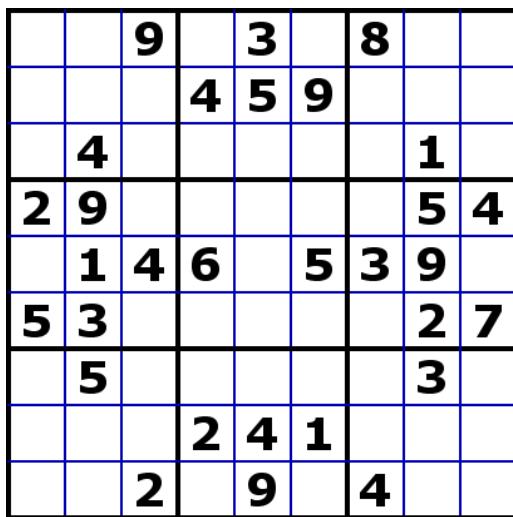


图 3.14: 例题3

## 第四章 结论

在这篇文章中，我们以数独这种数字游戏为背景，对玩家解题的过程进行了建模。按照本文提出的模型，我们可以达到以下几个目的：

- a. 分析玩家填写过程，侦测异常过程。
- b. 依据玩家填写过程的数据，评估不同逻辑的难度。
- c. 能够因人而异的评估题目的难度。

其中a和b在之前的研究中没有被成体系地建立过，是本论文的创新之处。同时本论文还有许多未尽与不足之处，有待进一步研究与改进：

在侦测异常过程时，我们提出的方法把玩家填写所消耗的时间作为已知量来分析。然而每一步需要的时间本身就是可以作为异常检测的根据。所以可以考虑将时间因素一并加以分析。

在评估题目难度的过程中，由于硬件条件的限制无法综合考虑到所有可能的路线，所以这套近似的评估体系还并不算成熟。在使用效果上也不如其他分类方法，例如直接按某一道题目的平均解题时间来分类，或者许多现有的数独题目生成器，依据特有的生成方式可以自动产生特定难度的题目。如果第3.3节中所使用的难度评估方式可以进一步改进，得到的结果应该能够更加理想。

本文所用全部程序与数据可以向作者来函索取: jswangzhuo@gmail.com

## 附录 A 记录文件LOG FILE

请注意, 此表中的行数和列数为0, 1, ..., 8, 分别对应正文中的1, 2, ..., 9。

Number	Row	Column	Time spent(sec)	Number	Row	Column	Time spent(sec)
1	2	4	5.883000	27	8	7	19.924000
2	6	6	9.765000	28	6	7	10.269000
3	8	3	9.062000	29	8	1	6.390000
4	0	3	11.195000	30	2	5	7.865000
5	5	4	18.620000	31	1	8	3.976000
6	8	0	8.249000	32	2	7	5.469000
7	4	6	17.978000	33	3	6	5.382000
8	1	0	8.398000	34	1	2	5.998000
9	0	5	6.864000	35	1	1	3.585000
10	5	1	16.413000	36	6	4	6.943000
11	4	8	3.931000	37	4	5	11.367000
12	8	4	6.380000	38	3	7	18.322000
13	7	7	3.458000	39	3	8	14.039000
14	0	8	17.711000	40	5	8	13.763000
15	7	6	4.599000	41	4	0	24.749000
16	2	1	13.131000	42	3	4	21.632000
17	5	0	7.100000	43	3	0	3.050000
18	7	8	13.804000	44	7	0	4.575000
19	1	6	3.237000	45	6	1	8.508000
20	2	2	4.618000	46	7	2	3.698000
21	0	4	3.841000	47	6	3	7.979000
22	8	5	6.674000	48	7	3	6.616000
23	4	3	6.808000	49	4	4	5.027000
24	1	5	10.387000	50	4	2	5.475000
25	0	1	1.991000	51	5	2	5.119000
26	0	7	3.660000				

## 参考文献

- [1] <http://www.websudoku.com>, 2009.2.14.
- [2] B. Felgenhauer and F. Jarvis. Mathematics of sudoku i. *Mathematical Spectrum*, 39(1):15–22, 2006.
- [3] I. Lynce and J. Ouaknine. Sudoku as a SAT problem. In *9th Internatioanl Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics*, 2006.
- [4] E.D. Russell and F. Jarvis. Mathematics of sudoku ii. *Mathematical Spectrum*, 39(2):54–58, 2007.
- [5] T. Yato and T. Seta. Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles. *IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences*, 86(5):1052–1060, 2003.

# 阿基米德的数学及其现代解法

张程业\*

指导教师：肖杰教授

## 摘要

在提出的阿基米德公理及诸多定律中，阿基米德采用了传统的“比例方法”、“穷竭法”和“归谬法”进行计算论证，这些方法在某些方面逻辑性不够强，原理也是比较初级的。

本论文首先综述了阿基米德定律中的圆周率估算、抛物线弓形面积、螺线所围的面积等几个命题。通过对对比分析，总结出传统和现代科学手段在论证阿基米德定律方法的差异，进而有效证明用现代知识阐述传统定律的有效性和可行性。

**关键词：**阿基米德；数学史；分析

## §1 引言

### §1.1 阿基米德的数学成就

阿基米德 (Archimedes, 约公元前 287 ~ 212) 是古希腊物理学家、数学家，静力学和流体静力学的奠基人。

阿基米德的数学成就在于他既继承和发扬了古希腊研究抽象数学的科学方法，又使数学的研究和实际应用联系起来。阿基米德确定了抛物线弓形、螺线、圆形的面积以及椭球体、抛物面体等各种复杂几何体的表面积和体积的计算方法。在推演这些公式的过程中，他创立了“穷竭法”，即我们今天所说的逐步近似求极限的方法，因而被公认为微积分计算的鼻祖。他用圆内接多边形与外切多边形边数增多、面积逐渐接近的方法，比较精确地求出了圆周率。面对古希腊繁冗的数字表示方式，阿基米德还首创了记大数的方法，突破了当时用希腊字母计数不能超过一万的局限，并用它解决了许多数学难题。

---

\*基数 53

作为数学家，他写出了《论球和圆柱》、《圆的度量》、《抛物线求积》、《论螺线》、《论锥体和球体》、《沙的计算》等数学著作；作为力学家，他著有《论图形的平衡》、《论浮体》、《论杠杆》、《原理》等力学著作。

## §1.2 阿基米德的研究方法

### §1.2.1 比例的使用

无论在陈述命题或列写证明时，阿基米德的著作都存在应用比例的案例。事实上，古希腊的数学主要包含两种方法，一种是运用面积，另一种是运用比例。阿基米德主要是采用比例的方法进行定律推论和研究。在这里，阿基米德把一个复杂的数学关系表达为比例关系，这与当时其他数学家的研究方法大有不同。

### §1.2.2 穷竭法

古希腊数学家阿基米德发明的一种求曲边形面积的方法，使用分块长方形逼近原曲边形的面积。

用穷竭法计算曲边形的面积时，对不同的曲边形，采用不同的直边形去逼近。并且计算的过程中采用了特殊的技巧，因而不具有一般性，无法向一般的曲边形推广。

### §1.2.3 归谬法

“归谬法”即是反证法的一种特殊情形，首先假定推测答案的数值，然后假设真正的答案大于或小于该数，如果可以证明它们都会产生矛盾，便证明了该数值是答案。

## §1.3 阿基米德研究方法的局限性

1. 在没有完备的数学定义的前提下，一切关于极限的应用都是不能 100% 站住脚的。在阿基米德的年代，不可能有极限的准确定义。因此，从现代数学的角度来讲，阿基米德的证明缺少极限存在的证明。
2. 阿基米德的计算过程虽然只涉及了加减乘除的计算，但是其计算过程十分复杂。就拥有强大计算工具的现代人来讲，这些数字上的计算都是无味的。因此，很难对其思路进行分析和推广。

这些局限性都会在下面的正文中得到体现。

## §2 阿基米德的几个定理的综述

### §2.1 圆周率问题

#### §2.1.1 背景

阿基米德用正 96 边形割圆术得出圆周率介乎  $3\frac{1}{7}$  与  $3\frac{10}{71}$  之间。

公元 263 年，中国数学家刘徽用“割圆术”计算圆周率，他先从圆内接正六边形，逐次分割为 12、24、48、96、192 边形。他说“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”（分割愈精细，误差愈少。分割之后再分割，直到不能再分割为止，它就会与圆周完全重叠，就不会有误差了），其中有求极限的思想。刘徽给出  $\pi = 3.141024$  的圆周率近似值，并以  $\frac{157}{50} = 3.14$ （徽率）为其分数近似值。

公元 466 年，中国数学家祖冲之将圆周率算到小数点后 7 位的精确度，这一纪录在世界上保持了一千年之久。同时，祖冲之给出了  $\frac{355}{113}$ （密率）这个很好的分数近似值，它是分母小于 10,000 的简单分数中最接近  $\pi$  的。比它更接近  $\pi$  的下一个有理数是  $\frac{104348}{33215}$ 。

#### §2.1.2 阿基米德的证明方法

首先介绍一个命题，这个命题与  $\pi$  的计算并没有联系，但是其中很典型的用到了归谬法。

**命题2.1.** 任何一个圆面积等于一个直角三角形面积，它的夹直角的一边等于圆的半径，而另一边等于圆的边长。

这个命题等价于圆的面积  $S = \frac{1}{2}rC$ 。若已知  $C = 2\pi r$ ，则可直接导出  $S = \pi r^2$ 。

本命题与  $\pi$  的度量关系不大，但体现了阿基米德归谬法的思想，又在阿基米德原著中与  $\pi$  的计算相邻，故在此提及。

*Proof.* 设  $ABCD$  是给定的圆， $K$  是所述直角三角形。

那么，如果圆的面积不等于  $K$ ，则必大于  $K$  或小于  $K$ 。

##### 1. 如果圆的面积大于 $K$

设一个内接正方形  $ABCD$ ，平分弧  $AB, BC, CD, DA$ 。如果需要，继续等分，使得内接多边形边上的弓形面积之和小于圆面积与  $K$  的差。

这样多边形的面积大于  $K$ 。

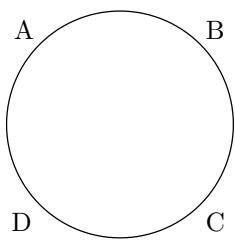


图 1 ABCD

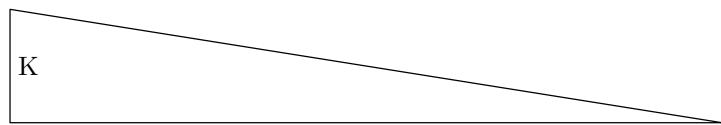


图 2 K

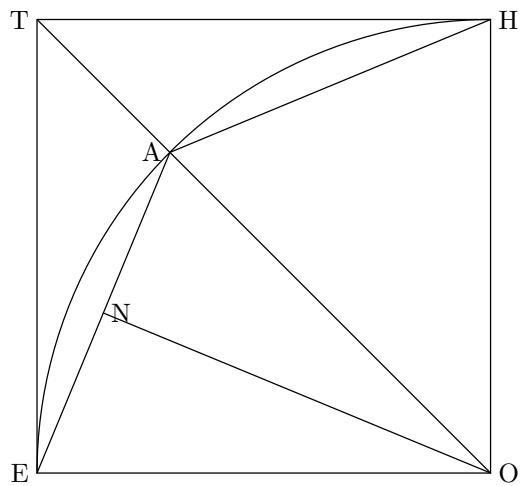


图 3 假设圆的面积大于 K，则可在圆内割出多边形，使之的面积大于 K

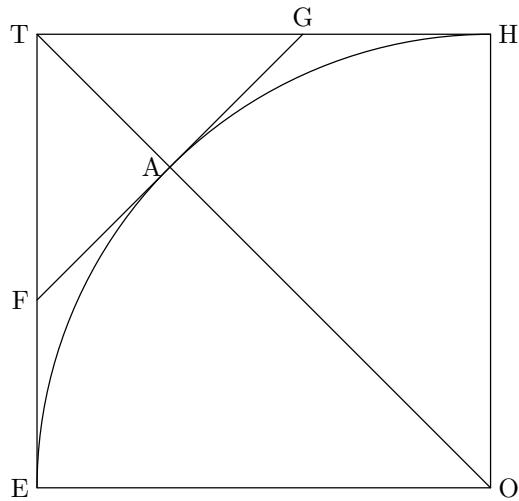


图 4 假设圆的面积小于  $K$ , 则可在圆外切出多边形, 使之面积小于  $K$

设  $AE$  是它任何一边, 由圆心  $O$  作  $ON$  垂直于  $AE$ , 则  $ON$  小于圆的半径, 且多边形的周长小于圆的周长。

所以多边形的面积小于  $K$ , 矛盾。

## 2. 如果圆的面积小于 $K$

作外切正方形, 如图所示, 则

$$TG > GA = GH$$

故三角形  $FTG$  的面积大于  $TEAH$  的一半。

如此, 继续这种作法, 最终将作出一个外切多边形, 在它与圆之间的空间之和小于  $K$  与圆面积之差。

这样一来, 多边形的面积小于  $K$ 。

但是, 由圆心  $O$  作多边形任意一边的直线, 它等于圆的半径, 这时多边形的周长大于圆的周长。于是得到的多边形的面积大于  $K$ 。矛盾。

因此, 圆面积既不大于又不小于  $K$ , 它就等于  $K$ 。  $\square$

可以看到, 阿基米德并没有含糊不清说“当分割足够小时, 内接多边形与圆就会足够接近”。而是用到了“它们的面积差小于任意给定的正数”。这里初步地用到了  $\varepsilon - \delta$  语言, 使得证明过程充满逻辑性。鉴于很多极限问题在趋近于零时比较好解决, 阿基米德的方法充满了前瞻性。

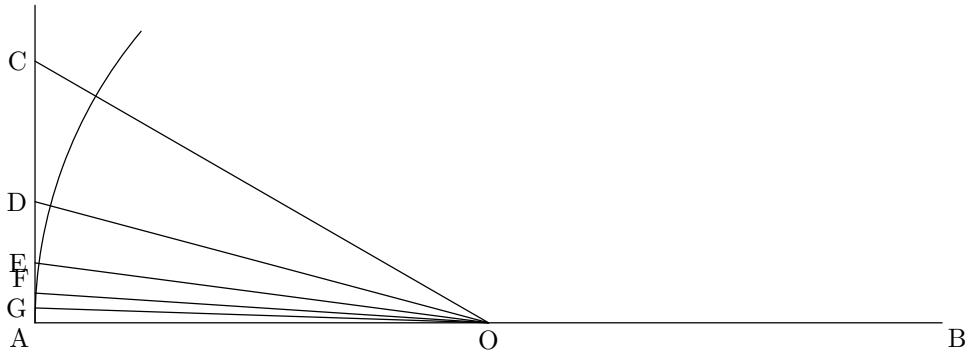


图 5  $\pi$  的上界的计算

**定理2.1.** 任何一个圆周与它直径的比小于  $3\frac{1}{7}$  而大于  $3\frac{10}{71}$ .

*Proof.* 1. 设  $AB$  是任意圆的直径,  $O$  是中心,  $AC$  是过  $A$  的切线; 设角  $AOC$  是直角的三分之一。

则  $OA : AC = [\sqrt{3} : 1] > 265 : 153$  又  $OC : CA = 306 : 153$

第一, 设  $OD$  二等分角  $AOC$  且交  $AC$  于  $D$ .

现在  $CO : OA = CD : DA$  因此  $(CO+OA) : OA = CA : DA$  或者  $(CO+OA) : CA = OA : AD$ .

所以  $OA : AD > 571 : 153$

故  $OD^2 : AD^2 > 349450 : 23409$ , 因此  $OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153$ .

第二, 设  $OE$  二等分角  $AOD$ , 交  $AD$  于  $E$ .

则  $DO : OA = DE : EA$ ,  $(DO + OA) : DA = OA : AE$ , 所以  $OA : AE > 1162\frac{1}{8} : 153$ .

由此  $OE^2 : EA^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409$ ,  $OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153$ .

第三, 设  $OF$  二等分角  $AOE$ , 交  $AE$  于  $F$ .

所以  $OA : AF > 2234\frac{1}{4} : 153$ .

由此  $OE^2 : EA^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409$ ,  $OF : FA > 2239\frac{1}{4} : 153$ .

第四, 设  $OG$  二等分角  $AOF$ , 交  $AF$  于  $G$ .

所以  $OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$ .

此时  $AOG$  是直角的  $\frac{1}{48}$ . 所以

$$AB : 96\text{边形的周长} > 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96.$$

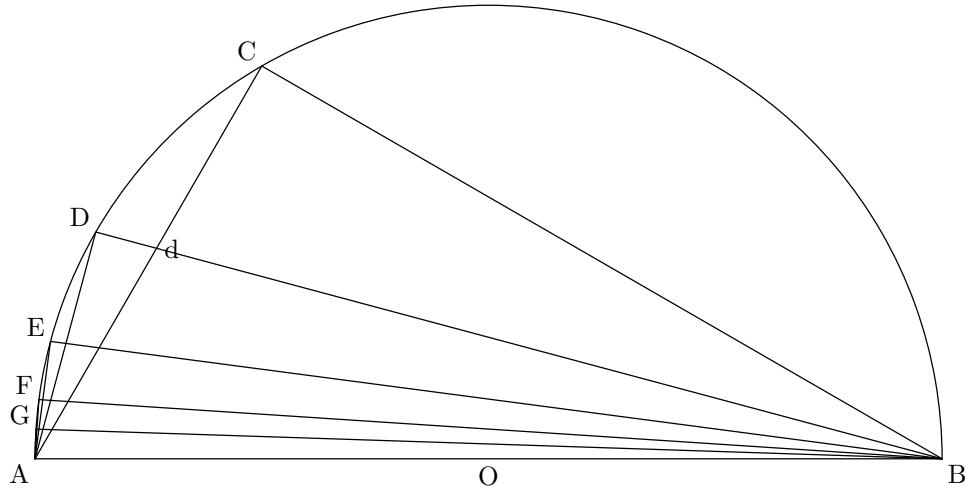


图 6  $\pi$  的下界的计算

但是

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7},$$

所以圆的周长更小于  $3\frac{1}{7}$  乘以 AB.

2. 其次，设 AB 是圆的直径，且设 AC 交圆于 C，角 CAB 为直角的三分之一。

则

$$AC : CB < 1351 : 780.$$

第一，设 AD 二等分角 BAC 且交 BC 于 d, 交圆于 D, 可得 ABD, ACd, Bdd 是相似的。

所以

$$AD : DB = BD : Dd = AC : Cd = AB : Bd = (AB + AC) : (Bd + Cd) = (AB + AC) : BC.$$

所以  $AD : DB < 2911 : 780$ , 这样

$$AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780.$$

依次类推，得到

$$\text{内接 96 边形的周长} : AB > 6336 : 2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}.$$

□

值得注意的是，阿基米德在自己的论文中提到，关于两条切线及中间夹的圆弧的长度比较，他无法做到完全的证明，因此以假设提出。可见阿基米德在两千多年前就已经初步地考虑到长度定义及收敛的问题。但明显的，历史使他无法对这个问题做出合适的定义和解答。

另一方面，可以看到，阿基米德的证明中用到了相当精确的开方表。在阿基米德的原著中没有明确提及这些数据从何而来，甚至没有给出计算过程。或许是阿基米德认为这种程度的计算水平已经属于常识。

## §2.2 关于螺线

### §2.2.1 螺线介绍

1. 如果一条直线在平面内绕一个固定的端点匀速旋转，而同时有一个点从固定的端点出发，沿着直线匀速移动，那么该点在平面上将描出一条螺线。
2. 固定的端点称为原点，直线开始旋转所处的位置是起始线。

### §2.2.2 螺线的面积

**定理2.2.** 设  $BC$  为螺线的任何一圈上沿“正向”度量的一段弧，其长度不超过这个整圈，且以  $O$  为圆心， $OC$  为半径的圆与  $OB$  交于  $B'$ ，则

$$OB \text{ 与 } OC \text{ 间螺线所围的面积} : \text{扇形 } OB'C = (OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2) : OC^2$$

**引理2.1.** 假定  $n$  条线段  $A_1, A_2, \dots, A_n$  形成一个递增的算术级数，则

$$(n-1)A_n^2 : (A_n^2 + \dots + A_2^2) < A_n^2 : (A_n A_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2),$$

但

$$(n-1)A_n^2 : (A_{n-1}^2 + \dots + A_1^2) > A_n^2 : (A_n A_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2).$$

把线段换成面积，上述引理仍然成立。

从阿基米德的叙述中可以看到，当时的数学并没有明确的实数概念。或者说，并没有把抽象出来的无单位的“数”作为常用的概念。与欧几里得一致，阿基米德依然将实数与线段的长度作为一体。

引理 2.1 不证。

*Proof.* 取一个圆，使其半径的平方等于

$$OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2.$$

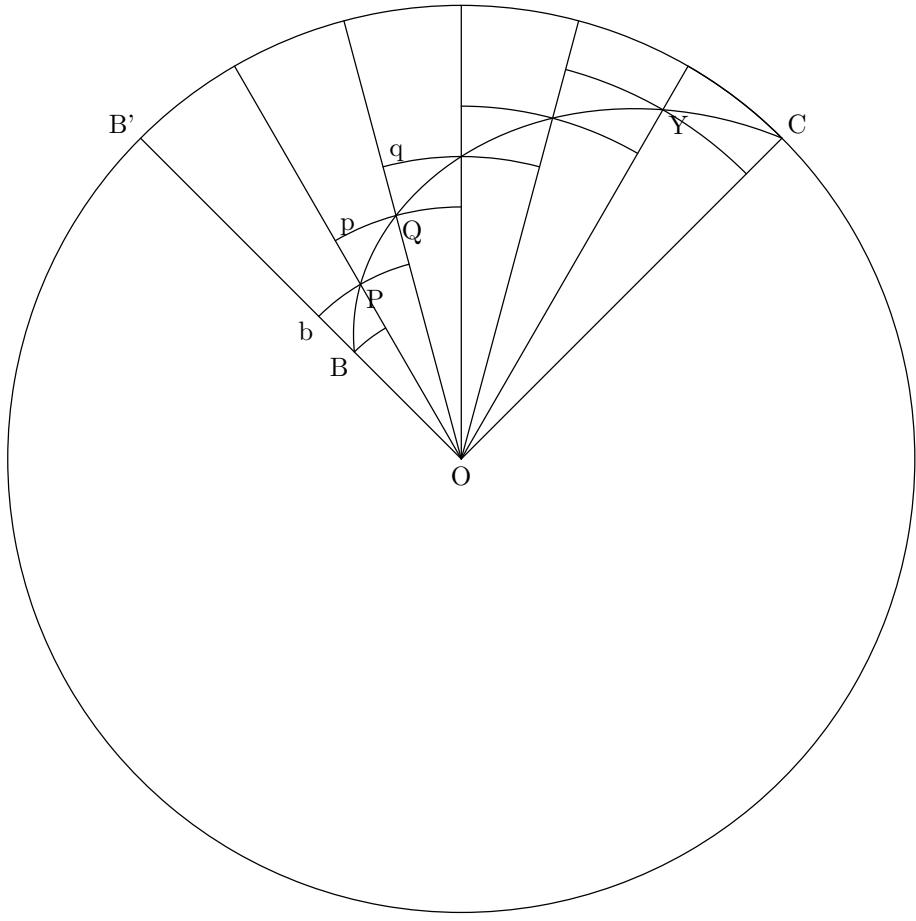


图 7 螺线的切割

令  $\sigma$  为其上的一个扇形，它的圆心角为  $BOC$ 。于是我们只需证明

$$\text{螺线 } OBC \text{ 的面积} = \sigma.$$

若不然，螺线  $OBC$  的面积  $S$  一定大于或小于  $\sigma$ 。

1. 若  $S < \sigma$

作面积  $S$  的外接图形，它由一些相似扇形所组成，设其面积为  $F$ ，则可以使得  $F - S < \sigma - S$ ，即  $F < \sigma$ 。

作  $n-1$  个扇形，如图，则

$$(n-1)OC^2 : (OP^2 + OQ^2 + \dots + OC^2) < OC^2 : (OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2) = \text{扇形 } OB'C : \sigma.$$

从而  $OB'C : F < OB'C : \sigma$ 。因此  $F > \sigma$ ，矛盾。

2. 若  $S > \sigma$

作内接图形，使它的面积为  $f$ ，则可以  $S - f < S - \sigma$ ，即  $f > \sigma$ 。在此情况下，

$$(n-1)OC^2 : (OB^2 + OP^2 + \cdots + OY^2) > OC^2 : (OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2),$$

即

$$OB'C : f > OB'C : \sigma.$$

因此  $f < \sigma$ ，矛盾。

□

### §2.3 求抛物线弓形的面积

**定理2.3.** 设  $Qq$  为抛物线弓形的底， $q$  点不比  $Q$  点距离抛物线的顶点更远，过  $q$  点作直线  $qE$  平行于抛物线的轴，与  $Q$  点的切线交于  $E$ ，则

$$\text{弓形的面积} = \frac{1}{3}EqQ.$$

在这个定理的过程中，阿基米德使用了数学与物理结合的方法，采用杠杆平衡原理来获得不等量。

**引理2.2.** 设杠杆  $AOB$  水平放置，支点  $O$  为其中点。梯形  $CDEF$  的放置使它的两条平行边  $CD, EF$  是竖直的，并且  $C$  点位于  $O$  点下方，另外两边  $CF, DE$  交于  $B$ 。

设  $EF$  交  $BO$  于  $H$ ，梯形挂于  $H, O$  处，又设面积  $Q$  满足  $AO : OH = (CDEF) : Q$ ，若挂于  $A$  的面积  $P$  保持系统平衡，则

$$P < Q.$$

*Proof.* 由  $K$  划分  $OH$  使得  $HK : KO = (2CD + FE) : (2FE + CD)$ ，则梯形的重心  $G$  使  $GK$  平行于  $OD$ 。

于是  $AO : OK = CDEF : P$  又  $OK < OH$ ，所以由此可得  $P < Q$ 。 □

**引理2.3.** 设  $Qp$  是弓形， $Eq$  垂直于对称轴，则

1.  $EqQ < 3(FO_1 + F_1O_2 + \cdots + E_nR_nQ)$ ,
2.  $EqQ > 3(R_1O_2 + R_2O_3 + \cdots + R_nO_nQ)$ .

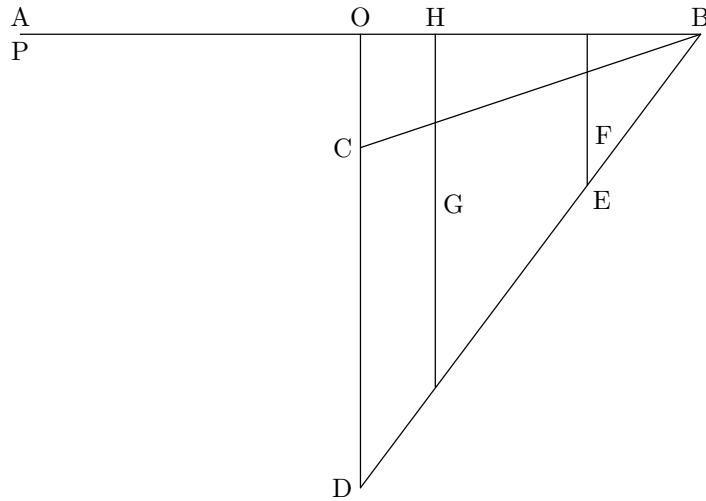


图 8 杠杆原理与几何证明

本引理为引理 2.2 的直接推论, 证明略去。

*Proof.* 如果等式不成立, 则弓形面积大于或小于  $\frac{1}{3}EqQ$ 。

- 假设弓形面积大于  $\frac{1}{3}EqQ$ , 则可找到  $EqQ$  的一个约量, 使其面积小于弓形与  $\frac{1}{3}EqQ$  之差。即

$$\frac{1}{3}EqQ < \text{弓形} - EqQ,$$

如上图, 所以

$$EqQ = (FO_1) + \dots = (FO_1) + (F_1D_1) + \dots$$

但弓形面积小于

$$(FO_1) + (F_1O_2) + \dots$$

两式相减, 得

$$\frac{1}{3}EqQ < R_1O_2 + R_2O_3 + \dots,$$

矛盾。

- 假设弓形面积小于  $\frac{1}{3}EqQ$ , 取内分量同理可证。

□

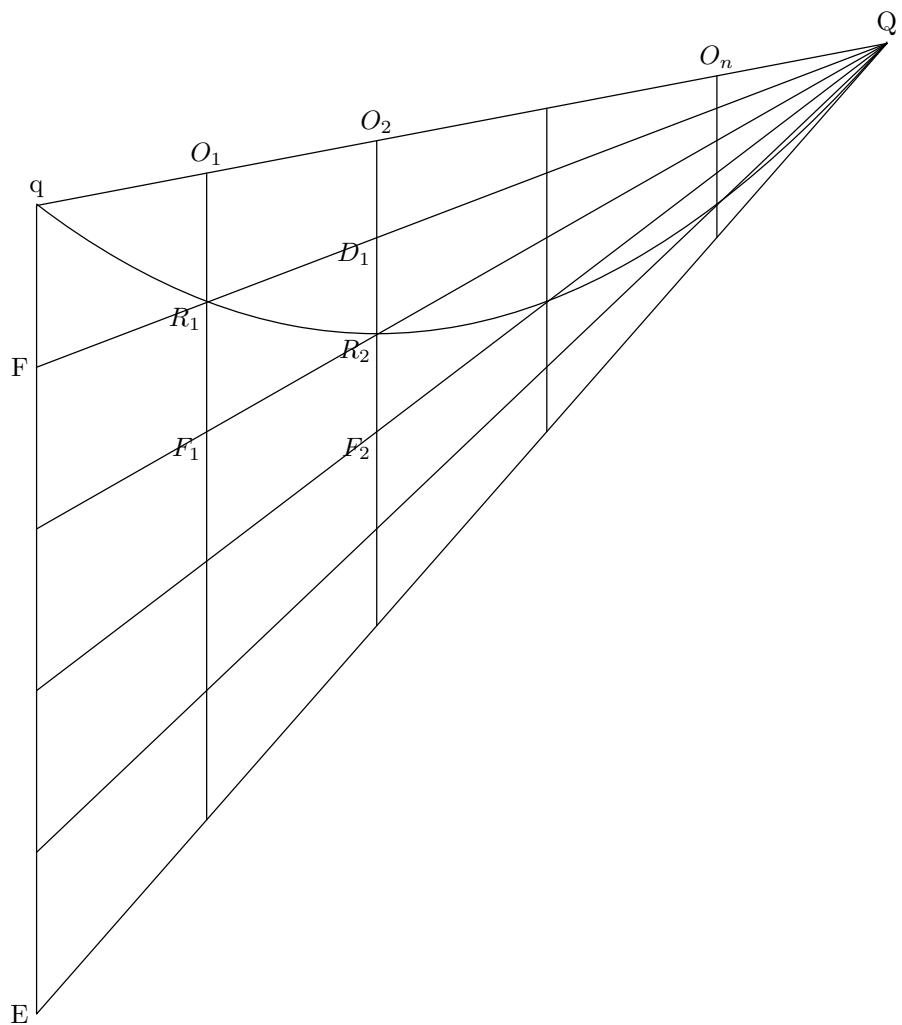


图 9 切割

### §3 现代解法

#### §3.1 关于 $\pi$

关于  $\pi$  的计算，由于现在已经有了计算机这一强大工具，可以进行大规模的割圆法。具体结果如程序所示。

割圆次数	计算得到 $\pi$ 的值	误差	相对误差
01	3.1058e+00	3.5745e-02	1.1378e-02
02	3.1326e+00	8.9444e-03	2.8471e-03
03	3.1394e+00	2.2227e-03	7.0750e-04
04	3.1411e+00	5.4089e-04	1.7217e-04
05	3.1415e+00	1.2036e-04	3.8311e-05
06	3.1416e+00	1.5220e-05	4.8448e-06
07	3.1416e+00	1.1064e-05	3.5219e-06
08	3.1416e+00	1.7636e-05	5.6136e-06
09	3.1416e+00	1.9278e-05	6.1365e-06
10	3.1416e+00	1.9689e-05	6.2672e-06
11	3.1416e+00	1.9792e-05	6.2999e-06
12	3.1416e+00	1.9817e-05	6.3081e-06
13	3.1416e+00	1.9824e-05	6.3101e-06
14	3.1416e+00	1.9826e-05	6.3107e-06
15	3.1416e+00	1.9826e-05	6.3108e-06
16	3.1416e+00	1.9826e-05	6.3108e-06

表 1 阿基米德的计算  $\pi$  的数值方法

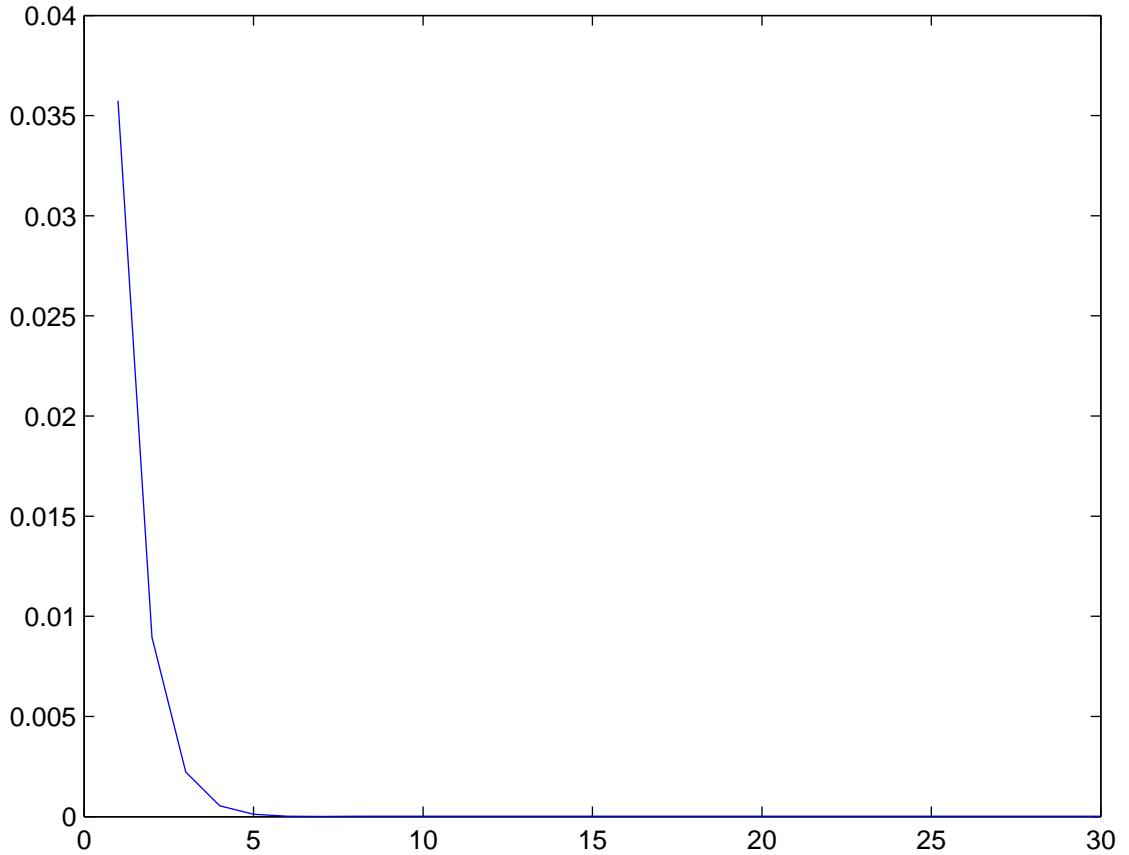
由表中可以看到，在第六次割圆之后，精度的提高停止了。在第十次割圆之后精度甚至有所下降。

这是由于该算法用到了很大的 2 的幂次，因此后来计算的误差掩盖了割圆所带来的误差。

#### §3.2 关于螺线

螺线的参数方程为  $\rho = \theta$ ，所以螺线的面积为

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{6} (\rho_2^3 - \rho_1^3)$$



而相应的扇形面积为

$$\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\rho_2^2 = \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)\rho_2^2$$

所以

$$\text{螺线面积 : 扇形面积} = (\rho_1 \times \rho_2 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_2)^2) : \rho_2^2$$

### §3.3 关于抛物线面积

由于积分的存在和海伦公式，与 §3.2 一样，证明成为了显然。

## §4 结论

我阅读了书籍 [1, 2]，查阅了网上的文章 [3, 4]，对阿基米德的生平经历，以及论

证特点有了一个初步的认识。

阿基米德的著作中绝大部分是他本人的全新发现，与阿波罗尼或欧几里德不同。他们的著作大都是“把早先的几何学家的个别努力所得到的结果和所用的方法”[5]加以系统化，并加以推广所形成的。

随着年代的久远，阿基米德的研究过程也逐渐难以澄清。阿基米德的著作中只留下了运算的结果，涵盖了大量的数字处理，但没有留下运算的过程。

因此，在佩服他的远见和天才的同时，我们也不得不赞赏他的超人的勤奋。这对现代拥有了“无敌”的计算机的数学家们是个很好的启示。

此外，对于他在“归谬法”中所用到的猜想的数值，也没有说明来自何处。一方面，可能是他在进行有限运算时得到的近似结果的“极限”。另一方面，我猜想，可能是他采用物理与数学结合的方法（例如用沙子的重量来代替面积）等，来获得初步的数据。鉴于阿基米德在数学和物理双方面的造诣，这个猜想可能很大。

总之，作为无可争议的有史以来贡献最大的三个数学家之一，阿基米德的著作是数学阐述的典范。他的每一篇论文都值得仔细阅读和研究，而我这篇短小的论文仅仅能展示他对数学宝库作出的贡献的冰山一角而已。

## 参考文献

- [1] Victor J. Katz. 数学史通论. 高等教育出版社, 2004
- [2] 热威尔内兹. 阿基米德羊皮书. 湖南科学技术出版社, 2008
- [3] Archimedes. <http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes>
- [4] [www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html](http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html)
- [5] T. L. Heath. 阿基米德全集. 陕西科学技术出版社, 1998

## 毕业感言

基数 53 班 杜升华

我对数学的兴趣是从中学阶段开始的。怀着自幼以来的成为科学家的理想，我在努力的学习中逐渐领略到了数学之美：这种美是一种理性的美，思维的美，逻辑的美；它体现在清晰严密的推理之中，体现在完美无缺的结论之中，体现在精确简洁的语言之中，体现在充满想象的创造之中。这些从初等数学得来的体会，在大学四年对更加深邃和广博得多的高等数学的学习之中得以加深和提高。

我的眼界最初是由卢旭光老师打开的，他教了我四个学期的数学分析课，使我对分析的严谨概念有了最初的了解。从课程所用的教材，卓里奇的著名的《数学分析》(Mathematical Analysis) 中，我第一次懂得了数学的真谛，对数学树立了正确的目标，对数学有了真正的热情。也是从那时起，我逐步明确了自己人生理想：虽然我的名字是属于物理的，但我的事业将属于数学。

卢老师带给我的教益，不仅在于坚实的数学分析基础，更在于他那深深感染着每一个学生的对数学溢于言表的热爱。我至今还清楚地记得三年前他用严谨的 $\varepsilon$ - $\delta$  语言向我们展示对“紧集上的连续函数必一致连续”的证明时的情景：

设  $f$  是欧氏空间中紧集  $K$  上的一个连续函数。 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\forall x \in K$ ， $\exists \delta_x > 0$  使得  $\forall y \in B(x, \delta_x)$  有  $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。开集族  $\{B(x, \frac{1}{2}\delta_x)\}_{x \in K}$  构成紧集  $K$  的覆盖，从中可取出有限覆盖： $\bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}) \supset K$ 。现令  $\underline{\delta} = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq N} \{\delta_{x_i}\}$ ，则  $\forall x, y \in K$ ，当  $|x - y| < \underline{\delta}$  时， $x$  与  $y$  必同属于某个  $B(x_i, \delta_{x_i})$ ，从而

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

证明结束后，卢老师把恰好对应于“一致连续”定义的语句划上线，然后以一种热情洋溢的语调评论道：“你们看，这证明过程，思路多么清晰，推理多么严密啊！”

可以说，即使我忘记了这么重要的一个定理，也不会忘记上面的那个场景；——或者，更准确的说法是，这美好的一幕将连同康托尔关于一致连续的定理一起永远保存在我的记忆之中。

同样不能忘记的还有：肖杰老师的谦虚而又深入浅出的讲解——常说“我只会用笨办法”，然而最善于让学生从中看到数学证明的本质；周坚老师的旁征博引和独到见解；马力老师对数学的热情和对学生的鼓励；文志英老师令人赞叹的渊博的数学史知识；邹文明老师信手拈来的精彩的数学家趣闻……

四年来，从每一位教过我的数学系老师身上，我都受益匪浅。限于篇幅，不能一一列举。这里尤需感谢马辉老师在去年微分几何课上的一个提议，没有这个提议和她的大力支持，就没有我跟吴玉清、胡悦科、石权、吴昊等同学共同创办的数学刊物《荷思》。

我们办刊的主要目的，是为了营造一种热爱数学、讨论数学的氛围。虽然我们的工作短期内并不能起到这种效果，但只要坚持下去，潜移默化，总会让更多

的人提高对数学的兴趣。大而言之，这也正是我们清华数学系复兴的希望之所在。所以在我的建议下，我们在封底印上了哈代的一句话：“我们所做的事可能是渺小的，但它具有某些永恒的性质。”

我很高兴能够与这些同我一样喜爱数学的同学一起合作，相互交流，彼此探讨，共同进步。

不仅如此。四年来，我还有许多无声的良师益友，使我能够不断提高对数学的兴趣、深化对数学的认识，并在我面对浩瀚无边、难以驾驭的知识海洋而感受到自身的渺小时带来莫大的鼓舞——那些就是数学大师们的传记和科普著作。

我还记得第一次读到哈代的《一个数学家的辩白》中下面一段话时，那种不能自己的兴奋心情：

我的眼界最初是由乐甫教授打开的，他只教了我几个学期的课，却使我对分析的严谨概念有了最初的了解。我从乐甫教授处获益最大的是他建议我读若尔当的著名的《分析教程》(Cours d' analyse)。我永远也不会忘记这部著作所给予我的震撼，不会忘记那本书对我这一代数学家的激励。读了这部著作我才第一次懂得了数学的真谛；也是从那时起我走上了一个真正的数学家的道路，对数学树立了正确的目标，对数学有了真正的热情。

正是在这种课外阅读中，我有时能够发现自己的经历和体会同大数学家的相似之处，产生共鸣，并为他们视数学如生命的学术热情所感染，从而增强投身数学研究事业的信心与决心，也逐步明确了这一事业的深远意义：一是数学在自然科学中的基础性作用。伽利略有个著名的比喻，自然界这部巨著就是用数学语言写成的。不学好这门语言，我们就无法真正理解自然。二是数学本身的美。它不能单纯通过感觉来体验，而要借助头脑和理性思维来追求。而这种追求具有深刻的内在价值，用希尔伯特 1930 年广播演讲中的话来说，那就是，die Ehre des menschlichen Geistes，人类心智的荣耀！

四年来，从这些“关于数学”的材料中，从课堂上和书本上呈现给我的数学前辈的伟大定理中，我觉得最大的收获在于：学会了欣赏数学，或者说，更深入地了解了数学之美。我很喜欢维尔斯特拉斯的一句名言：“一个没有几分诗人气质的数学家永远成不了一个完全的数学家。”在我看来，这种“诗人气质”主要就是指对数学的欣赏。在大学的四年里，我领略了欧拉的才华横溢，高斯的严谨求实，伽罗瓦的锐意进取，庞加莱的博学多才；我愿做外尔笔下的一只老鼠，听着希尔伯特那甜美的长笛声，追随他跳入数学的深河。

探索数学世界的真理，追寻人类心智的荣耀，“亦余心之所善兮，虽九死其犹未悔”！

## 毕业感言

基数 51 班 吴昊

临近毕业，淡淡的伤感。想留下一些东西给后人，也算不枉大学四年。我想，我写的东西不算是什么学习经验吧，只是我的一些在大学学习生活的方式，这些方式毕竟使我有了一个比较好看的成绩，但仅此而已，并不代表这些方式就是好的。大家还是应该多咨询一些老师和师兄师姐，结合自己的情况进行舍取，找出一个适合自己的方式。

1. 每天的作息要有规律。这不但对身体健康大有好处，而且可以提高学习效率。这恐怕是老生常谈，但是大学四年真能坚持规律作息的恐怕为数不多。比如我作息比较规律，但是基本已经被同届的人视为异类。大家尽力而为吧。

2. 上课坐在前排。提高上课效率，不易走神，不易瞌睡。

3. 大一第一学期，不要选太多课程。很多同学刚刚进清华的时候，恐怕都自命不凡，觉得自己很了不起，即使你真的很了不起，也请先不要选太多课程。大学生活与高中相比，还是非常不一样的。先给自己一个适应的空间，把少数几门课尽力学好，给自己的大学学习一个好的开端，这个很重要。据我自己的一个粗略的观察，大一时给自己定的基调很重要，同学中，四年时间，有不少同学因为电脑游戏一类东西，使自己相对大一时的成绩落后了，但是比较少的同学在四年的时间中相对大一时的那个位置有一个很大的进步，绝大部分同学就在大一时给自己定的那个位置附近游动了。所以给自己的大学生活一个好的开端，这也将成为你新生活的一个好的开端。

4. 不要在寝室自习，除非你自控力超常。寝室的诱惑太多，分心的东西太多，如果你是像我一样的常人，还是选择去教室自习吧。

5. 积极参加班级活动，适当选择参加一些自己感兴趣的社会活动。人终归是社会中的一份子，能够完全生活在自己的世界里的人还是非常少的。大学生活对于绝大部分人来说，是学校与社会的过渡阶段，多接触一些人，多接触一些事情，更好地为自己做好走入社会的准备。

先想到这些，不过这些都是我个人的生活方式，不代表大多数。比如，我就认识很多常年在寝室自习的牛人，以及每天用很多时间打游戏看小说的牛人。但我只是一个笨鸟，只能选择一种最笨，最没“挑战性”的学习方式。

回想自己过去的四年，觉得很多以前追逐的东西好像确实没那么重要，比如学分绩。很高的学分绩不代表学得很好，但是学得很好就自然有一个比较高的学分绩。水平到了，自然会有一个好的分数，水平没到，徒有一个高分有什么用呢？可能你说，我需要一个很高的 GPA 去申请好的学校，继续深造，但是说实话，如果真的水平未到，勉强到了一个高水平的地方，那里真的是适合你的地方么，那里真的会有助于你将来的发展么？还是那句话，大学四年是学校与社会的过渡态，这四年中我们要想很多以前没有想过的问题，要正视自己的过去和将来。

忽然想起前几天我毕设答辩的时候，文老师说：“你们都是大四的学生，我最后想跟你们说的一句话是，跟学弟学妹说一点正面的东西。我们这些老师跟学生说什么他们都听不进去的，但是他们很相信师兄师姐的话，但是你们自己想想，你们跟师弟师妹都说过些什么？怎么翘课，怎么搞学分绩，怎么走捷径？所以，我想你们是不是可以利用大学最后一点时光，为以后的同学做个好的榜样，树立一些正面的影响。”我想我说的这些东西应该还是正面的，应该还是有些用的东西。

## 致谢

在本刊的成刊过程中，除编辑部外，还有很多老师和同学做出了很大贡献。

除已刊登的论文外，叶丽丽、刘立达同学也将自己的毕业论文向我们投了稿，虽经讨论最终没有采用，但我们同样对他们的热情致以最高的敬意。所有的投稿者（无论稿件是否采用）都将获得一份有特色的纪念品：古今中外 12 位伟大数学家的图片与名言一套。

数学科学系对本刊在经费上给予了很大支持；张程业同学重新处理自己文章中的图片，为我们的排版提供了方便；物理系许湛同学在拉丁文和希腊文数学名言的搜集和校对上提供了帮助。在此，我们一并向他们表示感谢。

《荷思》编辑部  
2009-7

主办：清华大学 数学科学系 《荷思》编辑部

特刊主编：杜升华

编委：（按姓氏笔画为序）

王子腾	王竹海	毛天一	石 权	刘立达
杜升华	李 超	吴 昊	陈凌骅	胡悦科

封面：陈凌骅

排版：王子腾 刘立达 杜升华 李 超

校对：刘立达

纪念品设计制作：杜升华 陈凌骅

联系本刊：[THUmath@googlegroups.com](mailto:THUmath@googlegroups.com)

北京市 海淀区 清华大学 紫荆 9 号楼 404B

010-515-31883



我们所做的事可能是渺小的，  
但它具有某些永恒的性质。  
——[英] G.H. 哈代

清华大学  
数学科学系

