

2008. 10.

第 02 期



目录

刊首寄语 肖杰 1

名篇选读

我学习数学的经历 丘成桐 2
数学：跨越专业的想象力飞跃 M.F.Atiyah 3

研究探讨

折纸的代数结构 林洁 毛天一 石权 王芝兰 4
An extension of the theorem of contraction mapping and fixed point 胡悦科 15
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍的新证明 王力 20
有界线性算子逐点收敛的极限未必有界 杜升华 21
方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ 初值问题的解 杜升华 林印 刘立达 王子卓 23

教师来稿

A question in Pólya model 史灵生 28
谈数学分析中的 3 个结果 马力 30

数学争鸣

无穷 杜升华 胡悦科 石权 吴昊 37
我看女数学家 王美霞 50
Crossword 刘立达 54

清华数学人

对张友金老师的访谈 石权 55

刊首寄语

肖杰

接到吴玉清同学的 email，要我为同学们办的系刊《荷思》写几句话。我作为《荷思》第一期的读者，也非常愿意在旁边为同学们加加油、鼓鼓掌。

我觉得同学们的《荷思》中的“荷”字，寓意清华园。荷塘月色是清华园中最著名的一景，每当荷花满塘开放的时候，我们总能看到游人如织，围观拍照。景色红白绿相间，连成一大片，真是好看。另外，同学们一定还有“小荷才露尖尖角”的含义。所以我的理解，《荷思》就是同学们所思所想，所见所闻的发表园地。

说到园地，大家在里面耕耘，就说养殖荷花吧；荷花好看，莲子好吃，莲叶的根就是大家都常当菜的藕。所以不同的人种植荷花，有的人以种荷花消磨时光，有的人以荷的花叶根果卖给市场。真爱莲者以养荷花为其生活，而花依然很美，果实依然很香，对人对社会依然有益。

清华园里，当然不只有荷花，有苍拔挺干的松树，有高大垂直的白杨，更多的是不太为人注目的蔷薇地丁。正是所有这些，才构成我们生意盎然的校园。一个健全发展的社会不但需要良材香果，也同样迫切需要蔷薇地丁。我们应了土壤和气候的变化，尽力地发展自己的专业和志趣，我理解，这就是社会对我们的期待吧。

我们的园地是数学的天地。数学是引人入胜的学科，乐此道者津津乐道，甚至于还有点疯疯癫癫。未入道者觉得枯燥乏味，远离人间。但是人间也并非都是乐事。同学们开辟一小块园地，大家在一起叨叨不休，尚在人间。又能潜心向学，脱心志于俗谛，何乐而不为呢？

我学习数学的经历¹

丘成桐
美国 哈佛大学

我上小学并未显示出超乎常人的数学天赋，并且常常得去做一些不大感兴趣的事情。在 13 岁那年，情况发生了改变。平面几何的简洁优雅令我怦然心动：从简单的公理可以推导出美妙而复杂的定理。于是，我兴致勃勃地开始自己推导几何定理，还尝试着提出一些有趣的结论，试图根据基本公理证明之。

那些年通过“站书店”看了不少书籍，因为当时图书馆的藏书都很有限。广泛的阅读使我获得了许多同学甚至老师都不知晓的信息，让我感到非常自豪，欣喜自己掌握了朋友们都没有的“秘密武器”——更多的新知识。

我至今还记得当年的一道尺规作图题。用了半年多时间寻找可能的做法，但都失败了。一直自以为擅长解决此类问题，这次却迟迟找不到答案，所以颇感沮丧。最后，从一位日本数学家的著作中得知：仅用尺规，该问题无解。同时，由于有关的公理并非尺规三等分角可行性的标准判据，因而我的老师也未加讨论。不过，这类问题的代数解很容易求得。由此我对于用代数解决传统平面几何难题之“威力”感受甚深。

以上经历也让我尝到了阅读课外参考书的甜头。其实我所上高中的数学师资力量很强，但超越课本的大量阅读对我日后的发展起到了更重要的作用。面对一些很难懂的数学书，我总是锲而不舍地反复阅读，从中获益匪浅。当然，完全凭自学掌握课堂之外的广泛知识并非易事，许多书我至少要读三遍以上才能理解个大概。代价虽大，所学的知识却非常有用。

我逐渐能有效地消化所学内容了。更觉欣喜的是，当后来需要运用某些概念去理解新问题时，以往所学常会蓦然浮现，令人茅塞顿开。在以后的研究生涯中，这种感觉曾经一而再、再而三地重现过。

上述经历也使我明白了一个道理：长期沉浸于自己钟爱的领域，虽然未必会有立竿见影的回报，但那种润物无声的渗透与潜移默化的熏陶，无时不在影响着科学研究。另一方面，因为以往一直认为数学是极严格的学科，故而当发现并非一切数学皆有平面几何那样高的公理化程度后，曾经心灰意冷。进入大学后，我知道了“Dedekind 切割”和其他相关的构造规则，并逐渐懂得欣赏数学系统之美。

我从未对数学的逻辑性感到惊奇，但数学优美无比的简约与强韧却令我动容。正因为如此，我将自己一生毫无保留地奉献给了数学研究。实际上，寻求科学中令人心醉的美妙感受，恰恰是许多研究者最真实的驱动力。我想，真正优秀的学生一定会感受到科学独具的魅力。

在香港读书期间，我缺乏第一流数学家的指导。1969 年进入伯克利加州大学后，情况发生了根本改变。在这里，我的“数学品味”实现了质的飞跃。诚所谓“近朱者赤、近墨者黑”，科学家的素质和见识亦与周遭之人的影响息息相关。譬如鱼之于水：鱼在沟渠抑或江海，其眼界、其景象自然大异。因此我深信，与伟大的科学家相识相知是年轻才俊跻身一流的重要保证。或许也有例外，但多数时候是“大科学家造就了大科学家”。对我而言，只要有机会，总是尽可能去听第一流科学家的演讲。

以上是我个人的一些经历和感悟。想说的是，虽然我的智力与大多数学生相仿，但我找到了一条能够成就自己的幸运之路。

¹ 本文和下一篇文章均摘自《成为科学家的 100 个理由》，上海科学技术出版社出版。

数学：跨越专业的想象力飞跃

Michael F. Atiyah 阿蒂亚

英国 爱丁堡大学

数学是一门具有挑战性的神奇学科。千百年来，不同文明、不同国度的人们都把数学作为锻炼思维能力的重要手段，而数学使我着迷的魅力，在于其所蕴含的智力挑战。数学思考要求严谨审慎，因此只有真正入乎其内才能体验那种令人心醉的享受。那些将数学视作枯燥计算器者，实在很难感受数学的奇妙。在我看来，数学之美犹如绵延的山脉；或许有的山峰怪石嶙峋、粗糙险峻，但整体看来却又气势恢宏、风光无限。

跟许多人一样，刚上中学时最令我着迷的是魔术般的化学。我常常乐此不疲地在试管里配制各种彩色混和液。不过，这种热情很快便消退了，因为与数学严格的逻辑一致性相比，中学化学实在是太缺乏挑战性了。

就在此时，正好数学老师向我们介绍了四元数——一种由 19 世纪伟大数学家哈密顿爵士发现的神奇的数。当年，有感于复数 $x+iy$ 的数学魅力及其在科学上的精彩应用，哈密顿花了很长的时间探索将复数推广到三个实数变量 (x,y,z) 的可能性。这一想法能够实现的话，可为物理学的空间研究提供全新的架构。事实证明，对三个实变量而言，无法实现这种推广。幸运的是，哈密顿发现在四维 (x,y,z,t) 情况下，可以得到最初被称作“超复数”（今天被称作四元数）的系统。不过，其乘法运算已不再适用交换律。也就是说，对两个四元数 q_1, q_2 而言， $q_1 \cdot q_2$ 可能不等于 $q_2 \cdot q_1$ 。

哈密顿发现四元数的故事堪称数学史上的一段传奇。他回忆说，发明四元数的灵感来自于他的一次乡间散步。1843 年的一个黄昏，他伴妻子在都柏林的皇家运河边散步时，突然意识到，如果舍弃乘法交换律，就可以得到一种新的数系了。对“虚数” i, j, k 而言，有 $i^2=j^2=k^2=-1$ 、 $ij=-ji=k$ ，等等。此发现令他兴奋不已，于是他把结果刻在了自己正通过的布罗罕桥上。

我完全被四元数迷住了，哈密顿的发现传奇无疑更增添了它对我的吸引力。我怀着极大的兴趣阅读了哈密顿及其同事的作品，看看他们是如何将四元数应用于三维几何学和数学物理学的。

几年后我进了剑桥大学，但悲伤地发现，这里没有任何提到四元数的地方。我对此表示不解，得到的回答却更令人失望——四元数并非哈密顿自认为的伟大发现，那不过是他的即兴之作。

大约 30 年后，我已是一名有所建树的数学家，在数学和物理学的交界处兴起了一个崭新而激动人心的前沿。我在自己所钟爱的这一边缘地带纵横开拓，如鱼得水。您瞧，我早年所热爱的四元数很快便成了新思想的中心（将时间解释为神奇的第四个实变量）！

这一戏剧性的转变，引出了数学和科学为何总是如此迷人的诸多思考。其一，杰出的思想有着强劲的生命力。尽管它们可能沉寂多年、明珠投暗，但那些真知灼见迟早会拨云见日，引来世人一片惊叹。其二，杰出的思想往往是跨学科、跨专业的。例如，四元数就是从代数开始，然后进入几何学、物理学领域。其三，杰出的思想既是优秀人才的个人创造，同时也是人类知识财富的组成部分。

正是由于在研究中实现了代数、几何、分析以及物理学的有效结合，我的数学研究生涯才更加耀眼。我的贡献之一是以一组公式（如今称作 Atiyah-Singer 指标定理）将上述领域联为一体，即以几何学术语给出微分方程的若干数值解。这种联结的结果往往出人意料，使旧的问题在新思路下重新焕发出智慧的光芒。应当说，数学对我有强大吸引力，原因正在于它允许我横跨专业而作出充满想象力的飞跃。我相信，迷人的数学一定会吸引更多的有志青年。

折纸的代数结构¹

毛天一² 石权³ 林洁⁴ 王芝兰⁵

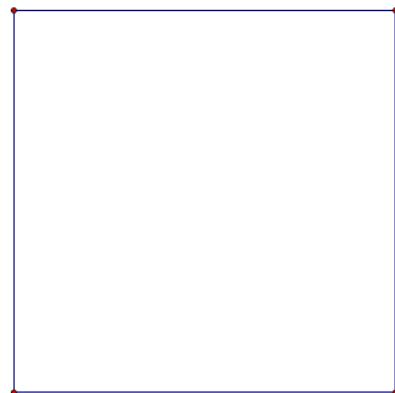
摘要

本文从折纸六条公理着手，详细对比了折纸与尺规作图，逐步添加公理得到了该公理体系下平面折纸的代数结构。其中还给出了正五边形的折纸折法。最后对七公理体系下的折纸以及折叠型做了简要的讨论。

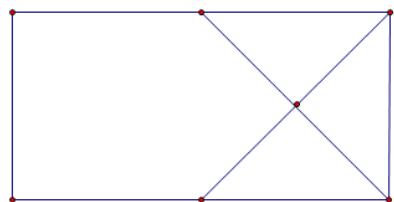
一、引子

折纸，是每个人童年的记忆。飞机，纸鹤，星星，它们都曾寄托着我们美好的心情与美丽的愿望。然而，究竟什么样的图形是我们可以折出来的，或者说，折纸，究竟蕴含着哪些奥秘。我们先从折正五边形看起。^[1]

1. 取一张正方形的纸张。



2. 将一张正方形的纸张对折后，再折出如图十字交叉型折痕，得到交点。



3. 把对折后的左下角与该交点重合。

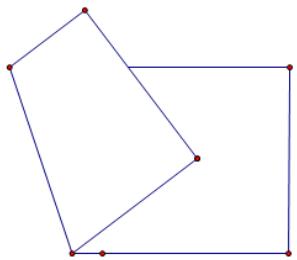
¹ 本文是 2008 年春季学期近代数学专题（肖杰老师）课程论文。

² 基科 71

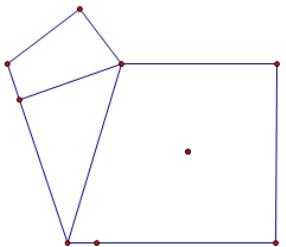
³ 基数 51

⁴ 基科 78

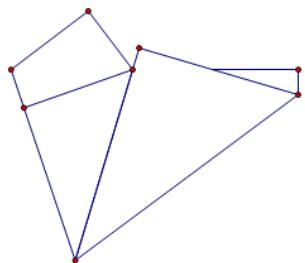
⁵ 基数 51



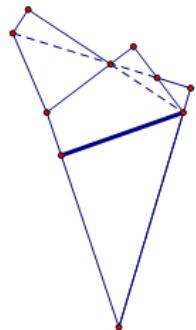
4. 把刚才折过去的部分反过来对折。



5. 将右下角的边对折到刚才的中缝。

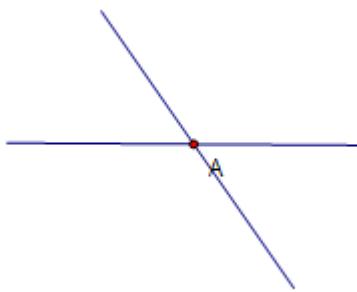
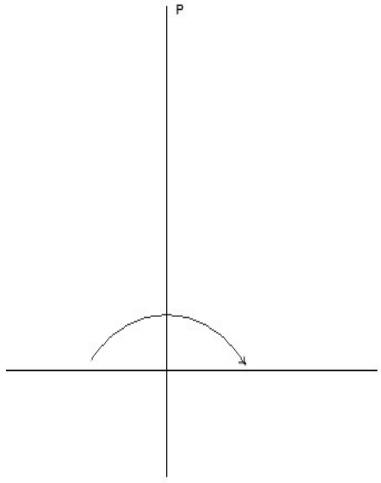
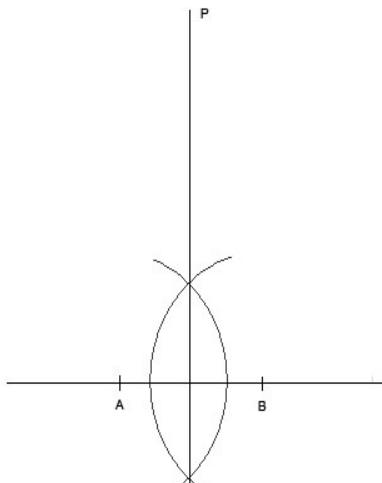
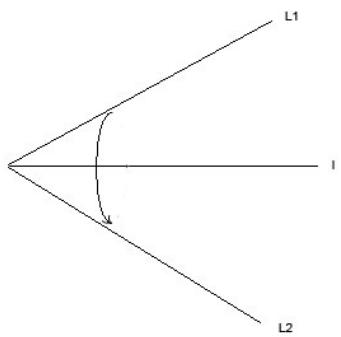
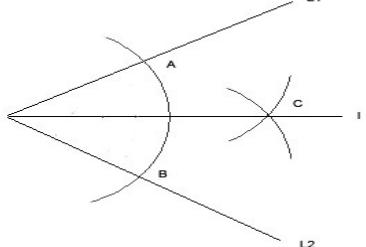


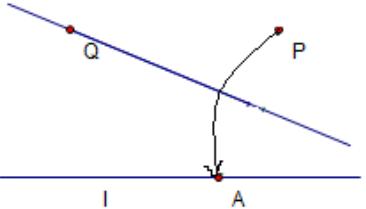
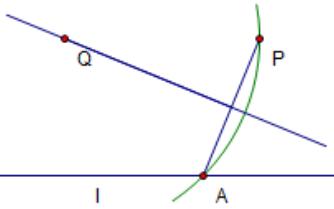
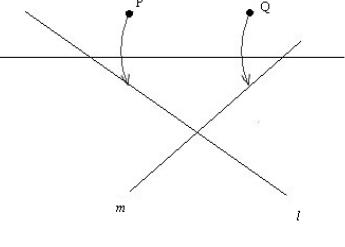
6. 将其反过来折得到如下形状后，沿粗线折。



展开纸，沿粗线的折痕即为正五边形。

如何得到正多边形，是尺规作图的经典问题。对比尺规作图，我们发现，许多尺规可以得到的图形，折纸也可以做到。那么，折纸与尺规，究竟有哪些不同。我们先看下，折纸的六条公理(后文会详细叙述其来由)中哪些是可以被尺规完成的：^[2]

	公理	图示	对照尺规作图
1	连接两个可构造点的线是可构造的。		基本作图
2	不同可构造线的交点是可构造的。		显然
3	两个可构造点的中垂线是可构造的。		
4	任一角的角平分线可以被折出。		

5	<p>给定点 P, Q 与直线 l, 则能折出过 Q 的直线, 使得 P 关于该直线的对称点在 l 上。</p> 	 <p>以 Q 为圆心, 过 P 做圆交 l 于 A, 由 3 的尺规部分, 可作 AP 的中垂线, 易知它过 Q, 且为所求直线。</p>
6	<p>给定直线 l, m 和点 P, Q, 那么使得 P, Q 关于它的对称点分别在 l, m 上的直线是可构造的, 只要这样的直线存在。</p> 	<p>以后会看到, 公理 6 等价于解三次方程。故它不能被尺规代替。</p>

二、基于折纸几何的公理系统

1. 折纸公理系统的基本假设

首先, 我们认为折纸的操作对象是平面上的点。为方便后文的运算和叙述, 我们取定复平面 \mathbb{C} 作为研究对象。这样, 点的集合被等同为数集。

定义 1 给定一套公理系统, 在该公理系统定义的运算下封闭的最小集合称为该公理系统下的一个可构造集。其中的点称为可构造点。

那么, 通常意义上说的“能够折出的”所有点就可以用折纸的公理系统下的可构造集来描述。于是下面的关键在于, 如何建立折纸模型的公理系统。我们从几条最基本的、最容易被接受的公理入手:

(0) 该集合包含三个不共线的点 O, M 和 N 。并记该可构造集为 $\Pi(O, M, N)$, 也简记为 Π 。

- (1) 连接 Π 中两点的线称为可构造线。
- (2) 不同可构造线的交点是可构造点。
- (3) 两个可构造点的中垂线是可构造的。

我们很容易把这三条公理和现实生活中的折纸对应起来。

2. 对该集合的代数处理

我们从一些最基本结论开始。如果不加特别说明, 该节下面的内容全是在一个可构造集 $\Pi = \Pi(O, M, N)$ 上的研究。

引理 2.1(平移) 给定点 P 和线段 AB 。那么我们可以构造出以 P 为端点, 且与 AB 同向等长的线段。

引理的证明：只需考虑三点不共线的情况。连接 PA 、 PB ，作 PA 、 PB 、 AB 的中点，依次为 B' 、 A' 、 P' 。再作 PB' 的中点 C 。 $A'C$ 和 $P'B'$ 交于 D ， BB' 和 PD 交于 Q 。那么 PQ 就是要求的线段。对于共线的三点，先在 AB 外找一点 R ，仿上作 RS ，再对 RS 和 P 处理即可。

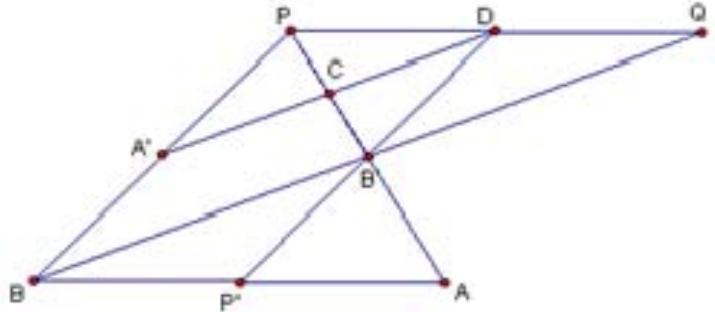


图 1 引理 2.1 的说明

推论 2.2 对直线 l 及一点 A ，可过 A 作 l 的垂线。

推论的简证：取 l 上任两点作其中垂线，然后将中垂线上任一线段平移至 A 处。

推论 2.3(相似) 给定点 P 和共线的三点 ABC ，可作点 D 使得 $\Delta ADB \sim \Delta APC$ 。

推论的简证：只考虑 P 不在 ABC 上的情况。将 CP 平移到 BP' ，该线段所在直线交 PA 于 D 。

推论 2.4(对称) 给定点 P 、直线 m 和异于 m 且不过 P 的直线 l ，可作 P 关于 l 的对称点、 m 关于 l 的对称直线。

推论的简证：只证明关于直线 m 和 l 的论断。任取 l 上两点 A, B ，分别过其作 l 的垂线，依次交 m 于 A', B' ，再将 $A'A$, $B'B$ 平移到 AA'', BB'' ， AA'', BB'' 就是所求直线。

以上叙述都是基于几何现象的。一般地，可以用以下方式概括：

推论 2.5 Π 在向量的加法下是封闭的。特别地，若取 $O = 0$ ， Π 就是一个阿贝尔群。

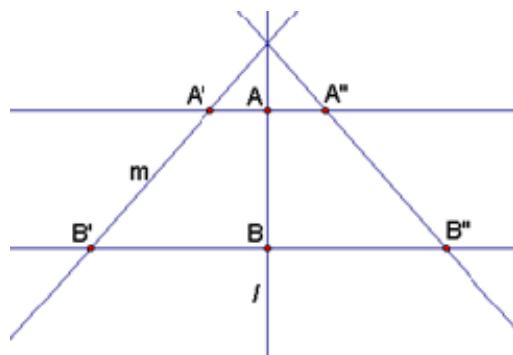


图 2 引理 2.4 的说明

更具体地，如果我们继续取 $M = 1$ ，那么实轴和虚轴都是可构造线。 Π 完全由第三个点的性质决定，我们可以认为 $\Pi = \Pi[z]$ 是一个定义在 \mathbb{C} 上的函数。容易证明， Π 和实数集的交 $X = X[z]$ 以及和纯虚数集交的实部 $Y = Y[z]$ 都是阿贝尔群，并且有

$$\Pi(z) = X[z] \oplus iY[z]。$$

或者说换一种更正式的方式来表达：

推论 2.6 $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Pi[z]$ 是有理数集上的线性空间，在复共轭运算下封闭，且有子空

间 $X[z]$, $iY[z]$ 。

事实上，这两个子空间不是简单的加法群，其结构应该有更精细的描述。下面我们将从除法的可能性入手：

引理 2.7 若 $0 \neq t \in Y$, 那么 $\frac{1}{t} \in Y$ 。

引理的证明：不妨 $t > 0$ 。那么可以作出如下图的一个直角三角形来实施除法。

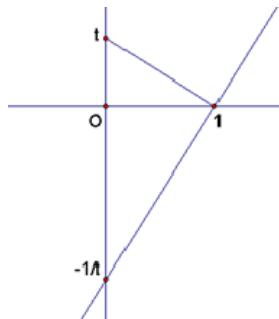


图 3 引理 2.7 的证明

进一步地，若已有点 $u, x \in X$ 和 $v, y \in Y$, 我们可以作 $x + iy$ 。利用推论 2.3, 可以继续得到 $u + \frac{uy}{x}i$ 及 $\frac{vx}{y} + vi$ 。这意味着 $\frac{vx}{y} \in X$, $\frac{uy}{x} \in Y$ 。特别地，若在两式中分别令 $x = 1$ 及 $u = 1$, 则有 $\frac{v}{y} \in X$, $\frac{y}{x} \in Y$ 。总结起来，我们有下面的推论：

推论 2.8 对点 $x \in X$ 和 $y, z \in Y$, 有

(1) $xy \in Y$, $vy \in X$ 。

(2) 若 Y 非平凡，则 X 是一个域。

(3) 若 $X \cap Y$ 非平凡，则 $X = Y$ 。

推论的证明：

对(1), 由引理 2.7 得到 $\frac{1}{y} \in Y$ 。由此立得后一结果。同时 $\frac{1}{xy} \in Y$, 故 $xy \in Y$ 。

对(2), $\forall x_1, x_2 \in X$, $0 \neq y \in Y$, 有 $\frac{x_1}{y}, x_2y \in Y$ 。故 $x_1x_2 = \frac{x_1}{y} \cdot x_2y \in X$ 。另外,

由 $\frac{y}{x} \in Y$, $\frac{1}{y} \in Y$ 得到 $\frac{1}{x} \in X$ 。

对(3), 由 $\exists y \neq 0$, $y \in X \cap Y$ 。从而 $1 = y \cdot \frac{1}{y} \in Y$ 。自然引导出结论。

由该结论可进一步得到：

推论 2.9 对任一复数 $z = a + bi$, $b \neq 0$, $\Pi[z]$ 是域 $\mathbb{Q}(a, b, i)$ 的子域。

推论的证明只需逐个按定义验证, 应用推论 2.8 的结论就可以。并注意到 $\Pi[z]$ 关于共轭运算是封闭的。

明显地, $z \in \Pi[z]$ 。利用前面的性质不难知道, b 的偶次幂全在 X 中, 而奇次幂全在 Y 中。或者说 $\mathbb{Q}(a, b^2) \subset X \subset \mathbb{Q}(a, b)$ 。于是 X 可能的代数结构并不会太多。

定理 2.10 $b \in \mathbb{Q}(a, b^2) \Leftrightarrow X = Y$ 。这即是说 $X = \mathbb{Q}(a, b^2)$ 或 $\mathbb{Q}(a, b)$ 。

定理的证明: 从左向右是容易的。从右向左, 采用反证。若不然, 考虑由 b 生成的 $\mathbb{Q}(a, b^2)$ 的二次扩域, 一定有一个自同构 σ 在 $\mathbb{Q}(a, b^2)$ 的限制为恒等, 且满足 $\sigma(b) = -b$ 。^[3] 现在, Π 中任何一个点 P 都能从 $\{0, 1, z\}$ 中经过有限步构造出来。逐一验证三条公理产生新点的方式, 我们得到一组不变关系:

$$\begin{cases} \sigma(\operatorname{Re}(P)) = \operatorname{Re}(P) \\ \sigma(\operatorname{Im}(P)) = -\operatorname{Im}(P) \end{cases}$$

若 $X = Y$, 则能构造出 i 来。但这不满足上式, 矛盾。

这个定理完全揭示了在三个基本公理的系统下可构造集的代数结构。

3. 四公理系统

根据折纸的常识, 我们试着从实际折纸动作中衍生出更多适用的公理:

(4) 任一角的角平分线可以被折出。

加入该公理后, 新公理系统的可构造集用 π 表示。我们同时减弱公理 0 的初始条件, 仅保留 0 和 1 作为初始点。但我们将很快发现, 这样的削弱远不能抵消公理 4 的强大作用。例如, 这次可以明显得到 $X = Y$ 。

这个公理系统新获得的主要能力是构造各种长度的线段。具体言之, X 要求对函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ 封闭。将这样的最小实数集记为 \mathcal{P} , 那么我们立刻有:

定理 3.1 $\pi = \mathcal{P} \oplus i\mathcal{P}$ 是一个域。

4. 五公理系统

前面的公理出现了点与点(公理 3)、线与线(公理 4)的同一过程中留下的痕迹作为可构造线。受此启发并结合折纸实际, 我们添加一条新公理:

(5) 给定点 P, Q 与直线 l , 则能折出过 Q 的直线, 使得 P 关于该直线的对称点在 l 上。

对新的五公理系统, 以 0 与 1 作为初始点。对它的可构造集 \mathcal{E} 的代数结构进行分析, 我们得到一个著名的结果:

定理 4.1 \mathcal{E} 是对开平方保持封闭的 \mathbb{C} 的最小子域。

我们不证明这个定理, 而是来看看如何构造出平方根。首先给出公理 5 的几何直观:

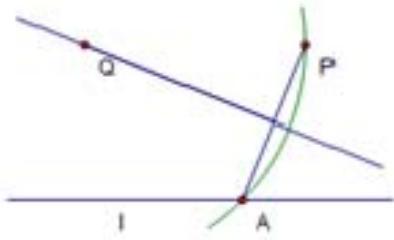


图 4 公理 5 的几何直观图

事实上，可以证明，反复地折叠，会得到抛物线的包络。从某种意义上说，我们获得了抛物线，从而开平方的问题也已解决。但是，得到包络总给我们一种进行了无数次操作的感觉。下面给出一个实际可操作的构造方法：

首先构造直线 $l_1: y = r$, $l_2: y = \frac{1}{4}$, $l_3: y = -\frac{1}{4}$ 。然后随意作它们的一条公垂线，分别交 l_1 , l_2 , l_3 于 Q , R , P 。对 P , Q 和 l_2 使用公理(5)，得到直线 m 。取 P 关于 m 的对称点 S ，那么 RS 的长即为 \sqrt{r} 。

5. 最终的六公理系统

我们加入最后一条，也是最关键的一条公理：

(6) (公切线) 给定直线 l , m 和点 P, Q , 那么使得 P, Q 关于它的对称点分别在 l , m 上的直线是可构造的，只要这样的直线存在。

我们用图形直观地给出它的几何解释。结合(5)，这是很容易理解的。

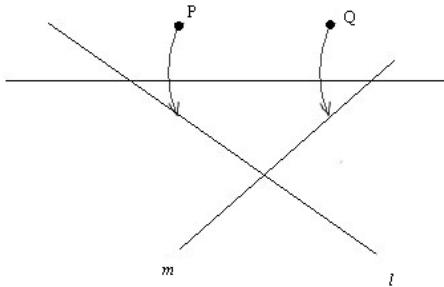


图 5 公理 6 的几何直观图

这个完整的公理系统对应的可构造集记为 \mathcal{O} 。它与实数集的交记为 \mathcal{O}_R 。容易得到 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_R \oplus i\mathcal{O}_R$ 。下面研究 \mathcal{O}_R 的代数性质。

考虑两条抛物线

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx, \quad y = \frac{x^2}{2}$$

其中 $a, b \in \mathcal{O}_R$ 。设它们的公切线斜率为 k 。通过计算，我们得到 $k^3 + ak + b = 0$ 。也就是说，在 \mathcal{O}_R 中三次方程是可解的。

于是得到下面的定理：

定理 5.1 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_R \oplus i\mathcal{O}_R$ 是一个域。其中 \mathcal{O}_R 是对开三次方与开平方封闭的 \mathbb{R} 的最小子域。

我们最后做些进一步的讨论。前面提到包络的问题时，我们已经怀疑：得到曲线的包络和得到曲线本身有多大区别呢？事实上，这个问题可以用射影几何的观念解决。

我们把研究对象从复平面扩充到含无穷远线的射影空间。由代数几何学的知识，该平面上的点可以被视为三数组 (x, y, z) 模去非零数量积所得的空间。 $z = 0$ 对应着无穷远线。在该空间上的非零实对称二次型 $F(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T$ 对应了其上的圆锥曲线 $F(x, y, z) = 0$ 。我们希望利用对偶曲线的理论，将切线转变为点。

事实上，曲线 $F(x, y, z) = 0$ 的对偶是 F 的全体切线满足的方程。设某切线的方程为 $ux + vy + wz = 0$ ，那么由代数几何知识， (u, v, w) 在射影空间中满足

$$\hat{F}(u, v, w) = (u, v, w)A^*(u, v, w)^T = 0$$

其中 A^* 是 A 的古典伴随方阵。并且不难证明 $\hat{F} = F$ 。^[4]由此，我们得到：

利用公理 5，可以在射影空间中作一条抛物线。

利用公切线公理，可以在射影空间中求得抛物线的交点，进而就在复平面上求得抛物线的交点。

注意到古典伴随方阵的计算仅仅依赖于有理运算。这样一来，曲线就和包络在某种意义上等同起来了。

作为这个结论的具体应用，我们可以对四次方程 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ 直接求解。它等价于两条抛物线

$$\begin{cases} y = x^2 \\ \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -b\left(x + 4c - \frac{a^2}{4b}\right) \end{cases}$$

的交点。容易看出，利用对偶的方法，我们最后把它归结成了二次方程与一次方程的联立求解。正是公理 6，把代数求解过程中降到三次的过程一步完成。

三、展望与应用

1.第七公理

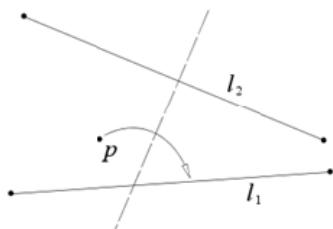


图 6 第七公理

Koshiro Hatori 发现，折叠还有另外的操作，称之为第七公理：

(7) 已知一点 p 和两直线 l_1 及 l_2 ，存在折叠使 p 过 l_1 ，且折痕垂直于 l_2 。

第 7 公理的意义在于，它是一种与前面六种完全不同的折纸操作。Robert Lang 证明，这七个公理的体系可以完成一切可能的折纸操作，是完备的。任何折纸操作无非是七种之一。^[5] 但实际上，如果仅就生成点集的角度说，七个公理并不都是必要的。事实上，只要有最强的第六公理，和基本的第一公理，其它的公理操作就可以被代替。^[6]

2. 折叠形

若把折痕作为连接两刚性平面的转轴，我们可以折出很多空间中的图形(flat origami crease pattern)，这在实际应用中是很有意义的。^[7] 例如曾应用于空间科学的 Miura-ori 地图折叠。

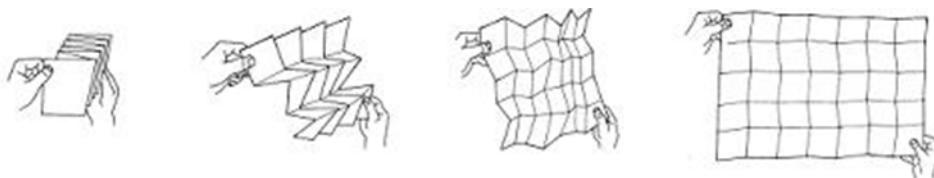


图 7 Miura-ori 地图折叠

对于这样折出来的在三维空间中的图形(称为折叠形)，我们可以考量在顶点的性质。^[8] 确定平面的一面为“外面”，则可以定义一条折痕为“凹”或“凸”。对于最基本的情形，也就是只有一个顶点的折叠形(flat vertex folds)有如下定理

(Maekawa) 单顶点折叠形顶点上凸折痕与凹折痕数目相差 2.

推论：单顶点折叠形的顶点连接的棱是偶数条。

一个更有意思的定理是这样的：

(Meguro) 折叠形的面可以被两种颜色不相邻的涂满(2-face colorable)。

证明：考虑其对偶图形，一个回路只绕一个面，由推论知是偶回路。如果包含多个面，则每个面的边界是偶数条边，减去重复的(一来一回)，仍是偶数。对偶图形不存在奇回路，故顶点可被二着色，故原图形是也可被二着色。

还有一个看似容易的定理：^[9]

(Kawasaki) 在一个顶点上的角，依次记为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ ，则有

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = 180$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = 180$$

也就是说，相隔角度的和是 180 度。

对于只有一个顶点的折叠形，Kawasaki 定理的逆定理同样成立。也就是说，若顶点满足这个角度条件，则该图形可以被折出。但折叠形有多个顶点时，逆定理不成立。

尽管我们已经得到了这么多有趣的结论，但折纸还有更多的乐趣，等待着我们去发现。

四、致谢

感谢肖杰老师精彩的讲课以及对这份报告的关注与支持。

参考文献

- (1) [2008-06-28] <http://hi.baidu.com/jiuaidiy/blog/item/e727a5a19c5c5b8847106413.html>
- (2) 张贺佳. 折纸与尺规作图[J]. 数学通报, 2007(10), 58-59.
- (3) 冯克勤, 代数数论讲义(教学用内部资料).
- (4) Hartshorne, R., 冯克勤等译, 代数几何, 北京科学出版社, 2001.7.
- (5) LANG, Robert J., Origami and Geometric Constructions. [2008-06-28]. http://www.Langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf
- (6) [2008-06-28] <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>
- (7) [2008-06-28] <http://www.origami-resource-center.com/origami-science.html>
- (8) [2008-06-28] <http://www.paperfolding.com/math/>
- (9) [2008-06-28] <http://kahuna.merrimack.edu/~thull/combgeom/combgeom.html>

《荷思》第一期勘误

- 1.《数学的用场与发展》第2页“数与量”第2段“因此致学的用处”应为“因此数学的用处”。
- 2.《三次数学危机中的问题猎手》第63页第1节“解决了第一次数学问题”应为“解决了第一次数学危机”；第65页第3节“法国数学家策墨罗”应为“德国数学家策墨罗”。
- 3.第66页数学家趣闻“Hausdroff 空间”应为“Hausdorff 空间”。
- 4.《天才与愚蠢——埃瓦里斯·伽罗瓦的悲剧故事》第70页倒数第4段“Hio”应为“Hic”。

Mathematical Quotations

Gauss, Karl Friedrich (1777-1855)

I mean the word proof not in the sense of the lawyers, who set two half proofs equal to a whole one, but in the sense of a mathematician, where half proof = 0, and it is demanded for proof that every doubt becomes impossible.

De Morgan, Augustus (1806-1871)

[When asked about his age.] I was x years old in the year x^2 .

An extension of the theorem of contraction mapping and fixed point¹

胡悦科²

(I) A specific problem

T is a mapping on Banach space and satisfies

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha[p\|Tx - y\| + (1-p)\|x - Ty\|] , \quad (*)$$

where $0 < \alpha < 1$, $0 \leq p \leq 1$, and x, y are any two points in the space. One can claim that there is a unique point in the space that satisfies $Tx = x$.

Lemma 1. For any trial point x , the sequence $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$ is bounded.

Proof. Define index sets $A_k = \{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$ for $k \geq 0$. Define $M_k = \max_{i \in A_k} \|T^i x - x\|$. Then

for $i \in A_{k+1} \setminus A_k$

$$\|T^i x - x\| \leq \|T^i x - T^{2^k} x\| + \|T^{2^k} x - x\| \leq \|T^i x - T^{2^k} x\| + M_k$$

For the first term on the right, apply $(*)$ once and one gets

$$\|T^i x - T^{2^k} x\| \leq \alpha[p\|T^i x - T^{2^{k-1}} x\| + (1-p)\|T^{i-1} x - T^{2^{k-1}} x\|]$$

Apply $(*)$ to every term on the right and one gets

$$\begin{aligned} \|T^i x - T^{2^k} x\| &\leq \alpha^2 [p^2 \|T^i x - T^{2^{k-2}} x\| + 2p(1-p)\|T^{i-1} x - T^{2^{k-2}} x\| \\ &\quad + (1-p)^2 \|T^{i-2} x - T^{2^{k-2}} x\|] \end{aligned}$$

Carry out the process for a total of 2^k times and one gets

$$\begin{aligned} \|T^i x - T^{2^k} x\| &\leq \alpha^{2^k} [p^{2^k} \|T^i x - x\| + \binom{2^k}{1} p^{2^{k-1}} (1-p) \|T^{i-1} x - T^1 x\| \\ &\quad + \binom{2^k}{2} p^{2^{k-2}} (1-p)^2 \|T^{i-2} x - T^2 x\| + \dots + (1-p)^{2^k} \|T^{i-2^k} x - T^{2^k} x\|] \end{aligned}$$

For any term on the right which has the form of $\|T^{i-j} x - T^j x\|$, where $1 \leq j \leq 2^k$

$$\|T^{i-j} x - T^j x\| \leq \|T^{i-j} x - x\| + \|x - T^j x\| \leq 2M_{k+1}$$

Thus

¹ 本文是作者在 2008 年春季学期泛函分析课程中推导出的结果。

² 基数 52。

$$\begin{aligned}\|T^i x - T^{2^k} x\| &\leq 2\alpha^{2^k} M_{k+1} [p^{2^k} + \binom{2^k}{1} p^{2^k-1} (1-p) + \binom{2^k}{2} p^{2^k-2} (1-p)^2 + \dots + (1-p)^{2^k}] \\ &= 2\alpha^{2^k} M_{k+1}\end{aligned}$$

Suppose i_0 is the index that $\|T^i x - x\|$ reaches M_{k+1} . If $i_0 \in A_{k+1} \setminus A_k$, then from result above one gets $M_{k+1} \leq 2\alpha^{2^k} M_{k+1} + M_k$, or $M_{k+1} \leq M_k / (1 - 2\alpha^{2^k})$ for large enough k such that $1 - 2\alpha^{2^k} > 0$. Otherwise, if $i_0 \in A_k$, then $M_{k+1} \leq M_k$, and the relation $M_{k+1} \leq M_k / (1 - 2\alpha^{2^k})$ also holds. Thus for any $N > k$

$$M_N \leq M_k \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^k}} \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^{k+1}}} \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^{k+2}}} \dots \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^{N-1}}}$$

The product $\frac{1}{1 - 2\alpha^{2^k}} \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^{k+1}}} \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^{k+2}}} \dots \frac{1}{1 - 2\alpha^{2^{N-1}}} \dots$ converges if and only if the

summation $\sum_{i \geq k} \ln(1 - 2\alpha^{2^i})$ converges. And the convergence of latter is equivalent to the

convergence of $\sum_{i \geq k} 2\alpha^{2^i}$, which is quite obvious. So there is an upper bound on M_k .

QED

Define $M = \sup\{\|T^i x - x\|\}$. According to the lemma, it is finite.

Corollary. For any point x , the sequence $\{x, Tx, T^2 x, T^3 x, \dots\}$ converges to some point x_0

Proof. Suppose $m \geq n$, then apply (*) n times. As in the proof of lemma 1, one gets

$$\begin{aligned}\|T^m x - T^n x\| &\leq \alpha^n [p^n \|T^m x - x\| + \binom{n}{1} p^{n-1} (1-p) \|T^{m-1} x - T^1 x\| \\ &\quad + \binom{n}{2} p^{n-2} (1-p)^2 \|T^{m-2} x - T^2 x\| + \dots + (1-p)^n \|T^{m-n} x - T^n x\|] \\ &\leq 2\alpha^n M\end{aligned}$$

Obviously it goes to 0 when $m, n \rightarrow \infty$. $\{x, Tx, T^2 x, T^3 x, \dots\}$ is a Cauchy sequence and converges to some point x_0 in the space.

QED

Lemma 2. For T that satisfies (*), it has a fixed point.

Proof. The only thing one has to do is to prove that for the convergent sequence $\{T^i x\}$, its limit point x_0 is a fixed point. Let $x = T^n x$, and $y = x_0$ in the inequality (*), then

$$\|T^{n+1}x - Tx_0\| \leq \alpha[p\|T^{n+1}x - x_0\| + (1-p)\|T^n x - Tx_0\|]$$

Let $n \rightarrow \infty$, one gets

$$\|x_0 - Tx_0\| \leq \alpha[p\|x_0 - x_0\| + (1-p)\|x_0 - Tx_0\|] = \alpha(1-p)\|x_0 - Tx_0\|$$

It holds only when $\|x_0 - Tx_0\| = 0$. This is what we want. QED

Lemma 3. T has at most one fixed point.

Proof. Suppose $Tx = x$ and $Ty = y$. Apply (*),

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq \alpha[p\|Tx - y\| + (1-p)\|x - Ty\|] = \alpha\|x - y\|$$

It holds only when $\|x - y\| = 0$. QED

Thus the claim in the beginning is proved.

(II) General cases

For T that satisfies(*), there is a much easier way to prove that $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$ converges. But the method used above can be applied to more general cases. Consider T that satisfies

$$\|T^m x - T^n y\| \leq \alpha \sum_{i=1}^t p_i \|T^{m-a_i} x - T^{n-b_i} y\| \quad (**)$$

Where $\sum_{i=1}^t p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, integers $a_i, b_j \geq 0$, $\max\{a_i\} \leq m$, $\max\{b_i\} \leq n$.

Lemma 4. For mapping that satisfies(**), the sequence $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$ is bounded for any point x .

Proof. Define A_k and M_k as one does in the proof of lemma 1. Use $\begin{pmatrix} n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_t \end{pmatrix}$,

$\sum_{i=1}^t s_i = n$ to denote the coefficient of the term $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_t}$ when one expands

$(p_1 + p_2 + \cdots + p_t)^n$. Define $l_k = [\min_{1 \leq i \leq t} \{2^k / a_i, 2^k / b_i\}]$, where $[x]$ is the largest integer that

is no larger than x . For large enough k such that $2\alpha^{l_k} < 1$, one has similar results as in

lemma 1. For $i \in A_{k+1} \setminus A_k$

$$\|T^i x - x\| \leq \|T^i x - T^{2^k} x\| + M_k.$$

Then apply (**) l_k times to the first term on the right

$$\|T^i x - T^{2^k} x\| \leq \alpha^{l_k} \sum_{s_1 + \dots + s_t = l_k} \binom{l_k}{s_1 \ s_2 \ \dots \ s_t} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t} \|T^{i-s_1 a_1 - \dots - s_t a_t} x - T^{2^k - s_1 b_1 - \dots - s_t b_t} x\|$$

Notice that $i - s_1 a_1 - \dots - s_t a_t$ and $2^k - s_1 b_1 - \dots - s_t b_t$ in the terms on the right are always larger than or equals 0, according to the definition of l_k .

Then $\|T^{i-s_1 a_1 - \dots - s_t a_t} x - T^{2^k - s_1 b_1 - \dots - s_t b_t} x\| \leq 2M_{k+1}$ holds for all terms on the right, and

$$\|T^i x - T^{2^k} x\| \leq 2\alpha^{l_k} M_{k+1} \sum_{s_1 + \dots + s_t = l_k} \binom{l_k}{s_1 \ s_2 \ \dots \ s_t} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t} = 2\alpha^{l_k} M_{k+1}$$

$$M_{k+1} \leq M_k / (1 - 2\alpha^{l_k})$$

Notice that as k adds up, l_k also increases. Then for large enough k , $\sum_{i \geq k} 2\alpha^{l_i}$ is smaller than $\sum_{j \geq 1} 2\alpha^j$ (the set $\{l_i\}_{i \geq k}$ being just a subset of all positive integers) and thus converges.

So M_k have an upper bound M .

QED

Corollary. For T that satisfies (**) and any point x , the sequence $\{x, Tx, T^2 x, T^3 x, \dots\}$ converges to some point x_0 .

Lemma 5. For T that satisfies (**), there is at most one fixed point.

Lemma 6. Suppose $m \geq 1, n = 1$, then the limit point x_0 for a convergent sequence

$\{x', Tx', T^2 x', T^3 x', \dots\}$ is the fixed point for T

Proof. Let $x = T^k x'$, and $y = x_0$ as in the proof of lemma 2. Apply (**)

$$\|T^{m+k} x' - Tx_0\| \leq \alpha \left[\sum_{b_i=1} p_i \|T^{m+k-a_i} x' - x_0\| + \sum_{b_i=0} p_i \|T^{m+k-a_i} x' - Tx_0\| \right]$$

Let $k \rightarrow \infty$, one gets

$$\|x_0 - Tx_0\| \leq \alpha \sum_{b_i=0} p_i \|x_0 - Tx_0\|$$

It holds only when $\|x_0 - Tx_0\| = 0$.

QED

There is some difficulty to prove that the limit point x_0 is the fixed point for T when both m and n is larger than 1. The condition of continuity of T is required to deal with such cases easily. Then one can apply the limit process on both sides of the equation $T^{n+1}x = T \circ T^n x$ and claim that the limit point is the fixed point. Thus the following theorem is now valid.

Theorem. If a mapping T on Banach space satisfies

$$\|T^m x - T^n y\| \leq \alpha \sum_{i=1}^t p_i \|T^{m-a_i} x - T^{n-b_i} y\|,$$

where $\sum_{i=1}^t p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, $a_i, b_j \geq 0$, $\max\{a_i\} \leq m$, $\max\{b_i\} \leq n$. And if m or n equals 1, or T is continuous, then there is a unique fixed point for T .

Mathematical Quotations

Hardy, Godfrey H. (1877 – 1947)

The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas, like the colors or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in this world for ugly mathematics.

Hilbert, David (1862–1943)

Mathematics knows no races or geographic boundaries; for mathematics, the cultural world is one country.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍的新证明

王力*

编者按：本刊第一期《 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍的证明》一文刊出后，王力同学给出了一个只有短短几行的新证明。我们将其整理、刊登于此，以飨读者。这一方法充分显示了微积分的威力。

考虑微分算子 $D = z \frac{d}{dz}$, 其定义为

$$Df(z) = zf'(z),$$

其中 $f(z)$ 是 z 的光滑函数。

易见 $Dz^n = nz^n$, 从而 $D^k z^n = n^k z^n$ 。特别地, $n^k = D^k z^n|_{z=1}$ 。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^k z^n}{n!} \Big|_{z=1} = D^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Big|_{z=1} = D^k e^z|_{z=1}.$$

等式右边是 z 的整系数多项式与 e^z 之积在 $z = 1$ 处的值, 故为 e 的整数倍。

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^i z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^i z^n}{n!}$ 在 \mathbb{R} 上内闭一致收敛, $i = 0, 1, \dots, k$, 所以上面将 D 与无穷求和号交换的操作是合理的。

数学笑话

谁没修养

A,B 俩数学教授为一事吵个不休。A 教授认为现在社会上的人都没有什么数学修养, 即便是在学校中学过数学知识, 离开学校后也忘了个干净。B 教授却不同意这观点。两人吵到中午, 肚子饿了, 就决定去餐馆吃饭。A 教授还有点小事, 让 B 教授先去餐馆占位。

B 教授占了位子, 突然计上心来, 把服务员小姐叫来: “等下我会问你一个问题, 你就回答 ‘ x 的三次方除以三’。”

“ x 的三次……方除以三?”

“对, 就这么答。”

A 教授到了, 两人点好了饭菜, B 教授不经意地问了服务员小姐一句: “您知道 x 平方的原函数吗?”

“ x 的三次方除以三。”服务员小姐回答得挺溜, 刚想要回柜台, 突然想了想刚才的话, 又回头说: “呃, 先生, 我觉得是不是还要再加个常数。”

*原基数 53 班同学, 现已到法国巴黎高等师范学校学习。

有界线性算子逐点收敛的极限未必有界¹

杜升华²

我们知道，定义在一个 Banach 空间上的有界线性算子序列逐点收敛的极限一定是有界线性算子，这是一致有界性原理（Banach-Steinhaus 定理）的简单推论。但是，这对不完备的赋范线性空间来说一般是不对的。下面给出一个反例：

令 $X = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_1 \mid \exists 0 < \varepsilon < 1 \text{ s.t. } x_n = O(\varepsilon^n) \text{ as } n \rightarrow \infty\}$ ，首先验证 X 是线性空间。任取 $x = (x_1, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in X$ ，设 $x_n = O(\varepsilon_1^n), y_n = O(\varepsilon_2^n)$ ($n \rightarrow \infty$)， $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1$ ，任取 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ，则 $\alpha x_n + \beta y_n = O(\varepsilon_2^n)$ ($n \rightarrow \infty$)，从而 $\alpha x + \beta y \in X$ 。采用 l_1 的诱导范数使 X 成为赋范线性空间。³

定义 $T_n : X \rightarrow X$ 为 $T_n(x) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, 0, \dots, 0, \dots)$ ，其中 $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ 。易见 $T_n \in B(X, X)$ 且 $\|T_n\| = n$ 。任取 $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in X$ ，设当 $n \geq N$ 时 $|x_n| \leq C\varepsilon^n$ 。定义 $T(x) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots)$ ，则 $nx_n = nO(\varepsilon^n) = O((\sqrt{\varepsilon})^n)$ ， $n \rightarrow \infty$ ，故 $T(x) \in X$ 。由此定义了一个线性算子 $T : X \rightarrow X$ 。当 $n \geq N$ 时，

$$\|T(x) - T_n(x)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |kx_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} Ck\varepsilon^k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

即在 l_1 范数意义下 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x)$ 。

但 T 并不是有界线性算子。事实上，设 $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ 为第 k 分量为 1、其余分量为 0 的向量，则 $e_k \in X$ ， $\frac{\|T(e_k)\|}{\|e_k\|} = k$ 。故 $T \notin B(X, X)$ 。

有界线性算子理论中（同时也是线性泛函分析中）另两个最重要的定理是闭图像定理和有界逆定理。同一致有界性原理一样，“Banach 空间”的条件对它们是必不可少的。从上面的反例中，我们可以清楚地看到这一点。

事实上，算子 T 是一个单满射，其逆映射 $T^{-1} : X \rightarrow X$ 定义为：

¹ 本文主体部分为作者在 2008 年春季学期泛函分析课学习过程中构造出的反例，选入本刊时添加了对闭图像定理、有界逆定理的讨论。为使低年级同学能够理解这个反例的意义，我们在文末附上有界线性算子理论中三个最重要的定理和一些相关概念的表述（假定读者已了解有关赋范线性空间的最基本的概念）。

² 基数 53。

³ 亦可将 X 取作有限序列全体组成的线性空间，即 $X = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in l_1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ 。

$T^{-1}(x) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots \right)$, 其中 $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ 。显然 $T^{-1} \in B(X, X)$ 且 $\|T^{-1}\| = 1$, 但 $T \notin B(X, X)$ 。此外, T 作为有界线性算子 T^{-1} 的逆, 容易验证它是闭的。

附：三个重要定理和一些相关概念

有界逆定理：设 X, Y 为 Banach 空间, $A \in B(X, Y)$ 为单满射, 则 $A^{-1} \in B(Y, X)$ 。

闭图像定理：设 X, Y 为 Banach 空间, $A: X \rightarrow Y$ 为闭映射, 则 $A \in B(X, Y)$ 。

一致有界性原理 (Banach-Steinhaus 定理)：设 X 为 Banach 空间, Y 为赋范线性空间, $W \subset B(X, Y)$ 满足 $\sup_{A \in W} \|A(x)\| < \infty, \forall x \in X$, 则 $\exists 0 < M < \infty$ 使得 $\|A\| \leq M, \forall A \in W$ 。

有界线性算子及其范数：设 X, Y 为赋范线性空间, $A: X \rightarrow Y$ 为线性算子, 若 $\sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} < \infty$, 则称 A 为有界线性算子, 并记其范数为 $\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$ 。由 X 到 Y

的有界线性算子全体记为 $B(X, Y)$ 。

闭映射：设 X, Y 为赋范线性空间, D 为 X 的子空间, $A: D \rightarrow Y$ 为线性算子, 若对于满足 $x_n \rightarrow x \in X, A(x_n) \rightarrow y \in Y$ 的任意序列 $\{x_n\} \subset D$ 均有 $x \in D$ 且 $A(x) = y$, 则称 A 为闭的线性算子。

数学家趣闻

▲ John Horton Conway (1937-) 是个迷人且精力充沛的教师, 上课时经常双手在空中挥舞, 并不时像狮子一样吼叫以引起学生的注意。有时他在讲一个定理前会躺到讲台上, 闭上眼睛, 过几分钟后起来说: “这个定理实在太美妙了! 我必须休息一会儿再讲。去年我讲这个定理的时候, 由于上下跳动得太厉害, 把裤子给裂开了。”

他总是走进教室, 甩掉凉鞋, 然后开始上课; 他穿上凉鞋就意味着下课。

▲ Jacques Hadamard 去意大利 Bologna 开 1928 年国际数学家大会, 其间要坐火车去一个地方。车厢里有很多人在聊天, 他觉得十分累, 就出了道困难的数学题, 众人思考这道题, 车厢里马上安静下来了, 于是 Hadamard 就可以睡觉了。

方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ 初值问题的解*

杜升华 林印 刘立达 王子卓

考虑如下方程的定解问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty). \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

其中 a 为正的常数。

- (i) 找出一种解 (1)-(2) 的方法或找出问题 (1)-(2) 的一个解 $u(x, t)$ 。
- (ii) 试找出关于 ϕ 和 ψ 的最优的充分条件, 使得 (你找到的) $u(x, t)$ 属于 $C^{4,2}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ 或 $C^{0,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^{4,2}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ 。
- (iii) 对于问题 (1)-(2) 在 $C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ 中定义一种广义解。该广义解是唯一的吗?
- (iv) 对于问题 (1)-(2) 是否有任何最大值原理成立? 解释你的理由。

(i) 对方程 (1)-(2) 关于 x 作 Fourier 变换:

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) + a^2 \xi^4 \hat{u}(\xi, t) = 0,$$

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi, 0) = \hat{\psi}(\xi).$$

解得

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi^2} \sin a\xi^2 t. \quad (3)$$

令

$$K_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \cos at\xi^2 d\xi,$$

$$K_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sin at\xi^2}{a\xi^2} d\xi.$$

对 (3) 两边作 Fourier 逆变换, 得

$$u(x, t) = (\phi * K_1)(x, t) + (\psi * K_2)(x, t).$$

而

$$K_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}at} \sin \left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4} \right),$$

*本文是 2008 年春季学期偏微分方程课程的 project 报告。作者均为基数 53 班同学。

$$K_2(x, t) = \frac{x}{2a} \left[S\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right) - C\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right) \right] + \sqrt{\frac{t}{\pi a}} \sin\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right).$$

其中 S, C 为菲涅尔 (Fresnel) 函数:

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi s^2}{2} ds, \quad C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi s^2}{2} ds.$$

于是得到形式解 $u(x, t)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x - \xi, t) \psi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sin \left[\frac{(x - \xi)^2}{4at} + \frac{\pi}{4} \right] \phi(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x - \xi}{2a} \left[S\left(\frac{x - \xi}{\sqrt{2\pi at}}\right) - C\left(\frac{x - \xi}{\sqrt{2\pi at}}\right) \right] + \sqrt{\frac{t}{\pi a}} \sin \left[\frac{(x - \xi)^2}{4at} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

(ii) K_1, K_2 的各阶导数如下:

$$\frac{\partial K_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{x^2 \cos\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{8at^2 \sqrt{\pi at}} - \frac{\sin\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{4t \sqrt{\pi at}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 K_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{12atx^2 \cos\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right) + (12a^2t^2 - x^4) \sin\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{32\sqrt{\pi}t^2(at)^{5/2}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial K_1(x, t)}{\partial x} = \frac{x \cos\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{4at \sqrt{\pi at}} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 K_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\cos\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{4at \sqrt{\pi at}} - \frac{x^2 \sin\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{8a^2t^2 \sqrt{\pi at}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 K_1(x, t)}{\partial x^3} = -\frac{x^3 \cos\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{16a^3t^3 \sqrt{\pi at}} - \frac{3x \sin\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{8a^2t^2 \sqrt{\pi at}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 K_1(x, t)}{\partial x^4} = \frac{-12atx^2 \cos\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right) + (x^4 - 12a^2t^2) \sin\left(\frac{x^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right)}{32\sqrt{\pi}(at)^{9/2}} \quad (10)$$

$$\frac{\partial K_2(x, t)}{\partial t} = \frac{\cos \frac{x^2}{4at} + \sin \frac{x^2}{4at}}{2\sqrt{2\pi at}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 K_2(x, t)}{\partial t^2} = \frac{-(2at + x^2) \cos \frac{x^2}{4at} + (-2at + x^2) \sin \frac{x^2}{4at}}{8a^{3/2}\sqrt{2\pi}t^{5/2}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial K_2(x, t)}{\partial x} = \frac{S\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right) - C\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right)}{2a} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 K_2(x, t)}{\partial x^2} = \frac{t \left(-\cos \frac{x^2}{4at} + \sin \frac{x^2}{4at} \right)}{2\sqrt{2\pi}(at)^{3/2}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 K_2(x, t)}{\partial x^3} = \frac{tx \left(\cos \frac{x^2}{4at} + \sin \frac{x^2}{4at} \right)}{4\sqrt{2\pi}(at)^{5/2}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^4 K_2(x, t)}{\partial x^4} = \frac{t \left[(2at + x^2) \cos \frac{x^2}{4at} + (2at - x^2) \sin \frac{x^2}{4at} \right]}{8\sqrt{2\pi}(at)^{7/2}} \quad (16)$$

由 (6)、(10)、(12)、(16) 可见 K_1 和 K_2 满足方程 (1)。而 $K_1(x - \xi, t)$ 和 $K_2(x - \xi, t)$ 关于 x 和 t 的各阶导数均能被关于 ξ 的不超过 4 次的多项式控制，根据积分号下求导的控制收敛定理，当 ϕ 和 ψ 满足

$$\phi(x), \psi(x) \in C(-\infty, +\infty), \quad x^4 \phi(x), x^4 \psi(x) \in L(-\infty, +\infty) \quad (17)$$

时（易见此时 $x^k \phi(x), x^k \psi(x), k = 0, 1, 2, 3$ 也是可积的），有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 K_1(x - \xi, t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 K_1(x - \xi, t)}{\partial x^4} \right) \phi(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 K_2(x - \xi, t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 K_2(x - \xi, t)}{\partial x^4} \right) \psi(\xi) d\xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

即由 (4) 式给出的 u 满足方程 (1)；并且 $u \in C^{4,2}(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ 。

为验证满足初值条件，注意到由 (4) 给出的 u 等价于对 (3) 作 Fourier 逆变换：

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi^2} \sin a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (18)$$

若要求

$$\hat{\phi}(\xi), \hat{\psi}(\xi) \in L(-\infty, +\infty), \quad (19)$$

则当 $0 < t < 1$ 时，被积函数能被 $|\hat{\phi}(\xi)| + |\hat{\psi}(\xi)|$ 控制。从而由控制收敛定理和反演公式得

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{\phi}(\xi) d\xi = \phi(x).$$

若进一步要求

$$\xi^2 \hat{\phi}(\xi) \in L(-\infty, +\infty), \quad (20)$$

则可对 (18) 式关于 t 在积分号下求导：

$$u_t(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(-a\xi^2 \hat{\phi}(\xi) \sin a\xi^2 t + \hat{\psi}(\xi) \cos a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (21)$$

再由控制收敛定理和反演公式得

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_t(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi = \psi(x).$$

综上所述，当 ϕ, ψ 满足条件 (17)、(19)、(20) 时，由 (4) 式给出的 $u(x, t)$ 是原问题在 $C^{0,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^{4,2}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ 中的解。

此外，若 $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ 满足

$$\xi^4 \hat{\phi}(\xi), \xi^2 \hat{\psi}(\xi) \in L(-\infty, +\infty), \quad (22)$$

则可对 (18) 式在积分号下关于 x 求直到 4 阶导、关于 t 求直到 2 阶导，即有 (21) 和如下等式成立：

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(-a^2 \xi^4 \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t - a\xi^2 \hat{\psi}(\xi) \sin a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (23)$$

$$u_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ie^{ix\xi} \left(\xi \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi} \sin a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (24)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{ix\xi} \left(\xi^2 \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a} \sin a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (25)$$

$$u_{xxx}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ie^{ix\xi} \left(\xi^3 \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\xi \hat{\psi}(\xi)}{a} \sin a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (26)$$

$$u_{xxxx}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\xi^4 \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\xi^2 \hat{\psi}(\xi)}{a} \sin a\xi^2 t \right) d\xi. \quad (27)$$

由此可见，在条件 (22) 下，以上各式中的被积函数均有控制函数，从而由控制收敛定理知 u 的各阶导数均连续，即此时由 (4) 式给出的 u 属于 $C^{4,2}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ 。

(iii) 设 $Q_T = (-\infty, +\infty) \times [0, T]$ 。在条件 (22) 下，易见 u 的各阶导数均在 Q_T 上有界。设 $\zeta \in C^{4,2}(Q_T) \cap L(Q_T)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \zeta(x, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (28)$$

将方程 (1) 两边乘以 ζ 并在 Q_T 上积分，得

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{tt} + a^2 u_{xxxx}) \zeta dx dt = 0.$$

分部积分，得

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u (\zeta_{tt} + a^2 \zeta_{xxxx}) dx dt \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t(x, T) \zeta(x, T) - \psi(x) \zeta(x, 0) - u(x, T) \zeta_t(x, T) + \phi(x) \zeta_t(x, 0)) dx = 0. \end{aligned}$$

若限定

$$\zeta(x, T) = 0, \quad \zeta_t(x, T) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

则有

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u (\zeta_{tt} + a^2 \zeta_{xxxx}) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi(x) \zeta_t(x, 0) - \psi(x) \zeta(x, 0)) dx = 0. \quad (30)$$

令 $\mathcal{D} = \{\zeta \in C^{4,2}(Q_T) \cap L(Q_T) \mid \zeta(x, T) = 0, \zeta_t(x, T) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \zeta(x, t) = 0, \forall t \in [0, T]\}$ ，定义问题 (1)-(2) 的广义解如下：

称 $u(x, t) \in C(Q_T)$ 为 Cauchy 问题 (1)-(2) 的广义解，如果对任意的 $\zeta(x, t) \in \mathcal{D}$ ，积分等式 (30) 总成立。

由上述推导过程可以看出，在条件 (22) 下，原问题的古典解一定是广义解。下面证明广义解的唯一性。

记微分算子 $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ 。设 $u_1(x, t)$ 、 $u_2(x, t)$ 同是 Cauchy 问题 (1)-(2) 的广义解，即它们都满足等式 (30)。作差后得到

$$\iint_{Q_T} (u_1 - u_2) \square \zeta dx dt = 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

设 $g(x, t) \in C_0^\infty(Q_T)$ ，考虑定解问题

$$\begin{cases} \square \zeta = g(x, t), \\ \zeta(x, T) = \zeta_t(x, T) = 0. \end{cases}$$

对它关于 x 作 Fourier 变换，得

$$\begin{cases} \hat{\zeta}_{tt}(\xi, t) + a^2 \xi^4 \hat{\zeta}(\xi, t) = \hat{g}(\xi, t), \\ \hat{\zeta}(\xi, T) = \hat{\zeta}_t(\xi, T) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\hat{\zeta}(\xi, t) = \int_t^T \cos a\xi^2(t-\tau) \int_\tau^T \hat{g}(\xi, s) ds d\tau. \quad (31)$$

记 $S_T = \{\zeta \in C^\infty(Q_T) | \sup_{(x,t) \in Q_T} |x^\alpha \frac{\partial^{\beta+\gamma}}{\partial x^\beta \partial t^\gamma} \zeta(x, t)| < \infty, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}\}$ 为 Q_T 上的速降函数空间。易见 S_T 中函数满足 (28) 式。由于 $g(x, t) \in C_0^\infty(Q_T)$ ，从而 $g(x, t) \in S_T$ ，故 $\hat{g}(\xi, t) \in S_T$ 。因此 (31) 式右边属于 S_T ，从而 $\zeta(x, t) \in S_T$ 。这样我们证明了存在 $\zeta(x, t) \in \mathcal{D}$ 使得 $\square \zeta = g(x, t)$ 成立。

由此可知

$$\iint_{Q_T} (u_1 - u_2) g dx dt = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty(Q_T),$$

从而 $u_1 = u_2$ 。

(iv) 因为在 u 的极值点处 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 并不具有确定的符号，所以我们猜想对方程 (1) 没有极值原理成立（但尚未找到反例）。不过对于 Cauchy 问题 (1)-(2)，我们有如下的最大模估计：

在条件 (19) 之下，由 (18) 式得

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ix\xi}| \left| \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi^2} \sin a\xi^2 t \right| d\xi \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (|\hat{\phi}(\xi)| + t|\hat{\psi}(\xi)|) d\xi \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\|\hat{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R})} + T\|\hat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R})}), \quad \forall (x, t) \in Q_T \end{aligned} \quad (32)$$

A question in Pólya model

史灵生*

During my course of Stochastics, a question in Pólya model is asked by students from time to time. The question is why a fault assumption may lead to a seemingly ‘correct’ solution to the following problem (Exercise 1.23(d) [1]).

Pólya model. Suppose there are r red and b black balls in a box. Each time pick one randomly from the box and put back $d+1 \geq 0$ balls with the same color to the picked one. Show that the probability of picking a black ball any time is always $b/(b+r)$.

I first give a correct proof and then discuss the question by students.

Proof. Let B_i denote the event that the picked ball is black at the i th time, and assume that there are in total X_n black balls picked within the first n times. Then $X_n = \sum_{i=1}^n I_{B_i}$ and for $\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \cup \{m_1, m_2, \dots, m_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\}$, we have

$$P(B_{n_1} \dots B_{n_k} B_{m_1}^c \dots B_{m_{n-k}}^c) = \prod_{i=0}^{k-1} (b + di) \prod_{j=0}^{n-k+1} (r + dj) \prod_{l=0}^{n-1} (b + r + dl)^{-1}.$$

By the finite additivity, we obtain

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} (b + di) \prod_{j=0}^{n-k+1} (r + dj) \prod_{l=0}^{n-1} (b + r + dl)^{-1}.$$

Note that $P(B_{n+1} \mid X_n = k) = (b + kd)/(b + r + nd)$. Setting $b' = b + d$ and by the total probability law, we have

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n P(X_n = k) P(B_{n+1} \mid X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} (b + di) \prod_{j=0}^{n-k+1} (r + dj) \prod_{l=0}^n (b + r + dl)^{-1} \\ &= \frac{b}{b+r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} (b' + di) \prod_{j=0}^{n-k+1} (r + dj) \prod_{l=0}^{n-1} (b' + r + dl)^{-1} \\ &= b/(b+r). \quad \square \end{aligned}$$

Some students used an induction on n with a fault assumption of the distribution of X_n but resulting in the same value for $P(B_{n+1})$. Let us see how they did. By induction, $P(B_i) = b/(b+r)$

*清华数学系计算数学与运筹学研究所副教授, E-mail: lshi@math.tsinghua.edu.cn

for $i \leq n$. Then they thought $X_n \sim B(n, b/(b+r))$ (binomial distribution) by a mistake and went on with

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n P(X_n = k)P(B_{n+1} | X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{b+r}\right)^k \left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} \frac{b+kd}{b+r+nd} \\
&= \frac{b}{b+r+nd} + \frac{d}{b+r+nd} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{b}{b+r}\right)^k \left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b}{b+r+nd} + \frac{d}{b+r+nd} \frac{nb}{b+r} = \frac{b}{b+r}.
\end{aligned}$$

Why may this happen? In fact, we can compute $P(B_{n+1})$ as follows,

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n P(X_n = k)P(B_{n+1} | X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^n P(X_n = k)(b+kd)/(b+r+nd) \\
&= \frac{b}{b+r+nd} + \frac{d}{b+r+nd} \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) \\
&= \frac{b}{b+r+nd} + \frac{dEX_n}{b+r+nd}.
\end{aligned}$$

Thus it is easily seen that one would get the same value for $P(B_{n+1})$ whenever $EX_n = nb/(b+r)$ regardless of the distribution of X_n at all!

参考文献

- [1] 钱敏平和叶俊,《随机数学》,大学数学第二版,萧树铁主编,高等教育出版社,2004。

数学趣闻

Napoleon: You have written this huge book on the system of the world without once mentioning the author of the universe.

Laplace: Sire, I had no need of that hypothesis.

Later when told by Napoleon about the incident, Lagrange commented: Ah, but that is a fine hypothesis. It explains so many things.

谈数学分析中的 3 个结果*

马力†

摘要:

我们在这里要谈到的定理有 GRONWALL 不等式, 开映射问题的 JACOBIAN 定理, 和一个平均积分的极限。我们认为, 这些定理的证明在研究和学习中有典型的作用。

我们在这里讨论的 3 个典型定理可以应用到微分方程解的唯一性, 存在性问题和稳定性问题。事实上, 开映射问题就是一个存在性问题。目前常用的证明存在性方法就是压缩映射不动点定理方法, 变分方法和拓扑度方法 (这些也就是数学研究生非线性分析课程的基本内容)。GRONWALL 不等式主要是用来建立微分方程解的唯一性和稳定性的。表面上看这个办法仅仅是用不等式, 可实际上, 证明唯一性和稳定性就是玩不等式 (不等式和凸函数性质联系密切)。目前在椭圆偏微分方程中用的滑动平面法就是要用一种特殊的不等式——极值原理或者压缩映射原理。很多重要的数学结果的获得就是玩好了不等式。而我们谈到的平均积分的极限问题是在概率论中出现较多的问题, 也是很值得注意的。

在这里还要特别指出, 我们谈到的 3 个定理是和 3 个有名的数学家的名字有很多关系的。

§1 引言

我们在这里谈 3 个有意思的数学分析结果。

1. GRONWALL 不等式

定理 1: 假设 $f = f(t) \geq 0$ 是可微分的函数, 它满足

$$f'(t) \leq Af(t) + B,$$

这里 A 和 B 是正的常数. 那么我们有

$$f(t) \leq (f(0) + \frac{B}{A}) \exp(At).$$

2. 一个平均值定理

定理 2: 假设 $w(t)$ 是可积分的函数, 满足

$$\int_0^\infty |w(s)|ds < +\infty,$$

*本文是作者在烟台给大学生作的一场报告的讲稿。

†清华大学数学系基础数学研究所教授

那么我们有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t w(s) \frac{s}{t} ds \rightarrow 0.$$

3. JACOBIAN 定理

定理 3: 假设 $f = f(x)$ 是区域 $D \subset R^n$ 到 R^n 的 C^1 光滑函数, 这里 $x \in R^n$ 。如果 $\det(J(f)) \neq 0$ 在点 x_0 成立, 则 f 在 x_0 附近是一对一的的开映射。

这些定理的证明是有趣的。其中用到的方法对大学生以后进一步学习和研究数学有一定的积极作用。

§2 定理的证明

我们在本章节来给出以上 3 个定理的证明. 从证明中可以看出一些朴素而实用的分析手法. 比如, 我们要用到**变量代换方法**, **用到二分法和 $\epsilon - \delta$ 分析**, 再用到**连续函数在紧集合上取到最小值的基本紧性原理**. 希望大家能够看出我们这里的一些把困难问题转化成简单问题的手法.

§2.1 定理 1 之证明:

定义

$$g(t) = Af(t) + B.$$

于是有

$$f'(t) \leq g(t).$$

利用条件, 直接计算知道

$$g'(t) = Af'(t) \leq Ag$$

于是

$$(\log g)' \leq A(t)$$

积分之,

$$\log(g(t)/g(0)) \leq At$$

所以

$$g(t) \leq g(0) \exp(At) = (Af(0) + B) \exp(At)$$

注意到 $g(t) \geq Af(t)$, 我们有

$$Af(t) \leq (Af(0) + B) \exp(At).$$

由此直接得到结论。

§2.2 定理 2 之证明:

任取 $\epsilon > 0$, 我们有 $N_1 = N_1(\epsilon)$, 使得

$$\int_{N_1}^{\infty} |w(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.1)$$

再取

$$t > N_2 = \frac{2 \int_0^{N_1} |w(s)| s ds}{\epsilon},$$

于是

$$\int_0^t |w(s)| \frac{s}{t} ds \leq \int_0^{N_1} |w(s)| \frac{s}{t} ds + \int_{N_1}^t |w(s)| ds$$

注意到

$$\int_0^{N_1} |w(s)| \frac{s}{t} ds \leq \frac{1}{N_2} \int_0^{N_1} |w(s)| s ds \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

和

$$\int_{N_1}^t |w(s)| ds \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

我们就得到

$$\left| \int_0^t w(s) \frac{s}{t} ds \right| \leq \epsilon.$$

由此直接得到结论。

§2.3 定理 3 之证明:

这里我们利用压缩映射和扰动变分的思想来证明。这个证明方法源出于 YAMABE 的小文章 [3]。

回顾定义

$$J(f) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$$

简记 $J(x) = J(f)(x)$, 不妨设 $x_0 = 0$ 且 $f(0) = 0$ 。于是由连续性知 $\exists \epsilon > 0$ 使得当 $|x| \leq \epsilon$ 时,

$$|(J(x) - J(0))u| \leq (1 - \epsilon)|J(0)u|, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

注意到

$$f(x + y) - f(x) = \int_0^1 J(x + ty)y dt$$

如果

$$f(x + y) = f(x).$$

于是

$$0 = \left| \int_0^1 J(x + ty)y dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |J(0)y + \int_0^1 (J(x+ty) - J(0))y dt| \\
&\geq |J(0)y| - \left| \int_0^1 (J(x+ty) - J(0))y dt \right| \\
&\geq |J(0)y| - (1-\epsilon)|J(0)y| = \epsilon|J(0)y|
\end{aligned}$$

于是 $y = 0$. 这样就证明了单映射性质。

我们要证明开映射性质 (可以看成存在性问题), 只需要证明 $B(0, \delta) \subset f(B(0, \epsilon/2))$ 。
这里我们取

$$\delta = \frac{1}{2}\epsilon \min_{\partial B(0, \epsilon/2)} |J(0)x|$$

任取 $z \in B(0, \delta)$, 定义 $x_z \in B(0, \epsilon/2)$ 使得

$$|f(x_z) - z| = \min_{\bar{B}(0, \epsilon/2)} |f(x) - z|$$

对任何 $x \in \partial B(0, \epsilon/2)$ 我们有

$$|f(x)| \geq \epsilon|J(0)x| \geq 2\delta.$$

这样有

$$|f(x) - z| \geq \delta > |z| = |f(0) - z| \geq |f(x_z) - z|$$

从而

$$x_z \in B(0, \epsilon/2).$$

如果

$$f(x_z) - z \neq 0.$$

那我们求解线性方程

$$J(0)y = -\eta(f(x_z) - z), \quad (2.2)$$

这里我们取 $\eta > 0$ 很小使得 $x_z + ty \in \bar{B}(0, \epsilon/2)$, 其中 y 为上述方程的解。于是有

$$|f(x_z) - z| \leq |f(x_z + y) - z|.$$

我们在这里要利用 y 这个方向的扰动来看 $f(x_z + y) - z$ 的值。

首先注意到,

$$|f(x_z + y) - f(x_z) - J(0)y| \leq (1-\epsilon)|J(0)y|.$$

利用 2.2, 我们有

$$|f(x_z + y) - z| \leq |f(x_z + y) - f(x_z) - J(0)y| + |f(x_z) - z + J(0)y|$$

$$\leq (1-\epsilon)|J(0)y| + |f(x_z) - z + J(0)y|$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \epsilon)\eta|f(x_z) - z| + (1 - \eta)|f(x_z) - z| \\
&= (1 - \eta\epsilon)|f(x_z) - z|.
\end{aligned}$$

这样我们就得到了一个**压缩关系**(这里所谓压缩关系就是类似于不等式 $f \leq af + b$, 这里 $0 < a < 1$, 的关系)。

所以,

$$f(x_z) = z.$$

这样我们就证明了 f 的开映射性质。

§3 定理的推广和评注

现在我们要谈一下我们为什么这样选题来讲给大家。

我们找这么 3 个问题来谈, 是想要大家知道一些基本的思想在当今的数学研究中是很普遍使用的。比如第 3 个定理的思想在研究微分方程的存在性问题上是一个基本思想。我在这里挑 YAMABE 的这么一个证明来讲, 也是因为希望大家重视到 YAMABE 这个名字, 因为从这个人犯的一个错误开始, 出现了 YAMABE 问题。后来这个问题在 80 年代才由一些著名的数学家 Trudinger, Aubin, Schoen 解决。解决这个 YAMABE 问题引导出了一些有意思的数学技巧。Yamabe 问题可以看成是广义相对论中数学问题的一个特殊情况。在这里面会涉及到正质量猜想。不过宇宙质量的数学定义目前还是在研究中; 一些数学家提出的质量能做一些数学结果, 但是这样的质量, 比如 Brown-York 局部质量有单调减性, 不满足物理上的基本要求。与广义相对论中数学问题相关的 CLAY 百万美金数学问题之一是双曲的 YANG-MILLS 方程的适定性问题还在襁褓之中。我们希望学生有机会去看看关于这个问题的一些相关的文献。

利用我们做定理 3 的方法, 作为练习, 大家可以去证明一下

练习 1: 给定区域 $D \subset R^n$, 假设 $f(x)$ ($x \in D \subset R^n$) 是可微分的函数, f 在对某点 $x_0 \in D$ 的梯度 $\nabla f(x_0) \neq 0$, 证明存在一个方向 e 和区间 $[-T, T]$, 使得函数 $f(x_0 + te)$ 在 $t \in [-T, T]$ 上是单调增加的。

提示: 定义单位向量 $e = \nabla f(x_0)/|\nabla f(x_0)|$ 和函数

$$g(t) = f(x_0 + te).$$

于是,

$$g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot e = |\nabla f(x_0)| > 0.$$

我们谈第 2 个定理的目的, 是想强调, **分割, 分类的思想是很重要的**。这个小结论出现在 BOURGAIN 的一个论文中, 不过, 他没有给证明。在他的文章里的主题是研究 SCHRODINGER 方程组解在无穷远处的**破裂现象**。不过, 他那里给出的方程不自然。物理上关心的方程组还没有象他的那么好的结论。我们这里算是给他没有证的一个小结论补了一个证明。作为练习, 大家可以去证明一下定理 2 以下的推广形式:

练习 2: 假设 $w(t)$ 是可积分的函数, 满足

$$\int_0^\infty |w(s)|ds < +\infty.$$

那么 $\forall k > 0$, 我们有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t w(s) \frac{s^k}{t^k} ds \rightarrow 0$.

你们还可以找到更多的推广吗? ?

我们谈第一个定理, 是要说明在研究问题中, 简化问题是非常重要的步骤。当然, 这个不等式对研究的微分方程稳定性问题是基本的 [2]。实际上 TAO 的书的第一章基本上全是这个不等式及其相关的问题的研究。我们希望一些大学生能去研究他那里写的东西。

练习 3: 假设 $T > 0$, $g(t) > 0$, $f(t) > 0$ 是 $[0, T]$ 上连续的函数, 满足

$$f(t) - f(0) \leq \int_0^t g(s)f(s)ds.$$

证明:

$$f(t) \leq f(0) \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

练习 4: 假设 $T > 0$, $p > 0$, $g(t) > 0$, $f(t) > 0$ 是 $[0, T]$ 上连续的函数, 满足

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t (t-s)^p f(s)ds.$$

证明:

$$f(t) \leq g(t) + a \int_0^t B'_p(a(t-s))g(s)ds.$$

这里

$$a = \Gamma(p)^{1/p},$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$$

是著名的 GAMMA 函数且当 n 为正整数时有 $\Gamma(n) = (n-1)!$,

$$B_p(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{jp} / \Gamma(jp+1),$$

而

$$B'_p(z) = \frac{d}{dz} B_p(z).$$

提示: 定义

$$Bf(t) = \int_0^t (t-s)^p f(s)ds$$

利用归纳法知道:

$$f \leq \sum_{k=0}^{n-1} B^k g + B^n f$$

再用归纳法知道

$$B^n f = \int_0^t \Gamma(p)^n (t-s)^{np-1} f(s) ds / \Gamma(np) \rightarrow 0, \quad as \quad n \rightarrow \infty.$$

这个练习需要较大的计算量所以可能比较复杂。

后面这 2 个练习对研究微分方程的稳定性是非常重要的。

一个更复杂的问题是：

练习 5: 假设 $T > 0, p > 0, q > 0, p + q > 1, a > 0, f(t) > 0$ 是 $[0, T]$ 可连续的函数并且 $t^{q-1}f(t)$ 局部可积, 如果 f 满足

$$f(t) \leq a + \int_0^t (t-s)^p s^{q-1} f(s) ds.$$

证明：

$$f(t) \leq a B_{p,q}((\Gamma(p)^{1/(p+q-1)}) t).$$

这里

$$B_{p,q}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j s^{j(p+q-1)}$$

其中 $c_0 = 1, c_{j+1}/c_j = \Gamma(j(p+q-1)+q)/\Gamma(j(p+q-1)+p+q)$.

更多的结论大家可以去看我们下面列的文献 [1][2]。

从我们上面说的, 大家可以看出, 我们谈到的 3 个定理是和 3 个有名的数学家的名字有很多关系的。我们在这里讲这个, 是希望大家除了向自己的老师和同学学习外, 都能向数学大师们学习。我们希望大家在看别人工作的时候, 要能模仿人家写人家写出来的, 还能把很多人家没写细节也做出来。等以后的机会里, 我们会向大家介绍一些著名的数学问题的一些初等的方面。谢谢大家!

参考文献

- [1] Dan Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer Lect. Notes in Math.. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [2] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, CBMS regional series in mathematics, 2006
- [3] Hidehiko Yamabe, *A Proof of a Theorem on Jacobians*, The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 10 (Dec., 1957), pp. 725-726

无穷

杜升华 胡悦科 石权 吴昊

2008 年 6 月

编者按：本文是 2008 年春季学期数学史课的课程论文，选入本刊时添加了对文中涉及的数学家的简介。作者分别来自基数 53、基数 52、基数 51、基数 51。我们希望通过这篇文章为读者（尤其新生）提供一个了解数学思想发展历程、领略数学名家风采的平台。

伟大的德国数学家大卫·希尔伯特¹说：“无穷！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观点都不曾如此有效地激励人类的智力；然而，没有任何概念比无穷更需要澄清……”[1]

“无穷”这个概念在数学理论和数学发展史上占有特殊的重要地位。E.T. 贝尔²在其名著《数学精英》中写道 [2]：“从最早的时期开始，两个互相对立、有时又互相促进的趋势就统治着数学全部复杂的发展。粗略地说，这些就是离散和连续。”“连续”意味着从一个点到下一点没有“最短的”步长，或者说，根本就没有“下一个”点；这一概念同“无穷小”密切相关。而“离散”的正整数序列又涉及“无限”或“无穷大”的问题。因此，从这个意义上说，对关于“无穷”的问题的认识过程是数学发展的一条主线。

在两千多年的数学史上，人们对“无限”“无穷大”“无穷小”“极限”“连续”……这些概念的认识曾是如此的含糊不清，以至于三次震惊整个数学界的数学危机都由它们引起：第一次数学危机，是无理数的发现违背了毕达哥拉斯学派关于任何数都能用整数通过有限步四则运算表示的信条；第二次数学危机，是“无穷小”等概念的模糊性动摇了微积分的基础；第三次数学危机，是有关无穷集合的理论的创立带来了悖论。

在对待“无穷”这一重要概念及其引发的数学危机的态度上，存在着两大对立的数学思想学派 [2]：毁灭性的批判学派和建设性的批判学派。前者是谨慎的怀疑主义者，克罗内克³、布劳威尔⁴对近代数学分析基础的批判足以显示出这一派数学家思想的深刻性和敏锐性，不过拒绝继续前进走向新数学的他们在几乎没有犯什么错误的同时，也同样没

¹D. Hilbert, 1862–1943, 20 世纪最伟大的数学家之一。其数学贡献是巨大和多方面的，研究领域涉及代数不变式、代数数域、几何基础、变分法、积分方程、无穷维空间、物理学和数学基础等。他的公理化思想和在 1900 年国际数学家大会上提出的 23 个问题深刻影响着整个数学的发展。

²E. T. Bell, 1883–1960, 英国 – 美国数学家，在数值分析、解析数论和数学史等方面做出了贡献，其《数学精英》《数学的发展》等书在数学史上很有价值。

³L. Kronecker, 1823–1891, 德国数学家，主要贡献在数论、代数学、函数论、拓扑学等方面。

⁴L. E. J. Brouwer, 1881–1966, 荷兰数学家，主要贡献在数学基础和拓扑学方面。

有发现多少真理；后者是勇敢的先驱者，维尔斯特拉斯⁵、戴德金⁶、康托尔⁷建立的关于无限和连续的现代理论是这一派数学家创造的“对数学和一般的合理思想都具有高度意义的东西”，然而其中的一些可能遭到毁灭性的批判。这两大思想学派的斗争——其中大多与“无穷”相关——贯穿于整个数学发展的历史。让我们首先回溯它们的源头，看看古希腊数学中蕴含着哪些现代头脑。

§1 古代形体中的现代头脑

如果说“证明”是现代数学理所当然的真正精神，那么信奉“万物皆数”的古希腊毕达哥拉斯⁸学派最大的功绩就是把证明引入了数学。然而恰恰由于毕达哥拉斯定理（在我国亦称勾股定理），如下事实得到了证明：等腰直角三角形的斜边长与直角边长之比不是有理数，换句话说，它不能用整数通过有限步四则运算表示。这一严重冲击毕达哥拉斯学派信条的发现，打开了包含着无穷思想的潘多拉盒子。

无理数的发现引起的第一次数学危机，就像数学世界中的一场大地震。摆在此时的数学家面前的，有两种选择：一是停留在原地，并且要求别人也不要靠近那危险的裂痕；二是勇敢地跳过去，因为或许彼岸更安全。让我们先来看看一个拒绝一跳的人。

芝诺⁹提出了四个著名的悖论，深刻地反映了早期探索连续和无限的人们所遇到的困难。第一，二分法悖论。运动是不可能的，因为运动的物体在到达目的地之前必须到达路程的中间点，而在它到达中间点之前，它又必须到达路程的四分之一点，等等，没有穷尽。因此运动甚至永远不能开始。第二，阿基里斯¹⁰悖论。奔跑中的阿基里斯永远也不能超过在他前面慢慢爬行的乌龟，因为他必须首先到达乌龟的出发点，而当他到达那一点时，乌龟又向前爬了，所以仍在他前面。重复这个论点，我们很容易看出乌龟总是在前面。第三，箭的悖论，飞矢在任何瞬间都是既非静止也非运动。如果瞬刻是不可分的，箭就不能运动，因为如果它动了，瞬刻就立即是可分的了。但是时间由瞬刻组成，如果箭在任一瞬间都不动，它在任何时间内也不能动，因此它总是保持静止。第四，操场悖论。这一悖论主要涉及相对运动，与无穷关系不大，此处略去。

我们认为，芝诺的前两个悖论有一定相似之处。他都将一个事件描述为无穷过程，比如阿基里斯不断赶上之前的差距。然后他断言，因为过程的无穷，所以事件实际上无法发生（永远追不上）。从一方面看，他采用了不同的计算时间的度量，从而导致结论的不同；另一方面，这也反映了他对无穷过程的排斥，认为无穷无法达到。这与古希腊几何倡导的有限步实现的思想形成了有趣的照应。

这四个悖论对数学界和人类思想的影响是巨大的。“全部四个悖论构成了一堵铁墙，阻挡了一切进步的可能”。[2] 但仍有人越过铁墙，继续前进。欧多克斯¹¹提出划时代的比

⁵K. T. W. Weierstrass, 1815–1897, 伟大的德国数学家，主要贡献在数学分析、解析函数论、变分法、微分几何学等方面。他是把严格的论证引进分析学的一位大师。他的批判精神对 19 世纪数学产生很大影响。

⁶J. W. R. Dedekind, 1831–1916, 德国数学家，高斯的得意门生，主要贡献在实数理论和代数数论方面。

⁷G. F. L. P. Cantor, 1845–1918, 伟大的德国数学家，集合论的创始人。

⁸Pythagoras, 约前 569– 约前 500, 希腊哲学家、数学家、天文学家。

⁹Zeno, 约前 495– 约前 435, 希腊数学家、哲学家。

¹⁰Achilles, 希腊神话中的神行太保。

¹¹Eudoxus, 约前 408– 约前 355, 希腊天文学家、数学家。

例理论，使得人们可以像处理有理数一样处理具有无理数长度的几何量，在几何上回避了无理数的存在性问题，从而在当时的认识水平上解决了第一次数学危机。当然，这一问题的根本解决，要等到 19 世纪后半叶严格的实数理论建立之时才真正实现。阿基米德¹²发明了几个求曲线围成的平面图形的面积和求曲面围成的体积的方法，将穷竭法的威力发挥到极致；从这种无限地加细分割并取和的极限值的方法上看，阿基米德已领先于牛顿¹³和莱布尼茨¹⁴近两千年而发明了积分学。此外，欧几里得¹⁵关于素数有无穷多个的经典证明，被哈代¹⁶作为第一流的“真正”的数学定理的例证而引用 [3]；而在这里得到发扬光大的“反证法”（以及作为其逻辑基础的排中律），是与“无穷”有关的重要话题，我们在论及二十世纪初关于数学基础的激烈辩论时还会回到这点上来。

尽管古希腊有关“无穷”的思想和成就并不能与近现代无穷理论同日而语，但有了这些作为准备，一千多年后一门几乎处处涉及无穷的重要学科——分析学——的诞生，就不是偶然的了。

§2 无穷小分析的诞生与神学家的发难

虽然阿基米德穷竭法求解面积问题就已经有了微积分的思想，但穷竭法相当复杂，而且用途有限 [13]。尽管逻辑基础尚不完备，不必说微分和积分，甚至连函数这样的简单概念都存在问题（比如无理数取值的问题），但微积分已经显示出了巨大威力，解决了很多重要问题。17 世纪最伟大的数学家们，包括开普勒¹⁷，卡瓦列里¹⁸，费马¹⁹，当然还有牛顿和莱布尼茨，[13] 意识到了逻辑基础的缺陷，开始处理微积分的概念。他们每个人都做了自己的定义，其中以牛顿和莱布尼茨的贡献最大，两人被公认为微积分的奠基人。

他们的主要功绩在于：1. 把各种问题的解法统一成一种方法——微分法和积分法；2. 有明确的计算微分法的步骤；3. 微分法和积分法互为逆运算。由于运算的完整性和运用的广泛性，微积分成为解决问题的重要工具。同时关于微积分基础的问题也越来越严重——无穷小量究竟是什么。

牛顿制定微积分的过程先后经历了四个阶段 [4]，即：(1) 流数论的初建——《流数简论》。(2) 向不可分量的摇摆。(3) 成熟的《流数法》。《流数法》不再使用不可分无限小瞬而全面恢复了运动学观点。(4) “首末比法”的提出与改进。从 17 世纪 80 年代中期开始，牛顿关于微积分的基础在观念上发生了变革，这就是作为极限概念先导的“首末比法”的提出。摘录其中一部分：a. 在这里，我用连续运动来描述数学量，而不把它们看成由很小的部分组成。b. 考虑那些在相等时间内增长并通过增长而生成的量，它们变化的快慢取

¹²Archimedes, 前 287—前 212, 古希腊最伟大的数学家、力学家，同时也是有史以来最伟大的数学家之一。

¹³I. Newton, 1642–1727, 英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家，经典力学的奠基人和历史上最伟大的数学家之一。

¹⁴G. W. Leibniz, 1646–1716, 德国数学家、自然科学家、哲学家。

¹⁵Euclid, 约前 330—约前 275, 希腊数学家，其著作《几何原本》（也涉及数论）两千多年来一直是几何学的经典。

¹⁶G. H. Hardy, 1877–1947, 英国数学家，对分析学和解析数论有杰出贡献。

¹⁷J. Kepler, 1571–1630, 德国天文学家、数学家，以行星运动定律的提出者而著称。

¹⁸F. B. Cavalieri, 1598–1647, 意大利数学家。

¹⁹P. de Fermat, 1601–1665, 法国数学家，“业余数学家之王”，早期微积分学的先驱之一，对数论的发展和解析几何、概率论的创立有突出贡献。

决于增长与生成速度的大小；我找到了一种由运动或增长速度来计算以该速度生成的量的方法，并称这种运动或增长的速度为流数，称那些被生成的量为流量。c. 流数非常接近于在相等却很小的时间间隔内生成的流量的增量。

与牛顿运动学观点的流数论相比，莱布尼茨的微积分则具有强烈的哲学背景并从几何角度着手 [4]。他的富有启发意义的符号远比牛顿使用的优越，对于微积分的传播、发展影响颇大。莱布尼茨在第一篇微分学论文中试图对微分的实质作出解释：微分乃是无限小差。但对无限小量的定义，莱布尼茨的思想始终踌躇不定。通常认为莱布尼茨的无限小量是实在的、确定的量，即不等于零却比任何正数都小的量，但进一步研究表明，莱布尼茨并不坚持无限小量的实在性，他在后来的一些手稿中，有时也将无限小量理解成变化的和不确定的量。

虽然牛顿与莱布尼茨没有给出“流数”、“无穷小量”等概念的明确定义，但他们分别开创了处理“无穷小”概念的两条途径：一是把它理解为一个变化的过程，一是把它理解为一个实实在在的量。我们指出，这两条途径分别对应于以“ $\varepsilon - \delta$ ”语言为代表的严格化了的古典分析和 20 世纪 60 年代新出现的非标准分析。不过，17、18 世纪的数学家正忙于开拓微积分的广泛应用而无暇顾及基础理论，直到一个神学家的发难改变了这种状况。

1734 年，英国哲学家和牧师伯克莱出版了一本小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》，点名道姓地攻击牛顿、莱布尼茨及其拥护者的微积分成果是诡辩 [10]。

“一种推导任意次幂的流数的方法如下：设量 x 均匀地流动，欲求 x^n 的流数。与通过流动变为 $x + o$ 的同时，幂 x^n 变成 $(x + o)^n$ ，也就是说，使用无穷级数的方法有

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$$

而增量 o 与 $nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$ 之比为

$$1 : nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}ox^{n-2} + \dots$$

现在假设增量消失，它们最终之比将是 $1 : nx^{n-1}$ 。”

接着伯克莱指出“这种推理看来是不合理和不能令人信服的”，并提出了后来以他的名字命名的著名悖论：“在推导任意次幂的流数时，如果让增量消失，亦即让增量变成零，那么原来的关于增量存在的假设也就不能成立，而由这一假设引出的结果即借助于增量而得到的表达式却必须保留，这种推理是站不住脚的。因为我们如果假设增量消失了，理所当然也就必须假设它们的比、它们的表达式以及由于假设其存在而导出的一切东西都必须随之消失。”接下来他说了些很难听的话：“这些消逝的量是什么呢？难道我们不能称它们为消逝的鬼魂吗？”“分明是诡辩，是招摇撞骗，把人们引入歧途。”……

现在是数学家拿自己的理论来反驳关于无穷小量鬼魂的神话的时候了。

§3 抛弃无穷小，走向严格化

18世纪最伟大的数学家、“分析的化身”欧拉²⁰解释道[5]：“一个无限小量无非是一个消失的量，因此事实上将 =0。无限小的这一定义，是与它的另一种定义即比任意给定量还要小的量相符的。”“对于那些质问何为数学中的无限小量的人，我们的回答是：它事实上 =0。”“由此可以得出一条多数人能接受的法则，这就是：与有限量相比，无限小量成为零，因此相对于有限量而言可忽略不计。”我们认为，这些哲学层面的论述并没有击中伯克莱悖论的要害——既然无穷小量等于 0，为什么它还可以作除数？由此可见，18世纪数学家无法真正严格地解释“无穷小”。

事实上，18世纪的数学思想的确是不严密的，强调形式的计算而不管基础的可靠。其中特别是：1. 没有清楚的无穷小概念，从而导数、微分、积分等概念不清楚；2. 对无穷大概念不清楚；3. 发散级数求和的任意性；4. 不考虑连续性就进行微分，不考虑导数及积分的存在性以及可否展成幂级数等。没有严密的数学理论作为基础，自然不可能出现可以自圆其说的数学哲学。于是，在这场数学与神学、科学与宗教的辩论中，伯克莱的批判对前者来说几乎是毁灭性的。这就是第二次数学危机。

在解决这场危机的过程中，高斯²¹的建设性的批判使他成为这方面的一位先驱者。他早年研究了二项式定理[2]：

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \dots$$

当 n 不是正整数时，右边的级数是无限的，必须研究对 x 和 n 加什么限制，才能使级数收敛到一个确定的、有限的极限。因为，如果 $x = -2, n = -1$ ，我们就会得出荒唐的结论 $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ ，这是胡扯。《数学精英》对此的评价是很精辟的：“在年轻的高斯向自己提出无穷级数是否收敛，是否真能使我们计算出用它们表示的数学表达式（函数）以前，较早的分析学家们并未费脑筋去解释由于不加鉴别地使用无限过程而引起的神秘（和胡扯）。高斯与二项式定理的很早的相遇，鼓舞他作出他的一些最伟大的工作，他成了第一个‘严格主义者’。……分析学的真正精髓在于正确使用无限过程。”

对于分析学的严格化，另一位重要的先驱是柯西²²。他对涉及无限过程的许多基本概念给出了定义，例如[6]：

极限 “当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差要多小就多小，那么最后这个定值就称为所有其他值的极限。”

无限小量 “当同一变量逐次所取的绝对值无限减小，以致比任意给定的数还要小，这个变量就是所谓的无限小或无限小量，这样的变量将以 0 为极限。”

²⁰L. Euler, 1707–1783, 伟大的瑞士数学家，数学史上最多产的数学家之一，其论著几乎涉及当时数学的所有领域，如微积分、数论、微分方程、微分几何、拓扑学、数学物理……

²¹C. F. Gauss, 1777–1855, 德国数学家，“数学王子”，历史上最伟大的数学家之一。其数学研究几乎遍及当时所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献，还把数学应用于天文学、大地测量学和电磁学的研究。他对待学问十分严谨，只是把他自己认为是十分成熟的作品发表出来。

²²A. L. Cauchy, 1789–1857, 伟大的法国数学家，著作甚丰，在微积分、复变函数论、微分方程、代数学、数学物理等方面有杰出贡献。

无限大量 “如果同一变量的绝对值不断增加，以致比任意给定的数还要大，那么当考虑的是正变量时，就说这个变量以正无限大为极限，并用符号 ∞ 表示；当所考虑的是负变量时，就说这个变量以负无限大为极限，并用符号 $-\infty$ 表示。正、负无限大统称为无限大量。”

收敛性 “级数 $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$ 收敛的充分必要条件是：当 n 无限增大时，和 $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ 趋向于一个确定的极限。换句话说，该级数收敛的充分必要条件是：对于无限大的 n 值，和 $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots$ 与有限数 s 之差，从而它们相互之差，是无限小量。”

柯西等人的工作对分析学朝向严格化方向的发展起了很大作用。然而一位更加严格的数学家——维尔斯特拉斯——批评前人“无限趋向于”“要多小就多小”仍未脱离直观的运动学涵义，并以“ $\varepsilon - \delta$ ”语言重建了整个数学分析体系。这就是“现代分析学之父”所倡导的“分析的算术化”运动。维尔斯特拉斯还注意到，柯西的微积分理论存在着极限与实数概念循环定义的逻辑缺陷，为此他给出了实数的一种严格定义方式，但其工作未曾正式发表。随后戴德金和康托尔分别发表了他们对实数的定义：前者采用戴德金分割 [7]：“这个分割具有这样的性质：或者在第一类的数中存在最大数；或者在第二类的数中存在最小数。……每个确定的分割对应于一个确定的有理数或无理数，并且当且仅当两个数对应于本质上不同的两个分割时我们认为它们是不同的或不相等的。”后者采用有理数基本列的等价类。

随着实数系的严格化，分析的算术化运动基本完成。这场运动对数学分析产生了深远影响，例如众所周知的由“ $\varepsilon - \delta$ ”语言²³给出的函数极限概念，今天早已成为微积分教科书普遍采用的标准定义；它标志着分析学已被改造为与粗糙的微积分截然不同的精密学科。至此，第二次数学危机基本宣告解除。人们终于对曾经令人困惑的无限过程及与此相关的“极限”“连续”等概念有了清晰的认识。例如，证明 $f(x) = x^n$ 的导数为 $f'(x) = nx^{n-1}$ 的方法如下：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|h| < \delta$ 时，

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} \right| = \left| \sum_{k=2}^n C_n^k h^{k-1} x^{n-k} \right| \leq \sum_{k=2}^n C_n^k \delta^{k-1} |x|^{n-k} < \varepsilon,$$

因此

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

这样，“无穷小量”的鬼魂基本上可以被摆脱了——尽管，我们提醒读者注意，约一个世纪以后，它将以另一种面貌复生。可问题是，“无穷”仅仅应当被理解为一种 过程 吗？

§4 潜无穷与实无穷

1831 年，高斯如下表达了他对“实际无穷的恐惧”[2]：“我反对把无穷量作为一个完满的东西来使用，在数学中决不允许有这样的用法。无穷只是一种说话的方式，真正的意

²³设 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域 E 中的一个值， A 为一个实数。如果对于任意的正数 ε ，存在正数 δ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta, x \in E$ 时， $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称当 x （在 E 中）趋于 x_0 时， $f(x)$ 的极限是 A 。

义是指一些比值，在其它一些比值被允许无限制地增加时，无限趋近的极限。”

康托尔既同意又不同意高斯的见解。他在 1866 年写到实在（高斯称为完满的）无穷时，说 [2]：“尽管在潜在无穷和实在无穷之间有本质的差别，前者意味着一个增加到超出所有有限的限制的可变有限量，而后者是一个超出所有有限量的固定的常量，只是它出现得太经常，因而它们被混淆了。”

正如前面所说，康托尔属于建设性的批判学派。他的一个突出建树是，他所创立的集合论突破了自古希腊以来严谨的数学家只承认潜无穷而否认实无穷的限制，第一次把无穷的事物作为一个整体来考虑，并得出了大量违反直觉然而又千真万确的结论，从而大大丰富了人们对无穷的认识。这些结果是如此的惊人，以至于康托尔本人甚至在给戴德金的信中说：“我看到了，但我简直不能相信它！”

康托尔创造了“势”（或称“基数”）的概念。两个集合称为等势（或者具有相同基数），当且仅当它们之间能够建立一一对应的关系，这是对两个有限集合元素个数相等这一概念的推广。可是一旦涉及无穷，就会出现人们意想不到的结果。以下列举康托尔证明的一些定理：

- 至多可数个可数集的并是可数集，特别地，有理数集是可数集，即它与自然数集等势。这冲击了自亚里士多德时代以来人们从有限的事物中得出的“整体大于部分”的哲学观念。事实上，戴德金甚至建议把“能够与自身的一个真子集等势”作为无穷集合的定义——这是有史以来首次以一种清晰而精确的方式定义这个概念。
- 任何一个集合与它的幂集合（即所有子集之集）不等势。这意味着，存在各种不同的“无穷”，它们之间还有“多”与“少”的区别。
- 实数集 \mathbb{R} 与 \mathbb{R}^n 等势。这意味着，平面上的点与直线上的点，从一一对应的角度看，是一样多的。
- 实数集是不可数的。由于代数数是有理系数代数方程的根，从而代数数集是可数的，因此由这一定理推出，超越数不仅存在，而且其全体与实数集等势；换句话说，超越数比代数数还要多得多。康托尔本人的评价是 [9]：“定理表明了实数集所以构成一个所谓连续统的原因……由此我发现了连续统与像全体实代数数那样的集合之间的明显区别。”

上述关于超越数的结论突出地显示了康托尔集合论的威力。历史上，超越数的存在性直到 1844 年才被刘维尔²⁴证明，用的是构造性的方法。判断一个具体的数是不是超越数是非常困难的问题，比如埃尔米特²⁵、林德曼²⁶分别对 e (1873 年) 和 π (1882 年) 的超越性的证明都是载入史册的重大贡献，而欧拉常数²⁷是否是超越数（甚至无理数）的问题直至今天仍未解决。值得注意的是，在当时的数学界，对涉及存在性的问题，只有构造性

²⁴J. Liouville, 1809–1882, 法国数学家，著名的法文杂志《纯粹与应用数学杂志》的创办者，研究领域涉及椭圆函数、解析函数、微分方程等众多分支。

²⁵C. Hermite, 1822–1901, 法国数学家，在特殊函数论、数论、高等代数、数学分析等方面做出了重要贡献。

²⁶F. von Lindemann, 1852–1939, 德国数学家。

²⁷
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

的证明才是大家普遍接受的。康托尔没有给出任何超越数的具体构造方法，就敢断言超越数甚至比代数数还要多得多，这种思想有鲜明的革命性。

康托尔掀起的革命远不仅如此。在《集合论基础》一书中，康托尔更是大胆地提出了作为自然数系独立和扩充的超穷数。超穷数的建立，带来对实无穷的理解又一次震撼：实无穷甚至可以作为数存在！康托尔深信“超穷数终将被承认是对数概念最简单，最适当和最自然的扩充”。康托尔认为，超穷数有真实的存在性。每个超穷数表示无穷良序集的顺序的编号。通过这一概念，康托尔还给出关于有穷和无穷的新见解：一个集合是有限的，当且仅当它所有排列的编号相同。^[9]

借助超穷数理论，康托尔不仅知道无穷集最小的势是自然数集的势，还精确构造出了比可数无穷更高阶“第二类数的势”，并且“第二类数的势”与自然数的势之间不存在中间势。^[9] 超穷数理论是康托尔对描述任意无穷集的势的重要探索。

康托尔的革命性观念使他处于传统观念的对立面，因而受到某些保守的怀疑主义者的责难是不可避免的。最猛烈的攻击来自他的老师克罗内克。按照这位杰出的代数学家的看法，“上帝创造了正整数，其余的数都是人造的”。他甚至不承认无理数的存在，更不能接受他视作“危险的数学疯狂”的非构造性证明。“克罗内克看见数学在康托尔的领导下走向疯人院，便热烈地致力于他所认为的数学真理，用他能够抓到的一切武器，猛烈地、恶毒地攻击‘正确的无穷理论’和它的过于敏感的作者。”^[2]

悲剧的结局不是数学进了疯人院，而是康托尔进了疯人院。可怜的康托尔此后一些最好的工作是在两次发作之间的间歇时完成的。然而克罗内克的批判并不能逆转数学发展的历史潮流。正如存在性证明最终为人所接受一样，康托尔开创的集合论逐渐成为现代数学的基础。正如希尔伯特所指出的^[8]，关于无穷的实质的这一最深刻的洞察，堪称“数学天才最优秀的作品”和“人类纯粹智力活动的最高成就之一”。

然而问题远非简单。关于无穷的理论，似乎总有无穷多的困难。其中之一便是作为著名的希尔伯特问题之首的连续统假设，即可数的无穷集与实数的连续统之间是否还存在其他的势。康托尔猜想没有，但无法证明。这个问题直到 1963 年才被以一种出人意料的方式解决²⁸。另一个困难是，既然任何一个集合的势都严格小于它的幂集合的势，那就不存在具有最大基数的集合；可是如果能够把所有集合的全体视为一个集合，那它显然是具有最大基数的。这意味着，不加限制地讨论“所有集合的集合”恐怕会出问题。康托尔已意识到这一点，尽管他还没来得及给集合论构筑更加坚实的基础。

§5 关于无穷的理论引发的悖论与论战

历史表明上述担心不是多余的。1902 年，英国数理逻辑学家罗素提出了下述著名的悖论：作集合

$$E = \{A : A \notin A\}$$

²⁸ 美国数学家科恩 (P. J. Cohen, 1934-) 证明了连续统假设相对于 ZFC (含有选择公理的策梅罗 – 弗伦克尔公理体系) 是独立的。这个结果与哥德尔于 1938–1939 年证明的连续统假设相对于 ZFC 的相容性合起来，意味着在现行最常用的公理体系之内这个问题是不可判定的。

即 E 由这样的元素 A 组成, A 是一个集合, 同时它不是自身的元素。问题是: E 是否属于 E ? 容易看出, 无论怎样回答都会引出矛盾²⁹。这一悖论引起数学界极大的震惊, 它使人们看到集合论的体系是不完善的, 需要利用公理对所讨论的对象和研究的手段加以限制。有人甚至认为数学的基础由此发生动摇, 于是称这一事件为第三次数学危机。

在这场危机面前, 贯穿于整个数学史的两大数学思想学派之间的争论从来没有像现在这样激烈。热衷于这场关于数学的基础与本质的论战的数学家明显地分为三个学派: 逻辑主义、形式主义、直觉主义。这场危机的发起者罗素——逻辑主义学派的代表人物——试图通过把全部数学建立在逻辑的基础上来解决它; 以希尔伯特为代表的形式主义者为此提出了一整套方案, 后面将加以介绍。与此相反, 直觉主义者——克罗内克和庞加莱³⁰是其始祖——采取的不是建设性的批判态度。

以布劳威尔为代表的直觉主义者, 否定实无穷, 坚持“存在”即被构造, 反对把康托尔集合论和传统逻辑的排中律用于无穷集合。他们认为 [2], 亚里士多德发明的逻辑, 是建立在关于有限集的人类经验基础上的规则, 没有任何理由认为对于有限适用的逻辑当应用到无限时, 会继续产生一致的(无矛盾的)结果。出于这种哲学观点, 布劳威尔否认古典数学中的大量的非构造性定义和纯存在性证明, 甚至心甘情愿地放弃自己证明的著名的不动点定理³¹。

希尔伯特称这种做法归根到底是在步克罗内克的后尘。“他们要将一切他们感到麻烦的东西扫地出门, 以此来挽救数学……他们要对这门科学大砍大杀。如果听从他们所建议的这种改革, 我们就要冒险, 就会丧失大部分最宝贵的财富!”[8] 他列举了一些例子: 无理数的一般概念; 函数, “甚至数论函数”; 康托的超限数; 在无限多个正整数中有一个最小数的定理; 逻辑排中律。尤其是, “禁止数学家使用排中律, 就好比是禁止天文学家使用望远镜或禁止拳师使用他们的拳头”。“按照你的方法”, 他对布劳威尔说, “现代数学的大部分成果都要被抛弃, 但对于我来说, 重要的不是抛弃, 而是要获得更多的成果。”

希尔伯特认为: 产生悖论的原因不在于“实无穷”, 而在于对“实无穷”的错误认识; 有一种“充分满意的方法, 可以避免集合论悖论, 而又毋需背弃我们的科学”。同时, 他也承认: “绝对无穷概念的命题确实是超越人们直观性证据之外”的东西, “是通过人们的心智过程被插入或外推出来的概念”。由于无穷不能在经验中直接验证, 故希尔伯特称之为理想元素, 并将古典数学中以实无穷为前提的命题称做理想命题, 有直观意义的命题称做现实命题, 将古典数学分成涉及实无穷的“理想数学”和以“有穷主义”为特征的现实数学(即构造性数学)。希尔伯特认为: 理想元素方法在数学中是常用的, 行之有效的方法, 问题不在于使用理想元素, 而在于说明使用理想元素不会带来矛盾, 因为(至少在他看来)数学的可靠性就在于它的协调性(即无矛盾性)。为了以一种连他的对手也能接受的方式证明数学的协调性, 希尔伯特提出了如下计划:

²⁹假如 E 属于 E , 那么根据 E 的定义, 它不是自身的元素, 即 $E \notin E$, 矛盾; 假如 E 不属于 E , 同样根据 E 的定义, 推出它是自身的元素, 即 $E \in E$, 又是矛盾。

³⁰H. Poincaré, 1854–1912, 伟大的法国数学家, 19、20世纪之交最重要的数学家之一, 在微分方程、自守函数、拓扑学、数学物理等方面有开创性的杰出贡献。

³¹Brouwer 不动点定理是: 从 n 维闭球体 B^n 到自身的任何连续映射必有不动点。这是代数拓扑学中一个十分重要的基本定理。毫无疑问, 这一定理的证明方法是(也只能是)纯存在性的, 即通过假设没有不动点来导出矛盾。

1. 将所要讨论的古典数学理论公理化，并表成由一些形式符号和公式组成的形式理论系统，以此来摹写原理论中的现实命题和理想命题以及其间的逻辑关系；
2. 采用有穷方法³²建立一个逻辑和数论系统（希尔伯特称之为元数学），作为研究形式理论系统的工具；
3. 用元数学来证明在上述形式理论中，不会有某个论断与其否定同时可以推出的情况出现，也就是证明该形式理论的协调性，从而推出所讨论的古典数学理论的协调性，亦即其中的现实命题和理想命题都可以保留。

希尔伯特在他的计划中强调了两个原则：其一为彻底地形式化；其二为有穷主义。他希望以此把有穷主义观点下的构造性与涉及实无穷的理想元素在应用上的有效性统一起来，从而在直觉主义者能够接受的意义下保卫古典数学的成果。希尔伯特计划约在 1922 年问世，曾经引起相当普遍的重视，吸引了许多数学家（包括象哥德尔³³这样的大数学家）为促其实现而努力。一些较为简单的对象理论，诸如命题演算，一阶谓词演算，只含加法的算术等的协调性已被先后证得，这些工作促进了数理逻辑的发展也增强了对计划的信心。但是 1931 年 K. 哥德尔发表了著名的不完备性定理³⁴，这给希尔伯特的证明论计划以沉重打击。希尔伯特本人虽因此而感到震惊，但并不认为自己的计划已被否定，而认为只需将有穷方法加以扩充，再增加超限归纳法³⁵作为证明论的工具，原计划还是可行的。1936 年 G. 根岑³⁶用超限归纳法证明了纯数论的协调性，但这已不是希尔伯特原来的计划。

希尔伯特的计划虽然未能实现，但它对现代数学的发展有很大贡献。尤其是，这一计划所强调的公理化方法，已深入到现代数学的几乎每个分支。20 世纪很多重要的新兴学科，诸如泛函分析、抽象代数、拓扑学，都是以形式的公理体系作为其理论基础的；像概率论这样的古典学科，也通过公理化方法得到了严格化。我们很快就会看到，这一方法还使一度被抛弃了的“无穷小量”获得了重生。

³²简言之，希尔伯特的有穷方法是指不涉及实无穷的、直观上明显可靠的、能在有穷步骤内根据确定的机械的办法实施的推理方法，并可终结。这种方法是与直觉主义者的观点相一致的。

³³K. Gödel, 1906–1978, 奥地利 – 美国数学家、逻辑学家。

³⁴设有一个以皮亚诺自然数论为其子系统的不自相矛盾的（即自身协调的）形式系统，暂记为 U ；在形式系统中凡不含自由变元的公式叫做语句；如果语句 A 和 $\neg A$ （非 A ）在某形式系统内均不可证，则 A 就叫做该形式系统的不可判定语句。不完备性定理说，任何一个上述的系统 U 都必有一个不可判定语句 A 。依据排中律， A 和 $\neg A$ 之间必有一个是真语句，故不完备性定理可改为：任何一个上述系统 U 都必有一个真语句是不能推出的。如果一个系统对任何语句 A 都能推出 A 或推出 $\neg A$ ，则这个系统叫做完全系统，这样不完备性定理又可改述为：任何一个上述的系统 U 必是不完全的。[11]

³⁵设 (X, \leq) 是一个良序集，对任意 $a \in X$ ， $X_a = \{b \in X | b < a\}$ 被称为在 X 中由 a 所确定的截断。 $E \subset X$ 被称为归纳子集，如果对于任何 $a \in X$ ，只要截断 $X_a \subset E$ ，就有 $a \in E$ 。超限归纳法：设 E 为良序集 (X, \leq) 的归纳子集，则 $E = X$ 。[11]

³⁶G. Gentzen, 1909–1945, 德国数学家。

§6 非标准分析——无穷小量的重生

前面提到，莱布尼兹在创建微积分理论时，利用了无穷小这一概念。这个量既可以作为分母出现在求导运算中，又可以将其看作零而忽略不计。这一观点具有直观、方便的优点，但其逻辑一直倍受数学家们的质疑。在 19 世纪柯西及维尔斯特拉斯使用并完善了 $\varepsilon - \delta$ 语言后，无穷小这一概念基本上为主流数学所摒弃了。

然而在 20 世纪 60 年代，A. 鲁宾逊³⁷利用数理逻辑中模型论的方法，给出了无穷小这一概念一个坚实的逻辑基础。他的基本思想是，既然人们在实数范围内无法接受一个非 0 但又比任一正实数都小的无穷小数的存在，那么就应该考虑实数系统 \mathbb{R} 的一个扩张 $*\mathbb{R}$ ，在其上保持原来的序关系、代数关系，同时无穷小数又是新系统中一个实际存在的数。在 $*\mathbb{R}$ 上，就可以用无穷小语言严格地重建微积分的数学基础，从而在新的水平上恢复并发展了莱布尼兹的精神。A. 鲁宾逊将他的方法称为“非标准分析”。

除了给出无穷小量方法严格的基础，非标准分析也被成功应用于拓扑、实变函数、复变函数、泛函分析、微分方程、概率论等诸领域。在非标准分析中有重要的转换原理：每一个关于 \mathbb{R} 可形式化的命题对 \mathbb{R} 成立者，经适当解释对 $*\mathbb{R}$ 也成立，反之亦然。这里，“适当解释”是指在命题中出现的对象（如集合、关系、函数等）在 \mathbb{R} 中都被解释为相应的内对象。有了这条转换原理，就可以借助于标准分析以了解非标准结构并运用非标准分析来解决标准分析的问题。当然，非标准分析并不仅仅是一种简化的平行理论，它也能解决一些传统分析尚未解决的问题。比如 A. 鲁宾逊利用非标准分析首次证明了 Hilbert 空间中有紧致平方的线性算子具有一个非平凡的不变子空间。著名的逻辑学家 K. 哥德尔曾高度评价非标准分析：“……相反地，我们有充分的理由相信，以这种或那种形式表示的非标准分析，将成为未来的分析学。”

下面沿用参考文献 [12] 初步介绍非标准分析引入无穷小量的一种方式。一个自然的方式是把实数序列看作某种意义上的数，即考虑交换环 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ 。在其上定义等价关系： $(a_n) \sim (b_n)$ 当且仅当集合 $\{n | a_n \neq b_n\}$ 为有限集合。用 $[a_n]$ 表示 (a_n) 所属的等价类，并定义等价类间的加法和数乘： $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]$ $[a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$ ，则 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim, +, \cdot)$ 也是一个交换环。在其上引进序 \leq ： $[a_n] \leq [b_n]$ 当且仅当集合 $\{n | a_n > b_n\}$ 为有限集。将常数列看做实数，则考虑 $[\frac{1}{n}]$ ，易知在上述序关系下它小于任一正实数，同时它又不为 0，因此可以看作是一个无穷小量。当然，上述定义方式存在缺陷，即 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$ 不是一个域，并且序 \leq 也只是偏序关系。原因是构造 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$ 时的等价关系过强了。要引进合适的等价关系，需要滤、超滤的概念，这里不再介绍。

上面引入无穷小量的方式，不由使人想起利用有理数列定义实数的方式。从这个角度看，引入无穷小量也是十分自然的。

§7 总结与思考

回顾两千多年的数学史，我们看到，关于“无穷”的问题在数学思想的发展历程中可以说居于核心地位。数学的几乎所有分支都涉及无穷集合，例如数学分析在一定的意义

³⁷A. Robinson, 1918–1974, 美国数学家，生于德国。

上就是一首“无穷的交响乐”。无处不在的“无穷”，正如希尔伯特所说，深刻地影响着人类的精神，有效地激励着人类的智力。

人类对于这一重要概念的认识，经历一个不断深化、扩展、向前推移的发展过程：深化，包括以数学分析为代表的关于“无穷”的学科——乃至整个数学——的严密化、抽象化；扩展，包括从潜无穷到实无穷的历史性跨越，从无穷小量到 $\varepsilon - \delta$ 语言再到非标准分析的否定之否定的螺旋上升；向前推移，包括致力于保卫古典数学成果的“希尔伯特计划”在对手不承认“实无穷”的背景下的提出，及其遭遇了哥德尔不完备性定理打击后的修改。

希尔伯特曾在著名的《数学问题》演讲中乐观地提出这样的信念 [8]：“每个确定的数学问题都应该能得到明确的解决，或者是成功地对所给的问题作出回答，或者是证明该问题解的不可能性，从而指明解答原问题的一切努力都肯定要归于失败。”尽管哥德尔不完备性定理指出存在着不可判定的命题，但从人类对于“无穷”的认识发展历程中，我们有理由相信，如果考虑到第三种可能性，那么人类终将获得对数学问题的正确认识：或者成功地对所给问题作出回答，或者证明该问题解的不可能性，或者证明其在某一公理体系内不可判定。

总之，希尔伯特的乐观主义精神，将继续激励未来的数学家在认识世界的道路上勇往直前，正如他的墓碑上所刻的那句名言：

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.³⁸

参考文献

- [1] [以色列]伊莱·马奥尔，《无穷之旅》，王前、武学民、金敬红译，上海教育出版社，2000年8月第1版
- [2] E. T. Bell, *MAN OF MATHEMATICS*, 中译本数学精英－数学家的故事
- [3] G. H. Hardy, 一个数学家的辩白，科学家的辩白，江苏人民出版社，1999年9月第1版
- [4] 李文林（主编），《数学珍宝—历史文献精选》，科学出版社，1998年10月第1版
- [5] L. Euler, *Institutiones Calculi differentialis*, 1755, 中译文摘自如上书籍。
- [6] A. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, 1821, 中译文出处同上。
- [7] J. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872, 中译文出处同上。
- [8] [美]康斯坦丝·瑞德，希尔伯特——数学世界的亚历山大，袁向东、李文林译，上海科学技术出版社，2001年8月第1版
- [9] [美]周·道本，康托的无穷的数学和哲学，郑毓信、刘晓力编译，江苏教育出版社，1989年10月第1版

³⁸ 我们必须知道。我们必将知道。

- [10] 王树禾, 数学演义, 科学出版社, 2004 年 10 月第 1 版
- [11] 杜瑞芝 (主编):《数学史辞典》, http://166.111.121.20:9080/mathdl/search_service/browse.htm
- [12] 李邦河,《非标准分析基础》, 上海科学技术出版社
- [13] M. 克莱因, 数学: 确定性的丧失, 李宏魁译, 湖南科学技术出版社

数学家趣闻

▲ 维纳 (1894-1964) 是最早为美洲数学赢得国际荣誉的大数学家, 维纳最有名的故事是有关搬家的事。一次维纳乔迁, 妻子知道维纳没什么脑子, 搬家前一天晚上再三提醒他。她还找了一张便条, 上面写着新居的地址, 并用新居的房门钥匙换下旧房的钥匙。第二天维纳带着纸条和钥匙上班去了。白天恰有一人问他一个数学问题, 维纳把答案写在那张纸条的背面递给人家。晚上维纳习惯性地回到旧居。他很吃惊, 家里没人。从窗子望进去, 家具也不见了。掏出钥匙开门, 发现根本对不上齿。于是使劲拍了几下门, 随后在院子里踱步。突然发现街上跑来一小女孩。维纳对她讲: “小姑娘, 我真不走运。我找不到家了, 我的钥匙插不进去。” 小女孩说道: “爸…爸爸, 妈妈让我来找你。”

▲ 刘维尔曾经激励著名的苏格兰物理学家威廉·汤姆森, 即开尔文勋爵, 给数学家下了一个所有定义中最令人满意的定义, 回想起这件事是很有趣的。“你们知道数学家是什么样的人吗?” 开尔文有一次问班上的学生。他走到黑板面前, 写下了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

然后他用手指着写下的式子, 转身对学生们说, “一个数学家就是对说他说来, 这就像二加二等于四对你们一样明显的人。刘维尔就是一个数学家。”(摘自《数学精英》中译本 526 页)

▲ von Neumann 曾经碰到别人问他一个估计中国小学生都很熟的问题, 就是两个人相向而行, 中间有一只狗跑来跑去, 问两个人相遇之后, 狗走了多少的这种。应该先求出相遇的时间, 再乘狗的速度。如果没有什么记错的话, 小时候听说过苏步青先生在德国的一个什么公共汽车上, 就有人问他这个问题, 他老人家当然不会感到有什么困难了。von Neumann 也是瞬间给出了答案, 提问的人很失望, 说你以前一定听说过这个诀窍吧, 他指的是上面的这个做法。von Neumann 说: “什么诀窍? 我所做的就是把狗每次跑的都算出来, 然后算出那个无穷的级数……。”

我看女数学家¹

王美霞²

打开世界科学发展史，女性科学家屈指可数，而女性数学家更是寥若晨星。我觉得历史和传统的背景曾经使得女性在她们的成长和工作中极其艰难，即使如此，我还是很高兴看到一些非常优秀的女数学家能够坚强地在这种环境下不断学习，为数学的发展做出卓越的贡献并取得成功。她们一次次告诉世界：女性绝不是弱者，在数学这个反映人类心智荣耀的殿堂里，巾帼不让须眉。

我在这里主要说下四位我非常敬佩的女数学家以及我从她们那里看到的和学到的东西。

世界上第一位女数学家——希帕蒂亚

世界上的第一位女数学家希帕蒂亚（约公元 370 年——415 年），出生在一个富裕的家庭中，她的父亲在亚历山大博学园研究院工作，他反对歧视妇女，尤其不赞成男女不能拥有同等享受教育的权利。从希帕蒂亚开始懂事时起，父亲便有计划地对她进行系统的、全面的教育。在父亲的精心培养和她自己的刻苦学习下，不到 20 岁，希帕蒂亚便成为一位学识渊博、能言善辩、性格坚强、体格健壮的女学者了。此后，父亲又把她送到雅典学习数学与哲学。回到亚历山大城后，行政长官奥雷斯特斯打破歧视妇女的传统律条，在男性垄断的科学文化王国首开先例，聘请她在博学园教授数学和哲学。她教学有方，语言幽默，每堂课都吸引不少学生来听课。她成为了世界上第一个女教育家。她评注的经典著作和数学论著很多，比如和父亲一起修订了《几何原本》、评注了《天文学大成》一书，注释丢番图的《算术》和阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》等等，但是在亚历山大图书馆和色拉比神庙被破坏时，这些著作大部分散失了。同时，她还是一个善于观察、善于动手动脑的人，在观象仪、提取蒸馏水的设备、星盘和滴漏的制造及改进上都取得了极大成功。但是希帕蒂亚主张信仰自由、信仰多元化，不相信基督教和神学。在 415 年的 3 月，年仅 45 岁的世界上第一位女数学家，在光天化日之下，在基督教徒“神圣”的教堂里，遭到了惨绝人寰的杀害！

法国数学家——热尔曼

热尔曼（1776——1831）是法国一位富商的女儿。她常常设法从当地的图书馆里找借书籍，并且在家自学拉丁文、希腊文和数学。然而，那时对于一位妇女来说，接受任何一种教育都是非常困难的，因为舆论认为女人智力有限，不宜接受教育。因此热尔曼进不了巴黎综合工科学校，只能借阅其他学生的笔记。后来她冒用男子之名寄出了一篇文章。拉格朗日对这份报告的价值惊叹不已。当他发现作者是名妇女以后，便做了她的保护人，这也是很值得称赞的。热尔曼对费马大定理的推广做了重要的工作。欧拉证明了当 $n=3$ 时成立，勒让德证明了当 $n=5$ 时定理成立，而热尔曼则证明了对于满足一定条件的小于 100 的任何素数，定理成立。她还提出了一个数学模型，以解释诸如克拉尼用来造成克拉尼图形的平板的振动。热尔曼常和高斯书信交流，高斯也注意到了她的成就，保举她获得哥廷根大学名誉博士学位。但是热尔曼在接受这个学位之前就离开了人世。

身为女性，热尔曼的故事表现出了当时女性求学是何等困难。她为争取妇女的自由不断斗争着，做出了艰苦努力，是妇女攀登科学高峰的光辉榜样。

伟大的俄国数学家——苏菲娅·柯瓦列夫斯卡娅

苏菲娅·柯瓦列夫斯卡娅（1850——1891），出生在沙皇俄国立陶宛边界的一座贵族庄园里，她父亲是一名退役的炮兵团团长。她很小就对数学很痴迷，经常对着糊在墙

¹ 本文是 2008 年春季学期数学史课程论文。

² 基科 65。

壁上的数学公式和符号，一看就是好半天。苏菲娅 14 岁时便能够独立推导出三角公式，被称为“新巴斯卡”。苏菲娅长大成人后，她对数学的兴趣也与日俱增。但那时正处于沙皇时代，妇女是不允许到高等学校学习的，而她的父亲又一心想让她像别的贵族姑娘一样，步入社交界，对她想学数学的心愿横加阻拦。于是，苏菲娅不顾父母的反对，与年轻的古生物学家柯瓦列夫斯基“假结婚”，来到德国的海德尔堡。但在那里，妇女听课要有一个专门的委员会认可才行。经过努力，她被允许旁听基础课。在此期间，她勤奋好学，掌握了深奥的数学知识，轰动了整个海德尔堡，成为人们谈论的话题。可她只被允许听了三个学期的课，便不得不离开了那里。

苏菲娅深造心切，又慕名前往柏林工学院。但遗憾的是，柏林的大学也不允许妇女听教授的课。最后，只好抱一线希望登门到魏尔斯特拉斯家求教。魏尔斯特拉斯接见了苏菲娅，破例答应苏菲娅每星期日在家里给她上课。这样，苏菲娅在魏尔斯特拉斯的悉心指导下学习了 4 年。经过了 4 年的刻苦努力，1874 年，在魏尔斯特拉斯的推荐下，24 岁的苏菲娅荣获了德国第一流学府——哥廷根大学博士学位，成为世界上首屈一指的女数学家。

1888 年，柯瓦列夫斯卡娅发表了重要论文《刚体绕定点旋转的问题》，解决了历史上 100 多年悬而未决的问题，因此获得了巴黎科学院的博尔丹奖金。1889 年，瑞典科学院也向柯瓦列夫斯卡娅授予了奖。同年 11 月因慑服于这位女数学家的巨大功绩和以车比雪夫为首的一批数学家的坚决请求，俄国科学院终于放弃了“女人不能当院士”的旧规。

1891 年初，柯瓦列夫斯卡娅在从法国返回斯得哥尔摩的途中病倒。由于医生的误诊，无情的病魔夺去了她光彩的生命。此时她仅 42 岁。女数学家柯瓦列夫斯卡娅的一生为妇女攀登科学高峰树立了光辉的榜样。

诺特

诺特（1882—1935），生于德国大学城——爱尔兰根的一个犹太人家庭，父亲马克斯·诺特是一位颇有名气的数学家。中学毕业后，她顺利地通过了法语和英语教师资格考试，原本准备去当教师，但她改变了主意，决定要到父亲任教的爱尔兰根大学去学数学。但是，当时德国不准女子在大学注册，只能当旁听生，并缴纳听课费，在极其罕见的情况下，才可能征得主讲教授的同意，参加考试而取得文凭。诺特于 1903 年 7 月通过了考试。当年冬天，她来到哥廷根大学，直接听希尔伯特、克莱因、闵科夫斯基等著名数学家讲课。1904 年 10 月她便正式回到爱尔兰根注册学习，在导师戈丹的指导下，完成了题目为“三元双二次型的不变量完全系”的论文，她通过了博士考试。

由于当时社会还是不肯接受女性科学家，因此她的基本生活都没有保障，但是在这种极其艰难的情况下，诺特依然没有放弃她所钟爱的数学研究事业，1919~1922 年间，诺特走上了她自己独特的发展道路，研究环中的理想论。她从不同领域的相似现象出发，把不同的对象加以抽象化、公理化，然后用统一的方法加以处理，得出一般性的理论，用她的这种理论又能处理各个不同领域的特殊性的问题。她对抽象代数的贡献是划时代的，她的一般理想论可以说是哥廷根代数学派的代表作。但是我觉得她对抽象代数学发展所产生的巨大影响，并不完全出自她的论文，更重要的还是出自她与同事、学生的接触、交往与讲课。她常详细叙述自己尚未最终定型的新想法，其中充满了深刻的哲理，也充满了不同凡响的创造激情。她很喜爱自己的学生，在她身边形成了一个熙熙攘攘的“家庭”，这些学生被称为“诺特的孩子们”。其中有十几位学生后来成为著名数学家。诺特当之无愧地被人们誉为“抽象代数之母”。

1932 年，由于她在代数学方面的卓越成就，诺特和阿廷共同获得了“阿克曼·特布纳奖”。然而在苏黎世大会之后仅几个星期厄运就降临了。先是遭到了法西斯的迫害，然后又受到了病魔的侵袭。1935 年 4 月 14 日这位终生未婚、把全部精力献给了她所热

爱的数学事业的伟大女数学家与世长辞，终年 53 岁。

从这些女数学家的经历以及她们的成长来看，我认为她们有着很多相似之处。

第一，她们都生活在妇女受到很大歧视的时代，妇女走向科学的道路被封锁，几乎所有大学和科研机构都不对妇女开放。因为是女性，所以不被允许进大学读书；因为是女性，所以进大学教书被看成是怪物；因为是女性，前进的道路上到处都是荆棘！但是她们在这种环境中并没有屈服于社会的观念，在数学的发展上做出了自己的贡献。她们为追求男女平等斗争着，为妇女争取同等接受教育的权利斗争着，并向世界宣告了女性在数学界也能做出很大成就。

第二，她们都出生在环境比较好、父母思想比较进步的家庭。希帕蒂亚的父亲是博学园的教授，反对歧视妇女，热尔曼的父亲是一个富商，思想也比较进步，苏菲娅·柯瓦列夫斯卡娅的家境也比较富裕，父亲还是比较支持女儿的学业，诺特的父亲是一个数学家。我想这些都对她们能够更好地接受科学文化知识有很大帮助，从小的生活环境和接受的教育对她们的影响很大。尤其在妇女受到严重歧视的时代，在大家都认为“女子无才便是德”的时代，这些环境上的优越性都使得她们能够比同时代的其他人更有机会走向科学的王国。我觉得女子无才便是德这种看法很错误，这分明就是对妇女歧视的一个直接表现，男女平等不仅表现在生活中各方面的平等、拥有平等的工作的机会等，更重要的也表现在接受教育的平等上。女子有才才更美！

第三，她们都是很勤奋、善于思考的人，遇到任何困难都不会放弃对数学的热爱，把全部的精力都献给了所钟爱的数学事业。她们凭着自身的勤奋努力和科学的学习方法，在男性统治的数学的世界里自由的飞翔！

第四，她们都接触了一些数学及相关领域最优秀的学者教授，或接受他们的指导，或同他们探讨问题，了解着数学最前沿的问题，关注着数学的发展。通过与大师们的沟通了解，我想可以开拓自己的眼界，学习他们的治学方法，通过共同讨论也会受益匪浅。

我想这些都为她们在数学上取得重大成就及在其他一些相关领域有所作为起到了很大作用。但是如果社会没有歧视妇女的现象存在，我想能够在数学上、在科学领域做出卓越贡献的女性应该远不止这些吧。由于社会上长期存在的残酷而又愚昧的大男子主义，究竟有多少女性的非凡才智被埋没而未能充分发挥并为人类服务，真是难以估量。

无数前人为争取男女平等所作的努力最终还是有了结果，歧视妇女的政策已被历史的车轮碾碎，男女早已平等，以往很多对女性封闭的领域的门都已被打开。然而，令我困惑的是，今天在数学领域攀登高峰的女生依然不多，在清华基科班竟然男女比高达 8: 1，而且聊天时如果对方知道了你是学数学的，就会觉得很惊讶，好多人会不自觉的说“女生学数学真了不起”，每当这时我只是淡然一笑，因为我觉得他们并不是在夸我，表面是在敬佩我，而背后却隐藏着他们的思想里还没有完全接受男女平等的概念这一事实。

我想，直到今天很多女生不愿涉足数学的原因有很多。我认为，一方面是人们仍旧没有完全抛弃传统思想，还受着传统思想的影响，认为女生不适合学数学，不适合搞很学术的知识。很多家长在孩子报考时，劝女孩不要报理科。而且不只是社会上存在这种思想，家长这么认为，就是很多女生自己也受到这种思想的影响。从我的经历来看，小学时很多学习很好，数学学的很不错的女生，经过初中、高中的学习便渐渐对数学失去了兴趣，其中有着各种各样的原因，有些老师有时会有意或无意地表现出认为女生学不好理科的看法，致使很多女生渐渐失去信心。好多女生自己也认为男生就是聪明，就是比女生强，受这种思想的影响，导致她们在稍微遇到挫折成绩不如意时就失去信心，甚至一蹶不振。但是我觉得和男生相比，女生学起知识来更加细心、扎实。基础好了才能更具有发明创造的可能性，只靠小聪明是不够的。好多女生从小学到初中、再到高中，遇到数学难了一些，就从心里放弃了，看到其他很多女生数学学的都不是很好，所以自

己也就觉得理所当然。而男生相对女生来说就比较有优越性，大家都认为男生比女生聪明，男生当然信心十足，相比之下，女生做事情需要更大的信心和勇气。也许有人认为男女之间有智力的差异，但是我认为这并不是主要原因，主要是因为女生在学习数学上需要承受更多，需要克服更多障碍。

但是从今天一些事实来看，当今很多女性在数学上也取得了很大进步，下面向大家介绍几位国际最高级别的女数学家奖——Ruth Lyttle Satter Prize in Mathematics 获得者的出色工作。此奖每两年颁发一次，颁发给在过去六年间对数学研究做出过突出贡献的女性。该奖从 1990 年设立以来已颁发了九届。1986 年到 1991 年间 Dusa McDuff 在辛几何方面做出了杰出的工作，于 1991 年被授予该奖，成为获得该奖的第一人。1993 年，Lai-Sang Young 以她在动力系统遍历性研究方面的带头作用和重要地位而获第二届奖。Sun-Yung Alice Chang 因为对黎曼流形上的偏微分方程的研究做出了极大贡献，特别是因为她对谱几何里极值问题的研究以及紧三维流形上不动保型类上的等距谱度量的紧性的研究而获该奖。Ingrid Daubechies 对小波及其应用做了深入而漂亮的分析，于 1997 年获得该奖。Bernadette Perrin-Riou 则做了关于 p -adic L-functions 和 Iwasawa 理论的数论研究，获第五届奖。2001 年 Karen E. Smith 与 Sijue Wu 同时获奖，她们分别在交换代数与水波方程里长期存在的一个问题的有重要贡献。Abigail Thompson 因其在三维拓扑空间里做的出色工作获得第七届奖。Svetlana Jitomirskaya 因为她关于非摄动准周期局部化的杰出贡献于 2005 获得该奖。Claire Voisin，她最近提出的对 Kodaira 问题和 Green 猜想这两大长期存在的公开问题解决方案对代数几何做出了极其深入的贡献，从而于 2007 年获奖。

这些事实都表明女性正在挑战数学这块传统上属于男性的领域，在攀登数学高峰的队伍中女性已经成为一支不可忽视的力量，她们所作出的卓越贡献正在激励我们这一代。正如“世界需要科学，科学需要女性”一样，我想我们可以说“世界需要数学，数学需要女性”！

主要参考文献：《女数学家传奇》，徐品方著，科学出版社，2005

Mathematical Quotations

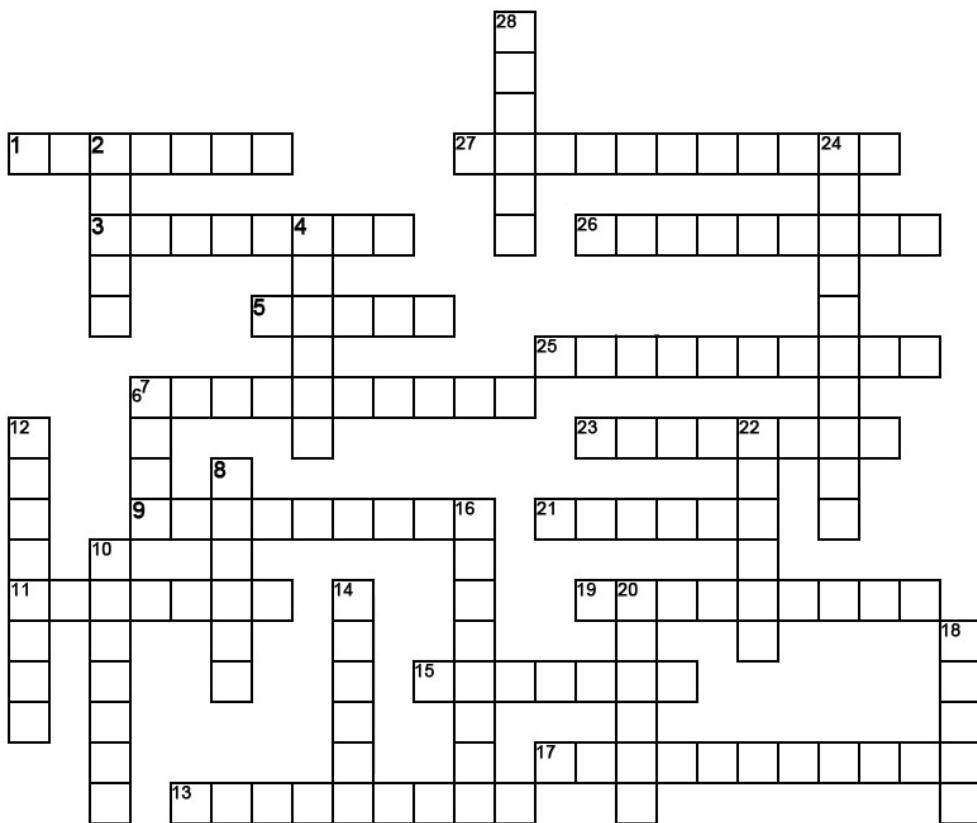
Kovalevsky, Sonja

Say what you know, do what you must, come what may.

[Motto on her paper "On the Problem of the Rotation of a Solid Body about a Fixed Point."]

CROSSWORD

刘立达



(答案见下期)

HINT:

cross:

- 1: ζ 函数 • 微分几何 • 复分析 • 高斯的学生 •
- 3: 《积分、长度与面积》
- 5: 四维空间里不可定向的“小”瓶子
- 7: “尤里卡!” 裸奔 • “勿毁我圆!”
- 9: 求不定式的极限的法则(但不是他发现的)
- 11: 微积分的发明人之一
- 13: 彼得堡学派的鼻祖: 不等式, 多项式, 素数定理.....
- 15: 拿破仑的数学老师
- 17: 现代分析学之父
- 19: 瑞士一个产生过 11 位科学家的家族
- 21: 为什么苹果掉到地上?
- 23: “最后一位数学全才”
- 25: 莫斯科的盲人院士
- 26: 处处不连续的函数
- 27: 提出非欧几何的俄国人

down:

- 2: 最多产的数学家
- 4: 20 周岁死于决斗
- 6: 26 周岁死于贫病交加
- 8: 最著名的不可定向带边曲面
- 10: 1900 年提出了 23 个问题
- 12: $a+bi+cj+dk$ 花了他 30 年时光
- 14: 收敛序列 • 微分方程初值问题 • 不等式 • 积分公式 •
- 16: 插值公式 • 余项 • 中值定理 • 《分析力学》•
- 18: “数学王子”
- 20: “几何学中没有皇家大道” • 他的教材在世界上用了两千多年
- 22: 集合论的创始人
- 24: 卓里奇老大的老大, 苏联数学泰斗
- 28: 以他的名字命名的一阶偏导数矩阵

访谈

采访对象：张友金老师

记者：石权

Q：您能不能谈一下您学数学的经历？

我 82 年上科大数学系。其实在选专业的时候自己并不知道在数学系究竟要学些什么，那时只觉得学数学比较容易，所以就选择了数学系。当时科大数学系的课程和你们现在的差不多，物理课程多一些，除了普通物理外还有理论力学和原子物理学等。教我们数学分析的是单尊老师，他除了教会我们数学分析外，给我留下印象最深的是他 83 年的博士答辩会。旁听他的博士答辩会是我第一次接触到数学研究，虽然那时去参加答辩会的主要原因是能见到陈景润先生。科大数学系有一批活跃于分析、代数、几何、计算数学等研究领域的老师，治学氛围浓厚；有许多真心喜爱数学、勤奋专注的学生，学生和老师之间有密切的交流，这样的学习环境使我受益匪浅。85 年陈省身先生到访科大，我们班同学和陈先生以及数学系的老师一起拍了毕业合影，虽然我们要到两年后才毕业。陈先生的来访使我对几何学有了更多的了解和喜爱，而陈先生在他的演讲中对数学系老师工作的赞赏也使我确信做好数学是非常值得骄傲和令人羡慕的。

那时科大数学系学生自办了一个内部交流刊物《蛙鸣》，上面主要刊登本科生的研究论文、读书心得，介绍数学史、治学方法等，她对我们的数学的学习和认识产生了非常积极的影响。20多年来《蛙鸣》一直是科大数学系学生的骄傲。

本科毕业后我留在科大读硕士研究生，我的导师是李翊神教授，他的主要研究领域是孤立子理论，期间我的主要兴趣在数学物理。硕士毕业后有机会去了俄罗斯（前苏联），在斯捷克洛夫数学所圣·彼得堡分所做访问学者，那里有 Faddeev 教授等著名数学物理学家。我在 Smirnov 教授和 Kirillov 教授指导下学习，那时花时间最多的是在学习量子群和表示论上，虽然当时苏联的生活较为艰苦，但研究所的学术氛围依然非常浓厚。从圣·彼得堡回到科大后我继续在李翊神教授指导下攻读博士学位，随后有幸分别在意的 Trieste 和日本京都大学做博士后研究。我的指导老师是 Dubrovin 和 Jimbo 教授，他们都是非常优秀的数学物理学家。那里的学习和工作使我对数学的某些研究领域有了更好的了解，数学研究对我有了更强的吸引力。

Q：您对我们现在的学习有什么建议？

学习基础课程做习题是必须的训练，通过用你学到的知识去解决问题，加深自己对主要的概念和定理的理解，学会确切的数学表述和语言，发展自己的联想和创造力。到了高年级，老师布置的或教科书上的习题可能会越来越少，很多东西得由你们自己去思考、去拓展，这时你们需要多和教师交流，积极参加你感兴趣的专题讨论班，了解相关领域的发展。同时，尽可能多地了解自己感兴趣的数学的某些方面发展的历史，去体会其中所蕴含的人类智慧。

学习主要还是要靠自己，要根据自己的情况，找到适合自己的学习方法。不要担心自己比别人慢，对数学的理解有个积累的过程。学数学很多东西在不断重复、提升，一遍一遍熏陶。即使开始比较慢，只要你喜欢数学，总会水到渠成。

通过你们的《荷思》，希望更多的同学能发表自己对数学的体会、理解，与人分享

自己学习数学的经历和乐趣，积极地去动手解决学习中碰到的一些难题。高年级学生会对数学有一些自己的判断，数学的不同方向味道也会不一样，《荷思》要注意把各个方面同学吸引进来。

Q：您觉得我们还有哪些需要提高的地方？

我们系有一批热爱数学、对数学有很好领悟力的同学，我们为此感到自豪。我想需要做得更好的是我们对同学们在学习上的指导和帮助，特别是对高年级同学在基础和专业课程的学习中的指导。当然也希望你们能更主动地和教师交流，多参与系里的学术活动，这对你们今后的发展是非常重要的。

数学笑话

死人数

英国诗人捷尼逊写过一首诗，其中几行是这样写的：“每分钟都有一个人在死亡，每分钟都有一个人在诞生……”有个数学家读后去信质疑，信上说：“尊敬的阁下，读罢大作，令人一快，但有几行不合逻辑，实难苟同。根据您的算法，每分钟生死人数相抵，地球上的人数是永恒不变的。但您也知道，事实上地球上的人口是不断地在增长。确切地说，每分钟相对地有 1.6749 人在诞生，这与您在诗中提供的数字出入甚多。为了符合实际，如果您不反对，我建议您使用 $7/6$ 这个分数，即将诗句改为：“每分钟都有一个人死亡，每分钟都有一又六分之一人在诞生……”

经验方程

物理教授走过校园，遇到数学教授。物理教授在进行一项实验，他总结出一个经验方程，似乎与实验数据吻合，他请数学教授看一看这个方程。一周后他们碰头，数学教授说这个方程不成立。可那时物理教授已经用他的方程预言出进一步的实验结果，而且效果颇佳，所以他请数学教授再审查一下这个方程。又是一周过去，他们再次碰头。数学教授告诉物理教授说这个方程的确成立，“但仅仅对于正实数的简单情形成立。”

征稿及招新启事

《荷思》是清华大学数学系学生自主创办的数学学术刊物，主要面向读者为各个院系中对数学感兴趣的本科生。

本刊欢迎全校师生任何与数学有关的投稿，无论是长篇的论述，还是精彩的小品，抑或学习/教学的心得、习题的妙解。在原作者的允许下，推荐他人的作品也同样欢迎。

为了编辑方便，建议投稿者能够提供电子版，并且采用Word或LATEX排版。来稿请注明作者，联系方式。

目前编辑部大部分成员临近毕业，因此我们热切期待新成员的加入，以将这份刊物传承下去。每一位数学系或基科班的同学，只要拥有对数学的热爱以及认真负责的工作态度，我们都将欢迎您的加入！

申请加入的同学请提供姓名，班级，联系方式，以及自我介绍，譬如自己擅长的工作以及希望得到的岗位。

在此我们对所有热心支持本刊的读者表示由衷的感谢！

投稿及报名请寄：THUmath@googlegroups.com

《荷思》编辑部
2008-10

主办： 清华大学 数学科学系 《荷思》编辑部
主编： 吴玉清

编委： (依姓名笔划排序)
石 权 杜升华 吴玉清 吴 昊
陈凌骅 胡悦科 舒 张
封面： 陈凌骅
排版： 杜升华
校对： 刘立达

联系本刊： THUmath@googlegroups.com
北京市 海淀区 清华大学 紫荆 9 号楼 205B 100084
010-515-31844 吴玉清



我们所做的事可能是渺小的，
但它具有某些永恒的性质。

——〔英〕G.H.哈代

清华大学
数学科学系

