矩阵

方阵

方阵才会有

- 行列式 (determinant)
- 特征值 (eigenvalue)，特征向量 (eigenvector)
- 对称性 (symmetric)
- 可逆
- 正定

可逆矩阵 (inverse matrix)

> 对方阵A，存在方阵B，使满足 $AB = BA = I$

非方阵也是可以求逆的，叫伪逆或者广义逆矩阵 (generalized inverse)

非奇异阵 (Invertible matrix)

> 矩阵A满足行列式 $\det(A) \neq 0$

- 非奇异阵等价于可逆，满秩

正定矩阵 (positive-definite matrix)

> 对于实对称矩阵A，和非零向量x，有$x^T Ax > 0$ 恒成立 （可以联想到 ax^2 ）

相应的还有半正定矩阵 (positive semi-definite)， 就是上式多了一个等式成立

正定矩阵每个特征值都大于零

- 正定矩阵都是可逆的
- 正定矩阵是对称的

非负矩阵 (nonnegative matrix)

> if all its entries are nonnegative

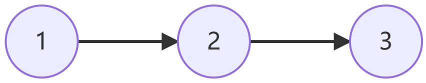
常规非负矩阵 (regular nonnegative matrix)

> suppose $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, with $A \geq 0$ A is called regular if for some $k \geq 1, A^k > 0$

meaning:

form directed graph on nodes $1, \ldots, n$, with an arc from j to i whenever $A_{ij} > 0$ then $\left(A^k\right)_{ij} > 0$ if and only if there is a path of length k from j to i A is regular if for some k there is a path of length k from every node to every other node *example*:

- any positive matrix is regular
- in this graph, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ is regular because



then $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $(A^2)_{31} > 0$, it shows that there is only a path of length 2 from 1 to 3

幂零矩阵 (Nilpotent)

> 存在幂次方为0的矩阵

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个幂零矩阵，因为 $A^3 = 0$

若尔当矩阵 (Jordan matrix)

> 对角线全都是同一个元素 $\lambda \in R$, 而对角线上一排都是1，其余位置都是0

一般形式 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

若尔当矩阵除了能作为一个独立的矩阵，也可以作为另一个矩阵的一部分，所以又被叫做若尔当块 (Jordan block)

随机矩阵 (Stochastic matrix)

> 是用来描述马尔可夫链转换情况的一个方阵。每一项是一个表示概率的非负实数。也被称为 概率矩阵 (probability matrix)、转移矩阵 (transition matrix)、替代矩阵 (substitution matrix) 或马尔可夫矩阵 (Markov matrix)

- 右随机矩阵 (right stochastic matrix) 是实方阵，其中每一行求和为1
- 左随机矩阵 (left stochastic matrix) 是实方阵，其中每一列求和为1
- 双随机矩阵 (doubly stochastic matrix) 是非负实数方阵，每个行和列求和均为1

平衡概率向量 (equilibrium probability distribution) 用 π 表示，这是一个不随转移矩阵变化的一个向量，也就是说它是随机矩阵的左特征向量，特征值为1

$$\pi P = \pi \tag{1}$$

佩龙-弗罗贝尼乌斯定理保证了每个随机矩阵都具有这样的向量，特征值的最大绝对值始终为1。在一般情况下，可能有多个这样的向量。然而，对于常规非负矩阵，该向量是唯一的，并可以观察到对任意 i 我们都有以下极限

$$\lim_{k\to\infty} \left(P^k\right)_{i,j} = \boldsymbol{\pi}_j \tag{2}$$

佩龙-弗罗贝尼乌斯定理 (Perron-Frobenius theorem)

> 一个实方阵具有唯一的最大实特征值，并且相应的特征向量可以被选择为严格正分量

佩龙–弗罗贝尼乌斯 特征值：用 r 来表示， r 是矩阵A的一个特征值，同时其他特征值 λ 满足 $|\lambda| < r$ 。就是说 r 是最大特征值，也是谱半径 (spectral radius) $\rho(A) = r$

佩龙–弗罗贝尼乌斯 特征向量：佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值对应的特征向量，表示为 $v = (v_1, \ldots, v_n)$，满足 $Av = rv, v_i > 0$ for $1 \leq j \leq n$ ，同样对于左特征向量 w 也满足 $w^T A = rw^T$