Математика.

О некоторых экстремальных прямых

Ипатова Виктория
ГБОУ «Химический лицей № 1303», город Москва
Научный руководитель: Привалов Александр Андреевич, МПГУ, доцент, к.ф.-м.н.

Аннотация.

Пусть имеется n точек $\{A_1, A_2,\ldots,A_n\}$ ($n>2$) на плоскости. Требуется

1. Найти на плоскости прямую l, с наименьшей суммой расстояний до этих точек, т.е. такую, что неравенство
$$\sum_{i=1}^{n}\rho(A_i,l)\le\sum_{i=1}^{n}\rho(A_i,l_1)$$
выполняется для любой прямой l_1 на плоскости.

2. Найти прямую l, наименее уклоняющуюся от этих точек, т.е. такую, что
$$\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l)\le\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l_1)\text{, } \forall\ l_1,$$
где $\rho(A,l)$ – расстояние от точки A до прямой, l_1 – произвольная прямая на плоскости.

3. Найти прямую l, с наименьшей суммой квадратов расстояний до этих точек, т.е. такую, что неравенство
$$\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l)\le\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l_1)$$
выполняется для любой прямой l_1.

Запишем уравнение произвольной прямой l :
$$ax+by+c=0,$$
Тогда расстояние от точки $A(x_0,y_0)$ до l равно:
$$\rho(A,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
Для удобства, будем искать уравнение прямой в виде:
$$y\cos\alpha-x\sin\alpha+c=0 \qquad (1)$$
где α – угол образованной прямой с осью абсцисс (Оx), c – некоторое число и наши задачи сводятся к минимизации функций
$$S_1=S_1(\alpha,c)=\sum_{i=1}^{n}|\,y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha+c\,|,$$
$$S_\infty=S_\infty(\alpha,c)=\max_{1\le i\le n}|\,y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha+c\,|, \qquad (*)$$
$$S_2=S_2(\alpha,c)=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha+c)^2,$$
где (x_i,y_i) – координаты точек $A_i(x_i,y_i)$, $i=1,\ldots n$.

def. ***Норма*** — функционал, заданный на векторном пространстве и обобщающий понятие длины вектора или абсолютного значения числа.

Очевидно, что функции (*) непрерывны по переменным α и c, поэтому задачи 1 – 3 имеют решения. Прямая l – решение первой задачи, является *наименее уклоняющейся* от точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ прямой в $\boldsymbol{l}_1$-метрике (по норме пространства $\boldsymbol{l}_1$). Решением задачи 3 является прямая *наименее уклоняющейся* от точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ в $\boldsymbol{l}_2$-метрике (по норме пространства $\boldsymbol{l}_2$ или евклидовой метрике). И, наконец, решение второй задачи – *наименее уклоняющейся* от точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ прямой в равномерной метрике ($\boldsymbol{l}_\infty$-метрике или по норме пространства $\boldsymbol{l}_\infty$ или пространства $\boldsymbol{m}$).

Напомним, $\boldsymbol{l}_p$ ($p\geq 1$) – множество всех линейное пространство последовательностей

$z = (z_1, z_2,\ldots)$ с нормой $\| z \|_p = \left(\sum_j | z_j |^p \right)^{\frac{1}{p}}$, если $p=\infty$, то $\boldsymbol{l}_\infty$ – множество всех ограниченных последовательностей – линейное пространство с нормой $\| z \| = \| z \|_\infty = \max_j | z_j |$ (*равномерная* норма) .

Рассмотрим ***1 задачу***

Гипотеза 1.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ на плоскости существуют такие две точки, что для прямой l, проходящей через них, и любой другой прямой l_1 на плоскости, сумма расстояний от l до точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ не больше суммы расстояний от l_1 до точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, l) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, l_1),\ \forall\ l_1$$

Набросок доказательства:

Введем координаты точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$: $A_i(x_i,y_i)$, $i=1,\ldots n$. Тогда задача сводится к нахождению прямой l, при которой функция

$$S_1(\alpha, c, l) = \sum_{i=1}^{n} \rho(l, A_i) = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha + c \right| \qquad (2)$$

принимает минимальное значение. Эта функция двух переменных является непрерывной и ограниченной, значит, по теореме Вейерштрасса достигает своего минимального значения. То есть задача разрешима.

Пусть l – искомая прямая, т.е. $S_1(\alpha, c, l_1) \geq S_1(\alpha, c, l)$ (2) для любой прямой l_1. Обозначим $S_1(\alpha, c, l) = S_0$

Докажем, что тогда прямая будет содержать по крайней мере одну точку из $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Введем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой l, ось ординат вдоль нормали к прямой l и центр совпадал с точкой (x_1,y_1). Очевидно, что некоторые из точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ лежат над прямой l, а некоторые под l (в противном случае l не наилучшая прямая).

$$S_0 = \sum_{+} y_i - \sum_{-} y_j \qquad (3)$$

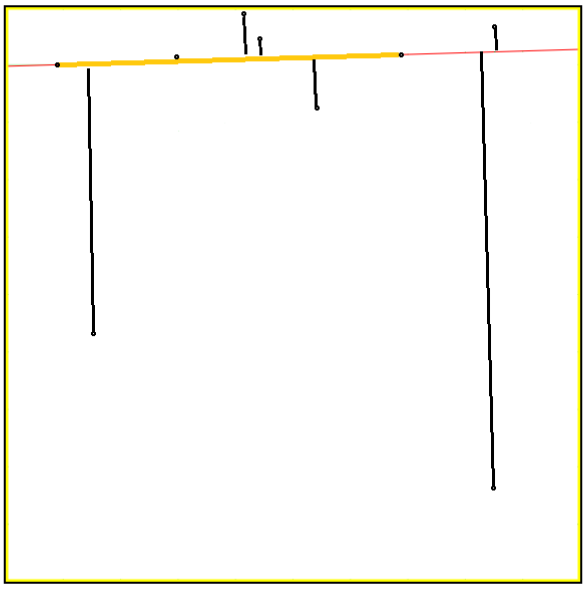
где $\sum_{+} y_i$ сумма точек, лежащих выше координатной прямой, а $\sum_{-} y_j$ ниже

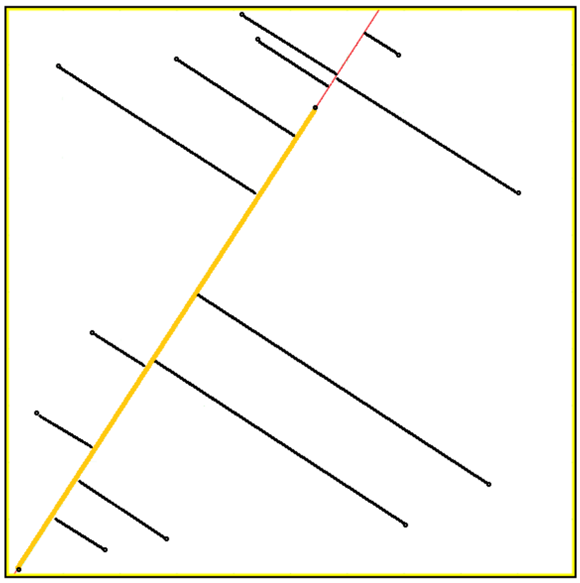
Предположим, что ни одна из точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ не лежит на l, т.е. на оси абсцисс. Докажем, что тогда наилучшее приближение S_0 можно уменьшить вращением прямой l вокруг начала координат (0,0):

$$\sum_{i=2}^{n} \rho(l, A_i) = \sum_{i=2}^{n} \left| y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha \right| = \cos\alpha\left(\sum_{+} y_i - \sum_{-} y_j\right) - \sin\alpha\left(\sum_{+} x_i - \sum_{-} x_j\right) = S_0 \cos\alpha - S_1 \sin\alpha$$

Где $S_1 = \sum_{+} x_i - \sum_{-} x_j$. Теперь, если S_1 меньше нуля, то повернем l по часовой стрелки (α<0); если это выражение неотрицательно, то – против часовой стрелки (α>0); если же S_1=0, то крутим в любую сторону. Как не сложно видеть во всех случаях $S_1(\alpha,0)$ будет меньше S_0. Неравенство (2) нарушится и следовательно прямая будет содержать по крайней мере одну точку из $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Пусть это точка A_1. Предположим, что l не содержит ни одной точки множества $\{A_2, \ldots, A_n\}$.

Введем систему координат с осью абсцисс, совпадающей с прямой l и началом в точке A_1. Тогда в этой системе координат все точки $\{A_2, \ldots, A_n\}$ будут иметь не нулевые ординаты. Повторяя предыдущие рассуждения, докажем существования точки множества $\{A_2, \ldots, A_n\}$ и прямой l. Гипотеза доказана.





Рассуждая аналогично мы можем прийти к решению нашей второй задачи. А именно, доказать следующую гипотезу.

Задача 2

Гипотеза 2.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ на плоскости существуют такие три точки A, B, C, что наименее уклоняющаяся от $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ прямая l такая, что

$$\max_{1 \le i \le n} \rho(A_i, l) \le \max_{1 \le i \le n} \rho(A_i, l_1),\ \forall\, l_1,$$

содержит среднюю линию треугольника ABC.

Набросок доказательства.

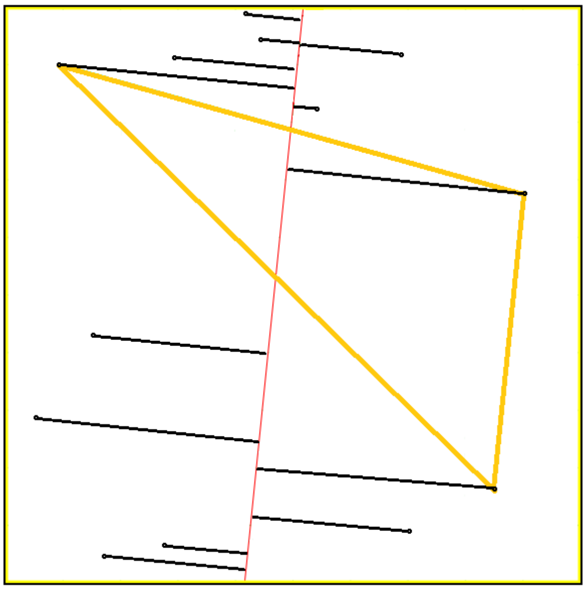
Пусть l – наилучшая прямая и

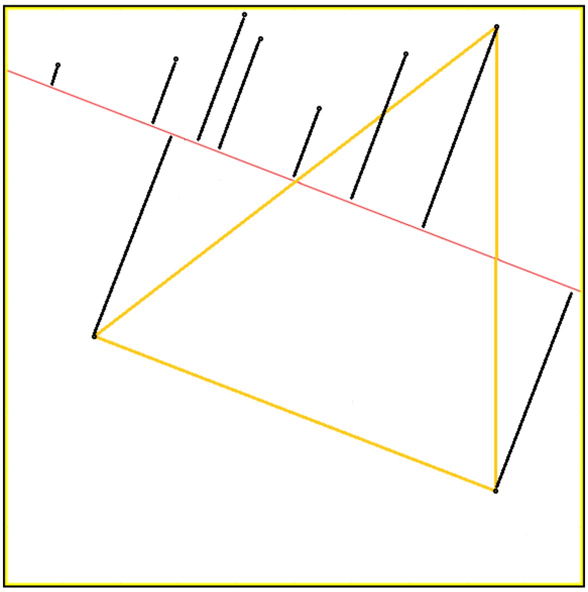
$$s_0 = \max_{1\le i\le n} \rho(A_i, l) \le \max_{1\le i\le n} \rho(A_i, l_1), \quad \forall l_1. \qquad (*1)$$

Для удобства изложения, представим себе, что эта прямая горизонтальная.

Понятно, что найдется точка, например, A_1 такая, что $s_0 = \rho(A_1, l)$. Если других таких точек не существует, т.е. $\rho(A_i, l) < s_0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, то небольшим параллельным сдвигом прямой l к точке A_1 получим прямую l_1, не удовлетворяющую ($*1$). Значит существует две точки, пусть A_1 и A_2 такие, что $s_0 = \rho(A_1, l) = \rho(A_2, l)$. Если эти точки находятся по одну сторону от прямой и если при этом других таких точек не существует, то небольшим параллельным сдвигом прямой l к точке A_1 получим прямую l_1, не удовлетворяющую ($*1$). Если эти точки находятся по разные стороны и если при этом других таких точек не существует, то небольшим поворотом вокруг точки $B = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, получим прямую l_1, также не удовлетворяющую неравенству ($*1$). То же самое произойдет для трех точек (пусть A_1, A_2 и A_3, $s_0 = \rho(A_1, l) = \rho(A_2, l) = \rho(A_3, l)$ и $\rho(A_i, l) <$ s_0, $i = 3, \ldots, n$), из которых две (A_1 и A_2) лежат над (под) прямой l, а третья A_3 – под l и правее A_1 и A_2 (в этом случае поворот вокруг $B = \dfrac{A_1 + A_3}{2}$ или $B = \dfrac{A_2 + A_3}{2}$).

Следовательно, найдутся три точки, например, A_1, A_2 и A_3, что $s_0 = \rho(A_1, l) = \rho(A_2, l) = \rho(A_3, l)$ и расположены они попеременно над и под прямой l. Не сложно видеть, что эта прямая проходит через среднюю линию треугольника $A_1A_2A_3$. Гипотеза доказана.





Задача 3

Гипотеза 3.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ на плоскости существует такая прямая l, что для любой другой прямой l_1, сумма квадратов расстояний от l до точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ не больше суммы квадратов расстояний от l_1 до точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l)\le\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l_1),\ \forall\ l_1,$$

при этом $M\in l$, где M – центр масс $\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}=\vec{0}\right)$.

Набросок доказательства.

Поскольку функция $S(\alpha,c)$ непрерывно дифференцируемая функция, поэтому в точке минимума ее частные производные обращаются в ноль. Найдем производную по переменной c и, приравняв ее к нулю, получим:

$$\begin{cases} S(c)'=0\\ S(\alpha)'=0\end{cases}\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}(y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha+c)=0\Leftrightarrow c=-\frac{\cos\alpha}{n}\sum y_i+\frac{\sin\alpha}{n}\sum x_i$$

Уравнение сводится к виду:

$$(y-y_c)\cos\alpha-(x-x_c)\sin\alpha+c=0$$

где $x_c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ и $y_c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ координаты центра масс системы точек $\{A_1, A_2,\dots,A_n\}$ с единичными массами.

Без потери общности, можно считать, начало координат совпадает с этим барицентром системы точек $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, тогда c=0,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i=0 \qquad (4)$$

Кроме того, можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0 \qquad (5)$$

В самом деле, если $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\neq 0$, то повернем нашу систему координат на некоторый угол β, тогда в новой системе $Ox'y'$ координаты точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_i'=x_i\cos\beta-y_i\sin\beta\\ y_i'=x_i\sin\beta+y_i\cos\beta\end{cases},\ i=1,\dots n$$

Приравнивая к нулю сумму $\sum_{i=1}^{n}x_i'y_i'$, получим тригонометрическое уравнение:

$$0=\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' = (\cos^2\beta - \sin^2\beta)\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \cos\beta \sin\beta \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2),$$

$$ctg\,2\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2)$$

одним из решений которого и является β. Таким образом, можно считать, что условие (5) выполняется.

Наша задача сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной $S(\alpha, 0)$:

$$S(\alpha,0)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\cos\alpha - x_i\sin\alpha\right)^2$$

Отсюда и (5) имеем

$$S(\alpha,0)=\cos^2\alpha\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sin^2\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sin^2\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2)$$

Заметим, что если $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2) = 0$, то функция $S(\alpha,0)$ тождественно равна константе. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad (6)$$

тогда получим окончательную оценку для $S(\alpha,0)$:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le S(\alpha,0) \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (7)$$

где знаки равенства достигаются при $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. прямая y=0 доставляет минимум функции $S(\alpha,0)$, а перпендикулярная ей прямая x=0 – максимум.

Таким образом, мы доказали, что прямая, обеспечивающая минимум суммы $\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l)$ среди всех прямых l, проходит через центр масс системы точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ и может являться единственной такой прямой, при этом перпендикулярная ей прямая, проходящая через центр масс обеспечивает максимум этой суммы среди всех прямых, проходящая через центр масс; или для некоторых систем $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ прямой, обеспечивающей минимум суммы $\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l)$ может быть любая прямая проходящая через центр масс $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Гипотеза доказана.

В связи с последним замечанием рассмотрим следующую задачу:

Пусть имеется n точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$, (n>2) на плоскости. Требуется найти такую точку $P\left(x_0, y_0\right)$, сумма квадратов расстояний от точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ до любой прямой будет постоянной (не зависящей от l) величиной.

Гипотеза 4.

Для любых точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ на плоскости существуют точки P_1, P_2 плоскости (не обязательно различные) и число $C = C(A_1, \ldots, A_n, P_1, P_2)$, такое что $|A_i l|^2 + \ldots + |A_n l|^2 = C$ для любой прямой l, проходящей через P_1 или P_2.

Набросок доказательства.

Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – множество точек на плоскости. Введем систему координат так, чтобы для координат точек A_i, $i=1,\ldots n$, выполнялись условия (4) и (5).

Далее, пусть $P(x_0,y_0)$ – искомая точка, тогда сумма квадратов расстояний от точек $A_i(x_i,y_i)$, $i=1,\ldots n$, до произвольной прямой, проходящей через P равно

$$S(\delta) = \sum_{i=1}^{n} ((x_i - x_0)\cos\delta + (y_i - y_0)\sin\delta)^2$$

Открывая скобки и пользуясь формулами: $2\sin\delta\cos\delta = \sin 2\delta$, $2\cos^2\delta = 1 + \cos 2\delta$, и $2\sin^2\delta = 1 - \cos 2\delta$, получаем:

$$S(\delta) = S_0 + S_1(\delta)$$

где S_0 – величина, не зависящая от δ:

$$S_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2\right),$$

а $S_1(\delta)$ – тригонометрический полином $F\cos 2\delta + G\sin 2\delta$ с коэффициентами:

$$F = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)^2\right)$$

$$G = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0)$$

По условию задачи искомая точка $P(x_0,y_0)$ должна быть такой, чтобы функция $S(\delta)$ не зависела от δ. Ввиду независимости функций $\cos 2\delta$ и $\sin 2\delta$ величина $S_1(\delta)$ не будет зависеть от δ. только в том случае, когда F и G равны нулю. То есть приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными x_0 и y_0:

$$\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)^2 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Пользуясь формулами (4) и (5) уравнения этой системы легко преобразовать, например, так

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_0 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_0 + \sum_{i=1}^{n} y_0 x_0 = n y_0 x_0$$

и в итоге получить систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nx_0^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + ny_0^2 \\ x_0 y_0 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда имеем:

1. Если $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, то решением задачи будет единственная точка (0,0) – центр масс системы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.
2. Если $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} > \sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2}$, то x_0=0 и из первого уравнения системы следует, что решением задачи будут точки $P_{1,2}\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2)}\right)$ или $P_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - x_i^2)}, 0\right)$ – в противном случае. Очевидно, что эти точки симметричны относительно (0,0).

   Из неравенств (6) и (7) в доказательстве гипотезы 3 следует, что прямая l, проходящая через точки P_1 и P_2 такова, что неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^2(A_i, l) \geq \sum_{i=1}^{n} \rho^2(A_i, l_1)$$

выполняется для всех прямых l_1 , проходящих через центр масс системы точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Гипотеза доказана.

Рассмотрим задачу о том как могут располагаться точки $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ плоскости относительно друг друга. Для этого приведем следующую полезную лемму, доказательство которой следует из системы (8):

Лемма.

Точка $P(x_0, y_0)$является решением задачи для точки $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$

в том и только в том случае, если векторы

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ \ldots \\ x_n - x_0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_0 \\ \ldots \\ y_n - y_0 \end{pmatrix}$$ ортогональны и имеют равные длины.

Из леммы следует, что если точки $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ являются вершинами правильного многоугольника, то решением задачи будет центр масс этих точек. Тогда можно считать, что точки $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ имеют координаты:

$A_{j+1}\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right),\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right),\quad j=0,1,\ldots,n-1$. Тогда, т.к. при $n>2$

$\sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{4\pi i j}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1}\cos\left(\frac{4\pi j}{n}\right)+i\sum_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{4\pi j}{n}\right)=0$ (i – мнимая единица), то

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{2\pi j}{n}\right)=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\cos\left(\frac{4\pi j}{n}\right)=\frac{n}{2},\quad \sum_{j=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{2\pi j}{n}\right)=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\cos\left(\frac{4\pi j}{n}\right)=\frac{n}{2}$$

и $$\sum_{j=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{4\pi j}{n}\right)=0$$

Отсюда и леммы следует, что $P(0,0)$ – решение задачи.

В случае $n=3$ верно и обратное утверждение.

Гипотеза 5.

Если в гипотезе 4 для точек A_1, A_2, A_3 точки P_1 и P_2 совпадают ($P_1=P_2$), то треугольник $A_1A_2A_3$ правильный.

Набросок доказательства.

Введем систему координат Оxy так, чтобы точка $P(0,0)$ была решением задачи для точек A, B, C. Пусть $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$ – вершины треугольника ABC.

Так как $P(0,0)$ – решение задачи, то в силу леммы векторы $\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ перпендикулярны и имеют равные длины.

Так как $P(0,0)$ точек A, B, C, то $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$, значит векторы $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ перпендикулярны вектору $\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{fe}=0$ и т.к. $\boldsymbol{ge}=0$) т.е. координаты векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ лежат в плоскости $x+y+z=0$. Найдем все такие векторы.

Выберем два произвольных ортогональных вектора $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ с равными длинами и перпендикулярными вектору $\boldsymbol{e}$, например, $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$

Матрицей перехода от стандартного базиса ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) трехмерного пространства к ортогональному базису ($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}$) является матрица

$$\Psi=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3} & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{10}$$

Семейство ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$, где ($0\le t\le 2\pi$), описывает все пары векторов перпендикулярных вектору $\boldsymbol{k}$. Поэтому (с точностью до множителя) семейство искомых векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ находим с помощью матрицы (10)

$$\boldsymbol{f}=\Psi\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\cos t+\sqrt{3}\sin t\\ \cos t-\sqrt{3}\sin t\\ -2\cos t\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\\ \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\\ -\cos t\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{g}=\Psi\boldsymbol{b}=2\begin{pmatrix}\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\\ -\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin t\end{pmatrix}$$

Отсюда и леммы координаты вершин треугольника ABC можно принять как

$$A\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right),\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right),\ B\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right),-\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right),\ \text{и}\ C(-\cos t,\sin t)$$

Найдем длины сторон этого треугольника:

$$|AB|^2=\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right)^2+\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right)^2=4\sin^2 t\sin^2\frac{\pi}{3}+$$
$$+4\cos^2 t\cos^2\frac{\pi}{6}=3$$

$$|AC|^2=\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\cos t\right)^2+\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin t\right)^2=4\cos^2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\frac{\pi}{6}+$$
$$+\left(\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\sin t\right)^2=4\cos^2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\frac{\pi}{6}+4\sin^2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\frac{\pi}{6}=3$$

Аналогично, $|BC|=\sqrt{3}$, т.е. треугольник ABC равносторонний.

Далее, очевидно, что любая другая пара $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ перпендикулярных векторов с длинами равными $\sqrt{3}$ и ортогональными вектору $\boldsymbol{e}$, получаются из векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ поворотом на некоторый α, т.е. $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_1\cos\alpha-\boldsymbol{e}_2\sin\alpha$ и $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}_1\sin\alpha+\boldsymbol{e}_2\cos\alpha$. Но, тогда легко видеть, что координаты новых трех вершин, полученных из координат векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ будут также получаться из координат вершин A, B, C поворотом на этот же угол α, т.е. образуют равносторонний треугольник.

Гипотеза доказана.

Заметим, что гипотеза не обобщается на случай $n>3$. В самом деле, векторы $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Поэтому, в силу леммы, точка $P(0,0)$ – решения задачи, например, для следующих наборов точек: $A_1\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$, $A_2\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$, $A_3\left(0,-2\sqrt{2}\right)$, $A_4(0,0)$ и $A_1\left(\sqrt{6},1\right)$, $A_2\left(-\sqrt{6},1\right)$, $A_3(0,1)$, $A_4(0,-3)$. Но, точки ни одного из этих наборов не образуют правильный четырехугольник, хотя и интересны.

Отметим, что прямые l из гипотез 3 и 4 – это хорошо известная в механике и геометрии *ось инерции*, а суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ называют моментами инерции.

Литература

[1] Препарата Ф., Шеймос М., Вычислительная геометрия: Введение, – М.: Мир, 1989

[2] Рудин У., Основы математического анализа, – М.: Мир, 1966

[3] Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов.— 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986