Problem Set 9 —— Linear Algebra A (Fall 2021)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your Tenth tutorial session!

1. 求 n 阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & v_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & v_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & v_{n-1} \\
u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & w
\end{vmatrix}
$$

2. 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$
A = \begin{bmatrix}
2a & 1 & & & & \\
a^2 & 2a & 1 & & & \\
& a^2 & 2a & 1 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & a^2 & 2a & 1 \\
& & & & a^2 & 2a
\end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

(a) 求行列式 $|A|$;

(b) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1;

(c) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解，并求通解.

3. 设行列式 Δ 和 δ 如下:

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a & b & c & d \\
b & a & d & c \\
c & d & a & b \\
d & c & b & a
\end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1
\end{vmatrix}.
$$

(a) 求 $\Delta\delta$.

(b) 求 Δ.

4. 设 A, B 分别是 $n \times m$ 与 $m \times n$ 矩阵. 证明：

$$
\begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_n - AB| = |I_m - BA|.
$$

5. 给定 m 阶实方阵 A, n 阶方阵 B. 令

$$
D = \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}.
$$

求 $|D|$.