Problem Set 5 —— Linear Algebra (Fall 2022)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your SIXTH tutorial session!

1. 已知三阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$$

(k 为常数), 且 $AB=O$ (这里的 O 是 3 乘 3 的零矩阵), 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

2. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

   (a) 证明方程组的系数矩阵的秩为 2.

   (b) 求 a, b 的值和方程组的通解.

3. 考虑两个四元齐次线性方程组 (1) 和 (2). 设齐次线性方程组 (1) 为

$$\begin{cases}x_1+x_3&=0,\\x_3+x_4&=0.\end{cases}$$

齐次线性方程组 (2) 的基础解系为

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1\\-3\\-3\\1\end{bmatrix}.$$

   (a) 求线性方程组(1)的一般解；

   (b) 线性方程组 (1) 和 (2) 是否有非零的公共解, 若有, 求出其所有其所有的非零公共解,若没有，则说明理由。

4. 设 α, β, γ 为四维列向量, 矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T+\gamma\gamma^T$, 其中 $\alpha^T,\beta^T,\gamma^T$ 分别是 α,β,γ 的转置. 证明：

   (a) A 的秩小于等于 3.

   (b) 若 α, β, γ 线性相关, 则 A 的秩小于 3.

5. 设 A 和 B 为 $m\times n$ 矩阵, 且 $\operatorname{rank}(A)=r,\ \operatorname{rank}(B)=s,\ r+s\le\min\{m,n\}$. 证明：

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

当且仅当存在 $m\times m$ 可逆矩阵 P 和 $n\times n$ 可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{bmatrix}I_r&O\\O&O\end{bmatrix}\text{ 且 }PBQ=\begin{bmatrix}O&O\\O&I_s\end{bmatrix}.$$