

Problem Set 3 — Linear Algebra A (Fall 2022)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your third tutorial session!

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 如果 $I + AB$ 可逆, 证明矩阵 $I + BA$ 可逆.
2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3I = 0$.
 - (a) 证明 $A, A + 2I$ 可逆, 并求它们的逆.
 - (b) 当 $A \neq I$ 时, 判断 $A + 3I$ 是否可逆, 并说明理由.
3. 若矩阵 A 由初等列变换化为矩阵 B , 则下列说法是否正确? 请说明理由.
 - (a) 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$.
 - (b) 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$.
 - (c) 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$.
 - (d) 方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 同解.
4. 证明:
 - (a) 如果 A 是可逆对称矩阵, 那么 A^{-1} 也是对称矩阵.
 - (b) 设 n 阶方阵不可逆, 则存在 n 阶非零的方阵 B 使得 $AB = O$. 这里 O 表示零矩阵.
 - (c) 可逆的上(下)三角形矩阵的逆仍是上(下)三角形矩阵.
5. 用两种方法求

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

的逆:

- (a) 用初等变换;
- (b) 按 A 中的划分, 利用分块矩阵的初等变换.