Problem Set 11 —— Linear Algebra A (Fall 2021)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your 14th tutorial session!

1. 证明：

   (a) 如果

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \ (a_{ij}=a_{ji})$$

   是正定二次型, 那么

   $$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

   是负定二次型;

   (b) 如果 A 是正定矩阵, 那么

   $$|A| \le a_{nn}P_{n-1},$$

   这里 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 级的顺序主子式;

   (c) 如果 A 是正定矩阵, 那么

   $$|A| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

   (d) 如果 $T=(t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵, 那么

   $$|T|^2 \le \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

2. 如果 A 是 3 阶的实矩阵, 满足条件 $A^TA=AA^T$, $A^T\neq A$.

   (a) 证明: 存在 3 阶正交矩阵 P 和 a, b, $c\in\mathbb{R}$, 使得

   $$P^TAP=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{bmatrix}.$$

   (b) 若

   $$A=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}E_{i,j},\ AA^T=A^TA=I_3,\ |A|=1,$$

   证明 1 为 A 的一个特征值, 并求特征值 1 的一个特征向量. 其中 $E_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列元素为 1, 其余位置为 0 的 3 阶矩阵.

3. 证明:

$$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

是半正定的.

4. 用非退化线性替换化

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j.$$

为标准形.

5. 考虑矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{bmatrix}.$$

(a) 求 A 的所有奇异值;

(b) 求 A 的奇异值分解.