

Problem Set 11 — Linear Algebra A (Fall 2022)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your 14th tutorial session!

1. 证明:

(a) 如果

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

是正定二次型, 那么

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型;

(b) 如果 A 是正定矩阵, 那么

$$|A| \leq a_{nn} P_{n-1},$$

这里 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 级的顺序主子式;

(c) 如果 A 是正定矩阵, 那么

$$|A| \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn};$$

(d) 如果 $T = (t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵, 那么

$$|T|^2 \leq \prod_{i=1}^n (t_{1i}^2 + \cdots + t_{ni}^2).$$

2. 如果 A 是 3 阶的实矩阵, 满足条件 $A^T A = A A^T$, $A^T \neq A$.

(a) 证明: 存在 3 阶正交矩阵 P 和 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{bmatrix}.$$

(b) 若

$$A = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{i,j}, \quad A A^T = A^T A = I_3, \quad |A| = 1,$$

证明 1 为 A 的一个特征值, 并求特征值 1 的一个特征向量. 其中 $E_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列元素为 1, 其余位置为 0 的 3 阶矩阵.

3. 证明:

$$n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

是半正定的.

4. 用非退化线性替换化

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

为标准形.

5. 考虑矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) 求 A 的所有奇异值;

(b) 求 A 的奇异值分解.