Problem Set 4 —— Linear Algebra A (Fall 2022)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your FIFTH tutorial session!

1. 如果方阵 A 适合 $A^2 = A$, 则 A 称为幂等的. 求出所有 2 阶幂等方阵.

2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵, C 为 $p \times q$ 矩阵. 证明：

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC - \operatorname{rank} B \le \operatorname{rank} ABC.$$

同时探讨一下在什么时候上面的等号成立. 这个不等式一般称为 **Frobenius 秩不等式**, 当 C 为 n 阶单位方阵时, 它就是 **Sylvester 秩不等式**.

3. 假定:

$$W_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\} \text{ 和 } W_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

   (a) $W_1 \cap W_2 := \big\{ x \in \mathbb{R}^3 : x \in W_1 \text{ 且 } x \in W_2 \big\}$ 是否为 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间. 阐明理由.

   (b) 设 W_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的另外一个子空间. 证明 $(W_1 + W_2) \cap W_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间, 其中

$$W_1 + W_2 := \{ w_1 + w_2 : w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \}.$$

4. 设 A 一个秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵.

   (a) 如果 P 为一个 $m \times m$ 的可逆矩阵, Q 为一个 $n \times n$ 的可逆矩阵. 证明

$$\operatorname{rank} PAQ = r.$$

   (b) 证明存在一个 $m \times m$ 的可逆矩阵 P 和一个 $n \times n$ 的可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

   这里的 O 都表示相应的零矩阵.

5. 考虑

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix},\ v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) 找出 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 的一个极大线性无关组.

   (b) 如何从 v_1, v_2 出发构造出 $\mathbb{R}^3$ 的一组基?