

Problem Set 3 — Linear Algebra A (Fall 2021)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your third tutorial session!

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 如果 $I + AB$ 可逆, 证明矩阵 $I + BA$ 可逆.
2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3I = 0$.
 - (a) 证明 $A, A + 2I$ 可逆, 并求它们的逆.
 - (b) 当 $A \neq I$ 时, 判断 $A + 3I$ 是否可逆, 并说明理由.
3. 若矩阵 A 由初等列变换化为矩阵 B , 则 ()
 - (A) 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$
 - (B) 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$
 - (C) 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$
 - (D) 方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 同解
4. 证明:
 - (a) 如果 A 是可逆对称矩阵, 那么 A^{-1} 也是对称矩阵.
 - (b) 设 n 阶方阵不可逆, 则存在 n 阶非零的方阵 B 使得 $AB = O$. 这里 O 表示零矩阵.
 - (c) 可逆的上 (下) 三角形矩阵的逆仍是上 (下) 三角形矩阵.

5. Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

and

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verify that $GFEA = U = I$, where I is the 3×3 identity matrix;
- (b) Let $L = (GFE)^{-1} = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$, find L ;
- (c) Explain why the multipliers l_{ij} fit right into the matrix L .