

Problem Set 10 — Linear Algebra A (Fall 2022)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your 12th tutorial session!

1. 如果 A 是一个 n 阶复方阵, 且 λ_i 是 A 一个特征值. 证明: λ_i 的代数重数大于等于它的几何重数.
2. 设 A 是一个 n 阶复方阵, 如果矩阵 A 的所有特征值的几何重数和代数重数都相等. 证明: 矩阵 A 是可对角化的.
3. (方阵的同时对角化问题) 假定矩阵 A, B 都是可对角化矩阵, 并且 $AB = BA$. 证明: 存在可逆矩阵 S 使得

$$S^{-1}AS = \Lambda_1, S^{-1}BS = \Lambda_2,$$

其中 Λ_1 和 Λ_2 都为对角矩阵.

4. 设 A 为一个 $n \times n$ 矩阵. 如果

$$A^r = I,$$

r 为一个正整数. 证明: A 是可对角化的.

5. 设 n 阶方阵 A 的特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

且 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式. 证明方阵 $f(A)$ 的特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n).$$