$A_{m\times n}, B_{m\times n}$ Problem #5.

必要性：

不失一般性，可假设A的前r列组成 $C(A)$ 的一组基（否则可交换A的列，相当于右乘一个置换矩阵），故存在一个n阶矩阵

$Q_1 = \begin{bmatrix} I_r & M_1 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$ 使得 $AQ_1 = [A_1\ 0]$，其中 A_1 为A的前r列构成的矩阵. 记 $BQ_1 = [B_1\ B_2]$. $C(B_2) \subset C(B)$

$\mathrm{rank}((A+B)Q_1) = \mathrm{rank}(A+B) = r+s$，即 $\mathrm{rank}([\underline{A_1+B_1}, B_2]) = r+s$

$\mathrm{rank}(B_2) \geq s$，从而 $C(B_2) = C(B)$，即存在 B_2 中的s列构成 $C(B) = C(B_2)$ 的一组基，可取置换矩阵 $Q_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_{n-r} \end{bmatrix}$，使得 BQ_1Q_2 的后s列为 $C(B)$ 的一组基

$A_{1\,m\times r}$

$B_{2\,m\times s}$

$$(A+B)Q_1Q_2Q_3 = [A_1\ 0\ B_3]$$

$$P_1 [A_1\ 0\ B_3] = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $P_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-r-s} \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}$ 则有 $P_2P_1[A_1\ 0\ B_3] = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}$

记 $P_2P_1 = P$，$Q_1Q_2Q_3 = Q$

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad PBQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}.$$