Problem Set 9 —— Linear Algebra A (Fall 2022)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your Tenth tutorial session!

1. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & v_{n-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & w \end{vmatrix}.$$

2. 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (a) 求行列式 $|A|$;

   (b) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解，并求 x_1;

   (c) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解，并求通解.

3. 设行列式 Δ 和 δ 如下:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

   (a) 求 $\Delta\delta$.

   (b) 求 Δ.

4. 设 A, B 分别是 $n \times m$ 与 $m \times n$ 矩阵. 证明：

$$\begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_n - AB| = |I_m - BA|.$$

5. 给定 m 阶实方阵 A, n 阶方阵 B. 令

$$D = \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}.$$

   求 $|D|$.