Problem Set 5 —— Linear Algebra A (Fall 2021)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your SIXTH tutorial session!

1. 已知三阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$$

(k 为常数), 且 $AB=O$ (这里的 O 是 3 乘 3 的零矩阵), 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

2. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

   (a) 证明方程组的系数矩阵的秩为 2.

   (b) 求 a,b 的值和方程组的通解.

3. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

4. 设 α, β 为三维列向量, 矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中 α^T,β^T 分别是 α,β 的转置. 证明：

   (a) A 的秩小于等于 2.

   (b) 若 α, β 线性相关, 则 A 的秩小于 2.

5. Let A and B be $m\times n$ matrices with $\operatorname{rank}(A)=r,\ \operatorname{rank}(B)=s,\ r+s\le\min\{m,n\}$. Show that

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

if and only if there exist $m\times m$ invertible matrix P and $n\times n$ invertible matrix Q such that

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ and } PBQ=\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix}.$$