

## Problem Set 2 — Linear Algebra A (Fall 2021)

Dr. Y. Chen

Please hand in your assignment at the beginning of your second tutorial session!

1. 计算:

(a)

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$$

这里假定  $n$  是一个正整数.

2. 举反例说明下列命题是错误的:

(a) 若  $A^2 = 0$ , 则  $A = 0$ ;

(b) 若  $A^2 = A$ , 则  $A = 0$  或  $A = I$ ;

(c) 若  $AX = AY$ , 且  $A \neq 0$ , 则  $X = Y$ .

3. 证明: 主对角元全为 1 的上三角矩阵的乘积, 仍是主对角元为 1 的上三角矩阵.

4.  $n$  阶矩阵  $A$  的主对角元之和称为矩阵  $A$  的迹, 记作  $\text{tr}(A)$ , 即

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

证明: 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 则

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

5. 证明: 如果  $A$  和所有的  $n$  级矩阵都可以交换, 那么  $A = \lambda I$ , 这里  $\lambda$  是一个实数,  $I$  为  $n$  阶单位阵.