因为今天课上期末试题为临时安排做的，时间较紧加之我之前没有作准备有些讲的不太清楚，这里用电子文档给大家做一个整理。

1(a) 根据各行的因子需分别提出，得 $\det(kA) = k^n \det(A)$.

1(b) 根据定义，

$$x^T(\sigma I + A^T A)x = \sigma x^T x + (Ax)^T(Ax) > 0 \; for \; allnonzerox.$$

1(c) 由 A 是 2×2 特征值为 2 和 3 的矩阵，故设 $Ax_1 = 2x_1$,$Ax_2 = 3x_2$. 然后分别计算，得 $A^2x_1 = 4x_1$,$A^2x_2 = 9x_2$, 进而可代入计算得 $A^2 - 3A + 6I$ 的特征值为 4 和 6，故其仍为 non-singular.

1(d) 假设 $\det A \neq 0$, 那么有 A^{-1}, 乘回 $A^2 = A$ 得 $A = I$, 矛盾。

1(e) 显然错误，只有特征值相同，找一个矩阵验证一下就可以看出来。

2(a) 代入计算式得

$$\begin{aligned} C_{11} + C_{12} + C_{13} &= (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - (-10) + (-7) = 4 \end{aligned}$$

2(b) P 为向 A 的列空间的投影矩阵，由其列空间为二维而 P 为三阶矩阵，易得 P 的特征值为 1,1,0.

2(c) 类似于 1(c), 我们可以计算得 $A_3 - 2A^2 + A + 2I$ 的特征值为-2,4,14, 故其行列式为三特征值之积即-112.

2(d) 第一问利用正交矩阵定义即可：

$$Q_1^T Q_1 = I, Q_2^T Q_2 = I, \text{故}(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^T(Q_1^T Q_1)Q_2 = I.$$

第二问直观上并不好想，但我们可以找到反例：

$$H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{但} H_1H_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{不为正定矩阵。}$$

第三问显然正确。第四问相似要求相同的 Jordan form, 故错误。