简易版题解

张若天

2019 年 4 月 3 日

$$\sum_{i \le x} depth(lca(i,y))^k$$

1 首先考虑 $k = 1$

求的是 $\sum_{i \le x} depth(lca(i,y))$，一堆点然后每个点和 y 求 lca 然后深度求和。

总体思路是把 lca 的值摊派到这个点到根的路径上 (这个东西也叫树上差分？)，再离线解决所有询问。

维护一个点权 sum[]，初始为 0，然后将 y 到根的每个点的点权设为 1，然后对于每个点 $i \le x$，求从 i 到根的权值和为上面要求的答案，但这样就 $O(n)$ 了。

(可以反向考虑)，维护一个点权 sum[]，初始为 0，对于小于等于 x 的点 i，将 i 到根的路径上所有点的点权 ++。然后求从 y 到根的权值和也是上面要求的答案。这种方法求可以按 x 排序，然后离线，x 相等的询问一块问。

可以树链剖分 + 线段树解决。$O(nlog^2n)$。或者 LCT 也行。

2 然后考虑 $k > 1$

k=2 的话，按照上述思路想，把 lca^2 的值摊到到根的路径上的话就不是之前的 1,1,1,...，变成了 1,3,5,7... 直接看的话问题变成了线段树区间加等差数列，好像改一下线段树实现也能做（所以给了点部分分）。

但是 k>2 的时候就比较麻烦了。

基于把 lca^k 摊到从这个点到根的路径上这个思路，实际上对于深度是 x 的点来说，这个点每次点权增加的值固定是 $x^k - (x-1)^k$。

所以实际上，线段树打标记只用记录每个点被算了多少次 cnt[] 即可。然后实际上的权值和是 $sum[i] = cnt[i] * (dep[i]^k - (dep[i]-1)^k)$，每次操作只有 cnt[] 区间加 1，于是预处理线段树上每个区间的 $\sum (dep[i]^k - (dep[i]-1)^k)$ 后就可以直接拿线段树维护 sum[]。

于是还是之前的树链剖分 + 线段树解决。$O(nlog^2n)$。或者 LCT 也行。

(完)