概率论与数理统计

大作业

姓名：章星宇

学号：19200300029

序号：25

大作业一 汽车与山羊问题

一、问题重述

汽车与山羊问题——亦称为蒙提霍尔问题，出自美国的电视游戏节目 Let's Make a Deal。问题的名字来自该节目的主持人蒙提·霍尔（Monty Hall）。

问题是这样的：

参赛者面前有三扇关闭着的门，其中一扇的后面是一辆汽车，选中后面有车的那扇门就可以赢得该汽车，而另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，主持人会开启剩下两扇门中的一扇，露出其中一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要更换选择，选另一扇仍然关着的门。

二、理论推导

解法一：采用条件概率公式

假设观众选中的是 1 号门

假设：A=“观众选中的 1 号门后有车”，

B=“其他门后有车”，

C=“主持人打开一扇门后是羊的门”

根据条件概率公式：$P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}$

不换门：$P(C)=1,P(AC)=P(A)P(C|A)=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$

所以$P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{1}{3}$，即不换门选到车的概率为$\dfrac{1}{3}$

换门：$P(BC)=P(\overline{A}C)=P(\overline{A})P(C|\overline{A})=\dfrac{2}{3}\times 1=\dfrac{2}{3}$

所以$P(B|C)=\dfrac{P(BC)}{P(C)}=\dfrac{2}{3}$，即换门之后选到车的概率为$\dfrac{2}{3}$

解法二：采用全概率公式

假设：A_i =“观众选中的 i 号门后有车，i=1,2,3 ”，

B =“观众不换门得到车” ，

B' =“观众改变选择得到车” ，

C =“主持人打开一扇门后是羊的门”” 。

根据全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$P(B|A_1)=1, P(B|A_2)=P(B|A_3)=0,\ P(B'|A_1)=0, P(B'|A_2)=P(B'|A_3)=1,$

$P(B)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{3},\ P(B')=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3},$

$P(C)=1, P(C|B)=1, P(C|B')=\frac{1}{3},$

所以 $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=P(BC)=P(B)P(C|B)=\frac{1}{3}$，即不换门选到车的概率为 $\frac{1}{3}$，

$P(B'|C)=\frac{P(B'C)}{P(C)}=P(B'C)=P(B')P(C|B')=\frac{2}{3}$，即换门之后选到车的概率为 $\frac{2}{3}$

解法三：采用贝叶斯公式

假设：A =“观众选中的门后是车”，

$\overline{\mathrm{A}}$ =“观众选中的门后是羊”，

B =“其他门后是车”

根据贝叶斯公式，$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}, P(A)=\frac{1}{3}, P(\overline{A})=\frac{2}{3},$

$P(B|A)=1, P(B|\overline{A})=1,$

所以 $P(A|B)=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times 1}=\frac{1}{3}$，即不换门选到车的概率为 $\frac{1}{3}$，

$$P(A'|B)=\frac{\frac{2}{3}\times 1}{\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 1}=\frac{2}{3}$$，即换门之后选到车的概率为$\frac{2}{3}$，

三、matlab 仿真

Matlab 程序：

```
clc

clear

n=10000;%实验次数

car=0;

%假设 1，2 为羊，3 为车

%如果每次都更改选择

for i = 1:n

    choose = unidrnd(3);

    if(choose == 1 || choose == 2)

        car = car + 1;

    end

end

fprintf("更改选择选中汽车的概率为：%f\n",car/n)

%如果每次都不改选择

car=0;

for i = 1:n

    choose = unidrnd(3);

    if(choose == 3)
```

```
            car = car + 1;
        end
end
fprintf("不更改选择选中汽车的概率为：%f\n",car/n)
```

运行结果：

```
命令行窗口
  更改选择选中汽车的概率为：0.665800
  不更改选择选中汽车的概率为：0.333600
```

结果符合理论值

大作业二 分赌注问题

一、问题重述

假设赌徒 A 和 B 的胜率相同，即每一局的 A 和 B 都有 0.5 的机会赢得胜利，假设先胜 18 局的人赢得赌注，并假设在 A 胜 10 局且 B 胜 7 局的时候中止赌博，用 MATLAB 模拟中止赌博后的各次赌博情况直至赢得这次赌注，把这样的实验进行 10000 次以后，试分析 A 和 B 赢得赌注次数的比率与理论计算的结果是否相符合？

二、理论推导

赌徒分得赌注的比例应等于从这以后继续赌下去他们获胜的概率。

由题可得：

(1)甲胜一局的概率为 0.5，乙胜一局的概率为 0.5。

(2)各局赌博互不影响。

因此，可把分赌注问题归纳成如下问题：

进行 18 次独立重复试验，设每次试验胜利的概率为 0.5，失败的概率为 0.5，问 A 在 11 次失败之前，取得 8 次胜利的概率是多少？

为了使 A 的 8 次胜利发生在 11 次失败之前，必须在 18 次试验中至少胜利 8 次。因为如果 18 次试验中胜利次数少于 8 次，则在 18 次试验中失败次数至少为 11 次，这样在 11 次失败之前就得不到 8 次胜利。由二项分布概率公式，在 18 次试验中有 8 次胜利的概率 ，即 A 获胜的概率为

$$P(A)=\sum_{i=8}^{18}C_{18}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{18-i}=0.76$$

则 B 获胜的概率为

$$P(B)=1-P(A)=0.24$$

所以，A 应该分 0.76 份赌注，B 应该分 0.24 份赌注。

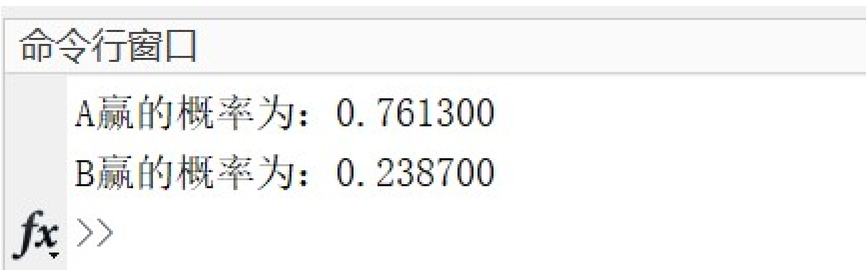
三、matlab 仿真

Matlab 程序：

```
clc
a=0;
b=0;
awin=0;
bwin=0;
for i = 1:10000
    for j = 1:18
        t=unidrnd(2);
        if t==1
            a=a+1;
```

```
            else
                b=b+1;
            end
            if(a==8 || b==11)
                if (a==8)
                    awin=awin+1;
                else
                    bwin=bwin+1;
                end
                a=0;
                b=0;
                break;
            end
        end
end
fprintf("A 赢的概率为：%f\n",awin/10000)
fprintf("B 赢的概率为：%f\n",bwin/10000)
```

运行结果：



结果与理论推导结论一致。

大作业三 第五章课后思考题

一、问题重述

（1）利用均匀分布 U[-1, 1]，使用中心极限定理产生正态分布的随机数 1000 个，其中每次用于产生正态分布随机数的均匀分布样本容量 n≥50

（2）在产生的 1000 个随机数中，均匀随机的抽取一个容量为 100 的样本，选择有效的点估计量给出基于该样本的总体均值和方差的点估计值，并将其与理论推导的值进行比较

（3）基于抽取的容量为 100 的样本给出总体均值和方差的置信度为 0.95 的置信区间，并考察总体参数是否落在置信区间中

（4）根据抽取的样本，利用分布拟合检验的方法检验总体是否服从正态分布

二、理论推导

由中心极限定理可知：

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立，具有相同的期望和方差，即 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$，

令 $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$，$Z_n = \dfrac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}} = \dfrac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 则 $Z_n \to N(0,1)$

三、matlab 仿真

Matlab 程序：

```
clc
clear
n=100;
len = 1000;
x = zeros(1,len);
for i = 1 : len
```

```
    x(i) = (sum(unifrnd (-1,1,1,n)))/sqrt(n/12)/2;
end
b=x(randperm(100));%随机抽样
jz=mean(b)
fc=moment(b,2)
[muhat,sigmahat,muci,sigmaci]=normfit(b,0.05)
b = b';
alpha = 0.05;
[mu, sigma] = normfit(b);
F = normcdf(b, mu, sigma);
[h,s] = kstest(b, [b,F], alpha);
if h == 0 %h==0 表示接受
disp('该数据源服从正态分布。')
else
disp('该数据源不服从正态分布。')
end
```

运行结果:

（2）理论值 jz（均值）=0，fc（方差）=1

```
jz =

    0.011863107115777
```

```
fc =

    1.045240755881084
```

实际值与理论值相差不大

（3）

```
muci =

  -0.305715924449818
   0.091819907183340
```

```
sigmaci =

   0.879538855839755
   1.163702231079076
```

总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为（-0.30，0.09），jz=0.01，在置信区间内；

总体方差的置信度为 0.95 的置信区间为（0.88，1.16），fc=1.04，在置信区间内。

（4）

```
命令行窗口
  该数据源服从正态分布。
```

总体服从正态分布。

大作业四 生日悖论

一、问题重述

生日悖论（Birthday paradox）是指，如果一个房间里有 23 个或 23 个以上的人，那么至少有两个人的生日相同的概率要大于 50%。试用 matlab 对 30 人进行 100 次模拟，并画出散点图。

二、理论推导

设：p(n)表示 n 个人中至少两人生日相同的概率

30 个人，每个人生日都不同的概率为：

$$\overline{P}(30)=1\times(1-\frac{1}{365})\times(1-\frac{2}{365})\dots(1-\frac{29}{365})=\frac{365!}{365^{30}(365-30)!}=0.293683$$

$P(30)=1-\overline{P(30)}=0.706317$,即 30 人中至少有两人生日是在同一天的概率超过 70.6%

三、matlab 仿真

Matlab 程序：

```
clc
clear
m=100; %仿真次数
N=30;%学生人数
for j = 1:m
    B = zeros(365);
    for i=1:N
        A(i)=unidrnd(365);%生日的 365 天
        B(A(i))= B(A(i))+1;
        if (B(i)>=1)
            plot(j,A(i),'*','color',[1 0 0]);
            hold on;
        else
            plot(j,A(i),'*','color',[0.6 0.6 0.6]);
            hold on;
        end
end
end
```

xlabel("times");

ylabel("date");

title("Birthday paradox scatter diagram(30 students)");

axis([0,100,0,365]);

实验结果: