

# 实验一：信号的采样

李宝富 19200300035

章星宇 19200300029

戚辰 19200300023

## 一、实验目的

- 1.建立模拟信号的数学模型，设计计算机程序仿真产生模拟信号；
- 2.采用过采样和欠采样多个不同的采样频率对模拟信号进行时域采样产生离散信号，绘制模拟信号和离散信号的时域波形图进行分析对比，深入理解信号的采样过程、模拟信号与离散信号的特点、时域采样定理。

## 二、实验原理

### 2.1 信号简介

信号(signal)是信息的物理体现形式，或是传递信息的函数，而信息则是信号的具体内容。信号是信息的载体，是信息表达的一种形式，例如烟雾、交通灯、语音、图像、地震波、心电图等都可以称之为信号。

### 2.2 模拟信号

模拟信号是指用连续变化的物理量表示的信息，其信号的幅度，或频率，或相位随时间作连续变化，或在一段连续的时间间隔内，其代表信息的特征量可以在任意瞬间呈现为任意数值的信号。

模拟信号的主要优点是其精确的分辨率，在理想情况下，它具有无穷大的分辨率。与数字信号相比，模拟信号的信息密度更高。由于不存在量化误差，它可以对自然界物理量的真实值进行尽可能逼近的描述。

模拟信号的另一个优点是，当达到相同的效果，模拟信号处理比数字信号处理更简单。模拟信号的处理可以直接通过模拟电路组件（例如运算放大器等）实现，而数字信号处理往往涉及复杂的算法，甚至需要专门的数字信号处理器。

拟信号的主要缺点是它总是受到杂讯的影响。信号被多次复制，或进行长距离传输之后，这些随机噪声的影响可能会变得十分显著。

### 2.3 离散信号

离线信号是指在时间上是离散的，即只在某些不连续的规定时刻给出信号的瞬时值，而在其它时刻无意义的信号。连续时间信号的采样是离散信号产生的方法之一，而计算机技术的发展以及数字技术的广泛应用是离散信号分析、处理理论和方法迅速发展的动力。

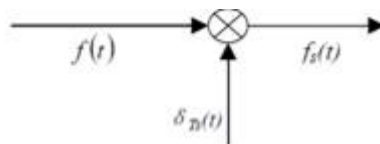
### 2.4 采样定理

在进行模拟/数字信号的转换过程中，当采样频率  $f_s$  大于信号中最高频率  $f_{max}$  的 2 倍时( $f_s > 2f_{max}$ )，采样之后的数字信号完整地保留了原始信号中的信息，一般实际应用中保证采样频率为信号最高频率的 2.56 ~ 4 倍；采样定理又称奈奎斯特定理。

DSP 在实际应用中有精度高，灵活性强，可以实现模拟系统很难达到的指标或特性，可以实现多维信号处理等优点，一般情况下模拟信号的数字处理方法主要有以下步骤：

### 2.5 连续信号的采样

对某一连续时间信号  $f(t)$  的采样原理图为：



由图可知,  $f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$ , 其中, 单位冲激采样信号  $\delta_{T_s}(t)$  的表达式为:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad \text{其傅里叶变换为} \quad \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s), \quad \text{其中 } \omega_s = 2\pi/T_s, \text{ 设}$$

$F(j\omega)$  为  $f(t)$  的傅里叶变换,  $f_s(t)$  的频谱为  $F_s(j\omega)$ , 根据傅里叶变换的频域卷积定理:

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

若设  $f(t)$  是带限信号, 带宽为  $\omega_m$ , 即当  $|\omega| > \omega_m$  时,  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega) = 0$ , 则  $f(t)$  经过采样后的频谱  $F_s(j\omega)$  就是  $F(j\omega)$  在频率轴上搬移至  $0, \pm\omega_s, \dots, \pm n\omega_s, \dots$  处 (幅度为原频谱的  $1/T_s$  倍)。因此, 当  $\omega_s \geq 2\omega_m$  时, 频谱不发生混叠; 当  $\omega_s < 2\omega_m$  时, 频谱发生混叠。

## 2.5 连续信号的恢复

设信号  $f(t)$  被采样后形成的采样信号为  $f_s(t)$ , 信号的重构是指由  $f_s(t)$  经内插处理后, 恢复出原来的信号  $f(t)$  的过程, 因此又称为信号恢复。设  $f(t)$  为带限信号, 带宽为  $\omega_m$ , 经采样后的频谱为  $F_s(j\omega)$ 。设采样频谱  $\omega_s \geq 2\omega_m$ , 则  $F_s(j\omega)$  是以  $\omega_s$  为周期的谱线。现取一个频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (\text{其中, 截止频率 } \omega_c \text{ 满足 } \omega_m \leq \omega_c \leq (\omega_s - \omega_m))$$

的理想低通滤波器

与  $F_s(j\omega)$  相乘, 得到的频谱即为原信号的频谱  $F(j\omega)$ 。根据时域卷积定理:

$$f(t) = h(t) * f_s(t)$$

其中,

$$f_s(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$

$$h(t) = F^{-1}[H(j\omega)] = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t), \omega_c \text{ 为 } H(j\omega) \text{ 的截止角频率。}$$

因此:

$$F_s(j\omega) = \mathbf{F}[f(t)\delta_{T_s}(t)] = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

那么可以不失真的恢复原来的模拟信号, 否则会造成信号的频谱混叠, 不能不失真的恢复原来的模拟信号。能够不失真的恢复出原来模拟信号的最低采样频率称为奈奎斯特采样频

率。

### 三、实验过程

#### 3.1 设计步骤

由 matlab 产生模拟信号，并分别采用不同的频率对其进行采样，最后将采样点利用插值法得到其恢复后的信号，对比不同频率下采样的区别。

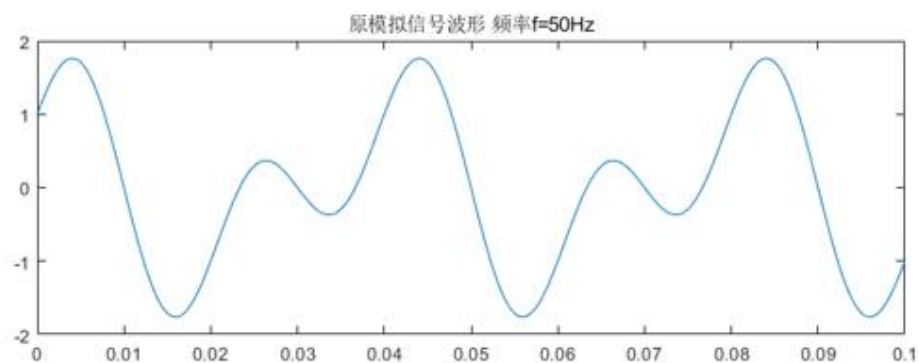


#### 3.2 建立模拟信号

生成信号频率为  $f=50\text{Hz}$  的信号:

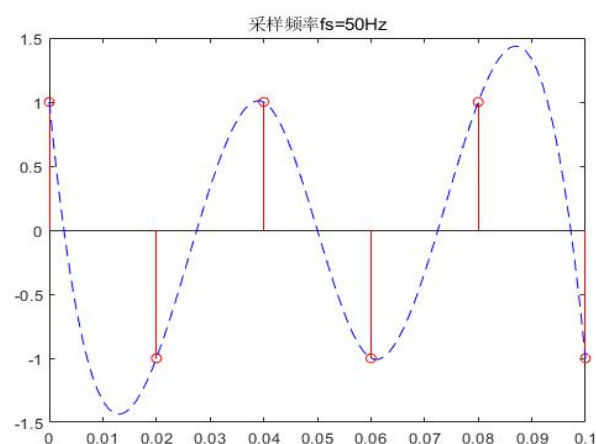
$$x = \sin(2\pi ft) + \cos(\pi ft)$$

如图为两个周期内的函数图像:

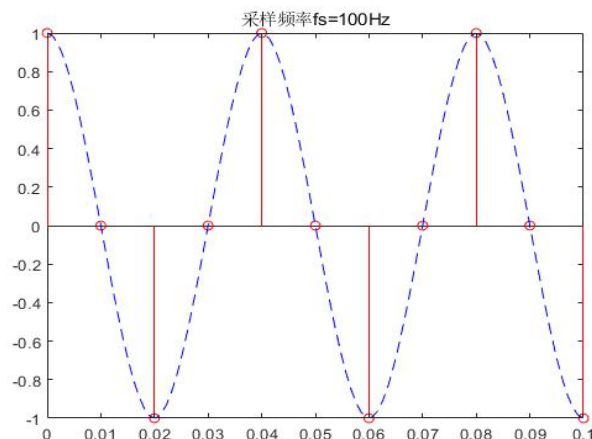


#### 3.3 不同采样频率对信号的采样

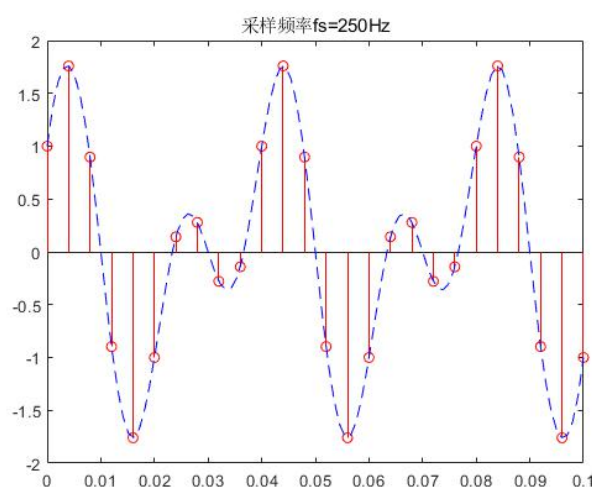
设置采样频率为  $50\text{Hz}$ ，得到其采样过程和采样后的信号。



设置采样频率为  $100\text{Hz}$ ，得到其采样过程和采样后的信号。



设置采样频率为 250Hz，得到其采样过程和采样后的信号。



### 3.4 不同采样频率采样的信号的信噪比

为了客观评价信号采样的失真程度，我们引入信噪比 SNR 这个指标，信噪比指的是原始信号功率与噪声功率的比值，单位用分贝数(db)表示。

离散信号的功率计算公式

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$$

信噪比 SNR 计算公式

$$SNR = 10 \lg \frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

式中， $P_{signal}$  代表原始信号的功率， $P_{noise}$  代表噪声信号的功率。

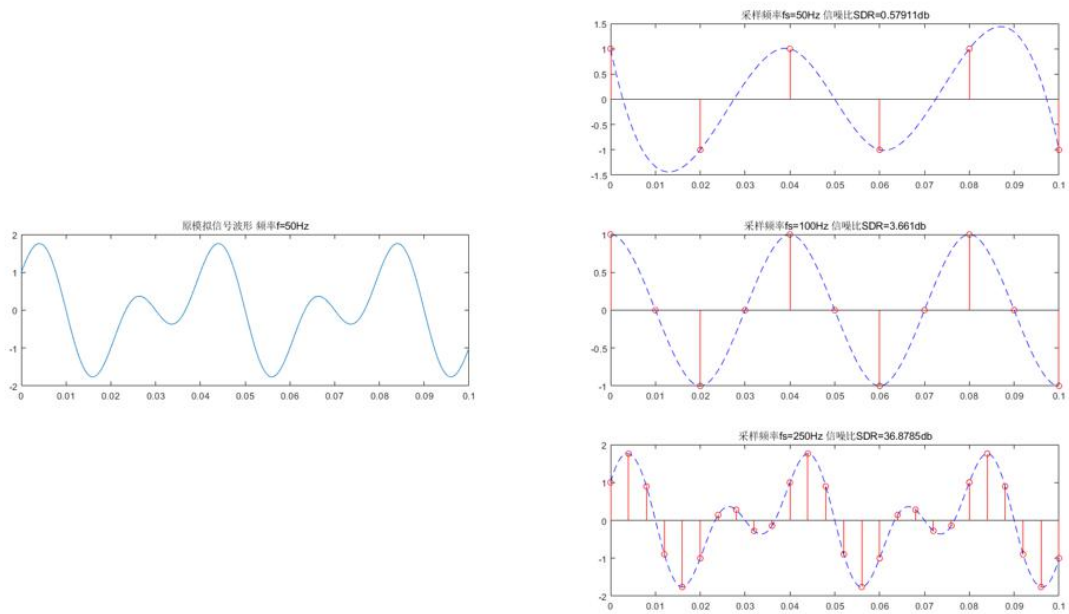
信噪比 SNR 越大，说明信号的失真越小，还原程度越高。

在此次实验中，我们将采样信号与原始信号在各点的差值视作噪声，即

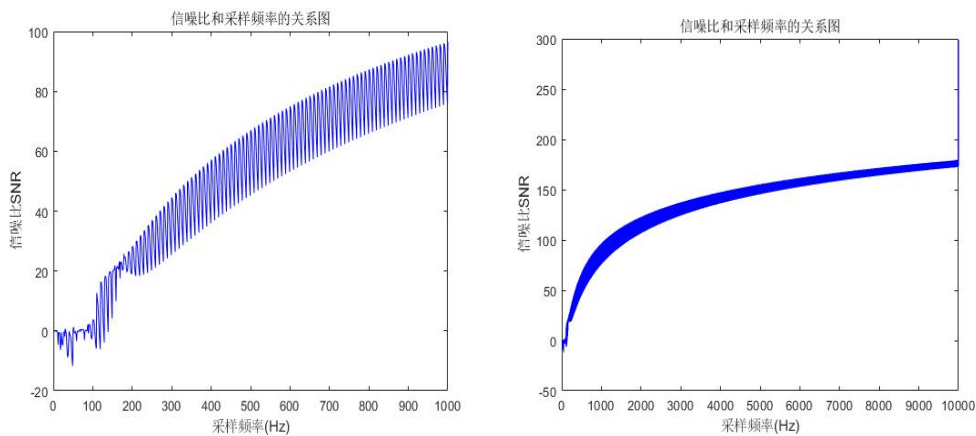
$$x_{noise} = x_{sample} - x_{signal}$$

通过 matlab 仿真, 我们得到采样率为 50Hz, 100Hz, 250Hz 的信号信噪比分别为 0.58db,

3.66db，36.88db。结果如下图所示：



为了进一步探究采样信号频率与信噪比的关系，我们对更大范围内的信号频率进行了仿真，结果如下图所示。



从图中可以发现，采样频率小于 110Hz（原信号频率的 2.2 倍）时，信噪比产生较大变化，并不稳定。当采样频率大于 110Hz 之后，信噪比以震荡的形式呈指数趋势上升，采样频率越大，信噪比上升得越缓慢。

查阅相关资料，常用音响的信噪比应不低于 70db，对应图中的采样频率至少应大于 550Hz，即原信号的频率的 11 倍。同时，这个实验说明了采样频率越高，信噪比越大，信号的失真越小，但信噪比的提升效果随采样频率的增大而衰减，因此把握信噪比和采样频率所需成本的平衡是提升音质需要考虑的重要因素。

#### 四、结果分析

- 1.根据实验结果，可以从信噪比看出，在有混叠条件下，信号的恢复效果很差，完全达不到需要的波形。
- 2.在无混叠的情况下，采样频率越大，对原波形的恢复效果越好。
- 3.即使是无混叠的情况，对于非正弦周期信号而言，采样频率刚好等于二倍频率时，波

形恢复效果也并不理想。

4.对于非周期信号的采样与恢复，难以完全恢复原波形。

## 五、实验总结

在本次实验中，我们选取了非正弦周期的信号进行采样与恢复，相较于大多数选取正弦周期信号的实验而言，实验结果出现了一定的偏差。这次实验让我们小组更加深刻地理解了取样定理，知道了信号的取样与恢复过程及相应原理，对本节之时的理解更加系统化，并且熟练掌握了信号恢复的方法。

## 六、实验中遇到的问题

李宝富 19200300035

问题：如果只是为了“保证采样后的信号不失真”，只要  $F_s$  满足采样定律要求，加上滤波器就可以达到条件，那么为什么目前依旧有很多过采样的处理？

解答：

根据了解，过采样一般会配合相关信号处理一起使用，而过采样最主要的优势：

- 1.过采样速率高可以降低混叠滤波器的要求，降低滤波器设计难度；
- 2.可以对噪声的频率进行整形，使其不再是白噪声，将我们所处理信号的噪声移到其他频带

章星宇 19200300029

问题：发现以奈奎斯特频率进行采样，得到的信号依旧发生较大失真。

解决：理想的采样信号，在频域上是带限信号，在时域上是无限信号。而通过计算机仿真后，信号在时域上不再是无限信号，而被计算机进行截断，相当于原信号在时域上进行了加窗处理。信号在时域上加窗，在频域上卷积，所得到的频域进行展宽，因此用奈奎斯特频率采样无法完全恢复原信号。

戚辰 19200300023：

问题：1.这次实验的过程中，发现当采样频率刚好是在两倍频率时，对样本的恢复效果并不理想，2.实际工程中，采样频率也不是刚好选取 2 倍频率，一般选取 2.56 倍-4 倍的采样频率

解决：一、可能原因：1.本次实验的波形模拟是使用 matlab 中 spline 函数，这是使用三次样条数插值法来拟合离散点列，波形不理想可能是拟合函数的方法问题 2. 采样定理只保证信号频率不失真，不能保证信号的幅值不失真，一般选用 10 倍以上的采样频率才能有效减少幅值失真的现象

二、实际采样中，信号存在混叠现象，任何滤波器都不是理想的滤波器，抗混叠滤波器也不例外。奈奎斯特频率以上的一些区域还存在混叠的可能性，这个区域对应带宽的 80%以上部分，也就是带宽的 80%-100%区域。高于奈奎斯特频率以上的频率成分会关于奈奎斯特频率镜像到带宽的 80%-100%区域，形成混叠，而带宽 80%以内的区域，是无混叠的。如要整个频带都无混叠，则采样频率至少高于信号频率的 2.5 倍以上。所以一般工业上选用 2.56 倍作为采样频率。

附录：

```
1. clc;
2. clear;
3.
4. f=50;                %定义原始信号频率
5. t=(0:0.0001:0.1);   %定义信号的时间范围
6. x=sin(2*pi*f*t)+cos(pi*f*t);%产生模拟信号
7. Ps = sum(abs(x(:)).^2);%计算信号功率(由于信噪比分子分母的N相同,可以约去,这里不再/N)
8.
9. set(gcf,'unit','normalized','position',[0,0,1,1]); %设置全屏显示查看
10. subplot(3,2,3),plot(t,x);%原模拟信号的波形
11. title('原模拟信号波形 频率 f=50Hz');
12.
13. fs1=50;             %设置第一次欠采样频率为 50Hz
14. dt1=1/fs1;         %采样间隔, 周期=1/频率
15. T1=0:dt1:0.1;      %定义采样的每个时间点
16. x1=sin(2*pi*f*T1)+cos(pi*f*T1); %对信号进行采样
17. subplot(3,2,2);
18. stem(T1,x1, 'r-');%绘制欠采样信号波形
19. hold on;
20. xx1=linspace(0,0.1,1001);
21. yy1=spline(T1,x1,xx1);
22. plot(xx1,yy1,'b--');
23. Pn1=sum(abs(x(:)-yy1(:)).^2);
24. snr_out1=10*log10(Ps/Pn1); %计算信噪比
25. title(['采样频率 fs=50Hz 信噪比 SDR=',num2str(snr_out1),'db']);
26.
27. fs2=100;            %设置第二次采样频率为 150Hz
28. dt2=1/fs2;         %采样间隔, 周期=1/频率
29. T2=0:dt2:0.1;      %定义采样的每个时间点
30. x2=sin(2*pi*f*T2)+cos(pi*f*T2); %对信号进行采样
31. subplot(3,2,4);
32. stem(T2,x2, 'r-');%绘制欠采样信号波形
33. hold on;
34. xx2=linspace(0,0.1,1001);
35. yy2=spline(T2,x2,xx2);
36. plot(xx2,yy2,'b--');
37. Pn2=sum(abs(x(:)-yy2(:)).^2);
38. snr_out2=10*log10(Ps/Pn2);
39. title(['采样频率 fs=100Hz 信噪比 SDR=',num2str(snr_out2),'db']);
40.
41. fs3=250;            %设置第三次过采样频率为 250Hz
42. dt3=1/fs3;         %采样间隔, 周期=1/频率
```

```

43. T3=0:dt3:0.1;           %定义采样的每个时间点
44. x3=sin(2*pi*f*T3)+cos(pi*f*T3); %对信号进行采样
45. subplot(3,2,6);
46. stem(T3,x3, 'r-');%绘制欠采样信号波形
47. hold on;
48. xx3=linspace(0,0.1,1001);
49. yy3=spline(T3,x3,xx3);
50. plot(xx3,yy3, 'b--');
51. Pn3=sum(abs(x(:)-yy3(:)).^2);
52. snr_out3=10*log10(Ps/Pn3);
53. title(['采样频率 fs=250Hz 信噪比 SDR=',num2str(snr_out3),'db']);
54.
55. %信噪比和采样频率的关系图
56. for fs_s = 10:1000
57.     dt_t=1/fs_s;           %采样间隔，周期=1/频率
58.     TT=0:dt_t:0.1;        %定义采样的每个时间点
59.     XX=sin(2*pi*f*TT)+cos(pi*f*TT); %对信号进行采样
60.     xx=linspace(0,0.1,1001);
61.     yy=spline(TT,XX,xx);
62.     Pn_s=sum(abs(x(:)-yy(:)).^2);
63.     snr_out(fs_s)=10*log10(Ps/Pn_s);
64. end
65. T4=1:1:1000;
66. figure(2)
67. plot(T4,snr_out, 'b');
68. title("信噪比和采样频率的关系图");
69. xlabel("采样频率(Hz)");
70. ylabel("信噪比 SNR");

```