Обратими матрици

Опр.// $A \in M_{n\times n}(F)$. A е обратима матрица, ако $\exists\ B \in M_{n\times n}(F)$, така че $\boxed{AB = BA = E}$

Св-ва

1) Ако A е обратима, $\Rightarrow \exists!\ B$ (единствена) за която
$AB = BA = E$

Д-во Ако B_1 и B_2 са такива $\Rightarrow$
$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$$
$B_2 = B_1 = A^{-1}$ обратна на A

2) $(A^{-1})^{-1} = A$ т.е. $A.A^{-1} = A^{-1}A = E \Rightarrow \begin{cases} A^{-1} \text{ е обратна на } A \\ A \text{ е обратна на } A^{-1} \end{cases}$

3) Ако A, B са обратими матрици $\Rightarrow AB$ обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Д-во// $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

Обратим линеен оператор

Опр. Нека $\varphi: V \to V$ лин. оператор

φ е обратим, ако $\exists\, \psi: V \to V$ линеен, такъв че

$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$ $\quad$ $/ \; id: V \to V : id(x) = x)$

Св-ва

1) Ако φ - обратим $\Rightarrow \exists!\, \psi$ със свойството

$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$

$\psi = \varphi^{-1}$ - обратен на φ

$\boxed{\begin{array}{l} \psi_1, \psi_2 \text{ ако изпълняват това} \\ \psi_1 = \psi_1 \circ id = (\psi_1 \circ \varphi) \circ \psi_2 = id \circ \psi_2 = \psi_2 \end{array}}$

2) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, т.е. $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = id$

3) Ако φ, ψ - обратими оператори, тогава

$(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$

$(\varphi \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ (\psi \circ \psi^{-1}) \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = id$

$(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \underbrace{(\varphi^{-1} \circ \varphi)}_{=id} \circ \psi = \psi^{-1} \circ \psi = id$

T/ Нека V е крайномерно линейно простран. и $\varphi: V \to V$ е линеен оператор. Следните твърдения са еквивалентни:

1) φ-обратим оператор
2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$ $(d(\varphi)=0)$
3) $\operatorname{Im}\varphi = V$ $(r(\varphi)=\dim V)$
4) φ изпраща базис на V в базис на V
5) φ е изоморфизъм от V в V

Д-во/ $(1)\Rightarrow(2)$ Нека $\exists\, \varphi^{-1}$

$a \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(a)=\theta$

$a=\varphi^{-1}\varphi(a)=\varphi^{-1}(\theta)=\theta$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi=\{\theta\}$

$(2)\Leftrightarrow(3)$ от Th ранга и дефект

$r(\varphi)+d(\varphi)=\dim V$

$d(\varphi)=0 \Leftrightarrow r(\varphi)=\dim V$

$\operatorname{Ker}\varphi=\{\theta\} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = V$

$(3)\Leftrightarrow(4)$ Нека $e_1,\dots,e_n$ базис

$\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)) = V$

$\Leftrightarrow \varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ ЛНЗ (т.е. базис)

$4)\Rightarrow 5)$ Нека $e_1,\dots,e_n$ базис и $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ - базис

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = V \Rightarrow \varphi$ - сюрекция

Ако $\varphi(a)=\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a-b)=\theta$

$\Rightarrow a-b \in \operatorname{Ker}\varphi=\{\theta\} \Rightarrow a=b$ инекция

$\Rightarrow \varphi$ е изоморфизъм

$5)\Rightarrow 1)$ Нека φ е изоморфизъм $\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1}$ // Дали φ^{-1} е линейно

$x,y \in V \Rightarrow \exists\, a,b:\ x=\varphi(a),\ y=\varphi(b)$

$\varphi^{-1}(x+y)=\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varphi(b))=\varphi^{-1}(\varphi(a+b))$
$=a+b=\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y)$

$\varphi^{-1}(\lambda x)=\varphi^{-1}(\lambda\varphi(a))=\varphi^{-1}(\varphi(\lambda a))=\lambda a=\lambda\varphi^{-1}(x)$

празна стр.

Теорема // Нека $A \in M_{n\times n}(F)$.
A е обратима $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$ и тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} - адюнгирано количество

Д-во

($\Rightarrow$) A-обратима $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E = 1$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \text{ и } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

($\Leftarrow$) Нека $\det A \neq 0$ и $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k A_{k1}a_{k1} & \sum_k A_{k1}a_{k2} & \cdots & \sum_k A_{k1}a_{kn} \\ - & - & - & - \\ \sum_k A_{kn}a_{k1} & \sum_k A_{kn}a_{k2} & \cdots & \sum_k A_{kn}a_{kn} \end{pmatrix}$$

развитие на $\det A$ по стълб
и фалшиво развитие

$$\Rightarrow BA = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A) \cdot E \Rightarrow \left(\frac{1}{\det A} B\right) A = E$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}A_{1i} & \sum a_{1i}A_{2i} & \cdots & \sum a_{1i}A_{ni} \\ - & - & - & - \\ \sum a_{ni}A_{1i} & \sum a_{ni}A_{2i} & \cdots & \sum a_{ni}A_{ni} \end{pmatrix}$$

развитие на $\det A$ по ред и фалшиво развитие

$$AB = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A) E \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{\det A} B\right) = E \Rightarrow A \text{ обратима}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = ad - bc \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ?$$

$\det A = 5$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-5)$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-4)$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

празна стр.