Ядро и образ на линейно изображение

<u>Опр</u>/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение

$\Rightarrow Im\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V_1\} \subset V_2$ — образ на φ

$Ker\varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = \theta\} \subset V_1$ — ядро на φ

$(Im\varphi = \varphi(V_1))$

<u>Тв</u>/ $Ker\varphi$ е подпр-во на V_1 и $Im\varphi$ е подпр-во на V_2

<u>Д-во</u> Ако $a_1, a_2 \in Ker\varphi$, т.е. $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \theta$

$\Rightarrow$ | $\varphi(a_1+a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow a_1 + a_2 \in Ker\varphi$

| $\varphi(\lambda a_1) = \lambda\varphi(a_1) = \lambda\theta = \theta \Rightarrow \lambda a_1 \in Ker\varphi$

$\Rightarrow Ker\varphi$ подпр-во на V_1

Ако $b_1, b_2 \in Im\varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in V_1 : \varphi(x_1) = b_1, \varphi(x_2) = b_2$

$\Rightarrow b_1 + b_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \Rightarrow b_1 + b_2 \in Im\varphi$

$\lambda b_1 = \lambda\varphi(x_1) = \varphi(\lambda x_1) \Rightarrow \lambda b_1 \in Im\varphi$

$\Rightarrow Im\varphi$ - подпр-во

Опр.// Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение

$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = d(\varphi)$ – дефект на изображението

$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = r(\varphi)$ – ранг на изображението

Т// Нека V_1 и V_2 са лин. пространства над поле F и $\dim V_1 < \infty$. Ако $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение $\Rightarrow d(\varphi) + r(\varphi) = \dim V_1$

Д-во// $\operatorname{Ker}\varphi$ подпр-во на V_1

$e_1 \dots e_d$ – базис на $\operatorname{Ker}\varphi$; $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = d = d(\varphi)$

допълваме до базис на V_1

$e_1, \dots, e_d, a_1, \dots, a_s$ – базис на V_1, $\boxed{\dim V_1 = d+s}$

$$\begin{array}{ccccc} \varphi: & e_1,\dots,e_d, & a_1, & \dots, & a_s \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \theta & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Нека $b_1 = \varphi(a_1), \dots, b_s = \varphi(a_s)$

ще док., че $b_1, \dots, b_s$ е базис на $\operatorname{Im}\varphi$

3

Нека $y \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow y = \varphi(x)$, $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s$

$$y = \varphi(x) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_d \varphi(e_d) + \mu_1 \varphi(a_1) + \dots + \mu_s \varphi(a_s)$$

$$y = \lambda_1 \theta + \dots + \lambda_d \theta + \mu_1 b_1 + \dots + \mu_s b_s \in l(b_1, \dots, b_s)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subset l(b_1, \dots, b_s)$$

Но $b_1 = \varphi(a_1), \dots, b_s = \varphi(a_s) \Rightarrow l(b_1, \dots, b_s) \subset \operatorname{Im}\varphi$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = l(b_1, \dots, b_s)$

Нека $\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s = \theta \Rightarrow \gamma_1 \varphi(a_1) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s) = \theta$

$\Rightarrow \varphi(\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s) = \theta \Rightarrow \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow \exists\, \beta_1, \dots, \beta_d : \beta_1 e_1 + \dots + \beta_d e_d = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s$

$\Rightarrow \beta_1 e_1 + \dots + \beta_d e_d - \gamma_1 a_1 - \dots - \gamma_s a_s = \theta$

Но $e_1, \dots, e_d, a_1, \dots, a_s$ са ЛНЗ $\Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$

$\beta_1 = \dots = \beta_d = 0$

$\Rightarrow$ от $\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s = \theta \Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_s = \theta$

$\Rightarrow b_1, \dots, b_s$ са ЛНЗ

$\Rightarrow b_1, \dots, b_s$ е базис на $\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = s = r(\varphi)$

$\Rightarrow \dim V_1 = d + s = d(\varphi) + r(\varphi)$

празна стр.

Пример

Нека $l_1: F^n \to F, \dots, l_k: F^n \to F$ линейни $l_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$

$l: F^n \to F^k \quad l(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} l_1(x) \\ \vdots \\ l_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$

$l(x)$ е линейно изобрат.

$\Rightarrow \ker\varphi$ е решение на $\ker\varphi: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Im}\varphi$ е $\left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \middle| \text{ системата със стълб } (b_1, \dots b_k) \text{ има решение} \right\}$

$\Rightarrow$ Ако $c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}; \dots; c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ системата има решение $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow b \in l(c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = l(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow r(\varphi) = r(c_1, \dots, c_n)$

$\dim\ker\varphi = d(\varphi) = n - r(A) = n - r(c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow d(\varphi) + r(\varphi) = n$

Матрица на линейно изображение

Нека $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение и $\dim V_1 = n$ и $e_1, \dots, e_n$ базис на V_1

$\dim V_2 = k$ и $g_1, \dots, g_k$ - базис на V_2

$$\varphi(e_1) = a_{11} g_1 + a_{21} g_2 + \dots + a_{k1} g_k$$

$$\vdots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n} g_1 + a_{2n} g_2 + \dots + a_{kn} g_k$$

$$A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \varphi(e_1) \qquad \uparrow \varphi(e_n) \end{array}$$

матрица на изображението φ спрямо базисите $e_1 \dots e_n$ и $g_1 \dots g_k$

Св-во V_1 с базис $e_1, \dots e_n$ и V_2 с базис $g_1 \dots g_k$ (2)
над полето F. Две линейни изображения
$\varphi: V_1 \to V_2$ съвпадат $\Leftrightarrow$ матрицата на φ
$\psi: V_1 \to V_2$ съвпада с матрицата на ψ

Д-во

$$A_\varphi = A_\psi \Leftrightarrow \varphi(e_1)=\psi(e_1), \dots, \varphi(e_n)=\psi(e_n)$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x)=\psi(x) \text{ за } \forall x \in V_1$$
$$\Leftrightarrow \varphi = \psi$$

Св-во Ако $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V_1$
$\Rightarrow \varphi(x) = y_1 g_1 + \dots + y_k g_k$ където $y_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = \\ &= x_1(a_{11}g_1 + \dots + a_{k1}g_k) + \\ &+ x_2(a_{12}g_1 + \dots + a_{k2}g_k) + \\ &\dots \\ &+ x_n(a_{1n}g_1 + \dots + a_{kn}g_k) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)g_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)g_2 + \\ &+ \dots \\ &+ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n)g_k\end{aligned}$$

I/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение
$e_1 \dots e_n$ - базис на V_1, $g_1 \dots g_k$ - базис на V_2
$A = A_\varphi$ - матрица на φ спрямо тези базиси
а) $Im\,\varphi$ се описва с $\ell(c_1, \dots, c_n)$; c_i - стълбовете на A
б) $r(\varphi) = r(A_\varphi)$
в) $Ker\,\varphi$ се описва с решението на $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 \dots a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$

Д-во

$c_1, \dots, c_n$ са координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо $g_1 \dots g_n$
$\Rightarrow \ell(c_1, \dots, c_n)$ задава мн-вото от координатите на $Im\,\varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$
$\Rightarrow r(c_1, \dots, c_n) = r(A) = \dim(Im\,\varphi) = r(\varphi)$

в) $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in Ker\,\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = \mathcal{O} = y_1g_1 + \dots + y_kg_k$
$\Leftrightarrow$ (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$ $(x_1, \dots, x_n)$ е решение на хомогенна система с матрица A