Матрица на линейно изображение

Нека $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение и $\dim V_1 = n$ и $e_1, .., e_n$ базис на V_1

$\dim V_2 = k$ и $g_1, .., g_k$ - базис на V_2

$$\varphi(e_1) = a_{11} g_1 + a_{21} g_2 + .. + a_{k1} g_k$$

$$\vdots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n} g_1 + a_{2n} g_2 + .. + a_{kn} g_k$$

$$A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n} \\ \begin{array}{cc} \uparrow \varphi(e_1) & \quad \uparrow \varphi(e_n) \end{array} \end{array}$$

матрица на изображението φ спрямо базисите $e_1 \dots e_n$ и $g_1 \dots g_k$

Матрица на линеен оператор

Нека V е лин. пр-во над полето F и $e_1, \dots, e_n$ - базис на V и $\varphi: V \to V$ е линеен оператор

$\boxed{\text{когато } V = V_1 = V_2 \text{ се взема един базис}}$

$$\Rightarrow \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + \dots + a_{n1}e_n$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + \dots + a_{n2}e_n$$
$$\dots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n$$

матрица на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$)

$$A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_n) \end{array} \end{array}$$

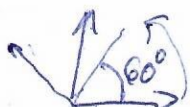
$\boxed{A_\varphi \in M_{n \times n}(F)}$

Пр. 1) $d: \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$

базис $1, x, x^2, x^3, x^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)



$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\varphi(X) = AX$

$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ базис

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Св-во V_1 с базис $e_1, \dots e_n$ и V_2 с базис $g_1 \dots g_k$ над полето F. Две линейни изображения

$\varphi: V_1 \to V_2$ съвпадат $\iff$ матрицата на φ съвпада с матрицата на ψ

$\psi: V_1 \to V_2$

Д-во

$$A_\varphi = A_\psi \iff \varphi(e_1)=\psi(e_1), \dots, \varphi(e_n)=\psi(e_n)$$

$$\iff \varphi(x)=\psi(x) \text{ за } \forall x \in V_1$$

$$\iff \varphi = \psi$$

Св-во/ Ако $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V_1$

$\Rightarrow \varphi(x) = y_1 g_1 + \dots + y_k g_k$ където $y_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = \\ &= x_1(a_{11}g_1 + \dots + a_{k1}g_k) + \\ &+ x_2(a_{12}g_1 + \dots + a_{k2}g_k) + \\ &\dots \\ &+ x_n(a_{1n}g_1 + \dots + a_{kn}g_k) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)g_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)g_2 + \\ &+ \dots \\ &+ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n)g_k\end{aligned}$$

I/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение
$e_1 \dots e_n$ - базис на V_1, $g_1 \dots g_k$ - базис на V_2
$A = A_\varphi$ - матрица на φ спрямо тези базиси
а) $\operatorname{Im}\varphi$ се описва с $\ell(c_1, \dots, c_n)$; c_i - стълбовете на A
б) $r(\varphi) = r(A_\varphi)$
в) $\operatorname{Ker}\varphi$ се описва с решението на $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 \dots a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$

Д-во
$c_1, \dots, c_n$ са координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо $g_1 \dots g_n$
$\Rightarrow \ell(c_1, \dots, c_n)$ задава мн-вото от координатите на
$\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$
$\Rightarrow r(c_1, \dots, c_n) = r(A) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = r(\varphi)$

в) $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = \mathcal{O} = y_1g_1 + \dots + y_kg_k$
$\Leftrightarrow$ (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$ $(x_1, \dots, x_n)$ е решение на хомогенна система с матрица A

Зад В тримерното пр-во $\mathbb{R}^3$ с базис e_1, e_2, e_3 е зададен линеен оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрица спрямо базиса

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

а) образът на $a = (2, 4, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(a) = (-9, 27, 9)$$

б) $\operatorname{Im} \varphi = ?$ $\quad \varphi(e_1) = (1, 3, 5)$, $\varphi(e_2) = (-2, 5, 1)$, $\varphi(e_3) = (-3, 1, -5)$

$\operatorname{Im} \varphi = \ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 = r(\varphi) \Rightarrow$$

$\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$ базис на $\operatorname{Im} \varphi$

в) $\operatorname{Ker} \varphi = ?$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 2x_2 + 3x_3$

	x_1	x_2	x_3
$u=$	12	-10	11

$\Rightarrow u = (12, -10, 11)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \ell(u)$; $d(\varphi) = 1$

празна стр.