

TP555 - Inteligência Artificial e Machine Learning: *Árvores de Decisão*



Inatel

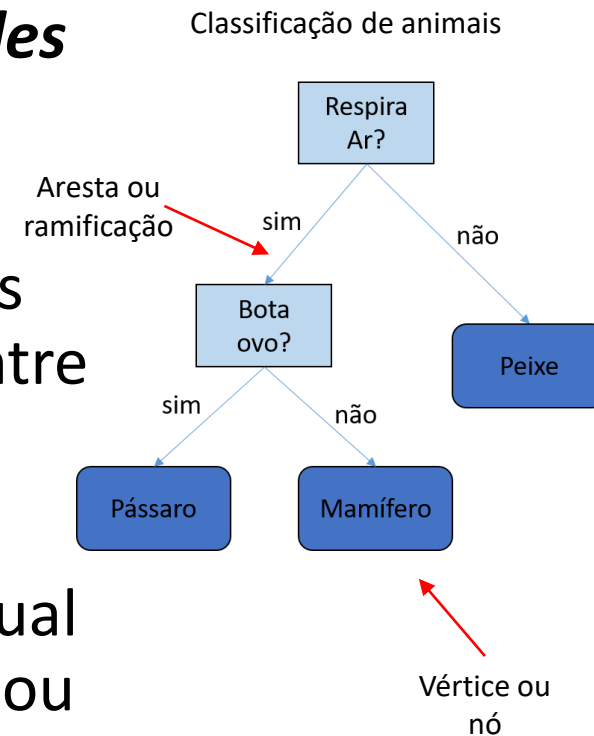
Felipe Augusto Pereira de Figueiredo
felipe.figueiredo@inatel.br

Árvores de decisão

- Assim como o k-NN, uma **árvore de decisão** (do inglês, **decision trees**), é um algoritmo de **aprendizado supervisionado não-paramétrico e não-linear** que pode ser utilizado tanto para **classificação** quanto para **regressão**.
- **Não-paramétrico**: o modelo não tem um número fixo de parâmetros, como por exemplo, modelos de regressão linear e logística.
 - O modelo é construído apenas com base nos dados observados e o número de parâmetros tende a crescer com ele (e.g., tamanho da árvore).
 - Ou seja, os **parâmetros são criados durante o treinamento para explicar os dados**.
- Outra forma de definir **não-paramétrico** é perceber que o modelo não assume nenhuma distribuição dos dados e, portanto, não fixa o número de parâmetros.
- **Não-linear**: as funções hipótese e discriminante são **funções não-lineares**, i.e., os dados não são aproximados ou separados por um **hiperplano**.

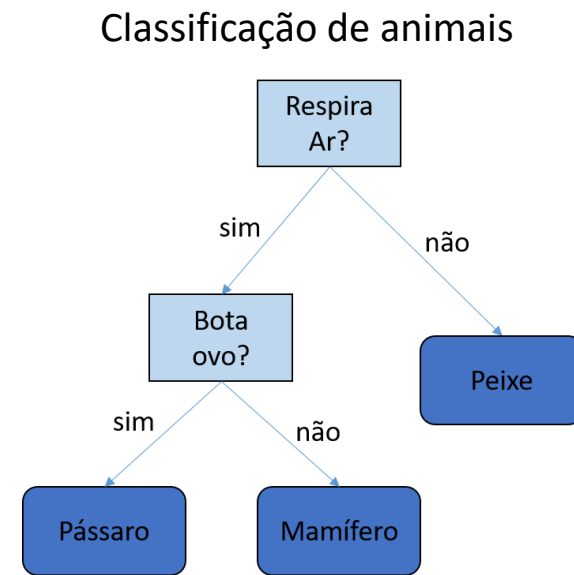
Árvores de decisão

- O objetivo é criar um modelo que prediz o valor de uma variável de saída (i.e., uma classe ou valor), aprendendo **regras simples de decisão** inferidas a partir dos atributos do conjunto de treinamento.
- As **árvores de decisão** são os componentes fundamentais das **florestas aleatórias** (do inglês, **random forests**) que estão entre os **mais poderosos algoritmos de aprendizado de máquina** disponíveis atualmente.
- Formalmente, uma árvore é um **grafo não-direcionado** no qual dois **vértices** quaisquer se conectam por um único caminho (ou seja, um **grafo acíclico não-direcionado**) [Wikipedia, 2019].
 - Por exemplo, o vértice “Pássaro” só se conecta com o vértice “Mamífero” através do vértice “Bota ovo?”



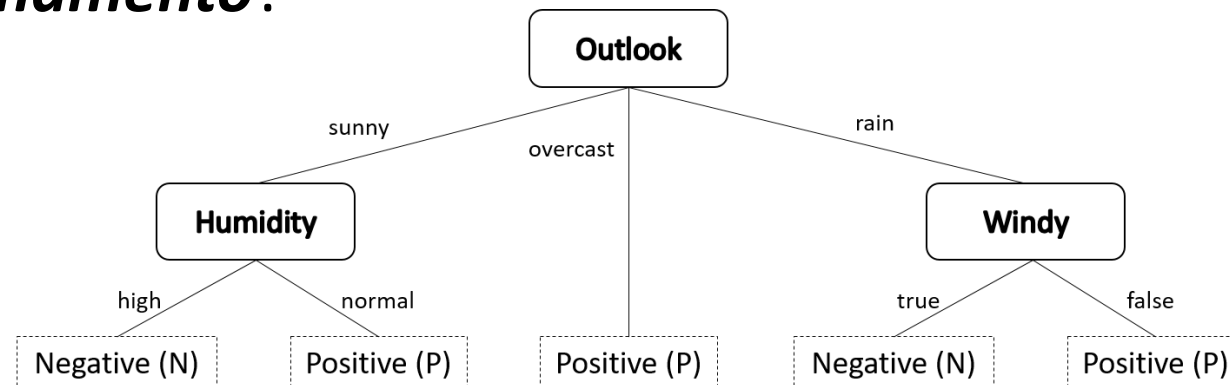
Árvores de decisão

- A árvore possui um **nó raiz**, do qual **parte o processo de decisão**.
- Nesse processo, **valores distintos de atributos geram arestas** (i.e., ramificações) e, quando se chega a um **nó folha**, ocorre uma atribuição de uma classe ou valor.
- **Árvores de decisão** são modelos de **caixa branca**, ou seja, é possível entender e explicar facilmente como o modelo realiza a classificação ou regressão baseando-se nos atributos.
- Elas são o oposto dos modelos de **caixa preta**, onde os resultados são difíceis de interpretar e não é fácil entender como os diferentes atributos interagem entre si para gerar a saída (e.g., redes neurais artificiais).



Árvores de decisão

- A figura abaixo mostra uma árvore de decisão criada a partir de informações se jogadores jogarão tênis ou não dependendo dos atributos **Clima**, **Humidade** e **Vento**.
- Cada **nó da árvore atua como um caso de teste** para algum atributo, e cada extremidade, ou seja, uma terminação ou folha, corresponde a uma classe.
- Na figura, cada atributo leva a uma ramificação até que se atinge um nó folha, onde decide-se sobre jogar ou não.
- O uso da árvore para classificar padrões é relativamente direto, mas é preciso responder uma questão crucial: **como induzir uma árvore de decisão a partir dos dados de treinamento?**



O processo de indução de uma árvore de decisão

- Uma primeira abordagem para induzir uma árvore poderia ser **construir, de maneira exaustiva**, todas as árvores **capazes de resolver o problema** da classificação ou regressão **e selecionar a mais simples** (menos complexa) utilizando a regra da **Navalha de Occam**.
- Entretanto, essa abordagem, pode ser computacionalmente muito custosa.
- Encontrar uma árvore de decisão ótima é um problema NP-completo.
 - Non-Deterministic Polynomial time, ou seja, é um problema de “Tempo polinomial não-determinístico”.
- Vários métodos utilizam **abordagens heurísticas** para induzir árvores de decisão.
- Dentre os mais conhecidos podemos citar: **ID3**, C4.5, C5.0 e CART.

O processo de indução de uma árvore de decisão

- Um dos métodos heurísticos de indução de árvores de decisão mais utilizados é o **método ID3** (do inglês, **Iterative Dichotomiser 3**).
 - **Dicotomização iterativa** significa dividir-se repetidamente os atributos em duas ou mais classes a cada iteração (ou passo).
- O **método ID3** é uma abordagem que **não garante** a obtenção da **menor árvore possível**, mas busca obter **árvores apropriadas num intervalo de tempo relativamente curto**.
- Ele usa uma **estratégia gananciosa top-down**, ou seja, a árvore é criada de cima para baixo e um nó é escolhido selecionando-se o **atributo que melhor divide** o conjunto de dados naquele momento.
 - Mas como se decide qual é o melhor atributo? Qual é a métrica usada?
- A metodologia do **método ID3** se baseia na **teoria da informação** para selecionar o melhor atributo de cada nó da árvore.

O processo de indução de uma árvore de decisão

- A ideia do **método ID3** é escolher como **nó** o **atributo** que for o mais longe possível em dividir os exemplos exatamente.
- Um **atributo perfeito** (ou seja, excelente) divide perfeitamente todos os exemplos em grupos.
 - Ou seja, é o atributo que consegue explicar perfeitamente o conjunto de dados.
- Tudo o que precisamos, então, é uma medida formal de atributo **razoavelmente bom** ou **realmente inútil**.
- O **método ID3** utiliza a noção de **ganho de informação**, o qual é definido em termos da **entropia**, que é uma quantidade fundamental em **teoria da informação**.
- A seguir, veremos alguns conceitos úteis para que possamos usar o **método ID3** para inferir árvores de decisão.

Ganho de informação e entropia

- ***Ganho de informação***: é uma ***propriedade estatística*** que mede o quão bem um determinado ***atributo*** separa os exemplos de treinamento de acordo com suas classes.
 - Portanto, construir uma ***árvore de decisão*** tem tudo a ver com encontrar, a cada momento, um ***atributo*** que retorne o maior ***ganho de informação***.
- ***Entropia***: é uma medida da quantidade de ***incerteza*** ou ***aleatoriedade*** de uma variável aleatória (i.e., um conjunto de dados).
 - Portanto, um ***ganho de informação*** corresponde a uma redução na ***entropia***.
 - O quanto conseguimos explicar do conjunto com aquele atributo.
- ***Exemplo***: Uma variável com apenas um único valor (e.g., o arremesso de uma moeda com ***cara*** em ambos os lados) não tem nenhuma ***incerteza*** associada e, portanto, sua ***entropia*** é igual a ***zero***. Isso significa que ***não se ganha nenhuma informação nova ao se observar o valor***.

Ganho de informação e entropia

- Por outro lado, o resultado de se arremessar uma **moeda honesta** é igualmente provável de resultar em **cara** ou **coroa**, associados aos valores 0 ou 1, respectivamente. Neste caso, esta variável tem **1 bit de entropia**, significando que se necessita de 1 bit para representar os 2 possíveis resultados.
- Dessa forma, a variável aleatória que representa o resultado de se rolar um **dado honesto** de 4 lados, tem 2 bits de entropia, pois necessita-se de 2 bits para se representar os 4 possíveis valores.
- Agora imagine um **moeda desonesta** que tenha uma probabilidade de resultar em **cara** em 99% dos arremessos. Nesse caso, a **entropia** deve ser um valor positivo muito próximo de zero, pois a incerteza do resultado é muito baixa.
- Assim, a **entropia** de uma variável aleatória V com valores v_i , onde cada um dos valores tem probabilidade $P(v_i)$, é definida como

$$H(V) = - \sum_i P(v_i) \log_2(P(v_i)).$$

Aprendizado de uma árvore de decisão

- Retornando ao problema da indução de **árvores de decisão** nós temos que se um conjunto de treinamento, E , contém p exemplos pertencentes à classe positiva (P) e n exemplos pertencentes à classe negativa (N), então a **entropia do objetivo** (i.e., o rótulo) para todo o conjunto de treinamento é dada por

$$H(Goal) = B\left(\frac{p}{p+n}\right) = -\left[\frac{p}{p+n}\log_2\left(\frac{p}{p+n}\right) + \left(1 - \frac{p}{p+n}\right)\log_2\left(1 - \frac{p}{p+n}\right)\right],$$

onde $B(q)$ é a **entropia de uma variável booleana que é verdadeira com probabilidade q** , ou seja

$$B(q) = -(q\log_2(q) + (1 - q)\log_2(1 - q)).$$

- Portanto, qualquer **árvore de decisão correta para o conjunto de treinamento, E , classificará exemplos na mesma proporção de ocorrência das classes** no conjunto de dados.
- Assim, a probabilidade de um exemplo ser da classe P é $p/(p + n)$ e a de um exemplo ser da classe N é $n/(p + n)$ ou $1 - (p/(p + n))$.

Aprendizado de uma árvore de decisão

- Um teste em um único atributo, x_k , pode nos dar apenas parte da **entropia do objetivo**, $H(Goal)$.
- Nós podemos medir exatamente o **quanto cada atributo contribui para a entropia do objetivo** através do cálculo da **entropia restante após** o teste do atributo.
- Um **atributo** x_k **com d valores distintos divide o conjunto de treinamento E em d subconjuntos**: E_1, \dots, E_d . Cada subconjunto E_i possui p_i exemplos da classe positiva, P , e n_i exemplos da classe negativa, N .
- Um exemplo escolhido aleatoriamente do conjunto de treinamento tem o i -ésimo valor para o atributo x_k com probabilidade $(p_i + n_i)/(p + n)$. Assim, a **entropia** restante esperada após o teste do atributo x_k é dada por

$$Remainder(x_k) = \sum_{i=1}^d \frac{p_i + n_i}{p + n} B\left(\frac{p_i}{p_i + n_i}\right).$$

- O **ganho de informação** com o atributo x_k é a redução na **entropia do objetivo**, que é dado por

$$Gain(x_k) = B\left(\frac{p}{p + n}\right) - Remainder(x_k) \geq 0.$$

Método ID3

- A ideia por trás do **método ID3** é maximizar o **ganho de informação** e, então, usar o procedimento **recursivamente** para cada um dos subconjuntos E_1, \dots, E_d .
- Ou seja, escolhe-se o atributo que gera a primeira ramificação e, então, se repete o processo para construir o restante da árvore.
- O **método ID3** pode ser resumido através da seguinte sequência de passos:
 - a) Cálculo da **entropia do objetivo** para o conjunto de treinamento **corrente**.
 - **OBS.:** o conjunto é alterado a cada nova iteração do método de acordo com o(s) atributo(s) sendo testado(s) .
 - b) Cálculo do **ganho de informação** de cada atributo $x_k, k = 1, \dots, K$ do conjunto de treinamento E .
 - c) **Particionamento do conjunto E em subconjuntos E_1, \dots, E_d** usando o atributo x_k para o qual o **ganho de informação** resultante após a divisão é maximizado.
 - d) Criação de um nó da árvore de decisão contendo o atributo que maximizou o **ganho de informação**.
 - e) Repetir os itens a) até d) em **subconjuntos de treinamento** usando os atributos restantes. Esse **processo continua até que a árvore classifique perfeitamente todos os exemplos de treinamento** ou **até que todos os atributos tenham sido utilizados**.
- O **ID3** segue a regra: um ramo com uma **entropia** igual a zero é uma **folha** e um ramo com **entropia** maior do que zero precisa de partição adicional.
- O **método ID3** será exemplificado através do exemplo apresentado a seguir.

Características do método ID3

- Por usar uma abordagem gananciosa (do inglês, *greedy*), o ID3 não garante uma solução ideal, podendo ficar preso em mínimos locais.
- Pode sobreajustar aos dados de treinamento
 - Para evitar o sobreajuste, árvores de decisão menores devem ser preferidas ao invés das maiores.
- Esse método geralmente produz árvores pequenas, mas nem sempre produz a menor árvore possível.
- É mais difícil de usar com dados contínuos. Se os valores de um atributo forem contínuos, haverá muito mais lugares para dividir os dados nesse atributo, e a busca pelo melhor valor a ser dividido pode se tornar demorada.

Observações

- Além do ***ganho de informação***, existem outras métricas que podem ser usadas para definir as partições.
- Uma possibilidade é usar métricas de distância ou divergência, como o ***índice de Gini***.
- Caso haja exemplos ruidosos, ou seja, exemplos que não são totalmente “consistentes”, passa a ser necessária uma análise estatística mais ampla, incluindo, por exemplo, ***testes de hipóteses***.
- Outro ponto importante é, se for o caso, deve-se buscar metodologias para se lidar com atributos faltantes. Existem várias soluções, como por exemplo:
 - Remover o exemplo.
 - Atribuir ao atributo a média de seus valores.

Observações

- O conjunto de treinamento é a base para definirmos a **árvore de decisão**.
 - Um conjunto que contenha inconsistências, como, por exemplo, **dois exemplos com os mesmos atributos, porém classes diferentes**, precisará ser reconsiderado, pois os atributos podem não ser suficientes, por exemplo, **precisando de mais atributos**.
- Um problema muito comum das **árvores de decisão**, especialmente quando se tem um número muito grande de atributos, é o **sobreajuste**.
- Existem duas formas para se minimizar este problema:
 - Podar as árvores de decisão (**tree pruning**).
 - Ou utilizar **florestas aleatórias**.

Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- Neste exemplo, vamos construir uma árvore de decisão para prever se jogadores irão ou não praticar um determinado esporte baseado em algumas condições meteorológicas.
- Vamos considerar um conjunto de dados da forma (x_i, d_i) , onde x_i é um vetor de atributos e d_i é um rótulo. Nesse conjunto de dados, cada entrada diz respeito à condição meteorológica de um dia.
- Os atributos são todos categóricos:
 - **Tempo**: {ensolarado, nublado, chuvoso}
 - **Temperatura**: {frio, agradável, quente}
 - **Umidade**: {alta, normal}
 - **Vento**: {presente, ausente}
- Os rótulos são apenas 2: **positivo** (P), ou seja, jogar, e **negativo** (N), ou seja, não jogar, denotando um problema binário.
- Um exemplo de condição meteorológica de um determinado dia poderia ser descrito por: {nublado, frio, normal, ausente}.

Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- O conjunto de treinamento do exemplo é dado pela tabela abaixo.

Day	Attributes				Class (y)
	Outlook	Temperature	Humidity	Windy	
1	sunny	hot	high	false	N
2	sunny	hot	high	true	N
3	overcast	hot	high	false	P
4	rain	mild	high	false	P
5	rain	cool	normal	false	P
6	rain	cool	normal	true	N
7	overcast	cool	normal	true	P
8	sunny	mild	high	false	N
9	sunny	cool	normal	false	P
10	rain	mild	normal	false	P
11	sunny	mild	normal	true	P
12	overcast	mild	high	true	P
13	overcast	hot	normal	false	P
14	rain	mild	high	true	N

Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- A **entropia do objetivo**, i.e., y , para todo o conjunto de treinamento é

$$H(y) = - \left[\frac{9}{14} \log_2 \left(\frac{9}{14} \right) + \left(1 - \frac{9}{14} \right) \log_2 \left(1 - \frac{9}{14} \right) \right] = 0.9403.$$

- Encontrando o nó raiz: o **ganho de informação** de cada atributo é calculado como

		Jogar?		
		P	N	
Outlook	sunny	2	3	5
	overcast	4	0	4
	rain	3	2	5
				14

		Jogar?		
		P	N	
Temperature	hot	2	2	4
	mild	4	2	6
	cool	3	1	4
				14

		Jogar?		
		P	N	
Humidity	high	3	4	7
	normal	6	1	7
				14

		Jogar?		
		P	N	
Windy	true	3	3	6
	false	6	2	8
				14

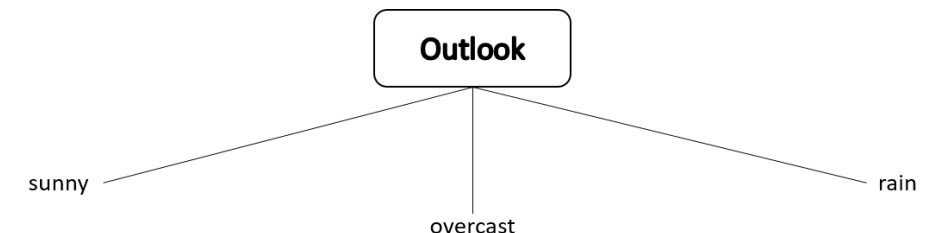
$$Gain(\text{outlook}) = 0.9403 - \left[\frac{5}{14} H\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{4}{14} H(1) + \frac{5}{14} H\left(\frac{3}{5}\right) \right] = 0.247$$

$$Gain(\text{temperature}) = 0.9403 - \left[\frac{4}{14} H\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{6}{14} H\left(\frac{4}{6}\right) + \frac{4}{14} H\left(\frac{3}{4}\right) \right] = 0.029$$

$$Gain(\text{humidity}) = 0.9403 - \left[\frac{7}{14} H\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{7}{14} H\left(\frac{6}{7}\right) \right] = 0.1518$$

$$Gain(\text{windy}) = 0.9403 - \left[\frac{6}{14} H\left(\frac{3}{6}\right) + \frac{8}{14} H\left(\frac{6}{8}\right) \right] = 0.04813$$

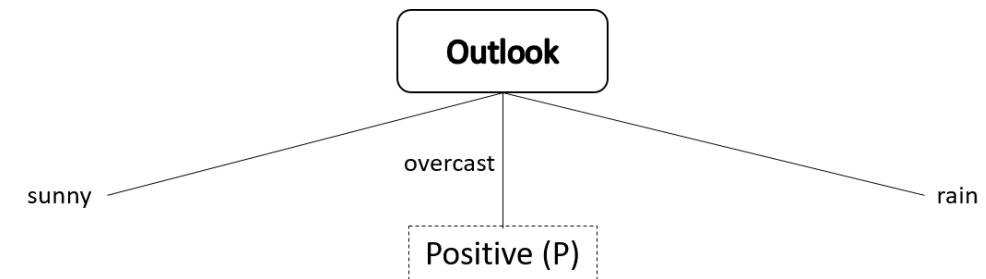
O **ganho de informação** é maximizado com o atributo **outlook**, que é, portanto, escolhido como o nó raiz da árvore.



Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- Agora, precisamos testar o conjunto de treinamento para **subconjuntos** específicos do atributo **Outlook**, ou seja, para cada um de seus possíveis valores (i.e., overcast, sunny e rain).
- Quando **Outlook = overcast**, vemos na tabela abaixo que os valores dos outros atributos não importam, sendo a classe escolhida sempre a Positiva (*P*), ou seja, a decisão será sempre pela classe Positiva se o tempo estiver nublado.
- A **entropia** nesse caso é igual a zero (pois não há incerteza), indicando uma **folha** da árvore.
- Portanto, encontramos a folha deste ramo.

Day	Attributes				Class (y)
	Outlook	Temperature	Humidity	Windy	
3	overcast	hot	high	false	P
7	overcast	cool	normal	true	P
12	overcast	mild	high	true	P
13	overcast	hot	normal	false	P



Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- Quando **Outlook = rain**

Outlook=rain		Jogar?		
		P	N	
Temperature	hot	0	0	0
	mild	2	1	3
	cool	1	1	2
				5

Outlook=rain		Jogar?		
		P	N	
Humidity	high	1	1	2
	normal	2	1	3
				5

Outlook=rain		Jogar?		
		P	N	
Windy	true	0	2	2
	false	3	0	3
				5

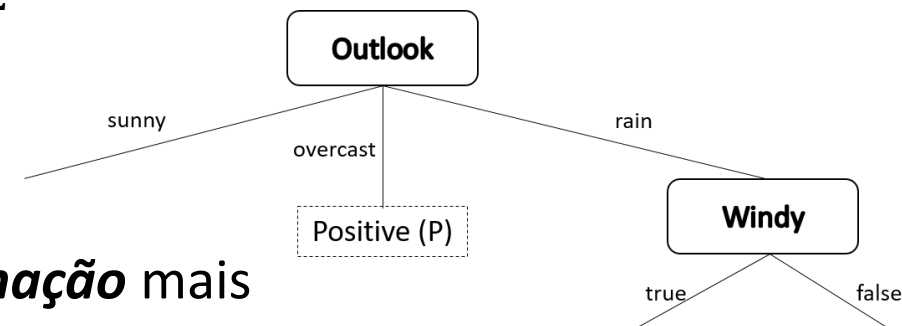
Entropia para o subconjunto dado por **Outlook = rain**: $H(y \mid \text{Outlook} = \text{rain}) = 0.971$

$$\text{Gain}(\text{temperature}) = 0.971 - \left[\frac{0}{5} H\left(\frac{0}{0}\right) + \frac{3}{5} H\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{5} H\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 0.02$$

$$\text{Gain}(\text{humidity}) = 0.971 - \left[\frac{2}{5} H\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} H\left(\frac{2}{3}\right) \right] = 0.02$$

$$\text{Gain}(\text{windy}) = 0.971 - \left[\frac{2}{5} H\left(\frac{0}{2}\right) + \frac{3}{5} H\left(\frac{3}{3}\right) \right] = \boxed{0.971}$$

- Aqui, o atributo **windy** resulta no valor de **ganho de informação** mais alto quando o tempo estiver chuvoso (i.e., **Outlook = rain**).
- Por isso, o atributo **windy** será o nó do 2º nível da árvore, no ramo **rain** de **Outlook**.



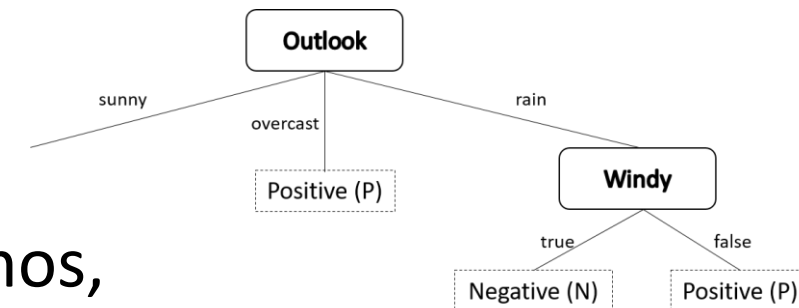
Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- Se analisarmos a tabela com **Outlook = rain** e **windy = false** percebemos que a decisão será sempre pela classe Positiva (P). A entropia $H(y | \text{Outlook} = \text{rain}, \text{windy} = \text{false}) = 0$.

Day	Attributes				Class (y)
	Outlook	Temperature	Humidity	Windy	
4	rain	mild	high	false	P
5	rain	cool	normal	false	P
10	rain	mild	normal	false	P

- Além disso, a decisão sempre será pela classe Negativa (N) se **Outlook = rain** e **windy = true**. A entropia $H(y | \text{Outlook} = \text{rain}, \text{windy} = \text{true}) = 0$.

Day	Attributes				Class (y)
	Outlook	Temperature	Humidity	Windy	
6	rain	cool	normal	true	N
14	rain	mild	high	true	N



- Portanto, encontramos as folhas para os dois ramos, **true** e **false** do nó **windy**.

Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- Quando **Outlook = sunny**

Outlook=sunny		Jogar?		
		P	N	
Temperature	hot	0	2	2
	mild	1	1	2
	cool	1	0	1
				5

Outlook=sunny		Jogar?		
		P	N	
Humidity	high	0	3	3
	normal	2	0	2
				5

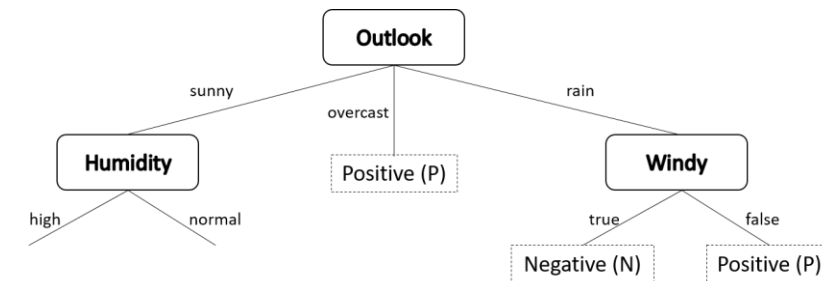
Outlook=sunny		Jogar?		
		P	N	
Windy	true	1	1	2
	false	1	2	3
				5

Entropia para o subconjunto dado por **Outlook=sunny**: $H(y \mid \text{Outlook} = \text{sunny}) = 0.971$

$$\text{Gain}(\text{temperature}) = 0.971 - \left[\frac{2}{5} H\left(\frac{0}{2}\right) + \frac{2}{5} H\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} H\left(\frac{1}{1}\right) \right] = 0.570$$

$$\text{Gain}(\text{humidity}) = 0.971 - \left[\frac{3}{5} H\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{2}{5} H\left(\frac{2}{2}\right) \right] = \boxed{0.971}$$

$$\text{Gain}(\text{windy}) = 0.971 - \left[\frac{2}{5} H\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} H\left(\frac{1}{3}\right) \right] = 0.02$$



- Aqui, o atributo **humidity** resulta no **ganho de informação** mais alto quando o tempo estiver ensolarado (i.e., **Outlook = sunny**).
- Por isso, o atributo **humidity** será o nó do 2º nível da árvore no ramo **sunny**.

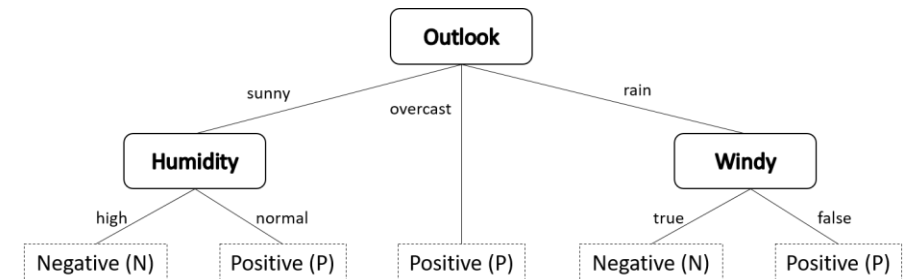
Exemplo de Árvore de Decisão com método ID3

- Após analisarmos a tabela com **Outlook = sunny** e **humidity = normal** percebemos que a decisão será sempre pela classe Positiva (P). A entropia $H(y | \text{Outlook} = \text{sunny}, \text{humidity} = \text{normal}) = 0$.

Day	Attributes				Class (y)
	Outlook	Temperature	Humidity	Windy	
9	sunny	cool	normal	false	P
11	sunny	mild	normal	true	P

- Além disso, a decisão sempre será pela classe Negativa (N) se **Outlook = sunny** e **humidity = high**. A entropia $H(y | \text{Outlook} = \text{sunny}, \text{humidity} = \text{high}) = 0$

Day	Attributes				Class (y)
	Outlook	Temperature	Humidity	Windy	
1	sunny	hot	high	false	N
2	sunny	hot	high	true	N
8	sunny	mild	high	false	N



- Portanto, encontramos as folhas para os dois ramos, **normal** e **high** do nó **humidity**.
- Com isso, a construção da **árvore de decisão** se encerra e podemos usar as regras encontradas por ela para classificar novos exemplos.

Exercício

- Lista #7:
 - Exercício #1 (Árvores de Decisão)

Considerações sobre as Árvores de Decisão

- Uma **árvore de decisão** transforma os exemplos do conjunto de treinamento em uma **sequência de regras** que classifica os exemplos de entrada.
 - Portanto, elas são fáceis de serem interpretadas (modelos de **caixa branca**).
- Embora as **árvores de decisão** sejam poderosos algoritmos de **classificação**, elas apresentam um longo tempo de treinamento.
- Em casos onde as classes são separadas por **fronteiras de decisão não-lineares**, as **árvores de decisão** apresentam um desempenho de **classificação** superior ao apresentado por **classificadores lineares**.
 - **Exemplo:** DTTwoConcentricClassesClassification.ipynb

Considerações sobre as Árvores de Decisão

- Entretanto, quando as classes não são bem separadas (ou seja, se elas se sobrepõem), as árvores são suscetíveis a **sobreajustar** ao conjunto de treinamento, de modo que a **fronteira de decisão linear** dos **classificadores lineares** separa melhor as classes, apresentando melhor desempenho de **classificação**.
 - **Exemplo:** DTTwoOverlappingClassesClassification.ipynb
- Para evitar **sobreajuste**, existem duas maneiras:
 1. Limitamos sua profundidade e/ou o número mínimo de amostras necessárias para estar em um nó folha.
 2. Geramos primeiro uma árvore completa e, em seguida, eliminamos alguns ramos.
- **Árvores de decisão** precisam de muito pouco pré-processamento dos dados. Em particular, elas não necessitam de **escalonamento dos atributos**, mas valores faltantes precisam ser tratados de alguma forma.

Considerações sobre as Árvores de Decisão

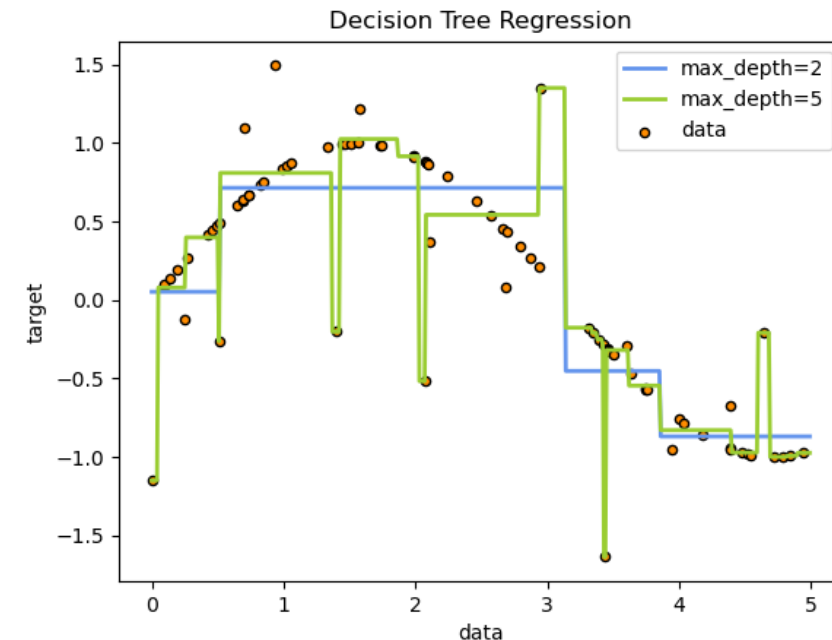
- **Árvores de decisão** adoram criar **fronteiras de decisão ortogonais** (observando os exemplos, vocês vão perceber que todas as **fronteiras de decisão** são perpendiculares a um dos eixos), o que as torna sensíveis à rotação do conjunto de treinamento.
 - **Exemplo:** DTSensitivityToTrainingSetRotation.ipynb
 - Uma maneira para minimizar esse problema é usar a técnica conhecida como **Análise de Componentes Principais (PCA)**, que rotaciona e dimensiona linearmente a matriz de atributos.
- De maneira geral, o principal problema das **árvores de decisão** é que elas são muito sensíveis a pequenas variações nos dados de treinamento. Estas variações nos dados podem gerar árvores completamente diferentes.
 - **Exemplo:** DTSensitivityToTrainingSetDetails.ipynb
 - As **florestas aleatórias** podem limitar essa instabilidade calculando a média das previsões feitas por diversas **árvores de decisão**.

Considerações sobre as Árvores de Decisão

- Se não for restringida, a estrutura de uma **árvore de decisão** se adaptará aos dados de treinamento, ajustando-se muito bem e, provavelmente, se **sobreajustando** a eles.
 - Esse modelo é frequentemente chamado de modelo **não-paramétrico**, não porque não tenha nenhum parâmetro (geralmente tem muitos), mas porque o **número de parâmetros não é determinado antes do treinamento**, de modo que a estrutura do modelo é livre para se adaptar aos dados.
 - Para evitar o **sobreajuste** do modelo aos dados de treinamento, nós precisamos restringir (pode ser visto como uma forma de regularização) a liberdade da árvore de decisão durante o treinamento.
 - No Scikit-Learn, a regularização pode ser controlada pelos hiperparâmetros: ***max_depth, min_samples_split, min_samples_leaf, min_weight_fraction_leaf, max_leaf_nodes*** e ***max_features***.
 - **Exemplo:** DTRegularizationHyperparameters.ipynb

Considerações sobre as Árvores de Decisão

- **Árvores de decisão** também podem ser utilizadas para **regressão**.
 - Assim como em tarefas de **classificação**, as **árvores de decisão** tendem a se **sobreajustar** ao conjunto de treinamento ao lidar com tarefas de **regressão**.
 - **Exemplo**: DTNoisyQuadraticDatasetRegression.ipynb
- Predições feitas por **árvores de decisão** não são suaves nem contínuas, mas **aproximações constantes por partes/trechos**, conforme visto na figura ao lado. Portanto, elas não são boas em extrapolação.



Classificação com árvores de decisão e SciKit-Learn

Exemplo: [DTTwoConcentricClassesClassification.ipynb](#)

Import all necessary libraries.

```
import numpy as np
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.datasets import make_blobs
from sklearn.metrics import accuracy_score
```

Importa a classe
DecisionTreeClassifier.

Cria duas classes concêntricas
com a função *make_circles*.

Define the number of examples.

N = 1000

Create the dataset.

```
x, y = make_circles(n_samples=N, random_state=42, noise=0.1, factor=0.2)
```

Divide o conjunto em
subconjuntos de
treinamento (80%) e
teste (20%).

Split array into random train and test subsets.

```
x_train, x_test, y_train, y_test = train_test_split(x, y, random_state=23, test_size=0.2)
```

Instantiate classifier.

```
clf = DecisionTreeClassifier(criterion='entropy')
```

Instancia classificador.
Não suporta atributos categóricos,
apenas contínuos

Fit the classifier on the training features and labels.

```
clf.fit(x_train, y_train)
```

Treina o classificador.

Use the trained classifier to predict labels for the test features.

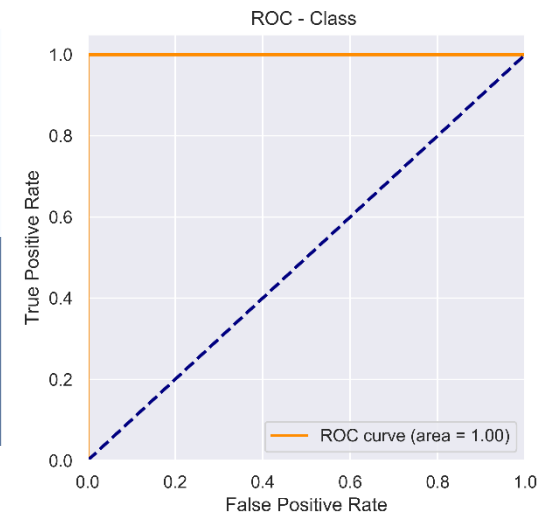
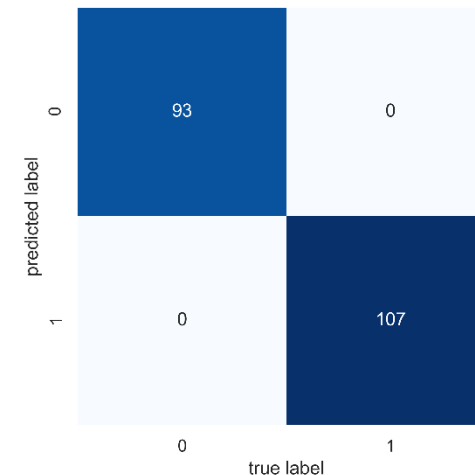
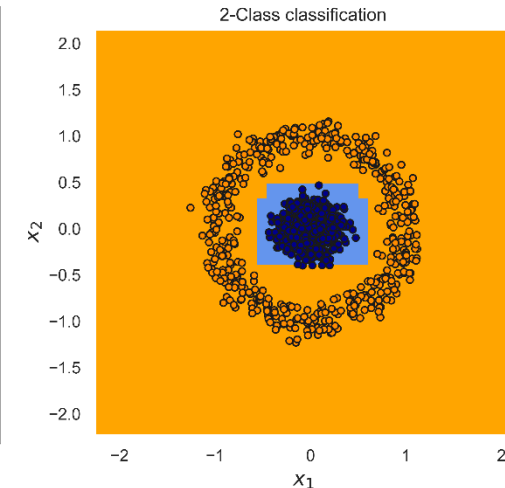
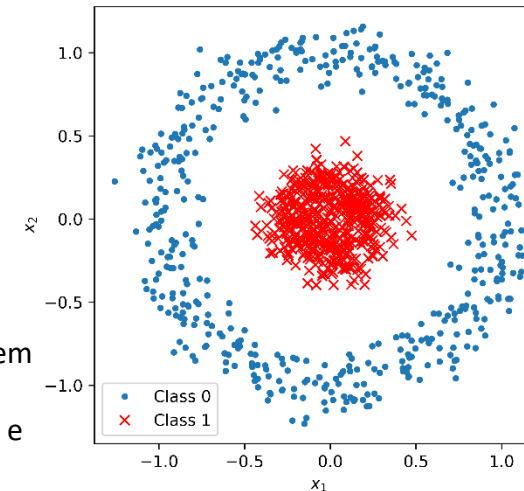
```
y_pred = clf.predict(x_test)
```

Realiza predição com
conjunto de testes.

Calculate and return the accuracy on the test data

```
accuracy = accuracy_score(y_test, y_pred)
```

Calcula a performance do
classificador no conjunto de teste.



Exemplo de classificação de 2 classes concêntricas. As figuras mostram a distribuição das classes, fronteira de decisão, matriz de confusão e curva ROC. Conforme podemos ver a classificação do conjunto de testes é perfeita.

Regressão com árvores de decisão e SciKit-Learn

Import the necessary modules and libraries.

from sklearn.model_selection import train_test_split

from sklearn.tree import DecisionTreeRegressor

from sklearn.metrics import mean_squared_error

from sklearn.model_selection import GridSearchCV

from sklearn.datasets import make_regression

Importa a classe

DecisionTreeRegressor.

Cria dados para a regressão com a função make_regression.

Create dataset.

X, y = make_regression(n_samples=1000, n_features=1, n_informative=1, random_state=42, noise=5)

Split the dataset.

X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_size=0.2, random_state=42)

Divide o conjunto em subconjuntos de treinamento (80%) e teste (20%).

Set parameters for grid-search.

param_grid = [{'max_depth': [1, 2, 3, 4, 5, 6, None], 'min_samples_leaf': [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]}]

Lista de valores a serem testados.

Instantiate DT class.

reg = DecisionTreeRegressor(random_state=42)

grid_search = GridSearchCV(reg, param_grid, cv=5, verbose=3, n_jobs=-1)

Executa o grid search.

Find best hyperparameters.

grid_search.fit(X_train, y_train)

Imprime os valores ótimos dos hiperparâmetros.

Print best parameters.

print(grid_search.best_params_)

Realiza predição com conjunto de testes.

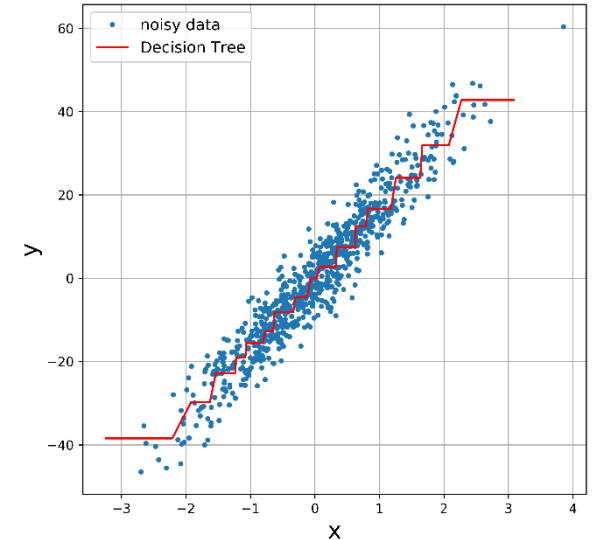
Predicting with test set.

y_pred = grid_search.predict(X_test)

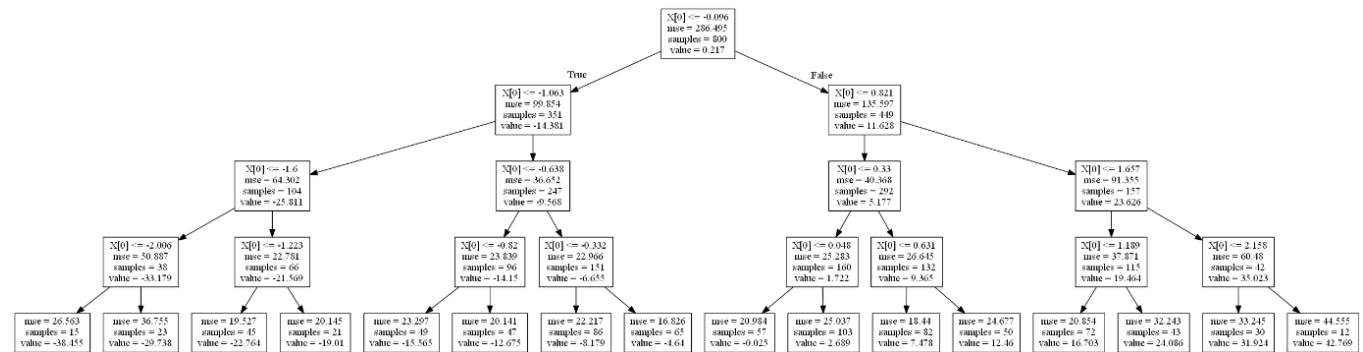
Calcula a performance com conjunto de teste.

Calculate MSE.

mse = mean_squared_error(y_test, y_pred)



Exemplo: DTMakeRegression.ipynb

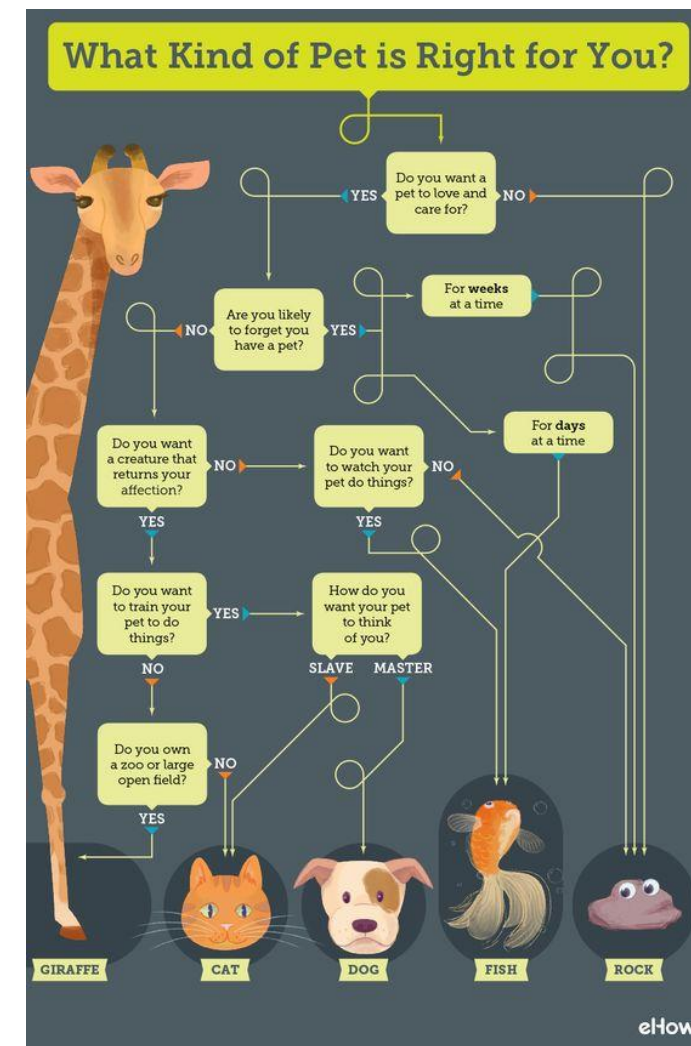
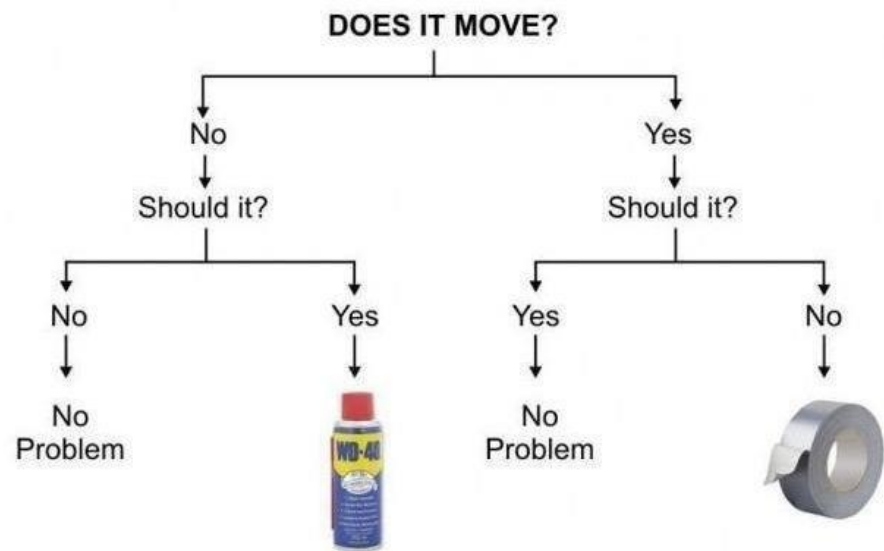


Exemplo de **regressão** utilizando **GridSearch** para encontrar os valores ótimos para os hiperparâmetros 'max_depth' e 'min_samples_leaf'. As figuras acima mostram os dados ruidosos, a curva de regressão e a árvore de decisão do regressor.

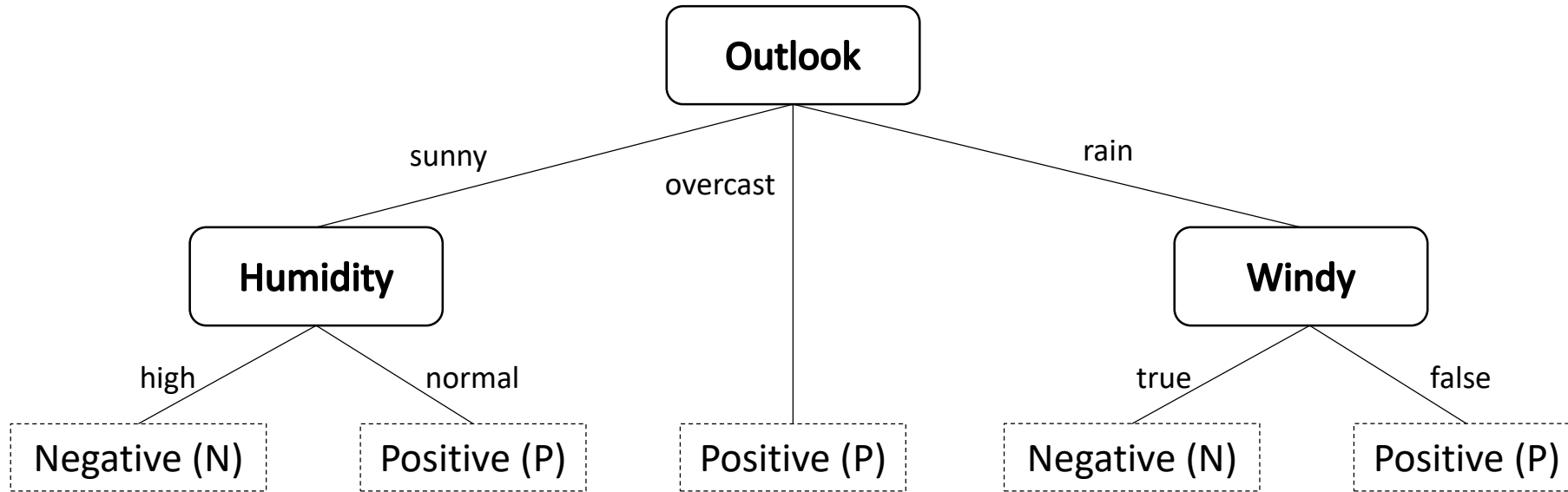
Avisos

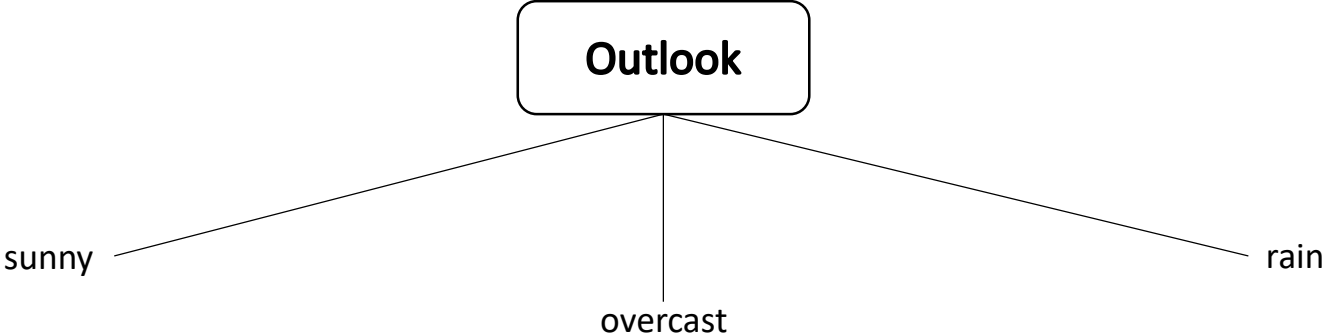
- Estudo dirigido sobre ***florestas aleatórias*** (Lista #8) e ***k-Means*** (Lista #9) na próxima semana.

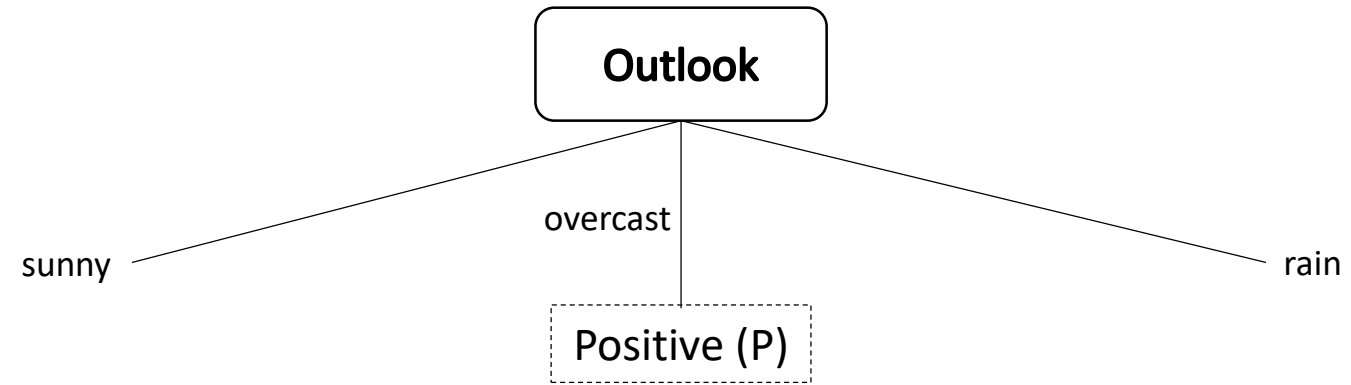
Obrigado!

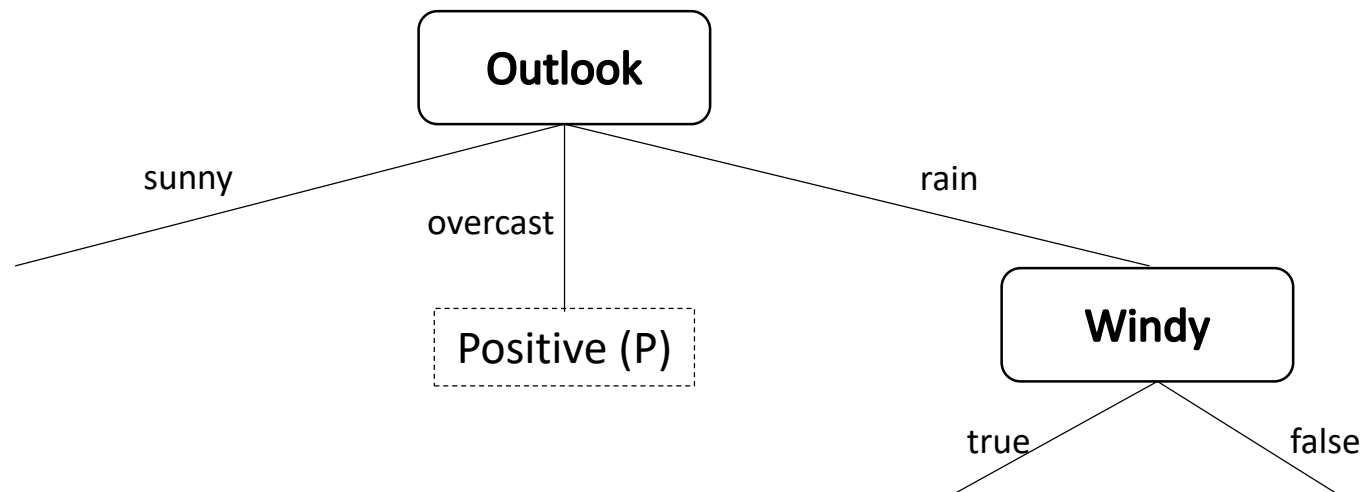


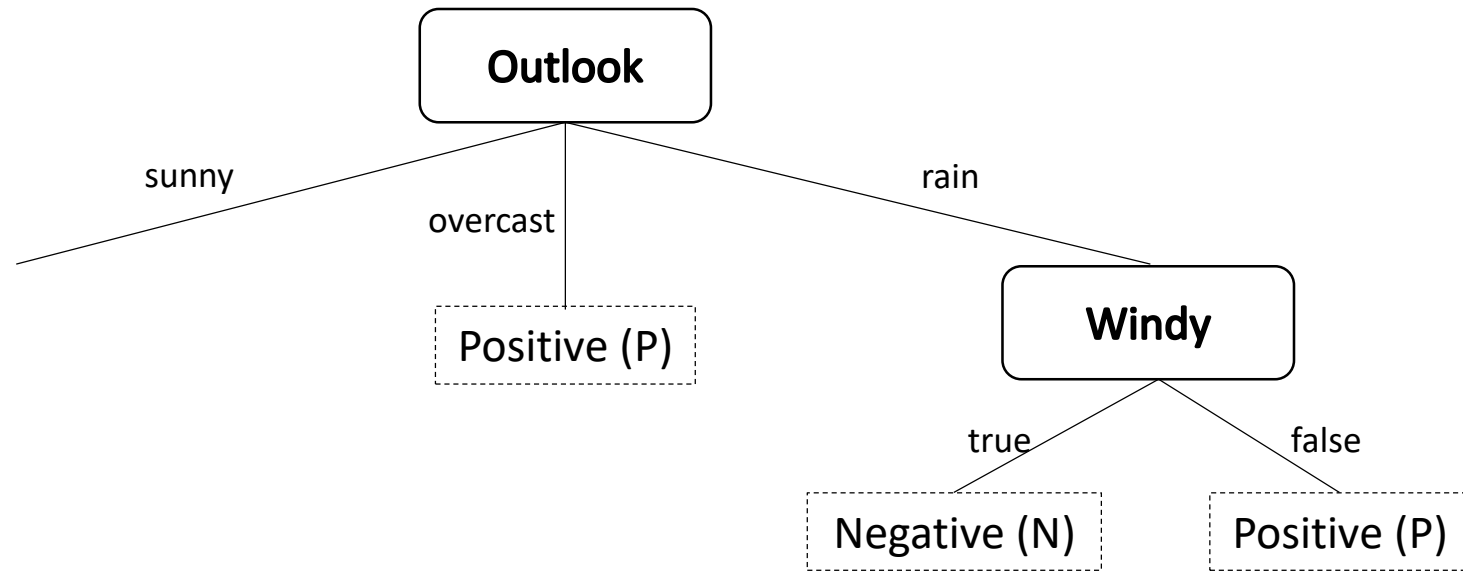
Figuras

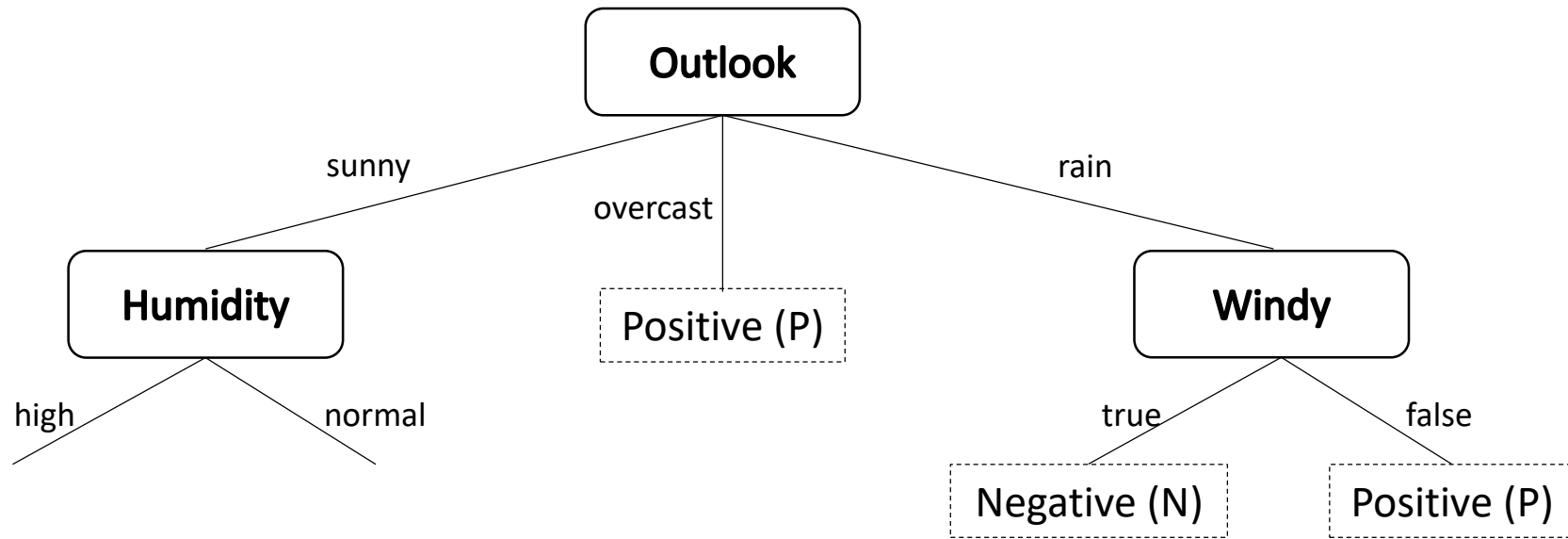


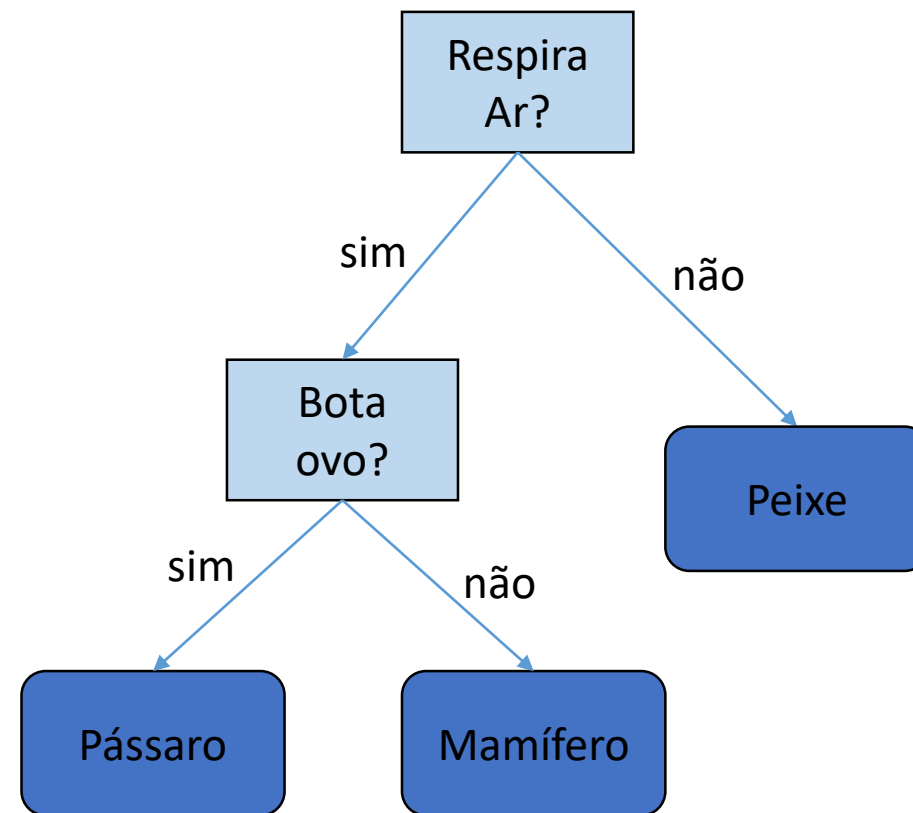












Cálculo da entropia para mais de duas classes

- Veja a tabela ao lado com os exemplos de treinamento.
- Problema com três classes: 0, 1, e 2. Portanto, o cálculo da entropia terá três termos.
- A **entropia** do objetivo, i.e., y , para o conjunto de treinamento é

$$H(y) = - \left[\frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{2}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) \right] = 1.5$$

- Separando os atributos em tabelas separadas, temos

		Classes (y)			
		0	1	2	
x1	0	1	0	0	1
	1	0	0	1	1
	2	1	1	0	2
					4

		Classes (y)			
		0	1	2	
x2	0	2	0	0	2
	1	0	1	1	2
					4

Atributos		Rótulos
x1	x2	Classe (y)
0	0	0
2	1	1
1	1	2
3	0	0

- O **ganho de informação** de cada atributo é calculado como:

$$Gain(x1) = H(y) - \left\{ \frac{1}{4} H(x1 = 0) + \frac{1}{4} H(x1 = 1) + \frac{2}{4} H(x1 = 2) \right\}$$

$$Gain(x2) = H(y) - \left\{ \frac{2}{4} H(x2 = 0) + \frac{2}{4} H(x2 = 1) \right\}$$

Cálculo da entropia para mais de duas classes

Como exemplo do cálculo da entropia, vejamos como $H(x1 = 0)$ deve ser calculado.

$$\begin{aligned} H(x1 = 0) &= - \sum_{i=0}^2 p(y = i | x1 = 0) \log_2(p(y = i | x1 = 0)) \\ &= -[p(y = 0 | x1 = 0) \log_2(p(y = 0 | x1 = 0)) + p(y = 1 | x1 = 0) \log_2(p(y = 1 | x1 = 0)) + \end{aligned}$$

Obs.:

- $H(0) = 0$
- $H(1) = 0$
- $0 * \log_2(0) = 0$

		Classes (y)			
		0	1	2	
x1	0	1	0	0	1
	1	0	0	1	1
	2	1	1	0	2
					4

		Classes (y)			
		0	1	2	
x2	0	2	0	0	2
	1	0	1	1	2
					4