

DP优化

Hany01

Yali High School

October 24, 2018

Preface

一些非常NOIP的水题。。。

(题目的代码均可在blog.csdn.net/hhaannyyii中找到)

小Y和恐怖的奴隶主

小Y是一个喜欢玩游戏的Oler。一天，她正在玩一款游戏，要打一个Boss。虽然这个Boss有 10^{100} 点生命值，但它只带了一个随从——一个只有 m 点生命值的“恐怖的奴隶主”。

这个“恐怖的奴隶主”有一个特殊的技能：每当它被扣减生命值但没有死亡（死亡即生命值 ≤ 0 ），且Boss的随从数量小于上限 k ，便会召唤一个新的具有 m 点生命值的“恐怖的奴隶主”。

现在小Y可以进行 n 次攻击，每次攻击时，会从Boss以及Boss的所有随从中的等概率随机选择一个，并扣减 1 点生命值，她想知道进行 n 次攻击后扣减Boss的生命值点数的期望。

数据组数 $T \leq 1000, n \leq 10^{18}, m \leq 3, k \leq 8$

每次询问的 m, k 相同。

小Y和恐怖的奴隶主

设 $p_{t,i,j,k}$ 表示第 t 轮攻击后血量为1,2,3的分别有 i,j,k 个, 转移显然。

答案即为 $\sum \frac{p_{t,i,j,k}}{i+j+k+1}$ 。

发现状态数只有 $l = \binom{11}{3} = 165$ 个, 我们可以用矩阵乘法优化这个DP, 并加一维作为计数器, 时间复杂度 $O(Tl^3 \log n)$ 。

我们可以预处理矩阵的2的次幂, 时间复杂度 $O(\log nl^3 + T \log nl^2)$ 。

BZOJ4870

组合数问题

计算:

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{nk}{ik+r} \right) \bmod p$$

$$n \leq 10^9, 0 \leq r < k \leq 50, 2 \leq p \leq 2^{30} - 1$$

BZOJ4870

组合数问题

我们要计算的是在 nk 个物体中选择一些物品使得数量 $\bmod k = r$ 。

考虑一个DP， f_i 表示当前物品中有多少种选择方案使得数量 $\bmod k = i$ ，转移显然。

用矩阵快速幂优化即可。

Shopping

马上就是小苗的生日了，为了给小苗准备礼物，小葱兴冲冲地来到了商店街。商店街有 n 个商店，并且它们之间的道路构成了一颗树的形状。

第 i 个商店只卖第 i 种物品，小苗对于这种物品的喜爱度是 w_i ，物品的价格为 c_i ，物品的库存是 d_i 。但是商店街有一项奇怪的规定：如果在商店 u,v 买了东西，并且有一个商店 w 在 u 到 v 的路径上，那么必须要在商店 w 买东西。小葱身上有 m 元钱，他想要尽量让小苗开心，所以他希望最大化小苗对买到物品的喜爱度之和。这种小问题对于小葱来说当然不在话下，但是他的身边没有电脑，于是他打电话给同为OI选手的你，你能帮帮他吗？

$$N \leq 500, M \leq 4000, T \leq 5, W_i \leq 4000, D_i \leq 100$$

Shopping

最后的方案一定是一个联通块，我们可以枚举一个根，然后做树形依赖多重背包，时间复杂度 $O(n^2pm)$ ；

二进制优化多重背包： $O(nmp \log n)$ ；

单调队列优化多重背包： $O(n^2m)$ ；

考虑点分治，将每次的分治重心作为根，时间复杂度 $O(nm \log n)$ 。

瑰丽华尔兹

我们认为舞厅是一个 N 行 M 列的矩阵，矩阵中的某些方格上堆放了一些家具，其他的则是空地。钢琴可以在空地上滑动，但不能撞上家具或滑出舞厅。每个时刻，钢琴都会随着船体倾斜的方向向相邻的方格滑动一格，相邻的方格可以是向东、向西、向南或向北的。而艾米丽可以选择施魔法或不施魔法：如果不施魔法，则钢琴会滑动；如果施魔法，则钢琴会原地不动。艾米丽知道每段时间的船体的倾斜情况。她想使钢琴在舞厅里滑行路程尽量长，求这个最长距离。

保证相同方向移动的段数 $K \leq 200$, 总时间 $T \leq 4 \times 10^4, n, m \leq 200$

BZOJ1499

瑰丽华尔兹

首先有一个简单的DP，设 $f_{i,j,k}$ 表示时间 k 位于 (i,j) 的最长距离，对于每一次移动、每一个坐标都转移一次，时间复杂度 $O(Tn^2)$ 。

我们可以对于一段相同方向的移动一起DP，时间复杂度 $O(kn^3)$ 。

转移显然有单调性，用单调队列优化成 $O(kn^2)$ 即可。

BZOJ1023

Cactus

求仙人掌直径（两点间的最短路径最长）。

$$n \leq 50000$$

BZOJ1023

Cactus

对于圆圆边，直接转移。

对于每一个环，我们维护一个单调队列。由于必须是最短路径，也就是从环上的一点走到另一点时必须走较短的一侧，所以当队首与当前点的距离大于 $size/2$ 时，将队首弹出，用当前队首更新答案，计算出当前环的顶端向下的最长链即可。

Cheat

小强想出了一个评定作文“熟悉程度”的量化指标： L_0 。小强首先将作文转化成一个 01 串。之后，小强搜集了各路名家的文章，同样分别转化成 01 串后，整理出一个包含了 M 个 01 串的“标准作文库”。如果一个 01 串长度不少于 L 且在标准作文库中的某个串里出现过（即，它是标准作文库的某个串的一个连续子串），那么它是“熟悉”的。对于一篇作文（一个 01 串） A ，如果能够把 A 分割成若干段子串，其中“熟悉”的子串的长度总和不少于 A 总长度的 90%，那么称 A 是“熟悉的文章”。 L_0 为 L 的最大值，求一个串的 L_0 。

举个例子：

小强的作文库里包含了 2 个字符串：'10110', '000001110'

待考察的作文是：'1011001100'， $L_0 = 4$ ，将其分割成'10110', '0110', '0'，前两个串为“熟悉”的。

BZOJ2806

Cheat

首先用广义SAM求出每个位置最多可以向前匹配多长。

考虑二分 L ，然后DP， f_i 表示第 i 个位置前面最多可以匹配多长，显然具有决策单调性，用单调队列优化即可。

BZOJ1597

Land Acquisition

FJ准备扩大他的农场,他正在考虑 $N(1 \leq N \leq 50,000)$ 块长方形的土地. 每块土地的长宽 $\leq 1,000,000$. 每块土地的价格是它的面积,但FJ可以同时购买多快土地. 这些土地的价格是它们最大的长乘以它们最大的宽,但是土地的长宽不能交换. 如果FJ买一块 3×5 的地和一块 5×3 的地,则他需要付 $5 \times 5 = 25$. FJ希望买下所有的土地,但是他发现分组来买这些土地可以节省经费. 他需要你帮助他找到最小的经费.

Land Acquisition

我们去除有包含关系的土地后按 x 升序排序，那么 y 一定是降序排序的。

设 f_i 表示考虑到第 i 块土地的最小经费，那么有：

$$f_i = \min_j f_j + x_i \times y_{j+1}$$

时间复杂度 $O(n^2)$ 。

BZOJ1597

Land Acquisition

设 $k < j < k$ 且决策点 j 优于决策点 k ，那么有：

$$f_j + x_i y_{j+1} < f_k + x_i y_{k+1}$$

$$\frac{f_j - f_k}{y_{j+1} - y_{k+1}} > -x_i$$

将 (f_i, y_{i+1}) 看做一个点，由于 $y_i, f_i, -x_i$ 都是单调的，用单调队列维护一个下凸壳即可。

Ciel and Condolas

n 只贞鱼到陆地上乘车，现在有 k 辆汽车可以租用。由于贞鱼们并不能在陆地上自由行走，一辆车只能载一段连续的贞鱼。

贞鱼们互相有着深深的怨念，每一对贞鱼之间有怨气值。第 i 只贞鱼与第 j 只贞鱼的怨气值记为 Y_{ij} ，且 $Y_{ij}=Y_{ji}$ ， $Y_{ii}=0$ 。每辆车载重不限，但是每一对在同辆车中的贞鱼都会产生怨气值。

当然,超级贞鱼zzp长者希望怨气值的总和最小,请你帮助他分配贞鱼们,并输出最小怨气值之和ans。 $n \leq 4 \times 10^3$

Ciel and Condolas

一段区间 $[i, j]$ 的贡献为矩阵的子矩阵 $(i, i) - (j, j)$ 的权值和除以2，这个可以预处理出来。

首先有一个 $O(n^2k)$ 暴力DP，由于具有决策单调性，在栈里二分来维护决策区间，时间复杂度 $O(nk \log)$ 。

凸优化，时间复杂度 $O(n \log^2)$ 。

The Bakery

一段区间的价值表示为区间内不同数字的个数。将一个长度为 n 的序列分为 m 段，使得总价值最大。

$$n \leq 3.5 \times 10^4, m \leq 50$$

The Bakery

首先有一个简单的DP，设 $dp_{i,j}$ 表示到了第 i 个数，分了 j 段的最大价值，那么有：

$$dp_{i,j} = \max(dp_{k,j-1} + value(k+1, j))$$

直接DP是 $O(n^2k)$ 的。

The Bakery

首先有一个简单的DP，设 $dp_{i,j}$ 表示到了第 i 个数，分了 j 段的最大价值，那么有：

$$dp_{i,j} = \max(dp_{k,j-1} + value(k+1, j))$$

直接DP是 $O(n^2k)$ 的。

我们先枚举 j ，对 $j-1$ 的DP值建一棵线段树，发现每次 $i+1$ 影响到的 $val(k+1, i)$ 只有该权值上一次出现的位置到 i 的这一段区间，在线段树上修改即可。

BZOJ4361

isn

给出一个长度为 n 的序列 $A(A_1, A_2 \dots A_N)$ 。如果序列 A 不是非降的，你必须从中删去一个数，这一操作，直到 A 非降为止。求有多少种不同的操作方案，答案模 $10^9 + 7$ 。

$n \leq 2000$.

BZOJ4361

isn

设 $dp_{i,j}$ 表示到第 i 位（强制取第 i 位），序列长度为 j 。

对于每一个 j 以权值为下标建一个树状数组优化转移。

设 f_i 表示长度为 i 的序列有多少种，即 $f_i = \sum dp_{j,i}$

但是题目中要求只要序列非降就停止操作，所以要容斥一下：

$$Ans = \sum f_i \times (n-i)! - f_{i+1} \times (n-i-1)! \times (i-1)$$

Tree chain problem

给定一棵树和很多条链，每条链有一个价值，要求选择一些不相交的链使得价值和最大。

Tree chain problem

每条链在LCA处理。

设 dp_u 为子树 u 内的答案， $sum_u = \sum_{v \in children(u)} dp_v$

如果不选择LCA在 u 的所有链： $dp_u = sum_u$ ；

然后枚举每一条LCA在 u 的

链， $dp_u = \max_{chain} (val_{chain} + \sum_{v \in chain} sum_v - dp_v)$

其中 $\sum sum_v, \sum dp_v$ 用两棵树状数组维护即可。

BZOJ4543

Hotel

有一个树形结构，每条边的长度相同，任意两个节点可以相互到达。选3个点。两两距离相等。有多少种方案？

$$n \leq 10^5$$

BZOJ4543

Hotel

考虑树形DP：

设 $f[u][k]$ 表示 u 的子树中距离 u 为 k 的点的个数，

$g[u][k]$ 表示 u 的子树中到LCA距离为 d ， u 到LCA距离为 $d - k$ 的点对的数量。

（即还需要一个在 u 的子树外、距离 u 为 k 的点就可以构成合法三元组的点对数量）

BZOJ4543

Hotel

那么有：

$$f[u][0] = 1$$

$$f[u][k] = \sum_v f[v][k-1]$$

$$g[u][k] = \sum_v f[u][k] \times f[v][k-1] + \sum_v g[v][k+1]$$

$$Ans = \sum_u \sum_v \sum_k g[u][k] \times f[v][k-1] + f[u][k] \times g[v][k+1]$$

其中 v 为 u 的子节点，标蓝的 $f[u][k]$ 表示还没有将 v 转移到 $f[u][k]$ 时的值， $g[u][k]$ 同理，所以要注意一下转移、计算答案的顺序。

时间复杂度 $O(n^2)$ 。

BZOJ4543

Hotel

与深度有关的树形DP可以考虑用长链剖分优化。

发现 $f[u][k] = \sum f[u][k-1]$ 、 $g[u][k] = \sum g[u][k+1]$ 这些转移都可以通过数组位移 $O(1)$ 将重儿子信息转移过来，然后将轻儿子暴力合并即可。

时间复杂度 $O(n)$ 。

序列统计

小C有一个集合 S ，里面的元素都是小于 M 的非负整数。他用程序编写了一个数列生成器，可以生成一个长度为 N 的数列，数列中的每个数都属于集合 S 。

小C用这个生成器生成了许多酱的数列。但是小C有一个问题需要你的帮助：给定整数 x ，求所有可以生成出的，且满足数列中所有数的乘积 $\bmod M$ 的值等于 x 的不同的数列的有多少个。小C认为，两个数列 $\{A_i\}$ 和 $\{B_i\}$ 不同，当且仅当至少存在一个整数 i ，满足 $A_i \neq B_i$ 。另外，小C认为这个问题的答案可能很大，因此他只需要你帮助他求出答案 $\bmod 1004535809$ 的值就可以了。

$N \leq 10^9, 3 \leq M \leq 8000, M$ 为质数。

BZOJ3992

序列统计

容易得到一个暴力DP方法，设 $f_{i,j}$ 表示到第 i 位，当前余数为 j 的方案数。

用 $f_{i,j}$ 表示一共有 2^i 位、当前余数为 j 的方案数，将一个 n 优化成 \log 。

序列统计


容易得到一个暴力DP方法，设 $f_{i,j}$ 表示到第 i 位，当前余数为 j 的方案数。

用 $f_{i,j}$ 表示一共有 2^i 位、当前余数为 j 的方案数，将一个 n 优化成 \log 。

考虑怎么继续优化：

我们发现对于转移 $f[l][k] = \sum_{i \times j \equiv k \pmod{m}} f[l-1][j] \times f[l-1][i]$ ，如果是 $i+j$ 我们就可以用NTT来优化了，我们可以将 $i \times j$ 用原根转化一下：

由于 m 是质数，所以我们可以找到 m 的原根 g_0 ，由原根的性质可以知道 $g_0^0, g_0^1 \dots g_0^{m-2} \pmod{m}$ 不遗漏、不重复地组成了 $1 \dots m-1$ 这些数，我们用 g_0 的次幂表示给定的集合内的数，就可以将乘法转化成加法，然后NTT即可。



Thanks