2018 Spring Round Soution

ljs

2018 年 3 月 5 日

brunhilda

设 d(n) 为将 n 个小朋友淘汰所需要的最小次数。设 $M=\{k_1,\cdots,k_m\}$。

算法一：

考虑一个朴素的 DP，则

$$d(n)=1+min_{k\in M}d(n-(n\,mod\,k))。$$

判断无解的情况也很简单，只需要检查是否

$$n\geq lcm(k_1,\cdots,k_m)=\prod_{k\in M}k。$$

预计得分 20 分。

算法二：

大胆贪心，对于每一个 n 选择 m 个质数中能使 n 变得最小的那个。这样的话至少可以通过 $Q=1$ 的测试点。

算法三：

记录 d 数组的反数组 $d^{(-1)}(k)=max\{n:d(n)\leq k\}$。很容易得到

$$d^{(-1)}(k+1)\leq d^{(-1)}(k)+k_{max}$$

这样我们就可以进行二分查找了。
这样为什么是对的呢?

结论 d 数组是单调不减的。

结论设 $n=n'k_{max} and\, d(n)<\infty, then\, d(n)\leq 2n'$。

下面是证明。设

$$\pi(n)=min_{k\in M}(n-(n\,mod\,k))。$$

我们对 n' 使用归纳法。对于 $n'\geq 1$ 由于 $\pi(n)<n$ 我们有如下：

$$\pi(\pi(n))\leq\pi(n-1)\leq(n-1)-((n-1)mod\,k_{max})=(n-1)-(k_{max}-1)$$

$$n-k_{max}=(n'-1)k_{max}.$$

于是

$$d(n)=d(\pi(\pi(n)))+2\leq d((n-1)k_{max})+2=2(n-1)+2=2n\ .$$

所以

$$d(n)=O(n/m)$$

pipes

题目大意

有一个 n 行 m 列的黑白棋盘，你每次可以交换两个相邻格子（相邻是指有公共边或公共顶点）中的棋子，最终达到目标状态。要求第 i 行第 j 列的格子只能参与 $m_{i,j}$ 次交换。

算法 1

题目可以看做从初始为 1 的点通过网格图最终流到结束为 1 的点。那么对于一条路径，除了起点和终点只交换 1 次之外，中间的点均交换两次。于是我们使用费用流解决本题，设点 $p_{i,j}$ 的参与交换的次数上限为 $v_{i,j}$，以下为建图方式：

- 将一个点分成三个点，分别为入点，原点和出点。
- 如果开始的图上该位置有棋子，那么从 S 到该点的原点连一条边权 1，费用 0 的边
- 如果结束的图上该位置有棋子，那么从该点的原点到 T 连一条边权 1，费用 0 的边
- 如果该点只在开始的图上出现，那么从该点的入点向原点连一条边权为 $\frac{v_{i,j}}{2}$，费用为 1 的边，从该点的原点向出点连一条边权为 $\frac{v_{i,j}+1}{2}$，费用为 0 的边
- 如果该点只在结束的图上出现，那么从该点的入点向原点连一条边权为 $\frac{v_{i,j}+1}{2}$，费用为 1 的边，从该点的原点向出点连一条边权为 $\frac{v_{i,j}}{2}$，费用为 0 的边
- 如果以上两点都不符合，那么从该点的入点向原点连一条边权为 $\frac{v_{i,j}}{2}$，费用为 1 的边，从该点的原点向出点连一条边权为 $\frac{v_{i,j}}{2}$，费用为 0 的边

最后的费用就是答案了。注意无解的情况：

- 开始与结束的矩阵中 1 的个数不同
- 最大流不等于矩阵中 1 的个数

Vim

设 A 为字符集大小。

对任意字符串 s，设 f(s) 为将 s 中所有的字母 e 去掉的最小按键次数。

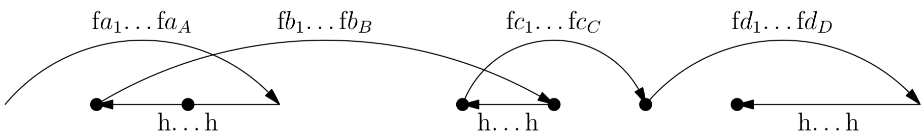
对一个在某些字母下标有下划线的字符串 s, 设 g(s) 为至少停留在有下划线的字母上一次的最小按键次数（假设我们并不需要删除其中的任何字母）。

结论 $f(l_1 s_1 \underbrace{e \cdots e}_{n_2} l_2 s_2 \cdots \underbrace{e \cdots e}_{n_k} l_k s_k) = 2(n_2 + \cdots + n_k) + g(\underline{l_1} s_1 \cdots \underline{l_k} s_k)$ 如果 $l_1, \cdots, l_k$ 不是字母 e 并且有 $n_2, \cdots, n_k \geq 1$.

那么问题转化为求一个不包含 e 字母的字符串 s 的 g(s)，可以发现它与旅行商问题十分相似，我们再来看以下结论。

结论 Victor 不会在同一位置使用多于一次 h 操作。

所以，在进行感性猜测和理性分析后，我们会发现最优的方案会是像下图一样：



下面是一个 $O(NA^2)$ 的做法。

为了简化问题，我们假设如果在一个字母之后不存在字母 C，那么光标就会跳到无穷远处。显然这并不会改变答案。

设 $p(a, c)$ 表示光标通过操作 fc 经过 a 或正好停在 a 位置一次的最小按键次数。

设 $q(a, c, d)$ 表示光标经过或正好停在 a 位置三次的最小按键次数: 第一次通过操作 fc, 第二次通过操作 h, 第三次通过操作 fd。

设 s_i 为字符串的第 i 个字母，那么设:

$$u_i = \begin{cases} 0, if\, the\, i-th\, character\, is\, underlined \\ +\infty, otherwise \end{cases}$$

再设

$$k_{c,d} = \begin{cases} +\infty,\, c = d \\ 0,\, c \neq d \end{cases}$$

那么我们就可以得到如下的递推关系:

$$\begin{aligned} p(a+1, c) = min(&p(a, c) + k_{c,s_a} + u_a, \\ &p(a, s_a) + 2, \\ &q(a, s_a, c) + k_{c,s_a}, \\ &q(a, s_a, s_a) + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(a+1, c, d) = min(&p(a, c) + 3 + k_{c,s_a}, \\ &p(a, s_a) + 5, \end{aligned}$$

$q(a,c,d)+1+k_{c,s_a}+k_{d,s_a}$,

$q(a,c,s_a)+3+k_{c,s_a}$,

$q(a,s_a,d)+3+k_{d,s_a}$,

$q(a,s_a,s_a)+5)$

那么最后的答案就是 $p(n+1,A+1)-2$。