dp 题目选讲

redbag

2018 年 10 月 23 日

目录

JOI2014 小笼包

小 A 点的小笼包套餐，由馅料不同的 n 个小笼包组成。n 个小笼包等间隔排成一列，编号为 1 到 n。第 i 个小笼包与第 j 个小笼包之间的距离是绝对值 $|i-j|$。小 A 按照顺序吃小笼包。最初，所有的小笼包的美味度都是 0。

吃第 i 个小笼包时，汤汁向周围飞散，与第 i 个小笼包距离 D_i 以下的小笼包都淋上了汤汁，而被淋上汤汁的小笼包的美味度会增加 A_i。

求吃到的小笼包美味度的和最大值。

$0 \le D_i \le 7, 0 \le A_i \le 1000, n \le 100$

JOI2014 小笼包

因为 $0 \leq D_i \leq 7$，所以考虑状压 dp，$dp_{i,j}$ 表示处理了第 i 个小笼包后，前面 8 位（包括 i），取的相对顺序为 j。

转移的时候枚举前 8 个的相对顺序，然后枚举第 $i+1$ 个小笼包取的顺序。

JOI2014 小笼包

因为 $0 \le D_i \le 7$，所以考虑状压 dp，$dp_{i,j}$ 表示处理了第 i 个小笼包后，前面 8 位（包括 i），取的相对顺序为 j。

转移的时候枚举前 8 个的相对顺序，然后枚举第 $i+1$ 个小笼包取的顺序。

然而 8 位就算开滚动数组也存不下，于是可以康托展开，也可以去掉排列的最后一位。

[SDOI2010] 地精部落

给你一个数 n ，以及一个模数 P，求有多少种排列满足条件，要么 $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$，要么 $a_{i-1} > a_i < a_{i+1}$
$n \leq 5000$

[SDOI2010] 地精部落

几个简单的性质:

1. 在一个波动数列中,若两个 i 与 $i+1$ 不相邻,那么我们直接交换这两个数字就可以组成一个新的波动数列。例如:5 2 3 1 4

2. 把波动数列中的每个数字 a_i 变成 $(n+1)-a_i$ 会得到另一个波动数列,且新数列的山峰与山谷情况相反。

3. 波动序列有对称性。例子:1 4 2 5 3 to 3 5 2 1 4

[SDOI2010] 地精部落

设 $dp_{i,j}$ 表示前 i 个数，第一个数为 j 且 j 的山峰的方案数。
两种转移：

1. $j-1$ 为开头的时候 j 肯定不和 $j-1$ 相邻，那么交换 j 和 $j-1$ 也是合法的，所以 $dp_{i,j}=dp_{i,j-1}$

2. j 作为开头，然后和 $j-1$ 相邻，我们需要求 $j-1$ 作为山谷的方案数，我们翻转一下（i 变成 $n-i+1$），$j-1$ 可以变成 $i-\ j-1$ ，所以 $dp_{i,j}+=dp_{i-1,i+1-j}$

最后答案要 2

[多校 10]Permutation

定义一个排列 p 的代价为 $\sum_{i=1}^{n}|p_i-i|$

给定 n,p，对于 $s=0..n^2-1$，统计有多少长度为 n 的排列代价等于 s，答案对 p 取模。

$n\leq 100, T\leq 10$，最多两组数据 $n\geq 50$

[多校 10]Permutation

首先我们要去掉绝对值。

考虑一个排列是由很多置换构成的，一个置换对答案的贡献是 $2 * \sum p_i - i(p_i > i)$

[多校 10]Permutation

首先我们要去掉绝对值。

考虑一个排列是由很多置换构成的，一个置换对答案的贡献是 $2 * \sum p_i - i(p_i > i)$

$dp_{i,j,k}$ 表示前 i 个点,j 个点没有入边，和为 k 时的方案数。

$p_i - i$ 我们可以拆开计算, 没有入边则 $-i$, 出边在前面则 $+i$

[多校 10]Permutation

首先我们要去掉绝对值。

考虑一个排列是由很多置换构成的，一个置换对答案的贡献是 $2 * \sum p_i - i(p_i > i)$

$dp_{i,j,k}$ 表示前 i 个点,j 个点没有入边，和为 k 时的方案数。

$p_i - i$ 我们可以拆开计算, 没有入边则 $-i$, 出边在前面则 $+i$

入边和出边都在 i 以内: $dp_{i+1,j-1,k+i+1} += dp_{i,j,k} * j * j$

入边在 i 内，出边在 i 外: $dp_{i+1,j,k} += dp_{i,j,k} * j$

入边在 i 外，出边在 i 内: $dp_{i+1,j,k} += dp_{i,j,k} * j$

入边出边都在外: $dp_{i+1,j+1,k-i-1} += dp_{i,j,k}$

注意 dp 只算了一半的贡献，最后输出的时候要注意。

CF917C. Pollywog

有 n 个石头，从左边开始编号为 $1...n$.

一开始有 x 个青蛙站在最左边的 x 个石头上，每个石头上只能站一只青蛙。

每一轮，最左边的青蛙可以选择向右边跳 1 k 个石头，即从第 i 个到第 $i+1$ ，$i+2$，…… $i+k$ 个石头。青蛙不可以跳到已经有青蛙的石头上

向右边跳 i 个石头花费的体力为 c_i

所有的石头中有 q 个特殊石头，对于每一个特殊石头 p，跳到 p 上时会额外消耗 W_p 点体力，W_p 可能是负数（即为体力增加

求使得这 x 个青蛙从 $1-x$ 石头跳到最右边的 x 个石头上，所要花费的体力最小值。

$1 \leq x \leq k \leq 8, k \leq n \leq 10^8$，$0 \leq q \leq \min(25, n-x)$

CF917C. Pollywog

这范围比较的像矩阵乘法。

$dp_{i,j}$ 表示当前状态为 i 下一步状态为 j ，转移过去所要花费的体力的最小值。

我们就先找出合法的状态，存起来，这样状态数就不是很多了。因为每次只能转移一步，所以 001 到 010 这种代价设为 0。然后其他的代价也用矩阵存起来。

然后转移就是 $C_{i,k} = \min(A_{i,j} + B_{j,k})$

那些需要额外消耗体力的位置，暴力加上去。

CF1042E. Vasya and Magic Matrix

在一个 $n*m$ 的矩阵中给定一个起点，每次可以到达任意数值比它小的点，到没有比它更小的点为止，获得的分数是两点间欧几里得距离的平方，求期望得分。

$1 \leq n,m \leq 1000$

CF1042E. Vasya and Magic Matrix

因为是严格小于，所以肯定是有限步。

设 $f_{i,j}$ 表示跳到 (i,j) 的期望步数，$s_{i,j}$ 表示严格比 $a_{i,j}$ 小的数的个数，$g_{x,y}$ 表示到 (x,y) 的概率。

$$f_{i,j} = \sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(a_{x,y} > a_{i,j})\frac{f_{x,y} + g_{x,y}dis(x,y,i,j)}{s_{x,y}}$$

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(a_{x,y} > a_{i,j})dis(x,y,i,j)$$

$$= \sum x^2 + y^2 + i^2 + j^2 - 2i\sum x - 2j\sum y$$

CF1042E. Vasya and Magic Matrix

所以我们只要维护以下几个东西，就能够做到 $O(n^2 \log n)$

$$\sum \frac{f_{x,y} + (x^2 + y^2) g_{x,y}}{s_{x,y}}$$

$$2i \sum \frac{g_{x,y} x}{s_{x,y}}$$

$$2j \sum \frac{g_{x,y} y}{s_{x,y}}$$

$$(i^2 + j^2) \sum \frac{g_{x,y}}{s_{x,y}}$$

CF1060F. Shrinking Tree

给一棵 n 个节点的树，每次等概率选择树中剩下边的一条进行缩边，这条边的两个端点有相同的概率被保留，求最后每个点被留下的概率。

$n \leq 50$

CF1060F. Shrinking Tree

我们设最终留下的点为 x, 把 x 作为根节点，我们有 $(n-1)!$ 删边的方案，每种方案 x 有一个存活的概率，我们求出所有方案这个概率的和，最后 $/(n-1)!$ 就是答案。

CF1060F. Shrinking Tree

我们设最终留下的点为 x, 把 x 作为根节点，我们有 $(n-1)!$ 删边的方案，每种方案 x 有一个存活的概率，我们求出所有方案这个概率的和，最后 $/(n-1)!$ 就是答案。

设 $dp_{u,i}$ 表示只考虑 u 为根的子树的情况下，删除了 i 条边的存活概率的和。

考虑合并两棵子树，贡献是，

$$dp_{u,i} * dp_{v,j} \binom{i+j}{i} * \binom{sz_u + sz_v - i - j}{sz_u - i}$$

CF1060F. Shrinking Tree

考虑子树 v 合并到父亲 u 里。合并 (u, v) 时，u 中删除了 i 条边，设为 g_i。

枚举子树 v 留下边数 (包括 v 与父亲的连边)。

$$g_i = \sum_{j=0}^{i-1} dp_{v,j} + 2 * (sz_v - i) * dp_{v,i}$$

CF936D. World of Tank

你在玩一个游戏，前方有 $2*n$ 的地区。

你一开始控制一个坦克，这个坦克充能需要 t 秒，充能后可以开一炮，打掉当前这一行目前最前面的一个障碍物。

一开始在第一行的 0 号点，要到第一行的 $n+1$ 号点

可以上下移动坦克，每次是瞬移。

给你障碍物的位置，求你是否能到目的地。能就输出方案。

$n \le 10^9$，$m1 + m2 \le 10^6$，$t \le 10^9$

CF936D. World of Tank

1. 打了的地方一定会走，否则不会更优。
2. 可以存能量，上下移动的时候和 t 取较小值。

CF936D. World of Tank

1. 打了的地方一定会走，否则不会更优。
2. 可以存能量，上下移动的时候和 t 取较小值。

首先肯定是离散化,$dp_{0/1,j}$ 表示在第 $0/1$ 行，第 j 列，最多有多少能量，若无法到达为 -1。

两种转移：

$dp_{i^1,j} = \min(t, dp_{i,j})$，$(i^1, j)$ 无障碍物时才能转移。

$dp_{i,j+1} = dp_{i,j+1} + p_{i+1} - p_i$，若有障碍物则要 $-t$，同样要判断是否合法。

输出方案记录 pre 就好。

Thanks