“你是个天才”模拟赛
(GLT, Genius Launching Test)
Solution

Sunshine_cfbsl

2018 年 3 月 7 日

Atlas

题目大意:

给定 $n \times m$ 的矩阵 A 以及正整数 K, 设

$$f(i,j) = card(\{A_{x,y} | x \in [i, i+K), y \in [j, j+K)\})$$

求 $f(i,j)$ 的最大值和和.

Subtask1

计算每一个 f 的取值, 每次把桶清空.
时间复杂度: $O(nm \max\{A\})$
期望得分: 13

Subtask2

每一次计算完后再扫一边正方形清空桶.
时间复杂度: $O(nmK^2)$
期望得分: 25

Subtask3

考虑计算每次计算同一行的正方形. 往右移动一格只需要 $O(K)$ 的时间就可以维护桶. 每一行都这么算就可以了.
时间复杂度: $O(nK^2 + nmK)$
期望得分: 42

Subtask4

因为 $A_{i,j}$ 互不相同, 所以 $n \times m \leq 1e5$, 利用上一个算法可以通过.
期望得分: 50

Subtask5

$A_{i,j}$ 小于等于 2, 我们对两种值分别开一个 $n \times m$ 的二维 bool 矩阵. 接下来一次考虑每一个位置的值对两个矩阵的贡献, 可以很简单的得到.

时间复杂度: $O(nm)$

期望得分: 20

结合之前的算法可以得到 70 分.

Subtask6

我们首先预处理 $g(i,j)$ 表示从 (i,j) 往下的 K 个位置 (不包括 (i,j)) 是否有和 $A_{i,j}$ 相同的值.

用高度为 K 的扫描线从上往下考虑. 同时维护扫描线上的 $(m-K)$ 个正方形的 f 值.

对于每一个值 x, 我们需要一个长度为 m 的 bitset , 表示对应列在扫描线中的值是否有 x.

往下移动一格时先加入下一行.

考虑当前新加一行的第 j 列元素 $A_{i,j}$. 那么我们在 $A_{i,j}$ 的 bitset 中找到第 j 列的前驱和后继. 区间更改对应正方形的取值.

然后删除上一行.

先利用已经处理的数组, 判断 bitset 是否要进行更改. 接下来同样找前驱后继, 同样区间修改.

对于区间修改, 我们先差分, 在往下移动后前缀和.

时间复杂度: $O(\frac{nm^2}{\omega})$

期望得分: 100

Chimie

题目大意:

对数列区间按位与, 区间按位或和区间最大值询问.

Subtask1

暴力区间位运算, 区间求 max.

时间复杂度: $O(Qn)$

期望得分: 17

Subtask2

设 K 为最高二进制位数 (题目中为 20).

全部都是全局操作, 我们按位考虑.

当某一位被 $\wedge 0$ 以后, 所有数字的这一位都一样了.

当某一位被 $\vee 1$ 以后, 所有数字也一样了.

可以对每一位打一个 tag, 当这一位都一样以后就一起处理, 不一样的话, 更改以后 sort(这样的操作最多只会有 20 次).

时间复杂度: $O(Kn\log_2 n + QK)$

期望得分: 14

结合之前的算法, 可以得到 31 分.

Subtask3

注意到 $\wedge$ 和 $\vee$ 的结合律和分配律, 有如下性质:

$$a \wedge b \vee c \vee d = a \wedge b \vee (c \vee d)$$
$$(a \wedge b \vee c) \wedge d = (a \wedge b \wedge d) \vee (c \wedge d) = a \wedge (b \wedge d) \vee (c \wedge d)$$

用线段树维护两个 tag, 即区间 $\wedge$ 和区间 $\vee$, 查询时单点询问值即可.

时间复杂度: $O(Q\log_2 n)$

期望得分: 16

结合之前的算法可以得到 47 分.

Subtask4

直接 RMQ, 算是最水的暴力了.

时间复杂度 $O((Q+n)\log_2 n)$

期望得分: 9

结合之前的算法可以得到 56 分.

Subtask5~ 6

我也不知道怎么做, 说不定就有人做出来了.

Subtask7

使用线段树维护五个值: 区间最大值, 区间 $\wedge$ 和 $\vee$ 标记, 区间与和, 区间或和. 由于之前所说的满足结合律和分配律, 所以这个 tag 支持下传和合并.

以区间或为例, 在对 X 取或时, 我们先定位到区间 $[L,R]$, 只考虑 X 为 1 的二进制位上的值. 如果区间内的数在这些二进制位上的取值完全相同, 那么对这个区间的操作相当于区间加, 直接更新最大值, 并打上标记. 否则继续递归.

区间与就考虑 X 为 0 的二进制位上的值, 作同样的处理.

这样的时间复杂度是 $O(Kn\log_2 n)$ 的.

接下来我们用势能分析来证明时间复杂度:

设 $g(u,i)$ 表示线段树节点 u 所代表的区间内第 i 个二进制位是否相同. 设 $f(u)=\sum_{i=0}^{K} g(u,i)$.

设势能函数 $\Phi(u)$ 表示 u 子树内所有节点的 f 的和. 我们考虑 $\Phi(root)$ 的值.

初始时 $\Phi(root)=O(Kn\log_2 n)$.

每一次下传标记, $\Phi(root)$ 增加了 $O(K)$. 那么每一次定位一个区间, $\Phi(root)$ 最多增加 $O(K\log_2 n)$.

每一次打一个标记 $\Phi(root)$ 也是增加 $O(K)$ 的.

同样以或运算为例, 我们在定位到区间 $[L,R]$ 以后, 往下走的充要条件是 X 内对应位数上有不同的值. 而在或运算以后, 对应为上的值肯定相同. 也就是说, $\Phi(root)$ 最少要减少 $O(1)$.

所以时间复杂度为: $O(Kn\log_2 n)$

期望得分: 100

Roi

题目大意:

设 $\lambda(x)=$[x is a fibonacci number],

求

$$\prod_{x=1}^{\infty} x^{\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{f(n)}{x}\rfloor}\lambda(px)\sum_{q=1}^{\lfloor\frac{f(m)}{x}\rfloor}\lambda(qx)[(p,q)=1]}$$

的值.

Subtask $1\sim 10$

$$\begin{aligned}
&\prod_{x=1}^{\infty} x^{\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{f(n)}{x}\rfloor}\lambda(px)\sum_{q=1}^{\lfloor\frac{f(m)}{x}\rfloor}\lambda(qx)[(p,q)=1]}\\
=&\prod_{x=1}^{\infty} x^{\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{f(m)}\lambda(i)\lambda(j)[(i,j)=x]}\\
=&\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(f(i),f(j))\\
=&\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}f((i,j)) && \text{(Subtask } 1\sim 3)\\
=&\prod_{g=1}^{n}f(g)^{\sum_{i=1}^{\frac{n}{g}}\sum_{j=1}^{\frac{m}{g}}[(i,j)=1]}\\
=&\prod_{g=1}^{n}f(g)^{\sum_{d=1}^{\frac{n}{g}}\mu(d)\frac{n}{dg}\frac{m}{dg}} && \text{(Subtask } 4\sim 6)\\
=&\prod_{g=1}^{n}\prod_{d=1}^{\frac{n}{g}}f(g)^{\mu(d)\frac{n}{dg}\frac{m}{dg}}\\
=&\prod_{D=1}^{n}\prod_{d|D}f(\frac{D}{d})^{\frac{n}{D}\frac{m}{D}\mu(d)}\\
=&\prod_{D=1}^{n}(\prod_{d|D}f(\frac{D}{d})^{\mu(d)})^{\frac{n}{D}\frac{m}{D}} && \text{(Subtask } 7\sim 10)
\end{aligned}$$

时间复杂度 $O(n\ln n+T\sqrt{n}\log_2 n)$