Solution

zhou888

October 15, 2018

1 天天爱跑步

我们发现每个不在$y = x$上的点至多只有一种方法可以使$x + y$减小。

同时所有操作都是可逆的,狗往狗窝所在位置移动等价于狗窝往狗所在位置移动,因此可以将狗和狗窝看成同等地位的点。

然后将移动看成边,则所有坐标点会形成若干棵无限大的二叉树(森林),并且这些二叉树的树根都在$y = x$上。

两点间的步数距离即为它们在二叉树上的LCA到两点的步数距离和。

令每只狗代表点的权值为1,每个狗窝代表点的权值为-1。将每个点到根的路径都加上该点的权值,类似于树上差分的思想，最终所有边的权值绝对值之和即为答案。

我们发现我们的过程其实类似求gcd的过程,只是将取模的过程展开了。我们可以把每个点求gcd的过程经过的log个结点记录下来，那么我们可以很容易的求出一个点的dep。通过比较两个点第一个不同的位置可以得到两点之间的lca和dfs序大小，那么我们可以对这些点建虚树，然后就变为一个简单的树上问题了。

复杂度:$O(n \log n \times 60)$(我也不知道为什么那么慢)

2 荷马史诗

我们发现，任意的字符串都可以表示为一棵Trie，其中每个字符串都有一个对应的叶子。从任意一个节点到其左儿子的边权为1，到其右儿子的边权为2。某个结点的深度为从根到其叶子的路径的边权和，字符串的代价为对应的叶子的深度。

假设我们有一棵正好有n个叶子的树。由排序不等式可得，我们将按深度排序的叶子与按频率排序的单词逆序配对为最优解。且我们观察到树的每个节点要么是叶子，要么它有两个儿子。

现在我们可以用dp来解决这个问题。我们设$dp(i, a, b, l)$表示在最大深度为i，第$i-1$层有a个叶子，第i层有b个叶子，前$i-2$层有l个叶子结点的最小代价。显然，我们的代价记录的是w_i最大的l个单词的代价。

我们可以通过枚举深度为$i-1$的叶子分离的数量k转移，$dp(i, a, b, l)$可以转移到$dp(i+1, b+k, k, l+a-k)$。状态数为$O(n^4)$,复杂度为$O(n^5)$。

我们可以发现我们在dp时并不需要真的知道树的深度，我们只需要记录$dp(a,b,l)$即可，复杂度$O(n^4)$。

可以把原来的转移变为以下两个转移：

1.我们使倒数第二级的第一个节点变为叶子，由$dp(a,b,l)$转移到$dp(a-1,b,l+1)$。

2.我们给倒数第二级所有剩下的叶子都拓展两个儿子。由$dp(a,b,l)$转移到$dp(a+b,a,l)$。

复杂度为$O(n^3)$

3 整数

由期望的线性性可以知道，我们只需要求出对于每一对位置的贡献。对于一对i,j，我们只关心$i \to j$这个移动产生的代价,可以发现,其它$n-2$个位置都是等价的。

所以我们只需要记录第i位和第j位的数是否相同,指针的位置是否在i以及其它位置上与第i位上的数相同的数的个数就可以了。

这样我们列出方程，用高斯消元预处理求出一对$i \to j$期望经过的次数。每次询问枚举每一对i,j，计算贡献累加即可。

复杂度为$O(64n^3+Tn^2)$