第一题

解这道题需要一些矩阵相关的知识。

Cayley-Hamilton 定理告诉我们，矩阵的特征多项式是矩阵的化零多项式。也就是说，存在一个最高矩阵阶数次的多项式 $f(x)$，使得 $f(A)=0$。如果我们得到了一个化零多项式 $f(x)$，那么就可以通过倍增的方法计算$x^k \bmod f(x)$。

$$x^{2k}=\left(x^k \bmod f(x)\right)^2 \bmod f(x)$$

$$x^{k+1}=x\left(x^k \bmod f(x)\right) \bmod f(x)$$

以上两式的乘法和取模运算均为多项式乘法和多项式取模。

倍增复杂度是 $O(n^2 \log k)$的。

因为 $f(A)=0$，所以$A^k=A^k \bmod f(A)$，而$A^k \bmod f(A)$最高只有 $n-1$ 次，所以$A^k\mathbf{b}=a_{n-1}A^{n-1}\mathbf{b}+a_{n-2}A^{n-2}\mathbf{b}+\ldots+a_0A^0\mathbf{b}$。系数$a_i$通过倍增得到，我们只需要预处理出$A^{n-1}\mathbf{b}$,$A^{n-2}\mathbf{b}$...即可。

怎么求 $f(A)$？

因为 A 只有两个特征值 0 和 1，所以只要找到一个不是特征向量的向量 $\mathbf{x}$，使得 $f(A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$的多项式 f 即为化零多项式。不停随机向量 $\mathbf{x}$，直到它不是特征向量为止，然后解未知数为各项系数的方程组 $f(A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$。

第二题

假如现在在(a,b)，当前有两种策略，一种是向上，另一种是向右。假设我们要走到(c,d)，先向上再向右的代价为$A_a(d-b)+B_d(c-a)$，先向右后向上的代价为$B_b(c-a)+A_c(d-b)$，所以如果$\frac{A_a-A_c}{a-c}<\frac{B_b-B_d}{b-d}$就先向上走，否则现向右走。所以现在 A 数组和 B 数组内求一个凸包，然后每次比较下一条边的斜率，如果 A 下一条边的斜率小就向上，否则向右。

第三题

离线。

需要确定每一个询问点是先手必胜点（简称为 1）还是先手必败点（简称为 0）。

某个点是 0 的充要条件是它不能到达别的 0。

以 y 从小到大的顺序扫描每一行。

假如这一行有一些障碍点，那么我们可以以这些障碍点为界分成若干段，段与段之间显然是无关的（因为它们互相都不能到达）。

对于一段，暴力的方法是从左到右判断每一个点是 0 还是 1。显然一段至多出现 1 个 0，因为如果某个点是 0 了，那么它右边都能到达这个 0，一定是 1。对于一段的第一个点，首先它不能往左边走（因为它是一段的第一个点，左边是障碍或者边界），所以我们需要知道它下面能到达的点中有没有 0，如果有，那么它就是 1，否则它就是 0。为了简化叙述，扫描到当前这一行时，如果一个点能到达的下面所有点中没有 0，就将它称为 z 点，否则称为 x 点。如果我们找到一个 0 了，那么剩下的点都不需要判断，直接标为 1，否则我们继续判断。当我们需要继续判断的时候，左边的点肯定全是 1，所以还是只需要知道它是不是 z 点。因此，事实上我们需要找到的是第一个 z 点，把它标为 0，剩下的全标 1 即可。如果找不到任何一个 z 点，那么全部都标为 1。

现在问题来了，如何维护哪些点是 z 点。可以用一个数据结构（线段树或者平衡树维护线段），一开始均为 z，当有 0 出现时（0 一次只出现一个，即数量与障碍点成正比），在相应位置标记为 x，在障碍点出现时，在相应位置标记为 z（因为这是一个障碍点，上面的点向下能到达的点到这里为止，所以暂时还没 0）。

上述算法需要一行一行扫描 y 坐标，还是会超时。事实上对于连续一段没有障碍点的 y 坐标，我们可以一起做。因为每一行都没有障碍点，所以第一行一定是左边第一个 z 点标 0，第二行由于左边第一个点变成 x 了（因为第一行这个点标了 0），所以就是左边第二个 z 点标 0，以此类推。那么总结起来就是，如果有连续 k 行没有障碍点，那么就找左边前 k 个 z 分别标 0，并将这些点转化为 x。

总复杂度 O(nlogn)