Solution

~~斯耐普尔·法斯提斯特~~

2018 年 3 月 9 日

stack

10% 的数据

$O(n \cdot n!)$ 暴力枚举出栈序列

15% 的数据

$O(3^n n)$ 的三进制状压, 0 表示该数未进栈，1 表示进栈未出，2 表示出栈。

25% 的数据

$O(2^n n^2)$ 的状压。合法状态比较少，可以跑得很快。

50% 的数据

考虑 DP

$f[i]$ 表示 $1 \sim i$ 的所有出栈序列种类数。

$g[i]$ 表示 $1 \sim i$ 的权值为“对‘元素入栈时栈内元素个数’求和”的所有出栈序列的权值和。

$h[i]$ 表示 $1 \sim i$ 的权值为“对‘元素入栈时全部栈内元素的标号的和’求和”的所有出栈序列的权值和。

得到转移:

$f[0] = 1$

$f[i] = \sum_{j=1}^{i} f[j-1] * f[i-j]$

$g[i] = \sum_{j=1}^{i} f[j-1] * g[i-j] + (g[j-1] + j * f[j-1]) * f[i-j])$

$h[i] = \sum_{j=1}^{i} f[j-1] * (h[i-j] + g[i-j] * j) + (h[j-1] + f[j-1] * j + g[j-1]) * f[i-j]$

$h[n]$ 即为所求。

80% 的数据

可以观察到转移是卷积的形式，设出生成函数的方程组求解即可.

经过复杂的计算，可以得到:

$$h[n] = \frac{n * 4^{n-1}}{2} + \frac{\binom{2n-1}{n-1} * n}{2}$$

预处理阶乘即可。

100% 的数据

对阶乘分块打表。

$math$

10% 的数据：

暴力 $O(n^2)$ 计算.

30% 的数据：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} sgcd(i,j)^k$$

$$= \sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [sgcd(i,j) = d]$$

$$= \sum_{d=2}^{n} (\frac{d}{minp(d)})^k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [gcd(i,j) = d]$$

$$= \sum_{d=2}^{n} (\frac{d}{minp(d)})^k [(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} 2\varphi(i)) - 1]$$

其中 $minp(x)$ 为 x 最小质因子，用线性筛即可跑出 $1e6$ 的数据

$k = 1$ 的数据：

也许有巧妙的做法。

$k = 0$ 的数据

$$\sum_{d=2}^{n} [(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} 2\varphi(i)) - 1]$$

杜教筛 $O(n^{2/3})$ 即可

100% 的数据

问题在于快速求出 $(\frac{x}{minp(x)})^k$ 的和.
考虑几个 DP.
$G[i][j]$ 表示 $2 \sim j$ 中与前 i 个质数互质的个数.
$G_k[i][j]$ 表示 $2 \sim j$ 中与前 i 个质数互质的数的 k 次方的和.
$F[i][j]$ 表示 $2 \sim j$ 中 $minp \in p_{1\cdots i}$ 的数 x,$(\frac{x}{minp(x)})^k$ 的和.
当 $minp > \sqrt{n}$ 时，$(\frac{x}{minp(x)})^k = 1$，令 p_m 为 $\leq \sqrt{n}$ 的最大质数.
那么，$F[m][n] + G[m][n]$ 就是 $1 \sim n$ 的 $(\frac{x}{minp(x)})^k$ 的和
转移时要实现精细，当 $j < p_i^2$ 时转移没有意义，真正有用的 j 只有 $2\sqrt{n}$ 个。
复杂度 $O(\frac{n^{3/4}}{logn})$
求 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 时插值就好，在 2^{32} 下求逆元要记一下 2 的因子个数。

$graph$

考虑将刚体这个抽象的条件具体化，即每个竖边都和每个横边垂直。加入一条对角线能够使得一行的竖边和一列的横边垂直。

考虑建出二分图 $G_{n,m}$，答案就是使得二分图 $G_{n,m}$ 联通的方案数。

$dp[i][j]$ 表示 $G_{i,j}$ 的联通方案数。

考虑枚举一号点所在联通块大小。

$$dp[i][j] = 3^{ij} - \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=0}^{j} 3^{(i-k)(j-l)}dp[k][l]$$

$O(n^2m^2)$