

## Series Trigonométrica de Fourier

José Saquimux

La serie trigonométrica de Fourier se descubrió en el siglo diecinueve como una solución formal de ecuaciones en derivadas parciales de onda y calor en intervalos espaciales finitos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

En 1822, cuando el matemático francés (Jean Baptiste) Joseph Fourier (1758-1830) estudiaba problemas de flujo de calor (las aplicaciones eléctricas eran escasas en ese entonces), demostró que las funciones periódicas arbitrarias se podían representar mediante una serie infinita de senoides armónicamente relacionadas. Más tarde fue usada para describir procesos físicos en los que los eventos ocurren en el tiempo según un patrón regular (periódico). Por ejemplo, una nota musical consiste una simple nota llamada fundamental, y una serie de vibraciones llamadas sobretonos. La serie de Fourier proporciona el lenguaje matemático que nos permite describir con precisión la estructura compleja de una nota musical.

La serie de Fourier, no es solamente uno de resultados importantes del análisis moderno sino también puede decirse que proporciona un instrumento indispensable para el tratamiento de casi toda pregunta recóndita en ingeniería moderna. Para mencionar solamente algunas, las vibraciones sonoras, la propagación de señales en sistemas de comunicación, y conducción o propagación de calor, son temas que en su generalidad son intratables sin esta herramienta, esto nos da una pequeña idea de su importancia.

Una de las glorias coronadas de la matemática del siglo diecinueve fue el descubrimiento de que una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$  bajo ciertas condiciones generales se puede representar con la serie (suma) infinita de senos y cosenos:

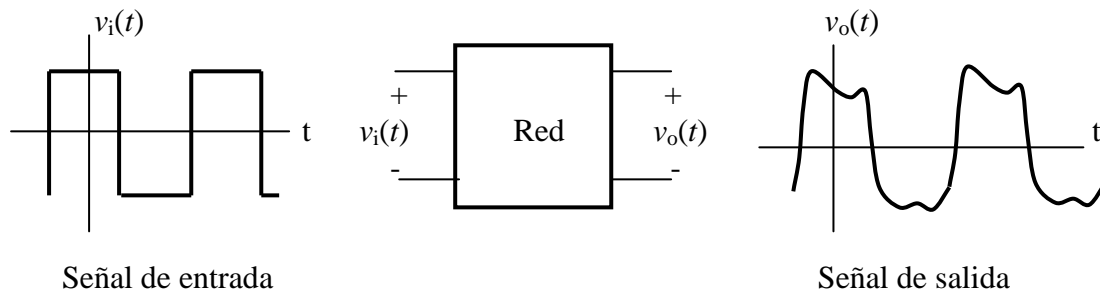
$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

O bien, si se sustituye la relación  $2\pi/T = \omega$ , se tiene,

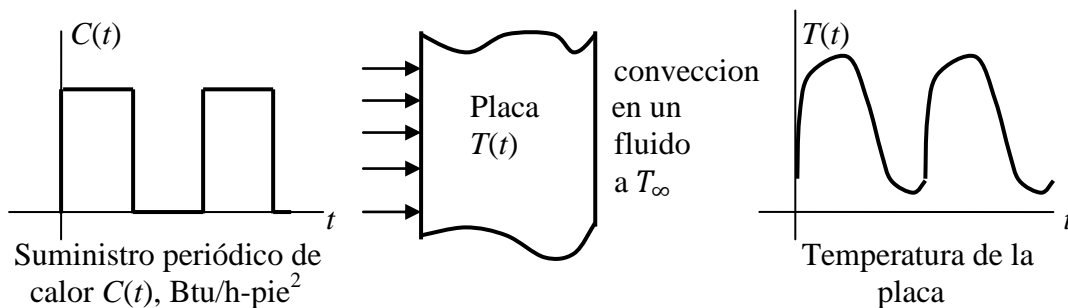
$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Estas series llamadas *series trigonométrica de Fourier* convergen a los valores de  $f(t)$  en todos los puntos del intervalo  $[0, T]$  con posibles excepciones en los puntos de discontinuidad y los puntos extremos del intervalo.

Un ejemplo inmediato, es su uso en análisis de redes eléctricas para estudiar la respuesta de estado permanente a una señal de entrada periódica que inicia idealmente en el tiempo igual a cero y dura para siempre. Además se usa para estudiar la señal de entrada y la respuesta de la red, en *función del contenido de frecuencias*. La idea de contenido de frecuencias de las formas de onda de señales es útil en los problemas de ingeniería, y constituyen la base de gran parte del lenguaje que usan los ingenieros principalmente los electricistas y electrónicos.

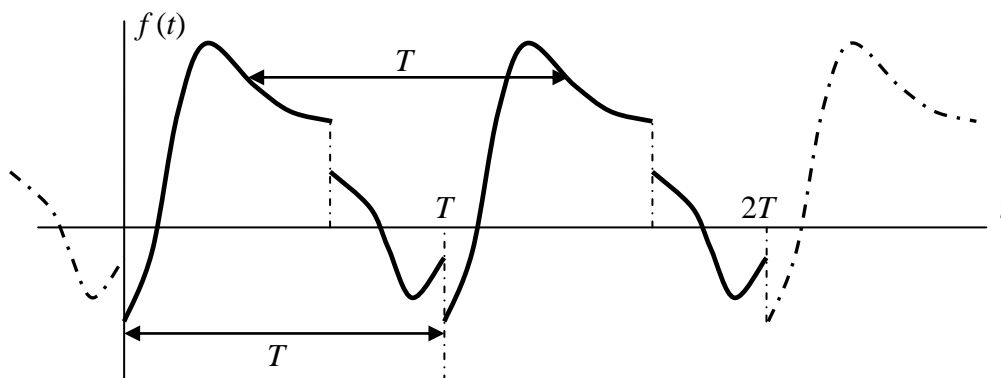


Otros ejemplos sencillos, es su uso en transferencia de calor para estudiar la variación de la temperatura en objetos sometidos a flujos de calor oscilantes o suministro periódico de calor durante determinado proceso, o bien en la solución de ciertos problemas de conducción de calor en estado estable, descritas con la ecuación de calor con el método de separación de variables.



### Series Trigonómicas de Fourier

Si una forma de onda  $f(t)$  de periodo  $T$ , ( $f(t + nT) = f(t)$ , con  $n$  entero) cumple con las condiciones llamadas de *Dirichlet*:



1. tiene un número finito de discontinuidades en el periodo  $T$ , si es discontinua en ese periodo,
2. el valor medio en el periodo  $T$  es finito (no tiene asíntotas verticales),
3. tiene un número finito de máximos y mínimos en  $T$  (no oscila infinitamente)

Entonces  $f(t)$  puede "aproximarse" por la llamada *serie finita trigonométrica de Fourier*,

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \left[ a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi(2)t}{T}\right) + \cdots + a_N \cos\left(\frac{2\pi Nt}{T}\right) \right] \\ + \left[ b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi(2)t}{T}\right) + \cdots + b_N \sin\left(\frac{2\pi Nt}{T}\right) \right]$$

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right]$$

O bien, en términos de la frecuencia angular  $\omega = 2\pi/T$ ,

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \cdots + a_N \cos(N\omega t)] \\ + [b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \cdots + b_N \sin(N\omega t)]$$

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Además, cuando hacemos que  $N$  aumente,  $S_N(t)$  aproxima cada vez “mejor” (converge) a  $f(t)$  en los valores de  $t$  para los cuales  $f(t)$  es continua y a  $\frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$  en los puntos de discontinuidad. (Los valores  $t^-$  y  $t^+$  denotan puntos cercanos a la izquierda y a la derecha de  $t$  respectivamente)

Finalmente cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $S_N \rightarrow f(t)$  se acostumbra representar a  $f(t)$  como una *serie infinita trigonométrica de Fourier*:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] \quad (1)$$

O bien,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2)$$

La mayoría de formas de onda que aparecen en ingeniería cumplen con las condiciones de Dirichlet por lo que pueden aproximarse por una serie finita hasta cierto valor finito  $N$  (llama también serie truncada de Fourier) y representarse por una serie infinita de Fourier (llamada simplemente serie de trigonométrica Fourier: STF)

A  $a_n$  y  $b_n$  se les llama *coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier*.

Al término “constante”  $a_0/2$  se le llama *componente dc* (por sus siglas en inglés *direct current*) de la forma de onda, y se denota así por motivos de simplificación de cálculos.

A los términos con  $n = 1$   $a_1 \cos(\omega t)$  y  $b_1 \sin(\omega t)$  se les llama *componentes de frecuencia fundamental* (frecuencia  $\omega$ )

Los restantes términos con frecuencias  $n\omega$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , que son múltiplos enteros de la fundamental se les llaman *armónicas*. Para  $n = 2$ ,  $a_2 \cos(2\omega t)$  y  $b_2 \sin(2\omega t)$  se llaman componentes de *segunda armónica*. Para  $n = 3$ ,  $a_3 \cos(3\omega t)$  y  $b_3 \sin(3\omega t)$  se llaman componentes de *tercera armónica*, etc. En una STF de una forma de onda puede ser que algunos coeficientes sean iguales a *cero*. Para algunas formas de onda, la STF que la representa “exactamente” tiene un número de términos finito.

Notemos las componentes de frecuencia fundamental  $a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$  y  $b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$  tienen periodo  $T$ . Las componentes de segunda armónica  $a_2 \cos\left(\frac{2\pi(2)t}{T}\right)$  y  $b_2 \sin\left(\frac{2\pi(2)t}{T}\right)$  tienen periodo  $T/2$ , es decir hay 2 periodos de segunda armónica en  $T$ . Las componentes de tercera armónica  $a_3 \cos\left(\frac{2\pi(3)t}{T}\right)$  y  $b_3 \sin\left(\frac{2\pi(3)t}{T}\right)$  tienen periodo  $T/3$ , es decir hay 3 periodos de tercera armónica en  $T$ , etc. Esto se repite en cada periodo  $T$ , de esto se induce que la STF debe tener periodo  $T$ . Es decir el mismo periodo de la función periódica  $f(t)$ .

En términos de la frecuencias lineal,  $f = 1/T$  la ecuación la STF de  $f(t)$  queda

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f t + b_n \sin 2\pi n f t) \quad (3)$$

Dependiendo como se presenta o se desea estudiar la forma de onda  $f(t)$  así se toma su periodo. Si se estudia en la variable tiempo  $t$  su periodo es  $T$ , si se considera a  $\omega t$  como variable y su periodo  $2\pi$  se prefiere usar la representación (2).

### Fórmulas para calcular los coeficientes $a_n, b_n$

Para una función dada  $f(t)$ , el coeficiente de  $a_0/2$ , puede determinarse por integración en ambos lados de la ecuación (1) en un periodo completo, por ejemplo de 0 a  $T$  :

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] dt$$

Integrando término a término cada lado de la serie de lado derecho queda

$$\int_0^T f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt + b_n \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \right]$$

El primer termino de lado derecho es igual a  $T a_0/2$ , mientras las otras son cero. Por tanto, el coeficiente constante de la STF está dada por

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Es decir  $a_0/2$  es el *valor promedio* de la función en un periodo, o sea el área neta bajo la curva  $f(t)$  sobre un periodo, dividido por el periodo de la forma de onda.

Los coeficientes  $a_n$  pueden determinarse multiplicando la ecuación (1) por  $\cos(2\pi mt/T)$  donde  $m$  es un entero positivo fijo, e integrando entre 0 y  $T$ , como anteriormente:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \right] \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \right] \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho es cero, también son cero todos los términos de  $b_n$  ya que  $\sin(2\pi nt/T)$  y  $\cos(2\pi mt/T)$  son funciones ortogonales para todo  $m$  y  $n$ . Vea su formulario.

De manera similar, los términos de  $a_n$  son cero, para todos los valores  $m$  y  $n$ , excepto para el caso  $m = n$ . Vea su formulario. En este caso no queda,

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt &= a_n \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\ \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt &= \frac{a_n}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{4\pi nt}{T}\right) dt + \frac{a_n}{2} \int_0^T dt = 0 + \frac{a_n}{2} T \end{aligned}$$

De la cual

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Para determinar los coeficientes  $b_n$ , se multiplica la ecuación (1) por  $\sin(2\pi mt/T)$  y, por procedimiento similar al de arriba, se obtiene

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

En resumen

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Si se desea trabajar con la serie en términos de la frecuencia angular  $T = 2\pi/\omega$ , se pueden usar

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt \\ a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos(\omega n t) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \sin(\omega n t) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Si el periodo de la forma de onda es  $2\pi$ , y se toma a  $\omega t$  como variable, se pueden usar las fórmulas equivalentes

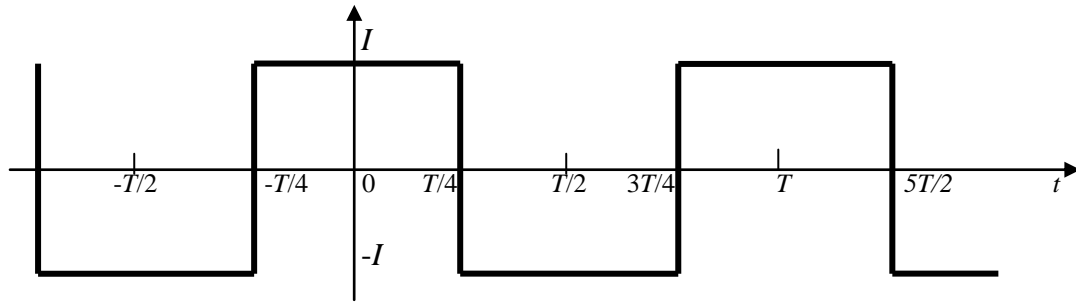
$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(\omega n t) d(\omega t), \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(\omega n t) d(\omega t), \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{C})$$

Las fórmulas anteriores nos dan los valores de los coeficientes para una forma de onda periódica  $f(t)$  al integrar de 0 a  $T$ , o de 0 a  $2\pi/\omega$  o de 0 a  $2\pi$ . Sin embargo, para ciertas funciones pares o impares es conveniente integrar de  $-T/2$  a  $T/2$ , de  $-\pi/\omega$  a  $\pi/\omega$ , de  $-\pi$  a  $\pi$  o usar cualquier intervalo de integración de longitud igual a un periodo. Esto se puede hacer puesto que  $f(t)$  es periódica.

Si  $f(t)$  tiene simetría par, impar o de media onda, el cálculo de  $\frac{a_0}{2}$ ,  $a_n$  y  $b_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  se puede simplificar con fórmulas que veremos más adelante.

**Ejemplo**

Calculemos las STF de la onda rectangular  $i(t)$  par de amplitud  $I$  con periodo  $T$ .



**Solución**

Seleccionemos el intervalo de integración de 0 a  $T$  (también se puede seleccionar de  $-T/2$  a  $T/2$  si se desea) Podemos definir.

$$i(t) = \begin{cases} I, & 0 < t < T/4 \\ -I, & T/4 < t < 3T/4 \\ I, & 3T/4 < t < T \end{cases}$$

Note que esta definición, en los puntos de discontinuidad, no coincide con la gráfica dada. Esto no afecta en la solución del problema.

Para  $a_0/2$

Por simple inspección  $a_0/2 = 0$  (recuerde el valor medio en un periodo).

Para  $a_n$ , usando las ecuaciones de coeficientes (A)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2I}{T} \left( \int_0^{T/4} \cos \frac{2\pi n t}{T} dt - \int_{T/4}^{3T/4} \cos \frac{2\pi n t}{T} dt + \int_{3T/4}^T \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \right) \\ &= \frac{2I}{T} \left( \frac{T}{2\pi n} \left( \sin \frac{\pi n}{2} - 0 \right) - \frac{T}{2\pi n} \left( \sin \frac{3\pi n}{2} - \sin \frac{\pi n}{2} \right) + \frac{T}{2\pi n} \left( \sin 2\pi n - \sin \frac{3\pi n}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2I}{\pi n} \left( \sin \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{3\pi n}{2} \right), n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Calculando para los valores de  $n = 1, 2, 3, \dots$  se induce que

$$a_n = \begin{cases} \frac{4I}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4I}{n\pi}, & n = 3, 7, 11, \dots \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

Para  $b_n$

$$b_n = \frac{2}{T} \left( I \int_0^{T/4} \sin \frac{2\pi n t}{T} dt - I \int_{T/4}^{3T/4} \sin \frac{2\pi n t}{T} dt + I \int_{3T/4}^T \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \right)$$

$$= \frac{2I}{T} \left( -\frac{T}{2\pi} \left( \cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right) + \frac{T}{2\pi n} \left( \cos \frac{3\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \right) - \frac{T}{2\pi n} \left( \cos 2\pi n - \cos \frac{3\pi n}{2} \right) \right)$$

$b_n = 0$ , para todo  $n$

Por tanto la STF es

$$i(t) = \frac{4I}{\pi} \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{4I}{3\pi} \cos \frac{3(2\pi)t}{T} + \frac{4I}{5\pi} \cos \frac{5(2\pi)t}{T} - \frac{4I}{7\pi} \cos \frac{7(2\pi)t}{T} + \dots$$

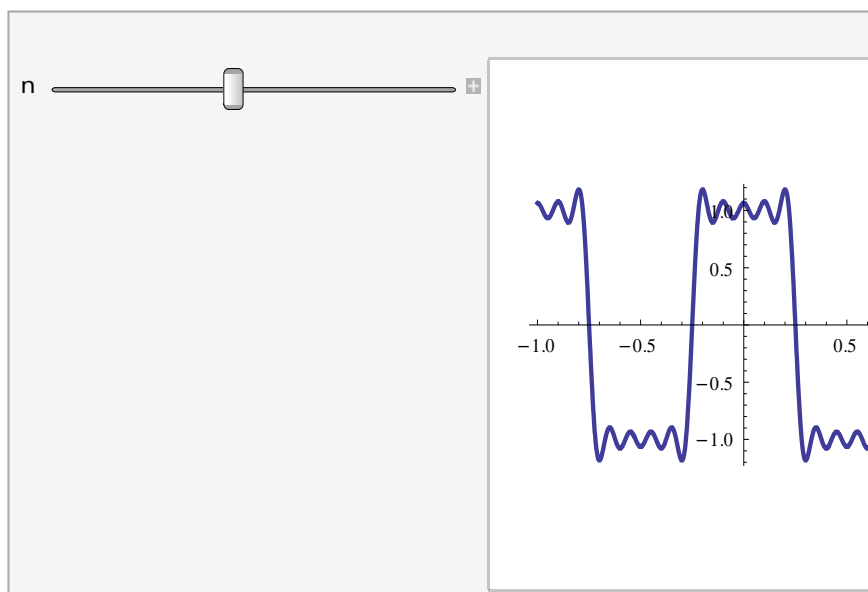
$$i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4I}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \cos \left( \frac{(2m-1)2\pi t}{T} \right)$$

$$i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4I}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \cos((2m-1)\omega t)$$

Note qué función es par con simetría de media onda y que su serie contiene solo contiene términos en coseno y con frecuencia fundamental y con armónicos impares  $n = 1, 3, 5, \dots$ . Como ya mencionamos, más adelante veremos fórmulas que simplifican los cálculos aprovechando propiedades de simetría.

Para apreciar la convergencia de la STF truncada de  $i(t)$ , se supone  $I = 1$  amp y  $T = 1$  seg, lo cual implica que  $\omega = 2\pi$  rads. Con los comando de animación del Mathematica7 se visualiza la convergencia gráfica de las STF truncadas a medida que se incluyen más términos (armónicas) de la serie.

```
Manipulate[Plot[Sum[ $\frac{4 (-1)^{i-1} \text{Cos}[(2 i - 1) 2 \text{Pi } t]}{\text{Pi } (2 i - 1)}$ ], {  
  {t, -1, 1}, PlotStyle -> Thickness[0.01]}], {n, 1, 1
```





Se demuestra que medida que cada armónica se va tomando en cuenta, la STF truncada va llenando mejor la onda cuadrada en el sentido de los mínimos cuadrados,

$$\int_0^T [i(t) - S_N(t)]^2 dt = \text{mínimo}$$

donde  $S_N(t)$  es la STF truncada de  $N$  términos.

Notemos que en los puntos  $t = \pm(2n - 1)\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$ , la función salta de  $-1$  a  $1$ , como lo predice la teoría, la STF converge al promedio de los valores de la forma de onda cercanos a la derecha y a la izquierda del punto de discontinuidad, es decir a  $(-1 + 1)/2 = 0$ . En los puntos restantes la STF converge a la forma de onda  $i(t)$ .

Notemos que aunque  $n$  crezca siempre se observan picos o rebases en las discontinuidades  $t = \pm(2n - 1)\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$  y decrementos oscilatorios amortiguados en los puntos donde es continua, este efecto se le conoce con el nombre de *fenómeno de Gibbs*. Se demuestra que la magnitud del rebase es un 9% del salto total, cuando  $n \rightarrow \infty$ . La naturaleza de las oscilaciones cambia con  $n$ , la frecuencia angular aumenta y el intervalo de tiempo en el decremento disminuye.

#### Calculo de la STF con el Mathematica7

Con los siguientes comandos del Mathematica7, se puede ilustrar el cálculo de la STF de  $i(t)$ . Suponiendo,  $I = T = 1$

```
In[27]:= Clear[u, i, g, h, l]
u[t_] = UnitStep[t];
i[t_] = -(u[t + 1/2] - u[t + 1/4]) + (u[t + 1/4] - u[t - 1/4]
      (u[t - 1/4] - u[t - 1/2]));
g[t_] = i[t/(2 Pi)];
h[t_] = FourierTrigSeries[g[t], t, 10];
l[t_] = h[2 Pi t]
Plot[{i[t], l[t]}, {t, -5/4, 5/4},
      PlotStyle -> {{Thickness[0.02], Dashing[{0.02, 0.03]}},
                    {Thickness[0.01], Dashing[{0.01, 0.01]}}
```

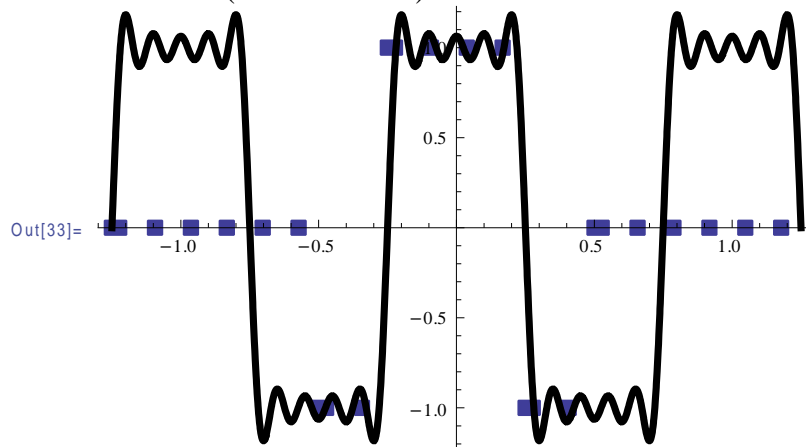
Nos proporciona la siguiente STF hasta  $n = 9$

$$\text{Out[32]} = \frac{4 \cos[2 \pi t]}{\pi} - \frac{4 \cos[6 \pi t]}{3 \pi} + \frac{4 \cos[10 \pi t]}{5 \pi} - \frac{4 \cos[14 \pi t]}{7 \pi} + \frac{4 \cos[18 \pi t]}{9 \pi}$$

Con relación a los anteriores comandos, se hace ver que el periodo de  $i(t)$  se amplió de  $T = 1$  a  $T = 2\pi$  porque el comando utilizado construye la serie solamente si su periodo es  $2\pi$ . Así.

Se inicia definiendo la función  $u(t)$  en términos de la función escalón unitario, se construye la función la función  $i(t)$  en términos de  $u(t)$  en un periodo  $T = 1$ , se define la función  $g(t)$  equivalente a  $i(t)$  con periodo  $2\pi$  (ampliación) esto se logra evaluando  $i(t/2\pi)$ .

Con el comando **FourierTrigSeries** se calcula la STF hasta  $n = 10$  de  $g(t)$  (con periodo  $2\pi$ ) denotada con  $h(t)$ . Finalmente, se comprime la serie  $h(t)$  al periodo de  $i(t)$   $T = 1$ , esto se logra evaluando  $h(2\pi t)$ , y se obtiene la STF de  $i(t)$  denotada con  $l(t)$ . Con el último comando se plotea  $i(t)$  en  $-1/2 < t < 1/2$  (línea punteada) y su serie en  $-1.5 < t < 1.5$  (línea continua).



### Calculo de la STF con Python y Gnuplot

Los coeficientes de la STF de  $i(t)$  se pueden calcular con integración numérica usando algún programa de computo. Al final se presenta un programa en Python y Gnuplot, para calcular  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y  $c_n = (c_n/c_1) \times 100\%$  (valor de  $c_n$  en % respecto a la fundamental) y para graficar la serie y el espectro de amplitud (amplitud de  $c_n$  en función de  $n$ )

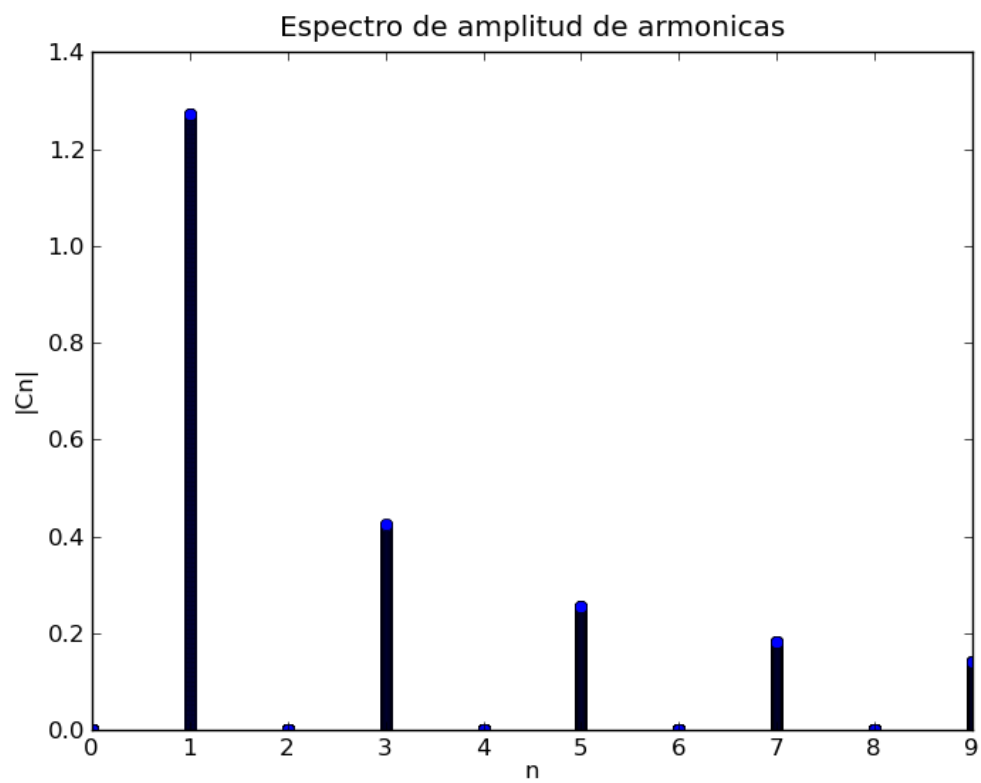
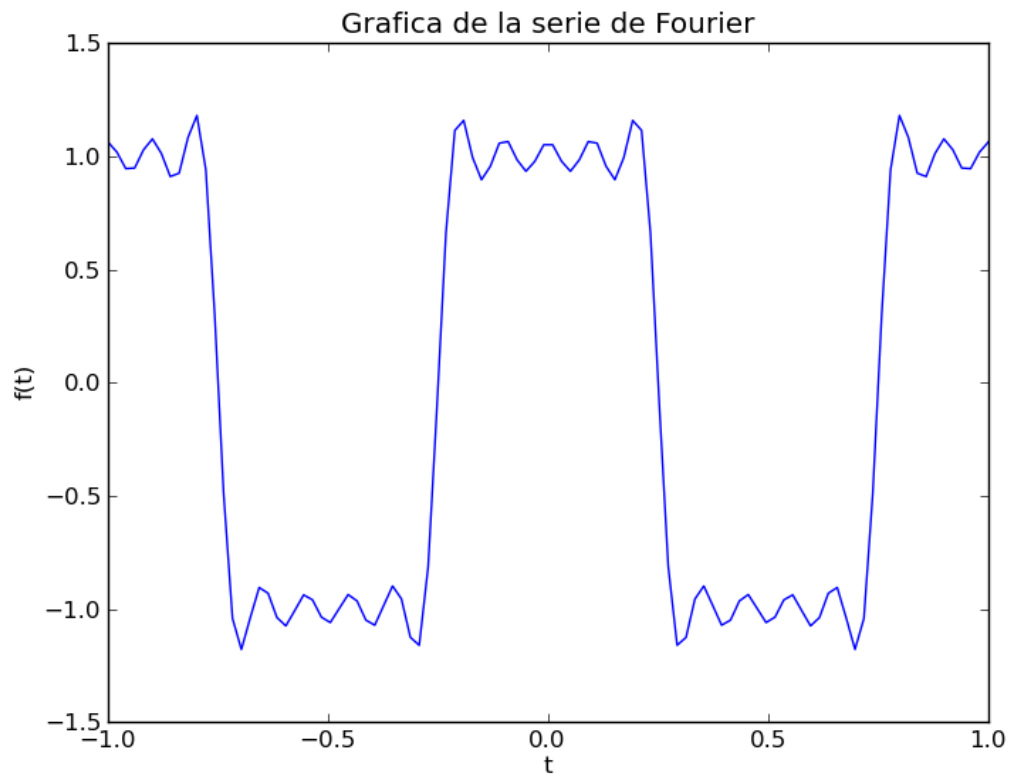
Tomando  $I = T = 1$ , en esencia, el programa calcula las integrales de coeficientes en cada uno de los tres intervalos sobre el periodo, y luego suma dichos valores de cada armónico para obtener los valores de los coeficientes de la serie.

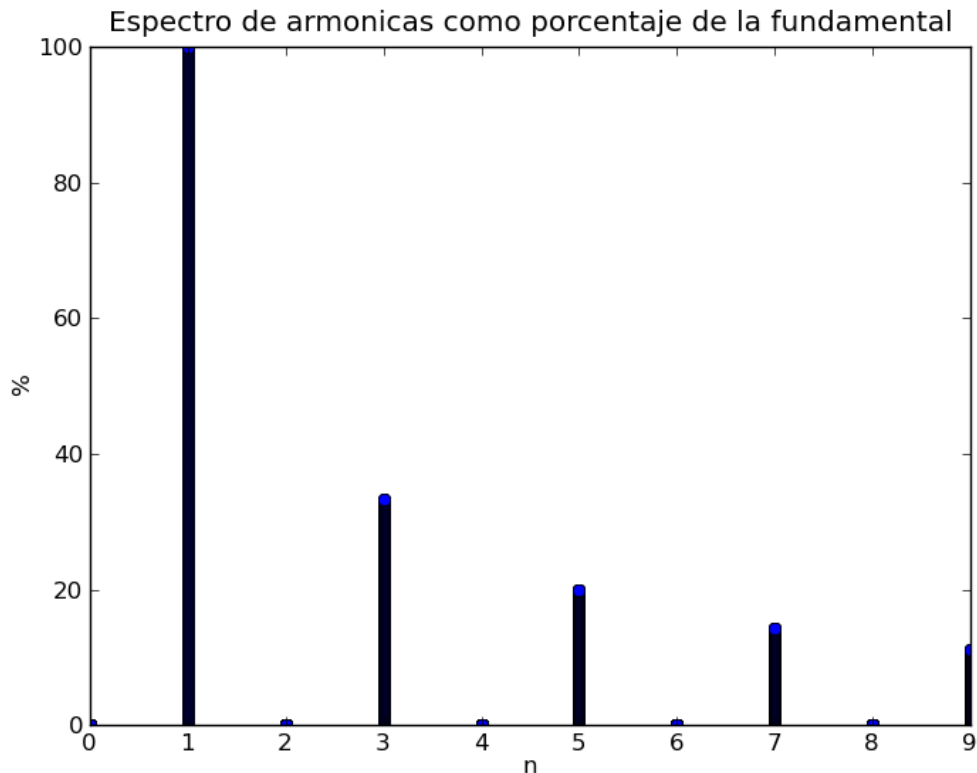
Valores de  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  y  $c_n$  en porcentaje calculados son

-----				
n	a	b	c	Porcentaje de la fundamental
0	0.000	0.000	0.000	0
1	1.273	0.000	1.273	100
2	0.000	0.000	0.000	0
3	-0.424	-0.000	0.424	33
4	0.000	-0.000	0.000	0
5	0.255	0.000	0.255	20
6	0.000	0.000	0.000	0
7	-0.182	-0.000	0.182	14
8	0.000	-0.000	0.000	0
9	0.142	0.000	0.142	11
-----				

En la practica los ingenieros a menudo solo necesitan conocer el porcentaje de la amplitud de cada armónico respecto a la componente fundamental, o solamente identificar la armonica mas fuerte y su porcentaje. Por ejemplo, la tercera armónica es  $100\%|c_1/c_3| = 33\%$  de la fundamental, esta es la más fuerte, la quinta armónica es  $100\%|c_1/c_5| = 20\%$  de la fundamental es la segunda más fuerte, las armónicas pares son cero, etc.

Las graficas se muestran a continuación,





### Programa en Python y Gnuplot

```
# -*- coding: cp1252 -*-
# Programa para calcular coeficientes y dibujar la serie de,
# un tren de pulsos rectangulares
# i(t) = 1 para 0 < t < 1/4, -1 para 1/4 < t < 3/4 y
# 1 para 3/4 < t < 1

from math import*
a = 0; b = 1;
T = b - a
mM = 10 # número de armónicos deseados
print 'Coeficientes'
print '-----'
print '
Porcentaje'
print ' n      a      b      c      de la fundamental '

# subprograma para calcular las integrales de an y bn, con i(t) = 1,
# para 0 < t < 1/4
A1 = []
B1 = []
for m in range(mM):
    n = 10000
    def aco(t):
        return (2/float(T))*(1)*cos(2*pi*m*t/T)
    def bse(t):
        return (2/float(T))*(1)*sin(2*pi*m*t/T)
    an1 = 0; bn1 = 0
    h = 1/(4*float(n))
    for k in range(n + 1):
        an1 += aco((2*k + 1)*h/2)*h
        bn1 += bse((2*k + 1)*h/2)*h
    A1.append(an1)
    B1.append(bn1)
```

```
# subprograma para calcular las integrales de an y bn con i(t) = -1,
# para 1/4 < t < 3/4
A2 = []
B2 = []
for m in range(mM):
    n = 10000
    def aco(t):
        return (2/float(T))*(-1)*cos(2*pi*m*t/T)
    def bse(t):
        return (2/float(T))*(-1)*sin(2*pi*m*t/T)
    an2 = 0; bn2 = 0
    h = 1/(2*float(n))
    for k in range(n + 1):
        an2 += aco(1/4.0 + (2*k + 1)*h/2)*h
        bn2 += bse(1/4.0 + (2*k + 1)*h/2)*h
    A2.append(an2)
    B2.append(bn2)

# subprograma para calcular las integrales de an y bn con i(t) = 1
# para 3/4 < t < 1
A3 = []
B3 = []
for m in range(mM):
    n = 10000
    def aco(t):
        return (2/float(T))*(1)*cos(2*pi*m*t/T)
    def bse(t):
        return (2/float(T))*(1)*sin(2*pi*m*t/T)
    an3 = 0; bn3 = 0
    h = 1/(4*float(n))
    for k in range(n + 1):
        an3 += aco(3/4.0 + (2*k + 1)*h/2)*h
        bn3 += bse(3/4.0 + (2*k + 1)*h/2)*h
    A3.append(an3)
    B3.append(bn3)

# calculo de an y bn sumando los valores de cada integral
AC = []
BS = []
CN = []
CP = []
for k in range(mM):
    A = A1[k] + A2[k] + A3[k]
    B = B1[k] + B2[k] + B3[k]
    C = sqrt(A**2 + B**2)
    D = 100*C/sqrt((A1[1] + A2[1] + A3[1])**2 + (B1[1] + B2[1] +
B3[1])**2)
    AC.append(A)
    BS.append(B)
    CN.append(C)
    CP.append(D)
    print ' %2d %6.3f %6.3f %6.3f %5d' %(k, A, B, C, D)
print '-----'

# Subprograma para graficar la serie
from math import*
suma = 0
for k in range(mM):
    def S(t):
        return AC[k]*cos(2*pi*k*t/T) + BS[k]*sin(2*pi*k*t/T)
```

```
from pylab import*
t = linspace(-1, 1, 100)
suma += S(t)
y = suma - AC[0]/2
plot(t, y)
title('Grafica de la serie de Fourier')
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
show()
```

# Subprograma para graficar el espectro

```
for k in range(mM):
    def ax(s):
        return k + 0*s
    def ay(s):
        return s*sqrt(AC[k]**2 + BS[k]**2)
    from pylab import*
    s = linspace(0, 1, 1000)
    u = ax(s); v = abs(ay(s))
    plot(u, v, 'bo')
xlabel('n'); ylabel('|Cn|')
title('Espectro de amplitud de armonicas')
show()
```

# Subprograma para graficar el espectro en porcentaje

```
for k in range(mM):
    def ax(s):
        return k + 0*s
    def ay(s):
        return 100*s*sqrt(AC[k]**2 + BS[k]**2)/sqrt(AC[1]**2 +
BS[1]**2)
    from pylab import*
    s = linspace(0, 1, 1000)
    u = ax(s); v = abs(ay(s))
    plot(u, v, 'bo')
xlabel('n'); ylabel('%')
title('Espectro de armonicas como porcentaje de la fundamental')
show()
```

### Bibliografía

1. **Arrillaga, Jos, Watson, N.** (2003) *Power system harmonics*. Wiley.
2. **Blanchman, N.** (1992) *Matemática; A practical approach*, Prentice Hall.
3. **Duffy, D.** (2003) *Advanced engineering mathematics*, CRC Press.
4. **Edminister, J.** (1970) *Circuitos eléctricos*, McGraw-Hill.
5. **Langtangen, H.** (2009) *A primer on Scientific programming with Python*, Springer.
6. **Necati özişik, M.** (1979) *Transferencia de calor*. McGraw Hill.
7. **Van Valkenburg, M.** (1980) *Análisis de redes*, Limusa.
8. <http://demonstrations.wolfram.com/> (visitado enero 2011)

### 1. [The Fast Fourier Transform Algorithm \(FFT\)](#)

[www.lsi.upc.edu/~iea/transpas/fft\\_web/index.htm](http://www.lsi.upc.edu/~iea/transpas/fft_web/index.htm)