第四节 一阶线性微分方程

关于未知函数及其导数都是一次的一阶微分方程，叫做一阶线性微分方程.

线性的含义：此方程中y’,y项的系数都是只关于x的函数，而不会出现关于 y’,y的交叉项,也不会出现y’,y的高次幂项.

判断下列方程是否一阶的线性微分方程?

(1) $y' = xy - \tan x$

(2) $yy' + xy = 1$

(3) $y' = xy^2 - \tan x$

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

当$Q(x) \equiv 0$, 称为**一阶线性齐次微分方程**.

当$Q(x) \not\equiv 0$, 称为**一阶线性非齐次微分方程**.

一阶线性微分方程的**解法**

1.齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx, \qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$$

$$|y|=e^{-\int P(x)dx}|C|.$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

2. 非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

讨论 $\because \frac{dy}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]dx,$

两边积分 $\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y(x)}dx-\int P(x)dx,$

设 $\int\frac{Q(x)}{y(x)}dx$为$v(x)$, $\therefore \ln|y|=v(x)-\int P(x)dx,$

即 $y=\pm e^{v(x)}e^{-\int P(x)dx}$ 原方程方程通解形式

与齐次线性方程通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$相比: $C\Rightarrow u(x)$

常数变易法

把齐次线性方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

$$C \Rightarrow u(x)$$

设非齐次方程的通解为

$$y = \underline{u(x)}e^{-\int P(x)dx}$$

代入非齐次线性微分方程，确定 $u(x)$

从而得到原方程的解.

例1 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$

解法一:**常数变易法**

(1)先求对应齐次方程的通解 由 $\frac{dy}{dx}+2xy=0$

得 $y=Ce^{-x^2}$

(2)常数变易法

设原方程通解为 $y=u(x)e^{-x^2}$

$$u'(x)e^{-x^2}+u(x)(-2x)e^{-x^2}+2xu(x)e^{-x^2}=4x$$

$$u'(x)=4xe^{x^2} \quad u(x)=2e^{x^2}+C$$

通解为 $y=e^{-x^2}\left[2e^{x^2}+C\right]=2+Ce^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$$

对应齐次方程通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

公式法

设非齐次方程的通解为

$$y=\underline{u(x)}e^{-\int P(x)dx}$$

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$$

$$\boxed{y=u(x)e^{-\int P(x)dx}}$$

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)\ ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),\quad u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C,$

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$$

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$= \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$

解法二：公式法 $P(x)=2x, Q(x)=4x$

通解为

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\left[\int 4xe^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-x^2}\left[\int 4x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-x^2}\left[2e^{x^2}+C\right]$$

$$=2+Ce^{-x^2}$$

注 公式法中的不定积分不产生任意常数.

练习 求微分方程 $y'\cos x + y\sin x = 1$ 的通解.

解 将方程变形,得 $y' + y\tan x = \sec x$,

$P(x) = \tan x$, $Q(x) = \sec x$,

$$y = e^{-\int \tan x\,dx}\left[\int \sec x\, e^{\int \tan x\,dx} dx + C\right]$$

$$= e^{\ln(\cos x)}[\int \sec x \; e^{-\ln(\cos x)} dx + C]$$

$$= \cos x[\int \sec^2 x\,dx + C]$$

$$= \cos x[\tan x + C] \;\; = \sin x + C\cos x$$

例2 求方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解 $P(x)=\frac{1}{x}, \qquad Q(x)=\frac{\sin x}{x},$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln x}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int\sin x dx+C\right) \;=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right).$$

用公式法解一阶非齐次线性方程的通解时，由于公式的特点，指数部分积分结果中ln函数可以不带绝对值符号.

例3 求特解 $\begin{cases}(x+y+xy)dx-x(x+1)dy=0\\ y\big|_{x=1}=-\ln 2\end{cases}$

解

将方程变形，得 $y'-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x+1}$，

$$P(x)=-\frac{1}{x},\ Q(x)=\frac{1}{x+1},$$

$$y=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{1}{x+1}e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\ln x}[\int\frac{1}{x+1}e^{-\ln x}dx+C]$$

$$y = x\left[\int \frac{1}{x(x+1)}dx + C\right]$$

$$= x\left[\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx + C\right]$$

$$= x\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C\right]$$

将 $x = 1, y = -\ln 2$ 代入上式，得 $C = 0,$

$\therefore$ 所求特解为 $y = x\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$.

一阶线性微分方程的形式2

与齐次方程类似，如果变换x, y的地位，那么可以得到一阶线性微分方程的另一种形式。

如果一个微分方程能化为

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y).$$

的形式，那么它也是一阶线性方程，只要把x看作未知函数，y看成自变量即可.

由公式法

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right]$$

补例 求通解 $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

解

将方程变形，得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$,

将 x 看作 y 的函数，方程改写为

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y,$$

即 $x' - x\cos y = \sin 2y$,

$$P(y) = -\cos y, \quad Q(y) = \sin 2y,$$

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right]$$

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right]$$

$$= e^{-\int -\cos y\,dy}\left[\int \sin 2y\, e^{\int -\cos y\,dy}dy + C\right]$$

$$= e^{\sin y}[\int 2\sin y\cos y\, e^{-\sin y}dy + C]$$

$$= e^{\sin y}[-2\int \sin y \quad d(e^{-\sin y}) + C]$$

$$= e^{\sin y}[-2\sin y e^{-\sin y} + 2\int e^{-\sin y}d\sin y + C]$$

$$= -2(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}$$

$\therefore$ 原方程通解为 $x = -2(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}$.

小结

1.齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx};$$

2. 非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

(1) 公式 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C];$

(2)令 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 用常数变易法求解.

二、通过变量替换解决非标准形式的方程的求解问题

有些一阶微分方程不是标准型微分方程，但是通过适当的变量替换可以达到这个目的.

例1.　求下述微分方程的通解：

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解：　令 $u = x - y + 1,$ 则

$$u' = 1 - y'$$

故有　$1 - u' = \sin^2 u$　$\boldsymbol{\frac{du}{dx} = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u}$

即　$\sec^2 u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

解得　$\tan u = x + C$

所求通解：$\tan(x - y + 1) = x + C$　（ $\boldsymbol{C}$ 为任意常数 ）

#P318

一般的，对于形如 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{dx} = f(ax+by+c)$

的微分方程，我们可以通过做变量替换

$$u = ax + by + c$$

将方程化为可分离变量的微分方程.

P321 7(1)(2)

例2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$;

解　令 $z=xy$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得 $2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回,

所求通解为 $2xy-\sin(2xy)=4x+C$.

思考 P321 7 (3)

思考 $$2xyy' + y^2 = xe^{-x^2};$$

其他特殊方法？

作业

P320　1 (3) , (9) ;　　2 (3), (4) ;

7 (1), (3) ;　8 (4) （选做）

*三、伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

当$n=0,1$时，方程为**线性微分方程.**

当$n\neq 0,1$时，方程为**非线性微分方程.**

解法: 需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令$z=y^{1-n}$, 则 $\frac{dz}{dx}=(1-n)\boxed{y^{-n}\frac{dy}{dx}}$,

代入上式 $\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$,

即 $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

$\therefore y^{1-n}=z$

$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C)$.

例1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解：令 $z=y^{-1}$,则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$代入，得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

-例 2 求方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^2 \sqrt{y}$ 的通解.

解 两端除以y^n，得 $\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x^2,$

令 $z = \sqrt{y},$ $2\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x} z = x^2,$

解得 $z = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right),$ 即 $y = x^4 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2.$

小结

伯努利方程 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

令$z=y^{1-n}$ 化为线性方程求解.

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x),$$

伯努利(1654 – 1705)

(雅各布第一 ·伯努利)

瑞士数学家, 1694年他首次给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式, 1695年年提出了著名的伯努利方程, 1713年出版了他的巨著《猜度术》,这是组合数学与概率论史上的一件大事, 书中给出的伯努利数在很多地方有用,而伯努利定理则是大数定律的最早形式.

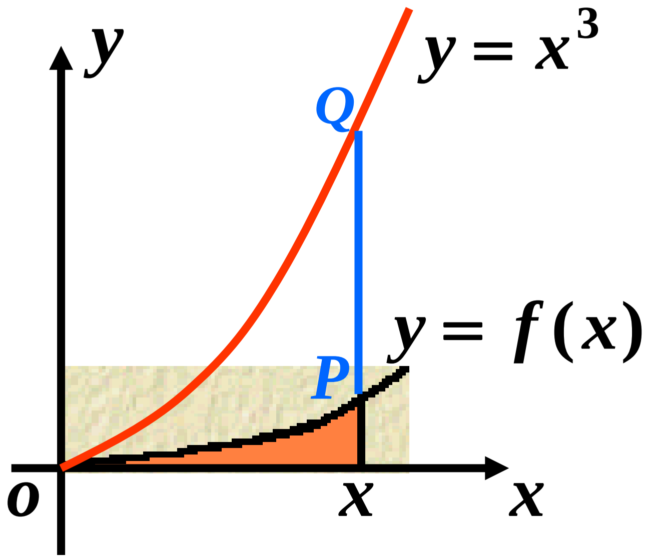
伯努利家族祖孙三代出过十多位数学家，这在数学史上绝无仅有。

补充练习

例5 如图所示，平行于 y轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与$y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线$f(x)$.

解 $\int_0^x f(x)dx = x^3 - f(x),$

$$\int_0^x y dx = x^3 - y,$$



两边求导得 $y = 3x^2 - y',$

解此微分方程

$$y' + y = 3x^2$$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right]$$

$$= \ldots \quad (\text{分部积分法})$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0,$ 得 $C = -6,$

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x).$

此例表明，对于某些积分方程(包含未知函数积分的方程)，可以通过两端求导的方式化为微分方程求解.

注意积分式子中所隐含的初始条件.

其他特殊方法

思考 $2xyy' + y^2 = xe^{-x^2};$

解 $$(xy^2)'_x = xe^{-x^2},$$

$$xy^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

所求通解为 $xy^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$