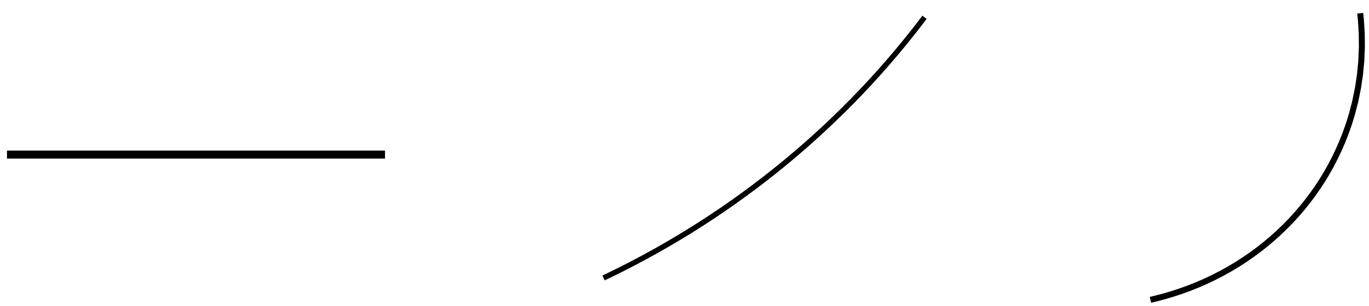
第七节 平面曲线的曲率

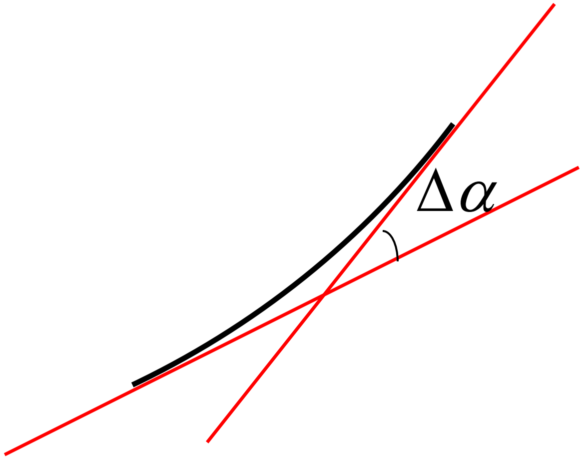
一　问题的提出

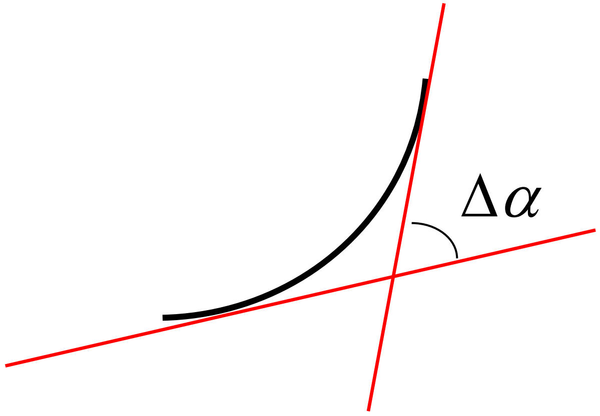
我们直觉认识到：直线不弯曲，曲线有不同的弯曲程度；



二 曲率的定义

曲率是描述曲线弯曲程度（局部性质）的量.





弧长相同，弧段弯曲程度越大, 切线转角越大

问题： 怎样刻画曲线的弯曲程度？

提示： 可以用单位弧段上切线转过的角度的大小来表达弧段的平均弯曲程度.

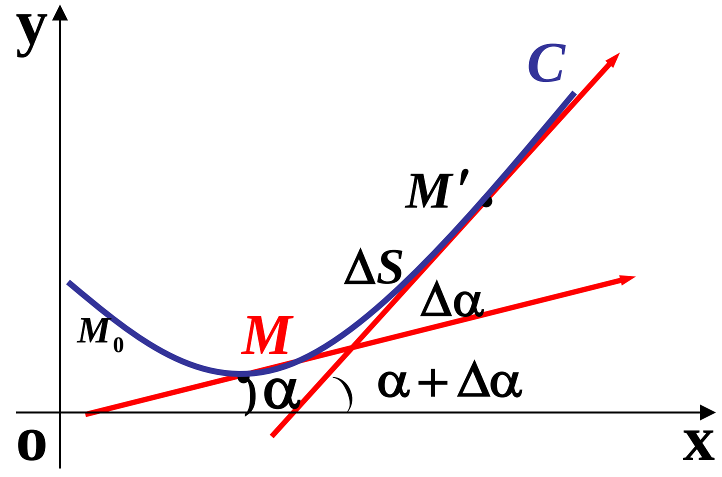
$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

二、某一点处的曲率及其计算公式

设曲线C是光滑的，

M是基点. $|\overset{\frown}{MM'}| = |\Delta s|$,

$M \to M'$ 切线转角为$|\Delta\alpha|$.



定义

弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率为 $\bar{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.

曲线C在点M处的曲率 $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

在$\lim\limits_{\Delta s \to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \dfrac{d\alpha}{ds}$存在的条件下，$K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$.

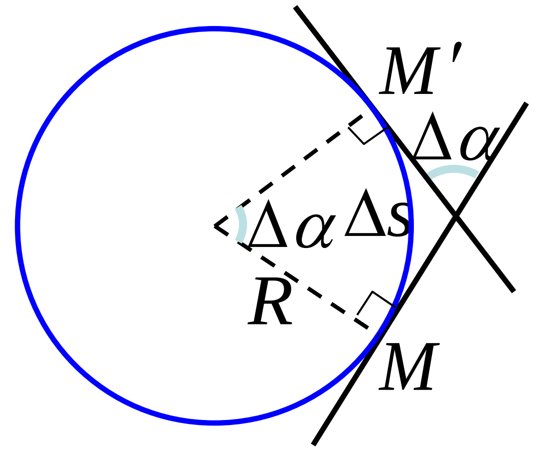
例1 求直线的曲率

$$\Delta\alpha = 0, K = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = 0$$

直线的曲率处处为0

例2. 求半径为R 的圆上任意点处的曲率 .

解: 如图所示 ,



$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore \quad K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$$

可见: R 愈小, 则K 愈大 , 圆弧弯曲得愈厉害 ;

三 曲率的计算公式

如何求一般曲线$y=f(x)$上某一点处的曲率？

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

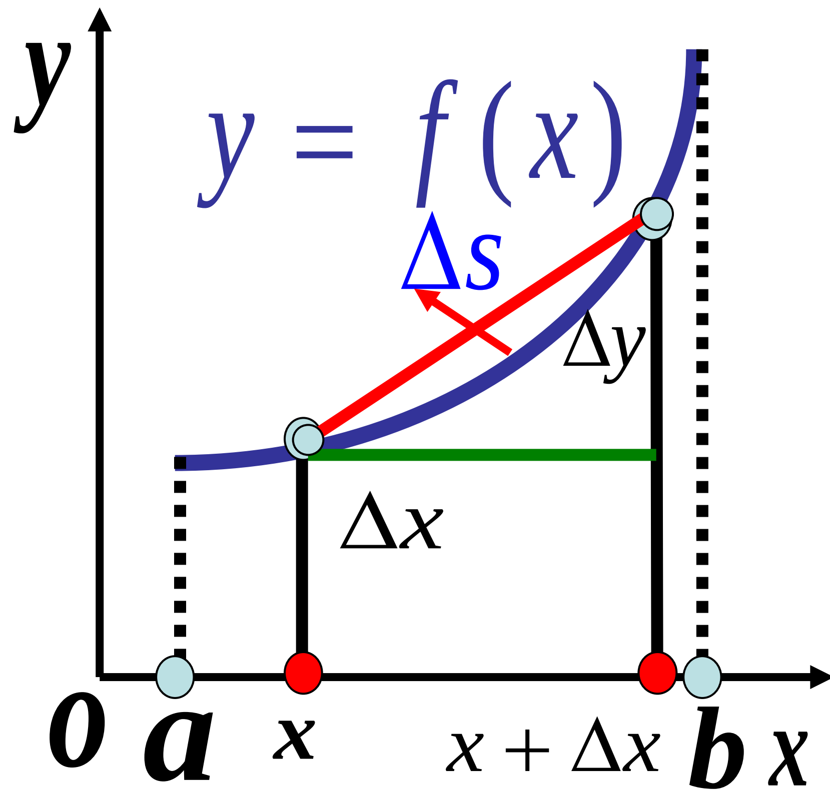
弧长微分

从点(x,y)

到$(x+\Delta x, y+\Delta y)$

的小段弧长记为Δs,

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$



$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

弧长微分公式

如何求一般曲线$y=f(x)$上某一点处的曲率？

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

设曲线弧 $y=f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan\alpha=y' \quad (\text{设} -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

得 $$\alpha=\arctan y'$$

$$\mathrm{d}\alpha=(\arctan y')'\,\mathrm{d}x=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

又 $$\mathrm{d}s=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

故曲率计算公式为

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\left|\frac{\frac{y''}{1+y'^2}dx}{\sqrt{1+y'^2}\,dx}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

例3 计算等边双曲线$xy=1$在点(1, 1)处的曲率.

$$\boxed{K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$

解 由 $y=\dfrac{1}{x}$，得

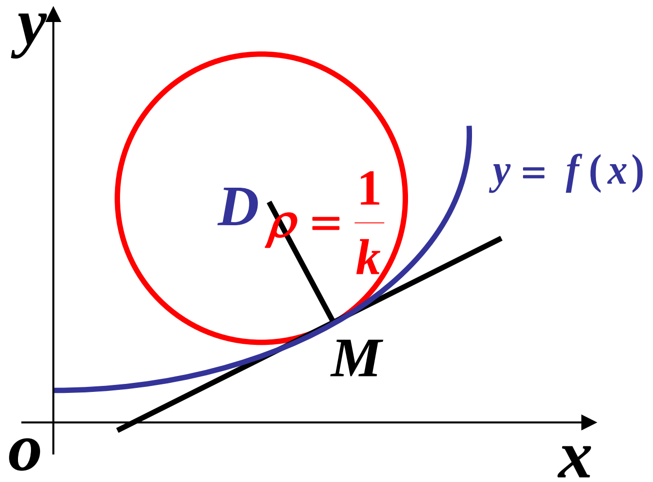
$$y'=-\frac{1}{x^2},\quad y''=\frac{2}{x^3}.$$

因此$y'|_{x=1}=-1$, $y''|_{x=1}=2$. 曲线在点(1, 1)处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{x=1}=\frac{2}{(1+(-1)^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

四　曲率圆与曲率半径

定义 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $k(k \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D, 使 $|DM| = \dfrac{1}{k} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径



作圆(如图),称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.

D ---曲率中心,　ρ ---曲率半径.

注意:

曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

即 $\rho = \dfrac{1}{k}$.