泰勒（Taylor)公式

一、问题的提出

二、问题的解决

三、与泰勒公式相关的概念

四、泰勒公式的简单应用

一、问题的提出

多项式在数值计算和理论分析等方面非常方便，
是研究函数性质的重要工具.

在研究某些函数时，常常希望将它们表示为一个多项式.

例如, 计算$e^{0.3}$.

例如 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

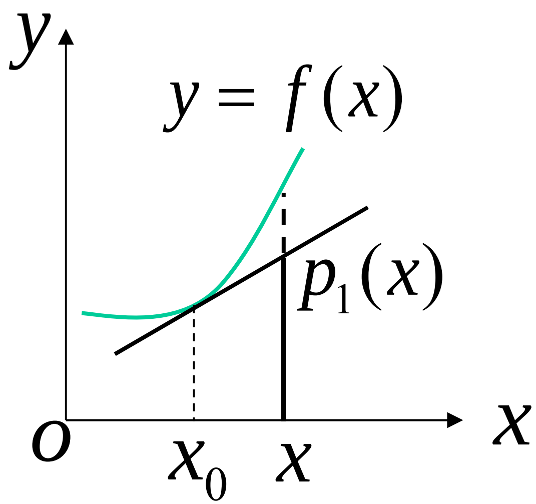
$$= \underline{a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n} + R_n(x)$$

回顾

在微分应用中已知近似公式 ：

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



以直代曲

特点： $p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

上述例子中，将函数用简单的一次多项式函数近似的表示，这是一个进步.它能帮助我们研究某一些复杂函数的性质.

当然，这种近似还比较粗糙，

尤其是当$|x|$较大时.

二、问题的解决

上述近似表达式至少可在下述两个方面进行改进：

1、提高近似程度, 可能的途径是提高多项式的次数。

2、求出误差, 以免“使用不安”

希望在$x = x_0$附近 $p_n(x) \approx f(x)$

分析:

近似程度越来越好

1.若在 x_0 点相交

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

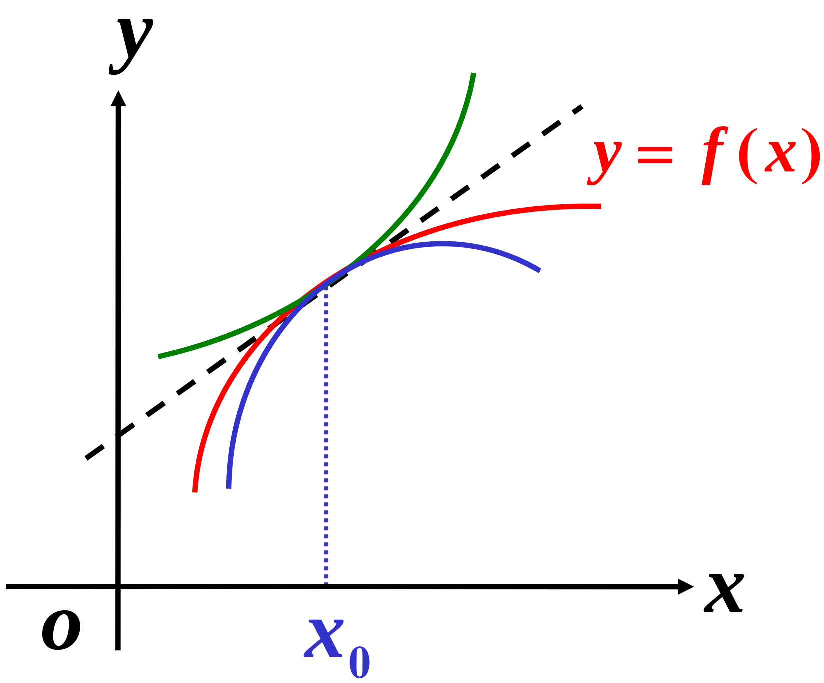
2.若有相同的切线

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

3.若弯曲方向相同

$$P_n''(x_0) = f''(x_0)$$

…… ……



【问题一】

设$f(x)$在x_0的开区间内具有直到$n+1$阶的导数，

能否找到一个关于$(x-x_0)$的多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

近似等于$f(x)$?

【解决问题一】

令 $p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0) \quad (k=0,1,\cdots,n)$

确定多项式的系数a_0，a_1，a_2,$\cdots$，a_n

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

$\because p_n(x_0)=a_0 \qquad p_n(x_0)=f(x_0) \qquad \therefore a_0=f(x_0)$

$$p_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1} \qquad (2)$$

$\because p_n{}'(x_0)=a_1 \qquad p_n{}'(x_0)=f'(x_0) \qquad \therefore a_1=f'(x_0)$

$$p_n''(x)=2\cdot1\cdot a_2+3\cdot2\cdot a_3\cdot(x-x_0)+4\cdot3\cdot a_4\cdot(x-x_0)^2+$$
$$+\cdots+n\cdot(n-1)\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-2}$$

$\because p''_n(x_0)=2\cdot1\cdot a_2 \qquad p''_n(x_0)=f''(x_0) \qquad \therefore a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2!}$

一般地,有

$$p_n^{(k)}(x_0)=k(k-1)(k-2)\cdots2\cdot1\cdot a_k=f^{(k)}(x_0)$$

$$\boxed{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k = p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

从 而 , 得 到 系 数 计 算 公 式 :

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \qquad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$\cdots\ \cdots$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

所求多项式为

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

【问题一已解决】

设$f(x)$在x_0的开区间内具有直到$n+1$阶的导数，

若$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$

则多项式为

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

【问题二】

$p_n(x)$与$f(x)$近似程度如何？

其误差表达式$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$如何求？

【解决问题二】

令 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$(称为余项)， 则有

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\quad(\xi_1\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\quad(\xi_2\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间})$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n-x_0)-0}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ 在 x_0 与 [redacted] 之间)

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (\xi\text{在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because p_n^{(n+1)}(x) = 0, \quad R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})}$$

拉格朗日余项

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

当在 x_0 的某邻域内 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$ 时

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

$$\boxed{\therefore\ R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0)}$$

佩亚诺(**Peano**)余项

【问题二已解决】

设$f(x)$在x_0的开区间内具有直到$n+1$阶的导数，

若$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$

则余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

拉格朗日余项

或

$$\therefore\ R_n(x)=o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0)$$

佩亚诺余项

三、与泰勒公式相关的概念

泰勒中值定理：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间） ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 $\boldsymbol{n}$ 阶泰勒公式 .

公式 ② 称为 $\boldsymbol{n}$ 阶泰勒公式的拉格朗日余项 .

注意到 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为**n** 阶泰勒公式的佩亚诺**(Peano)** 余项 **.**

* 可以证明**:**

$f(x)$ 在点 x_0 有直到 n 阶的导数

$\Longrightarrow$ ④ 式成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

特例:

当 $\boldsymbol{n = 0}$ 时, 泰勒公式变为　拉格朗日中值定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

在泰勒公式中若取 $x_0=0, \xi=\theta x\ (0<\theta<1)$，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为麦克劳林（ **Maclaurin** ）公式 .

由此得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

四、泰勒公式的简单应用

例 1　求 $f(x)=e^x$ 的带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解　$\because$　$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$

$\therefore$　$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$　代入公式,得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

常用函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m-1})$$

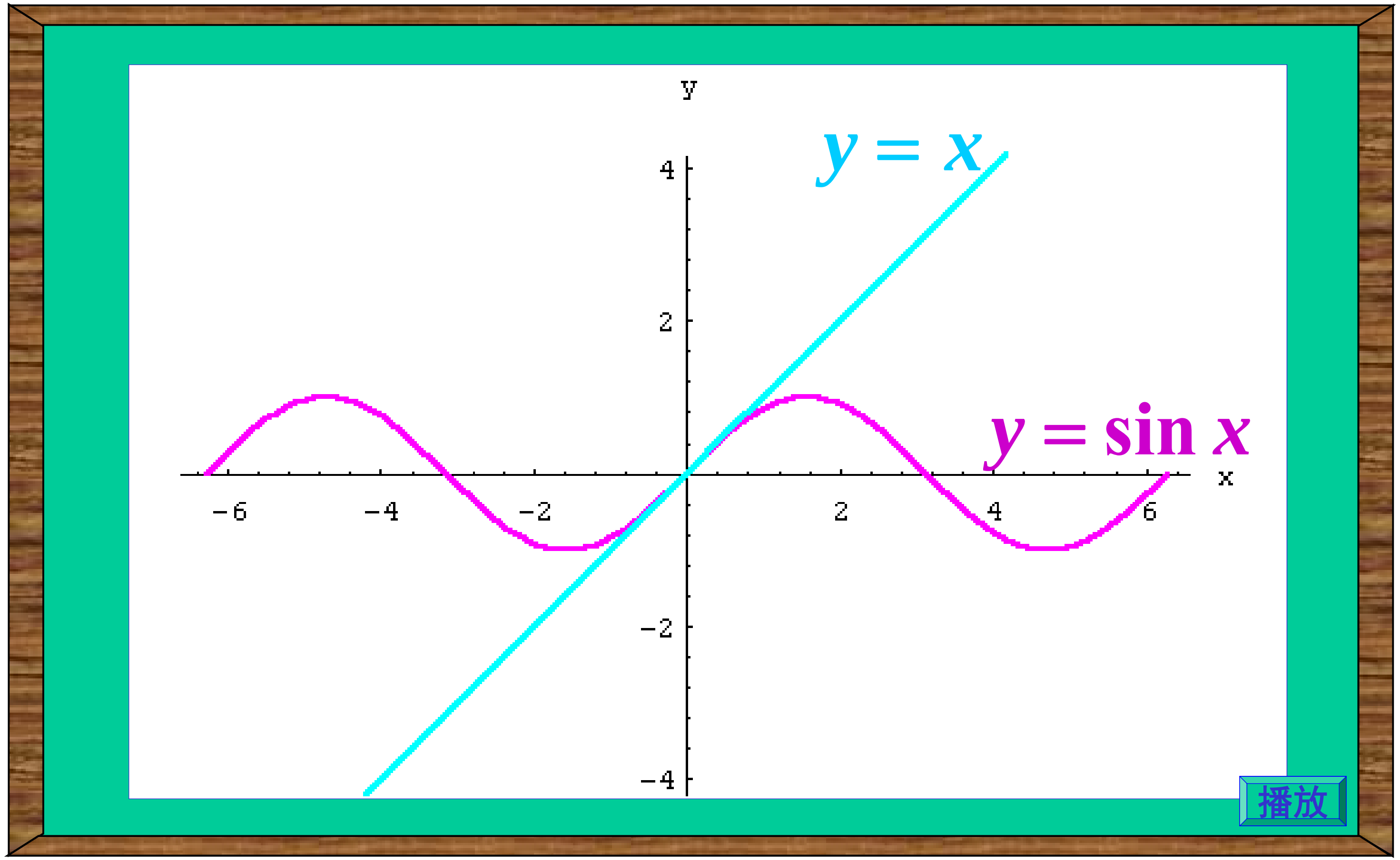
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

泰勒公式在近似计算中的作用



补例2 在函数$f(x)= x^4-5x^3+x^2-3x+4x$

按$(x-4)$的幂展开的$n(n>2)$阶泰勒公式中，

$(x-4)^3$的系数为

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$a_3=\frac{f^{(3)}(4)}{3!}=\frac{24*4-30}{3!}=11$$

$$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$$

$$f''(x)=12x^2-30x+2$$

$$f'''(x)=24x-30$$

作业

写出函数$y=\sin x$的带有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

泰勒公式应用举例

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 $\because$ $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$\therefore$ $e^{x^2}+2\cos x-3=(\dfrac{1}{2!}+2\cdot\dfrac{1}{4!})x^4+o(x^4)$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

例2　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$

解法一　洛必达法则

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}\quad=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos^2 x(-\sin x)}{6x}\quad=\frac{1}{2}$$

*例2 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x}$

解法二 麦克劳林公式

解 由 $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

故 $\tan x - \sin x = (\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6})x^3 + o(x^3)$

原式= $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

利用泰勒公式可以证明不等式

***例3.** 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0).$

证: $\because \sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2\,!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+\frac{1}{3\,!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

***备用题 1.**设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(\frac{1}{2})=0$，证明$(0,1)$内至少存在一点ξ，使$|f'''(\xi)|\geq 24$.

证： 由题设对 $x\in[0,1]$，有

$$f(x)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

$$=f(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

(其中ζ在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1$，得

$$= f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3$$

$$+ \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3$$

下式减上式，得

$$1 = \frac{1}{48}\left[\ f'''(\zeta_2) + f'''(\zeta_1)\ \right] \le \frac{1}{48}\left[\ \left|f'''(\zeta_2)\right| + \left|f'''(\zeta_1)\right|\ \right]$$

令 $\left|f'''(\xi)\right| = \max\left(\left|f'''(\zeta_2)\right|, \left|f'''(\zeta_1)\right|\right)$

$$\le \frac{1}{24}\left|f'''(\xi)\right| \qquad (0 < \xi < 1)$$

$$\Longrightarrow \left|f'''(\xi)\right| \ge 24$$

***2. 证明 *e* 为无理数 .**

证: $$e = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)\,!} \quad (0 < \theta < 1)$$

$\big\downarrow$ 两边同乘 ***n*** **!**

$$n!e = 整数 + \frac{e^{\theta}}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设 ***e*** 为有理数 $\frac{p}{q}$ **(*p* , *q*** 为正整数**)** ,

则当 $n \ge q$ 时， 等式左边为整数;

当 $n \ge 2$ 时，等式右边不可能为整数.

矛盾！ 故 ***e*** 为无理数 .

*例 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则不方便！

解：用泰勒公式将分子展到 x^2 项，由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$