# 第四章　习题课

## 不定积分

# 一　基本要求

1.理解原函数与不定积分的概念和性质,明确不定积分法是微分法的逆运算.

2.熟记不定积分的基本公式表并熟练掌握.

3.积分法

1)直接积分法:通过恒等变形化为基本积分法　　积分公式中的形式.

2)换元积分法:第一类(凑微分法);第二类(三角 代换;倒代换;根代换等).

3)分部积分法:

# 二 例题解析

第一类换元法又称“凑微分法”

适用于：不定积分可以化成$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$时，可将被积函数中的一部分送入微分中，

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x),$$

再利用基本积分表来求积分.

常用凑微分形式如下:

$$dx=\frac{1}{a}d\left(ax+b\right);$$

$$x^m dx=\frac{d\left(ax^{m+1}+b\right)}{\left(m+1\right)a};\frac{1}{x^2}dx=-d\frac{1}{x};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\sqrt{x};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\arcsin x;$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d\arctan x;$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\tan x;$$

$$e^x dx = de^x;$$

$$\frac{dx}{x} = d\ln x;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x) + c.$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=d\sqrt{x^2+1};\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}=d\sqrt{x^2-1};$$

$$-\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=d\frac{1}{x^2+1};-\frac{2xdx}{(x^2-1)^2}=d\frac{1}{x^2-1};$$

第二类换元法是通过"变量代换"来计算不定积分的方法

一般有下列三种代换法：

(1)三角代换

当被积函数中含有$\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$时，可考虑用三角代换

一般地为了简便,换回原变量时往往引入直角三角形,利用锐角三角函数的定义来确定计算结果中的三角函数值.

## (2)根式代换

当被积函数中出现一次根式时，可以用根式代换消除根式.

## (3)倒代换

被积函数为$x$的有理式或无理式时，可试用倒代换，有可能使积分变得容易.

## 分部积分法的积分公式

适用于被积函数是两种不同类型的函数的乘积的积分

**(1)简单情形：**

有时候，分部积分要通过产生”循环等式”来得出积分结果。

为了得出”循环等式”，在第二次使用分部积分时，用于凑微分的函数类型应该与第一次的一致，否则将返回原来的形式.

## (2)一般情形：

通过对被积函数进行凑微分，或变量代换等，再用分部积分法.

**1.求不定积分**

1）$\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$　　　2）$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

3）$\int \frac{dx}{1+\tan x}$

解1）$\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx-\int \frac{1}{x^2}\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$

$$=\int x^{\frac{3}{4}}dx-\int x^{\frac{-4}{5}}dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$$

$$2)\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\tan x-\cot x+c$$

$$3)\int\frac{dx}{1+\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\int\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}\right]=\frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$

**2.求不定积分**

$$1)\int \frac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}dx; \qquad 2)\int \frac{xdx}{2+x^4}; \qquad 3)\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx;$$

$$4)\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)x}}dx; \qquad 5)\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$$

解1)原式 $= -\int a^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) = -a^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln a}+C.$

2)原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{2+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(x^2\right)^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{2}}+C.$$

$$3)\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}d\left(\sin x\right)=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=\int \frac{d\sin x}{\sqrt{\sin x}}-\int \sin^{\frac{3}{2}} xdx=2\sqrt{\sin x}-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x+C.$$

$$4)\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)x}}=2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}=2\int \arcsin\sqrt{x}\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}$$

$$=2\int \arcsin\sqrt{x}d\arcsin\sqrt{x}=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2+C.$$

$$5)\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\tan^2 x+2}dx$$

$$=\int \frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$$

**3.求不定积分:**

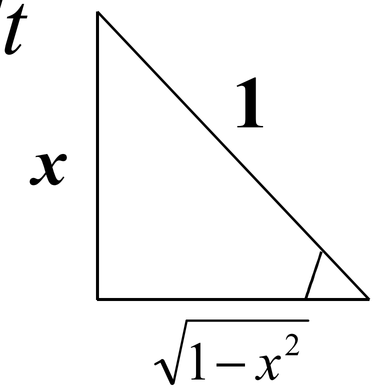
$$1)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}; \qquad 2)\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}.$$

**解 1)三角代换:**

设 $x=\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $dx=\cos t dt.$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t\cdot\cos t}=\int \csc^2 t dt$$

$$=-\cot t+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c.$$



另解:用倒代换,设 $x=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}=\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

$$=\int \frac{d\left(t^2-1\right)}{2\sqrt{t^2-1}}=\sqrt{t^2-1}+c=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c.$$

**2)** 先有理化分母,拆成两个积分,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} = \int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{2e} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x} dx - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x} dx$$

然后分别对两个积分换元,设

$$\sqrt{1+e^x} = u, \sqrt{1-e^x} = v,$$

则 $e^{x}=u^{2}-1, dx=\frac{2u}{u^{2}-1}du,$

$$\int\frac{\sqrt{1+e^{x}}}{e^{x}}dx=\int\frac{2u^{2}}{\left(u^{2}-1\right)^{2}}du=\int ud\left(\frac{-1}{u^{2}-1}\right)$$

$$=\frac{-u}{u^{2}-1}+\int\frac{du}{u^{2}-1}=\frac{-u}{u^{2}-1}+\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}$$

$$=\frac{-\sqrt{1+e^{x}}}{e^{x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}$$

同理

$$\int \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x}dx == \frac{-\sqrt{1-e^x}}{e^x} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}$$

原积分 $=-\frac{1}{2e^x}\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(1-\sqrt{1-e^x}\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(1+\sqrt{1-e^x}\right)}+c.$$

**4.求不定积分:**

$$1)\int \frac{\ln x}{x^{3}}dx; \qquad 2)\int (\arcsin x)^{2}dx;$$

$$3)\int \frac{x^{2}}{1+x^{2}}\arctan x dx; \qquad 4)\int \sin(\ln x)dx$$

解 $1)\int \frac{\ln x}{x_{3}}dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{2x^{2}}\right) = -\frac{1}{2x^{2}} + \int \frac{1}{2x^{3}}dx$

$$= -\frac{1}{2x^{2}} - \frac{1}{4x^{2}} + c.$$

$$2)\int(\arcsin x)^2dx = x(\arcsin x)^2 - \int xd(\arcsin x)^2$$

$$= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}\,d\arcsin x\right)$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + c.$$

2)另解:设$t=\arcsin x$则 $dx=\cos t dt$

$$\int(\arcsin x)^2 dx=\int t^2\cos t dt=\int t^2 d\sin t$$

$$=t^2\sin t-\int\sin t dt^2=t^2\sin t-\int\sin t 2t dt$$

$$=t^2\sin t+2\int t d\cos t=t^2\sin t+2\left(t\cos t-\int\cos t dt\right)$$

$$=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+c$$

$$=t^2\sin t+2t\sqrt{1-\sin^2 t}-2\sin t+c$$

$$=(\arcsin x)^2 x+2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}-2x+c$$

分部积分法可与换元法结合使用.

3)虽然可以先凑微分再用分部积分法，但是如果先恒等变形，计算将会变得简单

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x dx$$

$$= \int \arctan x dx - \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$$

注意运算中综合使用不同方法.

4)

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int xd\sin(\ln x)$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) - \int xd\cos(\ln x)\right]$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int x\sin(\ln x)dx$$

$$\int x\sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$$

注意第二次使用分部积分时,$u$ 与 $v'$的类型必须与第一次选取$u$ 与 $v'$的类型一致,否则将返回原来形式.变得

**5.** 已知$f(x)$的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，

求 $\int xf'(x)dx.$

解 由分部积分公式,有

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= xf(x) - (1+\sin x)\ln x + c.$$

不必先求出被积函数,而用分部积分公式可以简化计算.

求几个简单有理分式的不定积分:

$$1.\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx \qquad 2.\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$1.\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx+\int\frac{3}{x^2+3x+2}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+3x+2\right)}{x^2+3x+2}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+2\right)+\frac{3}{2}\ln\frac{x+1}{x+2}+C$$

$$2.\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

## 三.自测题

### (一)求不定积分:

$$1.\int\frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{\frac{2}{3}}};\qquad 2.\int\frac{dx}{x\left(\ln^2x+1\right)};\qquad 3.\int\frac{1+\sin x}{1+\cos^2x}dx;$$

$$4.\int\sin^3x\cos^5xdx;\qquad 5.\int\frac{dx}{1+e^x};\qquad 6.\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$7.\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx\qquad 8.\int\frac{x^2}{\left(1-x\right)^{100}}dx;\qquad 9.\int\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+3x+1}}dx;$$

$$10.\int\left(x^2+2x+3\right)\cos 2xdx;\qquad 11.\int\arcsin\sqrt{x}dx.$$

(二)已知 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, x \in (0,1),$

试求 $f(x.)$