科学计算

插值法

插值法

实践中常常会遇到这样的问题：

由实验观察到某一个函数$y=f(x)$ 在一系列点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处的值：$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ ，函数的解析表达式是未知的。

x	$x_0(=a)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	$x_n(=b)$
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

如何构造一个简单的函数 $y=P(x)$ 作为函数 $y=f(x)$ 的近似表达式，在数值计算中我们称建立这种近似函数的方法为插值法。

利用多项式函数作为近似函数的插值方法称为代数插值。

三次样条函数插值

在生产和生活实践中，希望所做的插值曲线既要简单，同时在曲线的连接处比较光滑。

在解析上，即要求分段多项式函数的次数低，同时在节点处不仅连续，还存在连续的低阶导数。

我们称满足这些条件的函数为样条插值函数。

样条函数的应用很广：

制造业：汽车、轮船、飞机零部件的手工放大样。

计算机：计算机辅助设计(CAD)、二维、三维图形绘制，地理信息系统、实验数据拟合、动画制作等。

在样条函数中，应用最广的是三次样条函数。

☞定义：设对$y=f(x)$在区间$[a,b]$上给定一组节点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$和相应的函数值$y_0,y_1,\cdots,y_n$，如果$S(x)$具有如下性质：

1. 在每个子区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$上$S(x)$是不高于三次的多项式；
2. $S(x),S'(x),S''(x)$在$[a,b]$上连续；则称$S(x)$为三次样条函数。如再有
3. $S(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，则称$S(x)$为$y=f(x)$的三次样条插值函数。

三次样条插值的存在唯一性和计算方法

设$f(x)$是定义在$[a,b]$区间上的一个具有二阶连续导数的函数，$\triangle$为分划：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

在考虑样条插值问题的时候，首先一个问题就是满足条件的样条函数是否存在？今就此问题讨论如下：

令

$$M_i = S_i''(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

根据三次样条函数的定义，$S(x)$在每一个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \cdots, n)$ 上都是三次多项式，$S''(x)$是一次多项式

所以$S''(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的表达式为：

$$S_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

其中$h_i = x_i - x_{i-1}$，将上式两次积分得：

$$S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + A_i$$

$$\begin{aligned} S_i(x) = \ & M_{i-1}\tfrac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\tfrac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} \\ & + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \end{aligned}$$

其中A_i和B_i为积分常数，因为

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \qquad S_i(x_i) = y_i$$

所以它满足方程:

$$\begin{cases} \frac{M_i}{6}h_i^2 + B_i = y_i \\ \\ \frac{M_{i-1}}{6}h_i^2 - \frac{M_i}{6}h_i^2 - A_i h_i + B_i = y_{i-1} \end{cases}$$

由此解得:

$$\begin{cases} A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \\ \\ B_i = y_i - \frac{M_i}{6}h_i^2 \end{cases}$$

所以

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}$$

$$+(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}))(x - x_i) + y_i$$

$$-\frac{M_i}{6}h_i^2$$

于是，只要知道了诸M_i，$S(x)$的表达式也就完全确定了。由上式得

$$S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}$$

$$+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

而

$$S_{i+1}'(x) = -M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}}$$

$$+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

于是

$$S_i'(x_i) = \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}M_{i-1}$$

$$S_{i+1}'(x_i) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}$$

由 $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ 得

$$h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})M_i + h_{i+1}M_{i+1}$$

$$= 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

各项除以$h_i + h_{i+1}$，并记$\lambda_i = h_i/(h_i + h_{i+1})$，$\mu_i = 1 - \lambda_i$，

$d_i = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)/(h_i + h_{i+1})$，则

$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \ \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$

$n-1$个内点有$n-1$个方程，有$n+1$个未知量M_i。为确定$M_i(i = 0, 1, \cdots, n)$还需加上两个端点条件（边界条件）。

端点条件

端点条件形式很多，这里仅给出常用的两种。

1. （1）给定$M_0 = y_0''$，$M_n = y_n''$补充第一个和最后一个方程。若取$M_0 = M_n = 0$，称为三次自然样条。

2. 给定两端点导数值$S'(x_0) = y_0'$，$S'(x_n) = y_n'$即有

$$S_1'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 = y_0'$$

$$S_n'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n = y_n'$$

那么

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

分别补充为方程组的第一个和最后一个方程组。

解方程组

经补充后的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中，对端点条件（1），有

$$\lambda_0 = 0 \qquad d_0 = 2M_0$$

$$\mu_n = 0 \qquad d_n = 2M_n$$

对端点条件（2），有

$$\lambda_0 = 1 \qquad d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right)$$

$$\mu_n = 1 \qquad d_n = \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

方程组是一个三对角方程组，可用追赶法解之，方程组系数严格对角占优，从而存在唯一解。求出了$M_i (i = 0, 1, \cdots, n)$，也就求得了$S(x)$在各个小区间的表达式$S_i(x) (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$

用Matlab软件包实现三次样条插值

三次样条函数

yy = spline(x,Y,xx)

期中x是严格单调递增的数组，Y是对应的值，xx是待计算的点，yy是返回的xx的函数值，xx可以是数组.

```
x=0:0.1:2*pi;
y=sin(x);
x1=0:0.2:2*pi;
yy=spline(x,y,x1);
plot(x1,yy)
```