如何解方程？

$$y^2dx + x^2dy = xydy$$

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

第三节　齐次方程

某些微分方程可通过适当的变形或变量代换，化为可分离变量的微分方程.齐次方程就是这样一类微分方程

如果一阶微分方程经过变换可以化成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$

的形式，则称这个方程为**齐次方程**．

齐次方程的特征？

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$$

齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$ 的解法—变量代换法

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=xu$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$ $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$

分离变量: $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分，得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例1.　解方程 $y^2 + x^2 \frac{\mathrm{d}y}{dx} = xy\frac{\mathrm{d}y}{dx}$

解：方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1},$$ 令 $u = \frac{y}{x}$，则有 $\boldsymbol{y = xu}$，

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{u}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}},$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1}$$

分离变量得 $(1 - \frac{1}{u})du = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $u - \ln|u| + C_1 = \ln|x|$，即 $\ln|xu| = u + C_1$

代回原变量得通解 $\ln|y| = \frac{y}{x} + C_1$

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$ （C 为任意常数）

练习. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则$\boldsymbol{y' = u + xu'}$,代入原方程得

$$u + xu' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得 $\mathbf{ln}\,|\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{u}\,| = \mathbf{ln}\,|\,\boldsymbol{x}\,| + C_1$,即 $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Cx}$ $(\boldsymbol{C} = \pm \boldsymbol{e}^{C_1})$

故原方程的通解为$\sin\frac{y}{x} = C\,x$（ C 为任意常数 ）

补例. 解方程 $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$

解：方程变形为 $\frac{dx}{dy}=-2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})/(1+2e^{\frac{x}{y}})$

令 $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$，则有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{u}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}$，

$$(u+y\frac{du}{dy})=-2e^{u}(1-u)/(1+2e^{u})$$

分离变量得

$$\frac{1+2e^{u}}{u+2e^{u}}du=-\frac{1}{y}dy$$

积分得

$\ln\left|u+2e^{u}\right|=-\ln|y|+C_1$，即 $y(u+2e^{u})=\pm e^{C_1}=C$

代回原变量得通解 $y(\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}})=C$（$C$ 为任意常数）

此例表明，如果一个微分方程能化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

的形式，那么它也是齐次方程，只要把x看作未知函数，y看成自变量即可.

小结

齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$ 的求解步骤.

(1) 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,①

(2)将①代入原方程得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$ ②

(3)用分离变量法解方程②

(4)在求解结果中用$\frac{y}{x}$代替 u, 便得原方程的通解.

作业

P314 1(1),(4), (6); 3

*思考 如何求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x-y-6}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y+4}{x-y-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+2y+4}{x+y-6}$$

*二、可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\qquad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1\. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$ (h, k 为待定常数), 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$, 解出 h , k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\qquad \text{(齐次方程)}$$

求出其解后，将 $X=x-h,\ Y=y-k$ 代入，即得原方程的解.

2. 当 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$ 时，原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\quad(b\neq 0)$$

令 $v=ax+by$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\,\frac{v+c}{\lambda v+c_1}$$ (可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)\quad(c^2+c_1^2\neq 0)$$

例4. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=5$

令 $x = X+1, y = Y-5$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y=X u$, 得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得

$$\arctan u - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|C X|$$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$, 故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

思考: 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$, 如何求解?

提示: 令 $v=x+y.$