第二章

练习. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$， 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $\boldsymbol{n} = \underline{\quad\mathbf{2}\quad}$.

分析：
$$f(x)=\begin{cases} 4x^3, & x\ge 0 \\ 2x^3, & x<0 \end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 12x^2, & x\ge 0 \\ 6x^2, & x<0 \end{cases}$$

又 $$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x}=0$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x}=0$$

$$f''(x)=\begin{cases} 24x, & x\ge 0 \\ 12x, & x<0 \end{cases}$$

但是 $f'''_-(0)=12$，$f'''_+(0)=24$， $f'''(0)$ 不存在 .

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，

证明：f(x)在 $x=0$ 处可导.

证：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

又 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处连续，故 $f(0)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

8 设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$ ，

求 $f''(a)$.

解答

$\because g(x)$ 可导

$\therefore f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$

$\because g''(x)$ 不一定存在　　故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \qquad f'(a)=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

1. (1) 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$,则

$f^{(n)}(2)=$ $\underline{\;n!\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\qquad}$

各项均含因子 $(x-2)$

提示: $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$

$$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}\;\boxed{+\cdots\cdots\cdots}$$

(2) 已知 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 $n\geq 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{n![f(x)]^{n+1}}$

提示: $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3![f(x)]^4$$

……

2. 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y'=1$

用莱布尼兹公式求 n 阶导数

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+n\cdot 2x\,y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$, 得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\,y^{(n-1)}(0)\quad(n=1,2,\cdots)$

由 $y(0)=0$, 得 $y''(0)=0,\ y^{(4)}(0)=0,\ \cdots,\ y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$, 得 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\,y'(0)$

即 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots)$

1. 设 $y=\underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1}+\underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$，求 y'.

提示: 分别用对数求导法求 y_1', y_2'.

答案:

$$y'=y_1'+y_2'$$

$$=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1)$$

$$+\frac{1}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(2+x)^2}}\left[1-2\ln x-\frac{x}{3(2-x)}-\frac{2x}{3(2+x)}\right]$$

2. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=0}$.

解　　方程组两边同时对 t 求导, 得

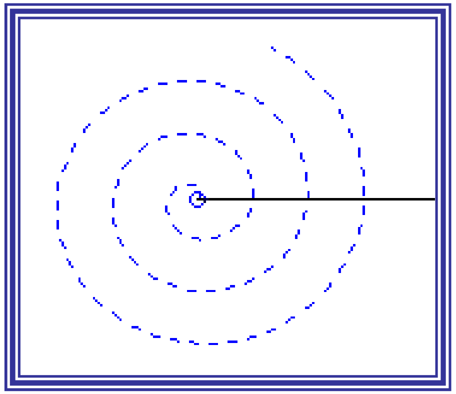
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 6t + 2 \\ e^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$$

3. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

解：化为参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$

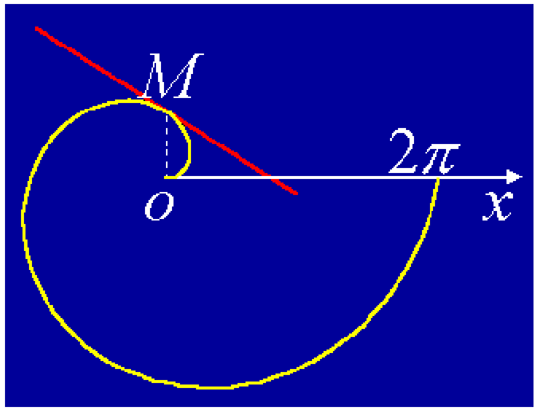


$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(0,\frac{\pi}{2})$,

斜率 $k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

∴ 切线方程为 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$



4. 设 $y=x+e^x$，求其反函数的导数 **.**

解: 方法**1** $\because \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+e^x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}=\frac{1}{1+e^x}$$

方法**2** 等式两边同时对 y 求导

$$1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+e^x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^x}$$

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=2$，则 $f'(1)=$ ( ).

A. 2 **B.** -2 **C.** 4 **D.** -4

【参考答案】 D

【对应考点】导数的定义

【试题解答】

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{f'(1)}{2}=2,$$

所以 $f'(1)=-4$.

设 $y=3\sin\sqrt{x}$，$0<x<\dfrac{\pi^2}{4}$，则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $x'(y)=$（ ）.

A. $\dfrac{3\sqrt{x}}{2\cot\sqrt{x}}$　　**B.** $\dfrac{3\sqrt{x}}{2\cos\sqrt{x}}$　　**C.** $\dfrac{2\sqrt{x}}{3\cot\sqrt{x}}$　　**D.** $\dfrac{2\sqrt{x}}{3\cos\sqrt{x}}$

【参考答案】　D

【对应考点】　反函数的导数

【试题解答】

对 y 求导得 $1=3\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{x'}{2\sqrt{x}}$，所以 $x'(y)=\dfrac{2\sqrt{x}}{3\cos\sqrt{x}}\ (0<x<\dfrac{\pi^2}{4})$.

设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{5}{3}}\sin\frac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 $f(x)$（ ）.

A. 不连续

B. 连续，但不可导

C. 可导，但导数不连续

D. 可导，且导数连续

【参考答案】 C

【对应考点】 函数的可导性与连续性

【试题解答】 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{5}{3}}\sin\frac{1}{x}=0\Rightarrow$ 连续

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{5}{3}}\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{0-x^{\frac{5}{3}}\sin\frac{1}{x}}{-x}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}=0$$

$\therefore$ $f(x)$ 可导.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}-x^{-\frac{1}{3}}\cos\frac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在

$\therefore$ $f'(x)$ 不连续，选C.

设函数 $f(x)$ 在其定义域上可导，下列说法正确的是 ( ).

A. 若 $f(x)$ 是偶函数， $f'(x)$ 是偶函数；若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是奇函数

B. 若 $f(x)$ 是偶函数， $f'(x)$ 是奇函数；若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是奇函数

C. 若 $f(x)$ 是偶函数， $f'(x)$ 是偶函数；若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数

D. 若 $f(x)$ 是偶函数， $f'(x)$ 是奇函数；若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数

【参考答案】 D

【对应考点】 导数的概念

【试题解答】

利用导数的概念进行判断.

(1)若 $f(x)$ 是偶函数，即

$$f(-x)=f(x),\quad f(-x-\Delta x)=f(x+\Delta x),$$

则由导数的定义，有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}\\
&=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}\\
&=-f'(-x),
\end{aligned}$$

即 $f'(x)$ 是奇函数.

(2)若 $f(x)$ 是奇函数，即

$$f(-x)=-f(x),\quad f(-x-\Delta x)=-f(x+\Delta x),$$

则由导数的定义，有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-[f(-x-\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}\\
&=f'(-x)
\end{aligned}$$

即 $f'(x)$ 是偶函数.

所以求导改变奇偶性.

已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,\ 1+\delta)$ 内具有二阶导数， $f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则( ).

A.在 $(1-\delta,\ 1)$ 和 $\left(1, 1+\delta\right)$ 内均有 $f(x)<x$

B.在 $(1-\delta,\ 1)$ 和 $(1,\ 1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$

C.在 $(1-\delta,\ 1)$ 内 $f(x)<x$，在 $(1,\ 1+\delta)$ 内有 $f(x)>x$

D.在 $(1-\delta,\ 1)$ 内 $f(x)>x$，在 $(1,\ 1+\delta)$ 内有 $f(x)<x$

【参考答案】　A

【对应考点】　函数的单调性

【试题解答】

令 $h(x)=x-f(x)$，则 $h'(x)=1-f'(x)$；因为 $f'(1)=1$，又 $f'(x)$ 严格单调减少，知

当 $x<1$ 时， $f'(x)>1>0$，从而单调递增，此时 $f(x)<x$；

当 $x>1$ 时， $f'(x)<1$，从而函数 $h(x)$ 单调递增，此时 $h(x)>h(1)$，即 $f(x)<x$.

第三章

隐函数的极值

设$y=y(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定，求$y=y(x)$的极值点.

解　　将方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$两边对x求导，得

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0 \qquad (1)$$

令$y'=0$,得$x=y$

代入原方程得唯一驻点$x=1$

对(1)式两边再求导，得

$$12yy'^2+6y^2y''-4y'^2-4y''+2y'+2y'+2xy''-2=0$$

将$x=y=1$, $y'(1)=0$代入上式，得$y''(1)=\frac{1}{2}>0$

因此函数有极值点$x=1$，它是极小值点.

中值公式用于求极限

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

提示　利用拉格朗日中值公式

设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=(\ \ )$.

A. $2a$　　**B**. $2ka$　　**C**. ka　　**D**. 0

证明不等式的方法

(1)函数的单调性；
(2)函数的最大最小值方法；
(3)拉格朗日中值公式
(4)函数的凹凸性

(1) 证明当$\boldsymbol{x}>1$时，$\dfrac{2\boldsymbol{x}\ln\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2-1}<1$

(2) 设$b>a>0$，证明：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

$$\text{证明当}x>1\text{时}, \frac{2x\ln x}{x^2-1}<1$$

证

$$\text{等价于证明当}x>1\text{时}, 2x\ln x<x^2-1$$

$$\text{设}f(x)=2x\ln x-x^2+1,$$

$$\text{则 } f'(x)=2+2\ln x-2x$$

$$\text{则 } f''(x)=\frac{2}{x}-2 \quad <0$$

$\because f'(x)$在$[1,+\infty)$上连续，且$(1,+\infty)$可导，$f''(x)<0$,

$\therefore f'(x)$在$[1,+\infty)$上单调减少；

故当$x>1$时，$f'(x)<f'(1)=0$,

$\because f(x)$在$[1,+\infty)$上连续,且$(1,+\infty)$可导，$f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上单调减少；

故当$x>1$时，$f(x)<f(1)=0$,

即当$x>1$时,$2x\ln x<x^2-1$

$$即\ \frac{2x\ln x}{x^2-1}<1.$$

(2) 设$b > a > 0$,证明:$\dfrac{\ln b - \ln a}{b - a} < \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

(1) $\dfrac{2a}{a^2 + b^2} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a}$ 中值公式

(2) 等价于证明当$x > a > 0$时,$\dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} < \dfrac{1}{\sqrt{ax}}$.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 下面命题成立的是( ).

A. 存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$ 成立　　B. 存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=-f(\xi)$ 成立

C. 存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=2f(\xi)$ 成立　　D. 存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=\frac{1}{2}f(\xi)$ 成立

【参考答案】　A

【对应考点】　罗尔中值定理应用

【试题解答】　分析：应用辅助函数.

引进辅助函数 $\varphi(x)=f(x)e^{-x}$，

由于 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，易知 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件，且

$\varphi'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$，

因此，在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)e^{-\xi}-f(\xi)e^{-\xi}=0$，

因 $e^{-\xi}\neq 0$，所以 $f'(\xi)=f(\xi)$.

汗。。。四个选项都是对的。

$(A)g(x)=f(x)e^{-x}$　$(B)g(x)=f(x)e^{x}$　$(C)g(x)=f(x)e^{\frac{1}{2}x}$　$(D)g(x)=f(x)e^{2x}$

常用的辅助函数

1）欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$，令 $F(x)=x^n f(x)$;

2）欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$;　这里 n 为正整数。

3）欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$;

特别地：

欲证 $f'(\xi)+f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{x}f(x)$;

欲证 $f'(\xi)-f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{-x}f(x)$;

4）欲证 $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)\ (\alpha\neq 0)$;

5）欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$;

6）欲证 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{\int_a^x g(t)dt}f(x)$;

设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$,

求$f(0), f'(0), f''(0)$.

解 $\sin x$和$f(x)$在$x=0$处的麦克劳林公式为

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o_1(x^3)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o_2(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o_1(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^3+xo_2(x^2)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+(\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)}{x^3}$$

所以 $f(0)=-1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=\dfrac{1}{3}$

若 $a^2-3b<0$，则方程 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ ( )．

A. 无实根 **B.** 有唯一的实根

C. 有三个实根 **D.** 有重实根

【参考答案】 B

【对应考点】 函数的单调性；介值定理

【试题解答】 考查其导函数 $f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x+\frac{a}{3})^2+\frac{1}{3}(3b-a^2)>0$，

因此函数单调增；

另一方面，当 $x\to-\infty$时 $f(x)\to-\infty$，

而当 $x\to+\infty$时 $f(x)\to+\infty$；

由介值定理可知方程有唯一实根．

对任意实数，下列不等式恒成立的是( ).

A. $e^{-x}\le 1-x$ **B**. $e^{-x}\ge 1-x$ **C**. $e^{-x}\le 1+x$ **D**. $e^{-x}\ge 1+x$

【参考答案】 B

【对应考点】

函数的单调性

【试题解答】

令 $f(x)=e^{-x}+x-1$，

在 $x\le 0$时，导函数 $f'(x)=1-e^{-x}\le 0$，因此单调递减，于是 $f(x)>f(0)=0$；

在 $0\le x\le 1$时，导函数 $f'(x)=1-e^{-x}\ge 0$，因此单调增，于是 $f(x)>f(0)=0$；

在 $x\ge 1$时，函数 $f(x)\ge e^{-x}\ge 0$；

因此都有 $f(x)\ge 0$，此即 $e^{-x}\ge 1-x$.

常用函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m-1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

对于下列不等式：(1) 当$x>0$时，$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$；(2) 当$x>0$时，$x-\frac{1}{3}x^3<\sin x<x$说法正确的是( ).

A. (1)(2)都正确　　　　**B.** (1)正确(2)不正确

C. (1)不正确(2)正确　　　　**D.** (1)(2)都不正确

【参考答案】　A

【对应考点】　利用函数单调性判断不等式.

【试题解答】

(1) 记$f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$，

$$\because\ f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\ln 1=0\ (x>0),$$

故当$x\geq 0$时，$f(x)$单调增加，而$f(0)=0$，

$\therefore\quad f(x)>f(0)\quad (x>0)$，

即　$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值，则 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处( ).

A. 必取极大值　　**B.** 必取极小值　　**C.** 不可能取极值　　**D.** 是否取极值不能确定

【参考答案】 D

【对应考点】

函数极值的定义

【试题解答】

考查函数 $f(x)=-x^2$ 和 $g(x)=-x^2$，他们都在 $x=0$ 取极大值，但 $F(x)=f(x)g(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处取极小值；

考查函数 $f(x)=-x^2+4\ (-2<x<2)$ 和 $g(x)=-x^2+4\ (-2<x<2)$，他们都在 $x=0$ 取极大值，但 $F(x)=f(x)g(x)=(x^2-4)^2$ 仍在 $x=0$ 处取极大值；因此是否极值不能确定.

设偶函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f''(0)\neq 0$，则 $x=0$( ).

A. 不是函数 $f(x)$ 的驻点

B. 一定是函数 $f(x)$ 的极值点

C. 一定不是函数 $f(x)$ 的极值点

D. 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，还不能确定

【参考答案】 B

【对应考点】 函数极值点判断的第二充分条件

【试题解答】

因为 $f(x)$ 为偶函数，根据左右导数及偶函数的性质可以得出 $f'(0)=0$，从而无论是 $f''(0)>0$ 还是 $f''(0)<0$，从函数极值点判断的第二充分条件来看，$x=0$ 都是原函数的极值点.

函数 $y=x^x$ 在区间 $\left[1/e,+\infty\right]$ 上( ).

A. 不存在最大值和最小值

B. 最大值是 $e^{1/e}$

C. 最大值 $\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$

D. 最小值是 $\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$

【参考答案】 D

【对应考点】 函数的极值与最值

【试题解答】

对函数取对数得 $\ln y=x\ln x$，两边求导可得 $\frac{y'}{y}=1+\ln x$，从而 $y'=(1+\ln x)x^x$，导函数在区间 $\left[1/e,+\infty\right]$ 上恒有 $y'\geq 0$，因此原函数单调增，故在所选区间上的最小值为

$$y\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}.$$

若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，则有最大面积的直角三角形有一锐角为( ).

A. 30^o　　**B**. 45^o　　**C**. 15^o　　**D**. 22.5^o

【参考答案】　A

【对应考点】　函数的最值；函数的单调性

【试题解答】

设三边为x，y，z，其中z为斜边，设$x+z=c$为常数，又有勾股定理$x^2+y^2=z^2$，为使函数$F=xy$最大；

化为F只和z和c有关的函数为$F=\sqrt{c(2z-c)}(c-z)$，求导令其导函数为零解得$z=\dfrac{2}{3}c$，容易验证该点为$F=\sqrt{c(2z-c)}(c-z)$的极大值点；从而可得$x=\dfrac{1}{3}c$和$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$，因此锐角为边y和x分别所对的角，易知为30^o和60^o.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 下面命题成立的是( ).

A. 存在 $\xi \in (a, b)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$ 成立

B. 存在 $\xi \in (a, b)$，使 $f'(\xi)=-f(\xi)$ 成立

C. 存在 $\xi \in (a, b)$，使 $f'(\xi)=2f(\xi)$ 成立

D. 存在 $\xi \in (a, b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{1}{2}f(\xi)$ 成立

【参考答案】 A

【对应考点】 罗尔中值定理应用

【试题解答】 分析：应用辅助函数.

引进辅助函数 $\varphi(x)=f(x)e^{-x}$，

由于 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，易知 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件，且

$\varphi'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$，

因此，在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)e^{-\xi}-f(\xi)e^{-\xi}=0$，

因 $e^{-\xi} \neq 0$，所以 $f'(\xi)=f(\xi)$.

若 $a<b$ 时，可微函数 $f(x)$ 有 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)<0$，$f'(b)<0$，则方程 $f'(x)=0$ 在 $(a,\ b)$ 内 ( ).

A. 无实根

B. 有且仅有一实根

C. 有且仅有二实根

D. 至少有二实根

【参考答案】 D

【对应考点】 罗尔定理

【试题解答】

依罗尔定理，由 $f(a)=f(b)=0$，方程 $f'(x)=0$ 在 $(a,\ b)$ 内至少有一实根，故不是无实根.

因 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}<0$，|

依保号性定理知，$\exists\delta_1>0$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$f(x)<0$，

又 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{x-b}<0$，

同理，$\exists\delta_2>0$，当 $x\in(b-\delta_2,\ b)$ 时，$f(x)>0$，由此可见有

$a^*\in(a,\ a+\delta_1)$，$b^*\in(b-\delta_2,\ b)$，使得 $f(a^*)f(b^*)<0$，

由介值定理可知，必有 $c\in(a^*,\ b^*)\subset(a,\ b)$，使 $f(c)=0$

依罗尔定理可知，$f'(x)$ 在 $(a,\ c)$，$(c,\ b)$ 上应各有一零点，故

$f'(x)=0$ 至少应有二实根. 因缺乏依据判定 $f'(x)=0$ 有且仅有二实根.

故正确选项是至少有二实根.

当$x\in[-1,1]$，$\arcsin x+\arccos x=(\ \ )$.

A. π　　**B**. 2π　　**C**. $\frac{1}{2}\pi$　　**D**. 0

【参考答案】　C

【对应考点】　拉格朗日中值定理.

【试题解答】

设$f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$x\in[-1,1]$，

$$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0,$$

$\therefore f(x)\equiv C$，$x\in[-1,1]$.

又$\because f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，

即$C=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是( ).

A. 位于区间的正中间

B. 位于区间的 $\dfrac{1}{3}$ 处

C. 位于区间的 $\dfrac{2}{3}$ 处

D. 位于区间的 $\dfrac{1}{4}$ 处

【参考答案】 A

【对应考点】 拉格朗日中值定理

【试题解答】

易见本题的多项式函数在 $[a, b]\subset(-\infty, +\infty)$ 上连续，在 (a, b) 内可导，即它满足拉格朗日定理的条件，故 $\exists\xi\in(a, b)$，使得

$$y'(\xi)\cdot(b-a)=f(b)-f(a),$$

而 $y'(x)=2px+q$，即有

$$(2px+q)|_{x=\xi}=\frac{pb^2+qb+r-(pa^2+qa+r)}{b-a}$$

,

亦即 $2p\xi+q=p(b+q)+q$，所以 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$. 证毕.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(3-x^2), & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty\end{cases}$，则在 $(0,\ 2)$ 内满足 $f(2)-f(0)=2f'(\xi)$ 的中值 $\xi=(\ )$.

A. $\xi_1=\dfrac{1}{2}$ 或 $\xi_2=\sqrt{2}$　　　　**B.** $\xi_1=\pm\dfrac{1}{2}$

C. $\xi_2=\pm\sqrt{2}$　　　　**D.** $\xi_1=\dfrac{1}{2}$

【参考答案】　A

【对应考点】

柯西中值定理与导数

【试题解答】　$0<x<1$ 时，$f'(x)=-x$; $1<x<2$ 时，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

令 $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$，得 $\xi_1=\dfrac{1}{2}$ 或 $\xi_2=\sqrt{2}$.

即满足 $f(2)-f(0)=2f'(\xi)$ 的中间值 $\xi_1=\dfrac{1}{2}$ 或 $\xi_2=\sqrt{2}$.

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)^2}{\tan(\cos x-1)}=(\quad).$$

A. -2　　**B**. -1　　**C**. 0　　**D**. 1

【参考答案】　A

【对应考点】　洛必达法则

【试题解答】　原式 $=\lim_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{2(x-2\pi)}{-\sin x}=\lim_{x\to 2\pi x}\frac{2}{-\cos x}=-2.$

下列各运算过程中使用罗必塔法则正确的是( ).

A. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}}=1$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在，故原极限不存在

D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{6x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

【参考答案】 B

【对应考点】 洛比达法则

【试题解答】

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{6x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ 的值等于 ( ).

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

【参考答案】 A

【对应考点】

$\infty - \infty$型洛必达法则

【试题解答】

对于 $\infty - \infty$型，可利用通分化为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式来计算.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{1} = 0.$$

设 $a>0, b>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=(\ )$.

A. ab　　**B.** $\sqrt{ab}$　　**C.** $\ln ab$　　**D.** $\ln\sqrt{ab}$

【参考答案】 B

【对应考点】 $\frac{0}{0}$ 型

【试题解答】

$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\frac{a^x+b^x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}=e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}=e^{\ln(ab)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{ab}.$$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + R_4(x)$ 其中 $R_4(x) = (\ )$. (式中ξ介于0与x之间)

A. $\frac{-\cos\xi}{5!}x^5$ B. $\frac{\cos\xi}{5!}x^5$ C. $\frac{\sin\xi}{5!}x^5$ D. $\frac{-\sin\xi}{5!}x^5$

【参考答案】 B

【对应考点】 泰勒中值定理

【试题解答】

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$，所以 $R_4(x) = \frac{\cos\xi}{5!}x^5$.

函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式为（ ）.

A. $-[1+(x+1)+(1+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$

$(0<\theta<1)$

B. $1+(x+1)+(1+1)^2+\cdots+(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$

$(0<\theta<1)$

C. $-[(x+1)+(1+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$

$(0<\theta<1)$

D. $(x+1)+(1+1)^2+\cdots+(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$ $(0<\theta<1)$

【参考答案】 A

【试题解答】 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$， $f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}}=-n!$，

即 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=-1$，

$$\frac{1}{x}=-[1+(x+1)+(1+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$$

$(0<\theta<1)$

设 $I=\int \frac{1}{x(1+x^8)}dx$，下列等式中不成立的是( ).

A. $I=\int \frac{x^7}{x^8(1+x^8)}dx=\frac{1}{8}\int \frac{1}{x^8(1+x^8)}d(x^8)$

B. $I=\int \frac{1+x^8-x^8}{x(1+x^8)}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{x^7}{(1+x^8)}dx$

C. $I=\int \frac{1}{x^9(1+x^{-8})}dx=-\frac{1}{8}\int \frac{d(1+x^8)}{1+x^{-8}}$

D. 令 $x=\frac{1}{t}$, $I=\int \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^8}\right)\frac{1}{t}}\frac{1}{t^2}dt=\int \frac{t^7}{1+t^8}dt$.

【参考答案】 D

【对应考点】 换元积分法

【试题解答】

$$令 x=\frac{1}{t}，\quad I=-\int \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^8}\right)\frac{1}{t}}\frac{1}{t^2}dt=-\int \frac{t^7}{1+t^8}dt.$$

第四章

1.求不定积分

$$1)\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$2)\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$$

$$3)\int \frac{dx}{1+\tan x}$$

$$4)\int \frac{dx}{1+2\tan x}$$

$$5)\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$1)\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

解法1 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\tan x-\cot x+c$$

$$\mathbf{2)} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\tan^2 x + 2} dx$$

$$= \int \frac{d \tan x}{2 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$3)\int \frac{dx}{1+\tan x}$$

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x+\int \frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x+\ln\left|\cos x+\sin x\right|)+C.$$

$$4)\int \frac{dx}{1+2\tan x}$$

$$\int \frac{dx}{1+2\tan x} = \int \frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}dx$$

$$= \frac{2}{5}\int \left(\frac{\frac{1}{2}\cos x+\sin x}{\cos x+2\sin x} + \frac{2\cos x-\sin x}{\cos x+2\sin x}\right)dx$$

$$= \frac{2}{5}\left[\int \frac{1}{2}dx + \int \frac{d(\cos x+2\sin x)}{\cos x+2\sin x}\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}+\ln\left|\cos x+2\sin x\right|\right)+C.$$

$$5)\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$=\int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$

$$=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\ldots$$

2.求不定积分

$$1)\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.;$$

$$2)\int \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

$$3)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}};$$

$$4)\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$$

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

解：令 $x = 3\sin t \quad (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}) \quad \mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t$

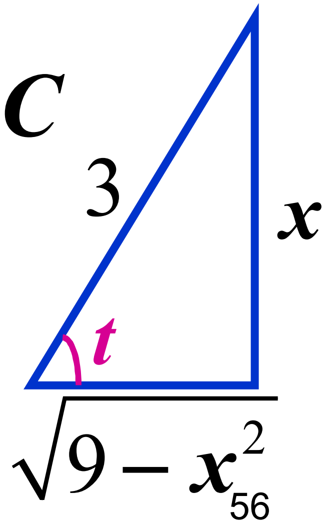
$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\cos t$$

$$\therefore \text{ 原式 } = \int \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t}{3\cos t}dt = 9\int \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + C = \frac{9}{2}t - \frac{18}{4}\sin t\cos t + C$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$$

画三角形“回代”



$$2)\int \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}}dx.$$

如果用“三角代换”，计算繁琐

$$=\int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx+\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

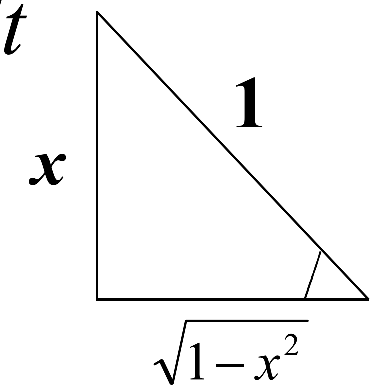
$$3)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}};$$

解 1)三角代换:

设 $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,则 $dx = \cos t dt.$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cdot \cos t} = \int \csc^2 t dt$$

$$= -\cot t + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c.$$



$$3)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}};$$

另解:用倒代换,设 $x = \frac{1}{t}$,则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

$$= \int \frac{d\left(t^2-1\right)}{2\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{t^2-1}+c = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c.$$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

用三角代换或根式代换都可以

求不定积分

1) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.;

2) $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx = (\ ).$$

A. $-\frac{1}{2}(1+e^x)^{3/4}+C$

B. $e^x(1+e^x)^{7/4}+C$

C. $\frac{4}{7}(1+e^x)^{7/4}-\frac{4}{3}(1+e^x)^{3/4}+C$

D. $-\frac{4}{3}(1+e^x)^{-1/4}-4(1+e^x)^{3/4}+C$

【参考答案】 C

【试题解答】

$\sqrt[4]{1+e^x}=t$， $e^x=t^4-1$, $e^{2x}=(t^4-1)^2$， $x=\ln(t^4-1)$， $dx=\frac{4t^3dt}{t^4-1}$，

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx=\int \frac{(t^4-1)^2}{t}\cdot\frac{4t^3dt}{t^4-1}=4\int(t^6-t^2)dt=\frac{4}{7}t^7-\frac{4}{3}t^3+C$$

所以$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx=\frac{4}{7}(1+e^x)^{7/4}-\frac{4}{3}(1+e^x)^{3/4}+C$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = (\ )$，其中 a 为常数 $(a>0)$．

A. $\ln\left|x\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$

B. $a\arcsin\frac{x}{a}+C$

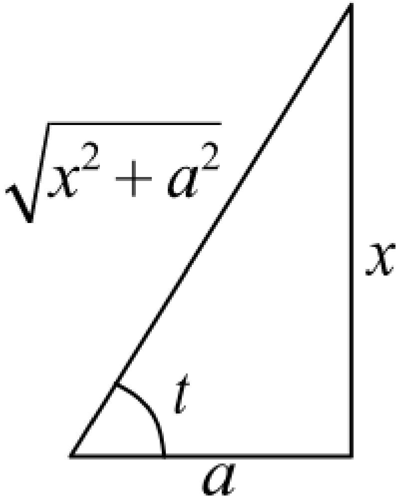
C. $\ln\left|x-\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$

D. $\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$

【参考答案】 D

【试题解答】

令 $x=a\tan t \Rightarrow dx=a\sec^2 t dt$， $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t dt = \int \sec t dt$$

$$= \ln\left|\sec t+\tan t\right|+C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且 $\int f(x)dx = F(x) + C$. 则 $\int f^{-1}(x)dx = (\quad)$.

A. $xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$　　**B.** $f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$

C. $xf^{-1}(x) + F(f^{-1}(x)) + C$　　**D.** $xf(x) - F(f^{-1}(x)) + C$

【参考答案】　A

【对应考点】　分部积分法

【试题解答】　$\because x = f(f^{-1}(x))$

$$\therefore \int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - fxdf^{-1}(x)$$

$$= xf^{-1}(x) - \int f[f^{-1}(x)]df^{-1}(x)$$

$$= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\int x f'(x)dx = (\ )$.

A. $\cos x - \dfrac{2\sin x}{x} + C$

B. $\cos x - \dfrac{\sin x}{x} + C$

C. $\sin x - \dfrac{2\cos x}{x} + C$

D. $\sin x - \dfrac{\cos x}{x} + C$

【参考答案】 A

【对应考点】 分部积分法

【试题解答】

由题设条件得

$$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C,$$

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

$$\therefore \int x f'(x)dx = \int x d f(x)$$

$$= x f(x) - \int f(x)dx$$

$$= \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C.$$

设 $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}(2\le n)$, 则 $I_n=(\ )$.

A. $-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

B. $-\frac{1}{n}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

C. $-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

D. $-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

【参考答案】 A

【试题解答】 $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}dx$

$$=\int\frac{-d\cos x}{\sin^{n-1}x}+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+(2-n)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+(2-n)I_n+(n-2)I_{n-2},$$

移项解得 $I_n=-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.