第五节　　函数的微分

- 问题的提出
- 微分的定义
- 可微的条件
- 微分的几何意义
- 微分的求法

一、问题的提出

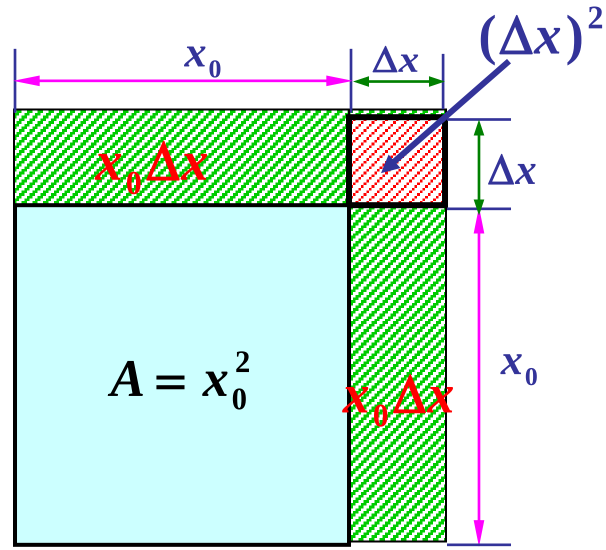
实例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A = x^2$,

$$\therefore \Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2): Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

引例中，当函数$A = x^2$的自变量产生增量Δx时，相应的函数值的增量ΔA可以表示成一个Δx的线性函数和一个Δx的高阶无穷小的和.

问题: 其他函数是否也具有类似的特性?如果有，我们说函数在这个点处可微分

二、微分的定义

定义　设函数 $y = f(x)$在某区间内有定义，

x_0及 $x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可表示成$A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$(其中$A$是与$\Delta x$无关的常数),

则称 $y = f(x)$在点 x_0可微,

并称$A \cdot \Delta x$为函数$y = f(x)$在点x_0

相应于自变量增量Δx的微分,

记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$, 即$dy\big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$.

微分的实质就是函数增量Δy的线性主部.

#P111

由定义知:

(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) A是与Δx无关的常数,但与$f(x)$和x_0有关;

(3) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(4) 当$|\Delta x|$很小时,$\Delta y \approx dy$ (线性主部).

三、可微的条件

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证 (1) 必要性 $\because f(x)$ 在点 x_0 可微,

$$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $A = f'(x_0)$.

(2) 充分性 $\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0), \qquad \text{即} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x)$, $\quad \because \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$,

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 且 $f'(x_0) = A$.

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微. $\qquad A = f'(x_0)$.

例1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$, $\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $\because dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x.$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 0.24.$$

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分，记作dx，即$dx = \Delta x$.

$$\therefore dy = f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

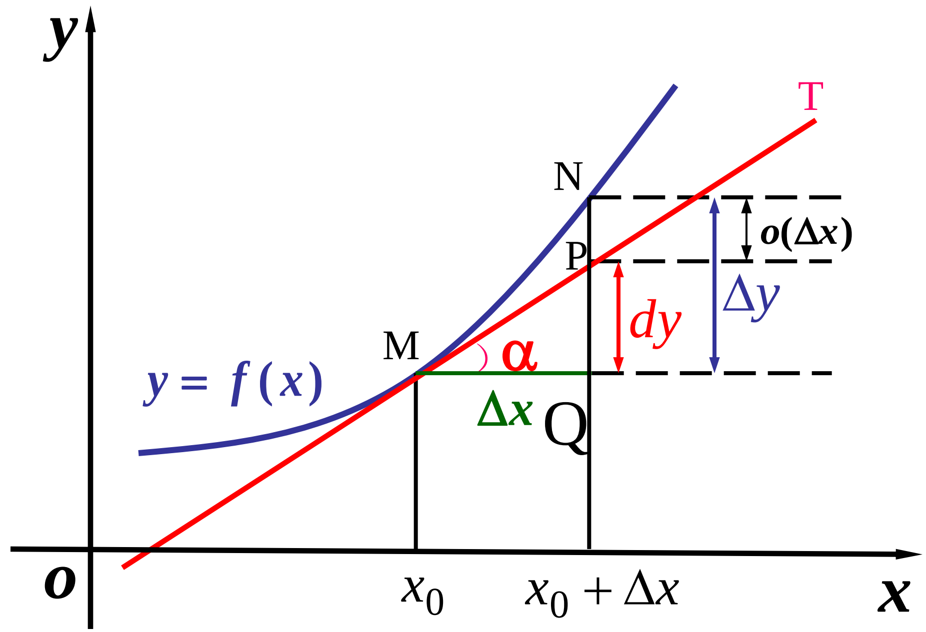
即函数的导数等于该函数的微分dy与自变量的微分dx之商．导数也叫"微商".

四、微分的几何意义

几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时,

dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y \approx dy$$

五、微分计算和形式不变性

$$dy = f'(x)dx$$

求法： 计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1.基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0 \qquad d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad d(arc\cot x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

例2　设 $y = e^x \cos x$, 求dy.

解　$dy = \cos x \cdot d(e^x) + e^x \cdot d(\cos x)$

$$= e^x \cos x dx - e^x \sin x dx$$

$$= (e^x \cos x - e^x \sin x) dx$$

微分的形式不变性

设函数 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$,

(1) 若 x 是自变量时, $dy = f'(x)dx;$

(2) 若 x 是中间变量时, 即 $y = f(x), x = \varphi(t)$

则 $dy = f'(x)\varphi'(t)dt$ $\qquad \because \varphi'(t)dt = dx,$

$$\therefore dy = f'(x)dx.$$

结论: 无论 x 是自变量还是中间变量,

函数 $y = f(x)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例3 设 $y=\ln(1+e^{x^2})$, 求dy.

解

$$dy=d\ln(1+e^{x^2})$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}de^{x^2}$$

$$=\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx^2=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$$

“逐层求微分”

补例 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，求 $\mathrm{d}y, \dfrac{\mathrm{d}y}{dx}$.

解： 利用一阶微分形式不变性， 有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\mathrm{d}y+y\cos x\mathrm{d}x+\sin(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{dx}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$$

如何求隐函数的微分?

方程两边求微分, 再整理变形得到dy.

与隐函数的求导不同，由于微分具有形式不变性，求微分时不需区分自变量和因变量.

求隐函数导数的另一种方法：

方程两边求微分，整理得到 $\dfrac{dy}{dx}$

优点：不需区分因变量和自变量.

后话　微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当$|\Delta x|$很小时，得近似等式：

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$\boldsymbol{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

使用原则：1) $f(x_0)$，$f'(x_0)$好算；

2) Δx较小.

例　求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解：　设 $f(x) = \sin x$,

取 $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$,　$x = 29^\circ = \frac{29}{180}\pi$ $= \frac{30\pi}{180} - \frac{\pi}{180}$

则 $\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{180}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) - \sin\frac{\pi}{6} \approx \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\sin 29^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0.0175)$$

$$\approx 0.485 \qquad \boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

小结

1. 微分概念

(1) 微分的定义及几何意义

(2) 可导 $\rightleftarrows$ 可微

2. 微分运算法则

3. 微分形式不变性 ：$\mathrm{d}\,f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}\,u$

(u是自变量或中间变量)

作业

P120

3 (2)(4)(7);

4(不用写过程)

备用题

1. $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x} = \underline{\quad \sec^3 x \quad}$

2. $\mathrm{d}(\arctan e^{-x}) = \underline{\dfrac{1}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}e^{-x}$

$$= \underline{\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}x$$

3.

已知 $xy = e^{x+y}$，求 $\mathrm{d}\,y$.

解：方程两边求微分，得

$$x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x = e^{x+y}(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\,y = \frac{y - e^{x+y}}{x + e^{x+y}}\,\mathrm{d}\,x$$

例3　设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解　$\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du \quad =\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例4　设 $y=e^{-ax}\sin bx$, 求dy.

解　$$dy=e^{-ax}d(-ax)\cdot\sin bx+e^{-ax}\cdot\cos bx d(bx)$$

$$=e^{-ax}\cdot(-a)dx\cdot\sin bx+e^{-ax}\cdot\cos bx\cdot bdx$$

$$=e^{-ax}(-a\sin bx+b\cos bx)dx.$$

补例　设$f(x)$可微，$xf(y)+yf(x)=x$，求dy.

解：　利用一阶微分形式不变性， 有

$$\mathrm{d}(xf(y))+\mathrm{d}(yf(x))=dx$$

$$x\,\mathrm{d}\,f(y)+f(y)dx+ydf(x)+f(x)dy=dx$$

$$xf'(y)dy+f(y)dx+yf'(x)dx+f(x)dy=dx$$

$$\therefore dy=\frac{1-f(y)-yf'(x)}{xf'(y)+f(x)}dx$$