思考下列运算是否正确?如不正确指出原因:

(1)设$x=\frac{1}{t}$,则$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}d\frac{1}{t}=\int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2}$, $\therefore\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=0.$

(1) 不正确,注意被积函数大于零,可知定积分也应大于零,故运算是错误的.

错误的原因在于引进的变换$t=\frac{1}{x}$在$[-1,1]$上不连续,故不满足换元法的前提条件.

使用倒代换时注意区间是否包含x=0

思考下列运算是否正确?如不正确指出原因:

(2) 令$u=\ln x$,则 $\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x}=\int_2^3 \frac{d\ln x}{\ln x}=\int_2^3 \frac{du}{u}=\ln|u|\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}.$

(3) 不正确,错在换元后没有改变积分限.正确的是

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x}=\int_2^3 \frac{d\ln x}{\ln x}$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{du}{u}=\ln|u|\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=\ln|\ln 3|-\ln|\ln 2|.$$

注意:“换元则换限,不换元则不换限”

求$\int_{-2}^{2} \min\left(1, x^2\right) dx$;

解

$$\min(1, x^2) = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ x^2 & |x| \le 1 \end{cases}$$

$$原式 = \int_{-2}^{-1} 1dx + \int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} 1dx \quad = \frac{8}{3}$$

11．设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，且$f'(x) \le 0$，而函数$F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，则在$(a, b)$内必有( ).（3分）

A. $F(x) = 0$

B. $F'(x) \le 0$

C. $F'(x) \ge 0$

D. $F'(x)$在(a, b)内符号不确定

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{f(x)(x-a) - f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} \quad (a \leqslant \xi \leqslant x)$$

$$= \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a} = \frac{f'(\eta)(x-\xi)}{x-a} \quad (\xi < \eta < x)$$

$$\leqslant 0. \quad (f'(\eta) \leqslant 0, x-\xi \geqslant 0, x-a > 0.)$$

B

15. 下列结论正确的是( ). (3分)

A. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x dx > \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx$

B. $\int_{-e}^{0} \left(\frac{1}{e}\right)^x dx > \int_{-e}^{0} e^x dx$

C. 若 $[a, b] \supset [c, d]$，则 $\int_{a}^{b} f(x) dx \geq \int_{c}^{d} f(x) dx$

D. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续，则 $\int_{-1}^{1} |f(x)| dx = 2\int_{0}^{1} |f(x)| dx$

B

3. 广义积分 $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}=(\ )$.　(3分)

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. 不存在

$$\text{原式}=\int_{-1}^{3}\frac{1}{t^2}dt=\int_{-1}^{0}\frac{1}{t^2}dt+\boxed{\int_{0}^{3}\frac{1}{t^2}dt}$$

$$p\geq 1\text{时, 反常积分}\int_{0}^{1}\frac{1}{x^p}dx\ \text{发散}$$

D

设$f(x)=x^2-x\int_0^1 f(x)dx+2\int_0^2 f(x)dx$, 求$f(x)$.

解　设$\int_0^1 f(x)dx=a$, $\int_0^2 f(x)dx=b$,

$f(x)=x^2-ax+2b$,

上式两边分别从$[0,1]$和$[0,2]$做积分

得$a=\int_0^1 (x^2-ax+2b)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b \quad (1)$

$b=\int_0^2 (x^2-ax+2b)dx=\frac{8}{3}-2a+4b \quad (2)$

联立(1)(2)得 $a=\frac{26}{3}, b=-\frac{44}{9}$

故$f(x)=x^2-\frac{26}{3}x-\frac{88}{9}$

定积分等式的证明

求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan x}$;

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx}$$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$$

从而

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{\pi}{4}.$$

再如，求定积分$\int_0^{\pi}\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$

解题思路

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt,求 f(x)+f(\frac{1}{x})\ \ (x>0).$$

解 $$f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt=\int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du\ \ (令 u=\frac{1}{t})$$

$$f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)}dt$$

$$=\int_1^x \left[\frac{\ln t}{1+t}+\frac{\ln t}{t}-\frac{\ln t}{1+t}\right]dt=\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

求$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解　令$x=\tan t$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(\cos t+\sin t)-\ln\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln\cos(t-\frac{\pi}{4})+\ln\sqrt{2}-\ln\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du+\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt\ (u=\frac{\pi}{4}-t)$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

已知$f(x)$在$\left[0,1\right]$连续，证明：存在$\xi \in (0,1)$，使得$\int_0^{\xi} f(t)dt = (1-\xi)f(\xi)$

证明：令$G(x) = x\int_0^{x} f(t)dt - \int_0^{x} f(t)dt$

$G(x)$在$\left[0,1\right]$上满足罗尔定理的条件

存在$\xi \in (0,1)$，使得$G'(\xi)=0$，

即$\int_0^{\xi} f(t)dt + \xi f(\xi) - f(\xi) = 0$

即$\int_0^{\xi} f(t)dt = (1-\xi)f(\xi)$

设$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

设$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶导数，且$f''(x)>0$，证明：$\int_a^b f(t)dt \geq (b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$,

求$f(0), f'(0), f''(0)$.

解 $\sin x$和$f(x)$在$x=0$处的麦克劳林公式为

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o_1(x^3)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o_2(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o_1(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^3+xo_2(x^2)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+(\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)}{x^3}$$

所以 $f(0)=-1,\quad f'(0)=0,\ f''(0)=\dfrac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right].$$

解　令$x_n=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$

缩放得

$$\frac{n}{n+1}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})\frac{1}{n}\le x_n\le\frac{n}{n+\frac{1}{n}}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})\frac{1}{n}$$

由定积分的定义，$\lim\limits_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}=1$

由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{\ln 2}$

第六章

.过点 $(1,0)$ 做曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述曲线及 x 线围成一平面图形 A，求 A 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解　设$(x_0,\ y_0)$是切点，则切线方程为$y-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$

$(1,0)$在切线上$-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)$

又$(x_0,\ y_0)$在曲线上，$y_0=\sqrt{x_0-2}$

根据上面两式，解得 $x_0=3$，$y_0=1$

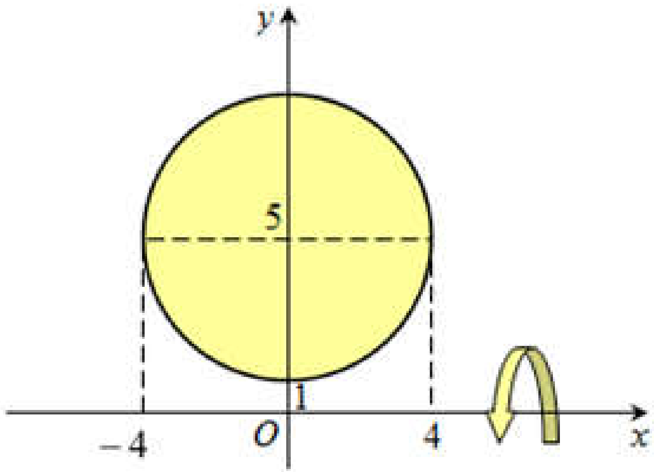
切线方程为 $y=\dfrac{x-1}{2}$

$$\text{体积}V=\pi\int_1^3\left(\frac{x-1}{2}\right)^2dx-\pi\int_2^3\left(\sqrt{x-2}\right)^2dx=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

由圆 $x^2+(y-5)^2=16$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为 V，则 $V=(\ )$.

A. $120\pi^2$　　B. $100\pi^2$　　C. $80\pi^2$　　D. $160\pi^2$

参考答案	D	对应考点	旋转体的体积



如图，旋转体是轮胎形，它可看作是上、下两个半圆绕 x 轴旋转所成两个旋转体体积之差．两半圆的方程为：

$$y=5\pm\sqrt{16-x^2},$$

$$\therefore\quad V=\pi\int_{-4}^{4}(5+\sqrt{16-x^2})^2dx-\pi\int_{-4}^{4}(5-\sqrt{16-x^2})^2dx$$

$$=2\pi\int_0^4(4\cdot5\cdot\sqrt{16-x^2})dx=40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx$$

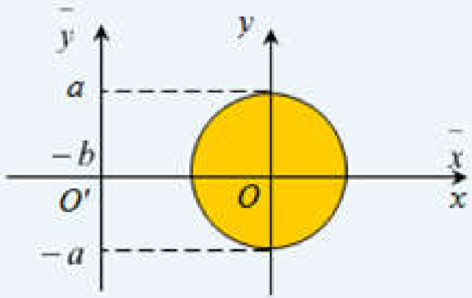
$$\underline{x=4\sin t}\ 160\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot4\cos t dt=320\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2t)dt$$

$$=320\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=320\pi\cdot\frac{\pi}{2}=160\pi^2.$$

$x^2+y^2\le a^2$绕 $x=-b(b>a>0)$旋转而成的旋转体的体积( ).

A. $2\pi a^2 b$　　B. $\pi a^2 b$　　C. $a^2 b$　　D. $\frac{1}{2}a^2 b$

参考答案	A	对应考点	旋转体的体积



如图，作平移变换：$\bar{x}=x+b,\ \bar{y}=y$，则圆盘 $x^2+y^2\le b^2$变换成

$$(\bar{x}-b)^2+\bar{y}^2=a^2,$$

这时右、左半圆的方程为

$$\bar{x}=b\pm\sqrt{a^2-\bar{y}^2},$$

注意对称性，于是所求体积为

$$V_{\bar{y}}=\pi\int_{-a}^{a}[(b+\sqrt{a^2-\bar{y}^2})^2-(b-\sqrt{a^2-\bar{y}^2})^2]d\bar{y}$$

$$=2\pi\int_0^a 4b\sqrt{a^2-\bar{y}^2}d\bar{y}\quad(令\ \bar{y}=a\sin u)$$

$$=8\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos u\cdot(-a\cos u)du=2\pi^2a^2b.$$

18. 心形线$r=4(1+\cos\theta)$与直线$\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$所围成的平面图形绕极轴旋转而成的旋转体体积$V=(\ )$. （3分）

A. $\int_0^{\pi/2}\pi 16(1+\cos\theta)^2 d\theta$

B. $\int_0^{\pi/2}\pi 16(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta d\theta$

C. $\int_{\pi/2}^{0}\pi 16(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta d[4(1+\cos\theta)\cos\theta]$

D. $\int_0^{\pi/2}\pi 16(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta d[4(1+\cos\theta)\cos\theta]$

C

19. 摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$的一拱与$x$轴所围成的平面图形绕$x$轴旋转而成的旋转体体积$V = (\ )$.（3分）

A. $\int_0^{2\pi a} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 d[a(t - \sin t)]$

B. $\int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 dt$

C. $\int_0^{2\pi a} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 dt$

D. $\int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 d[a(t - \sin t)]$

D

22. 星型线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$的全长$s=(\ )$. （3分）

A. $4\int_0^{\pi/2} \sec t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$

B. $2\int_{\pi}^{0} \sec t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$

C. $2\int_0^{\pi} \sec t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$

D. $4\int_{\pi/2}^{0} \sec t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$

D

20. 底面由圆$x^2+y^2=4$围成，且垂直于x轴的所有截面都是正方形的立体体积为( )
. (3分)

A. $16\frac{1}{6}$　　**B**. $32\frac{1}{3}$　　**C**. $42\frac{2}{3}$　　**D**. $85\frac{1}{3}$

C

24．设一质点距原点x米时，受$F(x)=x^2+2x$牛顿力的作用，问质点在F作用下，从$x=1$移动到$x=3$，力所作的功为( )．(3分)

A. $8\frac{2}{3}$(焦)　**B**. $4\frac{2}{3}$(焦)　**C**. $5\frac{2}{3}$(焦)　**D**. $16\frac{2}{3}$(焦)

D

24. 拉弹簧所需的力 f 与弹簧伸长成正比．设弹性系数为 k，弹簧由原长 9 增长到 15，所作的功用积分表示为 $W=\int_a^b ksds$，则积分区间 $[a, b]$ 为( )．（3分）

A. $[9, 15]$　　**B**. $[0, 6]$　　**C**. $[-6, 0]$　　**D**. $[-3, 3]$

B