第四节　反常积分

前面讨论的定积分不仅要求积分区间$[a, b]$有限，而且还要求被积函数$f(x)$在$[a, b]$上有界.

然而实际还经常遇到无限区间或无界函数的积分问题．这两类积分统称为反常积分.

其中前者称为无穷积分，后者称为瑕积分.

反常积分也称为广义积分.

一 无穷限的反常积分(无穷积分)

--定积分的极限

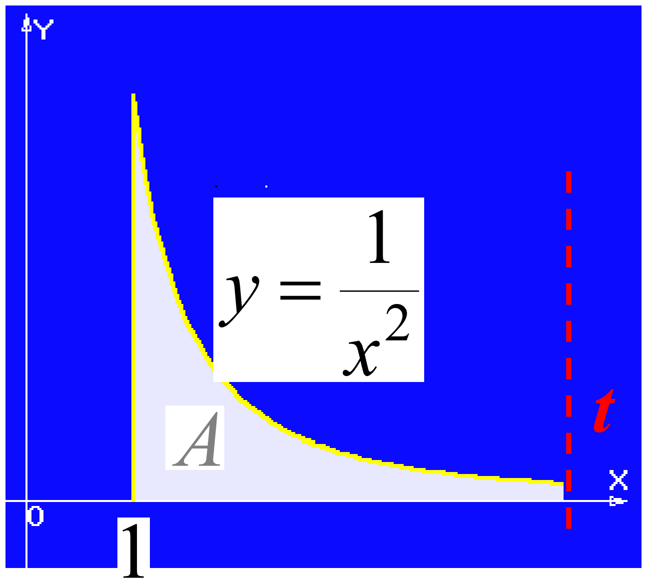
引例 考虑反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

几何意义. 曲线$y=\frac{1}{x^2}$和直线 $x=1$

及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积

$$A=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$$



一 无穷限的反常积分(无穷积分)

(1) $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx}$$

(2) $$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

定义1 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，如果极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的反常积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

如果极限存在，称反常积分收敛；

如果极限不存在，称反常积分发散.

类似的，设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续，如果

$\lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$ 存在，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx \qquad (2)$$

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，如果 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx \qquad (3)$$

说明: 上述定义中若出现 $\infty - \infty$，并非未定型，

它表明该反常积分发散 .

无穷限反常积分计算方法

——转化为定积分的极限

(1) $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx}$$

(2) $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx$$

具体计算时，可以仿照牛莱公式的形式，如

$$\text{如}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

$$= F(+\infty) - F(-\infty)$$

上述公式中若出现 $\infty - \infty$， 并非未定型，

表明该反常积分发散．

例1　计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

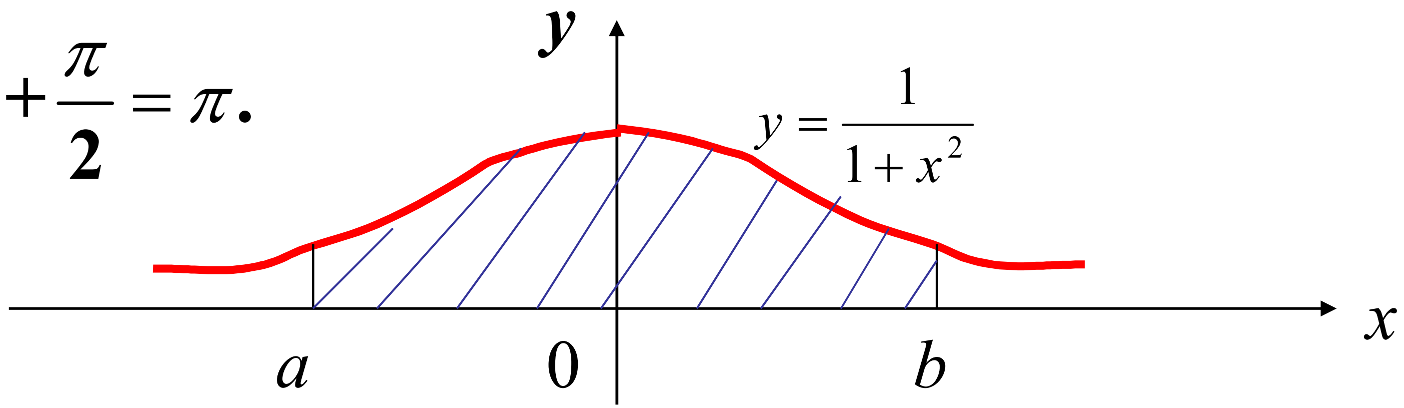
解法1

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to-\infty}[\arctan 0-\arctan t]=0-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}[\arctan t-0]=\frac{\pi}{2}$$

原式 $=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$



例1　计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

解法2　牛莱公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \arctan x - \lim_{x \to -\infty} \arctan x$$

$$= [\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})] = \pi.$$

练习 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

原积分发散 ！

注意：使用牛莱公式时，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$或 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$中有一个不存在(或为∞)，则原积分发散！

不能两个无穷大抵消！

发散的原因

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-0$$

$$=\infty$$

积分发散 ！

思考: “偶倍奇零” 对反常积分是否成立?

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0 \quad \text{对吗?}$$

由刚才的例子可知错误 .

注意：对反常积分，只有在收敛的条件下才能使用

“偶倍奇零” 的性质.

例2. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x.$

解:原式 $= -\int_0^{+\infty} e^{-x} d(-x)$

$= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$= -(\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 1)$

$= 1.$

例3 考虑$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性.

解：当 $p\neq 1$,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}x^{-p}dx=\left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1-p}(\lim_{x\to+\infty}x^{1-p}-1)=\begin{cases}+\infty & p<1\\ \frac{1}{p-1} & p>1\end{cases}$$

当 $p=1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^{+\infty}=+\infty.$

当$p>1$时反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛,其值为 $\frac{1}{p-1}$.

$p\le 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 发散.

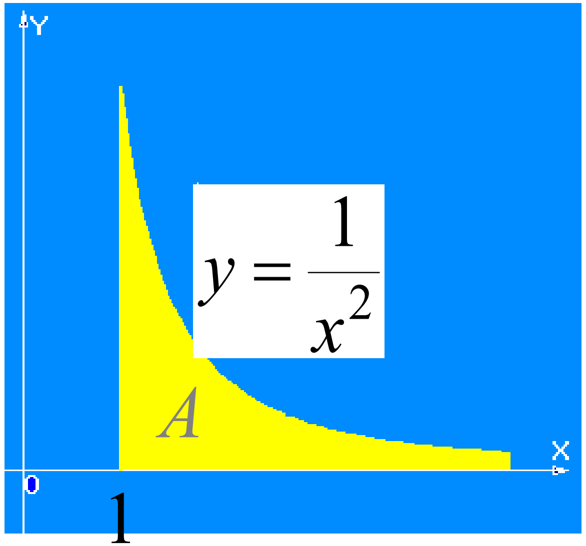
结论：

当$p>1$时反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛，其值为 $\frac{1}{p-1}$.

$p\le 1$时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 发散.

特例 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 $=1$,

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 发散。



二 无界函数的反常积分(瑕积分)

(1)$x=a$ 是瑕点

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

(2)$x=b$ 是瑕点

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$

(3)$x=c$ 是瑕点 $(a<c<b)$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

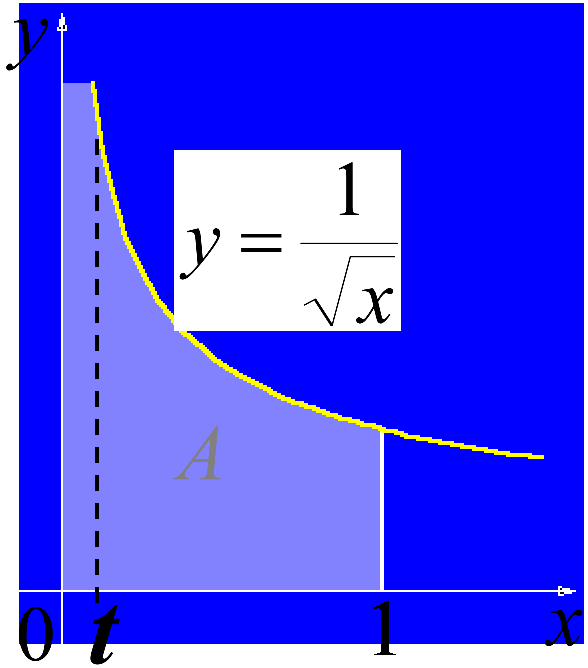
瑕点指的是函数在该点邻域内无界

引例

考虑积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

几何意义：曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴，y 轴和直线

$x=1$所围成的开口曲边梯形的面积



其含义可理解为

$$A=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx=\lim_{t\to 0^+}[2\sqrt{x}]_t^1$$

$$=\lim_{t\to 0^+} 2(1-\sqrt{t})=2$$

定义1　设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，在点a的右邻域内无界.　　($x=a$ 是瑕点)

如果极限$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在$(a,b]$上的反常积分，记作$\int_a^b f(x)dx$,即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

类似的，设函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，在点b的左邻域内无界．如果$\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$存在，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上除点$c(a<c<b)$外连续，而在点c的邻域内无界．如果$\int_a^c f(x)dx$和$\int_c^b f(x)dx$都收敛，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

无界函数的反常积分又称为瑕积分

瑕积分的计算仍然是以极限为工具来解决的.

具体计算时，仍可以仿照牛莱公式的形式，

(1)a是瑕点

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+}^{b} = F(b) - \lim_{x\to a+} F(x) = F(b) - F(a+)$$

(2)b是瑕点

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b-} = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = F(b^-) - F(a)$$

注意: 若瑕点 $c \in (a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underbrace{- F(c^+) + F(c^-)}_{\text{可相消吗?}} - F(a)$$

例1 考虑 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \ (p > 0)$的敛散性 .

解： 当 $x \to 0^+, \frac{1}{x^p} \to \infty$. 所以$x=0$是瑕点.

当 $p \neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_{0^+}^1$

$$= \frac{1}{1-p}\left(1 - \lim_{x \to 0^+} x^{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p > 1 \end{cases}$$

当 $p = 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_{0^+}^1 = +\infty$,

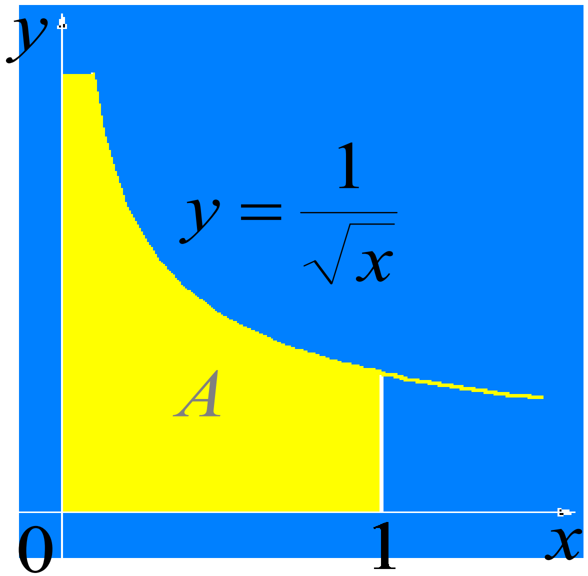
结论：

当$0<p<1$时反常积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$收敛，其值为$\frac{1}{1-p}$.

$p \geq 1$时反常积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$发散.

特例 $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ 发散，

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛 $=2$.



例2　讨论反常积分$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$的收敛性.

解　$x=0$ 是瑕点

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

又$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0^-}=-[\lim\limits_{x\to0-}\frac{1}{x}+1]=+\infty$

所以$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$发散，从而$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$发散.

思考：如果忽略了x=0是瑕点，结果会怎样？

三、小结

一、无穷限的广义积分(定义及计算)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

二、无界函数的广义积分（瑕积分）

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

（注意：不能忽略内部的瑕点）

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

作业

P262　　1(6);(7); 2

练习 考虑$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}dx$ 的敛散性.

解 当$k\neq 1$,

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d\ln x$$

$$=\left[\frac{1}{-k+1}(\ln x)^{-k+1}\right]_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1-k}\left(\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-k}-(\ln 2)^{1-k}\right)=\begin{cases}+\infty, & k<1\\ \dfrac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1}, & k>1\end{cases}$$

当 $k=1$, $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)}dx=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)}d\ln x$

$$=\left[\ln\ln x\right]_{2}^{+\infty}=+\infty.$$

当$k>1$时, 反常积分 收敛,其值为$\frac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1}$.

$k\le 1$时积分 发散.

练习

积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$的瑕点是哪几点？

思考题解答

积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$可能的瑕点是$x=0,\quad x=1$

$\because \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1,\qquad \therefore\ x=1$不是瑕点,

$\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$的瑕点是$x=0.$

练习 考虑$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$的敛散性.

*例. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x.$

解: $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点, 故 I 为反常积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\arctan f(x)+C$$

$$=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

备用题 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$，并求其值．

解:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\xlongequal{\text{令}\ t=\frac{1}{x}}\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\,\mathrm{d}\,(x-\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$