第二节　定积分在几何学上的应用

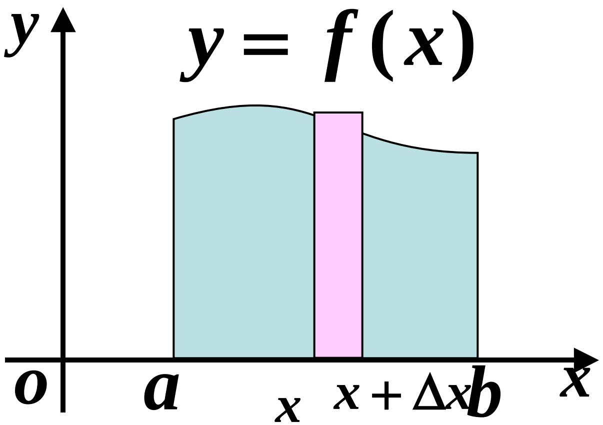
一 平面图形的面积

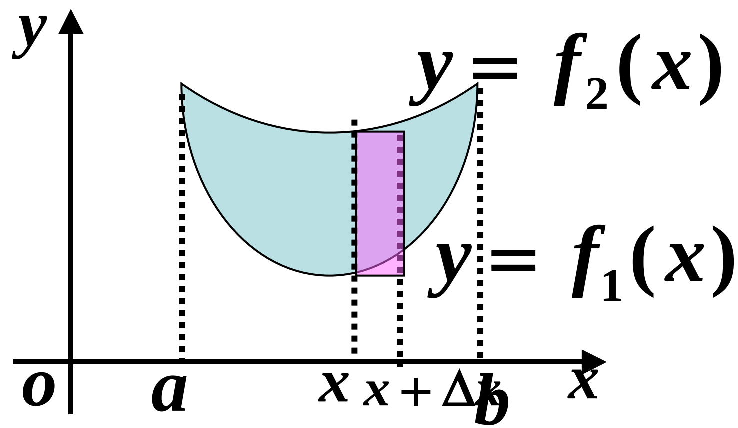
直角坐标系情形

参数方程情形

极坐标系情形

1. 直角坐标系情形





面积元素：$dA = f(x)dx$

面积元素：$dA = [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

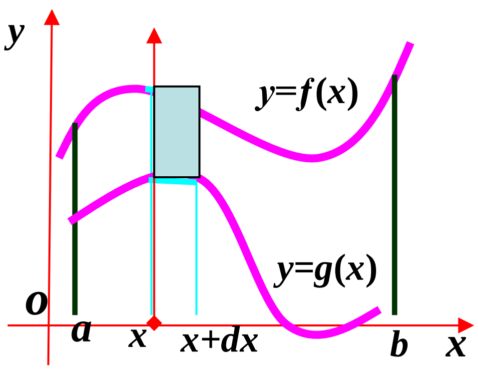
平面图形的面积

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

一般的，

(1) 若平面图形 D是由上下两条曲线(上边界的方程为 $y = f(x)$,下边界方程为 $y = g(x)$)，以及直线 $x = a$与$x = b$所围成的,则图形的面积为

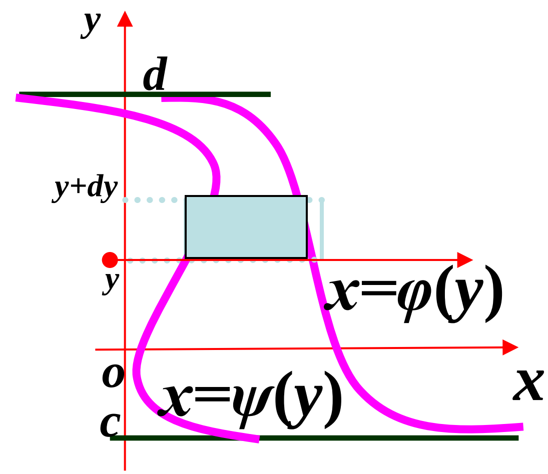
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



面积元素 $dA = [f(x) - g(x)]dx$

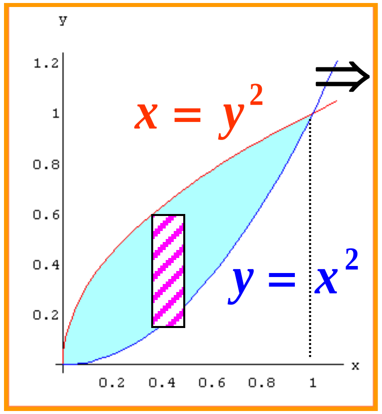
2. 若平面图形 D 是由左右两条曲线(左边界方程为$x = \psi(y)$,右边界方程为$x = \varphi(y)$),以及直线 $y = c$ 与 $y = d$ 所围成，则图形的面积为

$$A = \int_c^d [\varphi(y) - \psi(y)] dy$$



面积元素 $dA = [\varphi(y) - \psi(y)]\, dy$

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.



$\Rightarrow y = \sqrt{x}$

解 两曲线的交点

$$(0,0) \quad (1,1)$$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

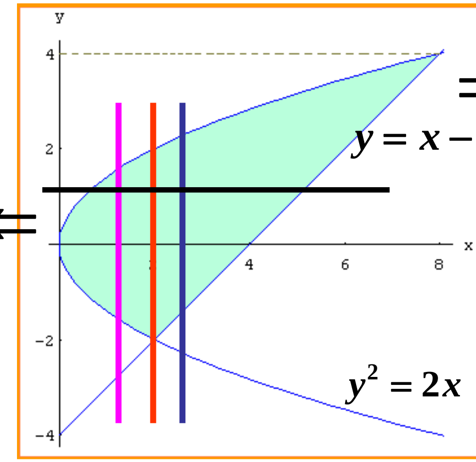
例 2　计算由曲线$y^2 = 2x$和直线$y = x - 4$所围成的图形的面积.

解　两曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2,-2), (8,4).$$

$x = \dfrac{y^2}{2} \Leftarrow$



$\Rightarrow x = y + 4$

选 y 为积分变量　$y \in [-2, 4]$

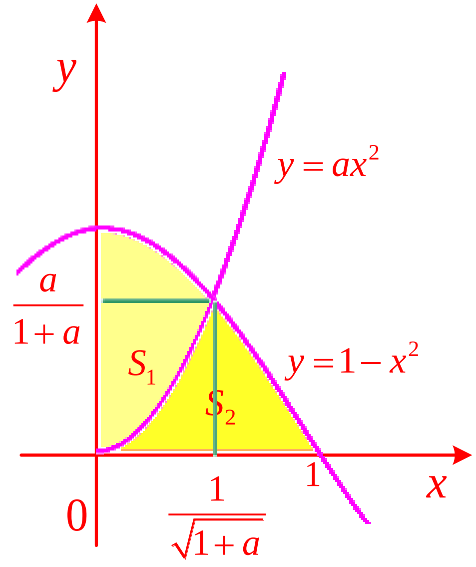
$$dA = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$A = \int_{-2}^{4} dA = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = 18.$$

例3 设曲线$y=1-x^2$，x轴与y轴在第一象限所围的图形被曲线$y=ax^2\,(a>0)$分为面积相等的两部分，试确定a的值。

解 如图，解方程组

$$\begin{cases} y=1-x^2 \\ y=ax^2 \end{cases} \text{得交点}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$$



而

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}(1-x^2-ax^2)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{3}(1+a)x^3\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2}{3\sqrt{1+a}}$$

再由$S_1=\frac{1}{2}S$得 $\frac{2}{3\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{1}{3}$

解之得 $a=3$

2 参数方程情形

如果曲边梯形的曲边为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) d\varphi(t) = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t) dt.$$

(其中 t_1 和 t_2 对应积分区间起点 a 与终点 b 的参数值)

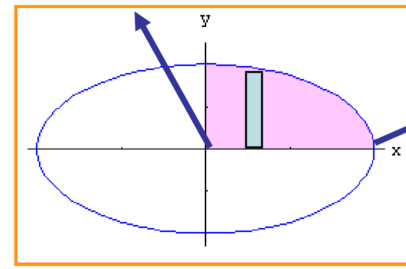
假设在积分区间上，$x = \varphi(t)$ 具有连续导数，

$y = \psi(t)$ 连续.

例 4 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积.

$t=\dfrac{\pi}{2}$

$x=0$



$x=a$

$t=0$

解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

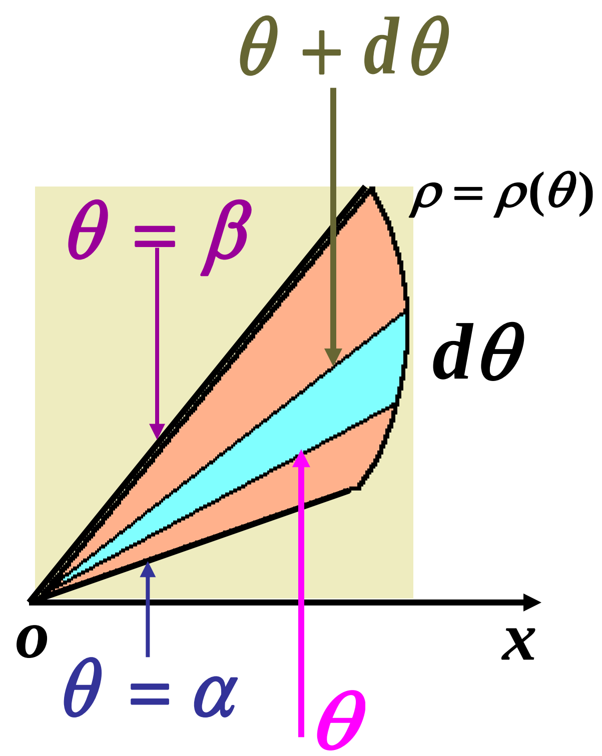
由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A=4A_1=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,d(a\cos t)$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\pi ab.$$

3. 极坐标系情形

设由曲线 $\rho = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$、$\theta = \beta$ 围成一曲边扇形，求其面积．这里，$\varphi(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，且 $\varphi(\theta) \geq 0$.

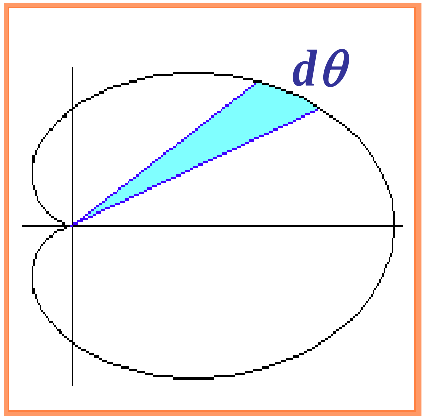


面积元素 $dA = \dfrac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$

曲边扇形的面积 $A = \int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta.$

例 5 求心形线$\rho = a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积$(a>0)$.

解 $$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$



$$= \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

由对称性

$$A = 2\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

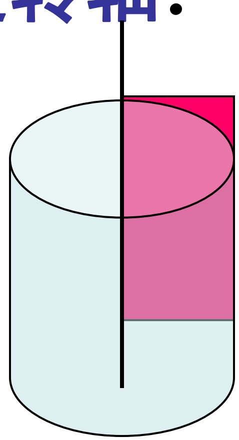
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$= a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

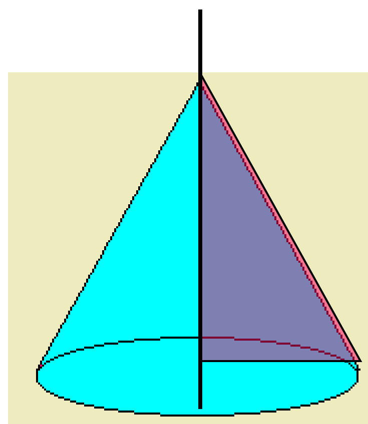
二、体积

1、旋转体的体积

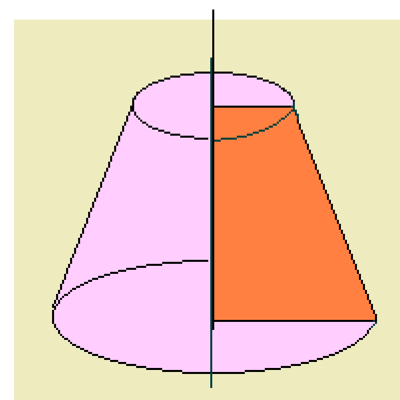
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做**旋转轴**．



圆柱



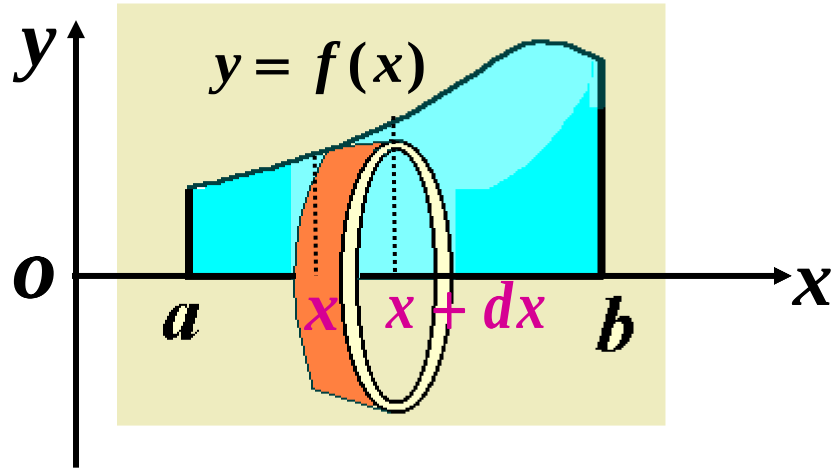
圆锥



圆台

情形(1)

一般地，如果旋转体是由连续曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，体积为多少？



取积分变量为x，$x\in[a,b]$

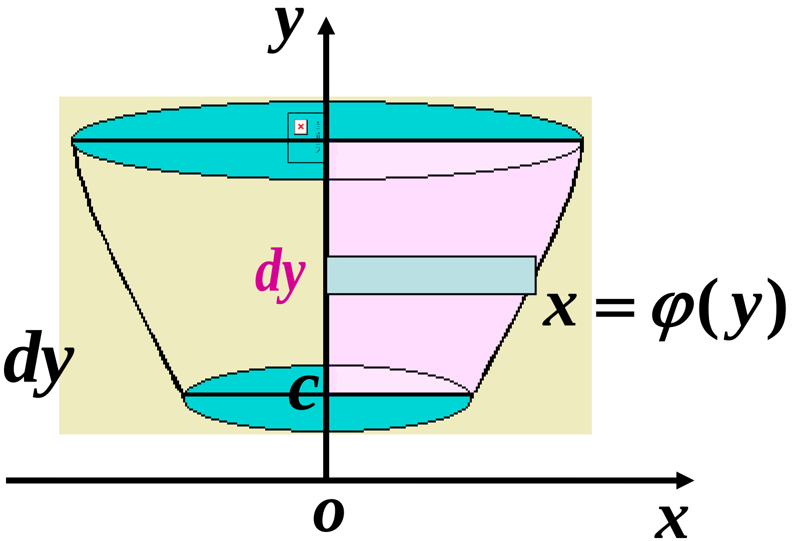
体积元素 $dV=\pi[f(x)]^2dx$

旋转体的体积为

$$\boxed{V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx}$$

情形(2)

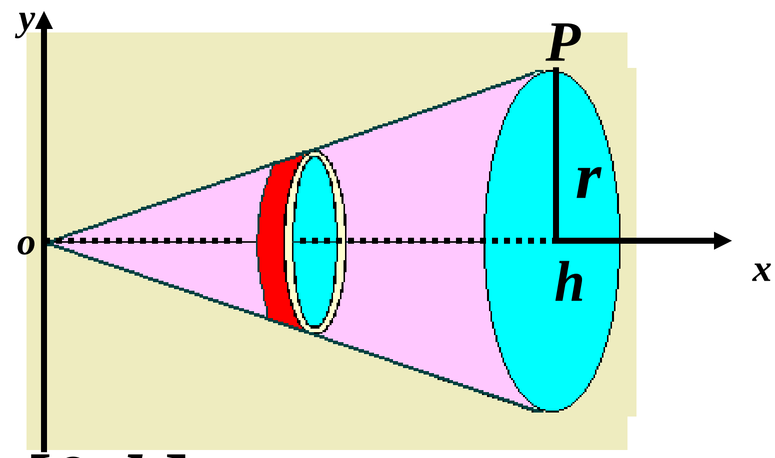
类似地，如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为



$$dV=\pi[\varphi(y)]^2dy$$

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2dy$$

例 1　连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形．将它绕x 轴旋转构成一个底半径为r 、高为h的圆锥体，计算圆锥体的体积．



解　直线 OP方程为

$$y=\frac{r}{h}x$$

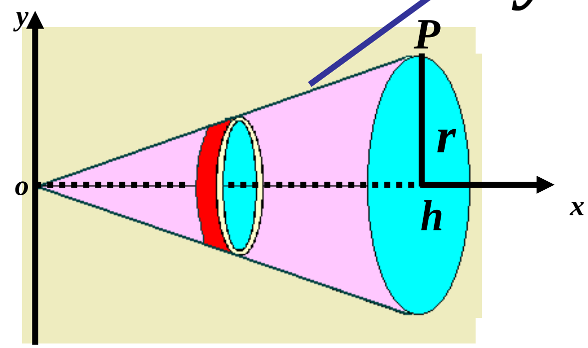
取积分变量为x， $x\in[0,h]$

在$[0,h]$上任取小区间$[x,x+dx]$,

以dx为底的窄边梯形绕x轴旋转而成的薄片的体积为

$$y=\frac{r}{h}x$$

$$dV=\pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx$$

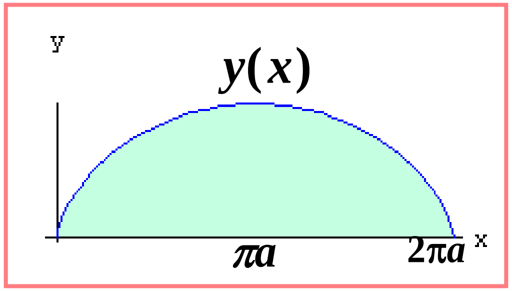


圆锥体的体积

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi h r^2}{3}.$$

例 2　求摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱与$y=0$所围成的图形分别绕x轴、y轴旋转构成旋转体的体积.

解　绕x轴旋转的旋转体体积



$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)dx$$

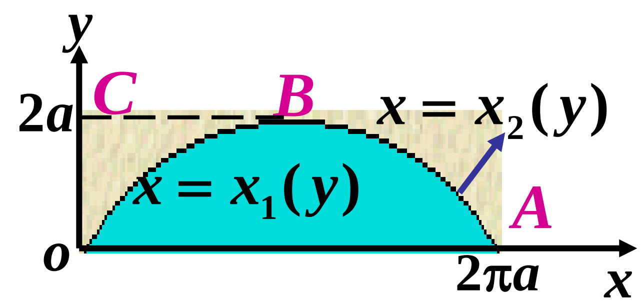
$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot da(t-\sin t)$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=5\pi^2a^3.$$

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t)$$

绕y轴旋转的旋转体体积



可看作平面图$OABC$ 与OBC

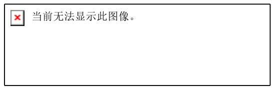
分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dy$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$

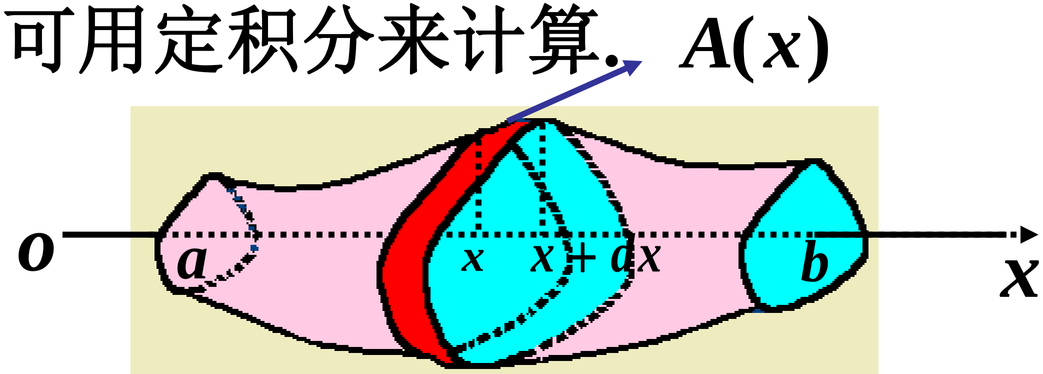
$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt$$



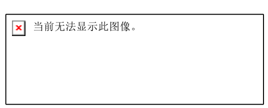
2、平行截面面积为已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.



$A(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积，

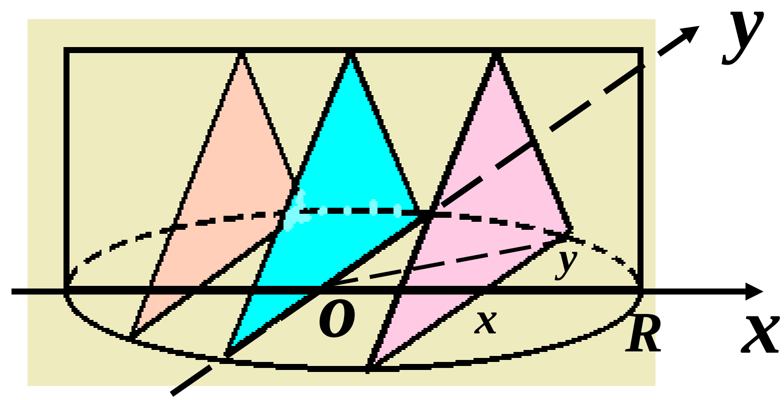
$A(x)$为x的已知连续函数

$dV =$ 

立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx.$

例 4　求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

(平行于底面的截面都是等腰三角形)



解　取坐标系如图

底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

垂直于 x 轴的截面为等腰三角形

截面面积 $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$

立体体积 $V = \int_{-R}^{R} A(x)dx$

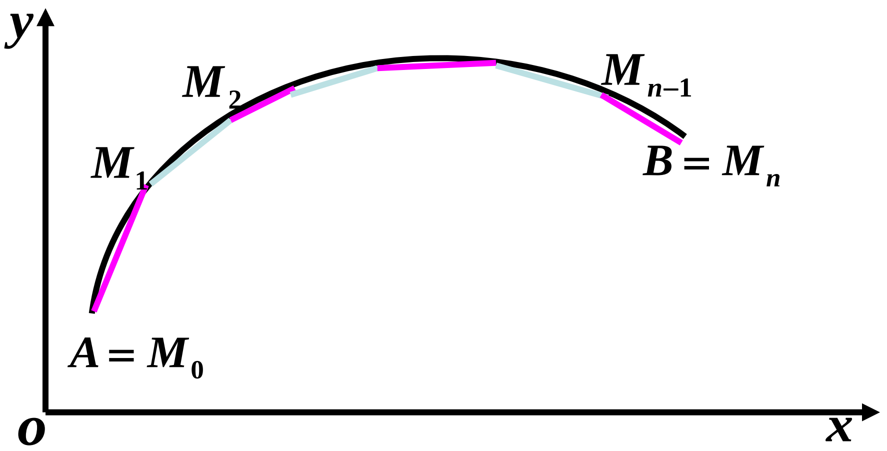
$$= h\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx \quad = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

三、平面曲线的弧长

设A、B是曲线弧上的两个端点，在弧上插入分点

$$A = M_0, M_1, \cdots M_i,$$

$$\cdots, M_{n-1}, M_n = B$$



并依次连接相邻分点得一内接折线，当分点的数目无限增加且每个小弧段都缩向一点时，

此折线的长$\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$的极限存在，则称此极限为曲线弧$AB$的弧长.

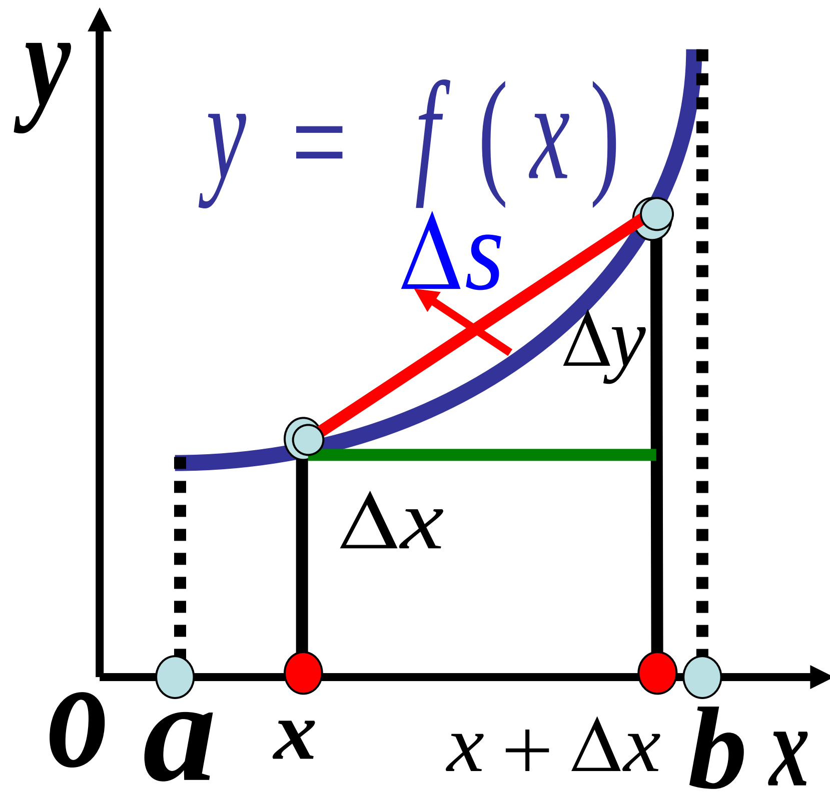
弧长微分

从点(x, y)

到$(x+\Delta x, y+\Delta y)$

的小段弧长记为Δs,

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

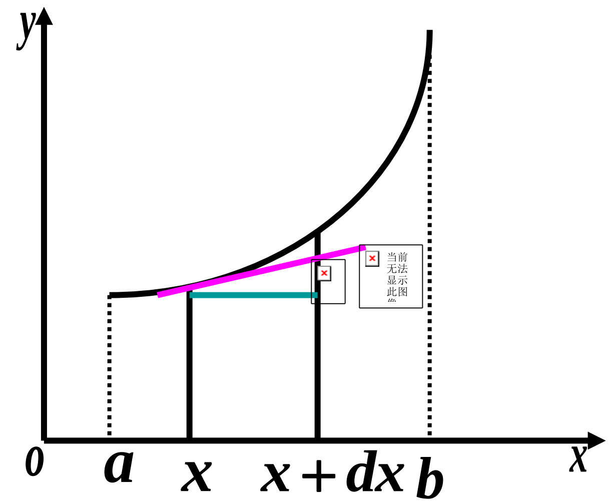


$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

弧长微分公式

1、直角坐标情形

设曲线弧为 $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$，其中 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数



取积分变量为 x，在 $[a,b]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$，

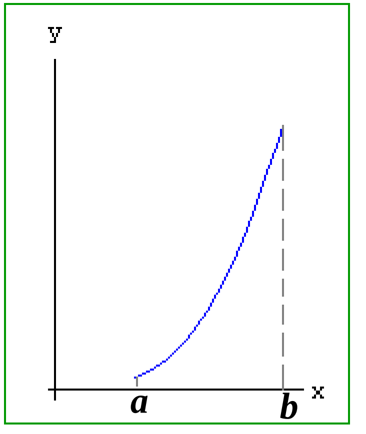
以对应小切线段的长代替小弧段的长

小切线段的长 $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

弧长元素 $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$　弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$

例 1 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从$a$到$b$的一段弧的长度.

解 $\because y'=x^{\frac{1}{2}},$



$$\therefore ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+x}dx,$$

所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

2、参数方程情形

曲线弧为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad (\alpha \le t \le \beta)$

其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数.

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)](dt)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$

补例 求星形线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$的全长.

解 星形线的参数方程为$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

根据对称性 $s = 4\underline{s_1}$ 第一象限部分的弧长

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t\,dt$$

$$= 6a.$$

3、极坐标情形

曲线弧为 $\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$

其中$\rho(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数.

$$\because\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$$

$$\therefore ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(d\rho(\theta)\cos\theta)^2+(d\rho(\theta)\sin\theta)^2}$$

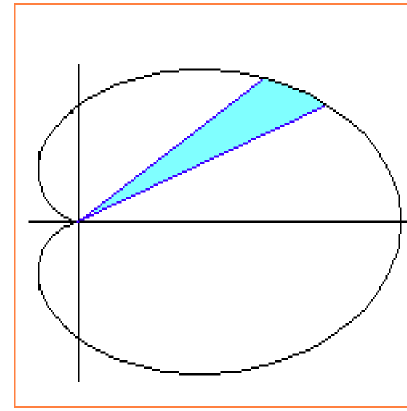
$$=\sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)^2(d\theta)^2+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)^2(d\theta)^2}$$

$$=\sqrt{\rho'^2(\theta)\cos^2\theta+\rho^2(\theta)\sin^2\theta+\rho'^2(\theta)\sin^2\theta+\rho^2(\theta)\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta,$$

弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta.$

例 4 求心型线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的长.



$(a>0)$ $\qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$

解 $\because \rho' = -a\sin\theta$

$$\therefore ds = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta,$$

$$= \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2(\sin\theta)^2}d\theta$$

由对称性

$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2(\sin\theta)^2}d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta}d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta = 8a.$$

四、小结

求在直角坐标系下、参数方程形式下、极坐标系下平面图形的面积.

（注意恰当的选择积分变量有助于简化积分运算）

旋转体的体积

- 绕 x 轴旋转一周
- 绕 y 轴旋转一周

平行截面面积为已知的立体的体积

弧微分的概念

$$\text{求弧长的公式}\begin{cases}\text{直角坐标系下}\\ \text{参数方程情形下}\\ \text{极坐标系下}\end{cases}$$

作业

P286　2(2);(4); 6;

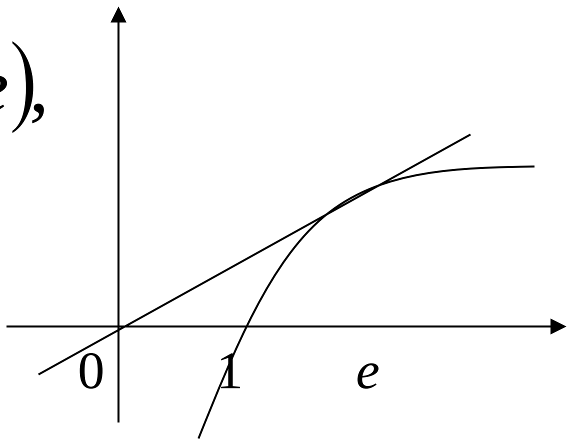
12;

28(参考P371--附录3)

1.求由曲线 $y=\ln x$ 及过曲线上点 $(e,1)$ 的切线和 x 轴所围成的图形的面积及绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解　(1)先求切线方程

$$y'=\frac{1}{x},\ y'\big|_{x=e}=\frac{1}{e},\qquad y-1=\frac{1}{e}(x-e),$$



切线方程为 $y=\dfrac{x}{e}.$

选取 y 为积分变量, $y\in[0,1]$,

切线为 $x=ey,$ 曲线为 $x=e^{y}.$

$$S=\int_0^1\left(e^{y}-ey\right)dy=\left[e^{y}-\frac{1}{2}ey^{2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-1.$$

(2)

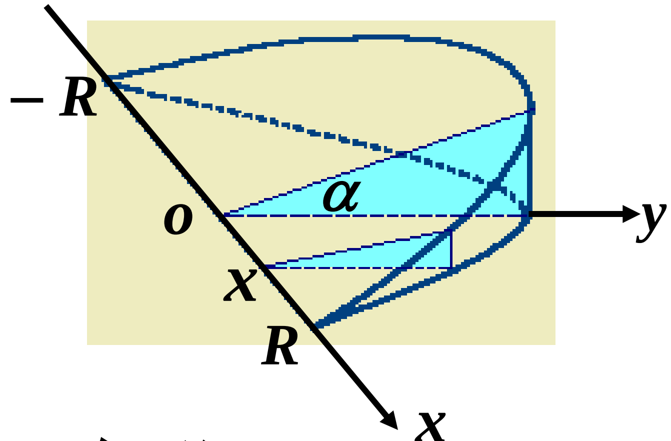
$$V_x = \pi\int_0^e \left(\frac{x}{e}\right)^2 dx - \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi x^3}{e^2}\Bigg|_0^e - \pi\left(x\ln^2 x\Bigg|_1^e - \int_1^e \ln x dx \right)$$

$$= \frac{\pi e}{3} - (\pi e - 2\pi) = \pi\left(2 - \frac{2}{3}e\right).$$

3　一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解　取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

垂直于x轴的截面为直角三角形

截面面积　$A(x)=\dfrac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$

立体体积 $V=\dfrac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

4 证明正弦线 $y = a\sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{1+a^2}\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 的周长.

证 设正弦线的弧长等于 s_1

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}dx,$$

设椭圆的周长为 s_2

5 计算曲线$y=\int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,d\theta$的弧长$(0\le x\le n\pi)$.

解 $$y'=n\sqrt{\sin\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\sqrt{\sin\frac{x}{n}},$$

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}\,dx$$

$$\underline{\underline{x=nt}}\ \int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\cdot n\,dt$$

$$=n\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=n\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)dt=4n.$$

$$s_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt,$$

根据椭圆的对称性知

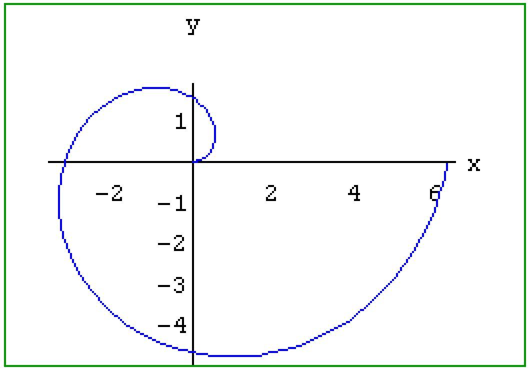
$$s_2 = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (1 + a^2)(\cos t)^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + a^2 \cos^2 t}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + a^2 \cos^2 x}\,dx = s_1,$$

故原结论成立.

6　求阿基米德螺线$r=a\theta \quad (a>0)$上相应于θ从0到2π的弧长.



解　$\because \quad r'=a,$

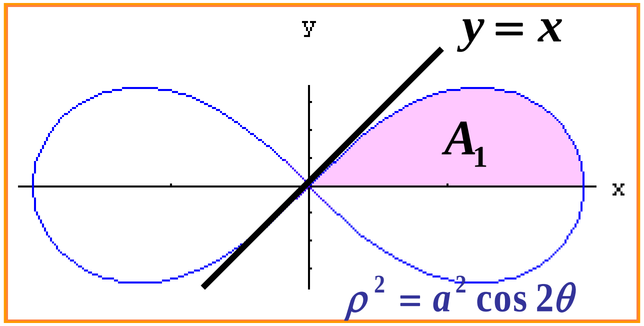
$$\therefore \ s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

–例 6　求双纽线$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积.

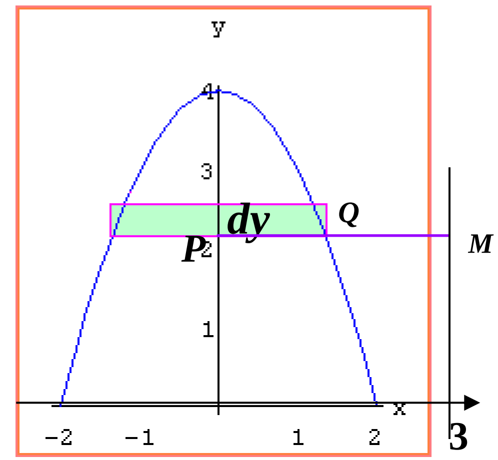
解　由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积



$$A = 4A_1$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta d\theta = a^2.$$

例 3 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转构成旋转体的体积.



解 取积分变量为 y, $y\in[0,4]$

体积元素为

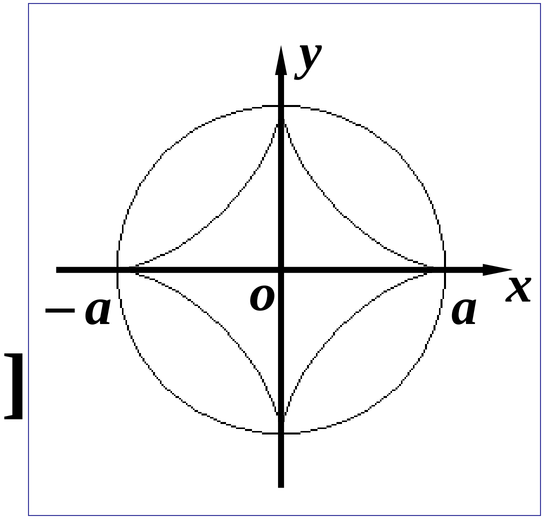
$$dV=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]dy$$

$$=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]dy$$

$$=12\pi\sqrt{4-y}dy,$$

$$\therefore V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi.$$

–例 2 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$绕$x$轴旋转构成旋转体的体积.



解 $\because y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}},$

$$\therefore y^2=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \quad x\in[-a,a]$$

旋转体的体积

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{32}{105}\pi a^3.$$