第四节 无穷小与无穷大

研究极限时，有两种变量非常重要．一种是在极限过程中，变量可以无限变小，而且要多么小就有多小；一种是在极限过程中，变量可以无限变大，而且要多么大就有多大．我们分别将它们称为无穷小和无穷大.

一、无穷小
二、无穷大
三、无穷小与无穷大的关系
四、小结

一 无穷小

1. 定义

极限为零的函数称为<u>无穷小</u>.

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0,\quad \therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0,\quad \therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0,\quad \therefore$ 数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小.

注:

✐无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

✐零是可以作为无穷小的唯一的数.

✐无穷小量并非负无穷大.   #

注意：一个函数是否无穷小与其自变量的变化趋势有关，

当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，

但不能笼统地说 $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，#

2 无穷小性质

(1) 定理1 :无穷小与函数极限的关系

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha,$$

其中 A 是常数，α 是 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小.

意义 1.将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2.给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式

$f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

#

(2) 定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

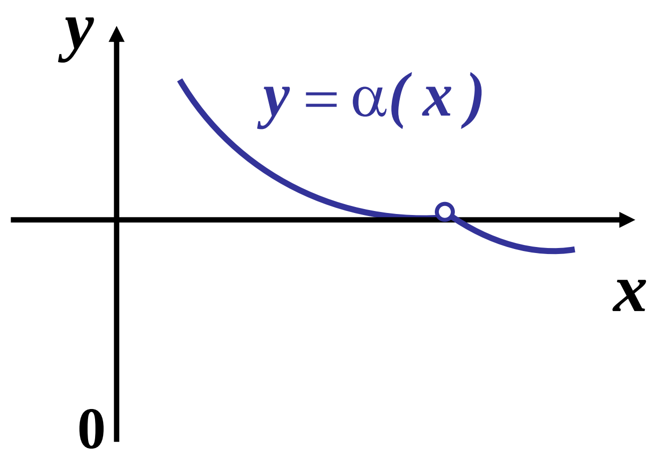
例 求$\lim\limits_{x\to 0} x\arctan(x^2)$ #

解 $\because \arctan(x^2)$有界，x是当$x\to 0$时的无穷小，

故$\lim\limits_{x\to 0} x\arctan(x^2)=0.$

再如 证明 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$

(3)如果$\alpha(x)$是无穷小,则$|\alpha(x)|$也是无穷小.



(4)有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})$. #

解

当 $n\to\infty$ 时，函数是无穷多项之和，不可以直接用有理运算法则.

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1+2+\cdots+n-1}{n^2}=\frac{n-1}{2n},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

“无穷多个无穷小之和不一定是无穷小”

二 无穷大

1 定义 绝对值无限增大的函数称为<u>无穷大</u>.

当x的绝对值充分大时，函数值的绝对值要多大有多大. #

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\ .$$

例如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1} = \infty.$

注意

- 无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

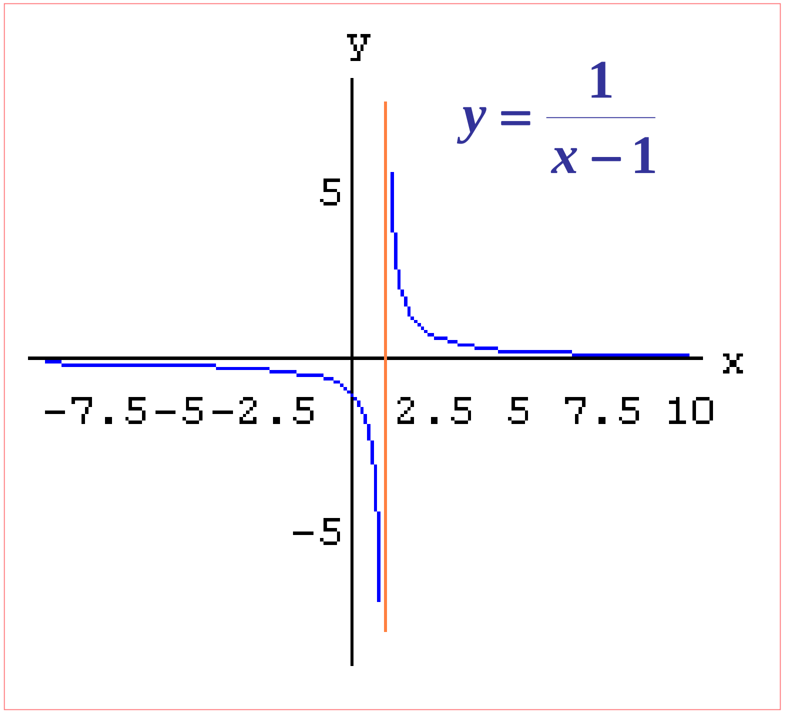
特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty)$$

2 无穷大在函数图形上的体现

结论：如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例如 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty.$



三 无穷小与无穷大的关系

定理2 在同一自变量变化过程中, 无穷大的倒数为无穷小; 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

#

四 小结

1. 无穷小与无穷大的定义
2. 无穷小与函数极限的关系 (定理1)
3. 无穷小与无穷大的关系 (定理2)

作业

P37

1; 4; 6

例 证明 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3 无穷大的性质

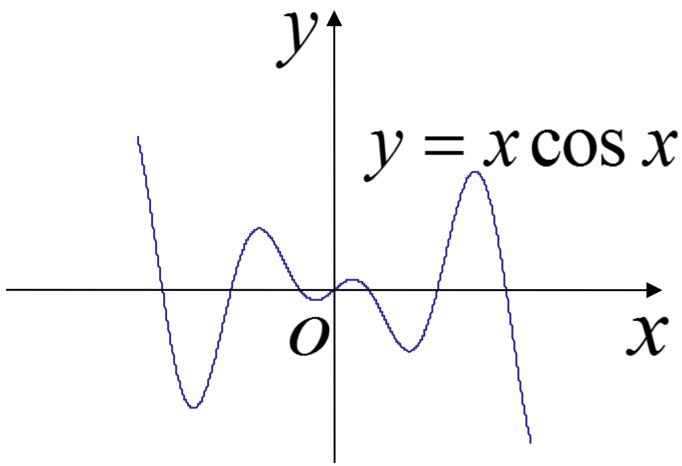
思考

(1)无穷大是否一定是无界函数?

(2)反过来，无界函数是否一定是无穷大?

答 无穷大是无界函数,但是无界函数未必是无穷大.

例如, 函数 $f(x)=x\cos x$, $x\in(-\infty, +\infty)$



当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$不是无穷大!

思考：当$x \to 0$时，变量$\dfrac{1}{x^2} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$是

A）无穷小；　　B）无穷大；

C）有界但不是无穷小；　D）无界但不是无穷大.

解：取$x \to 0$的子序列$x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$　则$f(x_n) = (2n\pi)^2 \sin 2n\pi = 0$

再取$x \to 0$的子序列$y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$

则$f(y_n) = (2n\pi + \dfrac{\pi}{2})^2 \cdot \sin(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = (2n\pi + \dfrac{\pi}{2})^2 \to \infty$

$\therefore$ 选D.

定理：函数极限与数列极限的归并定理

-Heine定理

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$\forall x_n \neq x_0, n = 1, 2, \cdots$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = A$.

此定理对于极限为无穷大的情形仍适用.

其逆否命题经常用于证明一个函数
不是无穷大.