第四节　隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数

一　隐函数的导数

二　由参数方程确定的函数的导数

三　相关变化率

一、隐函数的导数

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

定义：由方程$F(x,y)=0$所确定的y关于x的函数称为隐函数.

例如 $x + y^3 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt[3]{1-x}$

$F(x,y)=0 \quad \Longrightarrow \quad y = f(x)$ 隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

例如： $xy - e^x + e^y = 0$

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

求导时，注意将方程中的 y看成$y(x)$.

例如： $xy - e^x + e^y = 0$

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0,$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例2 设 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 方程两边对x求导得

$$1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\frac{dy}{dx}=0 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}$$

将上式两边再对x求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$$

对数求导法

观察函数 $y = x^{\sin x}$

方法:

先在方程两边取对数, 然后等式两边求导求出导数.

--------对数求导法

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

例4 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解法一 对数求导法

等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

#P103

设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解法二　　指数求导法

$$y' = (x^{\sin x})' = [e^{\ln(x^{\sin x})}]'$$

$$= (e^{\sin x \ln x})'$$

$$= (e^{\sin x \ln x})(\sin x \ln x)'$$

$$= (e^{\sin x \ln x})[\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}]$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

例5 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\quad(x>1)$, 求$y'$.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1]$$

二、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定 y 与 x 间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases}$ $\Rightarrow$ $t=\dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$\therefore y=t^2=(\dfrac{x}{2})^2=\dfrac{x^2}{4}$ $\quad\therefore y'=\dfrac{1}{2}x$

问题： 消参困难或无法消参如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

再设函数$x = \varphi(t), y = \psi(t)$都可导,且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\frac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

例6 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{1 - \cos\dfrac{\pi}{2}} = 1.$$

求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程.

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

当$t = \dfrac{\pi}{2}$时，$x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$，$y = a$.

所求切线方程为

$$y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$$

即 $y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$

假设函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$二阶可导,如何求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$?

已知 $\dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} \cancel{=} \left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$?

通过上述方法求得的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$是关于t的函数$\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,

即$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x=\varphi(t) \end{cases}$

即$\begin{cases} \boxed{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$

将$\dfrac{dy}{dx}$看作新的函数u, u是关于t的函数，
求y关于x的二阶导数相当于求u关于x的一阶
导数，再利用一次参数方程的求导方法即可.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\boxed{\dfrac{dy}{dx}})}{dx} = \frac{d(\dfrac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})}{\varphi'(t)}$$

$$= \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

例7 求摆线的参数方程$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$所确定的函数 $y = y(x)$的二阶导数.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(\cot\frac{t}{2})'}{a(t-\sin t)'} = \frac{-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

三、相关变化率

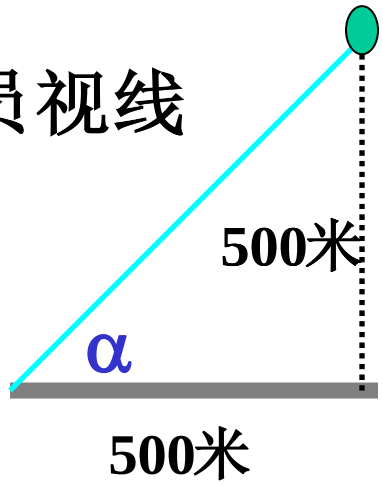
设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，从而它们的变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 之间也存在一定关系，这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

相关变化率问题:

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率?

例8 一汽球从离开观察员500米处离地面铅直上升,其速率为140米/秒.当气球高度为500米时,观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升t秒后,其高度为h,观察员视线的仰角为α,则



$$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$

α、h都是时间t的函数,

上式两边对t求导得 $\sec^2\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{500} \cdot \dfrac{dh}{dt}$

$\because \dfrac{dh}{dt} = 140$米/秒, 当 $h = 500$米时, $\sec^2\alpha = 2$

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/秒) 仰角增加率

小结

隐函数求导法则：直接对方程两边求导;

参数方程求导：实质上是利用复合函数求导法则;

作业

P108

1 (1)(3)；2；　3(3);

4(1);用对数求导法或指数求导法

7(1);8(1)

思考题

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，由$y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\varphi'(t)\neq 0)$

可知$y''_x=\dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$，对吗？

思考题解答

不对.

$$y''_x = \frac{d}{dx}\left(y'_x\right) = \frac{dy'_x}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

备用题

1. 设$y=y(x)$由方程 $e^y+xy=e$ 确定 ，求 $y''(0)$.

解：方程两边对x求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0 \qquad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0 \qquad ②$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，故由 ① 得

$$y'(0)=-\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$

2.　设　$y=(\sin x)^{\tan x}$，求 y'.

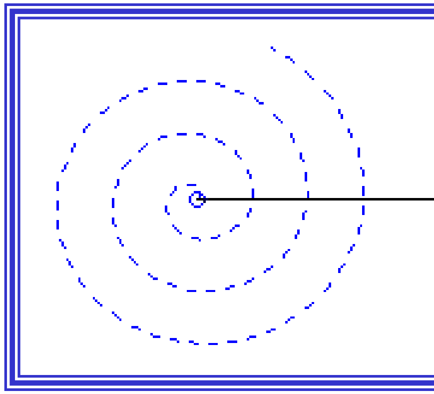
提示：用对数求导法或指数求导法

答案：

$$y'=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1)$$

3. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

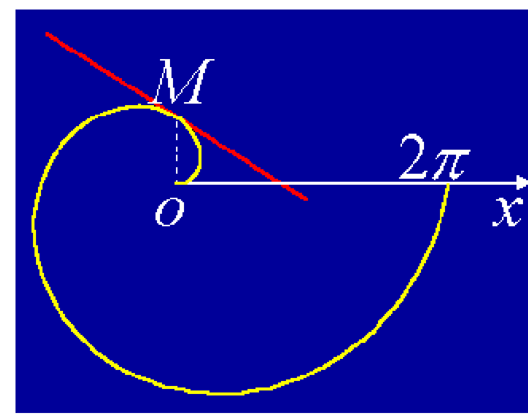
解: 化为参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(0,\frac{\pi}{2})$,

$$斜率\ k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$



∴ 切线方程为 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$

***例7** 不计空气的阻力，以初速度v_0， 发射角α 发射炮弹，其运动方程为

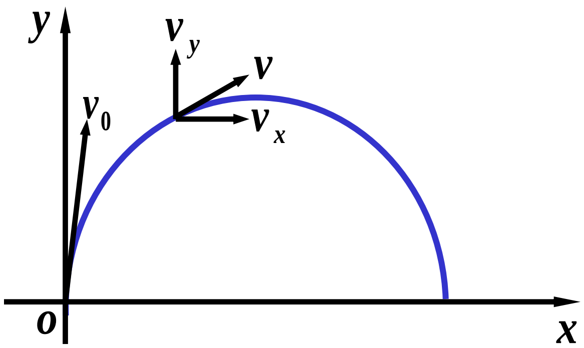
$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha = v_1 t, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 = v_2 t - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

求 (1)炮弹在时刻 t_0的运动速度；

(2)炮弹在时刻 t_0的运动方向

解

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$



(1) 炮弹在 t_0时刻沿 x, y轴方向的分速度为

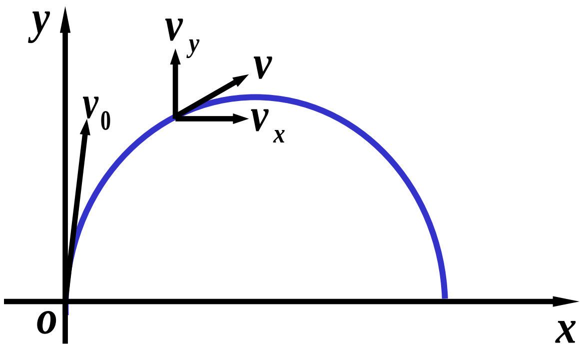
$$v_x = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_0} = (v_1 t)'\bigg|_{t=t_0} = v_1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \left(v_2 t - \frac{1}{2} g t^2\right)'\bigg|_{t=t_0} = v_2 - g t_0$$

$\therefore$ 在 t_0时刻炮弹的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - g t_0)^2}$$

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$



(2) 在 t_0时刻的运动方向即轨迹在t_0时刻的切线方向, 可由切线的斜率来反映 .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v_2 t - \frac{1}{2} g t^2)'}{(v_1 t)'} = \frac{v_2 - gt}{v_1}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0} = \frac{v_2 - g t_0}{v_1}.$$

当$t_0 = \dfrac{v_2}{g}$时，切线与地面平行，抛射体达到最高点.

例3 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}=3y+3x\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\left.\frac{y-x^2}{y^2-x}\right|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\dfrac{3}{2}=-(x-\dfrac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为$y-\dfrac{3}{2}=x-\dfrac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然通过原点.

公式法

一般地

$$f(x)=u(x)^{v(x)} \quad (u(x)>0)$$

$$\because \ \ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x)$$

两边求导

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\therefore \ f'(x)=u(x)^{v(x)}v'(x)\cdot\ln u(x)$$

$$+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x)$$

即把幂指函数分别看成指数函数和幂函数求导后相加.