第二、三节 函数与数列的极限

- 极限概念的产生
- 函数极限
- 数列极限

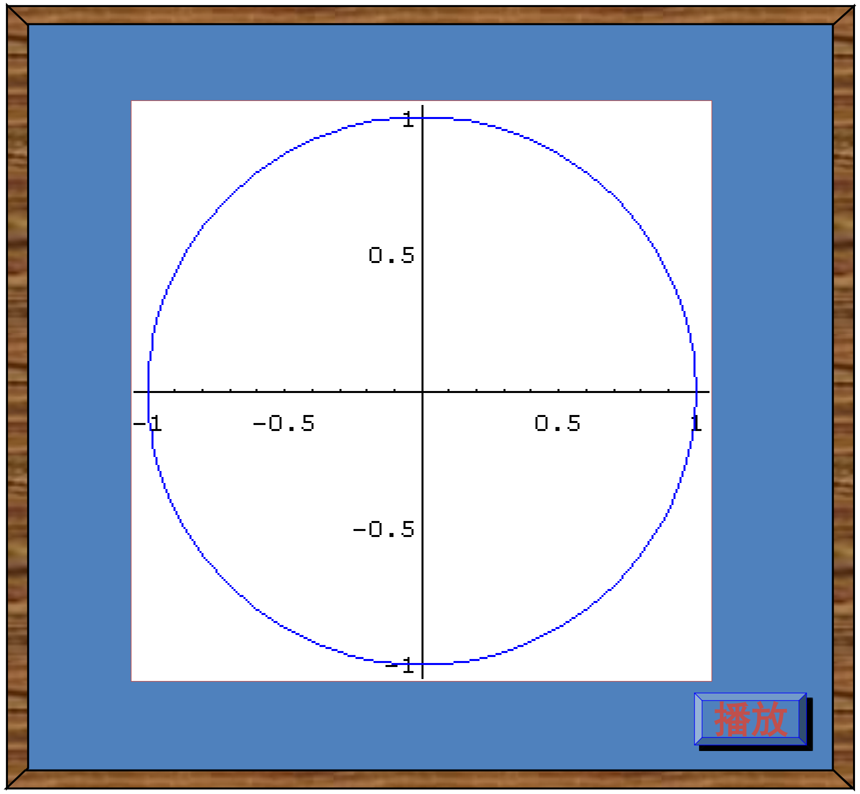
一、极限概念的产生

公元三世纪，我国数学家刘徽用割圆术来计算圆面积

割圆术：

"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"

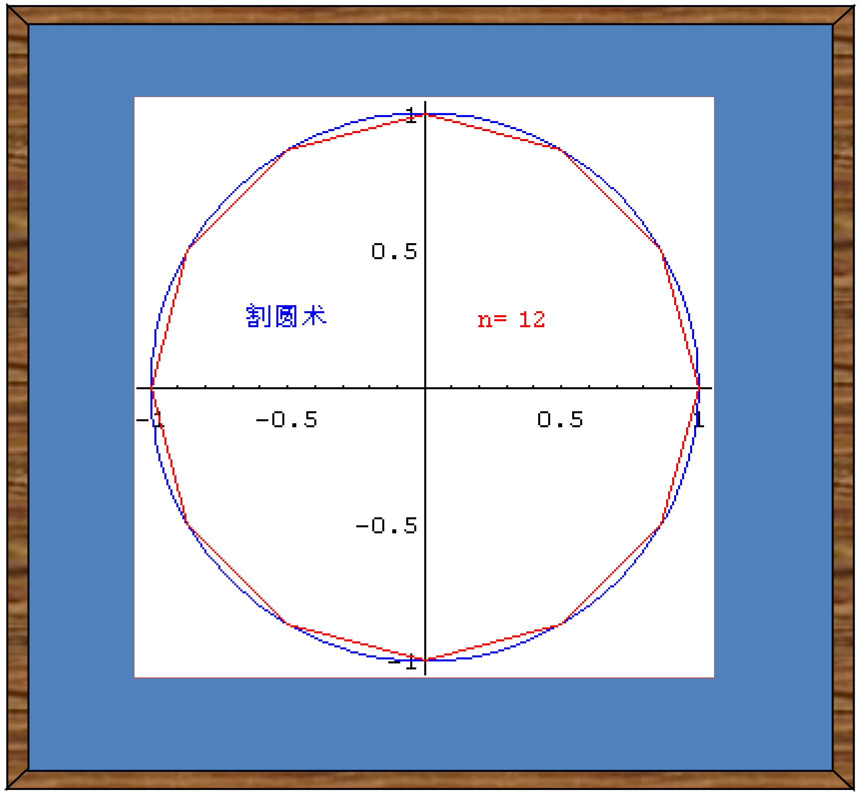
——刘徽



割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

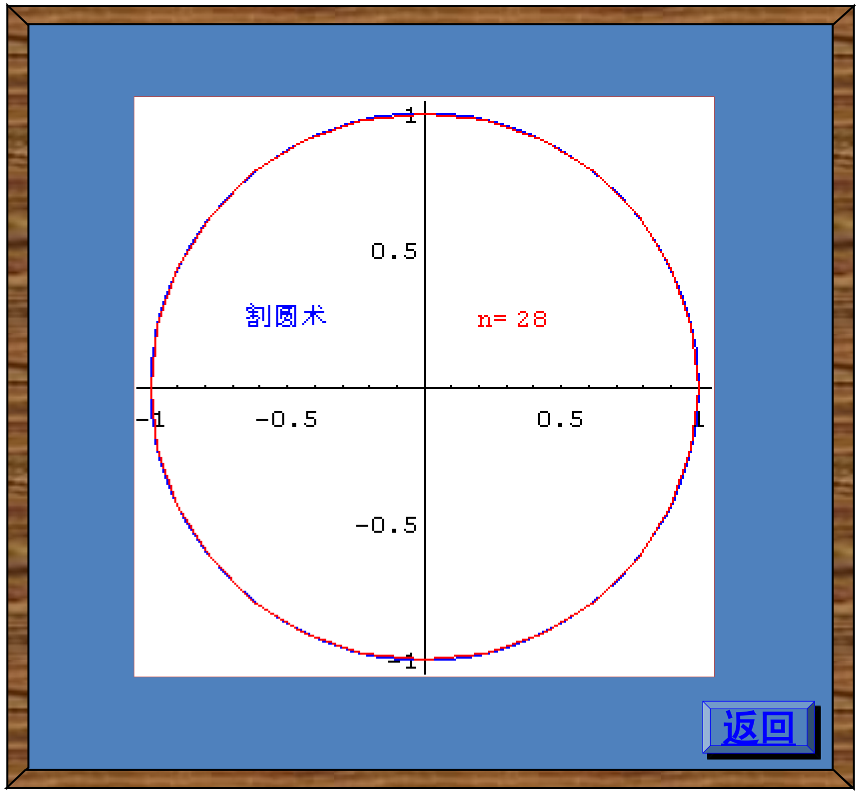
——刘徽



割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽

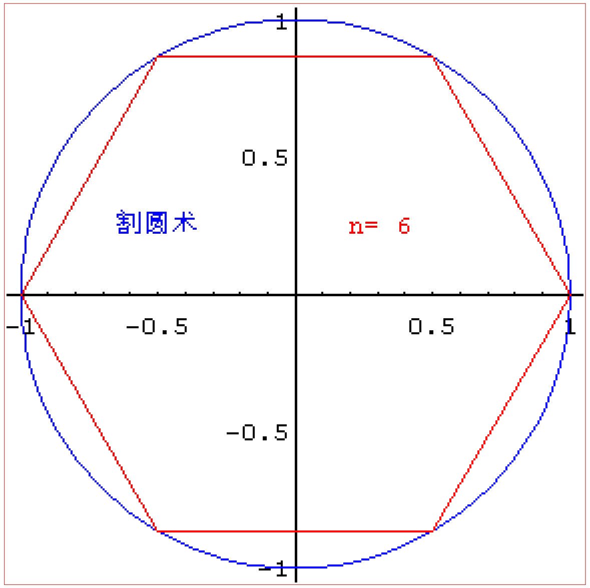


正三边形的面积 A_3

正四边形的面积 A_4

…… ……

正n边形的面积 A_n



$$A_3, A_4, A_5, \cdots, A_n, \cdots \longrightarrow S$$

刘徽求出圆的内接正3072边形的面积, 导出圆周率为3927/1250, 化成小数是3.1416。

极限的思维功能

有限→无限

近似→精确

量变→质变

二、函数极限的概念

$$\boxed{y = f(x)}$$

当自变量 x “趋于” 某种状态时，函数值 $f(x)$ 将随之变化

考察 $f(x)$ 的变化趋势是否确定，

如果确定就可以定义函数的极限

分两种情形讨论：

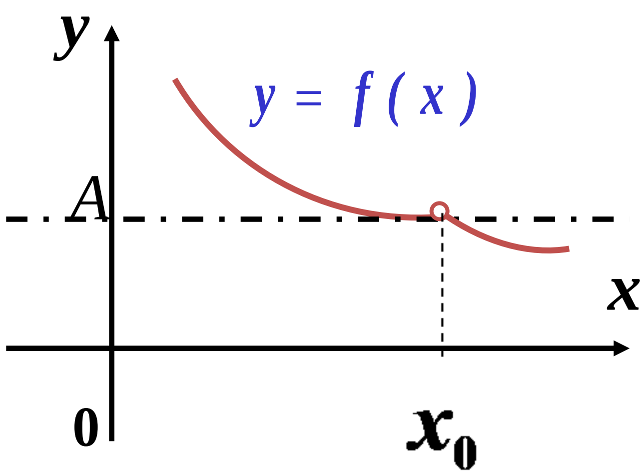
(1)自变量趋向有限值时函数的极限

(2)自变量趋向无穷大时函数的极限

1.自变量趋向有限值时函数的极限

描述性定义: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的<u>过程中</u>,对应函数值 $f(x)$ 无限<u>趋近于</u>确定值 A. 称 A 为函数 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限.

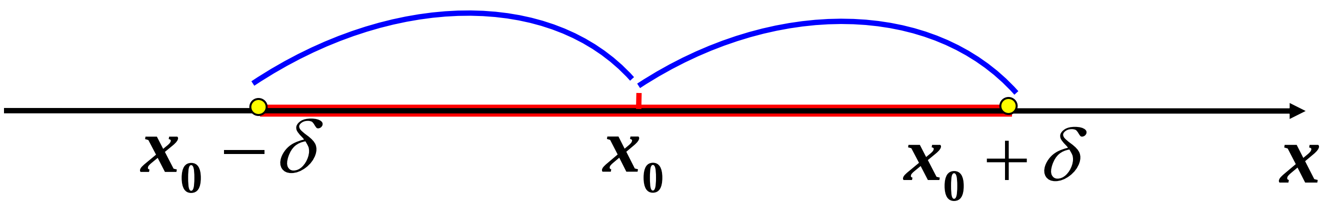
记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$



引入邻域的概念

$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$称为点$x_0$的$\delta$邻域，

点x_0叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径.



点x_0的去心的δ邻域,

记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

在不需要强调半径的情况下，也简记为

$U(x_0)$或 $\mathring{U}(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

*

描述性定义：函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

换种说法

只要x与x_0充分接近，那么$|f(x)-A|$能任意小。

或

总能找到x_0的某个δ邻域，使得$|f(x)-A|$要多小有多小。

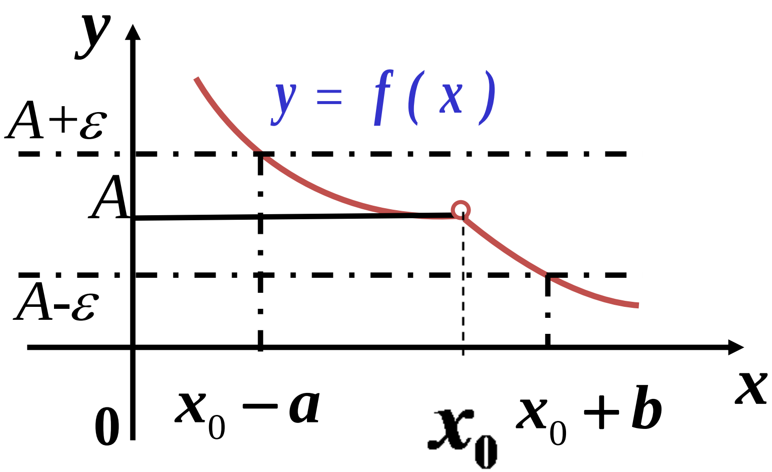
* "ε－δ"定义

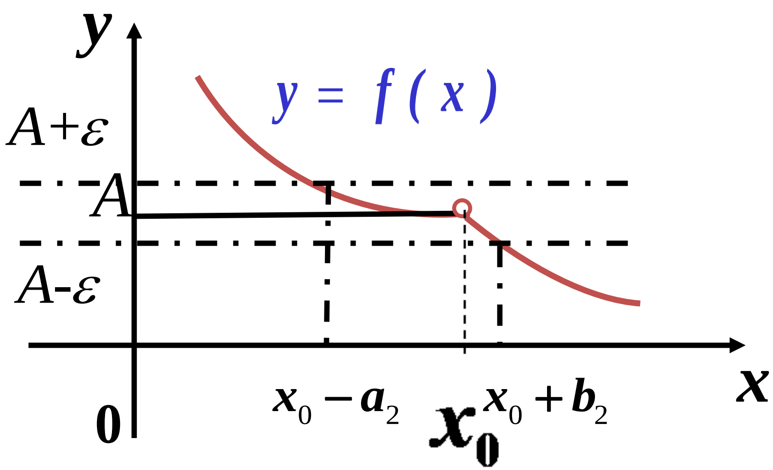
任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x)-A| < \varepsilon$.

"ε－δ"定义

任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$





取$\delta=\min(a,b)$;

取$\delta=\min(a_2,b_2)$;

数学中的"静与动"

例1. 证明 $\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$ **(*)**

证: $\quad |f(x)-A| = |(2x-1)-1| = 2|x-1|$

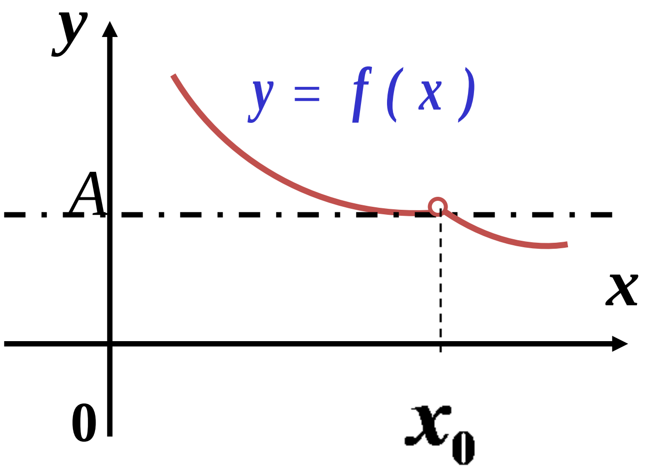
$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 只要 $|x-1|<\varepsilon/2$,

取 $\delta=\varepsilon/2$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，必有

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|<\varepsilon$$

因此 $\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



注

(1) 这里$x \to x_0$是指x无限接近

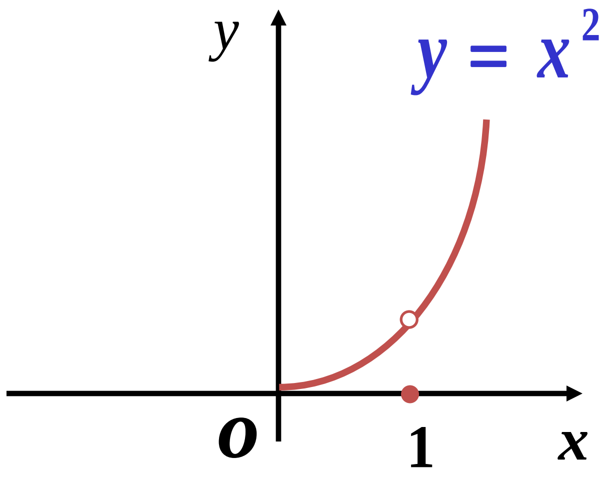
但不等于x_0

(2)极限是个局部性问题，只与x_0附近的形态有关

与函数在这点处的取值没关系。

例2

如果函数$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$



答 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$

这是因为函数的极限与函数在$x=1$处的函数值没有联系，

甚至函数在$x=1$处没有定义，

也不影响函数的变化趋势即极限.

以上研究的是双侧极限

有时需要研究单侧极限

左极限 $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = A$ 或记为 $f(x_0 -) = A$

右极限 $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = A$ 或记为 $f(x_0 +) = A$

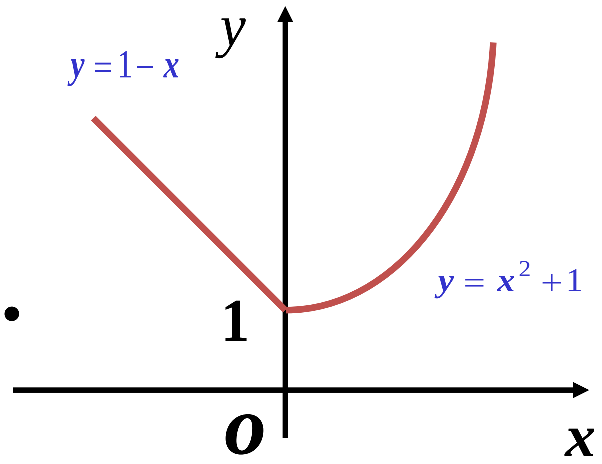
例如 $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$

定理

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = A$$

例3 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x).$



解: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1,$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 当 $x>0$ 时，$|x|=x$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$.

当 $x<0$ 时，$|x|=-x$， $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$，所以根据定理 1.1 知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

自变量趋向无穷大时函数的极限

描述性定义: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A. 那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A.$

换种说法

只要 $|x|$ 充分大，那么 $|f(x) - A|$ 能任意小。

或总能找到某个 $|x| > X$ 的区间，使得 $|f(x) - A|$ 要多小有多小。

$\boxed{\text{"}\varepsilon - X\text{"定义}}$

* 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

注

(1) 这里$\boldsymbol{x} \to \infty$是指$\boldsymbol{x}$的绝对值无限增大

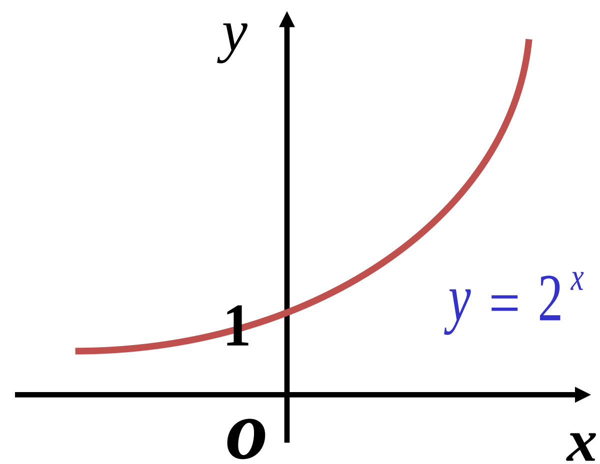
(2)极限是个局部性问题，只与$\boldsymbol{x}$的绝对值足够大时的函数形态有关

单侧极限:

有时需区分x 趋于无穷大的符号(左右极限)

例. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$

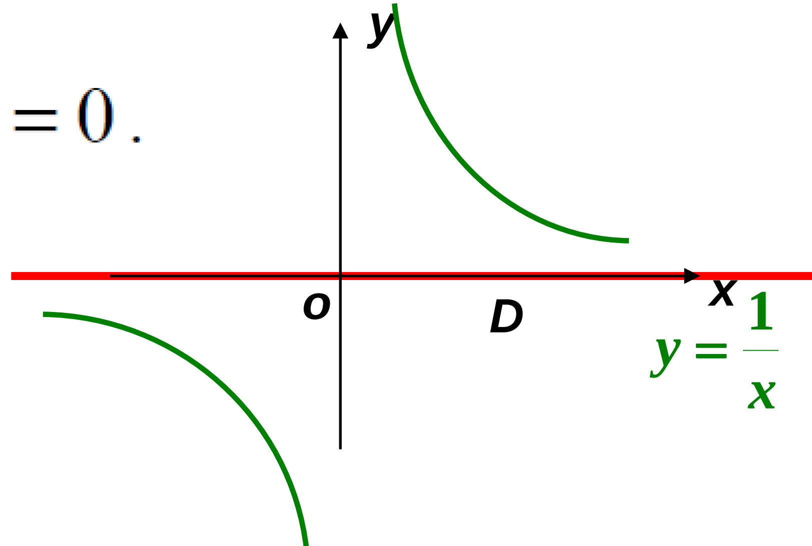
$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$



定理: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

几何意义：水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.



可以看到 x 轴（直线 $y=0$）是双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条水平渐近线.

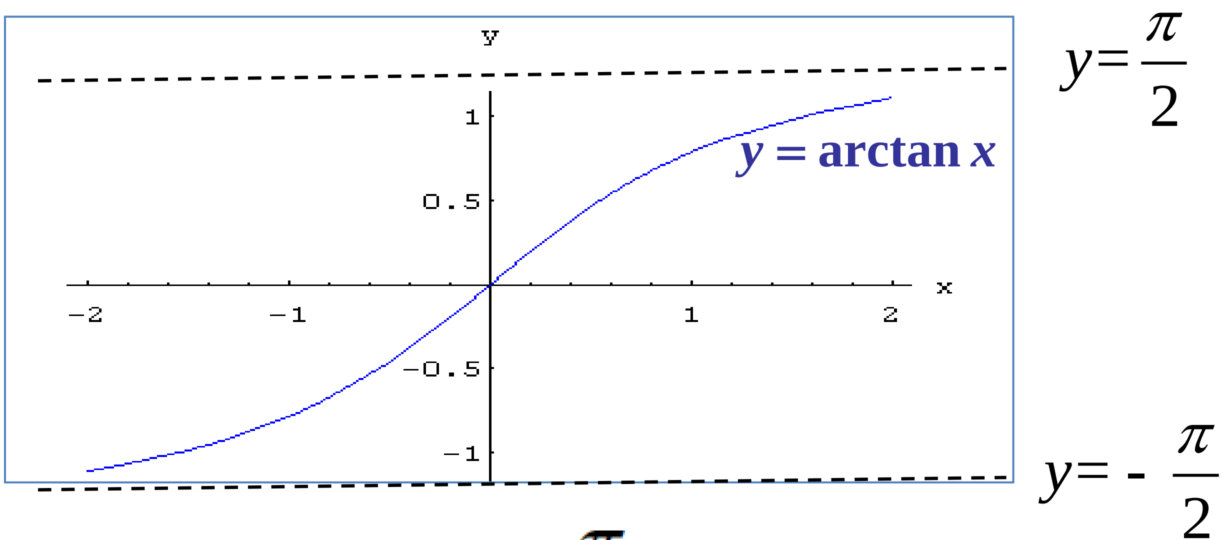
一般地说，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to+\infty)}} f(x)=c$,

则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

例5 求出曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线，

并问当 $x\to\infty$ 时，函数的极限存在吗？

解



因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，

所以曲线有两条水平渐近线 $y=\frac{\pi}{2}$ 和 $y=-\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

三、数列极限

数列$\{x_n\}$为整标函数　$x_n = f(n), n = 1, 2, \cdots$

因此“$n \to \infty$”是“$x \to +\infty$”的特殊情形，

所以数列极限可看作是函数极限的特殊情形，

由函数极限容易得到：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (a \neq \infty)$$

描述性定义

只要n充分大，那么$\left|x_n - A\right|$能任意小。

或总能找到某个$N>0$,当$n>N$时,$\left|x_n - a\right|$要多小有多小。

$\boxed{"\varepsilon - N"\text{定义}}$

* 任给$\varepsilon > 0$,存在$N > 0$,使得当$n > N$时,

恒有$\left|x_n - a\right| < \varepsilon$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad (a \neq \infty)$,

则称数列收敛，且收敛于数a;

否则称数列发散.

例6 考察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势.

$$(1)\left\{\frac{1}{n}\right\} \qquad (2)\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\} \qquad (3)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

答 数列(1)收敛，且收敛于0；

数列(2)收敛，且收敛于0；

数列(3)收敛，且收敛于1；

思考

下列关于数列极限的论述正确吗？

(1) 当n充分大以后，数列$\{x_n\}$越来越接近于a，则$n \to \infty$时数列$\{x_n\}$以a为极限.

(2) 当n充分大以后，总有无穷多个x_n接近于a，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

思考题解答

(1) 错误

$\{x_n\}$以a为极限,要求当n充分大以后，

x_n与a无限接近，即$|x_n - a|$趋于0,

而x_n与a越来越接近，只能保证

$|x_n - a|$越来越小，不能保证$|x_n - a|$趋于0.

(2) 错误

反例：数列$\{(-1)^n\}$

练习. 考察下列极限并说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan|x|$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$;

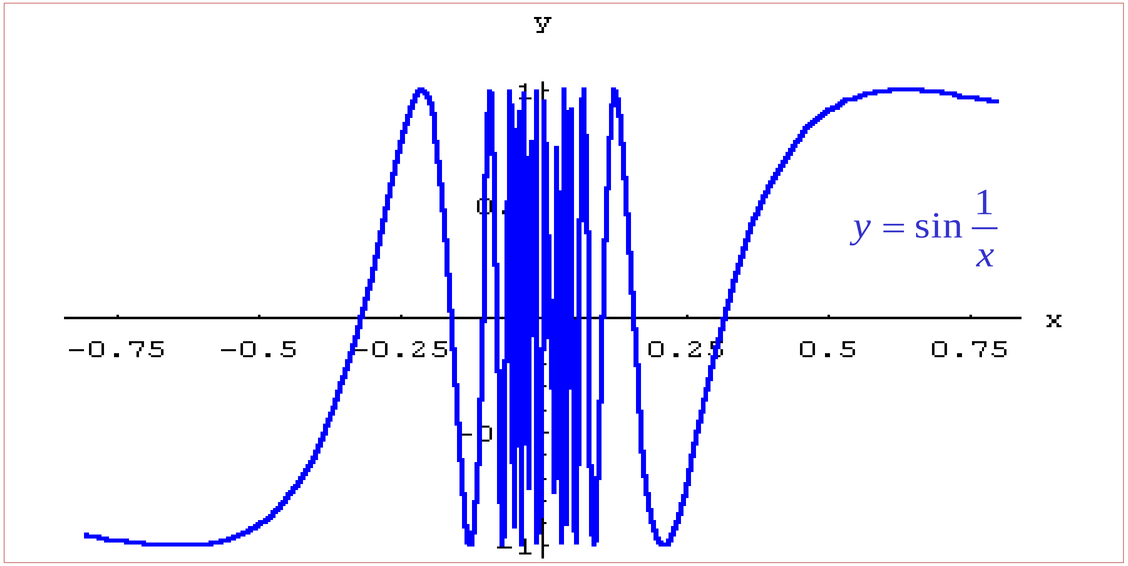
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc}\cot x$

解：(1) $\dfrac{\pi}{2}$;

(2)不存在;

(3)0

考察 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



P26 6 考虑当$a \neq 0$和$a = 0$两种情况.

P26 8

四、极限的性质

1. 函数极限的性质

我们仅就 $x \to x_0$ 叙述，

这些性质和运算对 $x \to \infty$ （$x \to +\infty, x \to -\infty$）

或 $x \to x_0^+$ 和 $x \to x_0^-$ 也成立.

定理1 (函数极限的唯一性)

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，那么这极限唯一.

定理2 (函数极限的局部有界性)

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

那么$f(x)$在x_0的某个去心δ邻域内有界.

* (分析性表述)

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么存在常数$M>0$和

$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\le M$.

定理3 (函数极限的局部保号性)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \text{ 而且 } A>0 \text{ (或 } A<0),$$

则在x_0的某个 去心δ邻域内，$f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

*(分析性表述)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \text{ 而且 } A>0 \text{ (或 } A<0),$$

则总存在一个正数 δ, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$

时，$f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

对于 $x \to \infty$ 的情况，

性质（2），（3）和（4）的局部性体现在“当 $|x|$ 充分大时”

$x \to +\infty, x \to -\infty$ 的情形类似.

P34 12 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性定理.

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则当 $|x|$ 充分大时，$f(x)$ 有界.

* (分析性表述)

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\le M$.

练习 试描述 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$的局部有界性。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则当$x$充分大时，$f(x)$有界.

* (分析性表述)

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，那么存在常数$M>0$和

$X>0$，使得当$x>X$时，有$|f(x)|\le M$.

2. 数列极限的性质

数列作为整标函数，它的极限性质与 $x \to +\infty$ 时类似.

性质1 (唯一性) 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，那么这极限唯一.

性质2 (有界性) 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，那么 $\{x_n\}$ 有界.

性质3 (函数极限的局部保号性)

$\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$),

则当n充分大时，$x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

*性质4 若数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列也收敛于a.

作业

P26　1;6(举例说明即可**);**

P33　3,4，12(不用证明**)**

理解并记住结论（不用交上来）

P26 6 (考虑**a**等于**0**和**a**不等于**0**两种情况**)**

P26 8

刘徽(约225 – 295年)

我国古代魏末晋初的杰出数学家.他撰写的《重差》对《九章算术》中的方法和公式作了全面的评注，指出并纠正了其中的错误，在数学方法和数学理论上作出了杰出的贡献.他的“割圆术”求圆周率 π 的方法：

“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”

它包含了“用已知逼近未知，用近似逼近精确”的重要极限思想.