第五节 函数的极值与最大最小值

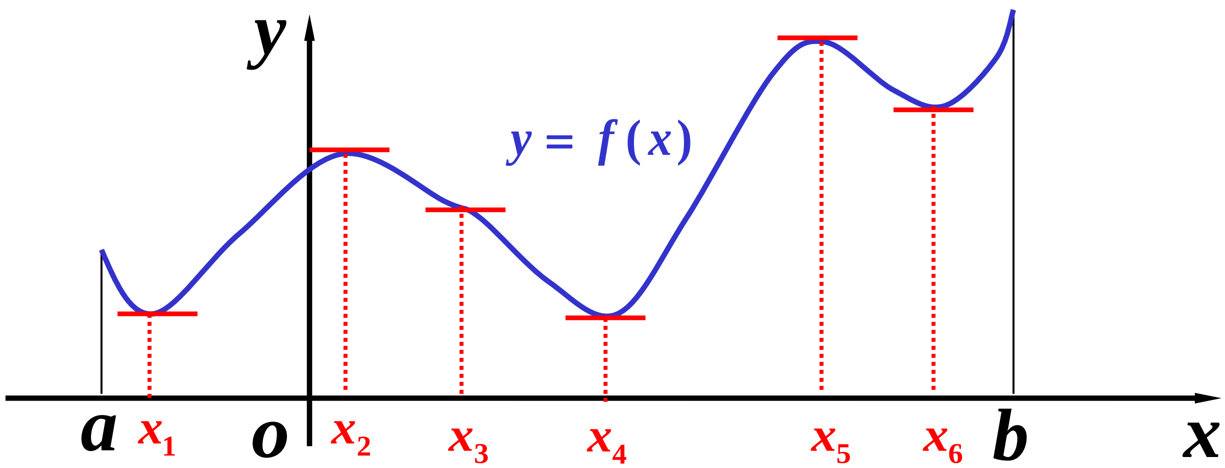
一、函数的极值及其求法

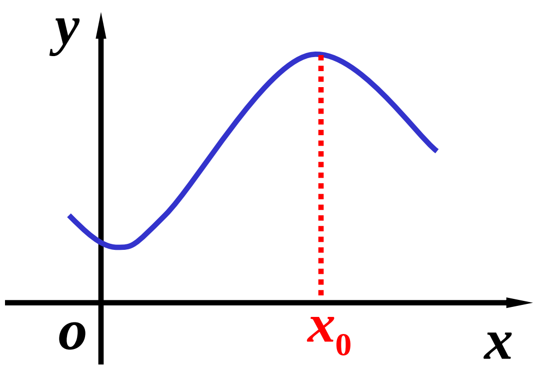
二、最大与最小值问题

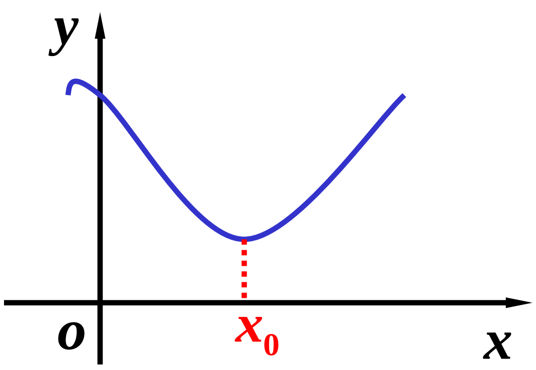
三、小结

一、函数的极值及其求法

1.函数极值的定义







定义 设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义,x_0是(a,b)内的一个点,

如果存在着点x_0的一个邻域,对于这邻域内的任何点x,除了点x_0外,$f(x)<f(x_0)$均成立,就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值;

如果存在着点x_0的一个邻域,对于这邻域内的任何点x,除了点x_0外,$f(x)>f(x_0)$均成立,就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

注意

(1)极值是局部性概念:

极值是局部区域上的最大或最小值;

极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

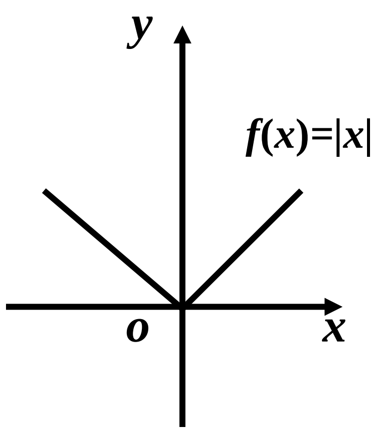
极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

(2)在间断点或端点处不考虑极值.

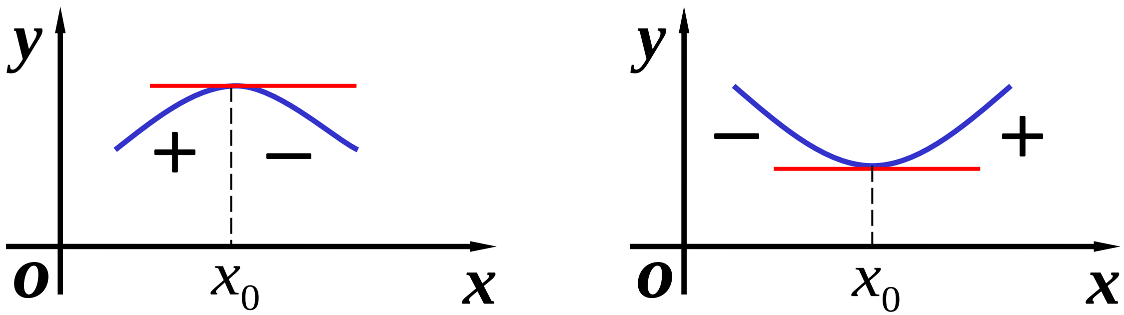
2.可能的函数极值点

(1)导数等于零的点 (称为驻点)

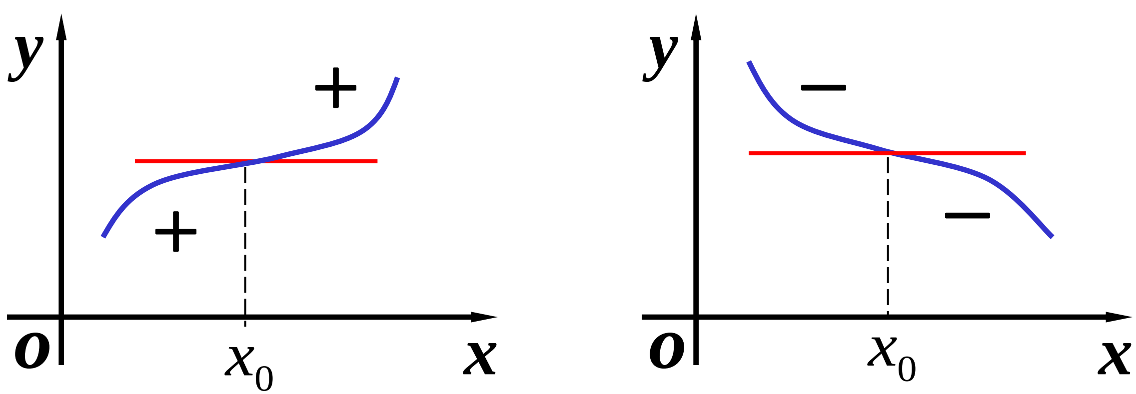
(2)不可导的点



3. 函数极值的判断



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

定理1(极值判断第一充分条件)

设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续, 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导

(1) 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$, $f'(x) > 0$; 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$, $f'(x) < 0$,则 $f'(x)$在点 x_0处取得极大值.

(2) 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$, $f'(x) < 0$; 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$, $f'(x) > 0$,则 $f'(x)$在点 x_0处取得极小值.

(3) 若 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$时, $f'(x)$的符号保持不变, $f(x)$在点 x_0处不取得极值.

#P155

求极值的步骤:

（1）求驻点及不可导点

（2）检查 $f'(x)$在这些点左右的符号, 判断是否为极值点

（3）求出极值

例1 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22$.

在某些情况下，判断$f'(x)$的符号比较困难，则在二阶可导的条件下，可以直接根据驻点的二阶导数$f''(x)$的符号判别是否为极值点.

定理2（极值判断第二充分条件）

设 $f(x)$ 在 x_0处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值.

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值.

(3) 若 $f''(x_0)=0$，则 $f(x_0)$可能是也可能不是 $f(x)$的极值. 此时 $f(x)$在点x_0处是否取极值，仍用定理1判定.

证 (1) $\because f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0,$

故$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx异号，

当$\Delta x<0$时， 有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0,$

当$\Delta x>0$时， 有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0,$

所以,函数$f(x)$在x_0处取得极大值

例2 求出函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4$, $x_2=2$.

$\because$ $f''(x)=6x+6$,

$\because$ $f''(-4)=-18<0$, 故极大值 $f(-4)=60$,

$f''(2)=18>0$, 故极小值 $f(2)=-48$.

注

只有二阶导数$f''(x)$存在且不为零的驻点才可以用此定理判定极值点.

其他情形只能使用第一充分条件进行判别.

思考：　驻点是否一定是极值点？　#P153

答　函数的驻点不一定是极值点.

例如，$y = x^3$, $y'\big|_{x=0} = 0$，　但$x = 0$不是极值点.

极值点若可导必定是驻点

(费马引理)

小结

极值是函数的局部性概念

驻点和不可导点统称为可能极值点

求函数极值的步骤:“寻找，判断”

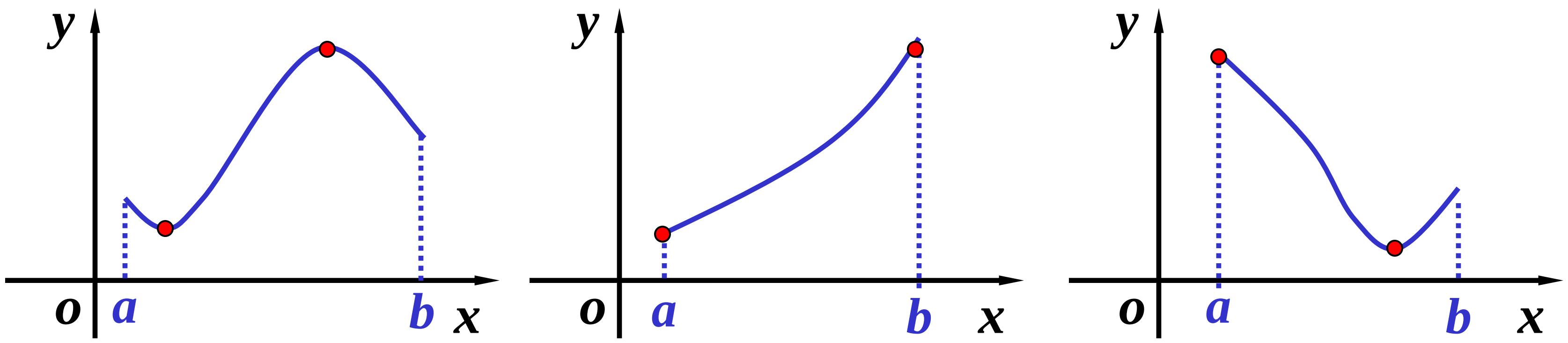
判别法 $\begin{cases} \text{第一充分条件;} \\ \text{第二充分条件;} \end{cases}$ (注意使用条件)

二、最大值、最小值问题

在实际生活中常常遇到这样一类问题：在一定条件下，怎样使："产品最省""用料最省""效率最高"等问题．这类问题在数学上有时可归纳为求某一函数(目标函数)的最大值和最小值问题.

闭区间上最值的求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上的最大值与最小值存在.



在区间内部取得的最值点必为极值点

步骤 1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较出最大值及最小值.

补例 求$f(x)=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在$[-1, 4]$上的最值.

解：$f(x)$在$[-1,4]$上连续，$f'(x)=\dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$

$x=0$处$f'(x)$不存在，$x=2$为$f(x)$的驻点，

$f(0)=0,\quad f(2)=-3\sqrt[3]{4},\quad f(-1)=-6,\quad f(4)=-\sqrt[3]{16}.$

经比较知：$f(x)$的最大值为$f(0)=0$，最小值为$f(-1)= -6$.

实际应用中的最值问题

例4. 求乘积为常数$a > 0$，而其和为最小的两个正数.

解：设两个正数$x, y(x > 0，y > 0)$，其和为$s = x + y$

则由$xy = a$得 $y = \frac{a}{x}$

从而目标函数为$s(x) = x + \frac{a}{x} \qquad (x > 0)$

令$s'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$，得 $x_1 = \sqrt{a}$，$x_2 = -\sqrt{a}$ (舍去)

$x = \sqrt{a}$是函数$s(x)$唯一的驻点。

由实际问题的背景，和的最小值肯定存在而且不可能在区间端点取得，而区间内部有唯一驻点

故$s(x)$在$x=\sqrt{a}$处取得最小值，

乘积为常数a而和最小的两个正数是$\sqrt{a}$和$\sqrt{a}$.

当$x<\sqrt{a}$时，$s'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}<0$

当$x>\sqrt{a}$时，$s'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}>0$,

$s(x)$在$x=\sqrt{a}$处取得极小值，

(验证过程不用包含在解题中)

注：

（1）解决实际问题的最值问题的步骤：

建立目标函数及其取值区间

求目标函数的最值

注：

(2) 在实际问题中，若由分析得知确实存在最大值或最小值，最值不可能在端点取得，而所讨论的区间内仅有一个驻点x_0，那么不必讨论$f(x_0)$是不是极值，就可以断定$f(x_0)$是最大值或最小值.

小结

最值是整体概念而极值是局部概念.

求最值的步骤："寻找，比较"值大小（注意与求极值步骤的差异）

实际问题求最值的步骤.

作业

P161　　1(9);

　　　　2;3;7;

最值应用：用于证明不等式

例6. 求证: $2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)$

证：令$f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$

定义域$D:(-\infty,+\infty)$.

$\because f'(x)=2\arctan x=0$, 得唯一驻点$x=0$

又$\because$ $f''(x)\big|_{x=0}=\dfrac{2}{1+x^2}\bigg|_{x=0}=2>0$, $\therefore$ $x=0$是极小值点

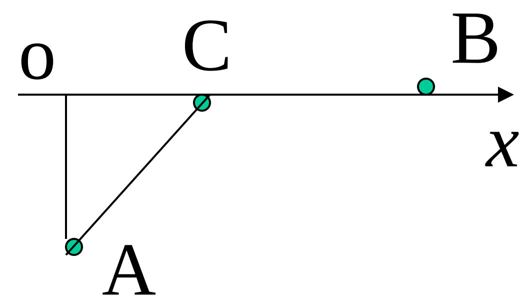
$\therefore$ $f(0)=0$是最小值. $\Rightarrow f(x)\geq 0$,

即 $2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)$.

-例9 某人正处在森林地带中距公路2公里的A处，在公路右方8公里处有一个车站B，假定此人在森林地带中每步行的速度为6公里/小时，沿公路行走的速度为8公里/小时，为了近快赶到车站，他选择A→C→B，问C应在公路右方多少？他最快能在多少时间内到达B？

解：设C点在公路右方x 公里处（$0\le x\le 8$），则

$$AC=\sqrt{x^2+4},\qquad CB=8-x$$



行走时间为$T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

$$T'(x)=\frac{x}{6\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{8}=\frac{4x-3\sqrt{x^3+4}}{24\sqrt{x^2+4}}$$

令$T'(x)=0$, 得唯一驻点 $x_0=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$,

$$T(x_0)=1+\frac{\sqrt{7}}{12}\approx 1.22$$

$\because T(0)=4/3\approx 1.33, T(8)=\sqrt{68}/6\approx 1.37$

$\therefore T(x_0)$ 为最小值，∴C点应在公路右方$\dfrac{6}{7}\sqrt{7}$公里处.

例2 求出函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

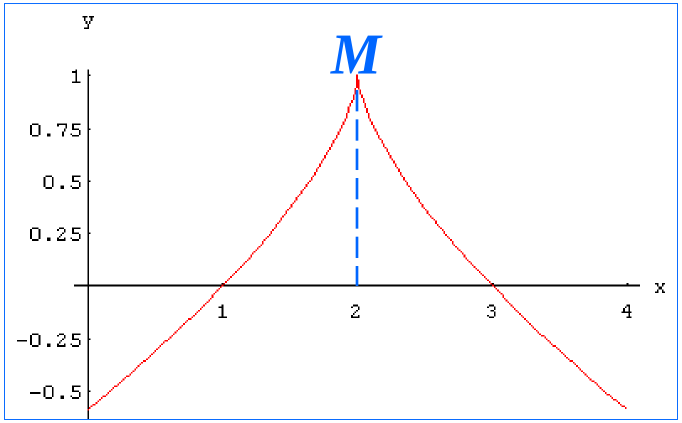
解 $f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} \quad (x \neq 2)$

当 $x=2$ 时, $f'(x)$ 不存在. 但函数 $f(x)$ 在该点连续.

当 $x<2$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x>2$ 时, $f'(x)<0$.

$\therefore f(2)=1$ 为 $f(x)$ 的极大值.



举例

－例4 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的在$[-3,4]$上的最大值与最小值.

解 $\because f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

解方程 $f'(x) = 0$,得 $x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

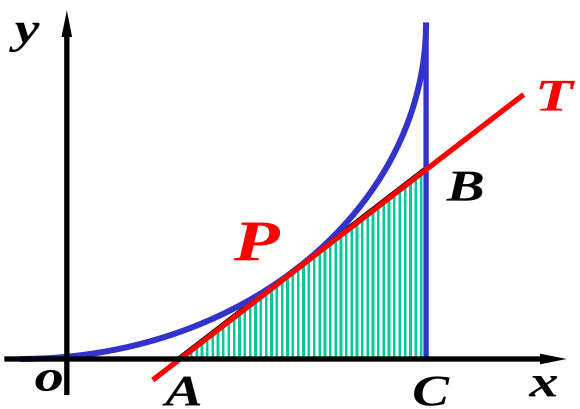
计算 $f(-2) = 34;$ $f(1) = 7;$

$f(-3) = 23;$ $f(4) = 142;$

比较得 最大值 $f(4) = 142,$ 最小值 $f(1) = 7.$

–例5

由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最大.

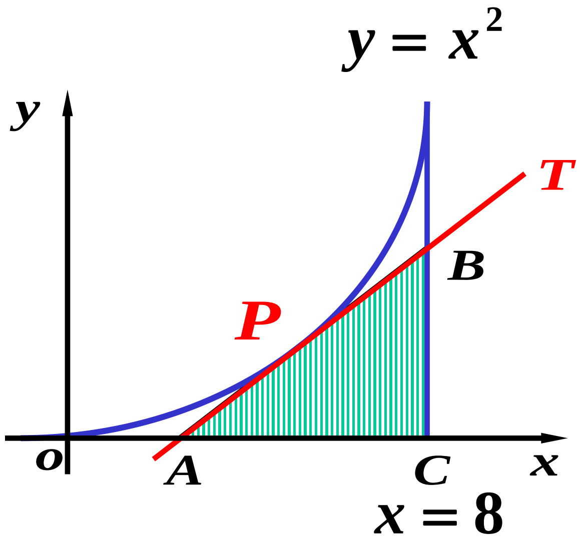


解　如图，

设所求切点为 $P(x_0, y_0)$，

则切线 PT 为

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0),$$

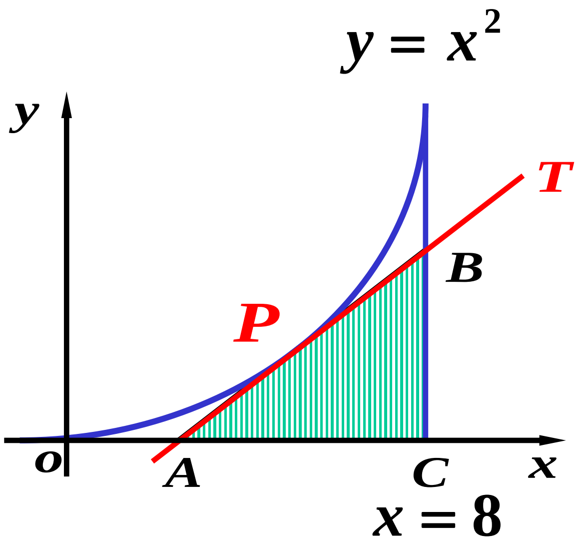


$\because y_0 = x_0^2$, $\therefore A(\frac{1}{2}x_0,\ 0)$, $C(8,\ 0)$, $B(8,\ 16x_0 - x_0^2)$

$$\therefore s_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{1}{2}x_0\right)(16x_0 - x_0^2) \quad (0 \le x_0 \le 8)$$

令 $s' = \frac{1}{4}(3x_0^2 - 64x_0 + 16\times16) = 0,$

解得 $x_0 = \frac{16}{3}$, $x_0 = 16$ (舍去).



$S(\frac{16}{3}) = \frac{4096}{27}$

由于 $s(8) = \frac{1}{2}(8-4)(8*8) = 128$

故 $S(\frac{16}{3}) = \frac{256}{9}$ 为所求三角形面积中的最大者

所求点为 $(\frac{16}{3}, \frac{256}{9})$.