第二节　洛必达法则

通常称不能直接使用极限的四则运算法则计算的极限，为未定式的极限.

下面利用柯西中值定理 来推出一种求未定式极限的简便而有效的法则— 洛必达法则.

定义 如果当$x \to a$,或$x \to \infty$时,两个函数$f(x)$与$F(x)$都趋于零(或都趋于无穷大),那么极限

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$$称为$\frac{0}{0}$型(或$\frac{\infty}{\infty}$型)未定式.

例如, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

定理1　洛必达法则

设(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式；

(2) 在 a 点的某领域内(点 a 可以除外)，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大)；

那么 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

洛必达法则是在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的.

当 $x\to a^-$，$x\to a^+$ 时，及 $x\to\pm\infty$ 时，该法则仍然成立.

证 定义辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},\qquad F_1(x)=\begin{cases} F(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},$$

在 $\overset{0}{U}(a,\delta)$ 内任取一点 x，在以 a 与 x 为端点的区间上，

$f_1(x), F_1(x)$满足柯西中值定理的条件，则有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f_1(x)-f_1(a)}{F_1(x)-F_1(a)}=\frac{f_1'(\xi)}{F_1'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad (\xi在x与a之间)$$

当$x\to a$时，$\xi\to a$，

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=A(或\infty).$$

定理2　洛必达法则

设(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$是$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限;

(2) 在a点的某领域内(点a可以除外), $f'(x)$及 $F'(x)$都存在且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那么 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

当$x\to a^-$, $x\to a^+$时, 及$x\to\pm\infty$时, 该法则仍然成立.

例1 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}.$

#P134

洛必达法则使用注意事项

1　用洛必达法则一定要验证条件，特别是条件(1);

2　若用一次法则后仍是未定式，可继续使用，一旦不是未定式立刻停止使用.

$$\text{例:}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\cos x}\cancel{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{-\sin x}=\infty$$

例3 1)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}$ $(\mu>0)$; $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n}}{e^{\lambda x}}$ (n为正整数，$\lambda>0$) $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{\mu})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mu x^{\mu}}=0$

解2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^{n})'}{(e^{\lambda x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^{2}e^{\lambda x}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^{n}e^{\lambda x}}=0$$

无穷大量 $\ln x$、x^{μ}、$e^{\lambda x}$增大的“速度”是很不一样的，

对数函数<<幂函数<<指数函数

#P136

补例4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2 \tan x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

洛必达法则使用注意事项 #P136

3、在洛必达法则过程中,我们希望进行求导的函数尽量简单，因此要对所求极限及时化简.

常用的化简方法有：

(1)等价无穷小替换;
(2)求出部分非零因子的极限;
(3)结合多种方法灵活使用(变量替换等)

#P136

补例5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\dfrac{xe^{x}+x-2e^{x}+2}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}+e^{x}+1-2e^{x}}{3x^{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+e^{x}-e^{x}}{6x}=\frac{1}{6}$$

洛必达法则使用注意事项

#P136

4、洛必达法则并不是万能的，它有失效的时候.

例7　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

极限不存在

洛必达法则失效。

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\cos x)=1$.

练习

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+2x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{1+x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

解答

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2x-1}=-1;$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}=2;$

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{x}$$,不存在;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{1+x}=1+0=1$$

$$(4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$(失效)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=1.$$

二 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$型未定式解法

关键: 将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}),(\frac{\infty}{\infty})$.

1. $0\cdot\infty$型 $\Rightarrow \dfrac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\dfrac{1}{0}$.

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \quad (\text{或} \ \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{f(x)})$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x$. $(0\cdot\infty)$

解 $$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

2. $\infty-\infty$型 $\Rightarrow \dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0} \Rightarrow \dfrac{0-0}{0\cdot 0}$.

通过通分或分子有理化及其它初等变换转化为

$\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型。

例9 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

通过 $[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$ 将三种不定式转化为 $0\cdot\infty$ 型

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x.$ $\quad (0^0)$

解 $$\text{原式} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

#P136

补例11 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

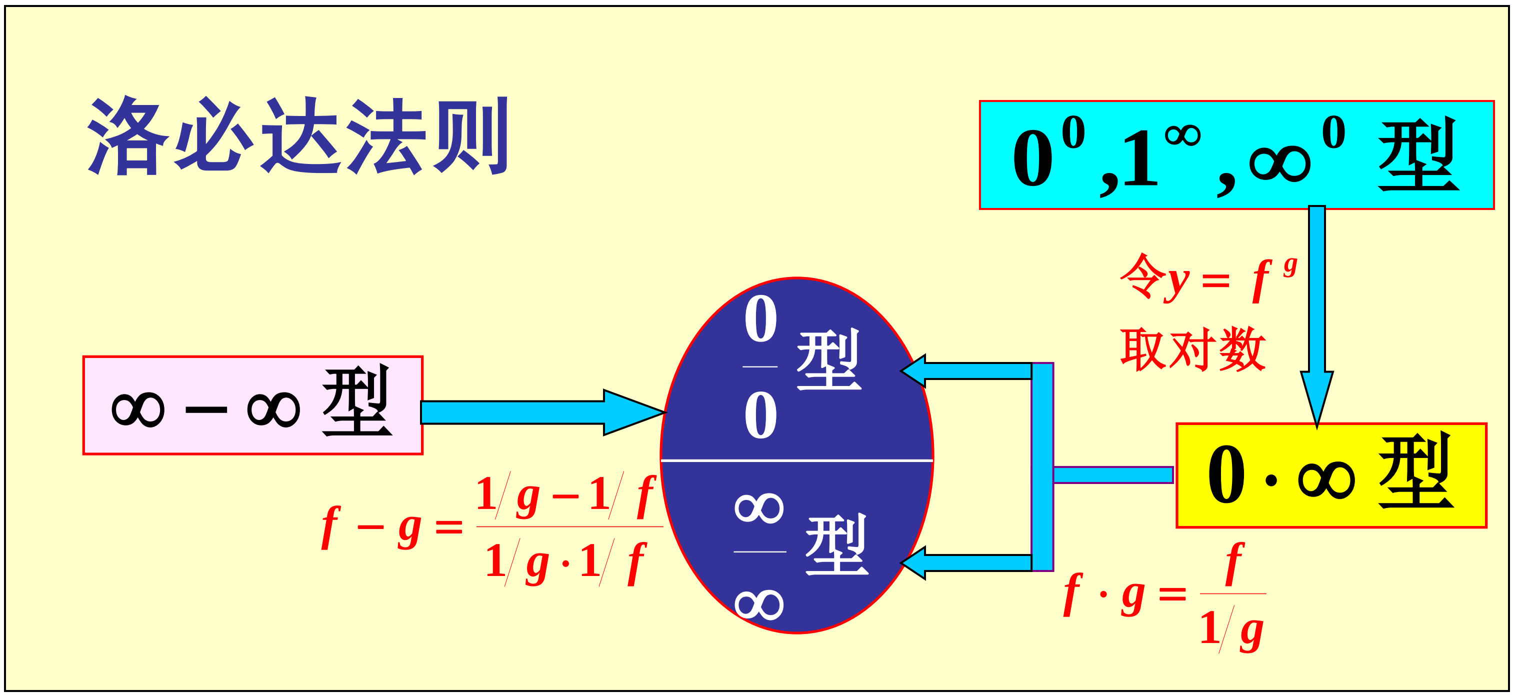
解 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1,$$

$\therefore$ 原式 $= e^{-1}$.

三、小结


洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty - \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$

洛必达法则使用注意事项

1.洛必达法则只适用于商的形式的未定式，其他形式的未定式都要转化为商的形式;

2.只要条件满足，洛必达法则可多次使用.每用一次法则，将函数进行整理，再判断是否仍为未定式，不是未定式时，停止用法则.

3.每次使用法则之前，将能求出极限的函数部分先求其极限，简化求导数部分.

4.洛必达法则是求未定式的有效方法，但未必是最简单的方法，应多种方法综合应用.

5.洛必达法则不是万能的，失效时不能断定原极限不存在，应改用其他方法.

作业

P137　1(6);(9);(12);(15);

2;4(选做)

备用题

求 $(1)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\ (a>0)$ $(2)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.$

-例11　求 $\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.　(1^{∞})

解　原式 $=\lim_{x\to1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.