第四章　不定积分

微分学的基本问题是“已知一个函数，如何求它的导数”.

那么，如果已知一个函数的导数，要求原来的函数，这类问题是微分学的逆问题这就产生了积分学.

积分学包括两个基本部分：

不定积分和定积分

第一节　不定积分的概念与性质

一 原函数与不定积分的概念

二 基本积分表

三 不定积分的性质（积分法则）

$$d(\qquad\qquad) = \cos x$$

答案 $\sin x + C$

一　原函数与不定积分的概念

1. 原函数

定义 如果在区间 I 上，对 $\forall x \in I$，都有 $F'(x) = f(x)$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

例如 $(\sin x)' = \cos x$　$\therefore \sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

问题： 1. 原函数存在的条件?

2. 原函数唯一吗?

3. 如何表示原函数?

1) $f(x)$满足什么条件，其原函数一定存在？

原函数存在定理： 若 $f(x)$在区间 I 内连续，则在区间 I 内一定存在 $f(x)$ 的原函数.

简言之：连续函数一定有原函数.

2) 若$f(x)$有原函数，原函数是否唯一？

例 $(\sin x)' = \cos x$ $\sin x$是$\cos x$的一个原函数,

$\sin x + C$ 也是$\cos x$的一个原函数.

即：若 $f(x)$ 有原函数，则 $f(x)$ 的原函数有无穷多个.

3) $f(x)$的全体原函数如何表示?

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则 $F'(x) = f(x)$.

设$G(x)$是$f(x)$的另一个原函数，则 $G'(x) = f(x)$.

$$\therefore \quad [G(x) - F(x)]' = 0 \Rightarrow G(x) - F(x) = C$$

$\therefore G(x) = F(x) + C$ （C为任意常数）

$\therefore f(x)$的任何两个原函数至多相差一个常数.

若 $F(x)$ 是$f(x)$的一个原函数 ,则 $f(x)$ 的全体原函数可表示为$F(x)+C$.（C为任意常数）

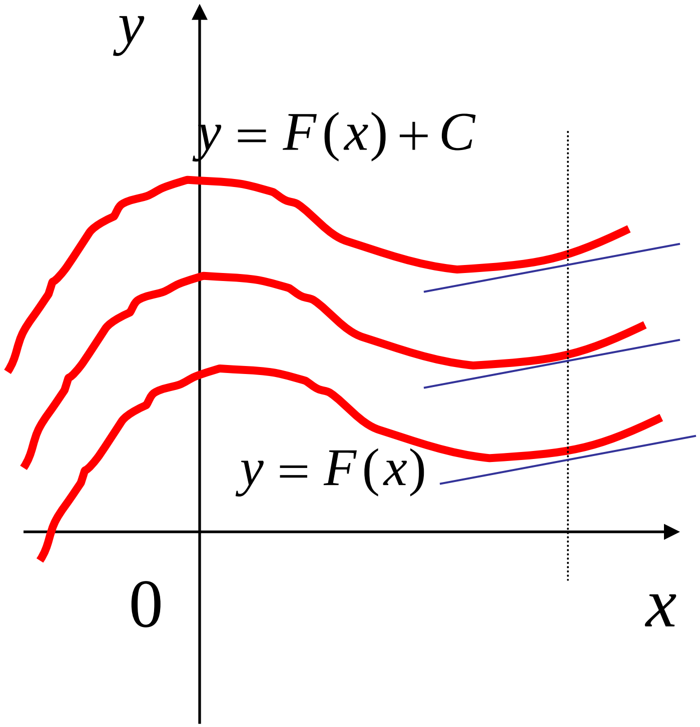
2. 不定积分——全体原函数的记号

定义2　在区间 I 上，设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx$.

$$\boxed{\int}\ \boxed{f(x)dx} = F(x) + \boxed{C}$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

f (*x*)的积分曲线



不定积分是一族函数，称为积分曲线族.

例1　求$\int x^5 \, dx$.

解　$\because \left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$，$\therefore \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

例2　求$\int \frac{1}{1+x^2} dx$

解　$\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\therefore \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

二 基本积分表

由于积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如 $$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \Rightarrow \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$$

$(\mu \neq -1)$

基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C$ (k 是常数)

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

说明： $x > 0, \Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C,$

$$x < 0, \ [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x},$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$(4)\quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$(5)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$(6)\quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7)\quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(8)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(9)\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0\text{且}a \neq 1)$

例4　求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx.$

解 $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C$$

根据基本积分公式(2)

$$\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

三　不定积分的性质（积分法则）

$$(1)\quad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

证

$$\because \left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]'$$

$$= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$$

$\therefore$ 等式成立.

（此性质可推广到有限多个函数之和的情形）

(2) $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

（**k是常数，$k \neq 0$)**

例5 求 $$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx。$$

解 $$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例6　求 $$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$$

解 $$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$$

被积函数变形化为两个函数之和

$$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C$$

例7 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

解：原式 $= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx$

$$= \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

例8　求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

解 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\underline{\cos 2x}}dx = \int \frac{1}{1+\underline{2\cos^2 x-1}}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$$

例9：求 $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

解：原式 $\displaystyle= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -\cot x - \tan x + C$$

注： 被积函数有时需要进行恒等变形，再使用基本积分表.

例9 已知一曲线$y = f(x)$在点$(x, f(x))$处的切线斜率为$\sec^2 x + \sin x$，且此曲线与y轴的交点为$(0,5)$，求此曲线的方程.

解 $\because \quad f'(x) = \sec^2 x + \sin x,$

$$\therefore \quad f(x) = \int \left(\sec^2 x + \sin x\right) dx$$

$$= \tan x - \cos x + C,$$

$\because \quad f(0) = 5, \qquad \therefore \quad C = 6,$

所求曲线方程为 $y = \tan x - \cos x + 6.$

一练习

求下列不定积分

$$(1)\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{x}}dx \qquad (2)\int \frac{4\cdot e^{x}+2\cdot 3^{2x}}{3^{x}}dx$$

$$(3)\int \tan^{2} x dx \qquad (4)\int \left(\frac{3}{1+x^{2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx$$

解(1) $$\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int (x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

(2) $$\int \frac{4\cdot e^{x} + 2\cdot 3^{2x}}{3^{x}}dx = \int [4\cdot(\frac{e}{3})^{x} + 2\cdot 3^{x}]dx$$

$$= 4\cdot(\frac{e}{3})^{x} \Big/ \ln(\frac{e}{3}) + 2\cdot 3^{x} / \ln 3 + C$$

思考 同一函数的不定积分的结果形式是否唯一？

解答 不唯一

例如

$$\int \frac{-1}{1+x^2}dx = -\arctan x + C; \quad \int \frac{-1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc}\cot x + C$$

注：要判断不定积分的结果是否正确，只要验证结果的导数是否等于被积函数。

作业

P192　2(双数题);

5;6

备用题

1. 已知 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = Ax\sqrt{1-x^2} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

求 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.

解: 等式两边对 $\boldsymbol{x}$ 求导, 得

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = A\sqrt{1-x^2} - \frac{Ax^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(A+B) - 2Ax^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$