第六节 极限存在准则　两个重要极限

一、 极限存在准则

二、 两个重要极限

一、极限存在准则

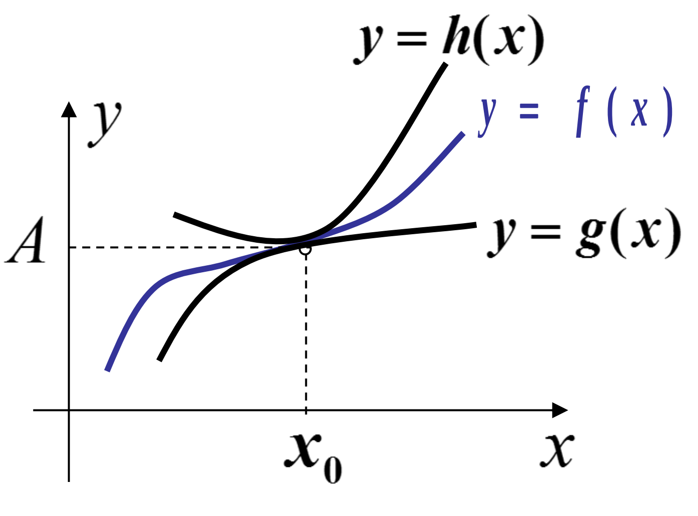
准则1 .夹逼准则

定理：如果

(1)在 x_0的某个去心邻域内，$g(x)\le f(x)\le h(x)$，

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$



上述函数极限存在准则可以推广到数列极限

准则1′

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = N+1, N+2, N+3, \ldots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$. #P48

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

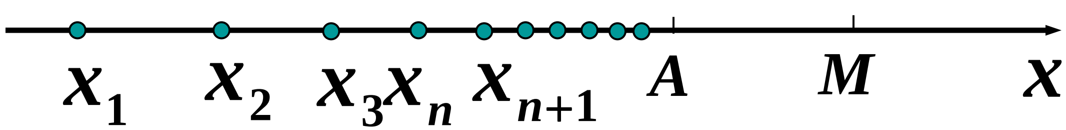
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼准则

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

准则2.单调有界数列必有极限

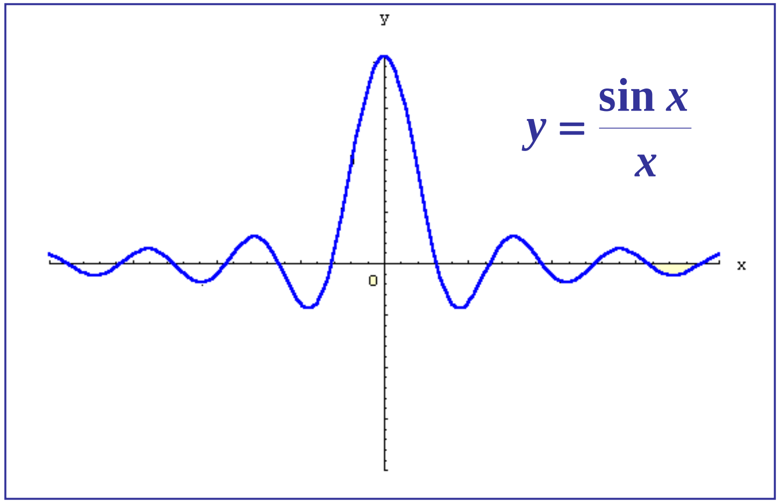
定理：单调增加有上界（或单调减少有下界）的数列一定有极限。

几何解释:



二、两个重要极限

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

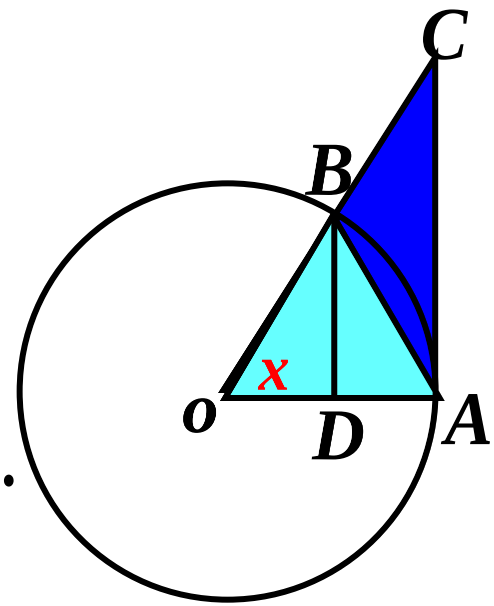


列表：

x	$\sin x/x$
0.1	0.998334
0.01	0.999983
0.001	0.999999
0.0001	0.999999
$\downarrow$	$\downarrow$
0	? 1

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明: 考虑单位圆



$\because \dfrac{\sin x}{x}$是偶函数，只需考虑$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}$.

△*AOB* 的面积<圆扇形*AOB*的面积<△*AOC*的面积

即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

故有 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow \cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，由夹逼准则，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

说明:

(1) 此极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式.

(2) 利用这个重要极限可以计算其他极限.

例1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

例2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解: 令$t=\arcsin x$, 则$x=\sin t$,因此

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

注意:

利用这个重要极限计算其他极限时,

要注意结构的一致性.

#P48

$$\lim \frac{\sin[\ ]}{[\ ]}=1;\ \ ([\ ]\to 0)$$

(2) $(a)\ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$(b)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

$(c)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

先考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cancel{=} \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1$

列表：

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2.593742
100	2.704814
1000	2.716924
10000	2.718146
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	?

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ $\because (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

类似地，$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

显然 $x_{n+1}>x_n$，$\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的；

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \quad \therefore \{x_n\} \text{有上界。}$$

因为单调递增有上界的数列必有极限，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

前面的推导确定了 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$的存在性，极限的确切值无法计算，我们用字母e来表示这个数列的极限. $e = 2.7182818\cdots$

即 $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$\text{(b)}\ \boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

$\because x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增, 且 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

设 $n \le x \le n+1$, 则 $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$,

则 $(1+\frac{1}{n+1})^n \le (1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, x与n同时趋向$+\infty$

$$\text{而} \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = e,$$

由夹逼准则 $\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

用变量代换可求出 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1}) = e.$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

$$\boxed{(c)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$(b)\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \quad (c)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

说明:

(1)此极限中的函数为幂指函数.

#P51

(2)此极限为1^∞未定式.

(3)利用这个重要极限计算其他极限时,

要注意结构的一致性.

$$\lim(1+[\ ])^{\frac{1}{[\ ]}} = e.\ ([\ ]\to 0)$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}=\frac{1}{e}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{2+x})^{2x}$.

#P51#

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{x+2})^{-(x+2)}]^{\frac{-2x}{x+2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+2}}$$

$$=e^{-2}.$$

小结

数列、函数的夹逼准则

数列的单调有界准则

两个重要极限

$$1^0 \quad \lim_{[\ ]\to 0}\frac{\sin[\ ]}{[\ ]}=1; \qquad 2^0 \quad \lim_{[\ ]\to 0}(1+[\ ])^{\frac{1}{[\ ]}}=e.$$

其他几个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=1/\ln a$$

P64 例5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (\text{令}:u=a^x-1)$$

P64 例6

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

作业

P52 1 (1),(2),(3)， (6) ;

2 (2)， (4) ;

*4选做(1), (5)

思考

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2} =$ ____ ;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} =$ ____ ; $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} =$ __C__ ;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} =$ __C___ ;

思考 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}$

解答

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(9^x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=9\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}=9\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=9\cdot e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x x}}=9\cdot e^0=9$$

例2 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1}>x_n$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的;

又 $\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore \{x_n\}$有上界; $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2=3+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2=3+A$, 解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例2 设数列 $x_n = \dfrac{2^n}{n!}, n = 1,2,\cdots.$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求此极限.

解 由定义知 $x_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2}{n+1}\cdot x_n, n = 1,2,\cdots$ (1)

因此 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，有 $x_{n+1} \le x_n$,

即数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的,

又 $x_n > 0, n = 1,2,\cdots$

因此由准则 2，$\lim x_n$ 存在，并设为 A.

在(1)式两边取极限 令 $n \to \infty$ 得 $A = 0 \cdot A$，于是有 $A = 0$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

数列由递推关系给出时，求极限或证明极限存在，往往 用单调有界准则。

注意 1)有界性的证明一般有如下几种方法：

- 根据已知条件推断出界；
- 通过观察找出界，并用归纳法证明.

2) 单调性的证明 一般有如下几种方法：

- 用观察法. 如：单增情况 $a_{n+1}-a_n>0$ 或 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ 。
- 根据第一、第二项的大小关系，确定单调性，并用归纳法证明.

具体的极限的值未必能求出，有一些极限可以通过前后项的关系列方程求极限.

*补例 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ $(n=1,2,\ldots)$，

试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

证 由 $x_1 = 10$ 及 $x_2 = \sqrt{6 + x_1} = \sqrt{16} = 4$ 知 $x_1 > x_2$

设对某正整数k有 $x_k > x_{k+1}$，则有

$$x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2}$$

故由归纳法，对一切正整数n，都有 $x_n > x_{n+1}$

即 $\{x_n\}$为单调减少数列，且$x_n > 0$, $(n = 1, \ 2, \ \cdots)$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在为$a$，有 $a = \sqrt{6 + a}$ $a \geq 0$

解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3.$