第七节　无穷小的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = 0,$　x^2比$3x$趋近零的速度要快得多;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$　$\sin x$与x大致相同;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在.　不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义：设α,β是同一过程中的两个无穷小，且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C(C \neq 0)$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小；

特殊地 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小；

记作$\alpha \sim \beta$;

(3) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$，就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶的无穷小；

(4) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小.

例如, 当$x \to 0$时, $x, x^2, \sin x$都是无穷小.

x^2是比x 高阶的无穷小.

$\sin x$与x是 等价的无穷小.

例1 证明：当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

常用等价无穷小:

#P54

当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \tan x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x,\quad \underline{\ln(1+x) \sim x,\ \ e^{x}-1 \sim x,}$$

？ P68 例6,例7

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^{2},(1+x)^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{x}{n}$$

P57 例1

等价无穷小代换

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

作用：在计算无穷小之比的极限时，可用等价无穷小来替换.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}$.

解 当$x \to 0$时, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, $\tan x \sim x$.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

思考

下列说法正确吗？

设 $\beta \sim \beta'$，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha}$.

答案　正确

注1　　#P55

等价无穷小替换时，可以只替换部分乘法因子

思考

下列说法正确吗？

当$x \to 0$时，$\ln(1+x^2) \sim x^2$

答案　正确　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$　(当$\alpha(x) \to 0$)

注2　　#P55

常用等价无穷小替换中的x可以复杂化成一般的无穷小，但是要注意结构的一致性.

补例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+3x)}$.　　#P55

解　当$x\to 0$时，$e^{\sin x}-1\sim\sin x$，$\ln(1+3x)\sim 3x$，

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}$

例3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解　当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，　$\sin x\sim x$.

原式 $\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0$.

#P55

注意　对于代数和中各无穷小不能分别替换.

解　当$x\to 0$时，　$\sin 2x\sim 2x$,

$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^3$,

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\dfrac{1}{16}$.

判断 下列等价无穷小替换对吗？

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x}=1,$$

$$(2)\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x^4)^{\frac{1}{3}}-1]\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}\cdot x}{x^2}=0$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{\sin^3 2x}=0$$

答案 正确 正确 错误

One word:等价无穷小替换只适用于最外层运算是乘除法的情形（加减法不能用）

#P55

定理2（等价无穷小表示定理）

β与α是等价无穷小的充分必要条件是$\beta = \alpha + o(\alpha)$.

小结

1.无穷小的比较:

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

2.等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法，注意适用条件.

常用等价无穷小: 当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \tan x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x,\quad \ln(1+x) \sim x,\quad e^x - 1 \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

x换成$\alpha(x)(\alpha(x) \to 0)$仍成立.

作业

P55　1; 3 ;　5 (2) , (3) , (4)　;　6 (3)

例 证明当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{n}x \ (n \in \mathbf{N}_+)$.

利用公式 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{n}x\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1\right]} = 1,$$

因此当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{n}x \ (n \in \mathbf{N}_+)$