第一章 习 题 课

函数与极限

一 基本要求

(一)函数

1.理解函数的概念,明确函数定义中的两个要素(对应关系和定义域),会求定义域.

2.了解函数性质(有界性,单调性,奇偶性,周期性).

3.理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数和隐函数概念,并会将复合函数拆成基本初等函数.

4.掌握基本初等函数的性质及图形.

(二)极限

1. 理解极限的概念,明确变量的极限是描述变量的某种变化趋势的.
2. 了解极限的性质(唯一性,有界性和保号性)及极限存在的两个准则(夹逼、单调有界).
3. 掌握极限的四则运算法则和两个重要极限,并会利用它们求极限.
4. 了解无穷小与无穷大的概念和性质,会用等价无穷小求极限.

(三)连续

1.理解函数在一点和在区间上连续的概念,明确连续定义的三个要素.

2.了解间断点的概念,会判断间断点的类型.

3.了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的最大值和最小值定理和介值定理,并会一些简单的应用.

二　要点提示

（一）求极限的方法:

1.利用极限的四则运算法则(有时需要先对函数作变量代换,恒等变形,如通分或有理化等);

2.利用两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

3.利用极限存在的两个准则(夹逼准则,单调有界准则);

4.利用无穷小的性质

(1)无穷小与无穷大的关系;

(2)无穷小与有界量的乘积仍是无穷小;

(3)等价无穷小代换;

常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \tan x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x,\quad \ln(1+x) \sim x,\ e^x - 1 \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

5.利用函数的连续性:

$$\lim_{x\to x_0} f(\phi(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} \phi(x)\right)$$

6.对于分段函数,在分段点利用左右极限来确定极限是否存在.

（二）连续性的等价定义

函数 $f(x)$在x_0 处连续:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0;$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$

3. $\varepsilon - \delta$形式: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$当 $|x - x_0| < \delta$时 ，

恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

（三）间断点及其分类

满足以下三条之一x_0为$f(x)$的间断点:

（1）在x_0处没有定义;

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

按照在间断点处有无左右极限来分类:

第一类包括跳跃和可去间断点;

第二类包括无穷和振荡间断点等.

三 问题与思考

1. $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$**,是否正确?**

答:不正确.例如

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right|=1,\text{而}\left\{(-1)^n\right\}\text{ 发散.}$$

数列 $\{x_n\}$ 与$\{|x_n|\}$的敛散性的关系如下:

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

(2)若$\{x_n\}$恒正或恒负,则$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$ 同敛散.

(3)若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (以后常用).

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 1$，对吗？

答:不对.

在用商的极限法则时,分母的极限不能为零,

故当 $a \neq 0$ 时,结论正确.

当 $a = 0$ 时,可能存在(未必是1),也可能不存

在.例如 $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n} = 0$,

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{1+(-1)^n}$ 不存在.

又如

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

3.无穷大量与无界函数有什么区别和联系?

答:无穷大量是指在自变量的某一变化过程中,对应的函数值的一种变化趋势,即当自变量变化到某一阶段后,绝对值无限增大.而无界函数是以否定有界函数来定义的,只要求有一个自变量使 $\left|f\left(x_1\right)\right| > K > 0$ 满足即可.

$f\left(x\right)$是当$x \to x_0\left(\infty\right)$ 时的无穷大,则 $f(x)$无界.
反之不然.

例如 $f(x)=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$ 无界,

而当 $x\to+\infty$时, $f(x)$ 不是无穷大.

$\forall M>0$, 取$x_1=2k\pi\in(-\infty,+\infty), k\in N, k>\dfrac{M}{2\pi}$,

$$\left|f(x_1)\right|=\left|2k\pi\cos 2k\pi\right|=2k\pi>M.$$

故无界. 若取 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in N$,

$$f(x)=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0<M,$$

$\therefore f(x)$ 当$x\to\infty$ 时, 不是无穷大.

4. 在自变量的同一变化过程中，若

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = a(a \neq \infty), \text{且} \lim g(x) = 0,$$

则 $\lim f(x) = 0$**.对吗？**

答:对.

利用极限的四则运算法则,结论正确.

该结论经常用于求待定系数.

例如 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + a}{x} = 1$, 求 a 的值.

由条件 $\lim\limits_{x \to 0}(e^x + a) = 0$, 故 $a = -1$.

类似的结论还有

$\lim f(x)g(x)=a(a\neq\infty)$,且$\lim g(x)=\infty$,

则$\lim f(x)=0.$

四 典型题目

1.求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^{2}+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^{2}+\cdots+b^{2n-1}}$,其中 $|a|<1,|b|<1$

2.$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

。

3.$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^{2}+1}-\sqrt{x^{2}-1})$

1.解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-a^n}{1-a}}{\dfrac{1-b^{2n}}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}$

2.解 令$\sqrt[6]{x}=t$，则当$x\to 0$时，$t\to 0,$

故 原式$=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-1}{t^3-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t+1}{t^2+t+1}=\dfrac{2}{3}$

3.解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

小结：当利用极限的四则运算法则时，要注意是否满足条件。因此，往往需要先作某些恒等式的变形或化简，比如使用某些求和公式，求积公式，公式的约分或通分，分子分母有理化，三角函数的恒等变形以及适当的变量代换等。

请注意利用求有理分式函数的极限公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, n=m\\ 0, n>m \quad (*)\\ \infty, n<m\end{cases}$$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{11}(3x-6)^{6}}{(2x+1)^{17}}=\dfrac{3^{6}}{2^{17}}=\dfrac{729}{131072}$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x^{2}}{x+1}-ax-b)=1$

求a,b的值。

$$4.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \tan 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}$$

4.解令$t=\frac{\pi}{6}-x, x=\frac{\pi}{6}-t$　当$x\rightarrow\frac{\pi}{6}$时，$t\rightarrow 0$，则

$$原式=\lim_{t\rightarrow 0}\cot 3t\sin t=\lim_{t\rightarrow 0}\cos 3t\frac{3t}{\sin 3t}\frac{1}{3}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{3}$$

$$5. 解1.原式=\lim_{x\rightarrow\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=\lim_{x\rightarrow\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$$

$$解2.原式=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{(1+\frac{c}{x})^{x}}{(1-\frac{c}{x})^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\rightarrow\infty}(1+\frac{c}{x})^{\frac{x}{c}\cdot c}}{\lim\limits_{x\rightarrow\infty}(1-\frac{c}{x})^{-\frac{x}{c}\cdot(-c)}}=\frac{e^{c}}{e^{-c}}=e^{2c}$$

使用重要极限时，请注意结构的一致性，即

$$\lim \frac{\sin\square}{\square} = 1$$ （$\square$ 为无穷小)；

$$\lim (1 + \frac{1}{\triangle})^{\triangle} = e$$ （ $\triangle$为无穷大)

或

$$\lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$ （α 为无穷小).

$$6.\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x\right)$$

$$7.\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\frac{x^4}{2}}{x^2\sin x^2}$$

6.解 原式$=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x=0+1=1$

其中第二个极限是第一个重要极限，而第一个极限利用无穷小的性质，无穷小量乘以有界函数仍是无穷小.

7.解 当$x\to 0$时，$\sin x^2\sim x^2$，$\arctan\dfrac{x^4}{2}\sim\dfrac{x^4}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\dfrac{x^4}{2}}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{2}}{x^2x^2}=\frac{1}{2}$$

注：利用“无穷小乘以有界量仍是无穷小量”求极限是常用的方法,

利用等价无穷小代换求极限也是常用的方法,
注意掌握一些等价无穷小公式。

$$8.\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+x)+2\sin x}{\cos x}$$

$$\text{解 原式}=\frac{\ln 2+0}{1}=\ln 2$$

注：利用“初等函数的连续性”求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

注意x_0必须是定义区间内的点才适用.

求极限的思维过程:

1.幂指函数（1^{∞}未定式）

第二个重要极限 $\lim\limits_{[\,]\to 0}(1+[\,])^{\frac{1}{[\,]}}=e.$

2.代入法

3.等价无穷小替换

4.无穷小的运算性质

5.极限四则运算法则

(往往需要先作某些恒等式的变形或化简，比如使用某些求和公式，求积公式，公式的约分或通分，分子分母有理化，三角函数的恒等变形以及适当的变量代换等)

6.对于分段函数,在分段点处的极限必须利用左右极限来确定极限是否存在.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2+x)+2\sin x}{\cos x}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan \dfrac{x^4}{2}}{x^2 \sin x^2}$

$$5.\ \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$6.\ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$7.\ \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$