第四节 有理函数的积分

- 有理函数的积分

*三角函数有理式的积分

一、有理函数的积分

有理函数的定义:

两个多项式的商表示的函数称之.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n < m$, 这有理函数是真分式;

(2) $n \geq m$, 这有理函数是假分式;

例如 $$\frac{1}{x^2+1}$$ --真分式

$$\frac{x+1}{x^2+1}$$ --真分式;

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$$ --假分式;

利用多项式除法或加减项，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

例 $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

难点 真分式的积分

——化为部分分式之和.

例1 $$\frac{1}{x(x-1)^2}$$

解法一——加减项法

例1 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{1-x+x}{x(x-1)^2}$

$$=\frac{1-x}{x(x-1)^2}+\frac{x}{x(x-1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$=-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

解法二——待定系数法

例1 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 　　取 $x=1,\Rightarrow C=1$

取 $x=2$, 并将A,C值代入(1) $\Rightarrow B=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为$\dfrac{A}{x-a}$;

$k=2$, 分解后为 $\dfrac{A}{(x-a)}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}$,

（2）分母中若有因式 (x^2+ax+b)

则分解后有 $\dfrac{Mx+N}{x^2+ax+b}$;

例2 $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$,

$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)$,

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A$,

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

*二、三角函数有理式的积分

三角有理式的定义:

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令$u=\tan\frac{x}{2}$ $\quad x=2\arctan u$（万能置换公式）

$$\boxed{\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad dx=\frac{2}{1+u^2}du}$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

例1 求积分 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx.$

解 由万能置换公式 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$,

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2}{1+u^2} du,$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx = \int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} du$$

$$= \int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)} du$$

$$=\int\frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}du=\int\frac{1+u}{1+u^2}du-\int\frac{1}{1+u}du$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C$$

$$\because\quad u=\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

作业

P218　1,2,6, *16

例3 求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln x - \frac{1}{x-1} - \ln(x-1) + C.$$