定积分的近似计算

一、问题的提出

二、矩形法

三、梯形法

四、抛物线法

一、问题的提出

计算定积分的方法：

(1) 求原函数；

(2) 利用牛顿－莱布尼茨公式得结果.

问题：

(1) 被积函数的原函数不能用初等函数表示；

(2) 被积函数难于用公式表示，而是用图形或表格给出的；

(3) 被积函数虽然能用公式表示，但计算其原函数很困难.

解决办法： 建立定积分的近似计算方法.

思路：

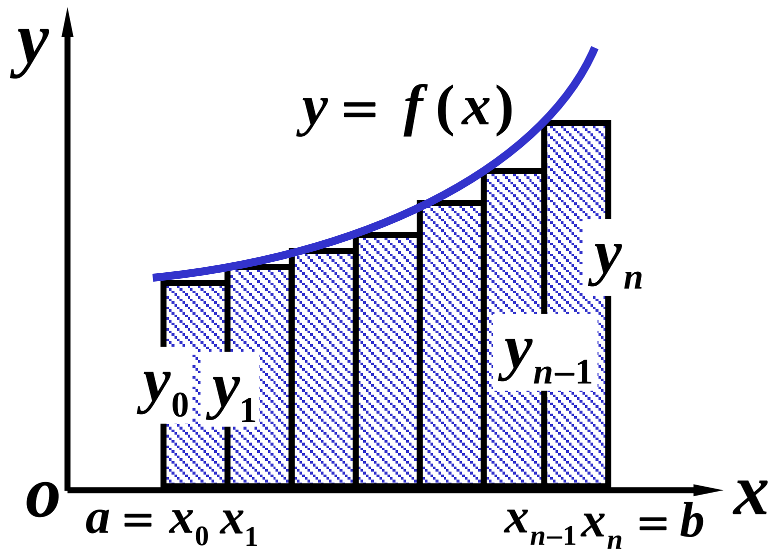
$\int_a^b f(x)dx \; (f(x) \geq 0)$ 在数值上表示曲边梯形的面积，只要近似地算出相应的曲边梯形的面积，就得到所给定积分的近似值.

常用方法： 矩形法、梯形法、抛物线法.

二、矩形法

用分点 $a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ n 等分，取小区间左端点的函数值 $y_{i-1}(i=1,\cdots,n)$ 作为窄矩形的高，如图

则有



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\frac{b-a}{n}$$

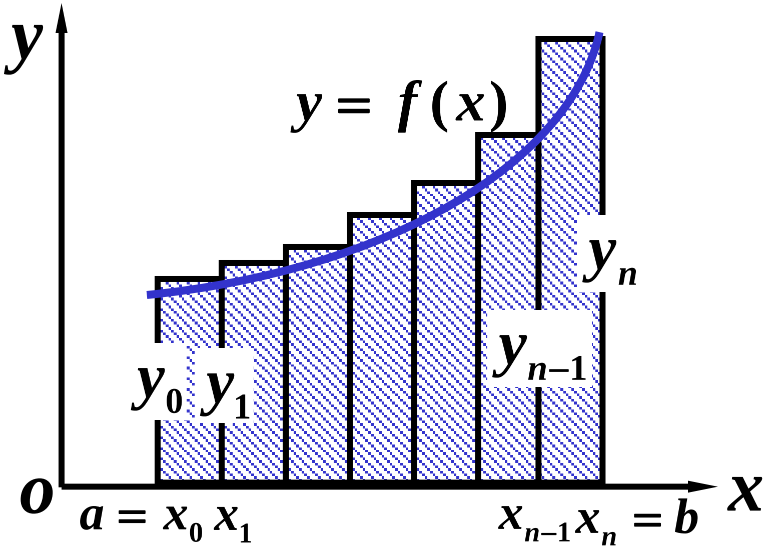
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \quad (1)$$

取右端点的函数值 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$作为窄矩形的高，如图

则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x$$

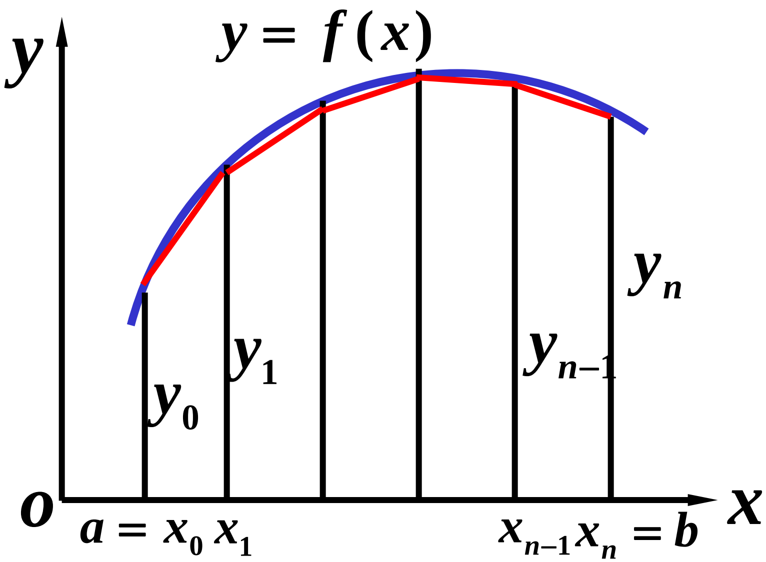
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (2)$$



(1)、(2)称为矩形法(左矩形、右矩形)公式.

三、梯形法

梯形法就是在每个小区间上，以窄梯形的面积近似代替窄曲边梯形的面积，如图



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\ \frac{1}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$=\frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}] \quad (3)$$

例 1 用矩形法和梯形法计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值.

解 把区间十等分,设分点为 x_i, $(i = 0,1,\cdots,10)$

相应的函数值为 $y_i = e^{-x_i^2}$ $(i = 0,1,\cdots,10)$ 列表:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

i	6	7	8	9	10
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

利用左矩形公式（1），得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx (y_0 + y_1 + \cdots + y_9) \times \frac{1-0}{10} = 0.77782.$$

利用右矩形公式（2），得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx (y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}) \times \frac{1-0}{10} = 0.71461.$$

i	6	7	8	9	10
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

利用梯形法公式（3），得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1-0}{10}[\frac{1}{2}(y_0+y_{10})+y_1+y_2\cdots+y_9)$$

$$=0.74621.$$

实际上是前面两值的平均值，

$$\therefore \int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2}(0.77782+0.71461)$$

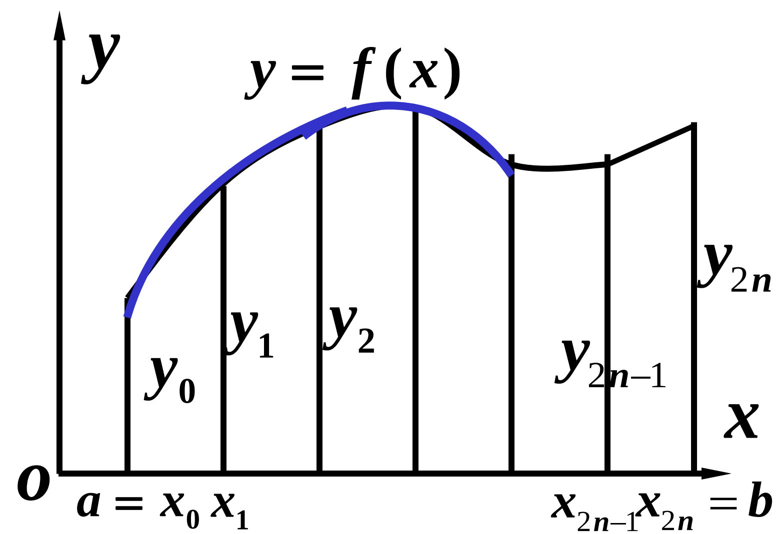
$$=0.74621.$$

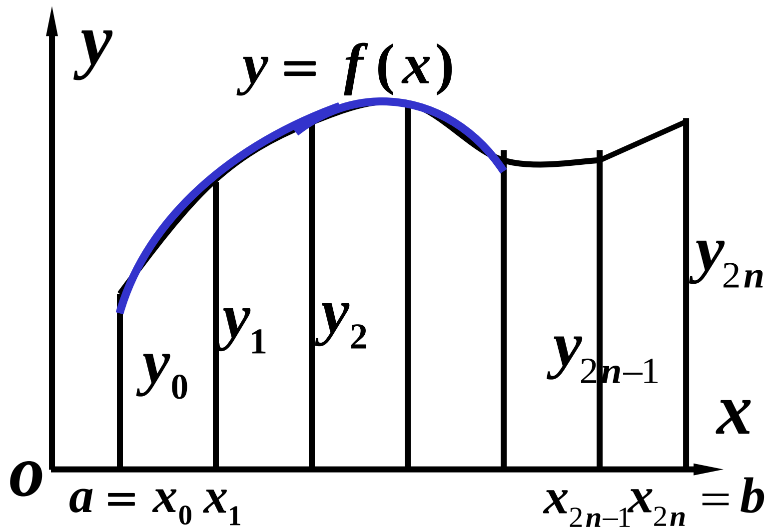
四、抛物线法

抛物线法是将曲线分为许多小段，用对称轴平行于 y 轴的二次抛物线上的一段弧来近似代替原来的曲线弧，从而得到定积分的近似值.

用分点 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$ 把区间分成 n（偶数）等分，这些分点对应曲线上的点为 $M_i(x_i, y_i)$ $(y_i = f(x_i))$.

$$(i = 0,1,2,\cdots n)$$

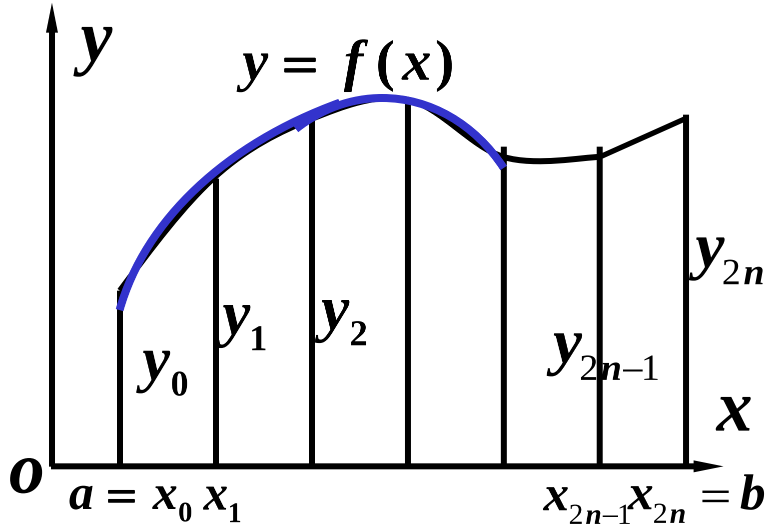




因为经过三个不同的点可以唯一确定一抛物线，

故可将这些曲线上的点 M_i 互相衔接的分成 $\frac{n}{2}$ 组，

$\{M_0, M_1, M_2\}, \{M_2, M_3, M_4\}, \cdots, \{M_{n-2}, M_{n-1}, M_n\}.$



在每组$\{M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k}\}\ (k = 1,2,\cdots,\frac{n}{2})$所对应的子区间$[x_{2k-2}, x_{2k}]$上,用经过点$M_{2k-2}, M_{2k-1}$, M_{2k}的二次抛物线$y = px^2 + qx + r$近似代替曲线弧.

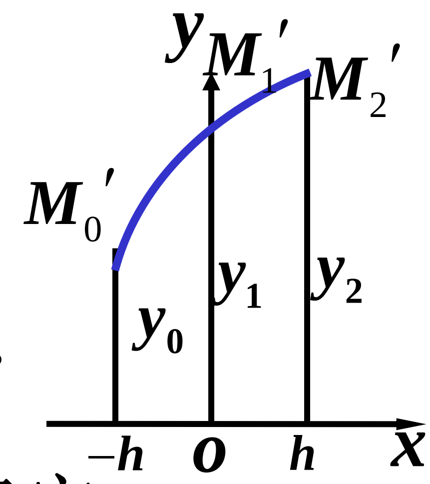
计算在$[-h,h]$上过三点$M_0'(-h,y_0),M_1'(0,y_1),M_2'(h,y_2)$,的抛物线$y=px^2+qx+r$为曲边的曲边梯形的面积.

抛物线方程中的p,q,r可由下列方程组确定:

$$\begin{cases} y_0 = ph^2 - qh + r, \\ y_1 = r, \\ y_2 = ph^2 + qh + r. \end{cases}$$

方程(1)+(3)−2(2)得 $2ph^2 = y_0 - 2y_1 + y_2.$

计算在 $[-h,h]$ 上过三点 $M_0'(-h,y_0)$, $M_1'(0,y_1)$, $M_2'(h,y_2)$,的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 为曲边的曲边梯形的面积.



抛物线方程中的 p,q,r 可由下列方程组确定:

$$\begin{cases} y_0 = ph^2 - qh + r, \\ y_1 = r, \\ y_2 = ph^2 + qh + r. \end{cases}$$

方程(1)+(3)−2(2)得 $\quad 2ph^2 = y_0 - 2y_1 + y_2.$

$$y_1 = r$$

$$2ph^2 = y_0 - 2y_1 + y_2. \qquad y_1 = r$$

于是所求面积为

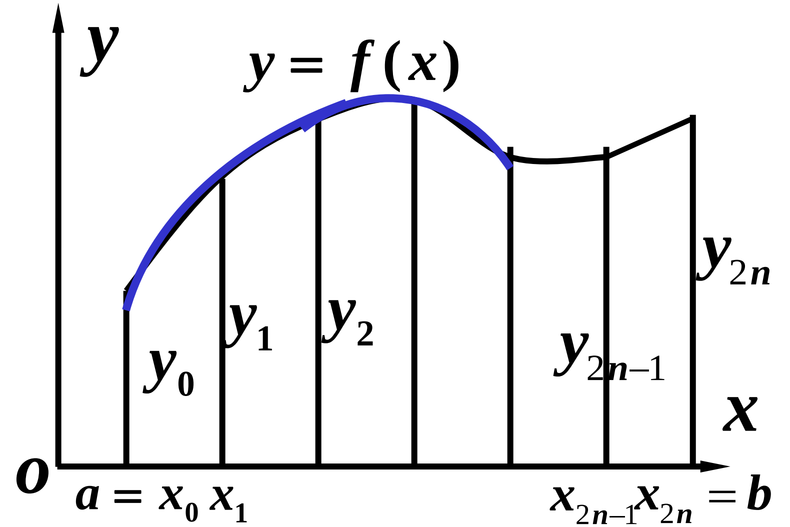
$$A = \int_{-h}^{h} (px^2 + qx + r)dx$$

$$= \frac{2}{3}ph^3 + 2rh = \frac{1}{3}h(2ph^2 + 6r)$$

$$= \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

显然，曲边梯形的面积只与 M_0', M_1', M_2' 的纵坐标 y_0, y_1, y_2 及底边所在的区间长度 $2h$ 有关.

$$A=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),$$



由此可知 $\frac{n}{2}$ 组曲边梯形的面积为

$$A_1=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),\quad A_2=\frac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4),$$

…… …… ……

$$A_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}h(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n),$$ 其中 $h=\dfrac{b-a}{n}$.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})$$

$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]. \qquad (4)$$

例2 用梯形法和抛物线法计算积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ 的近似值(十等分).

解 把区间十等分,设分点为 x_i, $(i=0,1,\cdots,10)$

相应的函数值为 $y_i=\frac{1}{x_i}\ (i=0,1,\cdots,10)$ 列表:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_i	1.00000	$\frac{1}{1.1}$	$\frac{1}{1.2}$	$\frac{1}{1.3}$	$\frac{1}{1.4}$	$\frac{1}{1.5}$

i	6	7	8	9	10
x_i	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	$\frac{1}{1.6}$	$\frac{1}{1.7}$	$\frac{1}{1.8}$	$\frac{1}{1.9}$	$\frac{1}{2}$

利用梯形法公式（3），得

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{2-1}{10}[\frac{1}{2}(y_0+y_{10})+y_1+y_2\cdots+y_9)$$

$$\approx \frac{2-1}{10}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.9}\right].$$

利用抛物线法公式（4），得

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{2-1}{30}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})].$$

$$\approx \frac{2-1}{30}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.8}\right)+4\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right)\right]$$

五、小结

求定积分近似值的方法：

矩形法、梯形法、抛物线法

注意：对于以上三种方法当 n 取得越大时近似程度就越好.

作业

P236　　6(梯形法)