第七章习题课

一阶微分方程

一　基本要求：

1 了解微分方程的基本概念：

微分方程的定义、阶、解、通解、积分曲线、特解、初始条件、初值问题；

2 会判断变量可分离方程、齐次方程、一阶线性方程、 伯努利方程；

3 掌握变量可分离方程和一阶线性方程的解法，会解齐次方程和伯努利方程；

二　内容提要

基本概念

一阶方程

高阶方程

类　型

1. 直接积分法
2. 可分离变量
3. 齐次方程
4. 线性方程
5. 伯努利方程

变量代换

1 基本概念

微分方程 凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

微分方程的阶 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

微分方程的解 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

通解　**如果**微分方程的解中含有任意常数，并且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

特解　确定了通解中的任意常数以后得到的解，叫做微分方程的特解.

初始条件　用来确定任意常数的条件.

初值问题　求微分方程满足初始条件的解的问题，叫初值问题.

2 一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $g(y)dy = f(x)dx$

分离变量法

解法 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

(2) 齐次方程 形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$

解法 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$

(3) 一阶线性微分方程

形如 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$, 方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

（使用分离变量法）

非齐次微分方程的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

（常数变易法）

(5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

当$n=0,1$时， 方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时， 方程为非线性微分方程.

解法 需经过变量代换化为线性微分方程.

令$z=y^{1-n}$,

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x),$$

三 问题与思考

问题1. 判断正误：

(1) $(y')^2 = x - y$是二阶微分方程。

(2) $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$是可分离变量方程。

(3) $x(1+\ln y - \ln x)dx - ydy = 0$是齐次方程。

(4) $y' - y\tan x = \sin 2x$的通解为$y = -\dfrac{2}{3}\cos^2 x + \dfrac{C}{\cos x}$

（1）否；（2）是；（3）是；(4)是

四　典型题目

例1　求解下列一阶微分方程：

$$(1)\ \tan x\frac{dy}{dx}-y=5 \qquad (2)(1+e^{-\frac{y}{x}})xdy+(x-y)dx=0$$

$$(3)\ y'=(4x+y+1)^2$$

$$(4)\ \cos ydx+(x-2\cos y)\sin ydy=0$$

$$(5)\ y'=(y^2+x^3)/2xy$$

解　(1) $\tan x \dfrac{dy}{dx} - y = 5$

方法1 看作一阶线性微分方程

变形 $y' - \cot x \cdot y = 5\cot x$

利用通解公式，得

$$y = e^{\int \cot x dx}\left(\int 5\cot x \cdot e^{-\int \cot x dx} dx + C\right)$$

$$= \sin x\left(\int 5\cot x \cdot \csc x dx + C\right)$$

$$= \sin x(-\csc x + C)$$

$$= C\sin x - 5$$

方法2 看作可分离变量方程

分离变量: $\dfrac{dy}{y+5} = \cot x dx$

两边积分，得

$$\ln|y+5| = \ln|\sin x| + \ln|C|$$

即 $y = C\sin x - 5$

注　解题前要注意观察分析，选择最简方法

$$(2)\ (1+e^{-\frac{y}{x}})xdy+(x-y)dx=0$$

解 原方程化为 $\left(1+e^{-\frac{y}{x}}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$

令 $\boldsymbol{u=\frac{y}{x}}$, $\boldsymbol{y=ux,\ y'=u+xu'.}$

代入方程得 $\left(1+e^{-u}\right)\left(x\frac{du}{dx}+u\right)=u-1$

即 $\frac{dx}{x}=-\frac{1+e^{u}}{u+e^{u}}du$ 积分得 $x\left(u+e^{u}\right)=C$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回，得所求通解 $y+xe^{\frac{y}{x}}=C$

$(3) y' = (4x + y + 1)^2$

利用线性变换 $u = 4x + y + 1$,可将方程变为可分离变量方程

令 $u = 4x + y + 1$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 4$

即 $\frac{du}{u^2 + 4} = dx$ 解得 $\arctan \frac{u}{2} = 2x + C$

回代，得 $4x + y + 1 = 2\tan\left(2x + C\right)$

或 $y = 2\tan\left(2x + C\right) - 4x - 1$

$$(4)\cos y dx + (x - 2\cos y)\sin y dy = 0$$

变形 $\dfrac{dx}{dy} + \tan y \cdot x = 2\sin y$

关于x的一阶线性微分方程

$$x = e^{-\int \tan y dy}\left(\int 2\sin y e^{\int \tan y dy} dy + C\right)$$

即 $x = -2\cos y \ln\left|\cos y\right| + C\cos y$

$(5)\ y' = (y^2 + x^3)/2xy$

变形 $y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{x^2}{2}y^{-1}$　　（$n = -1$的伯努利方程）

令　$z = y^2$，　则原方程变为 $z' - \dfrac{1}{x}z = x^2$

由通解公式得　　$z = x\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$

代回，得　$y^2 = x\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$

求解一阶微分方程要特别注意：

1　正确识别方程所属类型，以采用相应的方法.

2　如果方程不属于典型类型，可以考虑引入变量代换，或考虑认定x为y的函数，再判定方程的类型.

例如　$\cos y y' + \sin y = \cos x$

求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解.

解　原方程可变形为 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y^2$,.

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}[\int y^2 e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C]$$

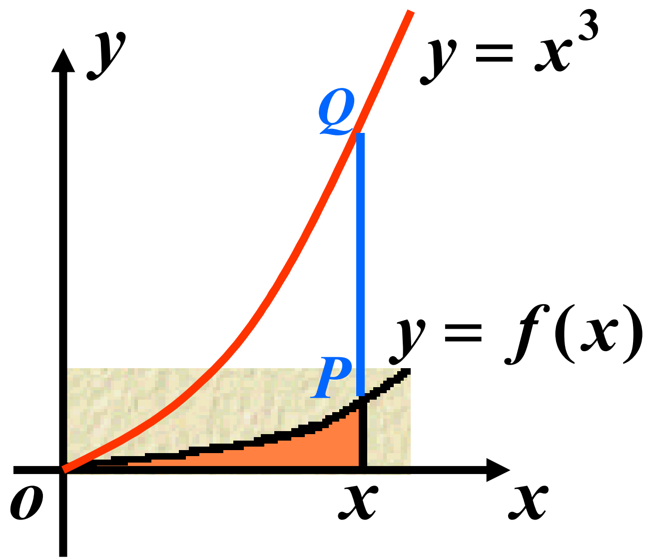
$$=Cy+\frac{y^2}{2}.$$

补充练习

例1 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$

解 $$\int_0^x f(x)dx = x^3 - f(x),$$

$$\int_0^x y dx = x^3 - y,$$



两边求导得 $y = 3x^2 - y',$

解此微分方程

$$y' + y = 3x^2 \qquad \int_0^x y\,dx = x^3 - y,$$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right]$$

$$= e^{-x}\left[C + \int 3x^2 e^x dx\right]$$

$= \ldots$ (分部积分法)

$$= e^{-x}\left[C + 3(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x)\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0,$ 得 $C = -6,$

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$.

思考题 如何求解下列的*y(x)*?

$$\int_1^x \left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]dt = xy(x) \quad (x>0)$$

思考题解答

方程两边同时对 x 求导:

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=y+xy',$$

$$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y, \quad y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\frac{y}{x}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$

原方程是齐次方程.

注意方程含初始条件$x=1$时，$y=0$.

思考

已知可导函数$f(x)$满足$f(x)+\int_0^{3x} f(\frac{t}{3})dt = 8x+2$,求$f(x)$.

思考题解答

方程两边同时对 x求导:

$$f'(x)+f(\frac{3x}{3})\cdot(3x)' \quad =8$$

…

初始条件 $f(0)=2$

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

提示:
$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

则有
$$\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$

25．若连续函数$y(x)$满足方程$y(x)=\int_0^x y(t)dt+e^x$，则$y(x)$的表达式为（ ）．（3分）

A．$y(x)=Ce^x+1$　　B．$y(x)=e^x(x+1)$

C．$y(x)=e^x(Cx+1)$　　D．$y(x)=xe^x+1$

【参考答案】 B

【对应考点】

一阶线性微分方程

【试题解答】

在已知等式两边对x求导：

$$y'=y(x)+e^x\text{，即 } y'-y=e^x\text{，}$$

所以

$$y(x)=e^{\int dx}\left[\int e^x\cdot e^{-\int dx}+C\right]=e^x(x+C).$$

由$y(0)=1\Rightarrow C=1$，所以

$$y(x)=e^x(x+1).$$

5. 若连续函数 $f(x)$满足 $\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x\sin x$，则 $f(x) = (\ )$. （3分）

A. $\sin x - x\cos x + C$

B. $-2\sin x - x\cos x + C$

C. $x\cos x - \sin x + C$

D. $\cos x - x\sin x + C$

【参考答案】 D

【对应考点】

微分方程的概念

【试题解答】

令 $tx = u$，则 $t = 0$时， $u = 0$； $t = 1$时， $u = x$.

原式变为：

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du = f(x) + x\sin x \Rightarrow \int_0^x f(u)du = xf(x) + x^2\sin x$$

两边对 x求导

$$f'(x) = -2\sin x - x\cos x$$

$\therefore$ $$f(x) = \int(-2\sin x - s\cos x)dx = \cos x - x\sin x + C.$$

回顾　积分上限求导公式

$$(1)\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

$$(2)\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right)' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

$$(3)\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)' = f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

上面的例子表明，对于某些积分方程(包含未知函数积分的方程)，可以通过两端求导的方式化为微分方程求解.

注意积分式子中所隐含的初始条件.

解微分方程的特殊方法

思考 $2xyy' + y^2 = xe^{-x^2}$；

解 $(xy^2)' = xe^{-x^2}$，

$$xy^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

所求通解为 $xy^2 = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$

一题多解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y}$$

微分方程的应用举例

牛顿冷却定律与嫌疑犯确定的科学性

牛顿冷却定律指出，当系统与环境的温度差（不超过 10-15℃）不大时，系统温度的变化率服从下列表达式

$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$。人体体温受大脑神经中枢调节。人死后体温调节功能消失，尸体的温度变化近似服从牛顿冷却定律。这个规律可为侦破工作提供有力可靠的科学依据。

问题：受害者的尸体于晚上 7:30 被发现。法医于晚上 8:20 赶到凶案现场，测得尸体温度为 32.6℃；一小时后，当尸体即将被抬走时，测得尸体温度为 31.4℃，室温在几小时内始终保持在 21.1℃．此案最大的嫌疑犯是张某，但张某声称自己是无罪的，并有证人说："下午张某一直在办公室上班，5:00 时打了一个电话，打完电话后离开了办公室。"从张某的办公室到受害者家（凶案现场）步行需 5 分钟，现在的问题是：张某不在凶案现场的证言能否使他被排除在嫌疑犯之外？

解决思路：关键问题在于确定案发时间，即受害者死亡的时间 T_d。尸体的温度变化服从微分方程

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-21.1)$$，k 是常数。

微分方程的通解为 $T(t)=21.1+ae^{-kt}$

$\because T(0)=21.1+ae^{-k\times 0}=32.6 \qquad \therefore a=11.5$

又 $\because T(1)=21.1+11.5e^{-k\times 1}=31.4 \qquad \therefore e^{k}=115/103$

$\therefore k=\ln 115-\ln 103\approx 0.110$

$\therefore T(t)=21.1+11.5e^{-0.110\times t}$

当 $T=37$℃ 时，有 $21.1+11.5e^{-0.110\times t}=37$ 所以 $t\approx -2.95$小时 ≈ -2小时57分

所以被害者的死亡时间为

8时20分 − 2小时57分钟 = 5时23分

即死亡时间大约在下午 5:23，因此张某不能被排除在嫌疑犯之外。

4．曲线 $y=Cx^2$ 所满足的一阶微分方程是( )．（3分）

A. $xy'=x$ B. $xy'=2x$

C. $xy'=y$ D. $xy'=2y$

【参考答案】 D

【对应考点】

微分方程的基本概念

【试题解答】

$y=Cx^2$ 两边对 x 求导得 $y'=2Cx$，

由题知 $C=\dfrac{y}{x^2}$，代入得 $xy'=2y$．

6．设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处( )．（3分）

A.某邻域内单调减少　　**B**.取极小值

C.某邻域内单调增加　　**D**.取极大值

【参考答案】 D

【对应考点】

微分方程的基本概念，极值第二充分条件

【试题解答】

将 $x=x_0$ 代入原方程得 $f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$，根据题设条件得

$f''(x_0)=4f(x_0)<0$，由极值第二充分条件可知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值

7．齐次方程 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 满足初值 $y|_{x=1}=2$ 的解为（）．（3分）

A.　$y^2=2x^2(\ln x+2)$　　**B**.　$y^2=2x^2(\ln x-2)$

C.　$y^2=2x^2(\ln|x|+2)$　　**D**.　$y^2=2x(\ln x+2)$

15. 微分方程 $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$ 的通解为 ( ). （3分）

A. $\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}$，$y = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

B. $\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right| = C - 2\cos\frac{x}{2}$，$y = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

C. $\ln\left|\cot\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}$，$y = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

D. $\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = C - 2\sin\frac{x}{4}$，$y = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

【参考答案】 A

【对应考点】

可分离变量的微分方程

【试题解答】

利用三角公式将方程改写为

$$y' = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}.$$

①当 $\sin\frac{y}{2} \neq 0$时，分离变量得

$$\frac{dy}{\sin\frac{y}{2}} = -2\cos\frac{x}{2}dx,$$

积分得通解

$$\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2};$$

②当 $\sin\frac{y}{2} = 0$时，再得特解 $y = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

18．微分方程 $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$ 的通解为（ ）．（3分）

A．$x+2y+\ln|x+y-2|=C$　　B. $x+2y+2\ln|x+y+2|=C$

C．$x+3y+2\ln|x+y-2|=C$　　D．$x+3y+\ln|x+y-2|=C$

【参考答案】 C

【对应考点】 可分离变量的微分方程

【试题解答】

这里 x 与 y 的对应系数成比例，两条直线 $x+y=0$ 与 $3x+3y-4=0$ 平行而无交点．我们用别的变量代换，直接化原方程为可分离变量方程．令 $u=x+y$，则

$$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx},$$

原方程化为 $\frac{du}{dx}=1+\frac{u}{4-3u}=\frac{4-2u}{4-3u}$，即 $\frac{3u-4}{2u-4}du=dx$，

$$\left(1+\frac{u}{2u-4}\right)du=dx,\quad \left(\frac{3}{2}+\frac{2}{2u-4}\right)du=dx,$$

$\therefore$

$$\frac{3}{2}u+\ln|u-2|=x+C_1,$$

所求通解为 $x+3y+2\ln|x+y-2|=C \quad (C=2C_1)$．