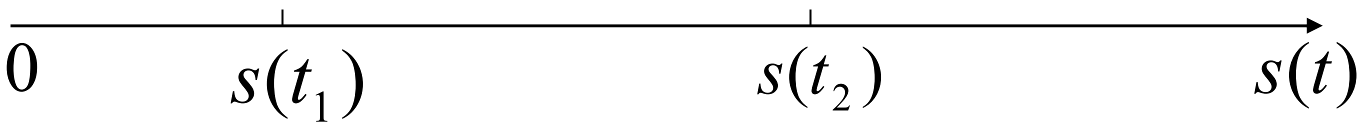
第二节 微积分基本定理

- 积分上限函数及其导数
- 牛顿—莱布尼茨公式
- 小结

问题的提出

变速直线运动中位置函数与速度函数的联系



时刻t_1到t_2的路程是位置函数$s(t)$在区间$[t_1, t_2]$上的增量

$$s(t_2) - s(t_1)$$

另一方面,设速度函数为$v(t)$,在时间间隔$[t_1,t_2]$内物体经过的路程是速度函数$v(t)$在$[t_1,t_2]$上的定积分

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

所以 $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

注意到$s'(t) = v(t)$,即位置函数$s(t)$是速度函数$v(t)$的原函数。

猜想：设$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

一、积分上限函数及其导数

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且设x为$[a,b]$上的一点，考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

如果上限x在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的x值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数，

记 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. 积分上限函数

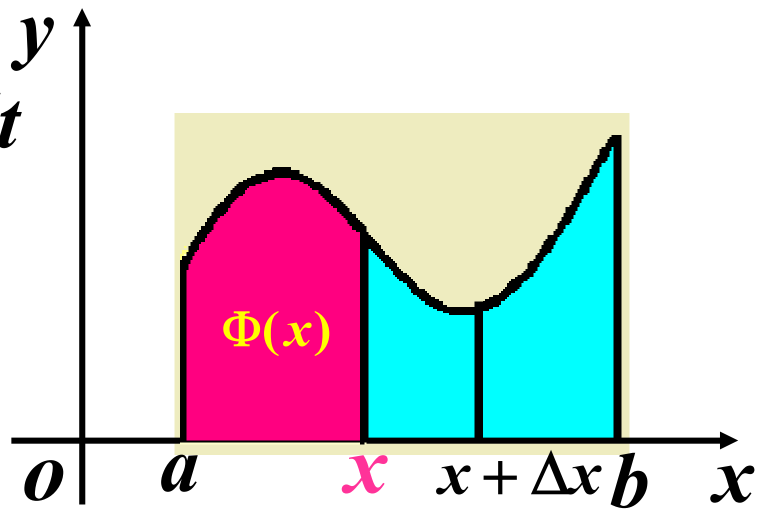
积分上限函数的性质

定理 1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上具有导数，且它的导数是$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \le x \le b)$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

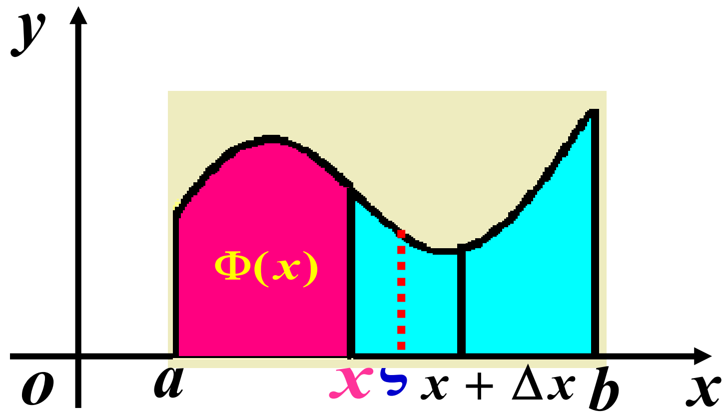


$$\boxed{\Delta\Phi=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt}$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

由积分中值定理得



$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x \quad \xi\text{在}x\text{与}x+\Delta x\text{之间},$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi), \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

$\Delta x\to 0$时， $\xi\to x$ $\qquad \therefore\quad \Phi'(x)=f(x).$

注 对于变上限的复合函数有以下两个推论

推论1 若$f(x)$在$[a, b]$上连续，$\varphi(x)$在$[a, b]$上可导，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

证: 变上限函数$\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$可看成$Y=\int_a^u f(t)dt$,

$u=\varphi(x)$复合而成，

则 $$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= f(u)\cdot\varphi'(x)$$

$$= f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

推论2 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在$[a,b]$上可导，则

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

证: $$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = \int_{\varphi_1(x)}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$$

$$= -\int_{c}^{\varphi_1(x)} f(t)dt + \int_{c}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$$

则 $$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$$

$$= f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

例1 计算下列各题

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t^2 dt$

解： $\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t^2 dt = \cos x^2$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2+1}^{x} \sin t^2 dt$

解: $\frac{d}{dx}\int_{x^2+1}^{x} \sin t^2 dt$

$$= \sin x^2 \cdot (x)' - \sin(x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)'$$

$$= \sin x^2 - 2x\sin(x^2+1)^2$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt\right)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(-\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}dt\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

例3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{xe^{2x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x^2}=\frac{2}{1+0}$$

$$=2$$

定理2（原函数存在定理）

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$的导数是$f(x)$，即$\Phi(x)$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数（不定积分）之间的联系，即可通过原函数来计算定积分.

二、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

证 $\because$ 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又$\because$ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数,

$$\therefore F(x) - \Phi(x) \equiv C \qquad x \in [a,b]$$

$$\boxed{\therefore\ F(x)-\Phi(x)\equiv C} \qquad x\in[a,b]$$

令 $x=a \Rightarrow F(a)-\Phi(a)=C,$

而 $\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \Rightarrow F(a)=C,$

$$\because\ F(x)-\int_a^x f(t)dt=C=F(a),$$

$$\therefore\ \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a),$$

令 $x=b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

牛顿—莱布尼茨公式

简记为

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$$

由牛顿 $-$ 莱部尼茨公式知：要求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)dx$，只须先求出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 $F(x)$，再计算 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的改变量 $F(b)-F(a)$ 即可.

注

牛顿 $-$ 莱部尼茨公式不仅给出了计算定积分的统一、简便的计算方法，而且也揭示了不定积分与定积分在计算方法上的关系.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

注意

公式使用的条件是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,

当$f(x)$在$[a,b]$上有有限个第一类间断点时,不妨设间断点为c,则在$[a,c]$,$[c,b]$上分别利用牛莱公式,再利用可加性便可得结果.

用牛莱公式证明积分中值定理的改进形式

P242 例6

例4　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx$.

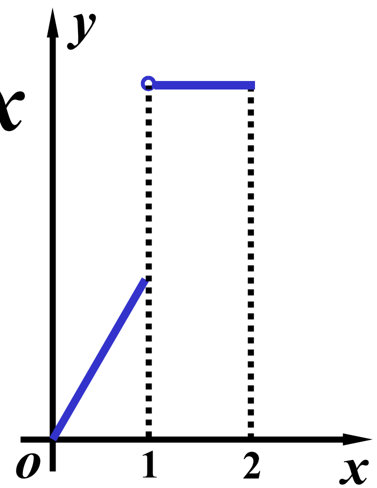
解　原式 $=\left[2\sin x-\cos x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\frac{\pi}{2}$.

例5　设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$.

解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx$

$=6.$



例6　计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

解　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2 x}dx$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$$

$$= \sqrt{2}[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx]$$

$$= \sqrt{2}[\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \sqrt{2}[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}$$

例7 求 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx.$

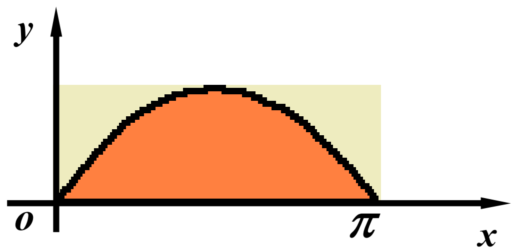
解 当 $x < 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

例 8 计算曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 面积 $A = \int_0^{\pi} \sin x dx$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$



补例9 设$f(x)=x^2+2\int_0^1 f(x)dx$，求$f(x)$.

解：令$\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=x^2+2A$,

两边从0到1积分，得

$$\int_0^1 f(x)dx=A=\int_0^1 (x^2+2A)dx=\frac{1}{3}+2A$$

于是 $A=-\frac{1}{3}$ 则 $f(x)=x^2-\frac{2}{3}$

补例10 设$50x^3+40=\int_c^x f(t)dt$，求$f(x)$及c.

解：两边求导：$150x^2=f(x)$

得：$f(x)=150x^2$

原式中令x=0得

$$40=\int_c^0 150t^2dt=[50t^3]_c^0$$

$$=-50c^3$$

$$c=-(\frac{4}{5})^{\frac{1}{3}}$$

三、小结

1.积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

2.积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$

3.微积分基本公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

注意适用条件

牛顿—莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系.

思考题

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^x f(t)dt$与$\int_x^b f(u)du$是x的函数还是t与u的函数？它们的导数存在吗？如存在等于什么？

思考题解答

$\int_a^x f(t)dt$ 与 $\int_x^b f(u)du$ 都是 x 的函数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(u)du = -f(x)$$

思考题

下列运算是否正确?

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$$

思考题解答

错误.

被积函数在区间**[-1,1]**上有无穷间断点**x=0**，不符合牛莱公式的条件，对于这类定积分的计算我们将在第四节反常积分讨论.

作业

P244　3; 4; 5(3);6

8(8);(11);(12)

11(2);

12；13；15

备用题

1. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)dt$

解：$\dfrac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)dt$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^x xf(t)dt-\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt$$

$$=\frac{d}{dx}x\int_0^x f(t)dt \quad -xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt$$

2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$.证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1 \text{在}[0,1]\text{上只有一个解.}$$

证　令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,

$\because f(x)<1$, $\quad\therefore F'(x)=2-f(x)>0$,

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为单调增加函数. $F(0)=-1<0$,

$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0$,

所以 $F(x)=0$ 即原方程在 $[0,1]$ 上只有一个解.

3.求 $I(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ **的极值.**

解 $I'(x)=x(x-1)$, 得驻点 $x=0, x=1$,

$I''(x)=2x-1$,. $I''(0)=-1<0, I''(1)=1>0$,

$x=0$为极大值点,$x=1$ 为极小值点,

因此, 极小值为$I(1)=\int_0^1 t(t-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{6}$

极大值为 $I(0)=0$.

4　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$.证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

证

$$F'(x)=\frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'\int_0^x f(t)dt-\left(\int_0^x f(t)dt\right)'\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$\boxed{F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}}$$

$$F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$$\because f(x)>0,\quad (x>0)\qquad 0<t<x,\ \ x-t>0$$

$$\therefore (x-t)f(t)>0,\quad \therefore \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$$

$$\therefore F'(x)>0\quad (x>0).$$

故$F(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

5 设$f(x)=x^2+2\int_0^1 f(x)dx$，求$f(x)$.

解：令$\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=x^2+2A$,

两边从0到1积分，得

$$\int_0^1 f(x)dx=A=\int_0^1(x^2+2A)dx=\frac{1}{3}+2A$$

于是 $A=-\frac{1}{3}$ 则 $f(x)=x^2-\frac{2}{3}$