第二章　导数与微分

导数——由于自变量的微小变化所引起的函数值变化“快慢”问题

微分——由于自变量的微小变化所引起的函数值的改变量的近似值问题

都是描述函数性态的有力的工具

（从微观上研究函数）

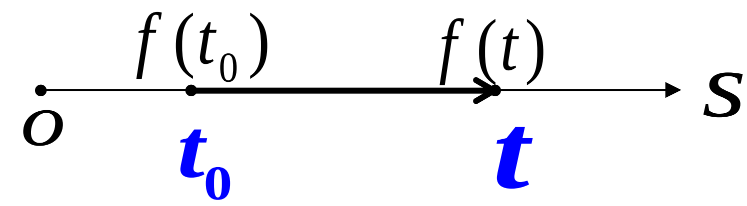
第一节　导数的概念

- 问题的提出
- 导数的定义
- 由定义求导数
- 可导与连续的关系
- 导数的几何意义与物理意义
- 小结

一、问题的提出

1.直线运动的速度问题

如图，$s = f(t)$



求t_0时刻的瞬时速度,

取一邻近于t_0的时刻t，运动时间Δt $(\Delta t = t - t_0)$

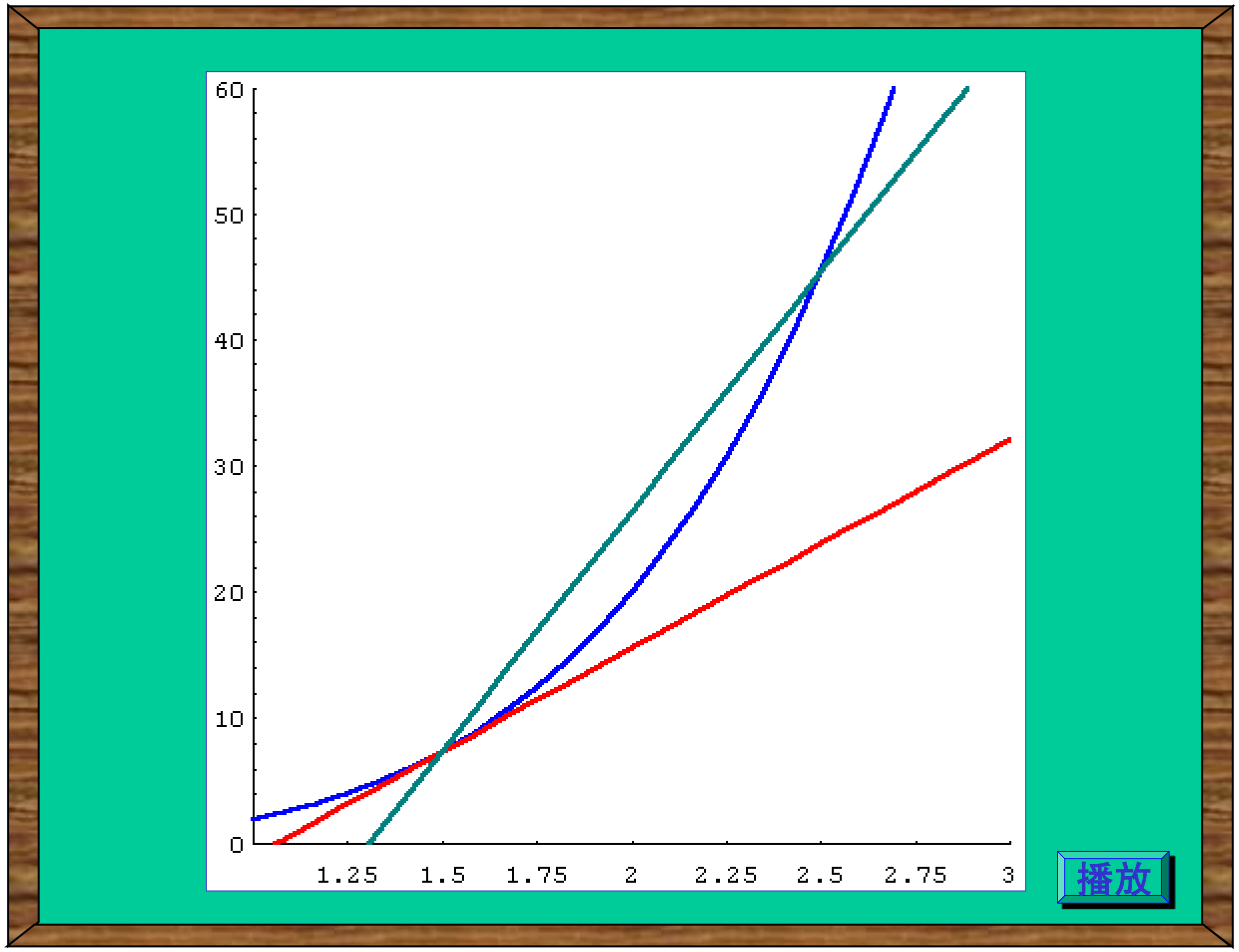
平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s - s_0}{t - t_0} = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

可看做t_0时刻的近似速度 (Δt越小误差越小)

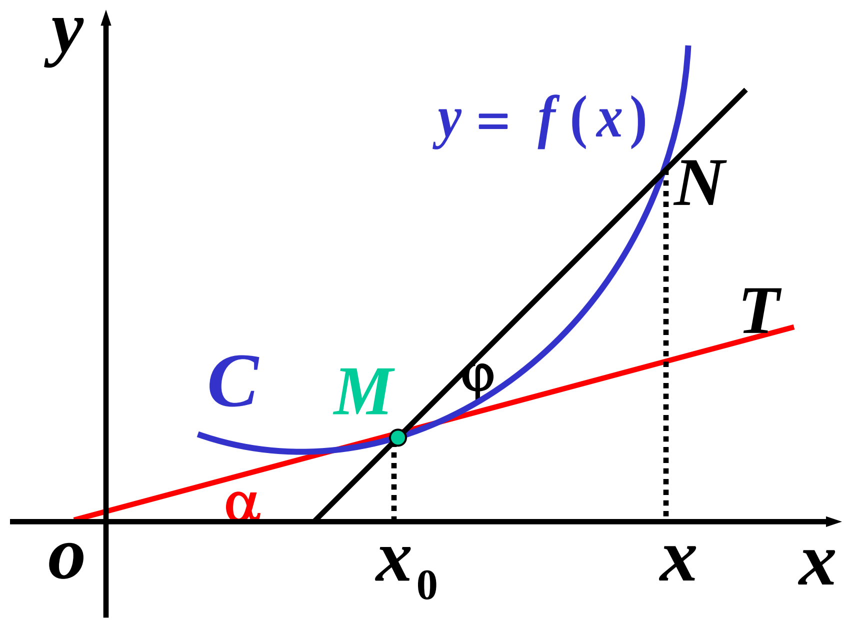
令$t \to t_0$，取极限得

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



如图, 如果割线MN的极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的切线.



极限位置即

$$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$$

设 $M(x_0, y_0), N(x, y)$.

割线MN的斜率为 $\tan\varphi = \dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M, x \to x_0$,

切线MT的斜率为 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

以上两个问题都归结为极限问题

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{令}\Delta x = x - x_0\\ \text{则}x = x_0 + \Delta x\end{array}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\dfrac{\text{因变量改变量}}{\text{自变量改变量}}$ 当自变量改变量趋于0时的极限，

函数因变量的改变量相对于自变量改变量的瞬时变化率问题

二、导数的定义

设函数$y=f(x)$在点 x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

如果Δy与Δx之比当$\Delta x\to 0$时的极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，

则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导，

并称这个极限为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，

记为$f'(x_0)$,

即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

或记为$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$,

其它极限形式 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

导数的本质

点导数是因变量在点x_0处的变化率,它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

三、由定义求导数

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$ (C为常数)的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0.$

即 $(C)' = 0.$

例2 求函数 $y=x^n$ (n为正整数) 在$x=a$处的导数.

解 $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$=na^{n-1}$$

思考 $y=x^n$ (n为正整数) 在定义域内各点处的导数?

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

★ 如果函数$y = f(x)$在开区间I内的每点处都可导，就称函数$f(x)$在开区间I内可导.

★对于任一$x \in I$,都对应着$f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数$f(x)$的导函数.

记作$y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}$或$\dfrac{df(x)}{dx}$.

例如　函数 $y=x^n$(n为正整数) 的导函数.

$$\because f'(a)=na^{n-1}$$

一般的　　$(x^n)'=nx^{n-1}$.

更一般地　　$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$.　　$(\mu\in R)$　(以后证明)

例如,　$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

点导数与导函数之间的关系：

$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

例3 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例4 求函数 $f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$= a^x \ln a.$$

即 $(a^x)' = a^x \ln a.$ $\qquad (e^x)' = e^x.$

四、单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

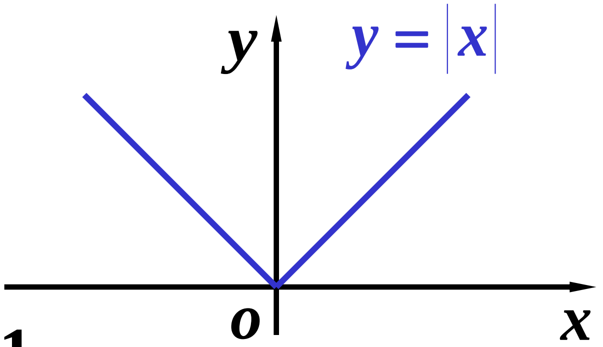
$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数 $f(x)$在点x_0 处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等.

★ 如果 $f(x)$在开区间(a,b)内可导，且 $f'_+(a)$及 $f'_-(b)$都存在，就说 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

例5　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解　$\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

五、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数. 反之未必

证　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

$$\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0) \qquad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x] = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

推论：不连续函数一定不可导

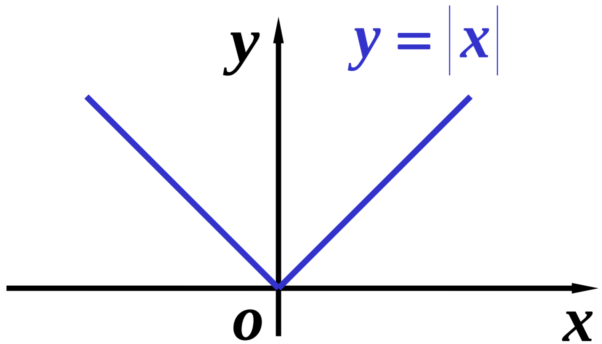
注意：该定理的逆定理不成立.

★ 连续函数不存在导数举例

函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导性.

即 $f'_+(0)=1,\ \ f'_-(0)=-1$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$,



几何：可导函数的图形是一条平滑的曲线。

#P79

补例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在$x=0$处的连续性与可导性.

解 $\because \sin\dfrac{1}{x}$是有界函数, $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \therefore\ f(x)$在$x=0$处连续.

但在$x=0$处有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

当$\Delta x\to 0$时, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在$-1$和$1$之间振荡而极限不存在.

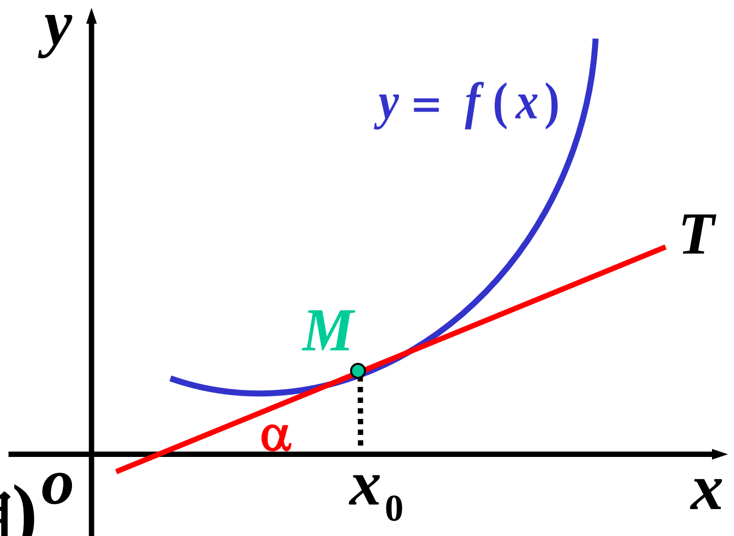
$\therefore\ f(x)$在$x=0$处不可导.

六、导数的几何意义与物理意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

例7 求等边双曲线$y=\dfrac{1}{x}$在点$(\dfrac{1}{2},2)$处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0$.

2.物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

变速直线运动:路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$;

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导;

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续,一定不可导.} \\ \text{连续} \begin{cases} \text{直接用定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases} \end{cases}$

牛顿(1642 – 1727)

伟大的英国数学家，物理学家，天文学家和自然科学家．他在数学上的卓越贡献是创立了微积分．1665年他提出正流数 (导数) 术，次年又提出反流数(积分)术,并于1671年完成《流数术与无穷级数》一书 (1736年出版)．他还著有《自然哲学的数学原理》和《广义算术》等．

莱布尼兹(1646 – 1716)

德国数学家, 哲学家. 他和牛顿同为微积分的创始人 , 他在《学艺》杂志上发表了有关微积分学的论文,所用微积分符号延续至今 . 他还设计了作乘法的计算机 , 系统地阐述二进制计数法，并把它与中国的八卦联系起来 .

作业

P83　6(1)(3);7; 9(4);

10;13;

17;19

例1. 设

$f'(x)$ 存在，且 $f'(1)=-2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}$.

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

例2

设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x}, & x\le 1\\ 2x+b, & x>1\end{cases}$在$x=1$点可导，求$a,b$.

解 由$f(x)$在$x=1$连续知$a=b+2$,

再由可导性,

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{a}{x}-a}{x-1}=-a$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(2x+b)-a}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2x-2}{x-1}=2$$

解得$a=-2, b=-4.$

备用题

1.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，

证明： 在 $x=0$ 处可导.

证：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

又 $f(x)$在 $\boldsymbol{x}=0$处连续，故 $f(0)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.