

集合论课堂测验

by 张昊迪

2020 年 11 月 11 日

一 判断 (30pts)

以下 A, B, C 是全集 U 的子集, 判断真假:

1. $A \notin B, B \in C \Rightarrow A \in C$ ()
2. $A \notin B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$ ()
3. $A \in B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$ ()
4. $A \subset B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$ ()
5. $a \in A, A \subset B \Rightarrow a \in B$ ()
6. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = A$ ()
7. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ()
8. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap (B - A) = B$ ()
9. $B \subset A \Leftrightarrow (A - B) \cap B = A$ ()
10. $B \subseteq A \Leftrightarrow (A - B) \cap B = A$ ()

二 问答 (20pts)

1. 设 A, B, C 是任意3个集合, 如果 $A \in B, B \in C$, 则 $A \in C$ 可能吗? $A \in C$ 是否永真? 证明或举例说明。
2. 设 A, B 是任意2个集合, $A \in B, A \subseteq B$ 同时成立可能吗? 证明或举例说明。

3. 设 A, B, C 是任意3个集合, 如果 $A \cup B = A \cup C$ 且 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$ 。以上命题正确吗? 请证明。

4. 设 A, B 为任意2个集合, 请回答 (不需证明):

- a. 若 $A - B = B$, 则 A 与 B 什么关系?
- b. 若 $A - B = B - A$, 则 A 与 B 什么关系?
- c. 若 $A \cap B = A \cup B$, 则 A 与 B 什么关系?
- d. 若 $A \oplus B = A$, 则 A 与 B 什么关系?

三 证明 (40pts)

1. $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

2. 若二元关系 R 是对称的, 则 $R \circ R$ 是对称的。

3. 设 R, S 是 A 上的等价关系, 证明: $R \circ S$ 是 A 上的等价关系当且仅当 $R \circ S = S \circ R$ 。

4. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是函数, A, B 是 X 的子集, 证明:

a. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

b. $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

c. $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$

四 附加（10pts）设 A 为非空集合， $B = P(A) - \emptyset - A$ ，求偏序集 (B, \subseteq) 的极大元与极小元，并证明。