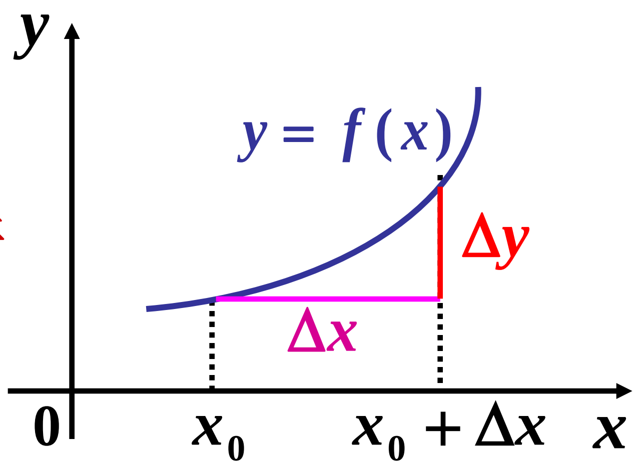
第八节 函数的连续性与间断点

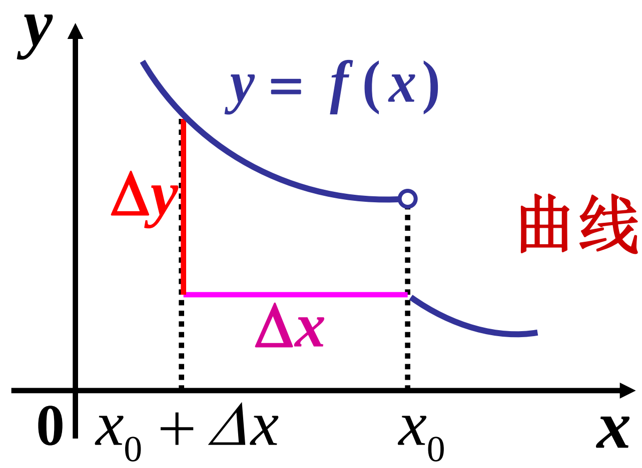
一　函数的连续性

二　函数的间断点

连续函数是非常重要的一类函数，也是函数的一种重要的性态．自然界中的许多变量都是连续变化着的，即在很短的时间内，它们的变化都是很微小的．这种现象反映在函数关系上，就是函数的连续性；对函数曲线来说就是从起点开始到终点都不间断.

曲线不断





曲线断开

函数$f(x)$随x的改变而逐渐改变　　　　有突变现象

一 函数的连续性

1. 增量的概念 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义.

$\forall x \in U(x_0,\delta)$, $\Delta x = x - x_0$，称为自变量在点 x_0 的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.

2. 连续的定义

设$f(x)$在点x_0的某一邻域内(包含x_0)有定义，

如果当自变量 x 在点 x_0 处取得的改变量Δx 趋于

0 时，对应函数的增量Δy 也趋于0, 即：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

或写作

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

等价定义2

设$f(x)$在点x_0的某一邻域内(包含x_0)有定义,

如果 $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

隐含着三个条件 **#P57**

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例1. 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ #P57

在$x=0$处连续，求常数a与b.

解：$f(x)$在$x=0$处连续，要求

$$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$$

$$\because f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$$

$$\therefore a=b=f(0)=2$$

3. 连续函数与连续区间

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

右连续

注: $f(x)$ 在左端点 a 连续是指 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$,

$f(x)$ 在右端点 b 连续是指 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

左连续

几何直观上: 连续函数的图形是一条不间断的曲线.

例2 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$\because\ \left|\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1,$ 则 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|.$

对任意的 α, 当 $\alpha\ne 0$ 时, 有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$,

故 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$, $\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时, $|\Delta y|\to 0$, $\Delta y\to 0$.

即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

练习

证明函数$y=\cos x$在区间 $(-\infty,+\infty)$内连续.

二 函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

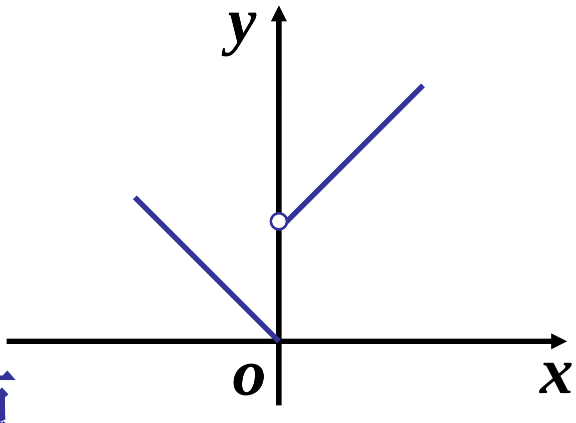
如果上述三个条件中只要有一个不满足, 则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断), 并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

间断点举例

例1.讨论函数$f(x)=\begin{cases} -x, & x \le 0, \\ 1+x, & x > 0, \end{cases}$在$x=0$处的连续性

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1,$

$f(0^-)\neq f(0^+),$

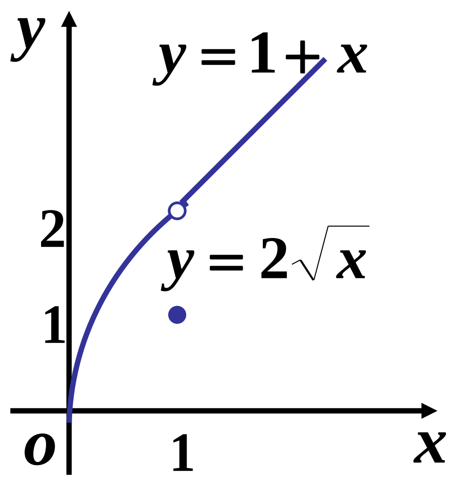


$x=0$称为函数的跳跃间断点

例2　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

在$x=1$处的连续性.



解: $f(1^-)=2,\quad f(1^+)=2,$

$f(1)=1,$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1),$$

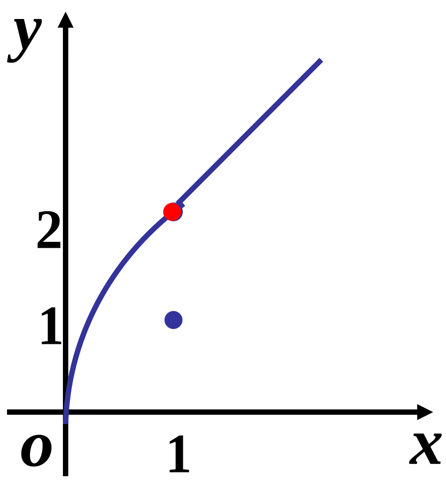
$x=1$称为函数的可去间断点

注意：对于可去间断点，只要改变或者补充间断点处函数的定义，则可使其变为连续点.

如上例，令 $f(1)=2$,

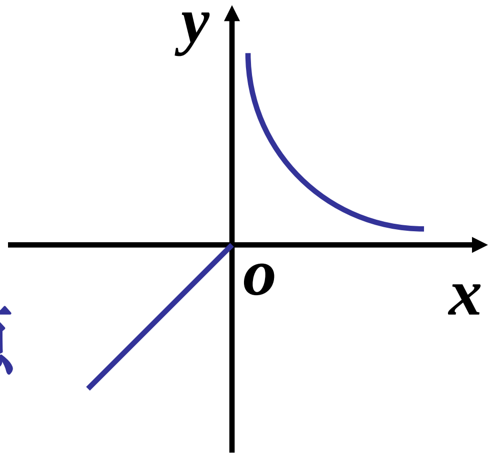
则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.



例3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

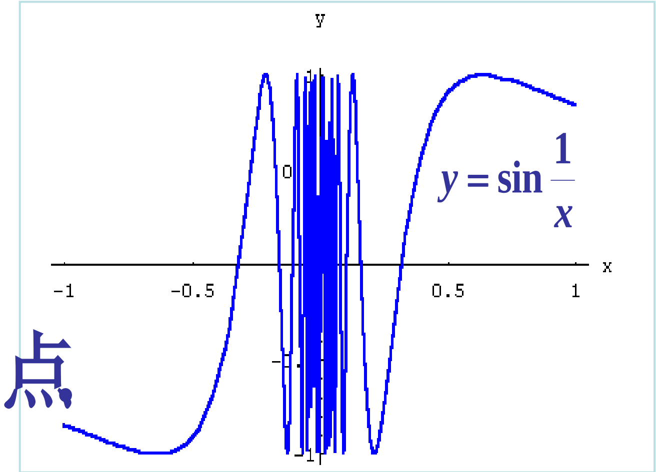
解 $f(0^-)=0,\quad f(0^+)=+\infty,$



$x=0$ 称为函数的无穷间断点.

例4 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 在 -1 与 $+1$ 之间变动无限多次



$x=0$ 称为函数的振荡间断点.

第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点.

跳跃间断点:左右极限不相等

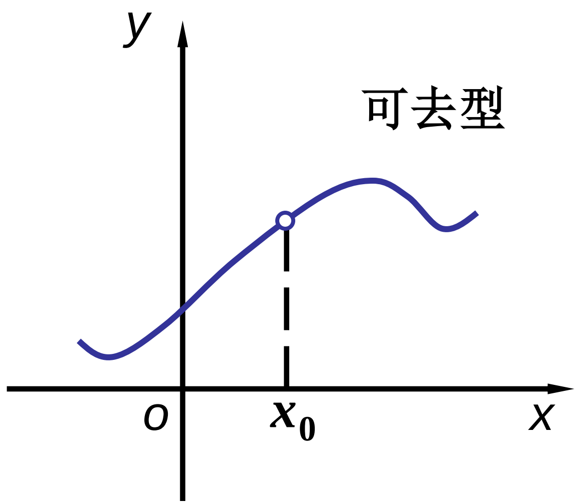
可去间断：左右极限相等

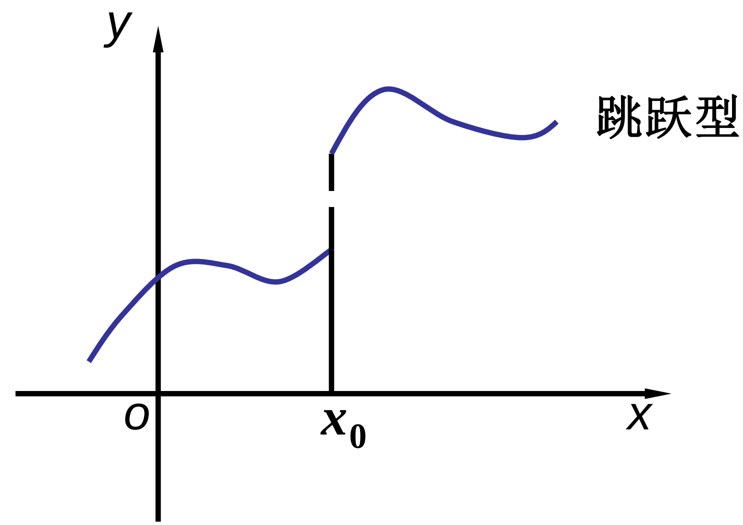
第二类间断点: 左、右极限至少有一个不存在的间断点.

无穷间断点：左右极限中至少有一个是无穷大

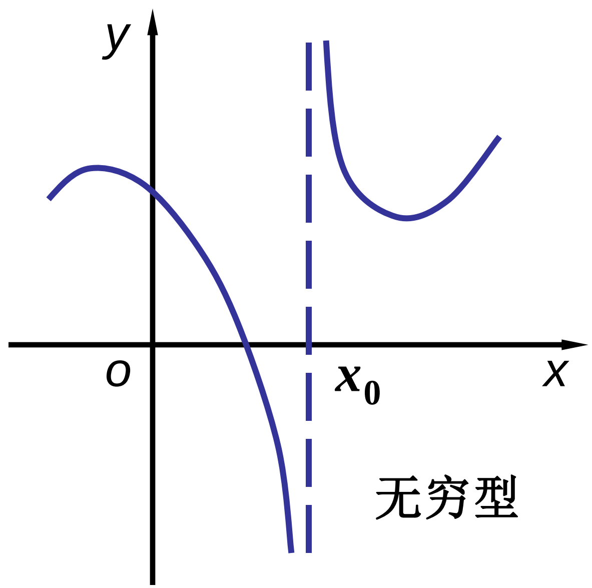
振荡间断点

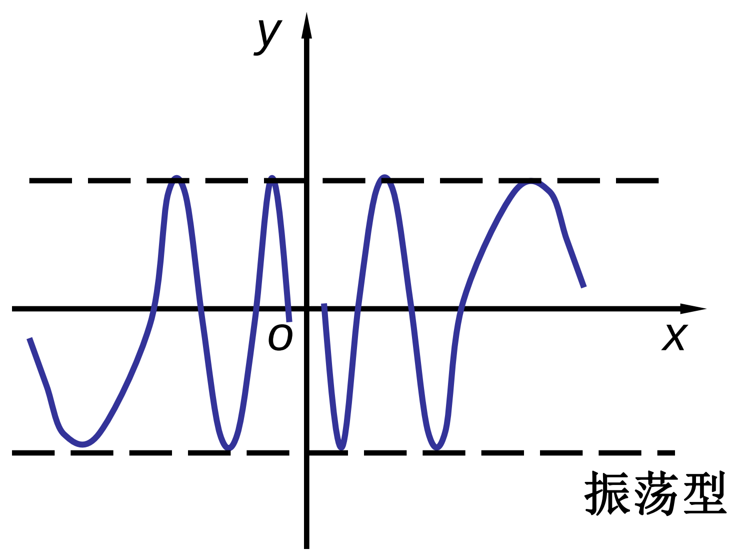
第一类间断点





第二类间断点





练习 研究下列函数在x=0的连续性，若是间断的，指出间断点类型。

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$. 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$.

3) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a\ , & x=0\end{cases}$. 4) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$.

解：1)

$$\because \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)= f(0),\ \therefore x=0\text{是连续点.}$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$ x=0为跳跃间断点.

3）$\because \lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，$\therefore x$=0为振荡间断点.

4）$\because \lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{|x|}=0$

x=0为$f(x)$的可去间断点.

小结

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;

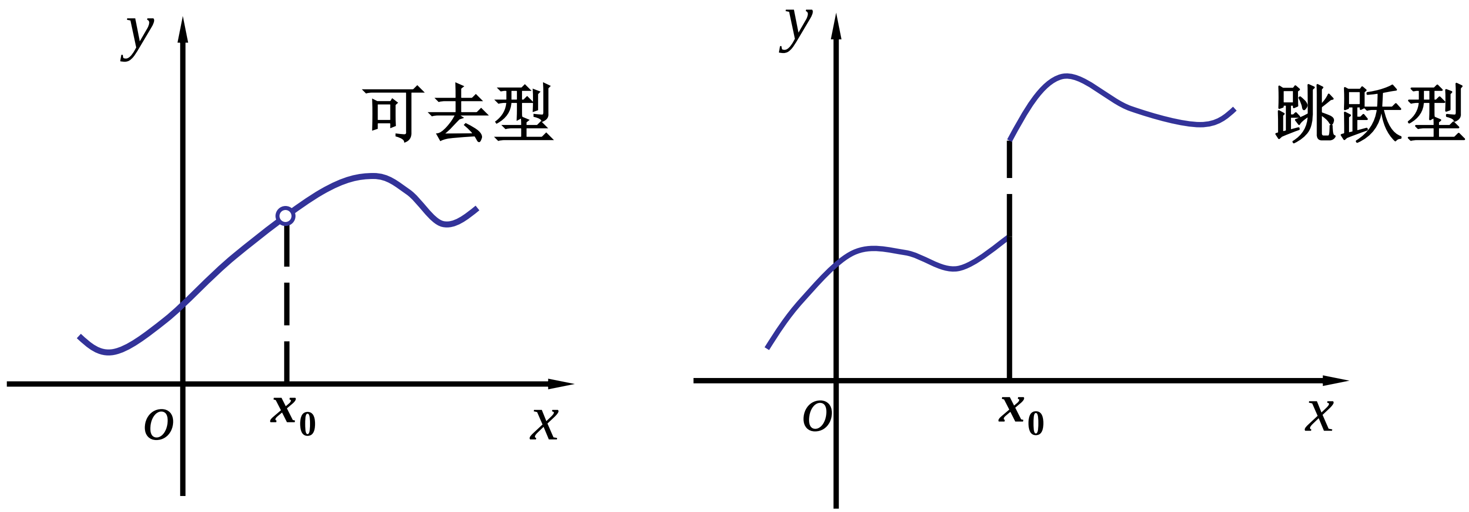
2.区间上的连续函数;

3.间断点的分类与判别;

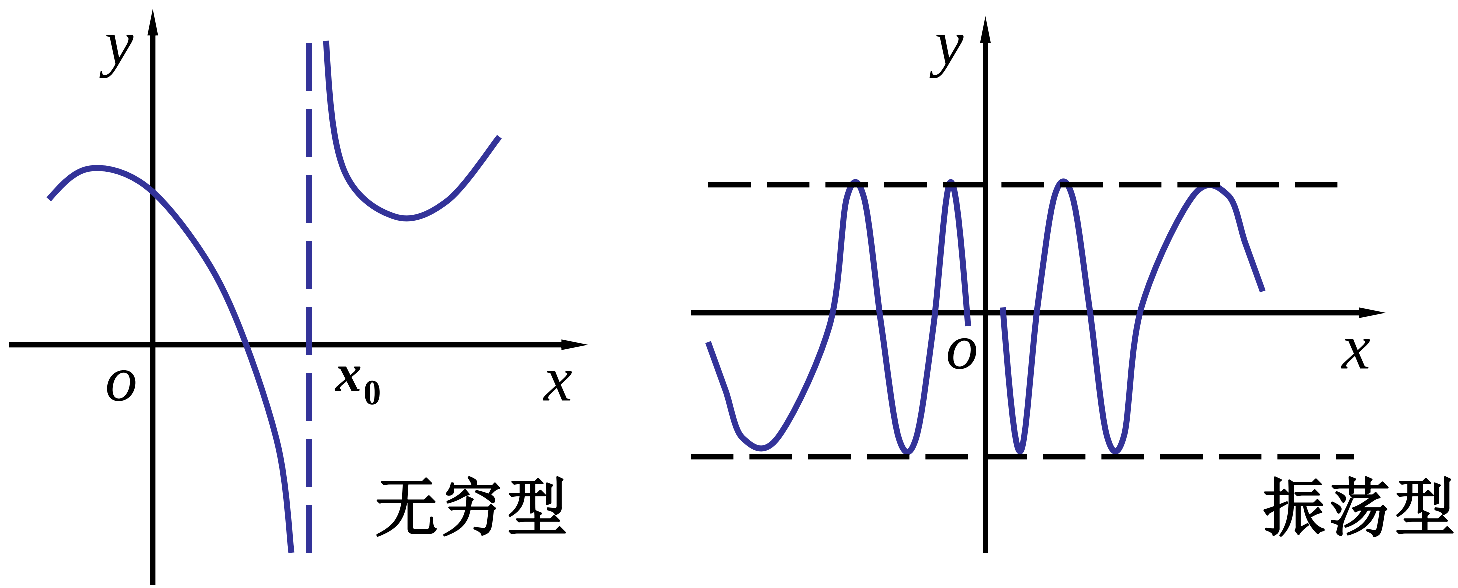
$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点:可去型,跳跃型.}\\[2em]\text{第二类间断点:无穷型,振荡型.}\end{cases}$$

(见下图)

第一类间断点



第二类间断点



作业

P61　3 (1)(2);　4；

思考题

1、指出 $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 在 $x=0$ 是第__类间断点；在 $x=1$ 是第__类间断点；在 $x=-1$ 是第__类间断点 .

2、若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续？又若 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续？

思考题解答

1　一类(跳跃)；一类(可去)；二类(无穷).

2　$\because f(x)$在x_0连续，　$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

且 $0 \le \left| |f(x)| - |f(x_0)| \right| \le |f(x) - f(x_0)|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0都连续.

但反之不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续

但 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续