第三章 微分中值定理与导数的应用

中值定理
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 推广 → 泰勒公式 (第三节)
- 柯西中值定理

↓

应用
- 研究函数性质及曲线性态
- 利用导数解决实际问题

第一节　微分中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

引理（费马定理） 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义并且在x_0处可导，如果对任意的$x\in U(x_0)$，有

$$f(x)\le f(x_0)\ (\text{或} f(x)\ge f(x_0))$$

则 $f'(x_0)=0$

费马，P. de

直观含义：局部最值点处若可导，导数必定等于0.

证明 不妨设$x\in U(x_0)$时，$f(x)\le f(x_0)$.

于是，对于$x_0+\Delta x\in U(x_0)$,有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0,$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leq 0,}$$

若 $\Delta x>0$,则有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0;$

若 $\Delta x<0$,则有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0;$

根据$f(x)$在x_0可导的条件,左导数和右导数存在,

再由极限的保号性,

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0;$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0;$$

$$\therefore f'(x_0)=0.$$

罗尔（Rolle）定理　如果函数 $f(x)$ [1] 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，[2] 在开区间 (a,b) 内可导，[3] 且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，

即 $f'(\xi)=0$

罗尔定理

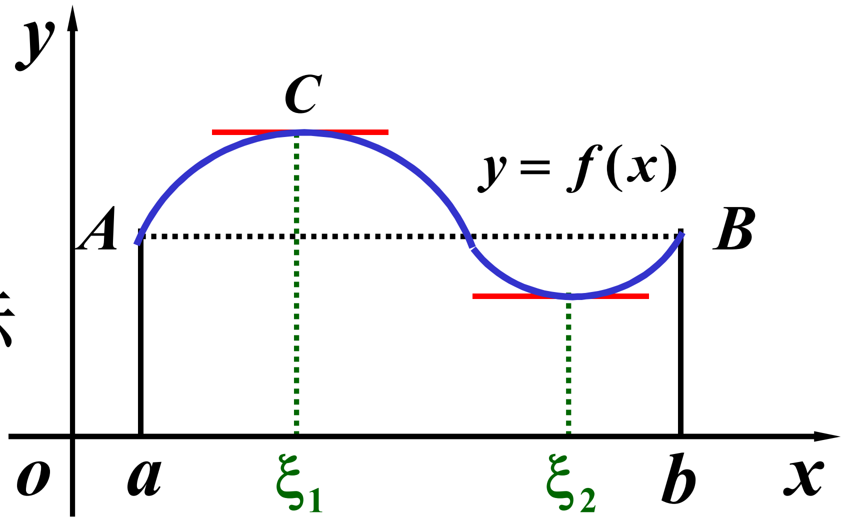
$$\boxed{\begin{array}{l} f\in C[a,b]\text{且}f\in D(a,b),\ f(a)=f(b) \\ \qquad \Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\ \text{使}f'(\xi)=0; \end{array}}$$

罗尔定理

$$f \in C[a,b]\text{且}f \in D(a,b)，f(a)=f(b)$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)，\text{使}f'(\xi)=0;$$

几何解释:



平滑曲线弧*AB*，若端点纵坐标相等，则曲线上至少有一点*C*，在该点处的切线是水平的.

证 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M=m$. 则 $f(x)=M$.

由此得 $f'(x)=0$. $\forall\, \xi \in (a,b)$, 都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M \neq m$. $\because f(a)=f(b)$,

$\therefore$ 最值不可能同时在端点取得.

设 M在区间内取得,

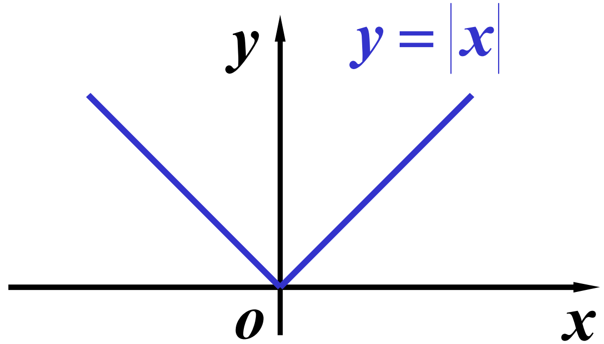
则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$.

由于$f(x)$在ξ处可导，所以由费马定理即得

$f'(\xi)=0$.证毕。

注意

(1)若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.



例如, $y=|x|, x\in[-2,2];$

在$[-2,2]$上除$f'(0)$不存在外 ,满足罗尔定理的一切条件 ,

但在$(-2,-2)$内找不到一点能使 $f'(x)=0.$

(2) 罗尔定理研究的是导函数方程 $f'(x)=0$ 的根的存在性问题.

注意，第一章的零点定理也可以用于证明根的存在性，但是零点定理研究的是函数方程 $f(x)=0$ 的根的存在性问题. 这两者是有差别的.

罗尔定理是定性的结果，它只肯定了至少存在一个 ξ，而不能确定 ξ 的个数，也没有指出实际计算 ξ 的值的方法.

补例1 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证：(1) 存在性　　设$f(x) = x^5 - 5x + 1$,

往证$f(x) = 0$在区间$(0,1)$上有根，

$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，

且$f(0) = 1$，$f(1) = -3$.

由零点定理，$\exists x_0 \in (0,1)$，使得$f(x_0) = 0$.

即为方程的小于1的正实根.

$\boxed{x^5 - 5x + 1 = 0\text{有且仅有一个小于1 的正实根?}}$

(2) 唯一性(反证法)

假设另有$x_1 \in (0,1)$，$x_1 \neq x_0$，使 $f(x_1) = 0$.

不妨设 $x_0 < x_1$,

则$f(x)$在闭区间$[x_0, x_1] \subset [0,1]$

上连续，在开区间$(x_0, x_1) \subset (0,1)$内可导，且

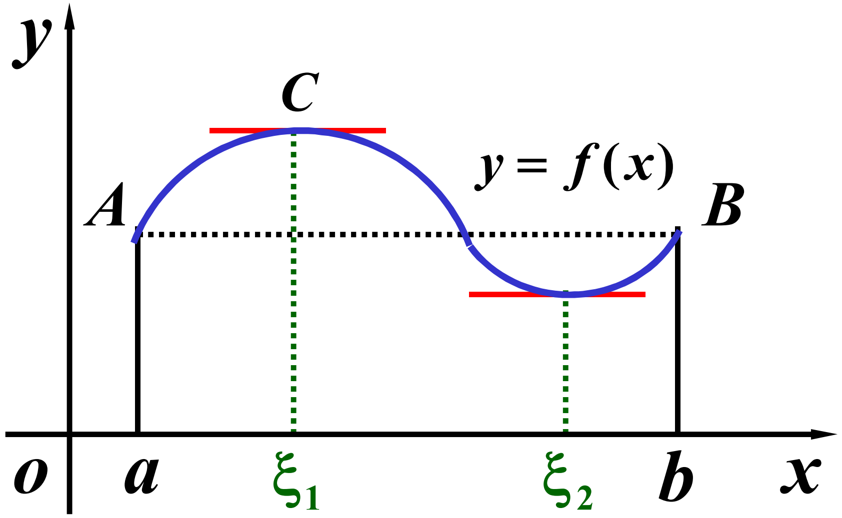
$f(x_0) = f(x_1) = 0$,

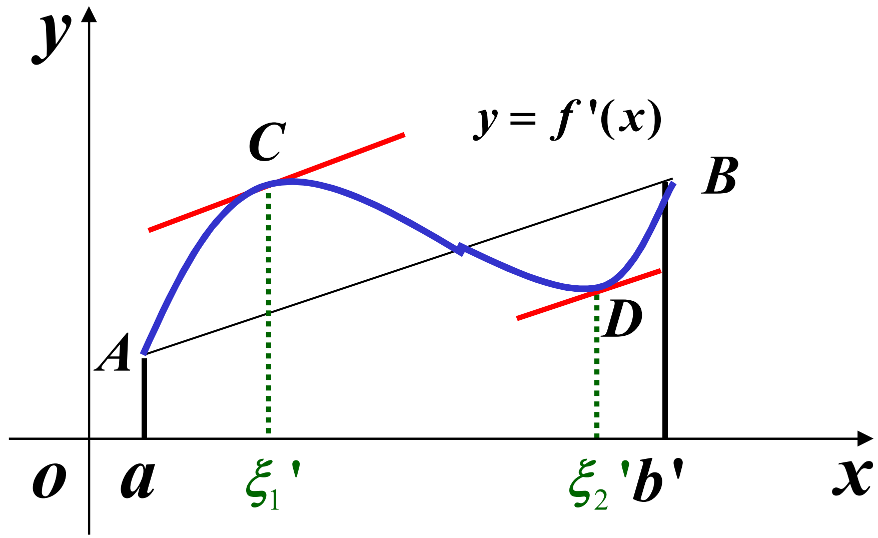
根据罗尔定理，至少存在一点$\xi \in (x_0, x_1) \subset (0,1)$,

使得$f'(\xi) = 0$.

但$f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0$，$(x \in (0,1))$ 矛盾.

所以 x_0为唯一实根.


y
C
y = f(x)
A
B
o
a
ξ1
ξ2
b
x


y
C
y = f '(x)
B
D
A
o
a
ξ1 '
ξ2 'b'
x

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日（Lagrange）中值定理[1] 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,[2] 在开区间(a,b)内可导, 那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

注意：与罗尔定理相比条件中去掉了 $f(a)=f(b)$.

结论亦可写成 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

拉格朗日中值定理

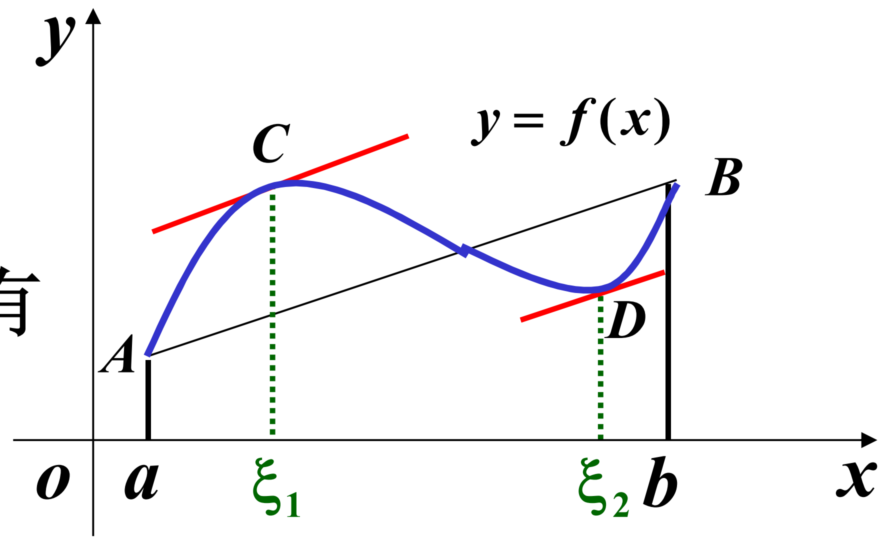
$f \in C[a,b]$且$f \in D(a,b)$,

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$,

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，ξ在a,b之间.

几何解释:

在平滑曲线弧 ***AB*** 上至少有一点 ***C***,在该点处的切线平行于弦 ***AB***.



证明思路(辅助函数法)

证: 问题转化为证 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然 , $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 , 在 (a,b) 内可导, 且

$$\varphi(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(b),$$

由罗尔定理知至少存在一点

$\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$, 即定理结论成立 . 证毕

思路: 利用逆向思维找出一个满足罗尔定理条件的函数

拉格朗日中值公式的一般形式

前面证明了

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \quad (a<\xi<b)$$

事实上，如果$b<a$,公式仍然成立。

因此

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).\xi\text{在}a,b\text{之间}.}$$

拉格朗日中值公式的有限增量形式

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).\xi$在$a,b$之间.

令$a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$，则

$$\Delta y = f'(\underbrace{x_0+\theta\Delta x}_{\xi})\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

增量Δy的精确表达式.

意义 拉格朗日中值公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

中值定理在应用中的意义

(1)几何：平滑曲线存在某一点处的切线平行于两个端点连成的割线

(2)物理：连续平稳运动的物体，必有某一点处的瞬时速度，等于该段路程内的平均速度

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数 .

证明: (设区间I为: (a,b))

设x_1,x_2是(a, b)内任意两点，由拉格朗日中值定理

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$$

$$\therefore f(x_2)=f(x_1) \qquad (\xi\text{在}x_1,x_2\text{之间})$$

由x_1, x_2的任意性知: $f(x)$=常数, $x\in(a, b)$.

补例2 证明 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 < x < 1).$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x,\ x \in (-1,1)$

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

$$\therefore\ f(x) \equiv C,\ x \in (-1,1)$$

又 $\because f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$,

即 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

拉格朗日中值定理的应用

(一) 拉格朗日中值 定理的推论（导数为0的函数为常值函数）可以用于证明等式.

一般步骤：

(1) 将等式整理成 $f(x)=C$的形式.

(2) 证明$f'(x)=0$，则$f(x)\equiv$常数，

(3) 取定义域中的一个特殊点x_0，

由$f(x_0)$算出常数C.

补例3 11. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$;

证

设 $f(t) = \arctan t$, 不妨设 $a < b$

$f(t)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

$\therefore f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b)$, ($\xi$介于$a,b$之间)

$$\arctan a - \arctan b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b)$$

$$\therefore \left|\arctan a - \arctan b\right| = \frac{1}{1+\xi^2}\left|a-b\right| \leq \left|a-b\right|$$

例4 证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证 （分析：$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln(1+0)$）

设 $f(t)=\ln(1+t)$,

$f(t)$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，

$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$

$\because f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1,$

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x,$ 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

(2)拉格朗日中值 定理可以用于证明不等式.

一般步骤

(1) 分析不等式，在不等式中寻找与函数值增量有关的不等式 $f(b)-f(a)$，（a,b也可以是x）

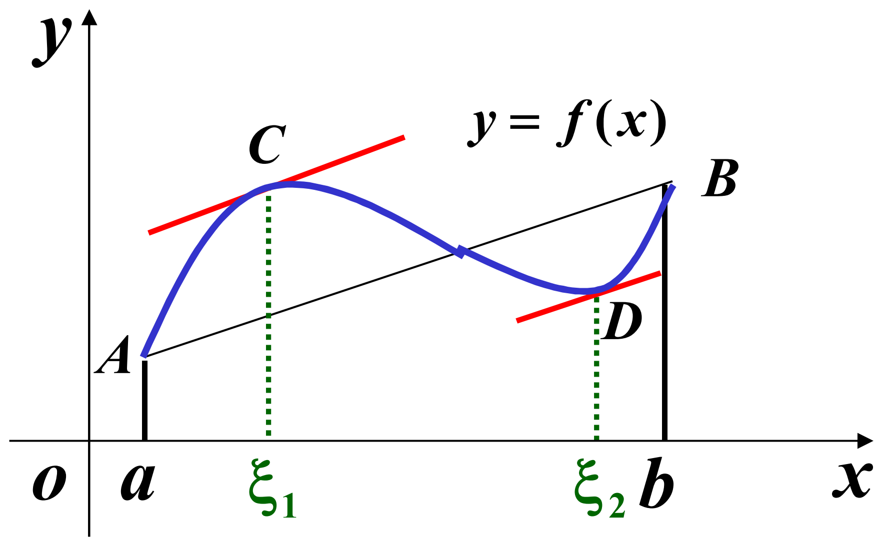
(2) 选取适当的函数$f(t)$及对应区间$[a,b]$，验证其满足拉氏定理的条件，便有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b)$$

(3) 根据$a<\xi<b$放大或缩小导数$f'(\xi)$，证出不等式.

拉格朗日中值定理表明：

在曲线弧AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



如果曲线方程是参数形式 $\begin{cases} X = F(x) \\ Y = f(x) \end{cases}$ $(a \le x \le b)$

曲线也应该有类似的性质.

这时，弦AB的斜率为 $\dfrac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}$

某一点处的切线斜率为 $\dfrac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$

三、柯西(Cauchy)中值定理


柯西，A. -L.

柯西（Cauchy）中值定理　如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}$$

证明思路(辅助函数法)

要证 $$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}=0$$

$$\varphi'(\xi)$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$$

验证

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}$$

证: 作辅助函数 $\varphi(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导, 且

$$\varphi(a) = \frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)} = \varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$,

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗？

$$\because f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$$

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$$

两个 ξ 不一定相同

上面两式相比即得结论.　　错!

名称	条　件	结　论
罗尔定理	(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导 (3) $f(a)=f(b)$	$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$
拉格朗日定理	(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导	$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
柯西定理	(1) $f(x)$、$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (2) $f(x)$、$F(x)$ 在 (a,b) 内可导 (3) $F'(x)\neq 0$	$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

四、小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

费马(1601 – 1665)

法国数学家, 他是一位律师, 数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛, 博览群书并善于思考, 在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论, 他提出的费马大定理:

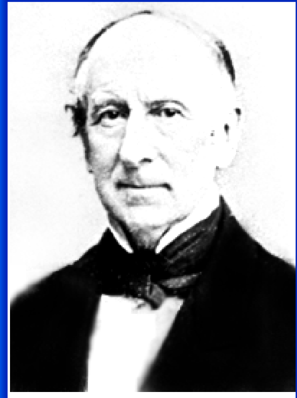
$$\text{"当} n > 2 \text{时, 方程 } x^n + y^n = z^n \text{ 无整数解"}$$

至今尚未得到普遍的证明. 他还是微积分学的先驱, 费马引理是后人从他研究最大值与最小值的方法中提炼出来的.

拉格朗日 (1736 – 1813)

法国数学家. 他在方程论, 解析函数论, 及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都直接或间接地溯源于他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

柯西(1789 – 1857)


柯西, A. -L.

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 , 《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》, 《无穷小分析概论》, 《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 . 他是经典分析的奠人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.

作业

P132　5;6;10;12

1. 下列函数满足 Rolle 定理条件的是____________.

(A) $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$; (B) $f(x)=|x|, -1\le x\le 1$;

(C) $f(x)=x, 0\le x\le 1$; (D) $f(x)=x^3+x^2, -1\le x\le 0$

备用题

1. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，

方程 $f'(x)=0$ 至少有__3__个根，它们分别在区间

__$(1,2),(2,3),(3,4)$__上.

2. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$，且在 $(0,\pi)$ 内可导，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

提示：由结论可知，只需证

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$$

即 $$\left[f(x)\sin x\right]'\Big|_{x=\xi}=0$$

设 $$F(x)=f(x)\sin x$$

验证 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理条件.

3. 试证至少存在一点 $\xi \in (1,e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1,e)$, 使

$$f'(\xi) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$