第三节 定积分的换元法与分部积分法-1

根据牛顿–莱布尼兹公式，求定积分可以转化为求原函数，而求原函数有换元积分法和分部积分法，所以求定积分也有换元积分法和分部积分法。

一、换元公式

定理 假设

（1） $f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上是单值的且有连续导数；

（3）当t在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，

则 有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

证　设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

$$\text{左边}=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

又设$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$,

$$\Phi'(t)=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

$\therefore \Phi(t)$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数.

$$\text{右边}=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

$$\boxed{F(b)-F(a)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)?}$$

$$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$(\varphi(\alpha)=a\text{、}\varphi(\beta)=b)$$

$$=F(b)-F(a),$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

注意 当$\alpha>\beta$时，换元公式仍成立.

定积分换元注意: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$

(1)所选择的代换式$x=\varphi(t)$必须满足

定理中的两个条件;(单值具连续导数)

(2)换元必换限.

记住"上限换上限，下限换下限";

(3)求出$f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$的一个原函数$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$后，

不必象求不定积分那样把$\varphi(t)$还原成x的函数，

而只须直接将t的上、下限代入$\Phi(t)$然后相减即可.

积分结果不需回代

例1　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx$.

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x d\cos x$

令 $t=\cos x$,

$x=0\Rightarrow t=1,\ \ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0,$

$= -\int_1^0 t^5 dt = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$

例2　计算 $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx.\quad (a>0)$

解　令 $x = a\sin t,\qquad dx = a\cos t dt,$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0,\quad x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a\sin t+\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}\, a\cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t+\cos t}d(\sin t+\cos t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Big[\ln|\sin t+\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

例 3 当 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，且有

① $f(x)$ 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

“偶倍奇零”

② $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

证略 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \boxed{\int_{-a}^{0} f(x)dx} + \int_{0}^{a} f(x)dx,$

在 $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ 中令 $x=-t$，$dx=-dt$,

$$x=-a \Rightarrow t=a,\ x=0 \Rightarrow t=0,$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt,$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx,}$$

① $f(x)$为偶函数，则 $f(-t)=f(t)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

② $f(x)$为奇函数，则 $f(-t)=-f(t)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= 0.$$

注

利用此结论可简化奇函数及偶函数在对称区间上的定积分的计算.

例如

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx = 2\int_{0}^{\pi}\cos x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x \sin x dx = 0$$

例4　计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解　原式$=\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx+\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx$

偶函数　　奇函数

$$=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-\boxed{4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}$$

单位圆的面积的1/4

$$=4-\pi.$$

定积分的换元法小结

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元同时换限

定积分的换元法得到新变量的原函数后，

无须回代.

计算定积分的特殊方法

(1)利用被积函数的奇偶性和积分区间的对称性

(2)利用几何意义

思考 $\int_{-a}^{a}(x-\sqrt{a^2-x^2})dx = -\frac{\pi}{2}a^2.$

定积分等式的证明

例 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx}$$

证　（1）设 $x = \frac{\pi}{2} - t \quad \Rightarrow dx = -dt,$

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.}$$

（2）设 $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt,$

$$x = 0 \Rightarrow t = \pi, \qquad x = \pi \Rightarrow t = 0,$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx} = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t)f[\sin(\pi - t)]\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)dt,$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \boxed{\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,}$$

$$\boxed{\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

定积分等式的证明方法

例如$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx,$$

(1)一般通过换元法来证明等式

(2)换元线索:看积分上下限和被积函数

思考 要证$\int_1^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{a^2} xf(x)dx \quad (a>1)$

如何换元？

证明$\int_{1}^{x} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2+1} dx$

思考题

下列运算是否正确?如不正确指出原因:

令$\boldsymbol{x}=\frac{1}{\boldsymbol{t}}$,则$\int_{-1}^{1}\frac{\boldsymbol{dx}}{1+\boldsymbol{x}^2}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{\boldsymbol{t}^2}}\boldsymbol{d}\frac{1}{\boldsymbol{t}}=\int_{-1}^{1}\frac{-\boldsymbol{dt}}{1+\boldsymbol{t}^2}$,

$$\therefore\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

思考题解答

不正确,注意被积函数大于零,可知定积分也应大于零,故运算是错误的.

错误的原因在于引进的变换$t=\dfrac{1}{x}$在$[-1,1]$上不连续，故不满足换元法的前提条件.

作业

P254　1(4);(10);(16);(21);(22)

3；

计算定积分的特殊方法

(1)利用被积函数的奇偶性和积分区间的对称性

(2)利用几何意义

思考

$$(1)\int_{-a}^{a}(x-\sqrt{a^2-x^2})dx = -\frac{\pi}{2}a^2.$$

$$(2)\int_{0}^{1}\sqrt{2x-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

例　计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx.$

解　$\because f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

设$f(x)$连续，求$\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$.