第二章　　习题课

导数与微分

一 基本要求

1 理解导数的概念,明确导数就是函数的变化率.理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程.了解函数的可导与连续性的关系.

2 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式,会求分段函数的导数.

3 了解高阶导数的概念,掌握初等函数的一阶、二阶导数的求法,会求简单函数的n阶导数.

4 会求隐函数和由参数方程所确定的一阶、二阶导数.

5 理解微分的概念,了解微分形式不变性,会求微分.

二 要点提示

1 导数定义的几种形式

若$f(x)$在x_0处函数增量与自变量增量之比(当自变量增量趋于零时)的极限存在,则$f(x)$在x_0可导.于是 $f'(x_0)$ 可表达成多种形式:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$,其中 $\Delta x = x - x_0$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2 复合函数的求导法则

应用法则时,应首先分析所给复合函数的复合结构,认清它是由哪些简单函数复合而成,可从外向里一层一层地求导.例如:

$$y = f\{g[\varphi(x)]\}$$

$$y' = f'\{g[\varphi(x)]\} \cdot \{g[\varphi(x)]\}'$$

$$= f'\{g[\varphi(x)]\} \cdot g'[\varphi(x)] \cdot [\varphi(x)]'$$

$$= f'\{g[\varphi(x)]\} \cdot g'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

3 分段函数的导数

在对分段函数求导时,分段点处要用导数的定义或者左、右导数来确定该点的导数是否存在或求导.

三 问题与思考

问题1 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 可导,且 $f(0)=0$,则一定有 $f'(0)=0$,对吗?

答:不一定.例如$f(x)=\sin x$, $f(0)=0$,而 $f'(0)=\cos x|_{x=0}=1$,错误的原因是将$f'(x_0)$ 与 $[f(x_0)]'$ 的含义混淆了.前者表示 $f(x)$ 在点x_0的导数,后者是函数值(常数)的导数,必为0.

问题2 如果 $f(x)$ 在 x_0 可导,那么

$$f'(x_0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\alpha)}{\alpha}$$ **对吗？**

答:对.令$h=-\alpha$,则$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\alpha)}{\alpha}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=f'(x_0)$$

问题3 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\geq 1\\ x^2, x<1\end{cases}$**,用下列方法**

求 $f'(x)$ **正确吗?**

解:当 $x\geq 1$ **时,有** $f'(x)=2x^2$**;**

当 $x<1$ **时,有** $f'(x)=2x$**,**

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2x^2, x\geq 1\\ 2x, x<1\end{cases}$$

答:不正确.在分段点$x=1$处,由于不连续,所以 $f(x)$在$x=1$处不可导.

正确答案应是

$$f'(x)=\begin{cases}2x^2, x>1\\ 2x, x<1\\ \text{不存在}, x=1\end{cases}$$

注意:在本章中,对分段函数在分段点的导数,必须用定义或单侧导数来求.

问题4 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 均不可导, $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 是否也不可导？

答:不一定.例如 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, $g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处均不可导,但 $f(x)\cdot g(x)=x$ 显然可导.

(4) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, $g(x)$ 在 x_0 点处不可导, $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点处(　)

答:不一定.例如 $f(x)=x$, $g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$,

$f(x)$ 可导,而 $g(x)$ 在 $x=0$ 不可导,但

$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导.

又例$f(x)=x$可导，$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$在$x=0$处不可导，$f(x)\cdot g(x)=|x|$在$x=0$不可导.

问题6 函数$f(x)$ 的导数与微分的关系？有什么联系？有什么区别？

答:对于一元函数$y=f(x)$来说,可导与可微是等价的,且$dy=f'(x)dx$.但导数与微分是两个完全不同的概念,导数是函数对自变量的变化率,只依赖于自变量x,而微分是函数增量的线性主部,不仅依赖于x,还依赖于自变量的增量.从几何上看,导数$f'(x)$是曲线$y=f(x)$上一点的切线斜率;而微分表示曲线在该点处切线上点的纵坐标的增量.

四 典型题目

1 设存在$f'(x_0)$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}$

2 设 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, x<0 \\ 0, \qquad x\geq 0 \end{cases}$，讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性与可导性。

3 设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2006)$,求$f'(2006)$

4 求导数

$(1)\ y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $(2)\ y=\dfrac{2}{5-x}+\dfrac{x^2}{3}$

$(3)\ y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $(4)\ y=x^{\ln x}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

5 求 $y=\sin(2x+3)$的n阶导数。

6 设 $y=f^2(x)+f(x^2)$，其中f是具有二阶导数，求 y''

7 求 $\begin{cases} x = e^{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$的二阶导数 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$

8 设$y=\tan(x+y)$,求$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

9 设$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\left(x^{2}+y^{2}\right)$,求$dy,\dfrac{dy}{dx}$.

答案

1. $\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0)$

2.在$x=0$处连续但不可导

3. $f'(2006)=2005!$

4(1) $y'=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$ (2) $y'=\frac{2}{(5-x)^2}+\frac{2}{3}x$

(3) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(4) $y'=\frac{2}{x}\ln x\cdot x^{\ln x}+(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$

$$5.\ y^{(n)} = 2^n \sin(2x + 3 + \frac{n\pi}{2})$$

$$6. y'' = 2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x)$$
$$+2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$$

$$7. \frac{dy}{dx} = -e^{-2t}, \frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-3t}$$

$$8. \frac{d^2y}{dx^2} = -2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$$

$$9. dy = \frac{(y+2x)}{x-2y}dx$$

10 设$\sqrt{x^2+y^2}=5e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

答案

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

思考题

（1） 若 $f(u)$在u_0不连续，$u=g(x)$在x_0连续，且 $u_0=g(x_0)$，则$f[g(x)]$在x_0处（　　　）.

（a）必连续；（b）必不连续；（c）不一定连续；

（2）若 $f(u)$在u_0不可导，$u=g(x)$在x_0可导，且 $u_0=g(x_0)$，则$f[g(x)]$在x_0处（　　　）.

（a）必可导；（b）必不可导；（c）不一定可导；

（3） 若 $f(x)$ 在 x_0 不连续， $g(x)$ 在 x_0 连续，且则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处（　　　）.

（a）必连续；（b）必不连续；（c）不一定连续；

(4) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, $g(x)$ 在 x_0 点处不可导, $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点处(　)

（a）必可导；（b）必不可导；（c）不一定可导；

思考题解答

（1）正确的选择是（b）

根据复合函数求极限法则可得到.

(2)正确的选择是（c）

例 $f(u)=|u|$ 在 $u=0$ 处不可导，

取 $u=g(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处可导，

$f[g(x)]=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导，

取 $u=g(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处可导，

$f[g(x)]=|x^4|=x^4$ 在 $x=0$ 处可导，

（3）正确的选择是（b）

根据连续定义和极限法则可得到.

(4)正确的选择是（c）

答:不一定.例如$f(x)=x$，$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，

$f(x)$可导,而$g(x)$在$x=0$不可导,但

$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ 在$x=0$可导.

又例$f(x)=x$可导，$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$在$x=0$处不可导，$f(x)\cdot g(x)=|x|$在$x=0$不可导.

1.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，

证明： $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2.设 $y=f^n(\varphi^n(\sin x^n))$,求 y';

3设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$ ，

求 $f''(a)$.

1.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，

证明： f(x)在$x=0$ 处可导.

证：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

又$f(x)$在$\boldsymbol{x}=0$处连续，故 $f(0)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\boldsymbol{f'(0)}$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2.设$y = f^{n}(\varphi^{n}(\sin x^{n}))$,求$y'$;

$$y' = n^{3} f^{n-1}(\varphi^{n}(\sin x^{n})) \cdot \varphi^{n-1}(\sin x^{n})$$

$$\cdot f'(\varphi^{n}(\sin x^{n}))\varphi'(\sin x^{n})\cos x^{n} \cdot x^{n-1}$$

3设 $g'(x)$连续，且 $f(x)=(x-a)^2g(x)$，

求$f''(a)$.

解答

$\because g(x)$ 可导

$\therefore f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x)$

$\because g''(x)$ 不一定存在　　　故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} \qquad f'(a) = 0$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} [2g(x) + (x-a)g'(x)] = 2g(a)$$