第七章 微分方程

微分方程

第一节 微分方程的基本概念

微分方程的基本概念

一、微分方程的基本概念

微分方程: 凡含有未知函数的**导数或微分**的方程叫**微分方程**.

例 $y' = xy,$ $y'' + 2y' - 3y = e^x,$

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0,$$

注意: 在一个微分方程中, 自变量, 未知函数可以不出现, 但未知函数的导数(或微分)一定要出现.

$$y' = x \qquad\qquad y' = xy$$

微分方程的解.

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为

微分方程的解.

本章只讨论未知函数为一元函数的微分方程，即常微分方程.

微分方程的阶: 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**.

例: 指出下列各微分方程的阶

(1) $y'' + y'^{3} + x y^{4} = \sin x$

(2) $y' + x y'' + y''^{3} + 2 y^{5} = 1$

(3) $y' + y y'' = 1 + x^{5}$

(4) $y''' = y$

分类: 一阶与高阶微分方程.

一阶微分方程 $y' = f(x, y);$ 显式

$F(x, y, y') = 0,$ 隐式

高阶(n阶)微分方程 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$

$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$

例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y=y(x)$

$$\frac{dy}{dx}=2x$$ 其中 $x=1$时, $y=2$

$$y=\int 2x\,dx$$ 即 $y=x^2+C$, 求得$C=1$,

所求曲线方程为$y=x^2+1$.

例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度-0.4米/秒^2，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米，$s = s(t)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \quad v\Big|_{t=0} = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 20, \quad t = 0\text{时}, s = 0,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

$$s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20,\quad t = 0\text{时}, s = 0,$$

代入条件后知 $C_1 = 20,\quad C_2 = 0$

故 $s = -0.2t^2 + 20t,\qquad v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$

列车停住时， $v = 0,$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \frac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

微分方程的解是否唯一？

例如 $$\frac{dy}{dx}=2x$$

$y=x^2+C$ 是 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的解，

$y=x^2+1$ 也是 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的解，

微分方程的解的分类:

(1) **通解**: 若微分方程的解中含有**独立的**任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则称这解为微分方程的通解.

(2) **特解**: 用一些条件确定通解中任意常数而得到的解称为微分方程的特解.

练习 函数 $y=3e^{2x}$，$y=Ce^{2x}$ 分别是微分方程 $y''-4y=0$ 的什么解?

解答 $\because y'=6e^{2x}$，$y''=12e^{2x}$，

$y''-4y=12e^{2x}-4\cdot 3e^{2x}=0,$

$\because y=3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.

又 $y=Ce^{2x}$ 是微分方程的解,

但它既不是方程的通解，也不是方程的特解.

(3) **初始条件:** 用来确定任意常数的条件.

一阶: $y\big|_{x=x_0} = y_0,$

二阶: $y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0^*$

初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题.

$$\text{一阶:}\ \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

$$\text{二阶:}\ \begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$$

例1 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 2 \end{cases}$

例2 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -0.4 \\ s\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 20 \end{cases}$

通解: $y = x^2 + C$ $\qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$

特解: $y = x^2 + 1$ $\qquad s = -0.2t^2 + 20t$

初始条件: $y\big|_{x=1} = 2$ $\qquad s\big|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 20$

例 3 验证:函数 $x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ 是微分方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$ 的特解.

解 $\because \dfrac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2C_1 \cos kt - k^2C_2 \sin kt,$$

将 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 和 x 的表达式代入原方程,

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0.$$

故 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是原方程的解.

$\because\ x\big|_{t=0} = A,\quad \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0,\qquad \therefore\ C_1 = A,\quad C_2 = 0.$

所求特解为 $x = A\cos kt$.

微分方程解的图像

特解的图形为一条曲线，叫做微分方程的积分曲线.

通解的图形是以任意常数为参数的积分曲线族.

求微分方程的积分曲线本质上就是方程的解的图形.

小结

微分方程；微分方程的阶；微分方程的解；

通解；初始条件；特解；初值问题；积分曲线；

作业

P301 4(2) 5(2)

写出解，通解，特解的定义