第五节　极限运算法则

一、极限的四则运算法则

以下讨论的都是 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时的极限，对于单侧极限也适用

为书写简便，都只写成 "$\lim$".

定理：如果 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（要求 $\lim g(x) \neq 0$）.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

幂的极限等于极限的幂.

补充　指数运算法则　#P41

$$\boxed{\text{如果 } \lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B,\ \text{则}}$$

若A>0且是一个有限的数，B是一个有限的数，则

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}=A^{B}.$$

底不能是0和无穷大,指数不能是无穷大

0^0，0^∞，∞^0，1^∞型 **不能用**

二、求极限例子

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=2^2-3\cdot 2+5=3$

例2　求 $\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}$.　$\left(\frac{a(a\neq 0)}{0}\text{型}\right)$

解　$\because \lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0,$　　商的法则不能用

又 $\because \lim_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

在更多的情况下，极限四则运算法则不能直接使用，而需要先对函数进行变换才能使用.

例如

$\left(\frac{0}{0}型\right)$ $\left(\frac{\infty}{\infty}型\right)$ $(\infty-\infty\ 型)$

1^{∞}型，0^{0}，∞^{0}型等. (未定式)

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零. $(\dfrac{0}{0}$型$)$

先约去趋向于零的因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷大因子提取法)

(“抓大头”)

又如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{2x^2+9}\overset{\frac{"\infty"}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{9}{x^2}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{9}{x^2})}=\frac{0}{2}=0$$

又例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+9}{x+5}\overset{\frac{"\infty"}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{9}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{2x^2+9}=0$ $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+9}{x+5}=\infty$

结论

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$ （$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，$m,n>0$).

1）$m=n$, 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\cdots+a_n\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\cdots+b_n\dfrac{1}{x^n}}=\dfrac{a_0}{b_0}$

2）$m>n$, 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^{n-m}+ax^{n-1-m}+\cdots+a_nx^{-m}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\cdots+b_m\dfrac{1}{x^m}}=0$

3）$m<n$， 原式$=\infty$.

例5　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$　（ $\infty-\infty\neq\infty$ ）　#

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(x^2+x+1)}{(x^3-1)}$　（ $\dfrac{0}{0}$ 型 ）

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)(x-1)}{(x^3-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}=-1$$

错误辨析

例6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right).$ #

$$\ne 0+0+\cdots+0=0$$ （无穷多项之和）

解 $n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和.

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

-练习

求下列极限

$$(1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3}{x-3};(2)\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

答案（1）-5；

$$(2)\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}\left[(1+x)-(1-x)\right]}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}\left[\sqrt[3]{(1+x)^3}-\sqrt[3]{(1-x)^3}\right]}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}\left[(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})\cdot(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\frac{15}{2}$$

二、复合函数极限运算法则

设函数 $f[\varphi(x)]$ 由函数$y=f(u)$和$u=g(x)$复合而成，$f[\varphi(x)]$ 在点x_0的某去心邻域内有定义，而且

1^0 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$

2^0 在点 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$

则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

推广　若 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ 而 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$,

可得类似定理.

对于复合函数，如果每一层的变化趋势都能够确定，我们就可以利用逐层求极限的方法，先求中间层的极限，再求外层的极限.

解题时经常通过变量替换来实现.

例7 $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{u \to +\infty} e^{-u} \quad (u = \dfrac{1}{x^2})$ #P44

$= 0$

-补例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$

解：令 $u=\dfrac{1}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}u=\begin{cases}-\infty & x\to 0^{-}\\ +\infty & x\to 0^{+}\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to-\infty}\frac{e^{u}+1}{e^{u}-1}\arctan u$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{u}+1}{e^{u}-1}\arctan u$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

上例表明，在利用复合函数极限运算法则时，如果复合函数中间层的变化趋势有多种，而且不同的变化趋势会导致外层的极限不同时，需分情况讨论.

小结

1.极限的四则运算法则及其推论;

2.极限求法;

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷大因子提取法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

f.利用复合运算法则求极限

作业

P45　1 (1),(2),(3),

(6),(7),(8),

(10),(11),(13),(14);

2 ;　　3;　5

思考

例　若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n+2x+3}{cx^2+3x+1}=2$，求$n$和$c$.

解　$n=2, c=1/2.$

解　$n=2, c=1/2.$

推论　若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+ax^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=$ 常数 $c\neq 0$

（$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，$m,n>0$).

则必有　$m=n$,且　$\dfrac{a_0}{b_0}=$ 常数 c

此推论经常用于求待定系数.

思考

1. 若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，问

$\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答：不存在． 否则由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$

利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在，与已知条件矛盾.

2. 若 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 为无穷大， 问

$\lim[f(x)-g(x)]$ 仍为无穷大吗？为什么？

答：不是．如 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x)=0$,

判断

下列关于极限运算法则的说法正确吗？

(1)无穷小-无穷小仍为无穷小；
(2)无穷大-无穷大仍为无穷大；
(3)无穷大与有界量的乘积仍为无穷大；

答案 正确 错误 错误

-例 分段函数在分段点处的极限

已知 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ \dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1} & x\ge 0 \end{cases}$

求： $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

解： $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+3x-1}{x^3+1}=-1$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$ (极限存在的充要条件)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^3+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$$

错误辨析

例. 求$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \cancel{=} \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 0$

解 $\because \sin\frac{1}{x}$有界，x是当$x\to 0$时的无穷小，

故$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$

解：令 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}u=\begin{cases}-\infty & x\to 0^{-}\\ +\infty & x\to 0^{+}\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^{-}}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to -\infty}\arctan u=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^{+}}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to +\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$ 不存在.