第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一　四则运算的连续性

二　反函数的连续性

三　复合函数的连续性

四　初等函数的连续性

一　四则运算的连续性

定理1　若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

例如, $\sin x, \cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

二 反函数的连续性

定理2严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如，$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续，

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=\text{arc}\cot x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调且连续

反三角函数在其定义域内皆连续.

三 复合函数的连续性

定理3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 函数$y=f(u)$在点$a$连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)].$

意义 极限符号可以与函数符号互换;

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a).$$

证 $\because f(u)$在点 $u=a$连续, $\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,$

使当 $|u-a|<\eta$时, 恒有$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$成立.

又$\because \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a,$ 对于$\eta>0,\ \exists \delta>0,$

使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$ 成立.

综合两步: $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0,$ 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$ 成立.

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)].$

定理4 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

证

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$$

第一个等号是根据外层函数的连续性和定理3，第二个等号则利用了内层函数的连续性.

例如, $u=\dfrac{1}{x}$ 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续,

$y=\sin u$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,

$\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续.

复合函数的连续性给我们提供了另一种求极限的方法.

四 初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$

P64 中间

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x}$ $\Longrightarrow$ $y = a^t$, $t = \mu \log_a x$, $(x > 0)$

在$(0, +\infty)$内连续,

μ取不同的值时,

定义域可能包含$(-\infty, 0)$或$(-\infty, 0]$

(可证明均在其定义域内连续)

定理4　**基本初等函数在定义域内是连续的.**

定理5　**一切初等函数在其定义区间内都是连续的.**

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注: **#P64**

1. 初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续;

这是因为：复合运算可能会产生定义域内的孤立点.

例如， $y=\sqrt{\cos x-1}$，　$D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

不能讨论极限和连续性

2. 初等函数求极限的方法代入法.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{定义区间})$$

非孤立点即可

例1　求 $\lim\limits_{x \to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$.

解　原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e - 1}$.

例2　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

例3．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解：　令　$t=a^x-1$,则　$x=\log_a(1+t)$,

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$

上例中，当$a=e$时，

$\mathbf{\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x\quad (x\to 0)}$

小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性.

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

求极限的又一种方法.

作业

P65　　1

3 (2)(4)(6);

4(2)(5);

6

思考题

设 $f(x)=\operatorname{sgn}x$，$g(x)=1+x^2$，试研究复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的连续性.

思考题解答

$$\because \quad g(x) = 1 + x^2 \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f[g(x)] = \operatorname{sgn}(1 + x^2) = 1$$

$f[g(x)]$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续

$$g[f(x)] = 1 + \left(\operatorname{sgn} x\right)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$g[f(x)]$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上处处连续

$x = 0$是它的第一类(可去)间断点.