第三节　　高阶导数

初等函数的导数仍为初等函数，如果对该导函数再求导数，就得到高阶导数.

一、高阶导数的概念与计算

三、高阶导数的运算法则

问题:变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为$v(t) = f'(t)$

$\because$ 加速度a是速度v对时间t的变化率

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'.$

定义

如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点x处可导,$(f'(x))'$存在,则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点x处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}.$

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n}\text{或}\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

高阶导数求法举例

由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y=\arctan x$, 求$f''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\therefore f''(0)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0}=0;$$

例2 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若α为自然数n, 则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \quad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

例3　设 $y=e^x$，求$y^{(n)}$.

解

$$y'=e^x$$

$$y''=e^x$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=e^x$$

例4 设 $y = \sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$

$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

例5 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad$ $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad$ $y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\geq 1,\ 0!=1)$$

注意: 求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(数学归纳法证明)

2. 高阶导数的运算法则:

设函数u和v具有n阶导数, 则

(1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(2) $(\alpha u \pm \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} \pm \beta v^{(n)}$

(3) $$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

例6 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}, v = x^2$, 则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k u^{(20-k)} v^{(k)}$$

$$= (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$$

小结

高阶导数的定义及记号;

高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式);

n阶导数的求法;

几个基本初等函数的高阶导数

作业

P100

1 (5)(7)(9)(12);

3;5

思考题

设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2g(x)$ ，

求 $f''(a)$.

思考题解答

$\because g(x)$ 可导

$\therefore f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$

$\because g''(x)$ 不一定存在　　故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \qquad f'(a)=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

-例2

设$f(x)$的二阶导数存在，$y = xf(\frac{1}{x})$, 求y''.

解

$$y' = (xf(\frac{1}{x}))' = f(\frac{1}{x}) + xf'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})$$

$$= f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} f'(\frac{1}{x})$$

$$y'' = [f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} f'(\frac{1}{x})]'$$

$$= -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) - [-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) f''(\frac{1}{x})]$$

$$= \frac{1}{x^3} f''(\frac{1}{x})$$

-间接法求高阶导数

利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ $\qquad (\dfrac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

例7 设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, 求$y^{(5)}$.

解 $\because y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\therefore y^{(5)}=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$$

$$=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]$$