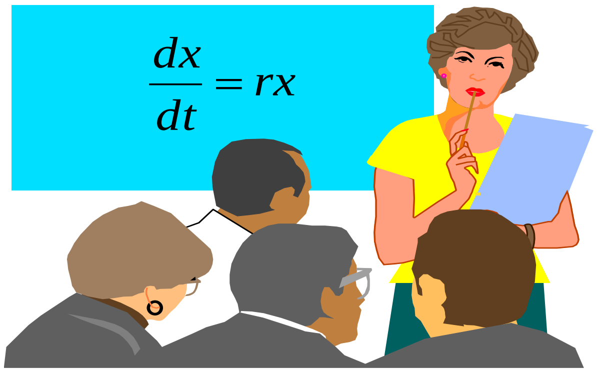
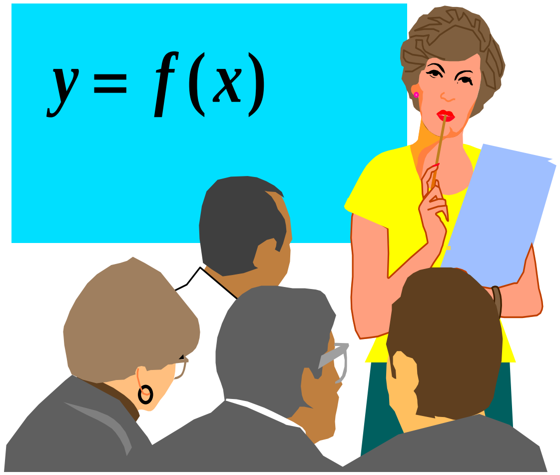
高 等 数 学

第七版 上册

同济大学应用数学系 主编



第一章 函数与极限



一、预备知识

1. 集合: 具有某种特定性质的事物的全体.
组成集合的事物称为该集合的元素.

表示法: (1)列举法 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$
(2)描述法 $M=\{x \mid x\text{所具有的特征}\}$

$a \in M, \quad a \notin M,$

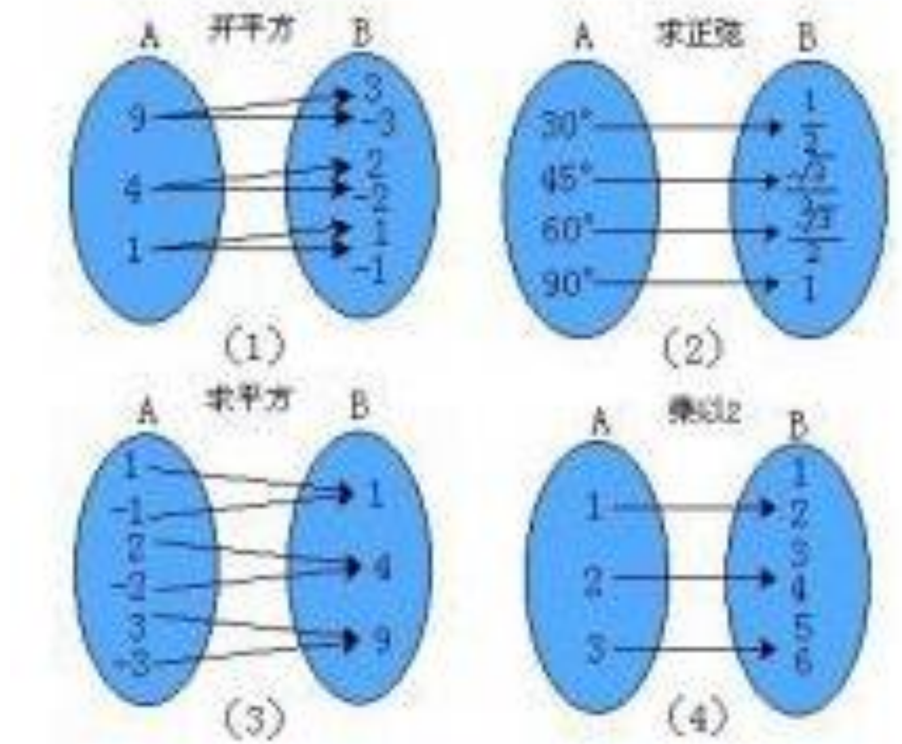
规定 空集 (记作 $\varnothing$) 为任何集合的子集.

2. 映射

映射是数学中用来描述两个集合元素之间一种特殊的对应关系的：

假设现有两个集合A和B，如果对于A中的每一个元素，在B中都有唯一一个元素与之对应，则这种A到B的对应关系就称为映射。

下面哪些图是映射？



——一一映射(双射)是映射中最特殊的一种

二、函数概念 函数即是一种映射关系

定义：设有数集D，f是一个确定的对应法则，

$\forall x \in D$,通过对应法则f,都有唯一确定的$y \in R$

与之对应，记为$f(x)=y$,则称f为定义在D上的函数.

$$\boxed{y = f(x)}$$

数集***D***叫做这个函数的定义域

因变量

自变量

例 圆的半径为r，则圆的面积为

$$\boldsymbol{S = \pi r^2 \quad (r > 0)}$$

思考 是什么因素决定了一个函数?

函数定义的要素是什么?

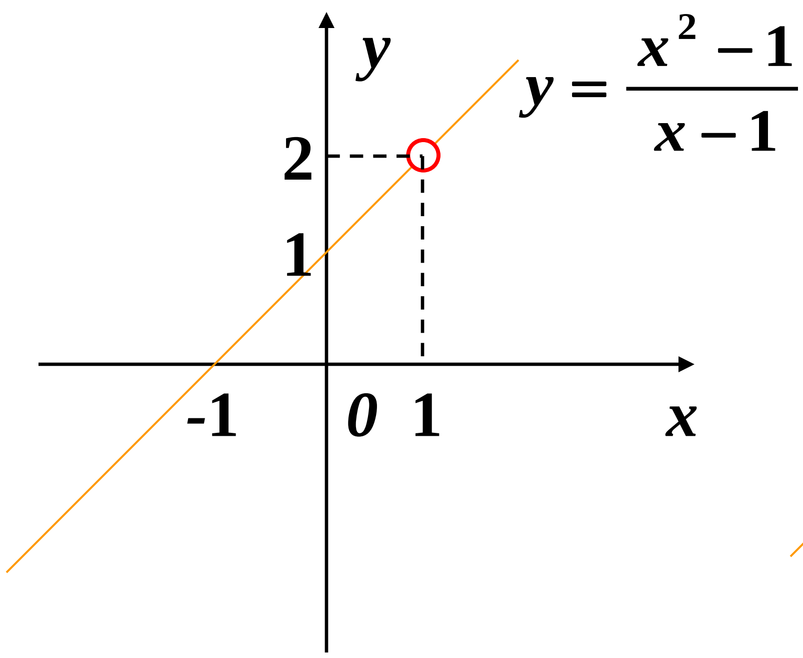
函数定义的两要素: 定义域与对应法则.

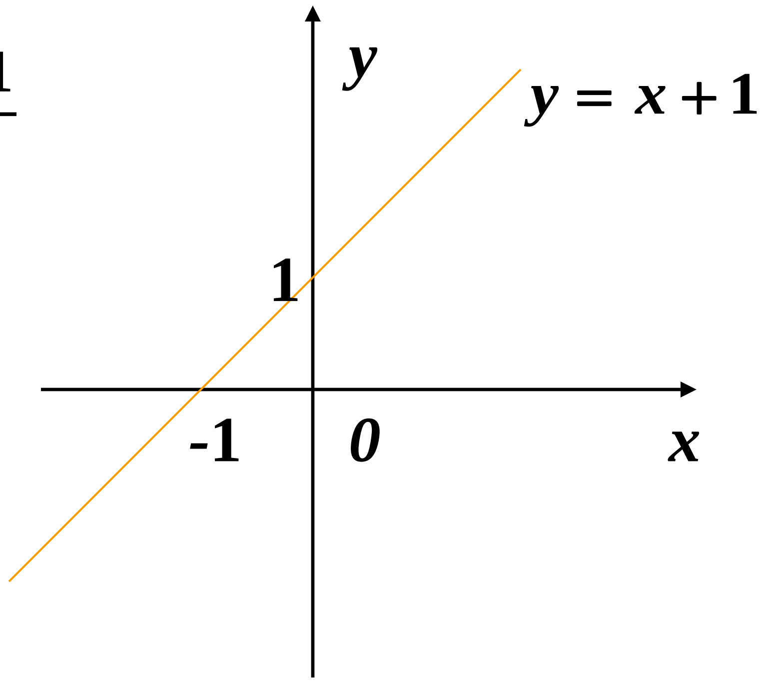
缺一不可.

利用函数的两要素可判断两个函数是否同一函数.

例1. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$是不是相同的函数?

定义域不同的两个不同的函数





例2 求函数$y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(1-x)}$的定义域.

解: 由条件

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1-x > 0, 1-x \neq 1 \end{cases}$$

定义域为 $x < 1$且$x \neq 0$.

或写成$D=\{x \mid x < 1$且$x \neq 0\}$.

一般地，约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

$$\boxed{y = f(x)}$$

函数的值域是由定义域和对应法则共同确定的.

当$x_0 \in D$时,称$f(x_0)$为函数在点x_0处的函数值.

函数值全体组成的数集

$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

如$y = \sin x$的值域?

函数的图形

设函数$f(x)=y$，定义域为D.

$\forall x\in D,$对应函数值$y=f(x).$ (x,y)对应xoy面的一点，

当x取遍D中的的一切值时，就得点集P.

$$P=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

点集**P**的图形称为函数$\boldsymbol{y=f(x)}$的图形.

例如，$f(x)=x^2$的图形为

三、一些特殊的函数

思考 $x^2+y^2=25$ 是不是函数？

多值函数: 有些x对应多个y. 例如，$x^2+y^2=25.$

注：为了确定性，一般只讨论单值函数，多值函数可看作若干个单值函数。

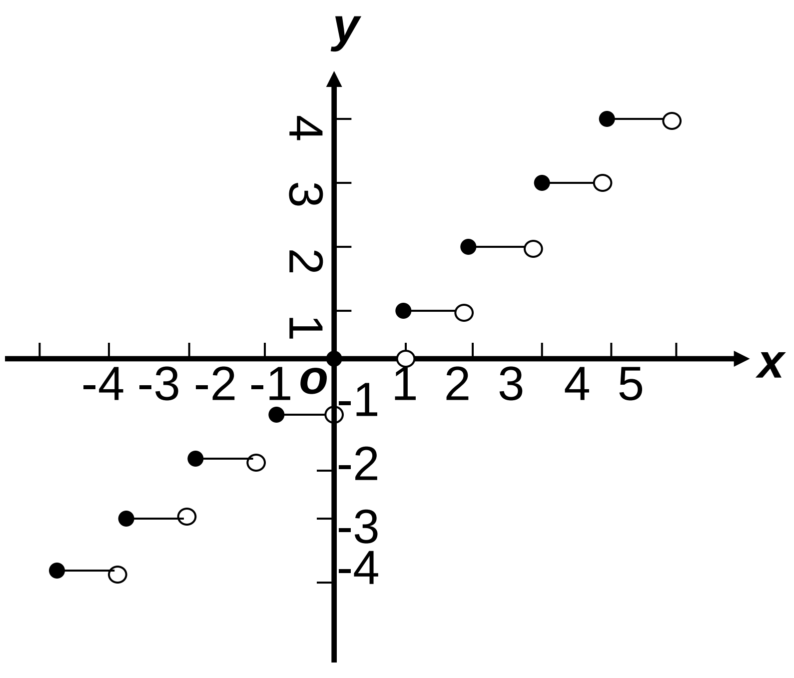
分段函数:在定义域的不同部分对应法则用不同公式表达的函数.

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(2)　取整函数 *y*=[*x*]

[*x*]表示不超过 *x* 的最大整数



阶梯曲线

(3) 整标函数

如果函数的定义域是正整数集 $\mathbf{N}_+$，

那么此函数称为**整标函数**，

$$f:\mathbf{N}_+ \to \mathbf{R}.$$

把所有的函数值按正整数从小到大对应的顺序写出来就是

$$f(1), f(2), f(3), \cdots f(n), \cdots.$$

$x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots,$ 可以用函数表示，即

$$f(n) = x_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

例如数列 $x_n = \dfrac{1}{n}$ 可以写成函数 $f(n) = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}_+$

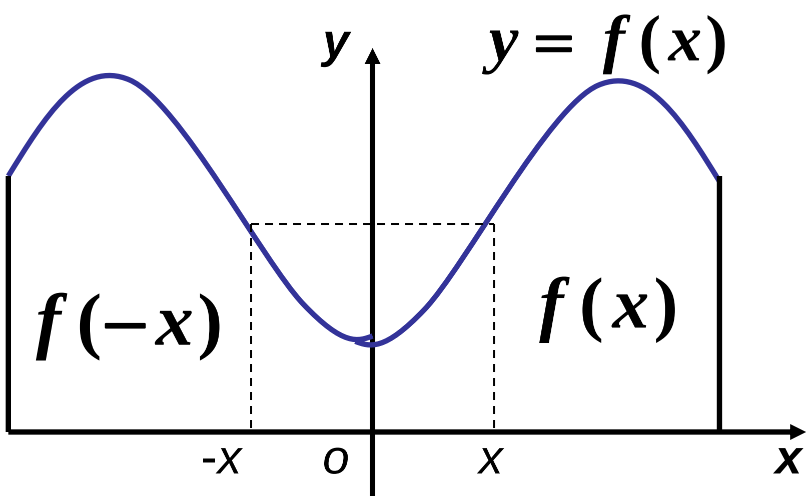
四、函数特征(函数性质)

1. 函数的奇偶性:

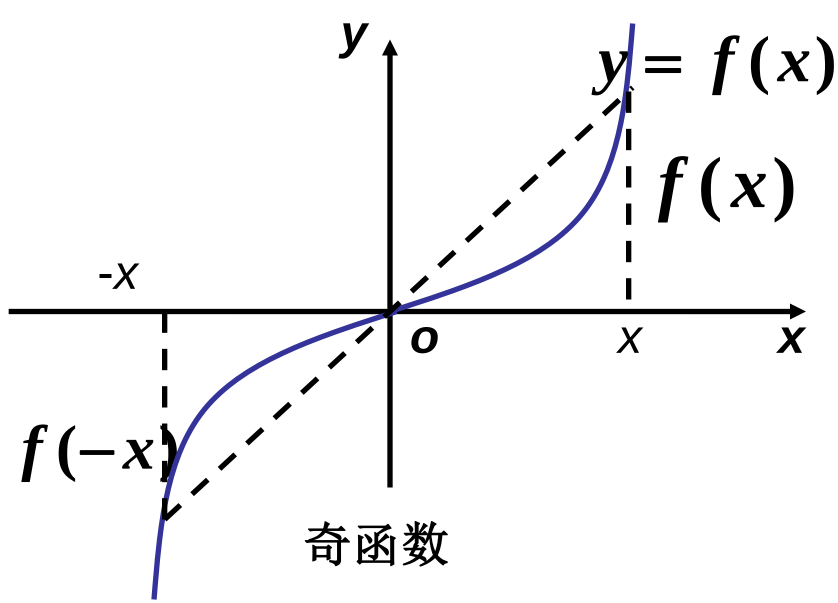
设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$,

如果 $f(-x) = f(x)$，称 $f(x)$为偶函数.

如果 $f(-x) = -f(x)$，称 $f(x)$为奇函数.



偶函数



奇函数

验证奇偶性：

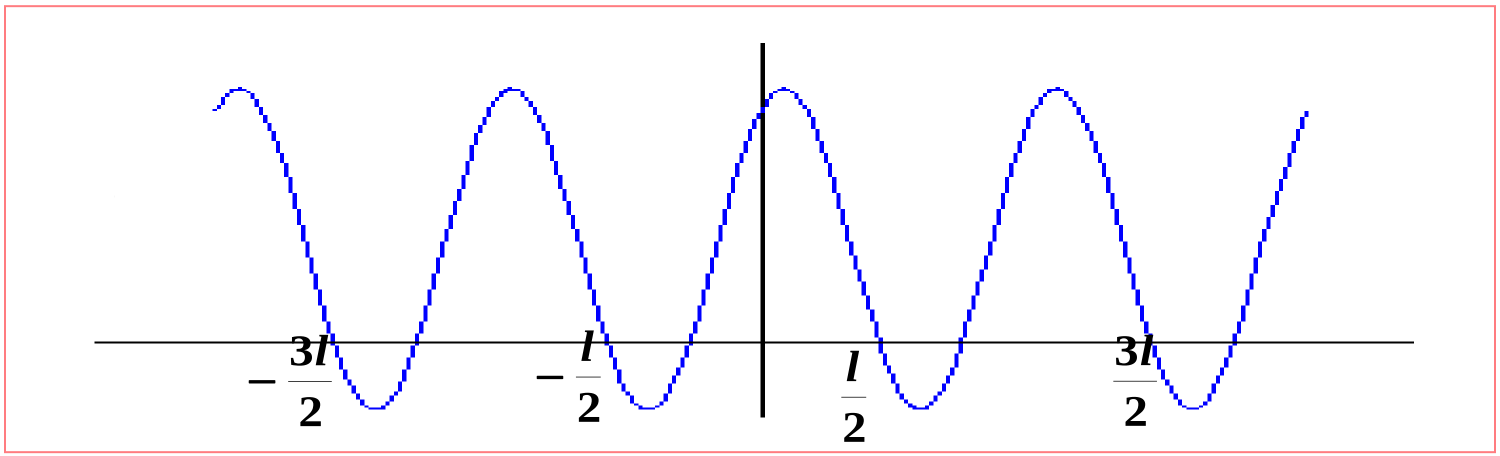
把 $-x$ 代入函数，看所得函数值 $f(-x)$ 与原函数值 $f(x)$ 是否相等或相反.

例. (1) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.　　偶函数

(2) $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$　　奇函数

2. 函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个正数 l, 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$. 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.



例. $y = \sin x, y = \cos x;$ （周期为 2π）

$y = \sin kx, y = \cos kx$.（周期为 $2\pi/k$）

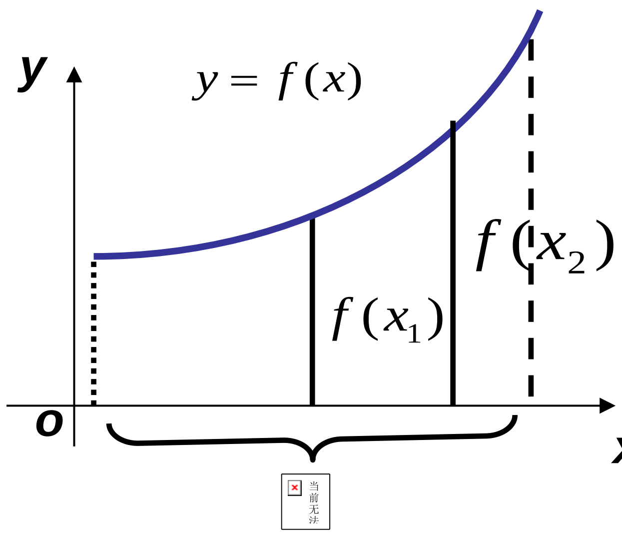
3．函数的单调性:

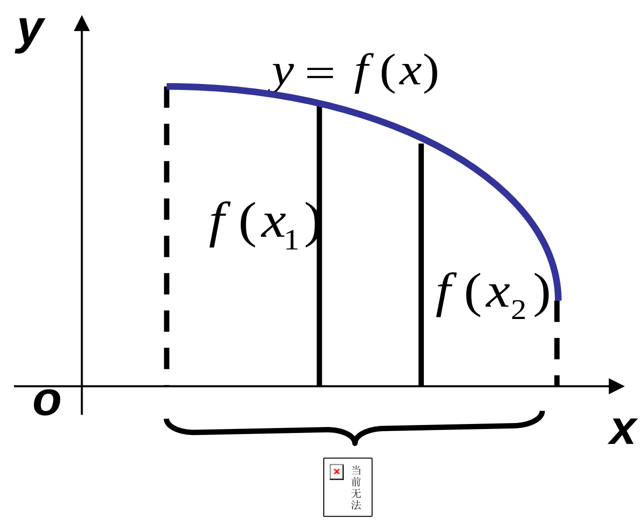
设函数 $f(x)$的定义域为D，区间$I \in D$，

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2，当 $x_1 < x_2$时，

恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ （ $f(x_1) > f(x_2)$ ），

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调增加的；(减少的)





图形：单调增加函数的图形从左到右往上升.
单调减少函数的图形从左到右往下降.

4．函数的有界性（值域有界）

设D是$f(x)$的定义域，如果对于任意$x \in D$，

存在数K_1，使得$f(x) \le K_1$，称函数$f(x)$在D上有上界.

存在数K_2，使得$f(x) \ge K_2$，称函数$f(x)$在D上有下界.

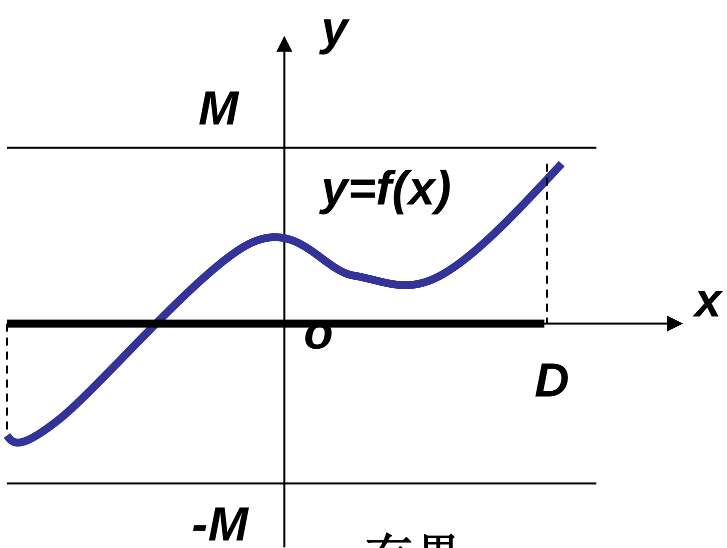
存在数K_1，K_2，使得$K_1 \le f(x) \le K_2$，称函数$f(x)$在D上有界.

有界的另一个定义：

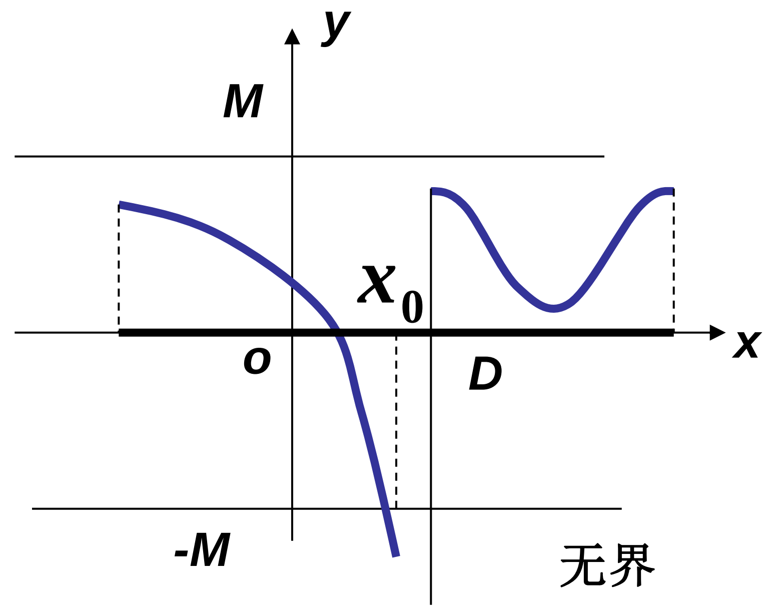
存在数M，使得$|f(x)| \le M$，称函数$f(x)$在D上有界.

这两种定义是等价的

否则称无界.



有界



无界

几何：有界函数的图形夹在两条水平直线之间。

例. $y=\sin x$ 在（$-\infty,+\infty$）有界，

$y=\dfrac{1}{x}$ 在（$0,+\infty$）无界。

五、反函数

函数$y = f(x)$指的是从x到y的对应关系.

那么从y到x的对应关系称为$y = f(x)$的反函数.

记作 $x = f^{-1}(y)$

反函数的定义域是原来函数的值域.

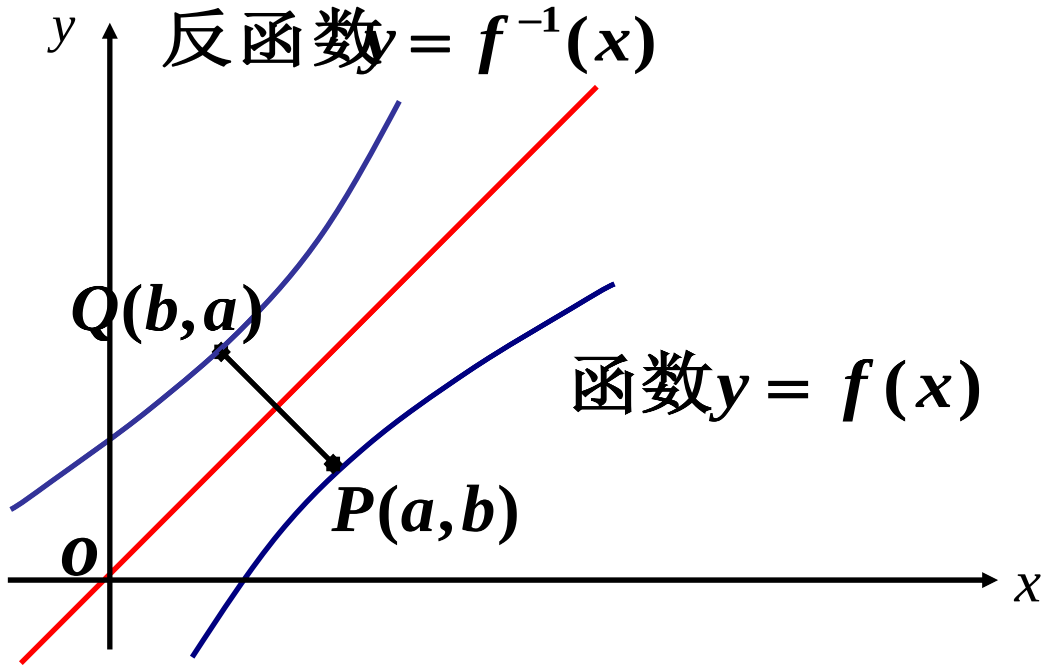
$$y = f(x) \xleftrightarrow{\text{反函数}} x = f^{-1}(y) \longrightarrow y = f^{-1}(x)$$

因变量 自变量 因变量 自变量

例如 $y = x^3, -\infty < x < \infty$的反函数是

$$y = \sqrt[3]{x}, -\infty < x < \infty.$$

图形表示：



函数与其反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例3（练习）

求 $y=\sqrt{x^2+1},\quad x\geq 2$ 的反函数.

解：当$x\geq 2$时，$y\geq\sqrt{5}$

$$y=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x=\sqrt{y^2-1}$$

综上, 得反函数 $y=\sqrt{x^2-1}, x\geq\sqrt{5}$

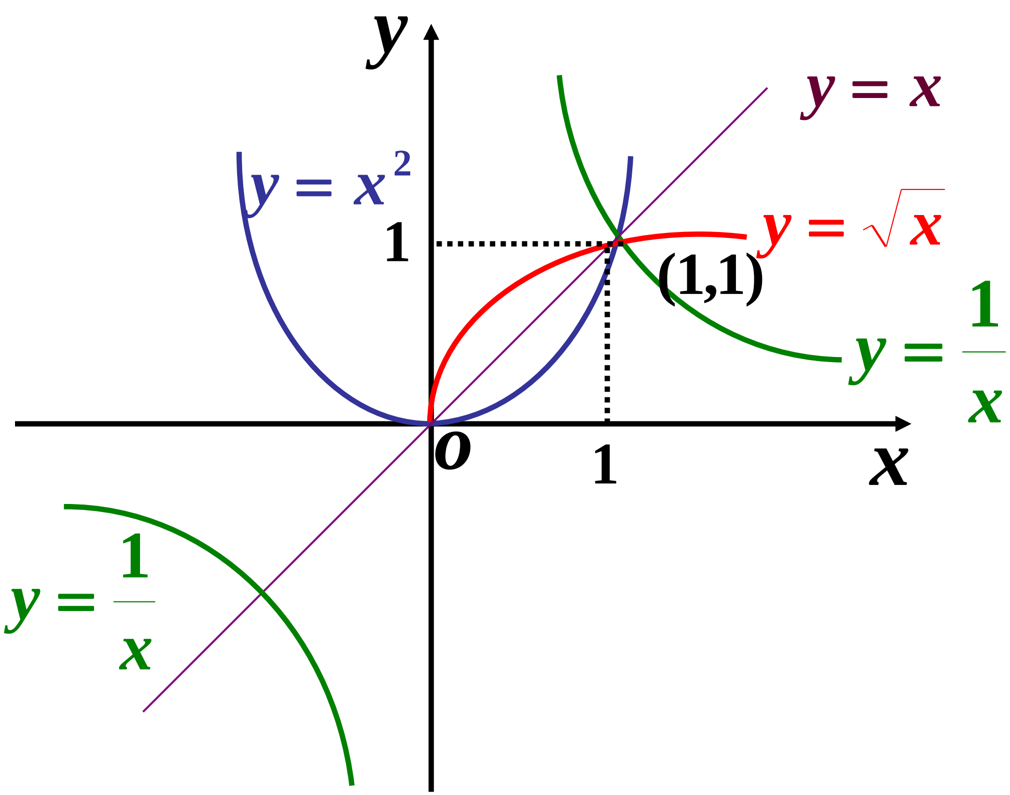
注

求反函数时，应考虑反函数的定义域.

六、基本初等函数

1.幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ是常数）

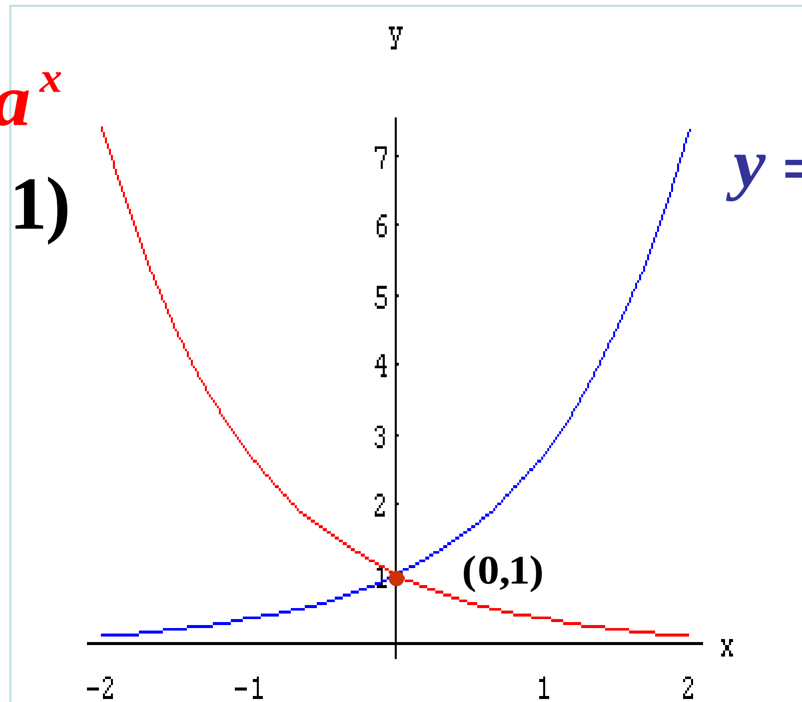
（考虑$\mu=1,2,-1,\frac{1}{2}$）



2.指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$　　$y = e^x$

$y = a^x$

$(a < 1)$

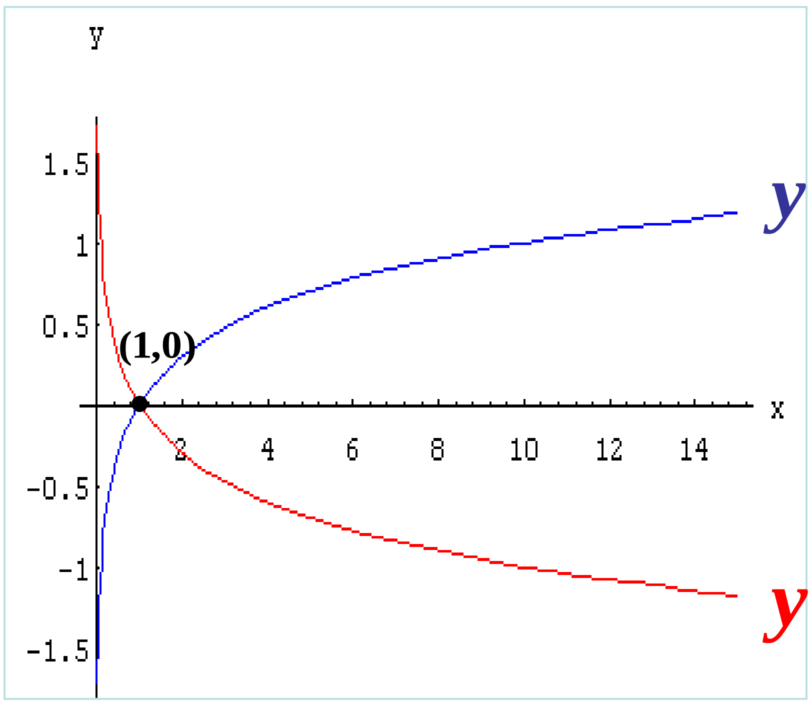


$y = a^x$

$(a > 1)$

3.对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1) \quad y=\ln x$

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$



$y=\log_a x$

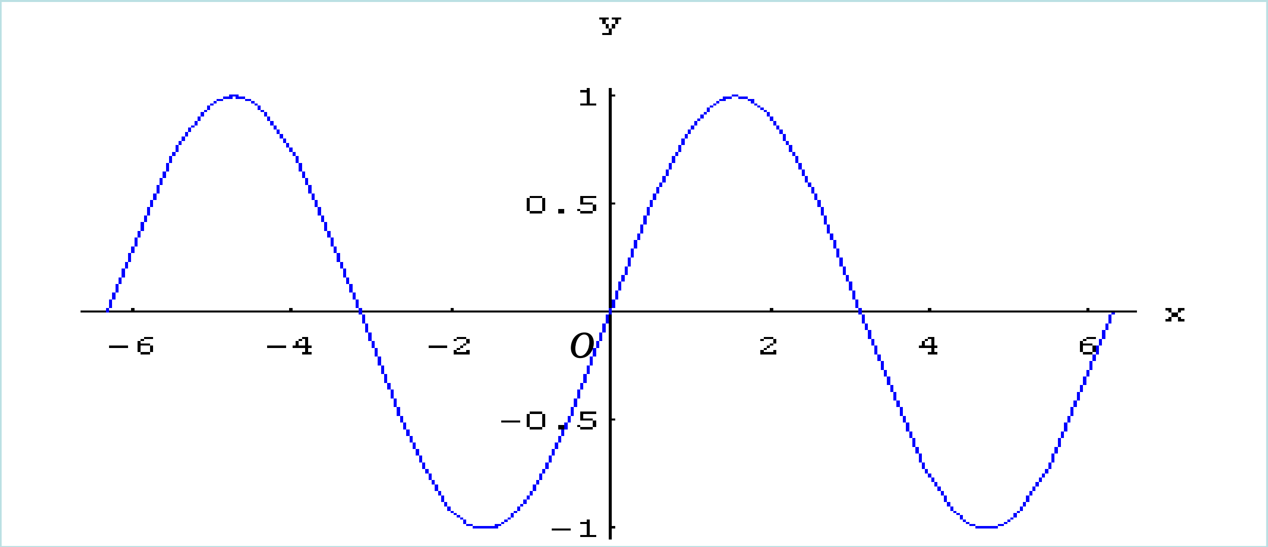
$(a>1)$

$y=\log_a x$

$(a<1)$

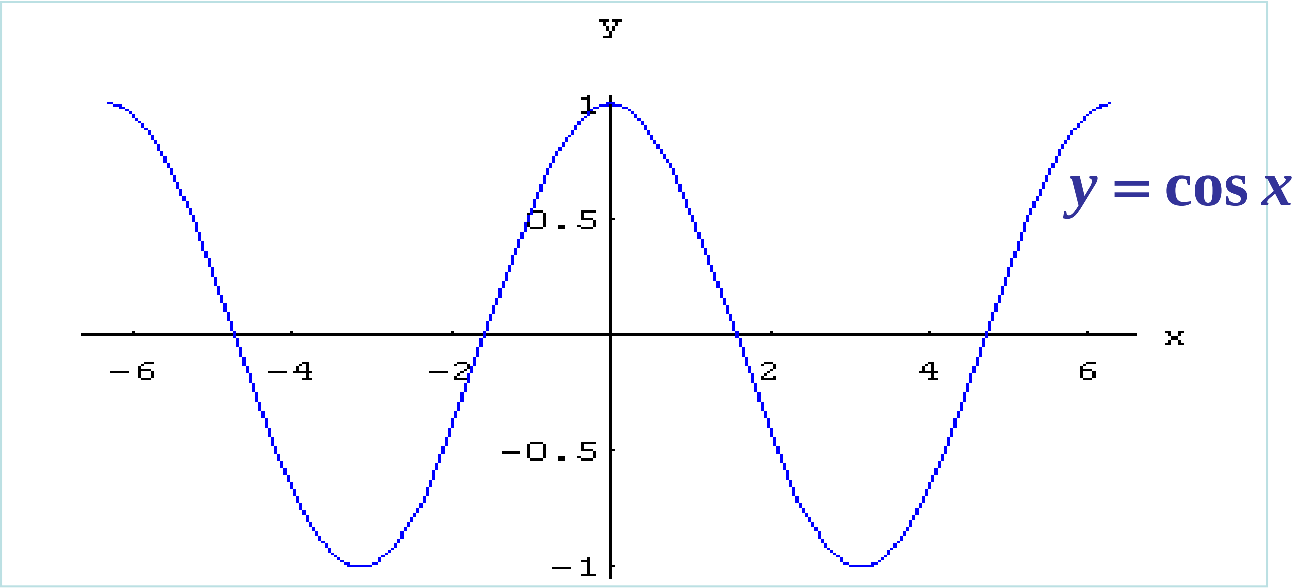
4.三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ (注意：x用弧度表示)



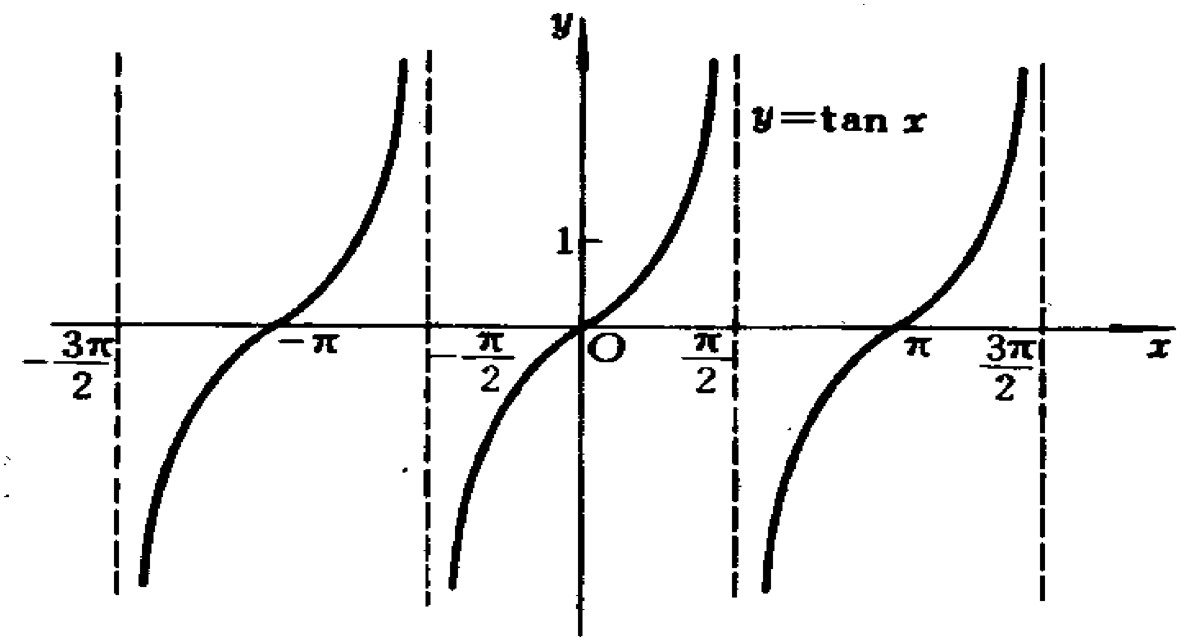
$y = \sin x$

余弦函数 $y = \cos x$

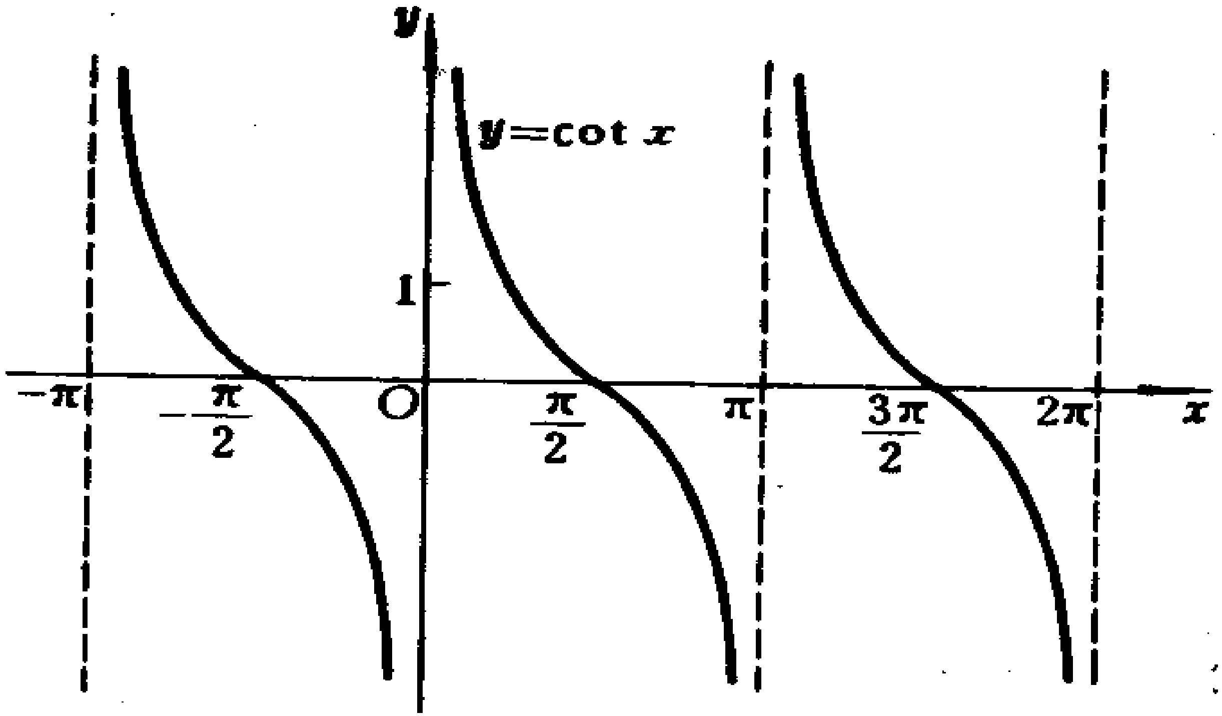


很多自然发生的现象都具有周期性，如海浪，交流电，心电图等。这类现象可以用三角函数去表示。

正切函数 $y = \tan x$



余切函数 $y = \cot x$



余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

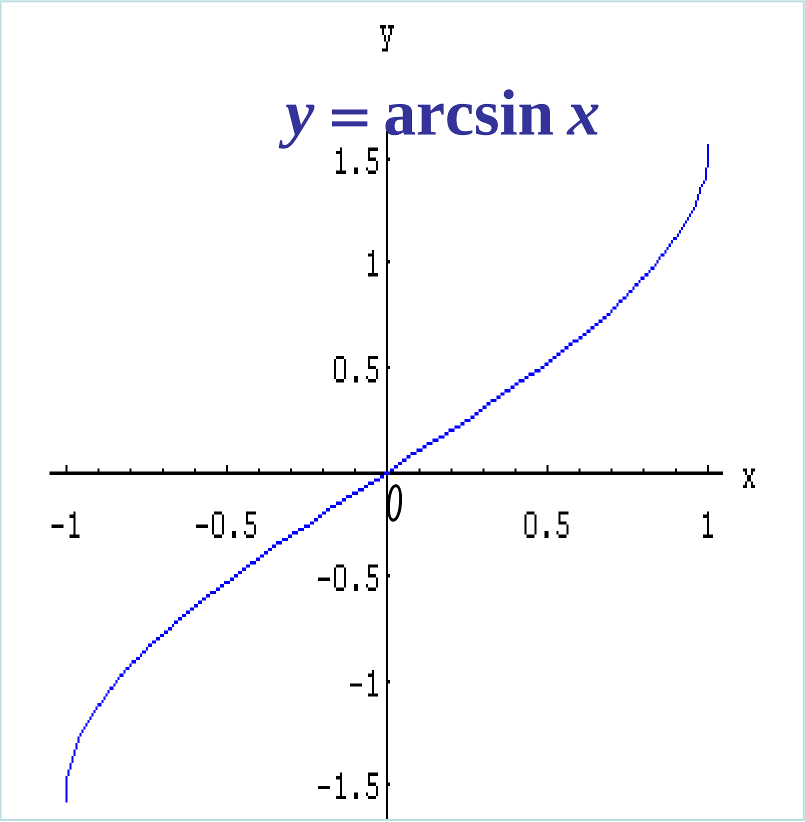
5.反三角函数

为了保持反正弦函数的单值性，

约定 $y = \arcsin x$是$y = \sin x \,(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$的反函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$

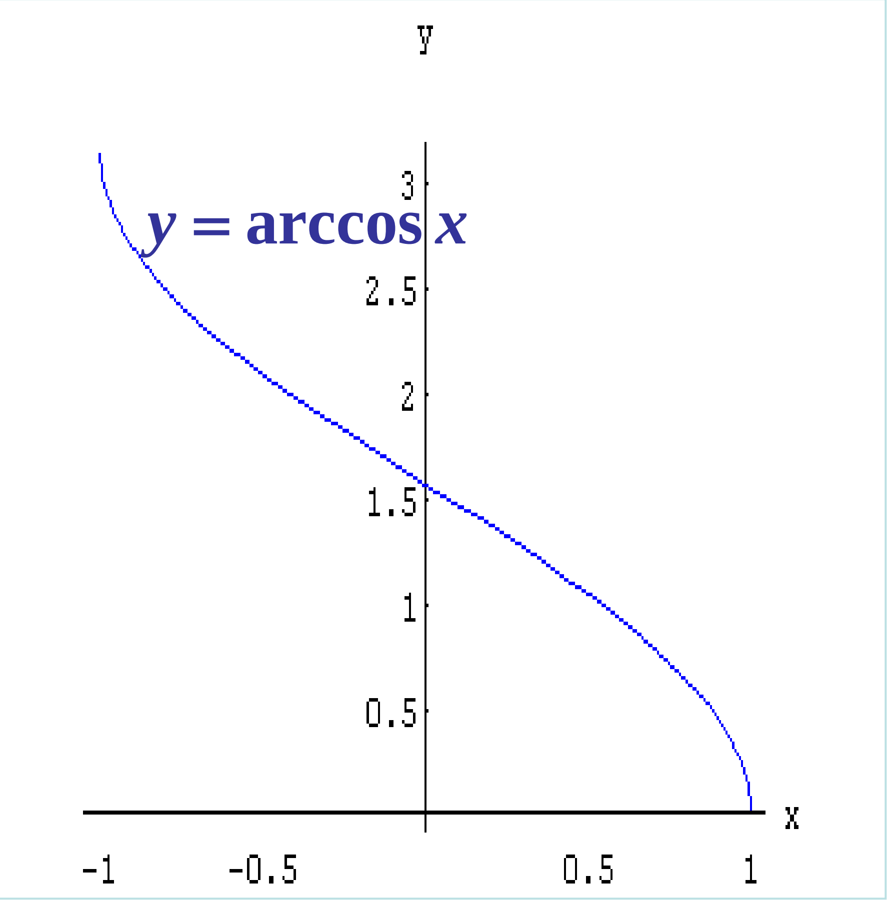
$$x \in [-1,1]$$



约定 $y = \arccos x$是$y = \cos x \ (x \in [0, \pi])$的反函数

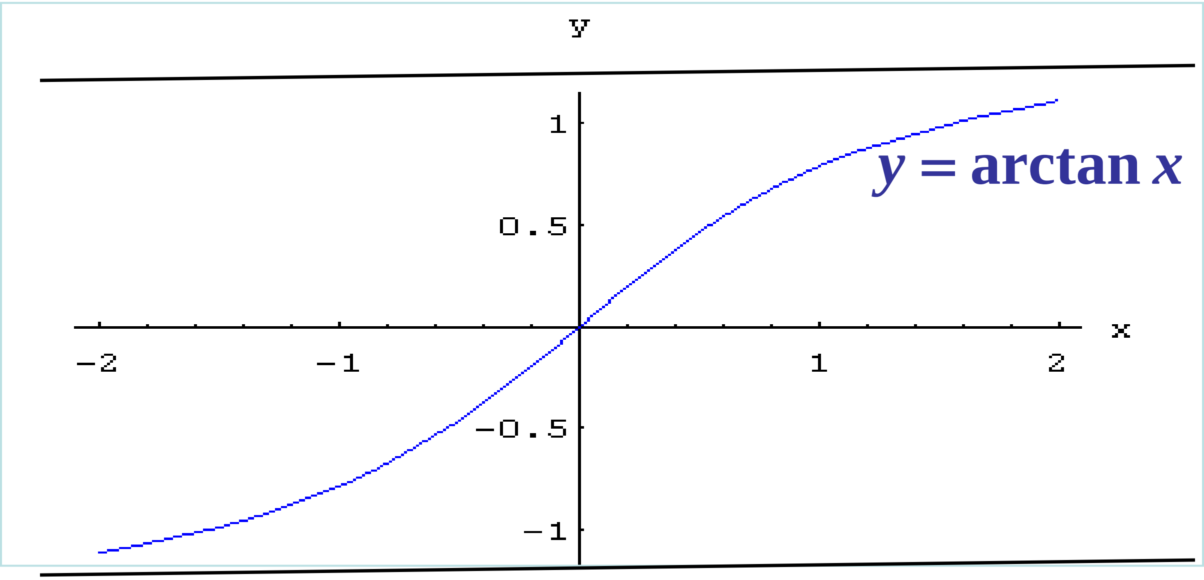
反余弦函数 $y = \arccos x \quad x \in [-1, 1]$

规定 $y \in [0, \pi]$



约定 $y = \arctan x$ 是 $y = \tan x \ (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ 的反函数

反正切函数 $y = \arctan x$ **规定** $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

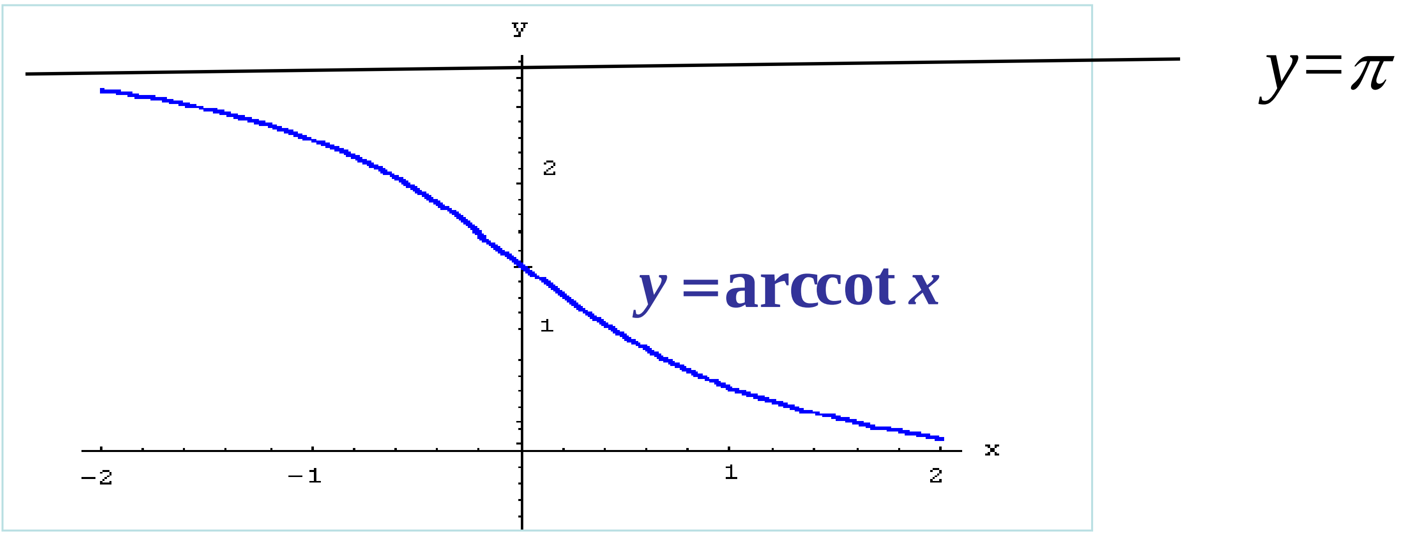


$y = \frac{\pi}{2}$

$y = -\frac{\pi}{2}$

约定 $y = \operatorname{arccot} x$ 是 $y = \cot x\ (x \in (0, \pi))$ 的反函数

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ **规定** $y \in (0, \pi)$



常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

七、复合函数、初等函数

定义：两个函数 $u=\varphi(x), y=f(u)$，如果把第一个函数的输出作为第个函数的输入，则可生成一个新的函数 $y=f[\varphi(x)]$.

简单函数通过复合运算能构成复杂的函数，反过来，也可把复杂的函数分解成简单的函数。

例. 设 $y=\sqrt{u}, u=1-x^2 \longrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

练习

$y=[\arccos(\sin\frac{1}{x})]^{20}$是由哪些基本初等函数复合而成的？

解答

$$y=u^{20},\ u=\arccos v, v=\sin w,\ \ w=\frac{1}{x}$$

定义： 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例：$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 为初等函数

$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 不是初等函数

$y = e^x + \sin\sqrt{x^2 - 1}$ 为初等函数

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$ 不是初等函数

小结

函数: 概念，函数两要素(求函数的定义域),

函数特性(有界性，奇偶性，周期性)；

反函数(求表达式时，注意定义域和值域);

复合函数;

初等函数(熟练掌握);

几个特殊的函数

作业

P16　1 (7),(8) ,(10); 2(1); 3;

9(4),(6);12(2),(4)

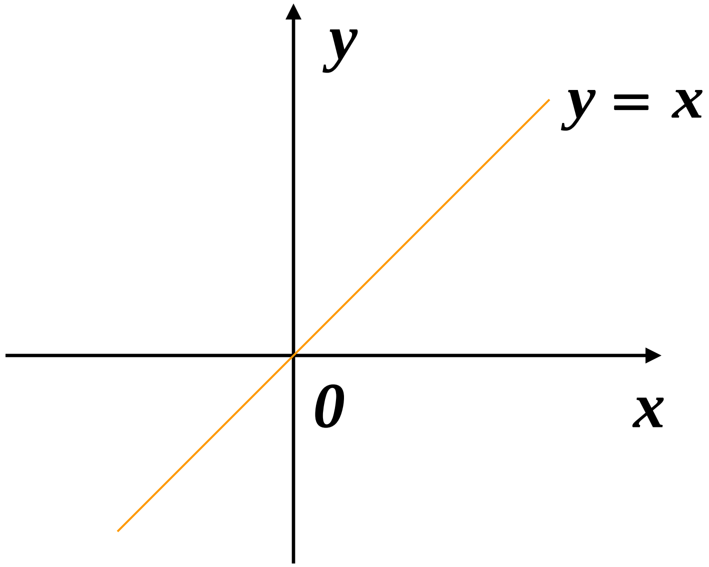
13

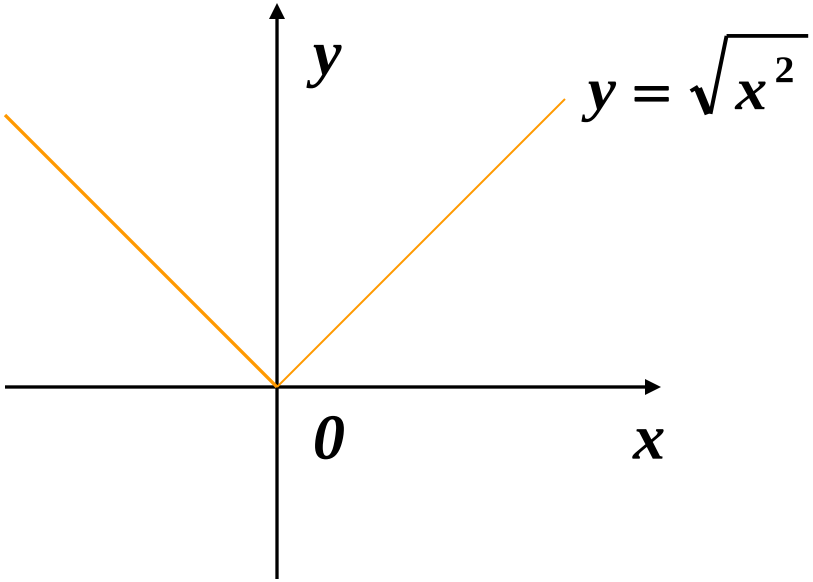
补充笔记：

五类基本函数的图形和定义域、值域

-例2. $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系?

定义域相同而对应规则不同的两个不同的函数





−例4 求 $y = \cot \pi x + \arccos 2^x$ 的定义域 .

解: $\begin{cases} \pi x \neq k\pi \\ 2^x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ x \leq 0 \end{cases}$

得定义域为 $x < 0$ 且 $x \neq -1, -2, \cdots$

−例8

设 $f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x\le 1\\ 2 & \text{其他}\end{cases}$ 求$f(f(x))$.

答案 $f(f(x))=\begin{cases}0 & -1\le x\le 1\\ 2 & \text{其他}\end{cases}$

例3. 证明$y=x^2$在$(-\infty,0]$单调减少，而在$(0,+\infty)$单调增加。

证明：任取x_1，$x_2\in(0,+\infty)$且$x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2$$

$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$$

$$\therefore f(x_1)<f(x_2)$$

$\therefore y=x^2$在$(0,+\infty)$单调增加。

同理可证命题的前半部分。

例6

求 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & x\geq 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$ 的反函数.

解：当$x\geq 0$时, $y\geq 1$，$y=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x=\sqrt{y^2-1}$

当$x<0$时, $y<1$, $x=y-1$,

综上, 得反函数 $y=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & x\geq 1\\ x-1, & x<1\end{cases}$.

例7

设 $f(x)=\begin{cases}-1 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 求$f(f(x))$.

解：当x<0时，　$f(x)\ge 0$，　则$f(f(x))=-1$,

当$x\ge 0$时，　$f(x)<0$，　则$f(f(x))=1$,

综上，得$f(f(x))=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$.