第五章　习题课

定积分

一　基本要求

1. 理解定积分概念、几何意义及其基本性质.
2. 理解积分上限函数及其基本性质,会求简单的积分上限函数的导数.
3. 熟练地运用牛顿莱布尼兹公式计算定积分.
4. 熟读掌握定积分换元法和分部积分法.
5. 会求简单的有理函数和无理函数的定积分。
6. 了解广义积分的定义,根据定义会求简单的广义积分.

二. 要点提示

1. 定积分的概念:定积分是特殊和式的极限,即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当积分限给定时,它是一个数值.

可利用理解定积分的定义求一些无穷和的极限.

2.积分上限函数:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad x\in[a,b]$$

其中x是积分区间$[a,x]$的右端点,它在$[a,b]$上变化,

而$\boldsymbol{t}$ 是积分变量,它在$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}]$上变化.

如果$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,则$\Phi(x)$ 在$[a,b]$ 上具有导数

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

上式表明 $\boldsymbol{\Phi(x)}$是连续函数$\boldsymbol{f(x)}$ 的一个原函数,于是

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+c$$

3.牛顿--莱布尼兹公式:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

注意,公式使用的条件是$f(x)$在$[a,b]$上连续,

当$f(x)$在$[a,b]$上有有限个第一类间断点时,不妨

设为c,则在$[a,c]$,$[c,b]$上分别利用牛莱公式,再

利用可加性便可得结果:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4.换元法:

使用时要注意“换元则换限,不换元则不换限”.

5.定积分的被积函数为分段函数,应按函数不同的表达式将积分区间分为若干子区间,分段积分再相加.

6.收敛的广义积分具有与定积分类似的性质,当发散时不可用这些性质.

7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx;$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx, \quad c$$ 为瑕点.

注意:只有当上边两式右端的两个广义积分都收敛时,左端的广义积分才收敛.

三. 思考与分析

(一)概念与性质

1. 下列命题是否正确?

1)定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义是:介于曲线 $y = f(x), x$ 轴与 $x = a, x = b$ 之间的曲边梯形面积.

2若 $[a,b] \supseteq [c,d]$, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则必有

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx$$

3)若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数,则 $\int_a^x f(t)dt$ 必为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一个原函数.

分析

1)错误,应为所围曲边梯形面积的代数和.

2)错误,考察反例:

$$f(x)=x^3,[a,b]=[-1,1],[c,d]=[0,1].$$

3)正确,表明连续函数必定可积

2.下列运算是否正确?

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}.$$

$$2)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0.$$

分析 1)错误,因为 $\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ 是上限x^2 的函数,

因此它是x 的复合函数,所以应该用复合函数的

求导法则,即

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}\left(x^2\right)'=\frac{2x\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}$$

一般地,

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{a} f(t)dt = -f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

2)错误,因为 $\frac{1}{x}$ 在$[-1,1]$内的 $x=0$ 处不连续,不符合使用牛-莱公式的条件,因此,本题不能用牛-莱公式.

有关上限函数应用的一些题目：

1.试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan t dt}{x^4}$

这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式,由罗必达法则,有

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2\left(x^2\right)'}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}.$

2.求 $I(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ 的极值.

解 $I'(x)=x(x-1)$, 得驻点 $x=0, x=1$,

$$I''(x)=2x-1, I''(0)=-1<0, I''(1)=1>0,$$

$x=0$ 为极大值点, $x=1$ 为极小值点,

因此, 极小值为 $I(1)=\int_0^1 t(t-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{6}$

极大值为 $I(0)=0.$

3.设 $f(x)$在 $(-\infty,\infty)$ 内连续且 $f(x)$ 大于零,证明:

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

请自己练习.

注意:在类似于上面的题目中,不要去积分题目中出现的积分上限函数.当被积函数连续时,积分上限函数是可导函数, 可象对待可导的初等函数一样对待它.

3.判断下列命题是否正确?

1)若 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, 则$f(x)$ 必为奇函数.

2)凡连续奇函数的原函数都是偶函数.

3)凡连续偶函数的原函数都是奇函数.

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 0.$

(1)不正确,考虑 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 1. \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}-\frac{1}{2}dx=0,$$

但$f(x)$ 在$[-1,1]$ 上不是奇函数.

注意:(1)的逆命题是正确的,即$f(x)$ 是奇函数,$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0.$

在定积分计算中应注意利用这个性质,

例如

$$\int_{-5}^{5}\frac{x\sin^2 x}{3+\cos x}dx=0.$$

(2)正确,设奇函数$f\left(x\right)$ 的原函数为$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt+c$,

$$\because F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+c=-\int_0^{x} f(-u)du+c \quad (u=-t)$$

$$=\int_0^{x} f(u)du+c=F(x)$$

$\therefore F(x)$ 是偶函数.

(3)不正确,但当$c=0$ 时可以成立.

(4)不正确,该无穷积分发散.错误在于认定$(-\infty,\infty)$为对称区间.对于广义积分来说,对称区间的性质只有在广义积分收敛时才成立.

4.下列运算是否正确?如不正确指出原因:

(1)设 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}d\frac{1}{t}=\int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2}, \therefore \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=0.$

(2) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}=0.$

(3)设 $u=\ln x$,则 $\int_2^3\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^3\frac{du}{u}=\ln|u|\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}.$

(1) 不正确,注意被积函数大于零,可知定积分也应大于零,故运算是错误的.错误的原因在于引进的变换 $t=\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续,故不满足换元法的前提条件.

(2) 不正确,在 $[0,2\pi]$ 上 $\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

正确的是

原式 $=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx+\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}-\cos\frac{x}{2}dx$

$=4\sqrt{2}.$

(3)分析　不正确,错在换元后没有改变积分限.正确的是

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln|\ln 3| - \ln|\ln 2|.$$

注意:“换元则换限,不换元则不换限”.

请注意上述问题并做以下几个练习:

$$1.\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0); \qquad 2.\int_{-2}^{2} \min\left(1, x^2\right) dx;$$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan x}$;　　4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$;

5. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0, \end{cases}$ 求 $\displaystyle\int_0^2 f(x-1) dx$.

6. 证明: $\displaystyle\int_0^a x^3 f\left(x^2\right) dx=\frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a \geq 0)$.

7. 求不为零的连续函数 $f(x)$ 使 $f^2(x)=\displaystyle\int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2+\cos t} dt$.

- 参考答案

1.解1.换元,设$x = a\sin t$, 则

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2.$$

解2.可利用定积分的几何意义,原积分等于半径为a的四分之一圆面积.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{4}a^2.$$

2.解

$$\because \min\left[1, x^2\right]=\begin{cases}1, & x<-1\\ x^2, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{2}\min\left[1, x^2\right]dx=\int_{-2}^{-1}1dx+\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}1dx$$

$$=x\Big|_{-2}^{-1}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}+x\Big|_{1}^{2}=\frac{8}{3}.$$

注:对分段函数要分段积分.

3.解设 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$$

于是,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}.$

由换元法可证明: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

4.解 先换元,再分部积分,

设 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t$,

当 $x=0$ 时,$t=0$, 当 $x=1$ 时 $t=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sec^3 t}\sec^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} td(\sin t)$$

$$=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t dt=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}-1.$$

5.解1 换元,

设 $x-1=t$, 则当 $x=0$ 时 $t=-1$, 当 $x=2$ 时 $t=1$,

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{dt}{1+e^t}+\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\int_{-1}^0\frac{e^{-t}dt}{e^{-t}+1}$$

$$+\int_0^1\frac{dt}{1+t}=-\ln\left(e^{-t}+1\right)\Big|_{-1}^0+\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln(e+1).$$

解2 将 $f(x)$ 变成 $f(x-1)$ 再积分,

$$f(x-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x-1}, & x-1\ge 0\\[2ex] \dfrac{1}{1+e^{x-1}}, & x-1<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\ge 1\\[2ex] \dfrac{1}{1+e^{x-1}} & x<1\end{cases}$$

6.证明:用换元法,设 $x^2=t$,则 $2xdx=dt$,

当 $x=0$ 时,$t=0$, 当 $x=a$ 时 $t=a^2$,

$$\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

所以,得证.

7.证明:等式两边对 x 求导: $2f(x)f'(x)=f(x)\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

$$\because\ f(x)\neq 0,\therefore\ f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{2+\cos x},$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(2+\cos x)}{2+\cos x}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+c$$

又由题设 $f^2(0)=0$, 即$f(0)=0$,

有

$$-\frac{1}{2}\ln(2+\cos 0)+c=0, \therefore c=\frac{1}{2}\ln 3,$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2+\cos x}.$$

(三)定积分的应用

1.求正数 c,使二曲线 $y=x^2$ 与 $y=cx^3$ 所围成的图形的面积为三分之二.

解　选取 x 为积分变量, $x\in\left[0,\frac{1}{c}\right]$,

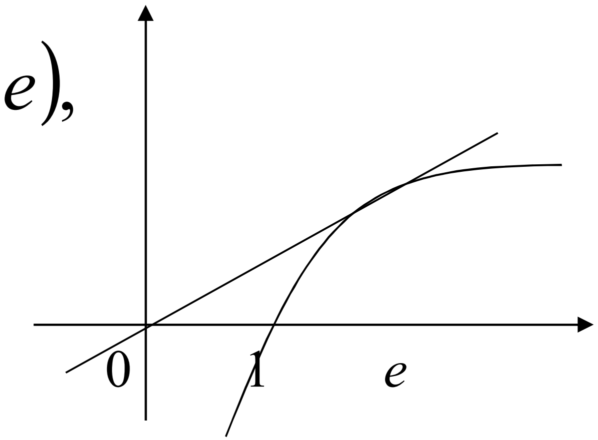
$$\because 0\le x\le\frac{1}{c},\therefore x^2-cx^3=x^2(1-cx)\ge 0,$$

$$S=\int_0^{\frac{1}{c}}\left(x^2-cx^3\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{c}{4}x^4\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{c}}=\frac{1}{12c^3},$$

由题设: $$\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3},\therefore c=\frac{1}{2}.$$

2.求由曲线 $y=\ln x$ 及过曲线上点 $(e,1)$ 的切线和 x 轴所围成的图形的面积及绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 (1)先求切线方程



$$y'=\frac{1}{x},\ y'\big|_{x=e}=\frac{1}{e},\qquad y-1=\frac{1}{e}(x-e),$$

切线方程为 $y=\dfrac{x}{e}$.

选取 y 为积分变量, $y\in[0,1]$,

切线为 $x=ey$, 曲线为 $x=e^{y}$.

$$S=\int_0^1\left(e^{y}-ey\right)dy=\left[e^{y}-\frac{1}{2}ey^{2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-1.$$

(2)

$$V_x = \pi \int_0^e \left(\frac{x}{e}\right)^2 dx - \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi x^3}{e^2}\Bigg|_0^e - \pi \left(x \ln^2 x \Bigg|_1^e - \int_1^e \ln x dx \right)$$

$$= \frac{\pi e}{3} - (\pi e - 2\pi) = \pi \left(2 - \frac{2}{3} e \right).$$

- 小结:

1.求平面图形面积

(1)根据公式 $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$

必须注意区分 $f(x),g(x)$ 的位置.

(2)可适当选择积分变量,以方便计算.

2.求旋转体的体积时,要明确平面图形及注意旋转轴,正确写出定积分或广义积分.

四.自测题

1. 计算下列积分:

$$1)\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx; \qquad 2)\int_{-5}^{5} \frac{x^2\sin^3 x}{\ln\left(2+x^2\right)}dx;$$

$$3)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x dx; \qquad 4)\int_0^1 x^2 \arctan x dx;$$

$$5)\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx; \qquad 6)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\cos x dx;$$

7) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$; 8) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$;

9) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 10) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$.

2.求极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+2t^2)dt}{x^3}$.

3.设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)=f(b)=0$,

$f'(a)=f'(b)=1$, 求 $\int_a^b xf''(x)dx$.

4.证明 $\int_0^1 xf(1-x)dx = \int_0^1 (1-x)f(x)dx.$

5.当x 为何值时，$F(x) = \int_0^x (t+1)e^{-t^2} dt$

有极值?是极大值,还是极小值.

6.求由下列曲线所围成的图形面积以及分别绕x 轴,y 轴旋转一周而成的旋转体体积:

1) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1;$

2)位于$y = e^{-x}$ 的下方,过曲线上点$(0,1)$ 的切线上方及x 轴之间.

自测题参考答案

1.1) $\frac{\pi}{8}$; 2)0; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}(1-\ln 2)$; 5) $\frac{1}{6}$;

6) $\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$; 7)$2\sqrt{2}$; 8)1; 9) $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln 3$;

10)发散. $2.1)=\int_0^1 \sin\pi x\,dx\left(or\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)=\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{2}{3}$.

3)$b-a$; 4.提示:设 $1-x=t$. $5.x=-1$, 极小值.

$6.1) S=e+\frac{1}{e}-2$; $V_x=\frac{\pi}{2}\left(e^2+e^{-2}-2\right)$; $V_y=\frac{4\pi}{e}$.

$2) S=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx-\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$; $V_x=\frac{\pi}{6}$; $V_y=\frac{5\pi}{3}$.