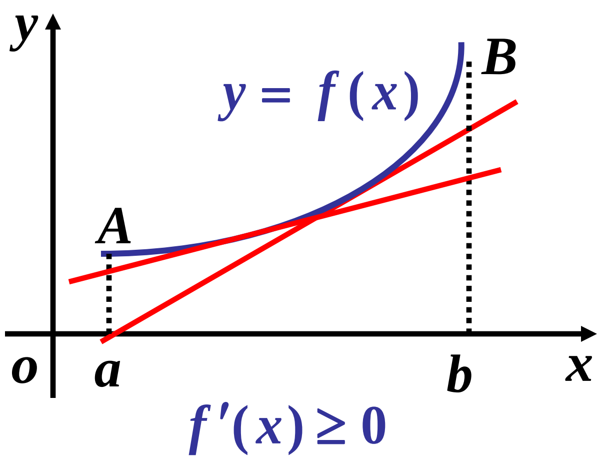
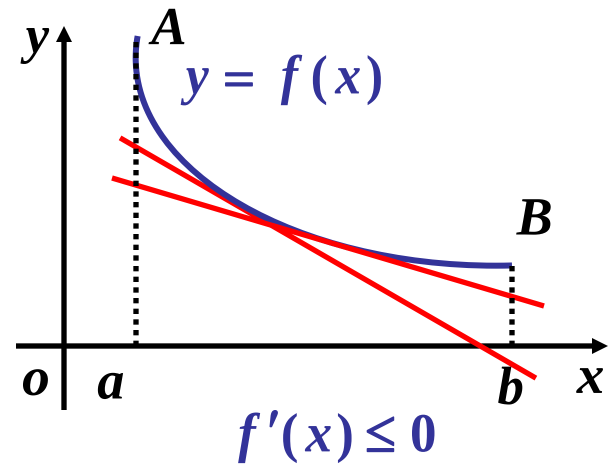
第四节　函数单调性与曲线的凹凸性

1. 单调性的判别法





定理　设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.(1) 如果在(a,b)内$f'(x)>0$，那末函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；(2) 如果在(a,b)内$f'(x)<0$，那末函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

证 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 且 $x_1 < x_2$, 应用拉氏定理,得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

$\because x_2 - x_1 > 0$,

若在(a,b)内，$f'(x) > 0$, 则 $f'(\xi) > 0$,

$\therefore f(x_2) > f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

若在(a,b)内，$f'(x) < 0$, 则 $f'(\xi) < 0$,

$\therefore f(x_2) < f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

注意:

(1)结论中的单调性是严格单调性.

(2) 函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

思考 $y=x^3, y'=2x^2\geq 0$ (等号当x=0时成立)

还能说函数在$(-\infty,+\infty)$上单调增加吗？

解答:区间内个别点导数为零,不影响区间的单调性.

#P145

思考：改成开区间，半开闭区间，，无穷区间，（导数仍在区间内大于零），结论是否仍然成立？

解答 是

$$f(x)=e^{x}\Rightarrow f'(x)=e^{x}>0\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$\Rightarrow$ e^{x}在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

#P145

2. 单调区间

有时，函数在定义区间上不是单调的，但在各个部分区间上单调.

定义:若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的<u>单调区间</u>.

单调区间的分界点可能存在于:

(1)导数等于零的点

#P146

(2)不可导的点

补例 求函数 $f(x)=\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的单调区间.

#P146

解 $$f'(x)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)\ (x\neq 1)$$

当 $x=1$ 时, $f'(x)$ 不存在.

当 $x=2$ 时, $f'(x)=0$

x	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调增加， 在 $[1,2]$ 上单调减少

在 $[2,+\infty$） 上单调增加

如何求函数的单调区间求法？

(1)用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间，

(2)列表判断各个子区间内（开区间）导数的符号.

(3)写出单调区间（注意需考虑端点）.

3.利用单调性证明不等式

#P146

例2 当$x > 0$时，试证$x > \ln(1+x)$成立.

证 设$f(x) = x - \ln(1+x)$， 则 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

$\because$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$可导， $f'(x) > 0$,

$\therefore$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加；

故当$x > 0$时，$f(x) > f(0) = 0$,

即当$x > 0$时，$x - \ln(1+x) > 0$， 即 $x > \ln(1+x)$.

函数的单调性在证明题中的应用

(1)函数的单调性可以用于证明不等式.

不等式整理成$f(x)>0(x>a)$的形式．先证$f'(x)>0$，再证$f(a)=0$，由单调性可得$f(x)>f(a)=0(x>a)$.

有时，要证$f'(x)>0$，需要用到函数$f'(x)$的单调性.

补例 证明当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\sin x + \tan x > 2x$. #P147

(用到两次求导判别单调性的例子)

证：令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$，则 $f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2$

$$f''(x) = -\sin x + 2\sec^2 x \tan x = \sin x(2\sec^3 x - 1)$$

因为$0 < x < \frac{\pi}{2}$，所以$\sin x > 0, \sec x > 1$ 则$f''(x) > 0$.

$f'(x)$在$\underline{[0, \frac{\pi}{2})}$上连续，在$\underline{(0, \frac{\pi}{2})}$内$f''(x) > 0$，$f'(x)$在$\underline{[0, \frac{\pi}{2})}$上单调增加.

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\underline{f'(x) > f'(0)} = 0$,

又$f(x)$在$\underline{[0, \frac{\pi}{2})}$上连续，在$\underline{(0, \frac{\pi}{2})}$内$f'(x) > 0$,

$f(x)$在$\underline{[0, \frac{\pi}{2})}$上单调增加.

从而当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\underline{f(x) > f(0)} = 0$，即$\sin x + \tan x > 2x$.

补例 #P147

证明方程 $2^x x = 1$在区间$(0,1)$上有且仅有一个根.

证: **1)存在性**

设 $f(x) = 2^x x - 1$, $f(x)$在区间$[0,1]$上连续,

$f(0) = -1$, $f(1) = 1$,由零点定理,

存在$x_0 \in (0,1)$使得$f(x_0) = 0$, x_0就是方程的根.

2)唯一性

因为$f'(x) = 2^x + x2^x \ln 2 > 0$, $x \in (0,1)$,

$f(x)$在区间$(0,1)$上单调,故方程$f(x) = 0$

在$(0,1)$只有一个根.

综上,方程 $2^x x = 1$在区间$(0,1)$上有且仅有一个根.

(2)函数单调性用于证明方程在区间(a,b)上有且仅有一根.

将方程整理成$f(x)=0$的形式，

(1) $f(x)$在区间$[a,b]$连续，$f(a)f(b)<0$,

由零点定理，方程在区间(a,b)内至少有一根.

(2)证明$f'(x)<0$(或$f'(x)>0$), $x\in(a,b)$

由单调性可知方程$f(x)=0$在(a,b)内只有一根.

小结

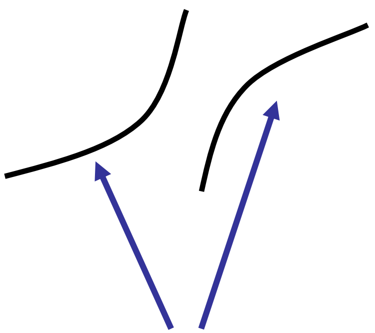
单调性的判别是拉格朗日中值定理定理的重要应用.

定理中的区间换成其它有限或无限区间，结论仍然成立.

应用：利用函数的单调性可以确定某些方程实根的个数和证明不等式.

二 曲线的凹凸性

单调性是反映函数性态的一个重要性质.

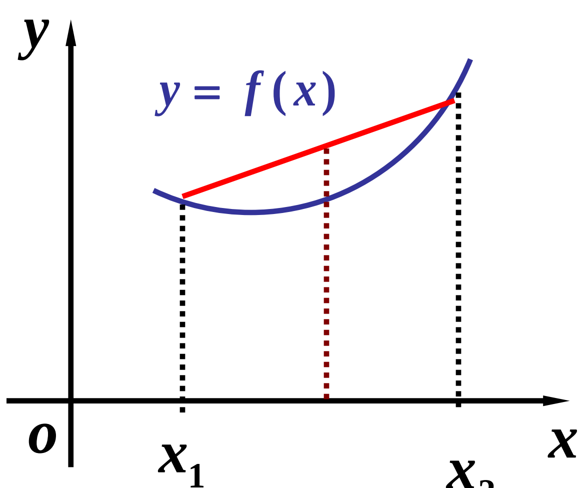


如何区分?

曲线的凹凸性是反映函数性态的另一个指标。

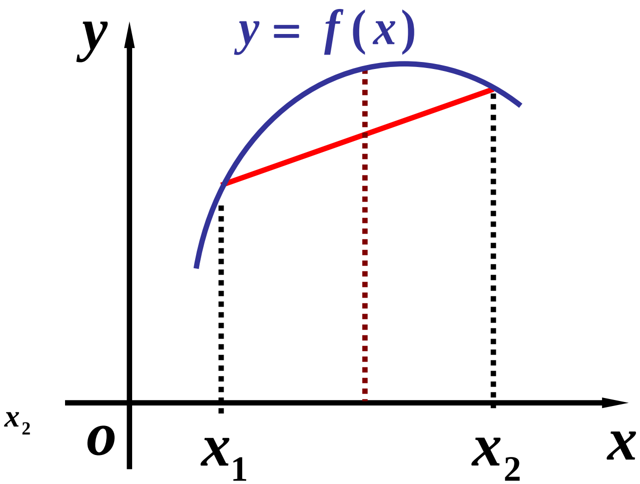
1. 函数凹凸的定义

问题:如何研究曲线的弯曲方向?



图形上任意弧段位

于所张弦的下方



图形上任意弧段位

于所张弦的上方

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

定义

设$f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点x_1, x_2，恒有

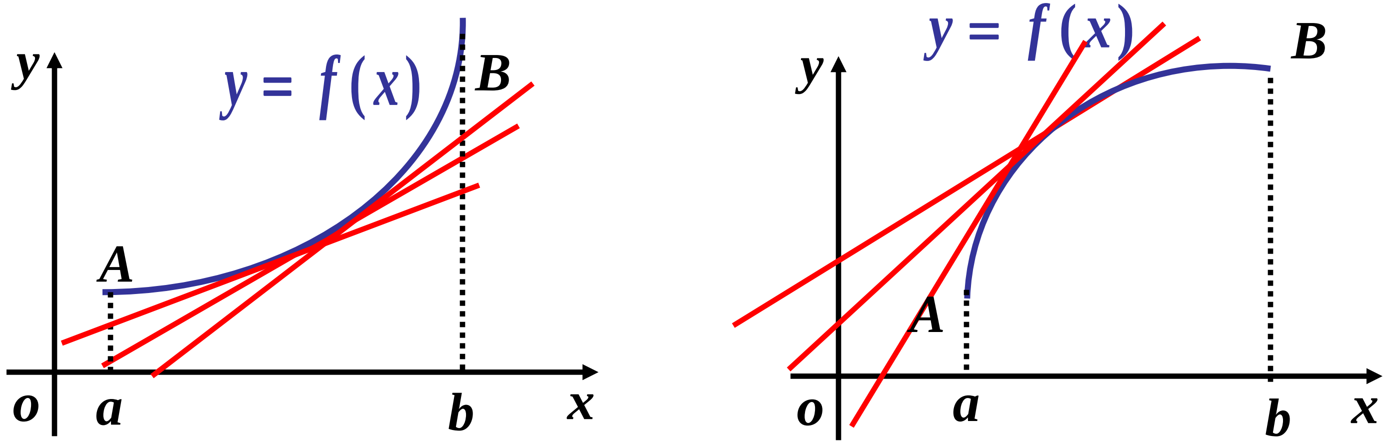
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称$f(x)$在I上的图形是(向上)凹的(或凹弧);

如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

则称$f(x)$在I上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

2. 函数凹凸的判定



$f'(x)$ 递增　　$y''>0$　　　　$f'(x)$ 递减　　$y''<0$

定理1 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数,若在(a,b)内

(1) $f''(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的;

(2) $f''(x)<0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的.

证：$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，不妨设$x_1 < x_2$，取$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

由拉格朗日中值定理，有

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x_1 - x_0) \quad x_1 < \xi_1 < x_0 \quad (1)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0) \quad x_0 < \xi_2 < x_2 \quad (2)$$

因为$f'(x)$在(a,b)上单调增加，且$\xi_1 < \xi_2$，

有$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$，

即(2)可以改写为$f(x_2) - f(x_0) > f'(\xi_1)(x_2 - x_0) \quad (3)$

$$(1)+(3):\ f(x_2) + f(x_1) - 2f(x_0) > f'(\xi_1)(x_2 + x_1 - 2x_0)$$

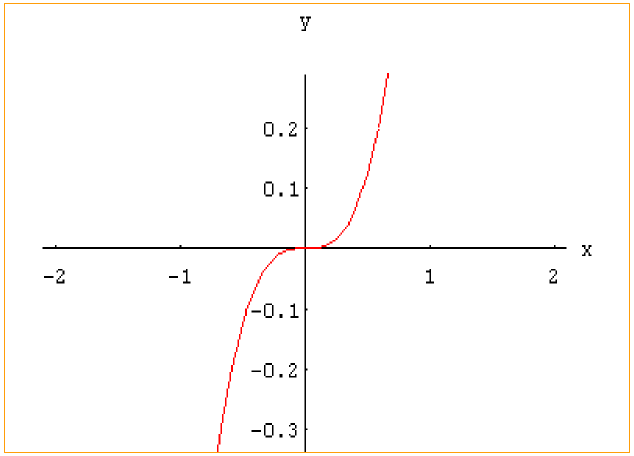
即$f(x_2) + f(x_1) - 2f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0.$

亦即$\dfrac{f(x_2)+f(x_1)}{2} > f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

根据凹凸性的定义，曲线$y = f(x)$是对应区间$[a,b]$上的凹曲线.

考虑判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 定义域 $D:(-\infty,+\infty)$



$\because\ y' = 3x^2,\quad y'' = 6x,$

当 $x < 0$ 时， $y'' < 0,$

$\therefore$ 曲线在 $(-\infty,0]$ 为凸的；

当 $x > 0$ 时， $y'' > 0,$ $\therefore$ 曲线在 $[0,+\infty)$ 为凹的；

注意到，点 $(0,0)$ 是曲线由凸变凹的分界点.

3. 曲线的拐点及其求法

定义 连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点**.

拐点可能是

#P149

(1) 二阶导数等于零的点;

(2) 二阶导数不存在的点;

拐点的求法

方法： 求$f''(x)$，找出$f''(x)$不存在的点或使得$f''(x)=0$的点x_0:

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号,点$(x_0, f(x_0))$即为拐点;

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号,点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

例1 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹凸区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty)$

$$y'=12x^3-12x^2,\qquad y''=36x(x-\frac{2}{3}).$$

令 $y''=0$, 得 $x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/3)$	$2/3$	$(2/3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	1	凸的	$11/27$	凹的

曲线的拐点 $(0,1),(\frac{2}{3},\frac{11}{27}).$

凹区间为 $(-\infty,0]$, $[2/3,+\infty)$. 凸区间为 $[0,2/3]$.

例2 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 $D:(-\infty,+\infty)$

当$x\neq 0$时, $y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$,

$x=0$是不可导点, y', y''均不存在.

在$(-\infty,0)$内, $y''>0$, 曲线在$(-\infty,0]$上是凹的;

在$(0,+\infty)$内, $y''<0$, 曲线在$[0,+\infty)$上是凸的.

$\therefore$ 点$(0,0)$是曲线 $y=\sqrt[3]{x}$的拐点.

4. 利用凹凸性证明不等式

注意 如果不等式能整理成

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}\left(\text{或}f\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$$

的形式，可用函数$f(t)$的凹(凸)性来证明.

补例 证明当$x \neq y$时，$\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$.　　#P150

证：设$f(t) = e^t$，$t \in R$，则

$$f'(t) = e^t,\ f''(t) = e^t > 0$$

因此$f(t)$在R上是凹的，从而由定义可知，

对于$\forall x, y \in R$，$x \neq y$，有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2} \Rightarrow e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

即当$x \neq y$时，$\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$.

小结

曲线的弯曲方向——凹凸性;

凹凸性的判定.

改变弯曲方向的点——拐点;

拐点的求法.

凹凸区间的求法.

作业

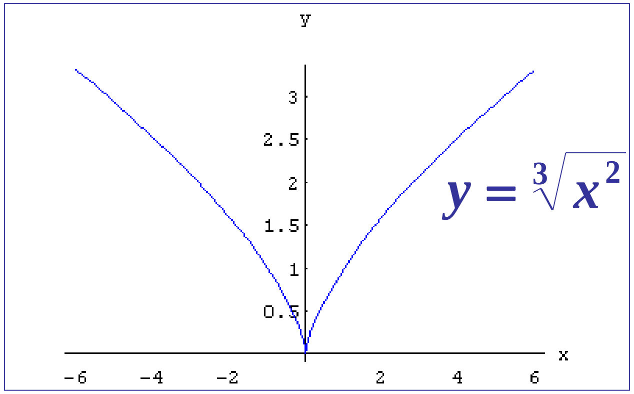
P150　1;3(2);5(4);

9(3);10(1);

13

-例2　确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解　$\because D:(-\infty,+\infty).$



$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad (x\neq 0)$$

当$x=0$时,导数不存在.

当$-\infty<x<0$时，$f'(x)<0$, $\therefore$在$(-\infty,0]$上单调减少;

当$0<x<+\infty$时，$f'(x)>0$, $\therefore$在$[0,+\infty)$上单调增加;