第十节　闭区间上连续函数的性质

一　最大值和最小值定理

定义: 设函数 $f(x)$在区间I上有定义,

如果有 $x_0 \in I$, 且对于$\forall\, x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在I上的最大值(最小值).

例如, $y = 1 + \sin x$, 在$[0, 2\pi]$上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$y = \operatorname{sgn} x$, 在$(-\infty, +\infty)$上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

在$(0, +\infty)$上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$.

思考:最大值与上界是否一样?

#P67

答:　不一样

最大值唯一，函数值可以取到

上界不唯一，函数值不一定能取到

当函数存在最大值时，最大值就是上确界.

定理1（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

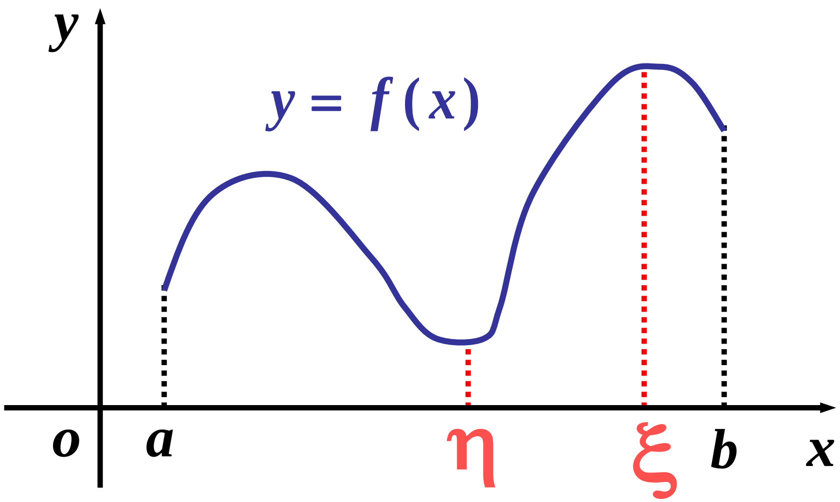
习惯用M表示最大值，m表示最小值.

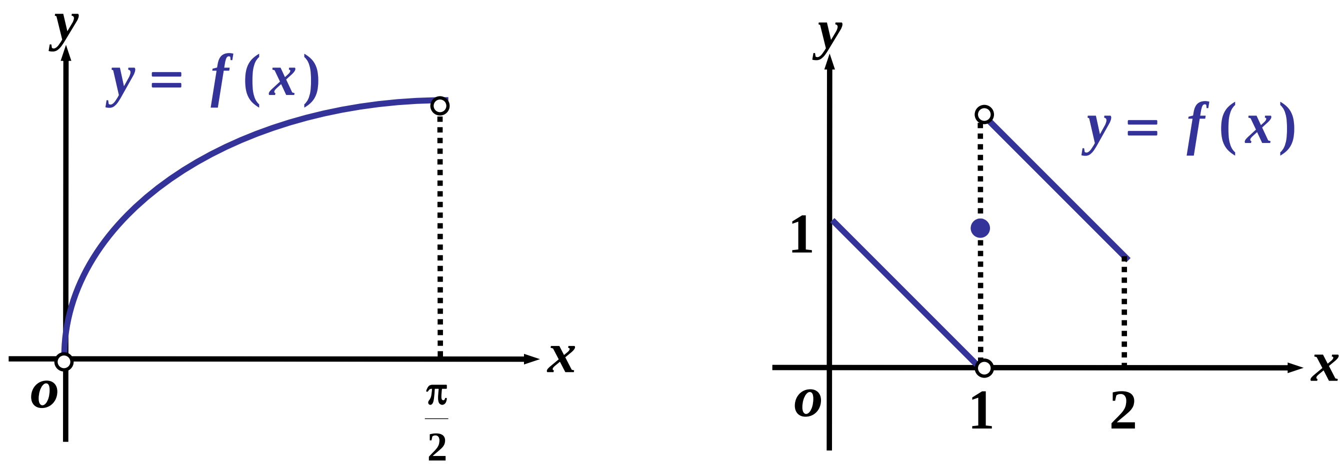
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi, \eta \in [a,b]$,

使得 $f(\xi) = m$,

$f(\eta) = M$.





注意: 1.若区间是开区间, 定理不一定成立;

2.若区间内有间断点, 定理不一定成立.

推论(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

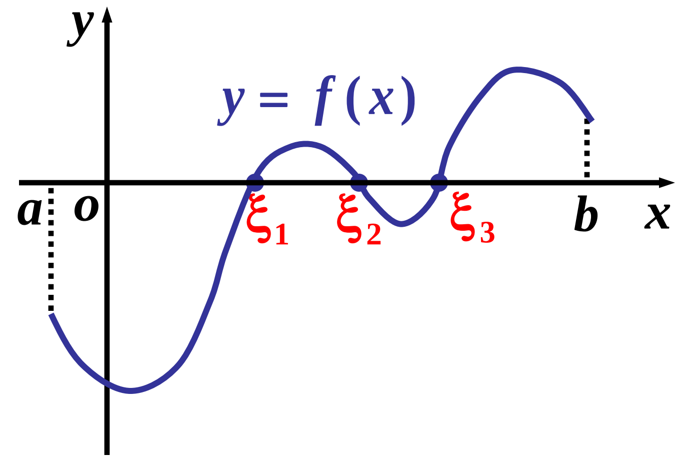
二、零点定理与介值定理

定义: 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$）, 那末至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

几何解释:

连续曲线弧 $y = f(x)$的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线弧与 x轴至少有一个交点.



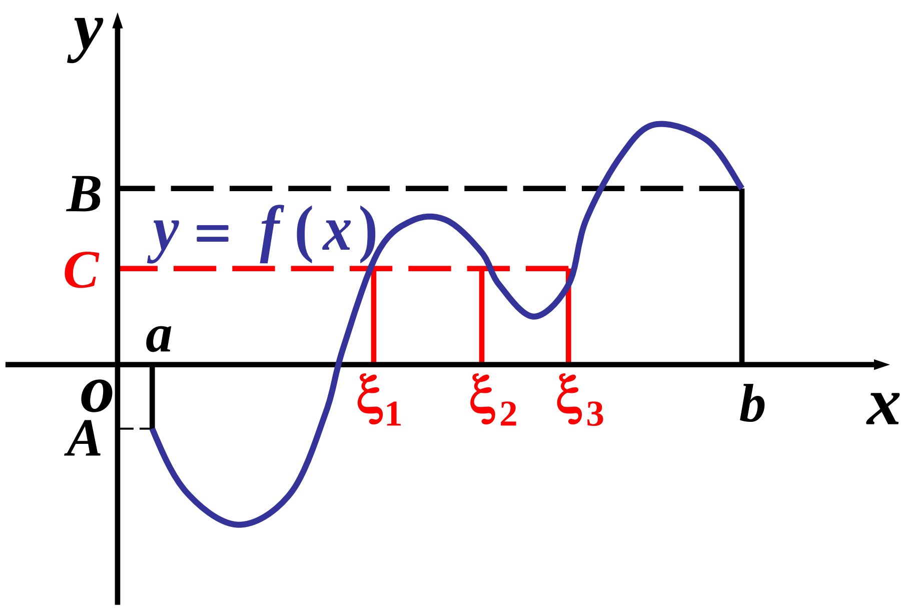
定理 3（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \text{ 及 } f(b) = B,$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = C$ $(a < \xi < b)$.

几何解释:

连续曲线弧 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = C$ 至少有一个交点 .



证略 设$F(x)=f(x)-C$,

则$F(x)$在$[a,b]$上连续,

且$F(a)=f(a)-C$

$$=A-C,$$

$F(b)=f(b)-C=B-C,$

由于C介于A,B之间,

$\therefore F(a)\cdot F(b)<0$, 由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$,使

$F(\xi)=0$, 即$F(\xi)=f(\xi)-C=0$, $\therefore f(\xi)=C$.

推论 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$ 上连续，那么，对于 M 与 m 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$ $(a<\xi<b)$.

应用举例

例 证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根.

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则$f(x)$在$[0,1]$上连续,

又 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\, \xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程$x^3-4x^2+1=0$在$(0,1)$内至少有一根ξ.

本题也可以改为:

证明至少有一点$\xi(0<\xi<1)$, 使得$\xi^3-4\xi^2+1=0$.

注

零点定理经常用于

(1) 证明方程$F(x)=0$在区间(a,b)内至少有一根.

(2) 证明至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使得$F(\xi)=0$.

只要证明函数$y=F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

且$F(a),F(b)$异号即可.

则根据零点定理，必存在$\xi\in(a,b)$,使得$F(\xi)=0$,

ξ就是方程$F(x)=0$的在开区间(a,b)内的一个根.

$\boxed{x^3 - 4x^2 + 1 = 0\text{在区间}(0,1)\text{内至少有一根.}}$

后话： 怎样进一步求出该根的近似值?

取 $[0,1]$ 的中点 $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} > 0$,

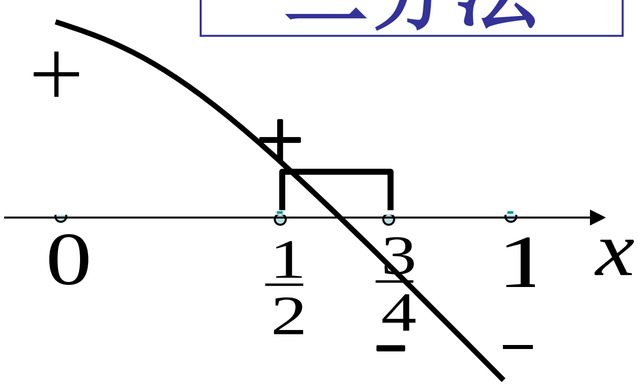
则 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内必有方程的根；

取 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的中点 $x = \frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4}) < 0$,

则 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 内必有方程的根；…

$\boxed{\text{二分法}}$

可用此法求近似根.



例3 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$,

则在$[x_1,x_n]$上必有ξ，使$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$

证：$[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$在 $[x_1,x_n]$上连续.

由最大值与最小值定理 必有m，M，使

$$m\le f(x)\le M，\ x\in[x_1,x_n]$$

则 $m=\dfrac{nm}{n}\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\le\dfrac{nM}{n}=M,$

记$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}=A,$

下面分情况讨论：

下面分情况讨论：

(1) $A=\mathrm{M}, f(x)\in C[a,b]$,由最大最小值定理,

则$\exists\xi\in[x_1,x_n]$, 使得 $f(\xi)=M$,

(2)$A=m$, $f(x)\in C[a,b]$,由最大最小值定理,

则$\exists\xi\in[x_1,x_n]$, 使得 $f(\xi)=m$

(3)$m<A<M$,由介值定理，$f(x)\in C[a,b]$,

则$\exists\xi\in(x_1,x_n)$, 使得 $f(\xi)=A$

综上，$\exists\xi\in[x_1,x_n]$，使得 $f(\xi)=A$，即

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

小结

四个定理

最值定理;有界性定理;零点定理;介值定理.

注意 1. 闭区间; 2. 连续函数.

这两点不满足, 上述定理不一定成立.

存在性证明题解题思路

1. **辅助函数法**:先作辅助函数$F(x)$,再利用零点定理;

2. **直接法**:先利用最值定理,再利用介值定理.

作业

P70　2; 5

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但$f(x)$在$(0,1)$内无零点.