第三章　　习题课

中值定理及导数的应用

一 基本要求

1、理解罗尔定理、拉格朗日中值定理，会用他们证明一些等式或不等式。

2、了解柯西中值定理及泰勒中值定理的条件和结论，会求简单函数的泰勒公式及麦克劳林公式。

3、熟练掌握洛必达法则，并利用它求未定式的极限。

4、理解函数单调性与导数正负号的关系，会判断函数的单调性。

5、掌握极值的概念和求法，掌握最大(小)值的求法。

6、了解函数图形的凹凸性与拐点的概念，并会判断曲线的凹凸性与拐点。

7、了解微分作图法。

二 要点提示

1、洛必达法则

若在自变量某一变化过程中($x \to x_0$ 或 $x \to \infty$)，

（1） $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为（$\dfrac{0}{0}$）或（$\dfrac{\infty}{\infty}$）型未定式；

（2） $f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $g'(x) \neq 0$；

（3） $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或 ∞；

则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

运用洛必达法则求未定式极限时应该注意下述两点：

(1)先检查法则的条件是否具备，特别要注意极限是否未定式，$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$是否存在或$\infty$。

(2)配合使用其它求极限的方法，例如，化简、分子(分母)有理化、先求出非零因式的极限，等价无穷小替代等，以使运算简便。

注：对于$(0\cdot\infty)$，$(\infty-\infty)$及$0^0, \infty^0, 1^\infty$型未定式，可通过变形转化为$(\dfrac{0}{0})$或$(\dfrac{\infty}{\infty})$型，再运用洛必达法则。

2、判定函数单调性的方法

- 若$f'(x) > 0$,$x \in (a,b)$ ，则 $y = f(x)$在 $[a,b]$ 上单调增加；
- 若$f'(x) < 0$,$x \in (a,b)$ ，则$y = f(x)$ 在$[a,b]$ 上单调减少。

3、判定曲线凹凸的方法

- 若$f''(x)>0$，$x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的；
- 若$f''(x)<0$，$x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的。

4、极值

可能极值点为：驻点和不可导点。

判定极值的方法：

(1)第一种充分条件：设x_0为可能极值点，考察x_0两侧导数$f'(x)$ 是否改变符号。

(2)第二种充分条件：若 $f''(x_0)\neq 0, f'(x_0)=0$ ，则

当时 $f''(x_0)<0$，$f(x)$在x_0 处取得极大值；

当时 $f''(x_0)>0$，$f(x)$在x_0 处取得极小值。

注：当 $f''(x_0)=0$ 时，方法失效。

5、拐点

- 连续曲线$y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点($x_0, f(x_0)$)。
- 可能的拐点为：使$f''(x_0)=0$和$f''(x)$不存在时曲线上相应的点($x, f(x)$)。
- 判定($x_0, f(x_0)$)是拐点的方法：考察 x_0左右两侧二阶导数$f''(x)$是否改变符号。

三　问题与思考

问题1、下面例题方法对吗？

（1）

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$不存在。

答：均为错误。

(1)不是未定式.事实上 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$ ，$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ 。

(2)应为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}\sin x}{1+\dfrac{1}{x}\sin x}=1$$

（ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$ ）

说明：洛必达法则不是万能的。

问题2、如果$f(x)$ 在 x_0取得极值，是否必有

$f'(x_0)=0$？

答：不一定。因为函数还可以在导数不存在的点取得极值。

问题3、利用导数证明不等式的常用方法有哪些？

(1)利用拉格朗日的中值定理。例 $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$

(2)利用函数的单调性,例:当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$

(3)利用函数的最大最小值。$\mathbf{2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)}$

(4)利用函数图形的凹凸性。

(5)利用泰勒公式(*)(同2)

四　典型题目

1、求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{\ln n}{n}$

2、设$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且

$f(0)=f'(0)=0$ ，试求

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

的导数？

3、证明：当 $x>0$ 时，$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.

4、试确定 a,b，使 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值为-2。

答案

1、$1; 0; \sqrt[3]{abc}, 0;$

2、$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}f''(0), x=0 \end{cases};$

4、$a=0, b=-3.$