第五节 积分表的使用

积分计算比导数计算灵活复杂, 为提高求积分的效率, 已把常用积分公式汇集成表, 以备查用. 如 P374附录IV .

积分表的结构: 按被积函数类型排列

积分表的使用: 1) 注意公式的条件

2) 注意简单变形的技巧

注: 很多不定积分也可通过 Mathematica , Maple 等数学软件的符号演算功能求得 .

例1. 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{5-4\cos x}$.

解: 这里 $a=5, b=-4$, 应使用 P381 公式105 .

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{5-4\cos x}$$

$$=\frac{2}{5+(-4)}\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{u}\right| + C$$

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解法1 令 $u = 2x$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}$$

(P376 公式 37)

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{u}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|} + C$$

例2. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解法2 令 $u=\sqrt{4x^2+9}$, 则 $u^2=4x^2+9,\ u\,\mathrm{d}u=4x\,\mathrm{d}\,x$

$$原式=\int\frac{4\ x\,\mathrm{d}x}{4\,x^2\sqrt{4x^2+9}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-3^2}$$ （P375 公式 21）

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{\sqrt{4x^2+9}+3}\right|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(\sqrt{4x^2+9}-3)^2}{|2\,x|^2}+C=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|}+C$$

例3. 求 $\displaystyle\int\frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}$.

解: 令 $x+1=2\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=2\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int\frac{2\tan t+3}{(4\tan^2 t+3)\,\cancel{2\sec t}}\cdot\cancel{2}\sec^{\cancel{2}} t\,\mathrm{d}t$$

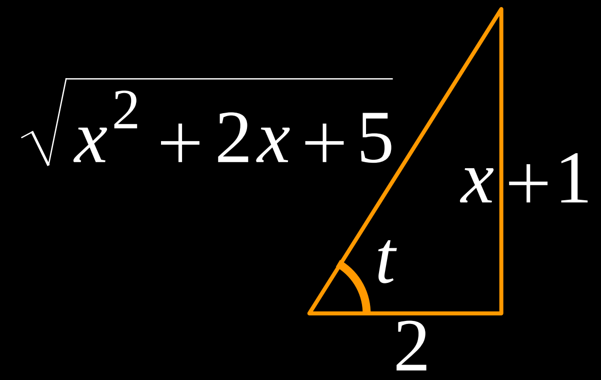
$$=\int\frac{2\sin t+3\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}$$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{4-\cos^2 t}+3\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+3}$$

$$=-2\boxed{\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{4-\cos^2 t}}+3\boxed{\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+3}}$$

(P375 公式21) (P375 公式19)



$$\boxed{x+1=2\tan t}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\cos t}{2+\cos t}\right|+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-1}{\sqrt{x^2+2x+5}+1}\right|+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3(x^2+2x+5)}}\right)+C$$