第三节　定积分的物理应用

变力沿直线所做的功

水压力

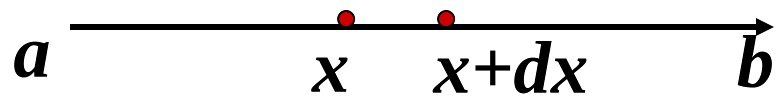
一、变力沿直线所作的功

由物理学知道，如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力F作用在这物体上，且这力的方向与物体的运动方向一致，那么，在物体移动了距离s时，力F对物体所作的功为$W = F \cdot s$.

如果物体在运动的过程中所受的力是变化的，就不能直接使用此公式，而采用"元素法"思想.

问题：

物体在变力$F(x)$的作用下，从x轴上a点移动到 b点，求变力所做的功.



用元素法

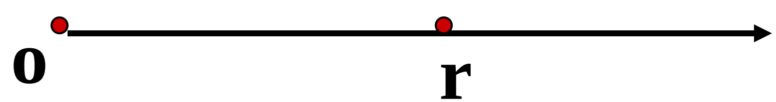
1）在$[a,b]$上考虑小区间$[x, x+dx]$，在此小区间上

$$dW=F(x)dx$$

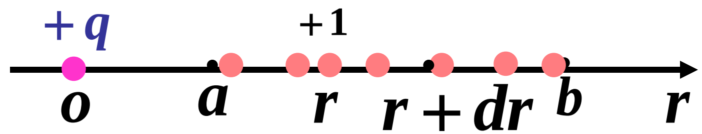
2）将dW从a到b求定积分，就得到所求的功

$$W=\int_a^b dW=\int_a^b F(x)dx$$

例 1　把一个带 $+q$ 电量的点电荷放在 r 轴上坐标原点处，它产生一个电场．这个电场对周围的电荷有作用力．由物理学知道，如果一个单位正电荷放在这个电场中距离原点为 r 的地方，那么电场对它的作用力的大小为 $F = k\dfrac{q}{r^2}$（k 是常数），当这个单位正电荷在电场中从 $r = a$ 处沿 r 轴移动到 $r=b$ 处时，计算电场力 F 对它所作的功．



解 取r为积分变量，



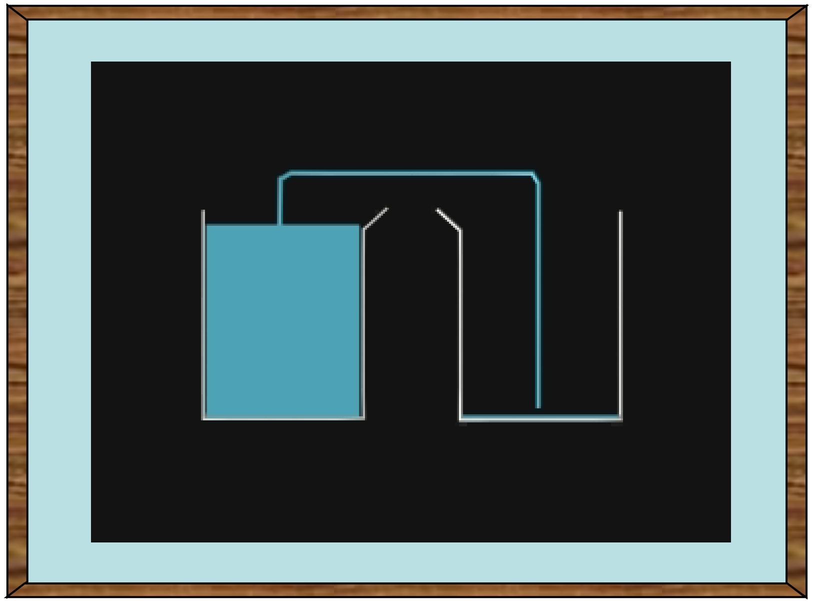
$r\in[a,b]$,

取任一小区间$[r,r+dr]$，功元素 $dW=\dfrac{kq}{r^2}dr$,

所求功为 $$W=\int_a^b \frac{kq}{r^2}dr$$

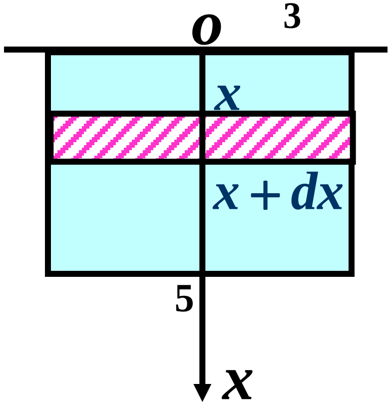
$$=kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

例 2 一圆柱形蓄水池高为 5 米，底半径为 3 米，池内盛满了水. 问要把池内的水全部吸出，需作多少功？



用积分元素法

解 建立坐标系如图

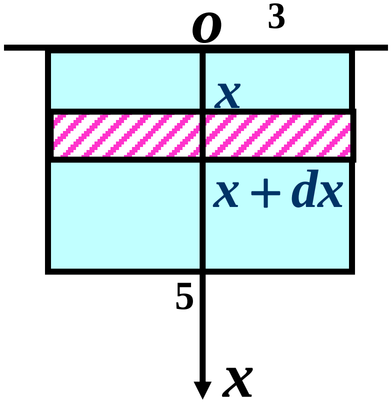


取 x 为积分变量，$x \in [0,5]$

取任一小区间 $[x, x+dx]$，

这一薄层水的重力为

$$\rho V g \quad = 9.8V = 9.8\pi \cdot 3^2 dx$$



功元素： $$dW = 88.2\pi \cdot dx \cdot x,$$

$$w = \int_0^5 88.2\pi \cdot x \cdot dx$$

$$= 88.2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 \approx 3462 \ (千焦).$$

–例3 用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入1厘米，若每次锤击所作的功相等，问第 n 次锤击时又将铁钉击入多少？

解 设木板对铁钉的阻力为 $f(x) = kx$,

第一次锤击时所作的功为 $w_1 = \int_0^1 f(x)dx = \frac{k}{2}$,

设n次击入的总深度为 h厘米

n次锤击所作的总功为 $w_h = \int_0^h f(x)dx.$

$$w_h = \int_0^h kx\,dx = \frac{kh^2}{2},$$

依题意知，每次锤击所作的功相等.

$$w_h = nw_1 \Rightarrow \frac{kh^2}{2} = n \cdot \frac{k}{2},$$

n次击入的总深度为 $h = \sqrt{n},$

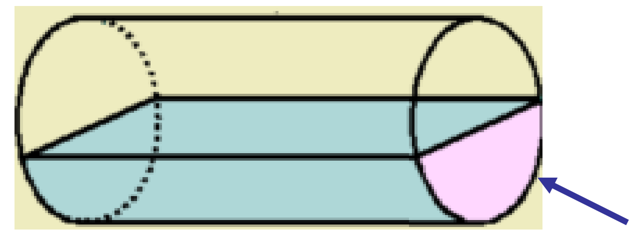
第n次击入的深度为 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$

二、水压力

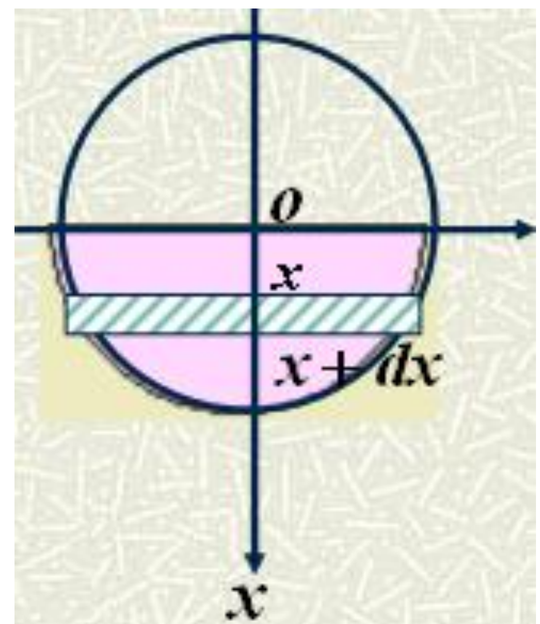
由物理学知道，在水深为$\boldsymbol{h}$处的压强为$\boldsymbol{p=\rho gh}$，这里$\boldsymbol{\rho}$是水的比重．如果有一面积为$\boldsymbol{A}$的平板水平地放置在水深为$\boldsymbol{h}$处，那么，平板一侧所受的水压力为$\boldsymbol{P=p\cdot A}$.

如果平板垂直放置在水中，由于水深不同的点处压强$\boldsymbol{p}$不相等，平板一侧所受的水压力就不能直接使用此公式，而采用“**元素法**”思想.

例5. 一个横放着的圆柱形水桶，内盛有半桶水，设桶的底半径为R，水的密度为ρ，计算桶的一端面上所受的压力.



解：在端面建立坐标系如图



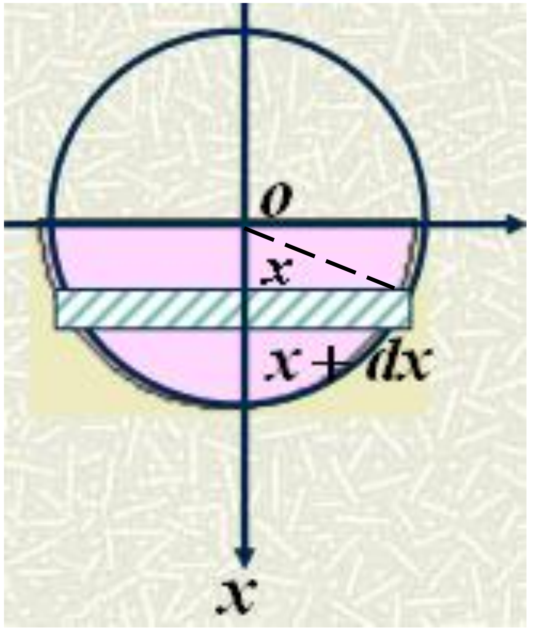
取x为积分变量，$x \in [0, R]$

取任一小区间$[x, x+dx]$

小矩形片上各处的压强近似相等$p = \rho g x$

$$p=\rho g x$$

小矩形片的面积为 $2\sqrt{R^2-x^2}dx$



小矩形片的压力元素为

$$dP=2\rho g x\sqrt{R^2-x^2}dx$$

端面上所受的压力

$$P=\int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2-x^2}dx$$

$$=-\rho g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}d(R^2-x^2)$$

$$=-\rho g[\frac{2}{3}(\sqrt{R^2-x^2})^3]_0^R=\frac{2}{3}\rho g R^3$$