第二节－第四节　一阶微分方程的解法。
第五节—第八节　高阶微分方程的解法。

求解微分方程时，主要是用积分的方法来求方程的通解的，大家在学习这部分内容时，要注意对一元函数积分方法的复习。

一阶微分方程

隐式： $F(x, y, y') = 0$

显式： $y' = f(x, y)$

第二节 可分离变量的微分方程

一、可分离变量的微分方程

二、典型例题

三、小结

一、可分离变量的微分方程

一般的，如果经过变换，一阶微分方程可以化为：

$$g(y)dy = f(x)dx \qquad (1)$$

则称原方程为**可分离变量的微分方程**.

如 $\dfrac{dy}{dx} = xy \qquad \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = xdx$

$$g(y)dy = f(x)dx \qquad (1)$$

解法 设 $y = \varphi(x)$ 是方程(1)的解, 则有恒等式

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \equiv f(x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $$\underbrace{\int g(y)\,\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有

$$G(y) = F(x) + C$$

其中设函数$G(y)$和$F(x)$是$g(y)$和$f(x)$的一个原函数, 则 $G(y) = F(x) + C$ 为微分方程的通解.

隐式通解

二、典型例题

例1 求解微分方程 $(y+1)^2 y' + x^3 = 0$ 的通解.

解 分离变量,得 $(y+1)^2 dy = -x^3 dx,$

两端积分,得 $\int (y+1)^2 dy = -\int x^3 dx,$

解得 $\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1$

即 $(y+1)^3 = -\frac{3}{4}x^4 + C$ (C 为任意常数)

$\therefore (y+1)^3 = -\frac{3}{4}x^4 + C$ 为所求通解.

求可分离变量方程的一般步骤

（1）将方程变换为可分离变量的形式

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

（2）方程两端积分

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）整理积分结果，可得原方程的解.

$$G(y) = F(x) + C$$

例2 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$的通解.

解: 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

绝对值号别丢了

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=Ce^{x^3}$ （ C 为任意常数 ）

思考 $(e^{x+y}-e^{x})dx+(e^{x+y}+e^{y})dy=0$

是否为可分离变量微分方程?

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{x+y}-e^{x}}{e^{x+y}+e^{y}}=-\frac{e^{x}(e^{y}-1)}{e^{y}(e^{x}+1)}=-\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)}\frac{(e^{y}-1)}{e^{y}}$$

注 在分离变量时，一般先整理出$\frac{dy}{dx}$.

在实际解题中，如果一阶微分方程可以化为

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

的形式，则方程为可分离变量的微分方程.

例 3 衰变问题:衰变速度与未衰变原子含量M成正比,已知$M\big|_{t=0}=M_0$,衰变系数为$\lambda>0$, 求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t变化的规律.

解 衰变速度$\dfrac{dM}{dt}$, 由题设条件

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M \qquad (\lambda>0\text{衰变系数}) \qquad \frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

$$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt,\quad \ln M=-\lambda t+C_1,\ \text{即}M=ce^{-\lambda t},(c=e^{c_1})$$

代入$M\big|_{t=0}=M_0$ 得 $M_0=ce^0=C$,

$$\therefore M=M_0e^{-\lambda t}$$

衰变规律

例4 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

解： 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$

$$\ln|y| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = C_1 \qquad \ln|y| + \ln\sqrt{x^2+1} = C_1$$

即 $y\sqrt{x^2+1} = \pm e^{C_1} = C$（ C 为任意常数 ）

由初始条件得 $C = -1$, 故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = -1$$

三、小结

分离变量法步骤:

1.分离变量;

2.两端积分-------隐式通解.

思考题

求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\cos\dfrac{x-y}{2}=\cos\dfrac{x+y}{2}.$

思考题解答

$$\frac{dy}{dx}+\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0,\qquad \int\frac{dy}{2\sin\frac{y}{2}}=-\int\sin\frac{x}{2}dx,$$

$$\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C,$$ 为所求解.

或为 $$\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C,$$

作业

P 308　1 (1) , (3) , (7) , (10);

2 (4) ;　6