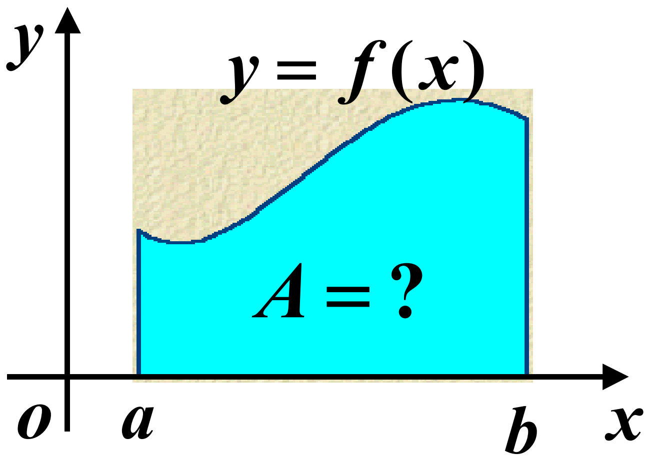
第一节 定积分的概念

- 问题的提出
- 定积分的定义
- 定积分的性质
- 小结

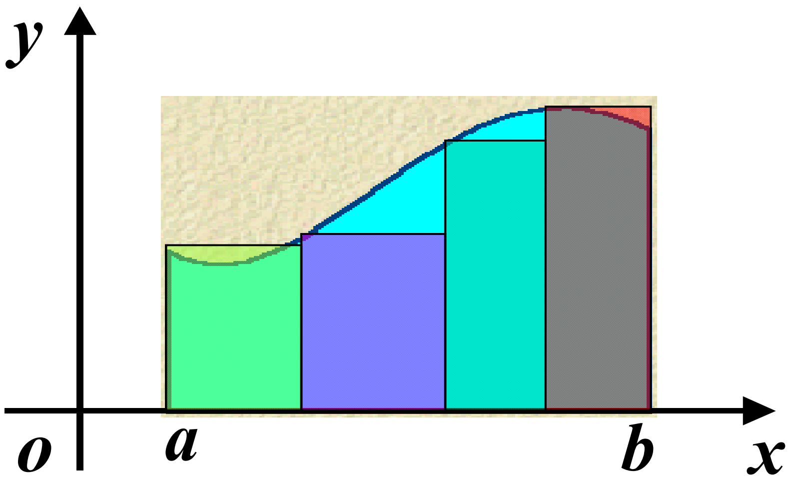
一、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积）

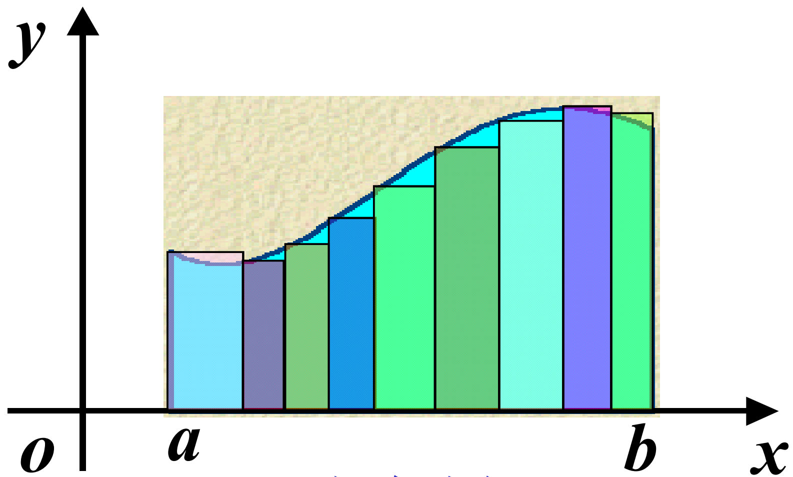
曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



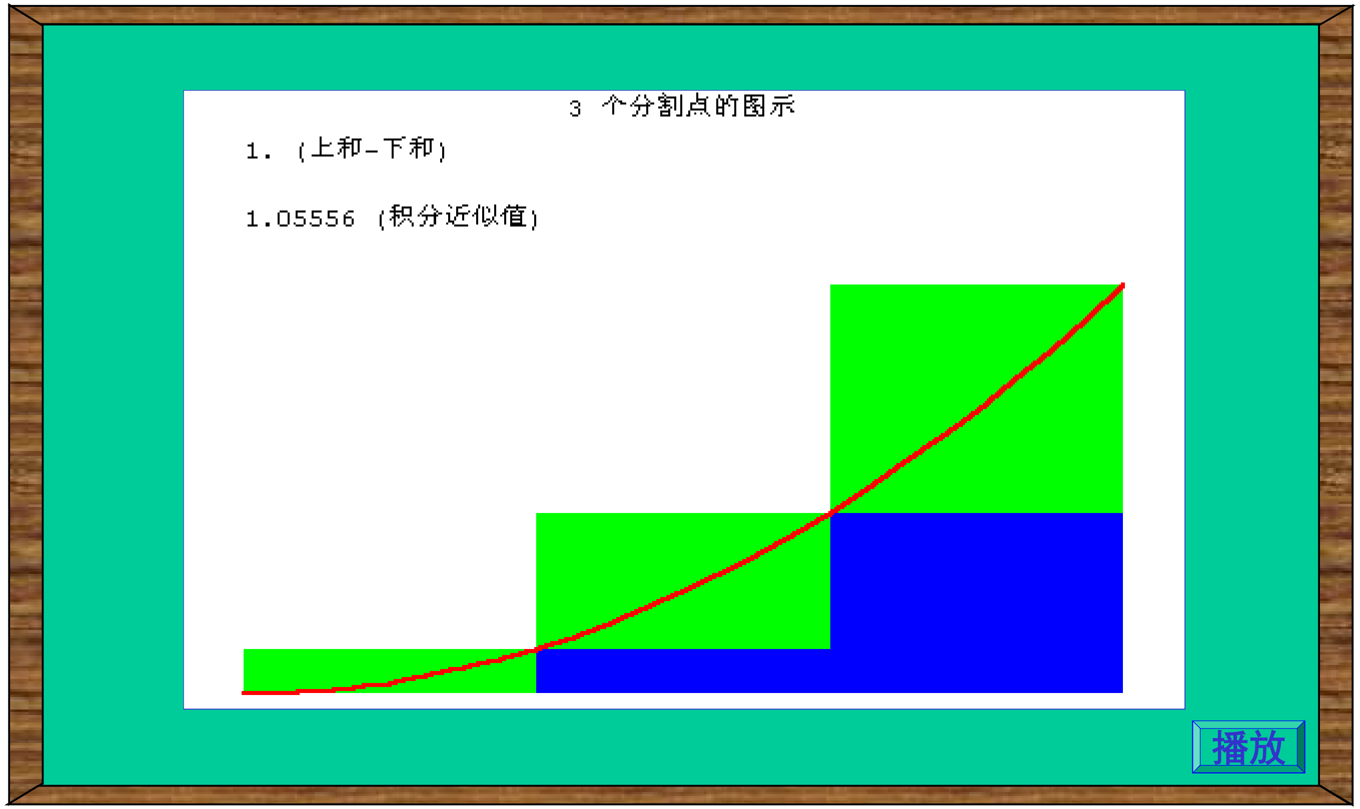
（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



(1)分割

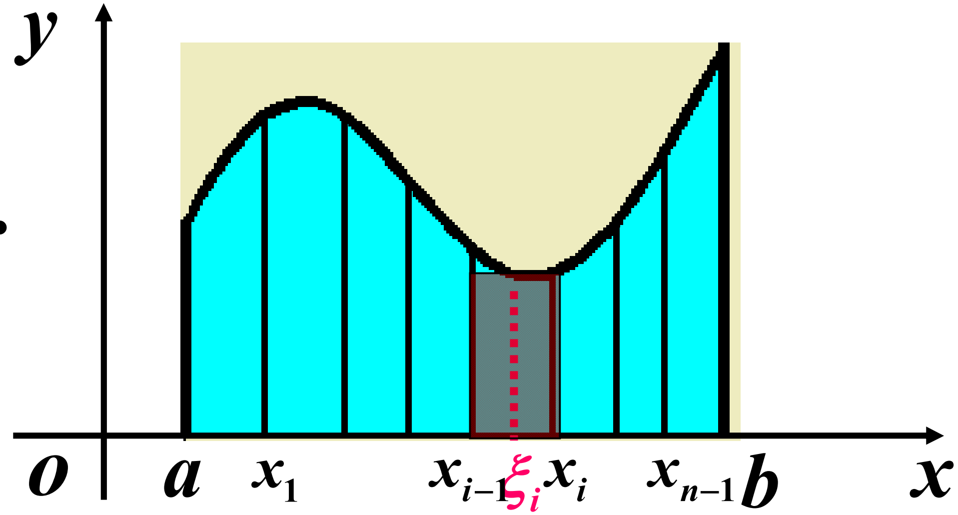
曲边梯形如图所示， 在区间 $[a,b]$ 内插入若干

个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间 $[a,b]$ 分成 n

个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$,

长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;



(2)近似

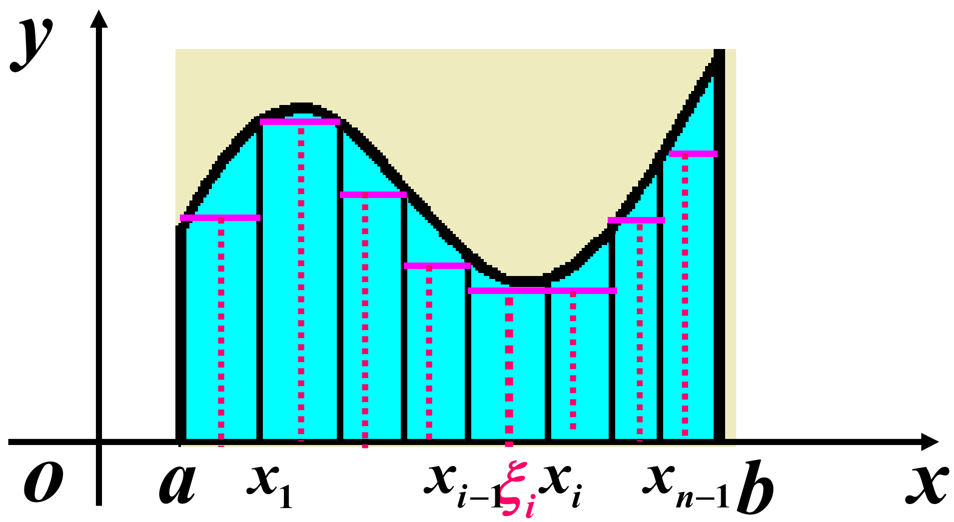
在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$

上任取一点 ξ_i,

以 $[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3)求和 $\boxed{A_i = f(\xi_i)\Delta x_i}$



曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4)取极限

当分割无限加细,

即小区间的最大长度

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$$

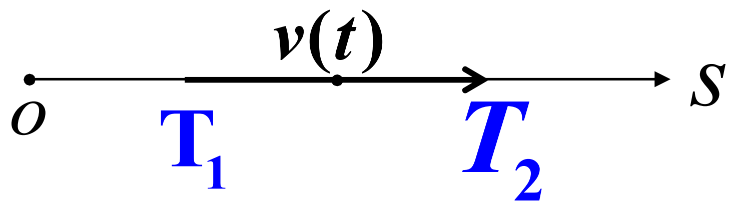
趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

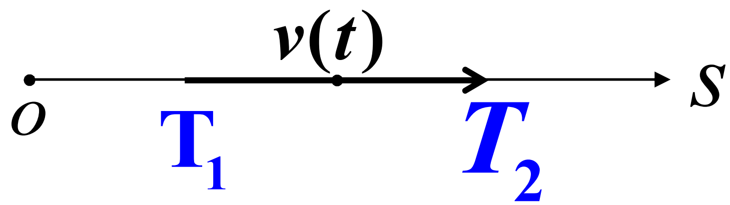
曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v = v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t) \geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

思路： 把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.





（1）分割　$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

（2）近似

$$\underbrace{\Delta s_i}_{\text{部分路程值}} \approx \underbrace{v(\tau_i)}_{\text{某时刻的速度}}\Delta t_i$$

（3）求和　$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）取极限　$\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值　$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

二、定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取一点$\xi_i$（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$

怎样的分法， 也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda \to 0$时，和S总趋于确定的极限I， 我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**， 记为

积分上限

积分和

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间

注意:

(1)定积分是一个确定的数值

积分值仅与被积函数及积分区间有关

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时,

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

注(3) 存在定理

定理1 当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续时，称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定理2 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定积分的几何意义

$f(x) > 0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$ 曲边梯形的面积

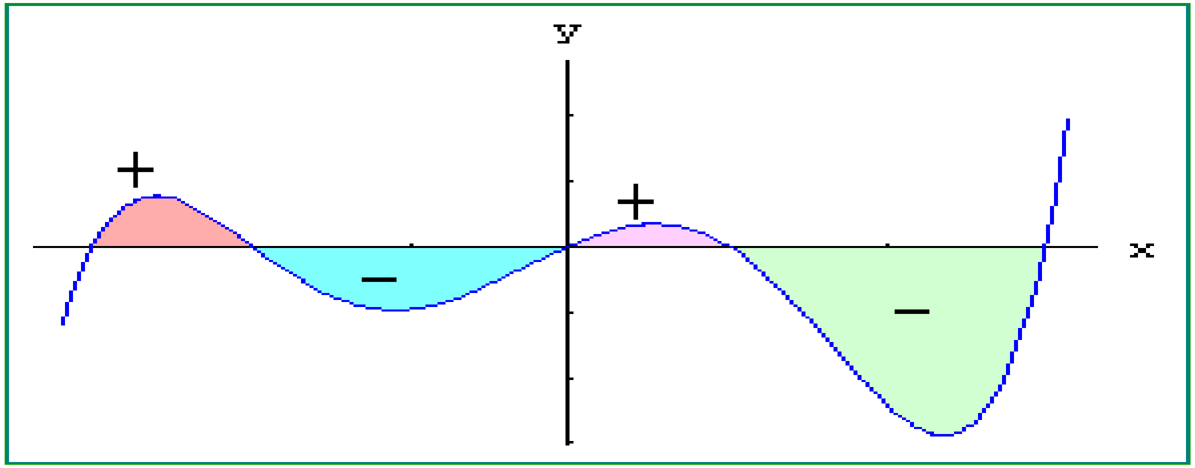
$f(x) < 0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$ 曲边梯形的面积的负值

注(4)

$\int_a^b f(x)dx$ **的几何意义：**

它是由 x 轴、两条直线 $x=a, x=b,$ 曲线 $y=f(x)$ 所围图形面积的代数和.

在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



例1 利用定积分的几何意义, 指出下列定积分的值：

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$$

$$\int_{a}^{b}\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx \quad (b>0)$$

例2　利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2dx$.

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

由于区间的分法任意，

对[0,1]区间n等分，

并取ξ_i为每个小区间的右端点，

则$\xi_i=\dfrac{i}{n}$

$P229$ 注1

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}$$

例3　将和式极限转成定积分：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

解 原式 $=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$

思考

将和式极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

表示成定积分.

思考题解答

原式

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \quad =\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underset{\xi_i}{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}\right)\cdot\underset{\Delta x_i}{\boxed{\frac{\pi}{n}}}
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx.
$$

思考题解答

原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \quad =\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx.$$

三、定积分的性质

对定积分的**补充规定**:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在.

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

证 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

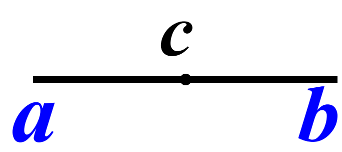
$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

性质1' $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k为常数).

性质2 假设$a < c < b$



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

（定积分对于积分区间具有可加性）

性质3 $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$

性质4 如果在区间$[a,b]$上$f(x) \geq 0$

（或$f(x) \leq 0$），

注意此性质要求$a < b$

则$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

（或$\int_a^b f(x)dx \leq 0$）

性质4的推论(1)：　　比较定理

（1）如果在区间$[a,b]$上$f(x)\le g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.　$(a<b)$

证　$\because\ f(x)\le g(x)$，　$\therefore\ f(x)-g(x)\le 0$，

$$\therefore\ \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \le 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \le 0,$$

于是 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

性质4的推论(2)：

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$ $\quad (a < b)$

证 $\because -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$$\therefore -\boxed{\int_a^b |f(x)|dx} \le \boxed{\int_a^b f(x)dx} \le \boxed{\int_a^b |f(x)|dx},$$

$$-a \le M \le a \Rightarrow |M| \le a$$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

性质 5 (估值定理)

若$f(x)$在$[a,b]$上可积，且$\forall x\in[a,b]$，均有

$$m\le f(x)\le M$$

则 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

证：

$\because\ m\le f(x)\le M$

(由性质5得)

$\therefore\ \int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

性质 6 (积分中值定理)

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in [a,b]$$

证： 因$f(x) \in C[a,b]$,

则$f(x)$在$[a,b]$上必有最小值m及最大值M,

即$\forall x \in [a,b]$，均有 $m \le f(x) \le M$

从而

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

$$m \le \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx} \le M,$$

$$\boxed{\mu}$$

则由连续函数的介值定理的推论，

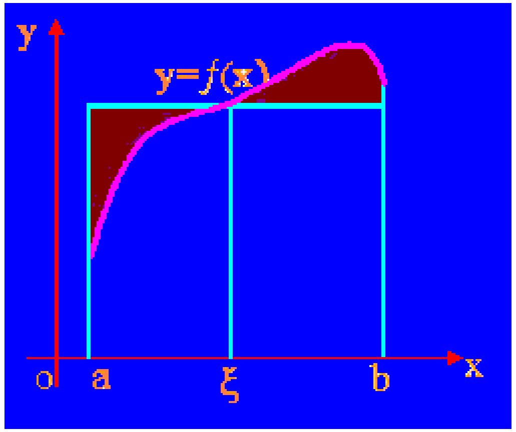
至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

即 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in [a,b]$

此性质的几何解释:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in [a,b]$$



区间$[a,b]$上方以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积,等于以区间$[a,b]$为底、以$f(\xi)$为高的这个矩形的面积.

注

曲边梯形的平均高度可以取到.

通常把$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$称为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

例 2 比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

注意:0 > -2 先考虑 $\int_{-2}^{0} e^x dx$ 和 $\int_{-2}^{0} x dx$

解 令 $f(x) = e^x - x,\quad x \in [-2, 0]$

$\because\ x < 0$时，显然$f(x) > 0$,

$$\therefore\ \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$$

$$\therefore\ \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

例3 估计积分$\int_{-1}^{2}\ln(1+x^2)dx$的值.

解: 令$f(x)=\ln(1+x^2)$,

考虑$f(x)$在区间$[-1,2]$上的最值.

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2},$$

由$f'(x)=0$, 有$x=0$

$$f(0)=0,\ f(-1)=\ln 2, f(2)=\ln 5 \quad \Rightarrow 0\le f(x)\le \ln 5$$

$$0\le \int_{-1}^{2} \ln(1+x^2)dx \le 3\ln 5$$

注 学会应用微分法来求函数的最大、最小值, 从而可利用估值定理估计定积分的值.

例 4 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$，

求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt$.

解 由积分中值定理知有 $\xi \in [x, x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt = \xi \sin \frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt = 2 \lim_{\xi \to +\infty} \xi \sin \frac{3}{\xi} f(\xi)$$

$$= 2 \lim_{\xi \to +\infty} 3 f(\xi) = 6.$$

四、小结

1．定积分的实质：特殊和式的极限.

2．定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

⇓ 取极限

取极限 → 精确值——定积分

3．定积分的性质

（注意估值性质、积分中值定理的应用）

4．典型问题

（１）估计积分值；

（２）不计算定积分比较积分大小.

作业

P236　4(3)(4);

10(1);(2);11

13(1);(4)