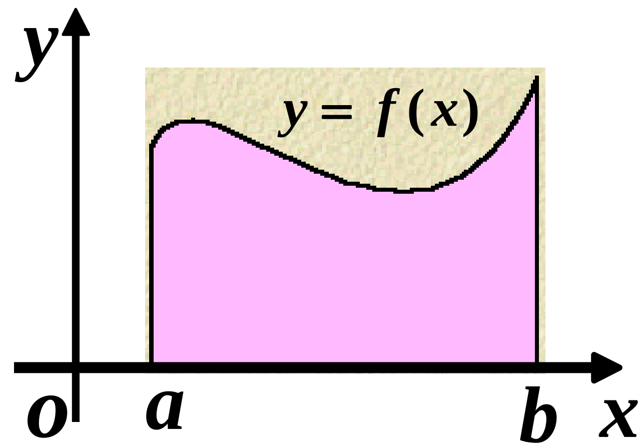
第一节 定积分的元素法

Q1:实际问题中，什么样的量可以用定积分来计算

Q2:如何把这个量转成定积分来计算—元素法

回顾 曲边梯形求面积的问题

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x 轴与两条直线 $x = a$、$x = b$ 所围成。



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

面积表示为定积分的步骤如下

（1）把区间$[a,b]$分成n个长度为Δx_i的小区间

相应的曲边梯形被分为n个小窄曲边梯形，第i

个小窄曲边梯形的面积为ΔA_i，则$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$.

（2）计算ΔA_i的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \xi_i \in \Delta x_i$$

（3） 求和，得A的近似值$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

（4）求极限，得A的精确值

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

所求量(面积A)与x的变化区间$[a,b]$有关，把$[a,b]$分成一系列部分区间，所求量相应的分成一系列的部分量，而且所求量等于部分量的和.也就是所求量对区间$[a,b]$具有可加性.

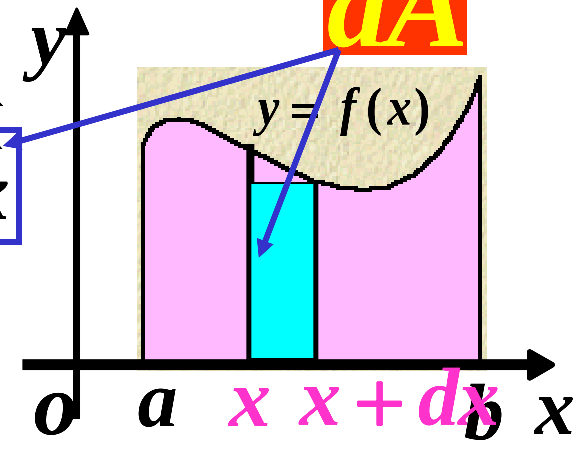
在上述求面积过程中，求部分量的近似值是一个关键步骤，部分量$\Delta A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$，

在实用上,省略下标i，取一个典型的小区间$[x, x+dx]$,

面积元素 dA

这个部分区间对应一个部分量

$$dA = \boxed{f(x)dx}$$



这时总面积$A = \int_a^b f(x)dx$

“元素法”

实际应用中

一、什么问题可以用定积分(元素法)解决 ？

二 、应用定积分解决问题的具体步骤是怎样的？(元素法)

当所求量U符合下列条件：

（1）U是与一个变量x的变化区间$[a,b]$有关的量；

（2）U对于区间$[a,b]$具有可加性，就是说，如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间，则U相应地分成许多部分量，而U等于所有部分量之和；

（3）部分量ΔU_i的近似值可表示为$f(\xi_i)\Delta x_i$；

就可以考虑用定积分来表达这个量U

元素法的一般步骤：

1）根据问题的具体情况，选取一个变量例如x为积分变量，并确定它的变化区间$[a,b]$；

2）设想把区间$[a,b]$分成n个小区间，取其中任一小区间并记为$[x, x+dx]$，求出相应于这小区间的部分量ΔU的近似值.如果ΔU能近似地表示为$[a,b]$上的一个连续函数在x处的值$f(x)$与dx的乘积，就把$f(x)dx$称为量U的元素且记作dU，即$dU = f(x)dx$；

3）以所求量U的元素$f(x)dx$为被积表达式，在区间$[a,b]$上作定积分，得$U=\int_a^b f(x)dx$，

即为所求量U的积分表达式.

这个方法通常叫做元素法.

应用方向：

平面图形的面积；体积；平面曲线的弧长；功；水压力；引力等.