第二节　函数的求导法则

- 和、差、积、商的求导法则
- 反函数的导数
- 基本初等函数的求导公式
- 复合函数的导数

一、和、差、积、商的求导法则

定理 如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

$$(1)\ [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

证.

(1) $[u(x)\pm v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)\pm v'(x).$$

证

(2) $[u(x)v(x)]'$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$\therefore\ f(x)$在x处可导.

注意:

1. $$[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)v'(x);$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

2.**分段函数**求导时，分界点处导数用定义求.

推论

(1) $[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$

(2) $[Cf(x)]' = Cf'(x);$

(3) $[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$

$+ f_1(x) f_2'(x) \cdots\cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x)$

例1 求 $y=\tan x$ 的导数 .

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例2 求 $y=\sec x$ 的导数 .

解 $y'=(\sec x)'=(\dfrac{1}{\cos x})'$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

二、反函数的导数

定理

如果函数 $x = f(y)$在某区间 I_y内单调、可导

且$f'(y) \neq 0$，那末它的反函数 $y = f^{-1}(x)$在对应区间

I_x内也可导，且有

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}.$$

即　反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

$$\boxed{y = f^{-1}(x) \qquad x = f(y)}$$

证 任取$x \in I_x$，给x以增量Δx $(\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x)$

由$y = f^{-1}(x)$的单调性可知 $\Delta y \neq 0,$

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}},$ $\because f^{-1}(x)$连续,

$\therefore \Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0),$ 又知 $f'(y) \neq 0$

$$\therefore [f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}$$

即 $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{f'(y)}.$

例1　求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$\because x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0,\qquad \therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

-例2 求函数 $y = \log_a x$ 的导数.

解 $\because x = a^y$在$I_y \in (-\infty, +\infty)$内单调、可导,

且 $(a^y)' = a^y \ln a \neq 0$, $\therefore$ 在$I_x \in (0, +\infty)$内有,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别地 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

三、复合函数的求导法则

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即 因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

证 由$y=f(u)$在点u_0可导，$\therefore f'(u_0)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

推广 设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x),$

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

关键：搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

例1　求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解　$\because y=\ln u, u=\sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

注意　求导最终结果不能含中间变量

熟练后，不引入中间变量，由外向内逐层求导.

例2 求函数 $y=(\cos x^2+1)^{10}$ 的导数 .

解 $$\frac{dy}{dx}=10(\cos x^2+1)^9\cdot(\cos x^2+1)'$$

$$=10(\cos x^2+1)^9\cdot(-\sin x^2)(x^2)'$$

$$=10(\cos x^2+1)^9\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x$$

$$=-20x(\cos x^2+1)^9\cdot\sin x^2$$

幂函数的导数 $y=x^{\mu}(x>0),\mu$是任意实数。

$$
\begin{aligned}
(x^{\mu})'_x &= (e^{\mu\ln x})' \\
&= e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)' \\
&= x^{\mu}\cdot\frac{\mu}{x} \\
&= \mu\cdot x^{\mu-1}.
\end{aligned}
$$

补例3 求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数.

$(a>0)$

解 $y'=(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})'$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}x(\sqrt{a^2-x^2})'+\frac{a^2}{2}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}x\frac{(a^2-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

补例4

$$y=\arctan\frac{a+x}{a-x}\text{，求}\frac{\mathrm{d}\,y}{dx}\ .$$

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(\frac{a+x}{a-x})^2}\ (\frac{a+x}{a-x})'$$

$$=\frac{(a-x)^2}{2(a^2+x^2)}\ \frac{(a+x)'(a-x)-(a+x)(a-x)'}{(a-x)^2}$$

$$=\frac{2a}{2(a^2+x^2)}$$

$$=\frac{a}{a^2+x^2}$$

四、初等函数的求导问题

1. 有限次四则运算的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu' \quad (C\text{为常数})$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

2. 复合函数求导法则

$$y = f(u),\ u = \varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

3. 初等函数 的导数仍为初等函数

补例5 #P91

设f的导数存在，求函数 $y=\dfrac{x}{f(x^2-4)}$的导数.

解

$$y'=\frac{(x)'f(x^2-4)-x[f(x^2-4)]'}{f^2(x^2-4)}$$

$$=\frac{f(x^2-4)-xf'(x^2-4)(x^2-4)'}{f^2(x^2-4)}$$

$$=\frac{f(x^2-4)-xf'(x^2-4)\cdot 2x}{f^2(x^2-4)}$$

$$=\frac{f(x^2-4)-2x^2f'(x^2-4)}{f^2(x^2-4)}$$

注意

$$f'(x^2-4) \neq [f(x^2-4)]'$$

设$u=x^2-4$

$y=f(u)$关于u的导数

是对中间变量求导.

先把x^2-4代入f，

得到一个新的函数，

再对x求导.

即对最终的自变量求导.

补例 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ e^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$，求$f'(x)$. #P91

解 当$x<0$时， $f'(x)=1,$

当$x>0$时， $f'(x)=e^{x},$

当$x=0$时，

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{(h+1)-e^{0}}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{e^{h}-1}{h}=1,$$

$$\therefore\ f'(0)=1.\quad \therefore\ f'(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 0 \\ e^{x}, & x>0 \end{cases}.$$

如何求分段函数的导函数？

（1）在可导的开区间内用求导公式分别求导

（2）在分段点处:

a. 不连续：必不可导，

b. 连续：根据导数的定义来确定该点的可导性.

五、小结

1.函数的四则运算求导法则

注意: $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)v'(x);$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

分段函数求导时,

分界点导数用左右导数或定义求.

2.反函数的求导法则（注意成立条件）；

3.复合函数的求导法则

（注意函数的复合过程,合理分解正确使用链导法）；

已能求导的函数:可分解成基本初等函数,或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

作业

P96

2 双数题; 6单数题

7双数题; 8 双数题

10(2);11(1)(6)(8)(9)

思考题

（1）若 $f(u)$ 在 u_0 不连续，$u=g(x)$ 在 x_0 连续，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处（　　　）.
（a）必连续；（b）必不连续；（c）不一定连续；

（2）若 $f(u)$ 在 u_0 不可导，$u=g(x)$ 在 x_0 可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处（　　　）.
（a）必可导；（b）必不可导；（c）不一定可导；

思考题解答

（1）正确的选择是（b）

根据复合函数求极限法则可得到.

(2)正确的选择是（c）

例 $f(u)=|u|$ 在 $u=0$处不可导,

取$u=g(x)=\sin x$ 在 $x=0$处可导,

$f[g(x)]=|\sin x|$ 在 $x=0$处不可导,

取 $u=g(x)=x^4$ 在 $x=0$处可导,

$f[g(x)]=|x^4|=x^4$ 在 $x=0$处可导,

备用题

1.设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$,求$f'(0)$.

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x(x-2)\cdots(x-n)$$
$$+x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$f'(0)=(-1)^n n!$$