第二节 不定积分的换元积分法

- 第一类换元法
- 第二类换元法
- 小结

凑微分练习

在下列等式左端的括号中填入适当的函数,使等式成立.

$$(1)\ \ d(\ )=\cos\omega t dt;\ \ (2)\ \ d(\ )=xdx.$$

解 $(1)\because d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt,$

$$\therefore \cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)\ =d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

$$\therefore d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C)=\cos\omega t dt.$$

(2) fi· $d(x^2)=2xdx,$

$$\therefore\ xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$$

$$\therefore d(\frac{1}{2}x^2+C)=xdx.$$

一、第一类换元法

问题 $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C,$ ？

解决方法 利用复合函数，设置中间变量.

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos t dt \quad 令\ t = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

在一般情况下：

如果$\int g(x)dx$ 可化为$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$

则可令$u=\varphi(x)$,

$$=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \quad =\int f(u)du$$

$$=F(u)+C$$

$$=F[\varphi(x)]+C$$

第一类换元公式（凑微分法）

这种方法的实质是当被积函数为复合函数时可采用恒等变形将原来的微分dx凑成新的微分$d\varphi(x)$，使原积分变成一个可直接用积分公式来计算.

说明 使用此换元法的关键在于将

$$\int g(x)dx \text{ 化为} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

例1　求$\int \sin 2x dx$.

解（一）$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x (2x)' dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)$$

令$t = 2x$ $= \frac{1}{2}\int \sin t dt$

$= -\frac{1}{2}\cos t + C$ $= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$;

解（二）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$$= 2\int \sin x d(\sin x) = (\sin x)^2 + C;$$

换元的方式并不唯一

例2 求$\int \frac{1}{3+2x}dx.$

解 $$\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)',$$

$$\int \frac{1}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)'dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d(3+2x)$$

$$\overset{u=3+2x}{=}\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$$

一般地 $$\boxed{\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\left[\int f(u)du\right]_{u=ax+b}}$$

练习 求$\int \sqrt{3+2x}dx$.

解 $\int \sqrt{3+2x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \sqrt{3+2x}\cdot(3+2x)'dx=\frac{1}{2}\int \sqrt{3+2x}d(3+2x)$$

$$\overset{u=3+2x}{=}\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du=\frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}+C$$

例3 求$\displaystyle\int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解 $\because \left(x+\dfrac{1}{x}\right)' = 1-\dfrac{1}{x^2},$

$$\therefore \int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int e^{x+\frac{1}{x}}(x+\frac{1}{x})'dx$$

$u = x + \dfrac{1}{x}$

$$= \int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x}) \boxed{= \int e^u du = e^u + C}$$

$$= e^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

思考 求 $\int \frac{1}{x\ln x}dx$.

解 $\int \frac{1}{x\ln x}dx \quad = \int \frac{1}{\ln x}d(\ln x)$

$u = \ln x$

$= \int \frac{1}{u}du \quad = \ln|u| + C$

$= \ln|\ln x| + C$.

例4 求$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$

$u = 1+2\ln x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \quad = \frac{1}{2}\ln|u|+C$

$= \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$

一般地

$$\boxed{\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\ln x}}$$

例5 求$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx.$

例6 求$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$

例7 求 $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

例5 求$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例6 求$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}d\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

思考 求 $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-8x+25}dx.$

例7 求 $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

解：原式 $=\frac{1}{2a}\int(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})dx$

$$=\frac{1}{2a}[\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}]$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$$

例8 求$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx$.

解 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

$$= \int [\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}]dx = \int \frac{1}{(1+x)^2}dx - \int \frac{1}{(1+x)^3}dx$$

$$== \int \frac{1}{(1+x)^2}d(1+x) - \int \frac{1}{(1+x)^3}d(1+x)$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C_2$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.$$

例9　求　$\int \csc x dx.$

解法一　$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$$= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x} d(\cos x) \qquad \boxed{u = \cos x}$$

$$= -\int \frac{1}{1-u^2} du = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

解法二 $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx$

$$= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

注： $\tan\frac{x}{2}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}$

$$=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x$$

类似地可推出

$$\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

小结

第一类换元法的实质是凑微分，将原来的微分 dx 凑成新的微分 $d\varphi(x)$，使原积分变成一个可利用积分公式来计算的不定积分.

在凑微分之前，有时需要对被积函数进行变形，常用的方法有：有理化、加减项、三角公式变换等.

二、第二类换元法

问题 $\int \sqrt{1-x^2}dx = ?$

解决方法 改变中间变量的设置方法.

过程 令 $x = \sin t \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow dx = \cos t dt,$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \quad \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt \quad = \cdots\cdots$$

（应用“三角公式”即可求出结果）

换元目标

$$\int f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \;=F(t)+c$$

难　　　　易

$$\overset{t=\varphi^{-1}(x)}{=} F[\varphi^{-1}(x)]+c\;.$$

注意 换元的条件是什么?

$x=\varphi(t)$是单调、可导函数

使用注意

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

代换 $x=\varphi(t)$，一起换

代回原变量

第二类积分换元公式

例1 求 $\int\sqrt{4-x^2}dx.$

解 令 $x=2\sin t$ $dx=2\cos tdt$ $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

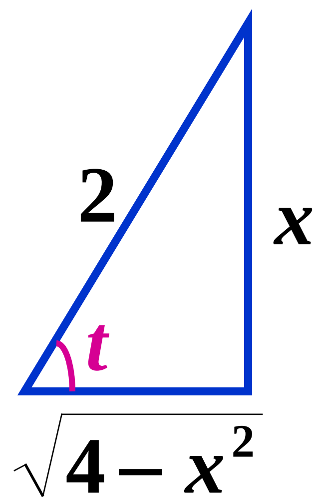
$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt$$

$$=4\int\cos^2 tdt=2\int(1+\cos 2t)dt$$

$x=2\sin t$

$$=2t+\sin 2t+C$$

$$=2t+2\sin t\cos t+C$$



$$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C.$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

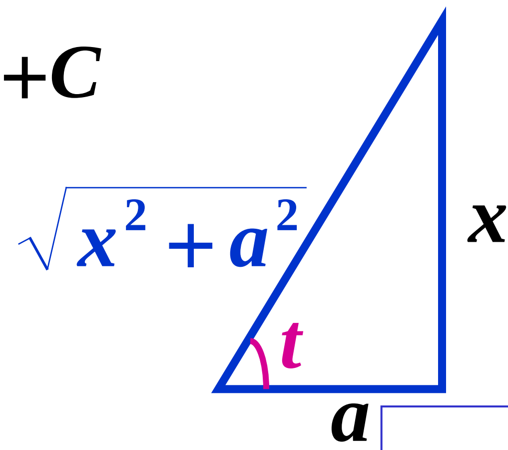
例2 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0).$

解 令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t\,dt \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\,dt$$

$$= \int \sec t\,dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$$



$$\boxed{\tan t = \frac{x}{a}}$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C_1,\ C_1 = C - \ln a$$

例3　求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0).$

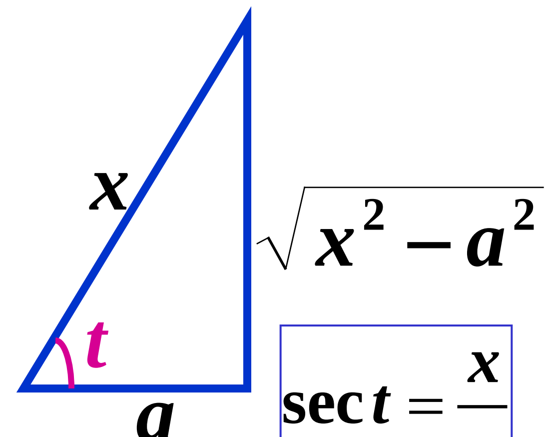
解　当$x>a$时

令$x = a\sec t \quad dx = a\sec t\cdot\tan t dt \quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t dt}{a\tan t}$$

$$= \int \sec t dt = \ln(\sec t + \tan t) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C.$$



$$= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) - \ln a + C$$

$\boxed{\sec t = \frac{x}{a}}$

$\boxed{\cos t = \frac{a}{x}}$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C_1, \quad C_1 = C - \ln a$$

当$x<-a$时

$x>a$时，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1$$

令$u=-x$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}du$$

$$=-\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C$$

$$=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C=\ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}+C.$$

$$=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_1,\quad C_1=C-2\ln a$$

合并得$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

说明(1) 以上几例所使用的均为三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec t$.

最后回代时，画直角三角形来确定各个三角函数的值.

补例 求$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ （三角代换很繁琐）

解 令$t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2=1+x^2$, $\underline{tdt = xdx}$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}xdx$$

$$= \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t} tdt = \int \left(t^4-2t^2+1\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2} + C.$$

说明（2）以上例子所使用的代换为**根式代换.**

被积函数含有$\sqrt[n]{ax+b}$$(a\neq 0$，$n$为正整数)的因子时，时，可令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$，化简函数后再积分.

在既可以用三角代换，又可以用根式代换的情况下，需根据被积函数的情况来定.

补例 求$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解 令 $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt = \int \frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \cdots\cdots$$

说明(3) 当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x = t^n$（其中 n为各根指数的最小公倍数）

补例 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx$

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx=\int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

说明(4) 当分母的阶较高时, 可采用**倒代换** $x=\frac{1}{t}.$

基本积分表

(16) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

(17) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

(18) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(19) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(20) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

$$\text{(21)}\quad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$

$$\text{(22)}\quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\text{(23)}\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

$$\text{(24)}\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

例8　求 $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}dx$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$$

由公式(23)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})+C.$$

三、小结

两类积分换元法：

$$\begin{cases}（一）\text{凑微分} \\ （二）\text{三角代换、倒代换、根式代换}\end{cases}$$

基本积分表(2)

作业

P207　　1(5);(12);(14)

2(4);(7);(9);(11);(20);

2(22);(23);(25);(28);(32);(33)

2(36);(37);(38);(40);

思考题

求积分 $\int (x\ln x)^{p}(\ln x+1)dx$.

思考题解答

$$\because d(x\ln x) = (1+\ln x)dx$$

$$\therefore \int (x\ln x)^p (\ln x+1)dx = \int (x\ln x)^p d(x\ln x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x\ln x)^{p+1}}{p+1} + C, & p \neq -1 \\ \ln\left|x\ln x\right| + C, & p = -1 \end{cases}$$

第一类换元法例题补充

例9　求$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$

解　$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= x - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

例10 求$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx$.

原式$=\int \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)}dx$

$$=\frac{1}{4}\int \sqrt{2x+3}dx-\frac{1}{4}\int \sqrt{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sqrt{2x+3}d(2x+3)-\frac{1}{8}\int \sqrt{2x-1}d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3-\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+C.$$

思考 求 $\int \cos^2 xdx = ?$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \ldots$$

$$\int \cos^3 xdx = ?$$

$$= \int \cos^2 xd\sin x$$

$$= \int (1-\sin^2 x)d\sin x$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int \cos^4 xdx = ?$$

求 $\int \cos^4 x dx$.

解
$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$
$$= \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$$
$$= \frac{1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2})$$

$$\int \cos^4 x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2})dx$$

$$= \frac{1}{4}[\int \frac{3}{2}dx + 2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx]$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

类似可求$\int \sin^2 x dx, \int \sin^3 x dx, \int \sin^4 x dx, \ldots$

例12 求$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

例13 求$\int \cos 3x \cos 2x dx$.

例12 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

说明 当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

思考 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$.

例13 求$\int \cos 3x \cos 2x dx$.

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$,

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

第二类换元法例题补充

例 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1), \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$$

补例．求$\int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}dx$

解 令$\sqrt{1+x}=t \Rightarrow x=t^2-1 \Rightarrow dx=2tdt$

$$原式=\int \frac{t}{1+t}2tdt=\int \frac{2t^2}{1+t}dt=2\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt$$

$$=2\int [(t-1)+\frac{1}{1+t}]dt=(t-1)^2+\ln(1+t)+C$$

$$=(\sqrt{1+x}-1)^2+\ln(1+\sqrt{1+x})+C$$

例 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dx$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2 \qquad u=t^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du = \frac{1}{2}\int \frac{1-1-u}{\sqrt{1+u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u} \right) d(1+u)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+u}\right)^3 + \sqrt{1+u} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

综合题

例15 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 求 $f(x)$.

解 $f'(\sin^2 x) = 1 - \sin^2 x,$

令 $u = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - u,$

$f'(u) = 1 - u,$

$f(u) = \int (1-u) du = u - \frac{1}{2}u^2 + C,$

$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$