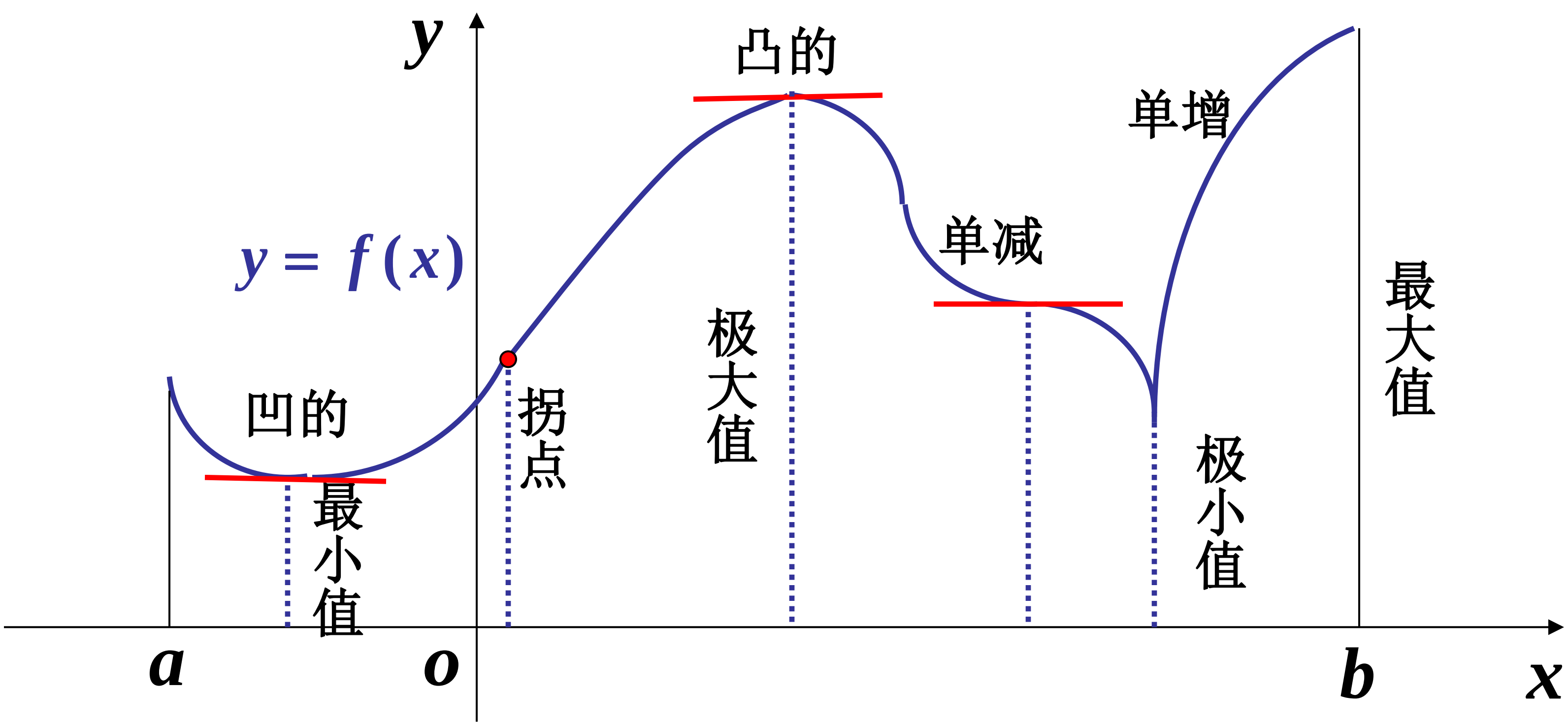
第六节 函数图形的描绘

函数图形的描绘综合运用函数性态的研究,是导数应用的综合考察.



例如，作函数 $f(x)=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

定义域、单调性、凹凸性

其他形态？

1　渐近线

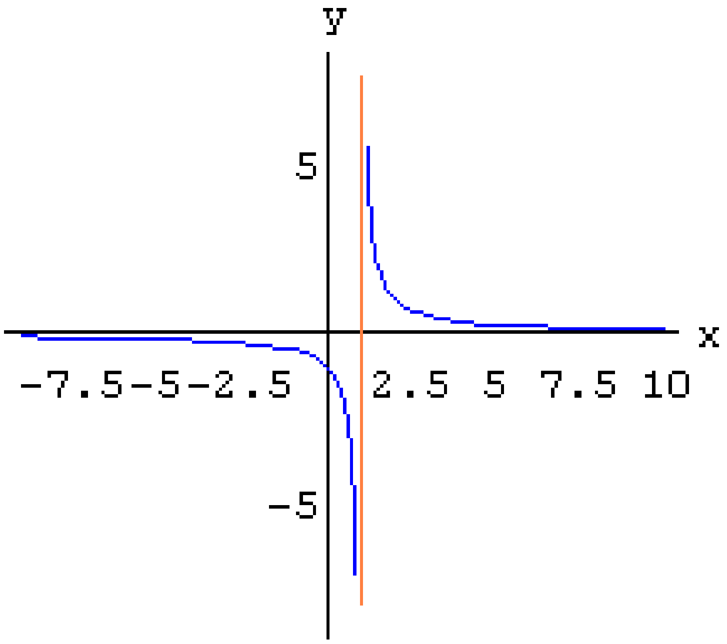
定义：当曲线 $y = f(x)$ 上的一动点 P 沿着曲线移向无穷点时，如果点 P 到某定直线 L 的距离趋向于零，那么直线 L 就称为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线.

铅直渐近线　(垂直于 x 轴的渐近线)

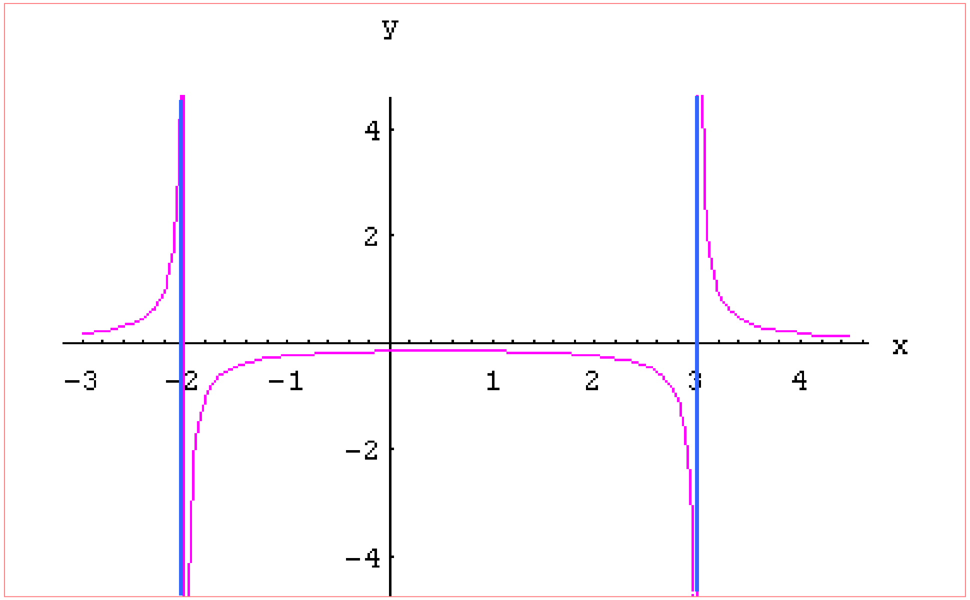
如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$

那么 $x = x_0$ 就是 $y = f(x)$ 的一条铅直渐近线.

例如 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty.$



再如 $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$,



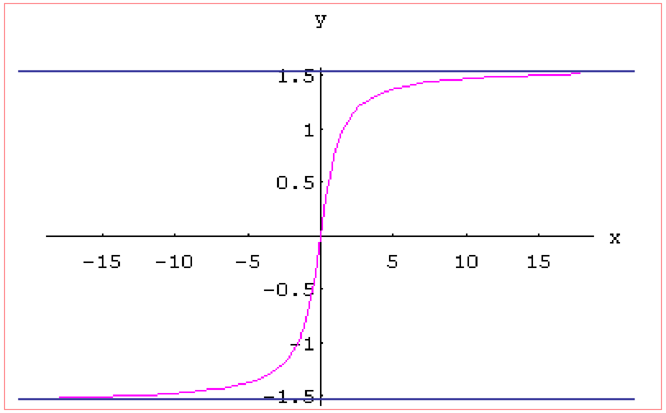
有两条铅直渐近线：$x=-2$, $x=3$.

水平渐近线 (平行于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ (b 为常数)

那么 $y = b$ 就是 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如 $y = \arctan x$,



有两条水平渐近线：$y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = -\dfrac{\pi}{2}$.

2 图形描绘的步骤

利用函数特性描绘函数图形.

$\boxed{\text{第一步}}$ 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域,利用函数奇偶性、周期性缩小范围;

$\boxed{\text{第二步}}$ 确定特殊点：使 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 及导数不存在的点，没有定义的点.

第三步 用特殊点将函数的定义域划分成几个部分区间,列成表格. 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性、极值和函数的凹凸性和拐点。

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势;

第五步 描出与方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形.

3 作图举例

例1 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解 $D: x\neq 0,$ 非奇非偶函数,且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\qquad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0,$ 得驻点 $x=-2,$

令 $f''(x)=0,$ 得特殊点 $x=-3.$

得三个特殊点 $x=-3,$ $x=-2,$ $x=0.$

作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\qquad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $\left(-3,-\frac{26}{9}\right)$		极小值 -3		间断点	

$$f(x)=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极小值 -3		间断点	

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$ 得水平渐近线 $y=-2$;

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=+\infty,$$

得铅直渐近线 $x=0$.

$$f(x)=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$$

水平渐近线 $y=-2$;
铅直渐近线 $x=0$.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	↘	拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$	↘	极小值 -3	↗	间断点	↘

补充点:

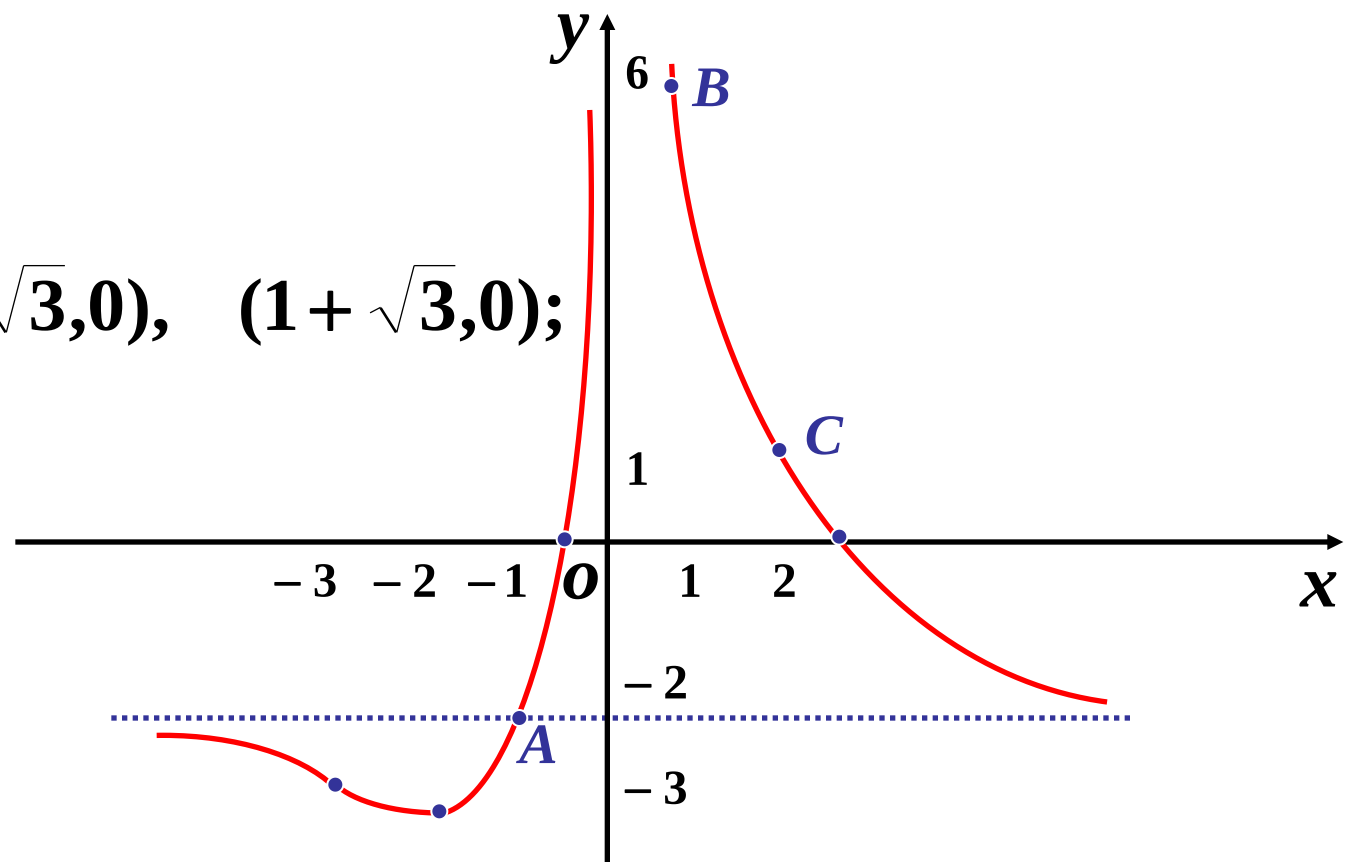
$A(-1,-2)$,

与y轴交点 $(1-\sqrt{3},0)$, $(1+\sqrt{3},0)$;

$B(1,6)$,

$C(2,1)$.

作图



作业

P167　1

–例2 作函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解　$D:(-\infty,+\infty)$,

偶函数, 图形关于y轴对称.

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \varphi''(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

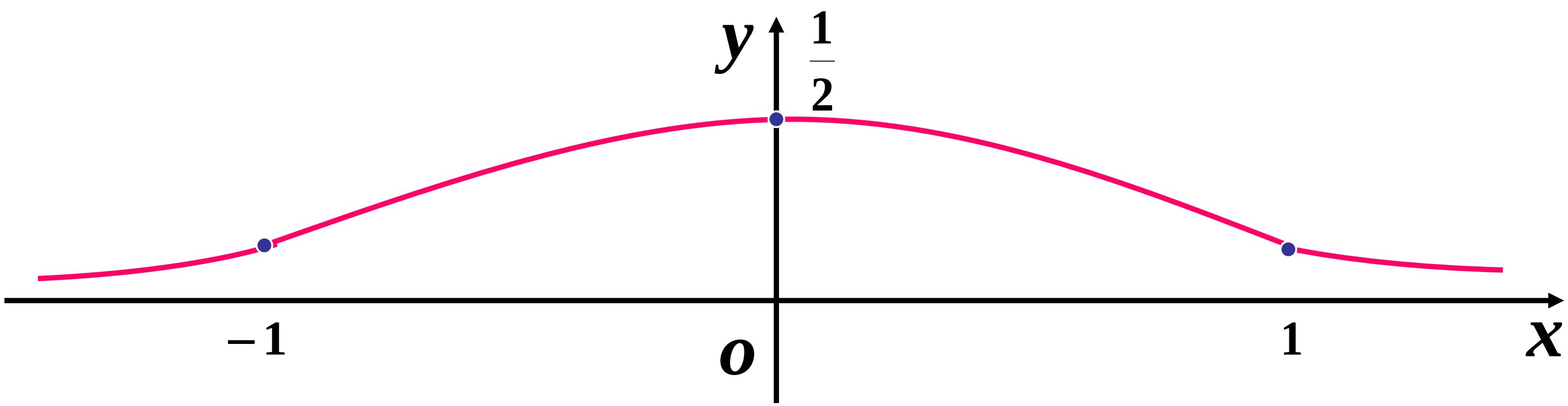
令 $\varphi'(x)=0$,　　得驻点 $x=0$,

令 $\varphi''(x)=0$,　　得特殊点 $x=-1,\ x=1$.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$, 得水平渐近线 $y=0$.

列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		拐点 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$		极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	



例3 作函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解　$D:(-\infty,+\infty)$, 无奇偶性及周期性.

$f'(x)=(3x+1)(x-1)$, $f''(x)=2(3x-1)$.

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=-\dfrac{1}{3}$, $x=1$.

令 $f''(x)=0$, 得特殊点 $x=\dfrac{1}{3}$.

列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$		极大值 $\frac{32}{27}$		拐点 $(\frac{1}{3},\frac{16}{27})$		极小值 0	

补充点：$A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(\frac{3}{2},\frac{5}{8})$.