第三节 分部积分法

——利用两函数乘积求导法则得到的积分方法

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数,

$$(uv)'=u'v+uv',$$

$$uv'=(uv)'-u'v,$$

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx,$$

$$\int udv=uv-\int vdu.$$ 分部积分公式

难

易

应用一：两类基本初等函数乘积的不定积分

如 $\int x\cos x dx = ?$ $\int xe^{x}dx = ?$

$\int x\ln x dx = ?$ $\int x\arcsin x dx = ?$

这类积分在具体计算过程中，如何正确地选定u和v显得非常重要.

一般按 "反对幂指三， 后者先凑入"的原则确定u和v .

例1　求积分$\int x\cos x dx$.

解　$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx$

$= x\sin x + \cos x + C$.

解（二）　$\int x\cos x dx = \int \cos x d\frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2} d\cos x$

$= \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx$

显然，u, v' 选择不当，积分更难进行.

例2（练习） 求积分 $\int x^2 e^x dx.$

解 $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x$

$= x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$

（再次使用分部积分法）

$= x^2 e^x - 2\int xde^x$

$= x^2 e^x - 2[xe^x - \int e^x dx]$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$

例3　求积分 $\int e^x \sin x dx$.

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = -\int e^x d\cos x = -e^x \cos x + \int \cos x de^x$

$= -e^x \cos x + \int \cos x de^x$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad = -e^x \cos x + \int e^x d\sin x$

$= -e^x \cos x + (e^x \sin x - \int \sin x de^x)$

$= e^x(\sin x - \cos x) \boxed{-\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

注意：此类积分通过产生循环形式的等式求得不定积分.

应该指出：对于被积函数是指数函数与三角函数乘积的不定积分，既可选择先将三角函数凑微分，也可选择先将指数函数凑微分，一般要通过产生出现循环方程以计算积分结果.

实际计算时可灵活处理.

如 $\int e^x \cos 2x dx$

应用二：单个函数的积分

补例4 求 $\int \arctan x dx$

解 设$u=\arctan x,\ v=x$,由分部积分公式得

$$\text{原式}=\arctan x-\int x d\arctan x$$

$$=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

补例5 求 $\int \ln^2 xdx$

解 令 $u=\ln^2 x,\ dx=dv,$ 由分部积分公式

$$\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - \int x\underline{d\ln^2 x}$$

$$= x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int xd\ln x\right]$$

$$= x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right]$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

补例6 求积分 $\int \sin(\ln x)dx$.

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)dx} = x\sin(\ln x) - \int xd[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x) - \int xd[\cos(\ln x)]]$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int xd[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

应用三：分部积分前先变量替换或凑微分等

例7　求(1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

解　令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2tdt$

原式 $=\int e^t\cdot 2tdt \ =2\int tde^t \ =2te^t-2\int e^t dt$

$=2te^t-2e^t+C \ =2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

(2) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

解 原式 $=\int \frac{xd\sin x}{\sin^3 x} \ =-\frac{1}{2}\int xd\frac{1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}\int xd\csc^2 x$

$=-\frac{1}{2}(x\csc^2 x-\int\csc^2 xdx)=-\frac{1}{2}(x\csc^2 x+\cot x)+C$

例8 求积分 $\int \sec^3 x dx$.

解 $\boxed{\int \sec^3 x dx} = \int \sec x d\tan x$

$= \sec x \tan x - \int \tan x d\sec x$

$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$

$= \sec x \tan x + \int (\sec x - \sec^3 x)dx$

$= \sec x \tan x + \ln|sex + \tan x| \boxed{-\int \sec^3 x dx}$

注意循环形式

$\therefore \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.$

小结

分部积分法及常见应用(三种类型的题目)

积分法 –
- 直接积分法
- 换元积分法 –
  - 凑微分法(第一换元积分法)
  - 第二换元积 分法
- 分部积分法

作业

P212　　3;4;5;7;8;

　　　　9;11;20;22

补例9 已知$f(x)$的一个原函数是e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$.

解 由条件$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$,

$$f(x) = (e^{-x^2})' = -xe^{-x^2}$$

$$\therefore \int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx,$$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

补例10　设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，求 $f(x)$.

解　　令 $u=\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x=1-u,$

$$f'(u)=1-u,$$

$$f(u)=\int(1-u)du=u-\frac{1}{2}u^2+C,$$

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

练习

$$(1)\int \frac{\arcsin x \cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(2)\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

$$(3)\int \sec^3 x dx.$$

$$\int \frac{\arcsin x \cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

解 原式$= \int \arcsin x \cdot e^{\arcsin x} d \arcsin x$

$$= \int \arcsin x d e^{\arcsin x}$$

$$= \arcsin x e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x} d \arcsin x$$

$$= \arcsin x e^{\arcsin x} - e^{\arcsin x} + C$$

例　求积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because$ $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}$$

令 $x = \tan t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t dt = \int \sec t dt$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C \quad = \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C.$$

例4 求积分 $\int x\arctan x dx$.

解 $\int x\arctan x dx = \int \arctan x d(\frac{x^2}{2})$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

例5 求积分 $\int x^3 \ln x dx$.

解 $\int x^3 \ln x dx = \int \ln x d\frac{x^4}{4}$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

规律:若被积函数是幂函数与对数函数或反三角函数的乘积, 一般选择将幂函数凑微分.