深 圳 大 学 实 验 报 告

课程名称：算法设计与分析

实验项目名称：实验二 分治法求最近点对问题

学院：计算机与软件学院

专业：计算机科学与技术

指导教师：杨烜

报告人：沈晨玙 学号：2019092121 班级：19 计科国际

实验时间：2021.4.9

实验报告提交时间：2021.4.9

教务部制

实验二 分治法求最近点对问题

一、实验目的：

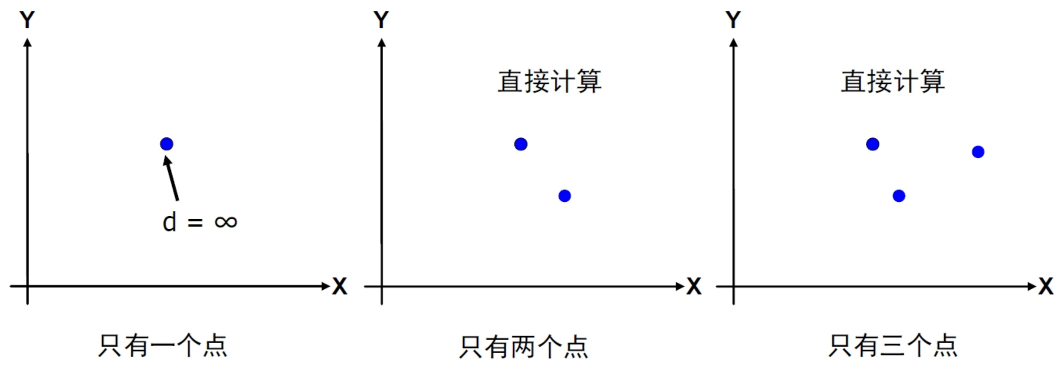
（1）掌握分治法思想。
（2）学会最近点对问题求解方法。

二、内容：

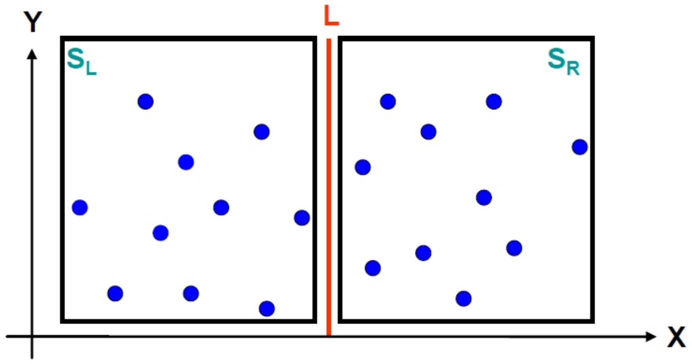
1. 对于平面上给定的N个点，给出所有点对的最短距离，即，输入是平面上的N个点，输出是N点中具有最短距离的两点。
2. 要求随机生成N个点的平面坐标，应用蛮力法编程计算出所有点对的最短距离。
3. 要求随机生成N个点的平面坐标，应用分治法编程计算出所有点对的最短距离。
4. 分别对N=100000—1000000，统计算法运行时间，比较理论效率与实测效率的差异，同时对蛮力法和分治法的算法效率进行分析和比较。
5. 如果能将算法执行过程利用图形界面输出，可获加分。

三、算法思想提示

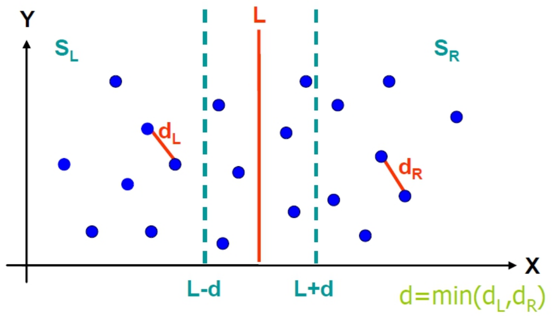
1. 预处理：根据输入点集S中的x轴和y轴坐标进行排序，得到X和Y,很显然此时X和Y中的点就是S中的点。
2. 点数较少时的情形



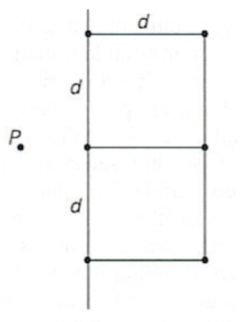
3. 点数|S|>3时，将平面点集S分割成为大小大致相等的两个子集S_L和S_R，选取一个垂直线L作为分割直线，如何以最快的方法尽可能均匀平分？注意这个操作如果达到$\theta(n^2)$效率，将导致整个算法效率达到$\theta(n^2)$。



4. 两个递归调用，分别求出S_L和S_R中的最短距离为d_l和d_r。
5. 取d=min(dl, dr)，在直线L两边分别扩展d，得到边界区域Y，Y’是区域Y中的点按照y坐标值排序后得到的点集（为什么要排序？），Y'又可分为左右两个集合Y'_L和Y'_R



6. 对于Y'_L中的每一点，检查Y'_R中的点与它的距离，更新所获得的最近距离，注意这个步骤的算法效率，请务必做到线性效率，并在实验报告中详细解释为什么能做到线性效率？



四、实验过程及结果

一：实验结果正确性展示

随机生成了 10 组 50 个点，通过蛮力法与分治法分别求解，验证程序正确性，结果如下。

蛮力法：

```
蛮力法: data_size: 50
P(1.8672 ,0.8773 ) and P(1.9582, 0.9625)   距离为: 0.12466
P(4.3511 ,1.6696 ) and P(4.2476, 1.7482)   距离为: 0.129962
P(3.3074 ,1.6427 ) and P(3.1994, 1.543)   距离为: 0.146983
P(4.2127 ,1.5755 ) and P(4.2591, 1.4927)   距离为: 0.0949147
P(4.2359 ,0.3389 ) and P(4.1909, 0.3467)   距离为: 0.045671
P(2.917 ,0.6665 ) and P(2.8983, 0.6468)   距离为: 0.0271621
P(2.8691 ,4.5213 ) and P(2.9277, 4.5421)   距离为: 0.062182
P(1.5701 ,2.9324 ) and P(1.6186, 2.9303)   距离为: 0.0485454
P(4.7781 ,3.0746 ) and P(4.729, 3.027)   距离为: 0.0683855
P(1.2114 ,4.9106 ) and P(1.1858, 4.9492)   距离为: 0.0463176
avg_time = 1
```

分治法：

```
分治法: data_size: 50
P(1.8672 ,0.8773 ) and P(1.9582, 0.9625)   距离为: 0.12466
P(4.2476 ,1.7482 ) and P(4.3511, 1.6696)   距离为: 0.129962
P(3.1994 ,1.543 ) and P(3.3074, 1.6427)   距离为: 0.146983
P(4.2127 ,1.5755 ) and P(4.2591, 1.4927)   距离为: 0.0949147
P(4.1909 ,0.3467 ) and P(4.2359, 0.3389)   距离为: 0.045671
P(2.8983 ,0.6468 ) and P(2.917, 0.6665)   距离为: 0.0271621
P(3.0282 ,3.2702 ) and P(3.2504, 2.9853)   距离为: 0.062182
P(1.5701 ,2.9324 ) and P(1.6186, 2.9303)   距离为: 0.0485454
P(3.9942 ,3.5009 ) and P(4.1316, 3.3193)   距离为: 0.0683855
P(1.1858 ,4.9492 ) and P(1.2114, 4.9106)   距离为: 0.0463176

avg_time = 1
```

小规模测试中二者测试结果一致，答案正确。

二：蛮力法求解

1. 算法原理：
   (1) 存在 N 个点，那么就存在 N（N - 1）/ 2 对点间的距离。穷举所有情况，选出最小值。

2. 伪代码：

for i = 1 to N - 1
for j = i + 1 to N
if (dis(p[i], p[j]) < min)
min = dis(p[i], p[j])

3. 复杂度分析：
   (1) 需要遍历 N（N - 1）/ 2 种情况来找出最小值，最好最坏和平均情况的时间复杂度都为 O(n^2)
   (2) 需要一个临时变量用来存储最小值，所以空间复杂度为 O(1)。

4. 数据测试

使用随机数生成，均匀分布的生成了 1000~35000 的数据集。为了减少数据的偶然性，每个数据量都进行了 10 次测试并取平均值。

为了检验实验是否准确，将实际值将理论值进行对比（基准点为 20000）。理论值计算方法如下：

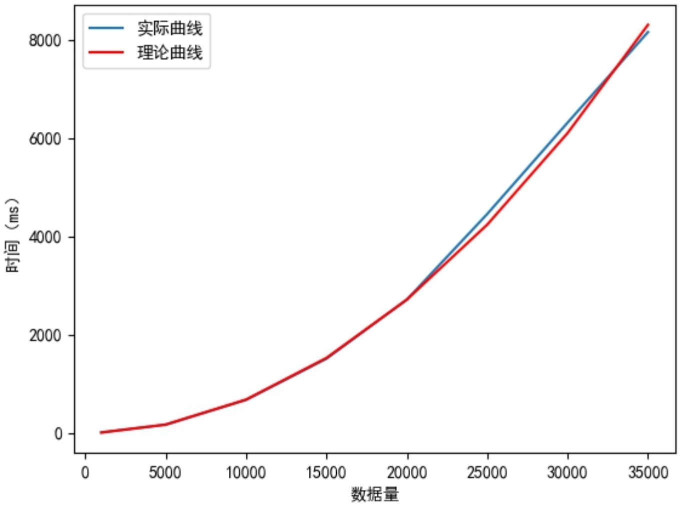
$$T_{基准} = k \times n_{基准}^2$$

$$T_{理论} = k \times n_{理论}^2$$

$$\Rightarrow T_{理论} = T_{基准} \times \left(\frac{n_{理论}}{n_{基准}} \right)^2$$

最终结果如下：

数据量	1000	5000	10000	20000	30000	40000	50000
单次时间（ms）	2	36	138	540	1199	2130	3416
理论时间（ms）	1.38	34.5	138	552	1242	2208	3450



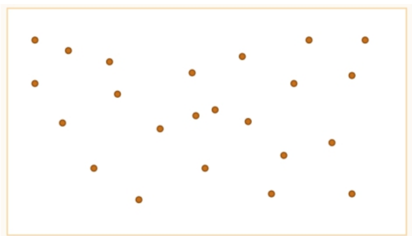
图像上符合 O(n^2) 二次曲线，并且理论值与实际值误差较小。

三：分治法求解

1. 分治法基本思路

本题思路： 分 -- 将整体分为左右两个区域； 治 -- 递归计算左右两区域的最短距离； 合 -- 合并左右区域，并求合并后的最短距离；

对于本题而言，可以转化为：

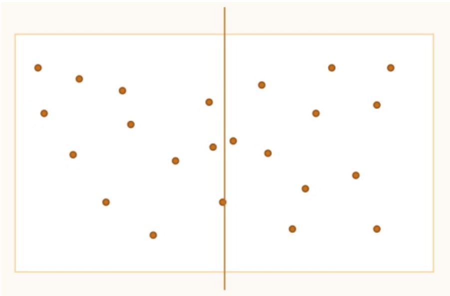


(1) 分 -- 将整体分为左右两个区域；

将所有点根据 x 坐标进行排序，取中间点。所以算法时间复杂度下限：O（nlogn）

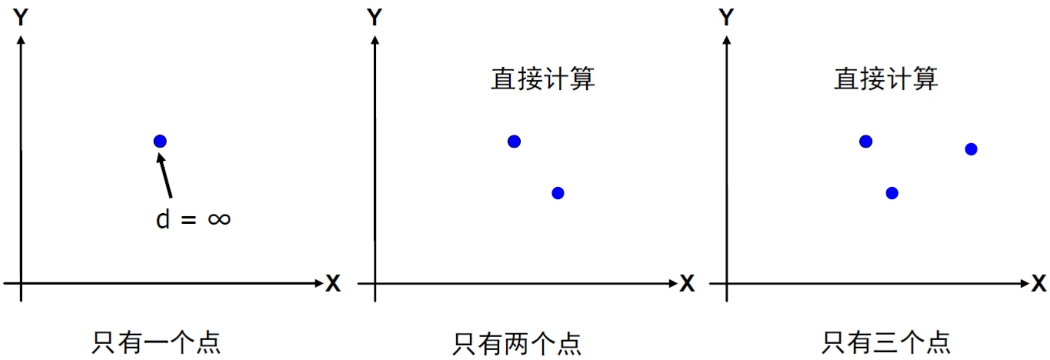
mid = (l + r) / 2

做到左右区域点集数目基本相同，降低数据随机性带来的影响



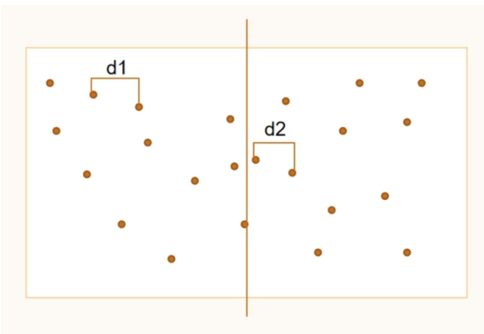
(2) 治 -- 递归计算左右两区域的最短距离

子问题最小规模



递归调用函数，即可获取左右两区域的最短距离

(3) 合 -- 合并左右区域，并求合并后的最短距离



问题转化为：已知左右区域各自最短距离，求合并后的最短距离。

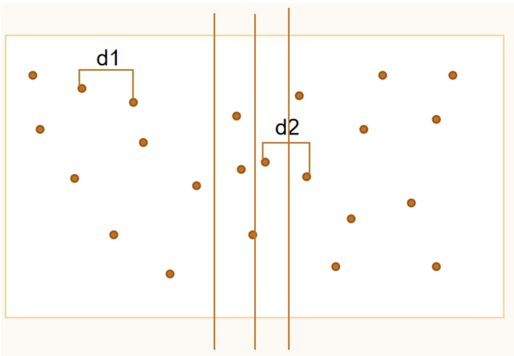
合并之后最短点对的选择一共有三种情况 ：左+右、左+左、右+右

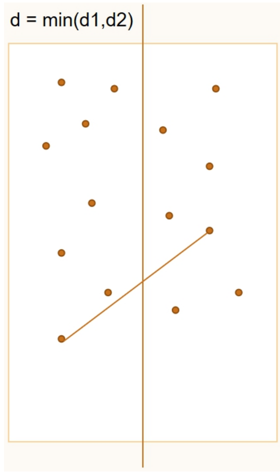
对于左+左、右+右的情况，利用第二步中的递归调用即可获取。

所以主要问题在于，如果最短点对来自于左+右的合并操作。

解决思路：

两点必定来自于中轴线左右两侧附近，并且两点距离小于 min(d1,d2)



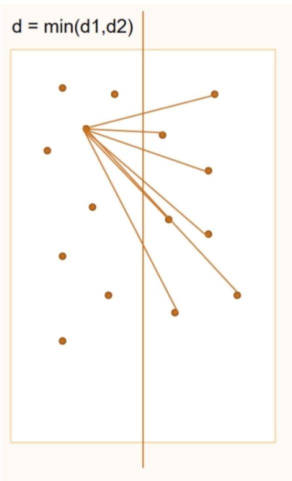


如左图所示，可以在中轴线附近取带状区域，其左右宽度为 min(d1,d2)。在如此带状区域内，左右两点距离必定小于 min(d1,d2)，极限状态为一侧宽度长度。

问题转化为：从左右区域内各取一点，与 d1，d2 比较，取最短距离。
解决方法有如下展示三种。

2. 分治——部分蛮力

(1) 算法原理：



遍历左右带中的所有点，比较获得最短距离。

(2) 伪代码：

```
ans = min(d1,d2)
for i = 1 to left.size
    for j = 1 to right.size
  if ( dis(left[i], right[j]) < ans )
            ans = dis(left[i], right[j])
```

(3) 复杂度分析：

对于均匀分布的大型点集，预计位于该带中的点的个数是非常少的。事实上，容易论证平均只有 O（√n）个点是在这个带中的。

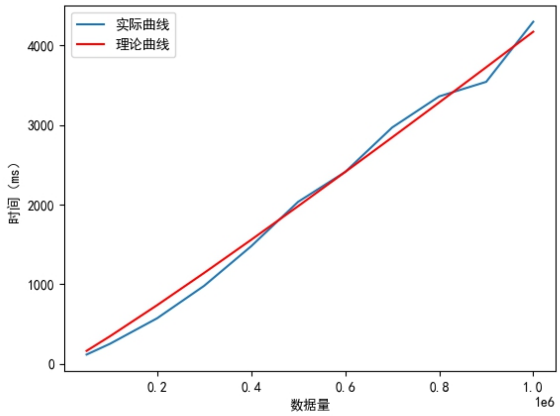
-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P280

查询资料可知，对于均匀分布的点集而言，带中的元素个数为√n
递推公式为：
平均情况 T(n) = 2T(n/2) + (√n)^2
总体时间复杂度 O(nlogn)

对于非均匀分布的点集，最差情况带中的元素个数为 n
递推公式为：
最坏情况 T(n) = 2T(n/2) + (n)^2
总体时间复杂度 O(n^2)

(4) 数据分析：
最终结果如下：

数据量	50000	100000	400000	500000	800000	1000000
单次时间（ms）	117	253	1478	2037	3362	4300

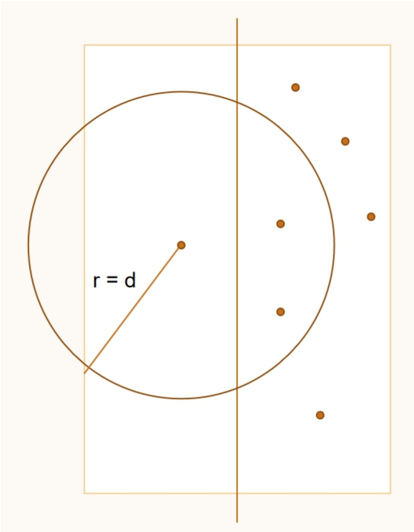


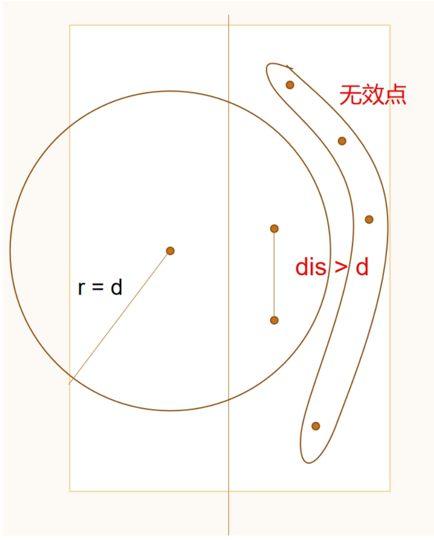
图像上符合 O(nlogn) 曲线，并且理论值与实际值误差较小。

显然对于最差情况仍然为 O(n^2)，需要改进。

3. 分治——多趟查询
(1) 算法原理：
① 遍历左带内的所有点，并与右带内所有符合条件的点进行长度比较。
右侧符合条件点集筛选过程及原理：
结论：右侧点位于以左侧点为中心，上下高度 d，右侧宽度 d 的 d*2d 的范围内。且右侧点的个数存在上限。

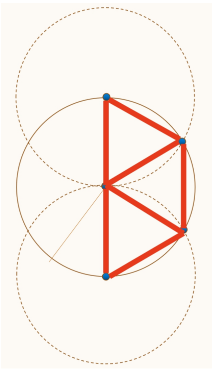
证明如下：

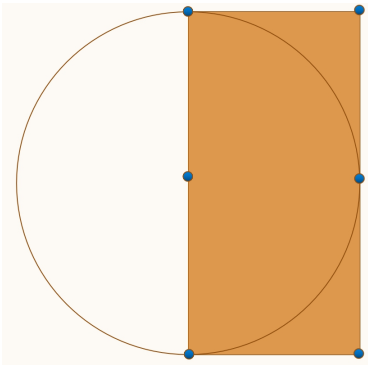




对于左侧的点，只有两点距离小于 d 才有合并时减小 d 的可能，所以右侧点必定在以左侧点为圆心、d 为半径的圆内（上左图所示），其余点为无效点（上右图所示）。

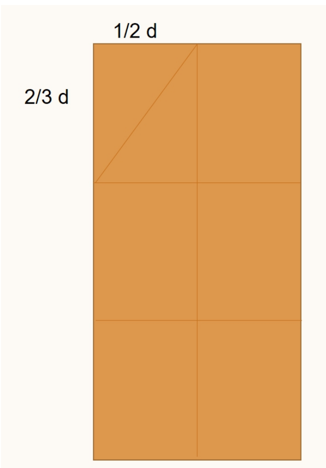
又因为右侧区域内任意两点距离最小值为 d2 >= d，所以圆内两点距离大于等于半径。





因为右侧点一定位于圆心右侧，最大可覆盖区域为右半圆，又因为两点距离大于半径，所以最多可能存在 5 个点满足条件（上左图所示）。

在计算机中对点坐标的排序为 x 或 y 坐标排序，难以对圆形区域进行判断，所以将半圆扩展为矩形便于计算机运算。改矩形范围内最多可能存在 6 个点满足条件（上左图所示）。



将矩形分为 6 个等大的 2/3d*1/2d 的小矩形，假设存在 7 个点，则必定有一个矩形内有两个点。
同一小矩形内两大距离最大值为对角线，即 0.8333d < d 与题意不符，所以不能有 7 个点。而 6 个点的情况如上右图所示。

综上所述，右侧点位于以左侧点为中心，上下高度 d，右侧宽度 d 的 d*2d 的范围内。且右侧点的个数存在上限。

所以在查找过程中，只需要找到第一个属于左侧点对应矩形范围内的点，并之多向上查找 6 次，即可完成查询。

依次遍历左带中的点，并自下而上的遍历右带直到遇到第一个符合条件的点。

(2) 伪代码：

```
for i = 1 to left.size
    for j = 1 to right.size
        if right[j]  在相应的矩形内
            for k = j to j + 6 and k < right.size
                ans = min(ans, dis(left[i], right[j]))
```

(3) 复杂度分析：

对于均匀分布的大型点集，预计位于该带中的点的个数是非常少的。事实上，容易论证平均只有 O（√n）个点是在这个带中的。

-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P280

递推公式

平均情况 $T(n) = 2T(n/2) + (\sqrt{n})^2$

总体时间复杂度 O（nlogn)

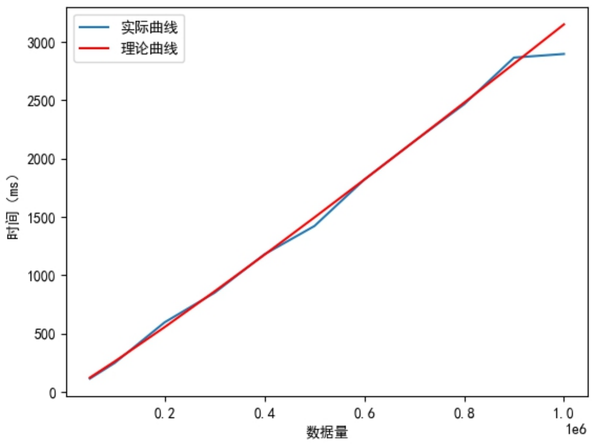
最坏情况 $T(n) = 2T(n/2) + (n)^2$

总体时间复杂度 O（n^2)

(4) 数据分析：

最终结果如下：

数据量	50000	100000	400000	500000	800000	1000000
单次排序时间（ms）	115	250	1181	1423	2467	2898



图像上符合 O(nlogn) 曲线，并且理论值与实际值误差较小。

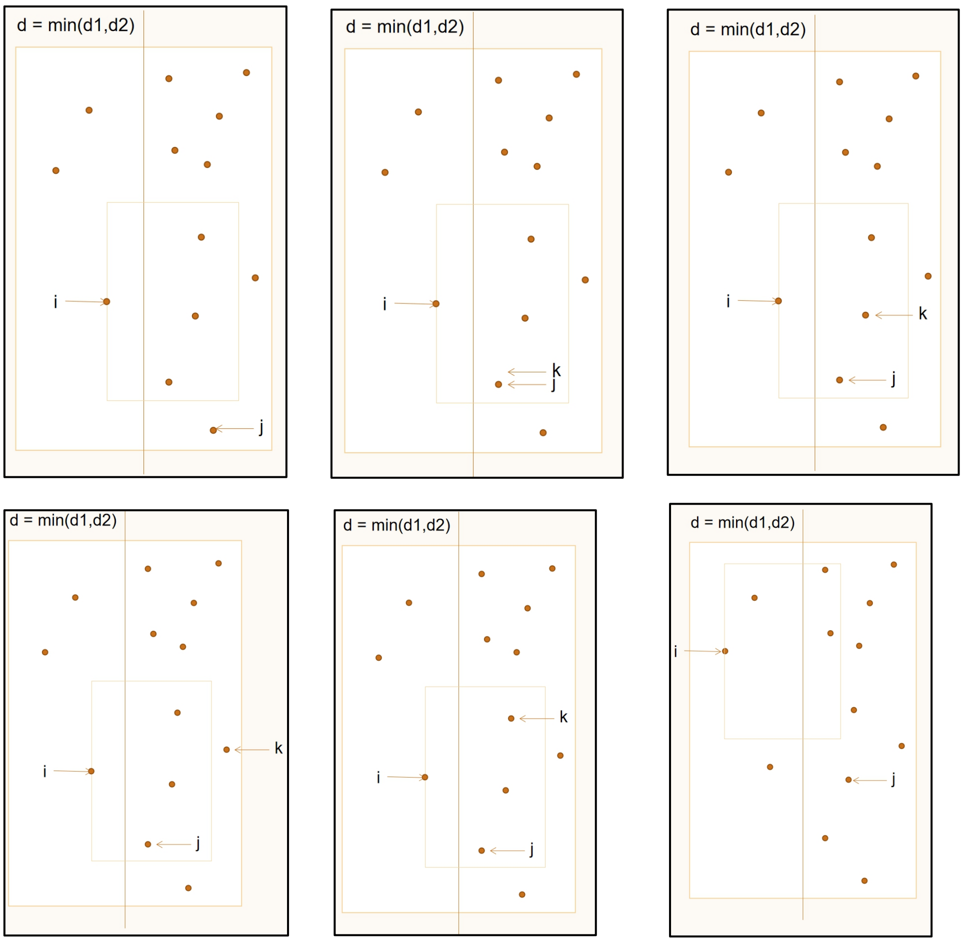
显然对于最差情况仍然为 O(n^2)，需要改进。

4. 分治——一趟查询

(1) 算法原理：

此算法在上一部分的基础上进行了部分改进，达到了线性的查找效率。

方法是对于左右侧的点都自下而上进行查找。因为矩形区域是固定的，所以随着左侧点的 y 坐标增大，矩形的最低点也是逐渐增大，右侧符合条件的第一个点的 y 也会逐渐增大，并不需要返回重新查找。（可以结合伪代码查看动图中指针的变化过程。具体过程在演示中展示。）



(2) 伪代码：

```
j = 0
for i = 1 to left.size
    while j < right.size and right[j].y < left[i].y - d
        j += 1
    for k = j to j + 6 and right[k].y < left[i].y + d
        ans = min(ans, dis(left[i], right[j]))
```

(3) 复杂度分析：

在此过程中，只需要对左右带中的点进行依次遍历，即可找到最短距离，最多比较 6n 次即可，达到了线性效率。

递推公式

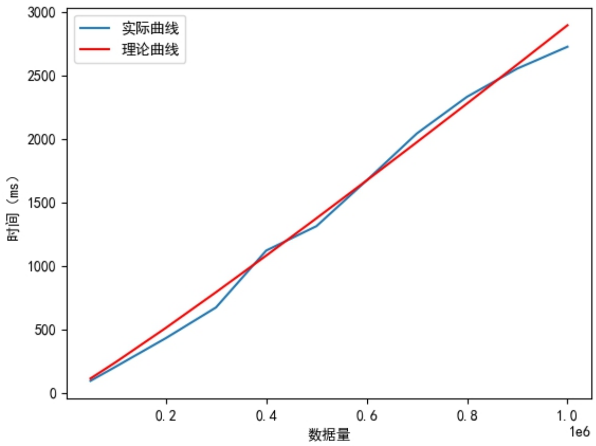
T(n) = 2T(n/2) + n

总体时间复杂度 O（nlogn)

(4) 数据分析：

最终结果如下：

数据量	50000	100000	400000	500000	800000	1000000
单次排序时间（ms）	95	206	1121	1313	2332	2726



图像上符合 O(nlogn) 曲线，并且理论值与实际值误差较小。

5. 问题思考：

上述合并的方法是利用自下而上的遍历左右带中的点集，所以需要对带中的点以 y 坐标进行排序。

前提条件：左右区域内的点是依据 y 坐标进行排序的。

实际条件：左右区域内的点是依据 x 坐标进行排序的。（获取中轴线时，已排序）

所以每次递归的过程之中都需要对 y 进行排序。

对于均匀分布的大型点集，预计位于该带中的点的个数是非常少的。事实上，容易论证平均只有 O（√n）个点是在这个带中的。

-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P280

递推公式

平均情况 T(n) = 2T(n/2) + √n·log√n < 2T(n/2) + n

合并效率小于 O(nlogn)，又因为一开始对 x 排序，O(nlogn)为时间效率下限。

总体时间复杂度 O(nlogn)

最坏情况 $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

总体时间复杂度 $O(n\log n\log n)$

虽然最坏情况下为 $O(n\log n\log n)$，但相较于 $O(n^2)$有较大提升。

为了解决这一问题，引入以下方法。

解决方案：

我们将保留两个表。一个按照 x 坐标排序，一个按照 y 坐标排序，成为 P 和 Q。Pl 和 Ql 传递给左半部分递归调用，Pr 和 Qr 传递给右半部分递归调用。一旦分割线已知，我们依序转到 Q，把每一个元素放入相应的 Ql 或 Qr。容易看出，Ql 和 Qr 将自动地按照 y 坐标排序。当递归调用返回时，我们扫描 Q 表并删除其 x 坐标不在带内的所有的点。此时 Q 只含有带中的点，而这些点保证是按照它们的 y 坐标排序的。

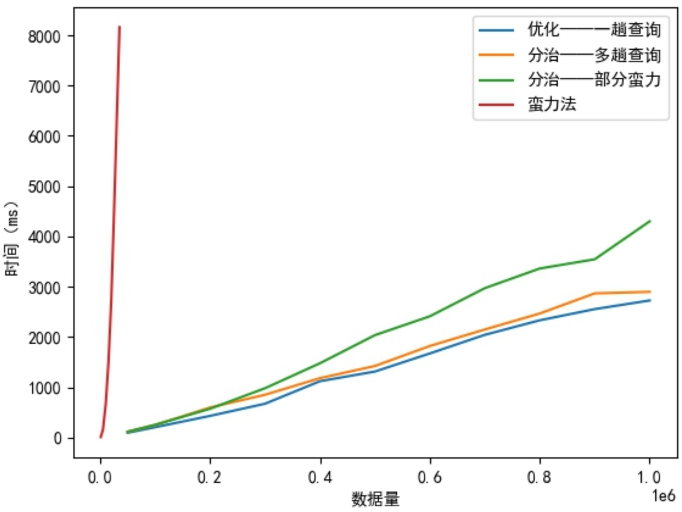
-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P281

递推公式

$T(n) = 2T(n/2) + n$

总体时间复杂度 $O(n\log n)$

6. 综合分析



显然，分治法的时间效率是要远远优于蛮力法。

每一次的优化，都对于时间效率有着小幅度的提升。

五、经验总结

经过本次实验，感受到了分治法合并效率对于整体效率有着极大的影响。一开始写代码的时候可能因为代码过于复杂导致总体效率较低，在多次修改代码细节后达到了理想目标。

另外，首先确定实验正确性也是十分重要的一件事。有些时候修改一处代码后，结果与蛮力法求解不同，这时需要首先考虑代码的正确性而非优化。

指导教师批阅意见：   成绩评定： 指导教师签字： 年　　月　　日
备注：

注：1、报告内的项目或内容设置，可根据实际情况加以调整和补充。

2、教师批改学生实验报告时间应在学生提交实验报告时间后 10 日内。