



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Campus de São José do Rio Preto

JOÃO OTÁVIO GONÇALVES CALIS

ESTUDO DA DIMENSÃO FRACTAL MULTIDIMENSIONAL E APLICAÇÕES

**SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2015**

JOÃO OTÁVIO GONÇALVES CALIS

ESTUDO DA DIMENSÃO FRACTAL MULTIDIMENSIONAL E APLICAÇÕES

Resumo dos conteúdos estudados sobre o espaço euclidiano e a geometria fractal, sendo parte do plano de atividades proposto, apresentado ao Prof. Dr. Leandro Alves Neves, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Alves Neves

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2015

RESUMO

A geometria fractal é entendida como a geometria da natureza. Surge para representar as formas da natureza de forma mais real, de uma maneira que a tradicional geometria euclidiana não é capaz de fazer. Benoit Mandelbrot foi o criador do termo, que significa criar fragmentos irregulares, quebrar. Os fractais possuem características importantes como a autossimilaridade, a complexidade infinita e dimensão não inteira. Podemos ainda classificá-los em geométricos e não lineares, onde o primeiro tipo constitui geralmente fractais abstratos e perfeitos, enquanto o segundo é composto basicamente por fractais aleatórios ou encontrados na natureza.

Palavras-chave: Geometria; Geometria Euclidiana; Geometria Fractal; Dimensão Fractal.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elementos geométricos simples.....	7
Figura 2 - Iterações do conjunto de Cantor	12
Figura 3 - As quatro primeiras iterações da curva de Koch.	12
Figura 4 - As quatro primeiras iterações do triângulo de Sierpinski	13
Figura 5 - Conjunto de Mandelbrot.....	13
Figura 6 - Romanesco	14
Figura 7 - Imagem colorida.....	17
Figura 8 - Imagem 7 decomposta nos canais vermelho, verde e azul respectivamente	17
Figura 9 - Gráfico da melhor linha de ajuste.....	19
Figura 10 - Algoritmo Box-Merging.....	22
Figura 11 - Gráfico de $\log n - \log s$ com o raio de desfoque como parâmetro.....	23
Figura 12 - Gráfico de $\log n - \log s$ com a resolução como parâmetro	23
Figura 13 - Linha de dimensão fractal 1	24
Figura 14 - Dimensão 4.....	25
Figura 15 - Dimensão 5.....	25
Figura 16 - Dimensão 2.....	25
Figura 17 - Dimensão 3.....	25
Figura 18 - Pollock $D = 4.18$	26
Figura 19 - Leonardo da Vinci $D = 2.45$	26
Figura 20 - Monet $D = 3.66$	26
Figura 21 - Função gama de um pixel benigno e um pixel maligno	28
Figura 22 - Exemplo de duas secções histológicas com câncer	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Box Count no canal vermelho.....	17
Tabela 2 - Box Count no canal verde.....	18
Tabela 3 - Box Count no canal azul.....	18
Tabela 4 - Média das tabelas anteriores	18
Tabela 5 - Resultados para imagens normais	31
Tabela 6 - Resultados para imagens com doença.....	31

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	7
2.	GEOMETRIA EUCLIDIANA	7
3.	GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA	8
4.	GEOMETRIA FRACTAL	8
4.1	Propriedades	9
4.1.1	Autossimilaridade.....	9
4.1.2	Complexidade infinita	9
4.1.3	Dimensão.....	10
4.2	Classificação.....	11
4.3	Exemplos de Fractais Determinísticos.....	11
4.4	Analisando a dimensão fractal de imagens coloridas^[10]	14
4.5	Uma variação do algoritmo Box-Counting aplicado a imagens coloridas^[11]	19
	REFERÊNCIAS	33

1. INTRODUÇÃO

O presente estudo tem como objetivo mostrar de forma sucinta o surgimento da geometria fractal, suas diferenças com relação à geometria euclidiana, suas propriedades e exemplos de fractais.

2. GEOMETRIA EUCLIDIANA

A geometria euclidiana é baseada nos postulados de Euclides de Alexandria e está definida em duas e três dimensões. O livro “Os elementos” escrito por Euclides, foi o primeiro a abordar tópicos de geometria e matemática grega básica usados até hoje.^[1]

Conceitos relativos a pontos, retas, planos, formas geométricas planas regulares ou irregulares são definidos e estudados pela geometria euclidiana.^[2] Uma característica importante desses elementos é que eles sempre têm uma distância fixa uns dos outros independentemente do seu comprimento.^[1] Na Figura 1 estão representados alguns dos principais elementos geométricos:

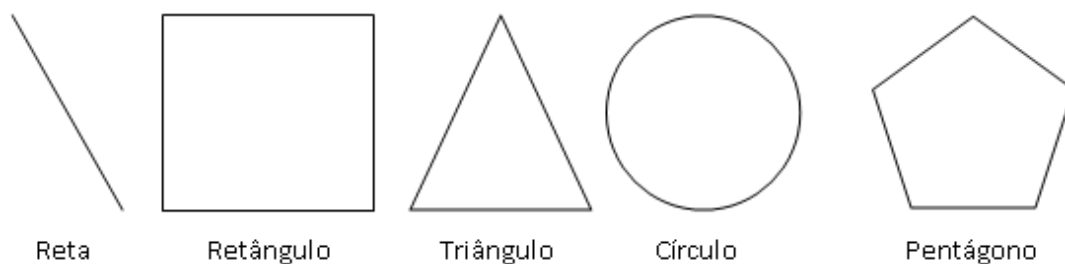


Figura 1 - Elementos geométricos simples

Em sua obra, Euclides define cinco importantes postulados: ^[1]

1. Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
2. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si;

5. Se uma linha reta corta duas linhas retas de forma a que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam (em conjunto, ou soma) menores que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se forem prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos retos.

Os quatro primeiros postulados são aceitos sem qualquer tipo de objeção. No entanto, o quinto não parece ser tão óbvio assim, tanto que se tornou o principal alvo de críticas à obra naquela época. ^[3] Muitos matemáticos tentaram provar o quinto postulado de Euclides durante muitos séculos, seus esforços geraram um profundo entendimento da geometria euclidiana e deram origem da geometria não euclidiana. ^[4]

3. GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

Uma geometria não euclidiana é aquela modifica o quinto postulado de Euclides que afirma que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial. ^[5] Carl Friedrich Gauss foi o primeiro a entender a possibilidade de uma geometria não euclidiana. ^[4]

A partir da contradição do postulado de Euclides surgem a geometria hiperbólica e a geometria elíptica. Na primeira, existe mais de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dessa reta. Na segunda, não existe nenhuma reta paralela a tal reta. Dessa forma, as geometrias não euclidianas surgem da contradição do quinto postulado de Euclides. ^[5]

4. GEOMETRIA FRACTAL

A geometria fractal é considerada como não euclidiana. O termo surgiu pela primeira vez com o matemático polonês Benoit Mandelbrot em sua obra chamada “The Fractal Geometry of Nature”. Ele buscava um termo que indicasse uma geometria representativa da natureza, visto que as formas geométricas tradicionais não podem representar uma nuvem ou uma montanha de forma aceitável. Dessa forma, foi escolhida a palavra fractal, que do latim significa criar fragmentos irregulares, quebrar. ^[4]

Mandelbrot define fractal como “um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica”. J. Feder também deu sua definição de fractal como sendo “uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”. [\[4\]](#)

4.1 Propriedades

Os fractais possuem basicamente três propriedades: autossimilaridade ou autossemelhança, complexidade infinita ou detalhe infinito e dimensão. [\[3\]](#)

4.1.1 Autossimilaridade

A autossimilaridade é a propriedade em que cada uma de suas partes observadas, não importa em qual escala, sempre é semelhante ao todo, ou seja, não importa o quanto ampliarmos o fractal, ele sempre será semelhante ao objeto inicial. [\[3\]](#) Podemos subdividir essa propriedade em três tipos: [\[6\]\[7\]](#)

- Autossimilaridade exata: quando o fractal é idêntico em qualquer escala;
- Quase-autossimilaridade: é aparentemente idêntico em diferentes escalas, o aumento na escala permite enxergar pequenas distorções em relação à imagem original;
- Autossimilaridade estatística: as medidas numéricas ou estatísticas aparecem em diferentes escalas, porém não são exatas. Possuem as mesmas características, em termos gerais.

Fractais exatamente autossimilares não existem na natureza porque eles precisam ser absolutamente iguais, em vez disso, encontramos vários exemplos de objetos fractais com certa autossimilaridade estatística, visto que podemos encontrar alguma semelhança entre suas partes. [\[7\]](#)

4.1.2 Complexidade infinita

A complexidade infinita é a propriedade que os fractais têm de serem infinitamente detalhados, podemos ampliá-los aumentando o número de repetições do procedimento de geração que, não tendo fim, impossibilitam um resultado final do fractal, são indefinidamente iterativos. Fractais naturais não possuem essa propriedade, são considerados imperfeitos, uma vez que várias iterações geram algo que tende ao nível atômico.^[7]

4.1.3 Dimensão

A dimensão fractal diferentemente da dimensão euclidiana, não é um valor inteiro.^[8] Cada fractal possui sua própria dimensão, que fica definida de acordo com a estrutura, comportamento e grau de irregularidade do fractal. A dimensão fractal é preservada em qualquer escala.^[4]

Existe uma fórmula para calcular a dimensão de um fractal, ela surge da seguinte maneira: sabemos que pontos têm dimensão zero, retas dimensão um, figuras planas dimensão dois e figuras geométricas espaciais dimensão três.^[8]

Se repartíssemos, por exemplo, um quadrado em nove partes iguais, podemos dizer que cada uma das partes é autossimilar ao todo, visto que basta ampliarmos uma delas em três vezes para obter a figura original novamente. A essa ampliação damos o nome de fator de ampliação, que é o coeficiente de proporcionalidade, ao elevarmos esse número ao quadrado – pois é uma figura plana – chegamos ao valor nove, que é o número de peças resultantes da figura original. Essa relação vale para outras formas, e é apresentada na Equação 1 ^[4].

$$n = m^D, \quad (1)$$

onde n é o número de peças, m o fator de aumento e D a dimensão inteira.

No entanto, fractais não possuem dimensão inteira. Se soubermos o número de peças e o fator de aumento de um fractal, podemos, através de manipulações algébricas da equação acima, chegaremos a Equação 2: ^[4]

$$D = \frac{\log n}{\log m}, \quad (2)$$

em que a dimensão “D” é dada pela razão entre o logaritmo do número de peças “n” e o logaritmo do fator de aumento “m”.

Uma interpretação dessa fórmula mostra um resultado interessante: o valor da dimensão sempre estará no intervalo entre zero e três. Isso indica que quanto mais próxima de um número inteiro estiver o fractal, mais semelhante àquela dimensão ele será. Por exemplo, quanto mais amassarmos uma folha de papel, mais próxima ela estará da terceira dimensão, quanto mais denteado um relâmpago for, mais próximo da segunda dimensão ele estará. [\[9\]](#)

4.2 Classificação

Os fractais podem ser agrupados basicamente em duas categorias: os geométricos (determinísticos) e os não lineares (aleatórios e da natureza). [\[9\]](#)

Os fractais geométricos são caracterizados por formas geométricas. São abstratos pois não são encontrados naturalmente. São perfeitos pois em qualquer iteração, a parte é e sempre será idêntica ao todo. [\[4\]](#)

Os fractais não lineares aleatórios são gerados por computadores, suas cores vibrantes geram impacto visual ao olho humano. Fractais naturais são encontrados em plantas, animais e objetos da natureza, estes não possuem uma infinidade de iterações por limitações físicas, no entanto, mantêm considerável autossimilaridade. [\[4\]](#)

4.3 Exemplos de Fractais Determinísticos

Apresentamos a seguir alguns exemplos de fractais, tais como conjunto de Cantor, curva de Koch, triângulo de Sierpinski, conjunto de Mandelbrot e o Romanesco.

O conjunto de Cantor, também conhecido como Poeira de Cantor ou Polvo de Cantor é um dos exemplos mais simples de fractais. Nele ficam claras a autossimilaridade e o detalhe infinito. Para exemplificar, considere um segmento de reta qualquer (Figura 2(a)), como estágio inicial. Em seguida, são aplicadas iterações com o objetivo de dividir o segmento de reta em três partes, sendo a parte central removida (Figura 2(b)). O processo segue indefinidamente (Figura 2(c)).

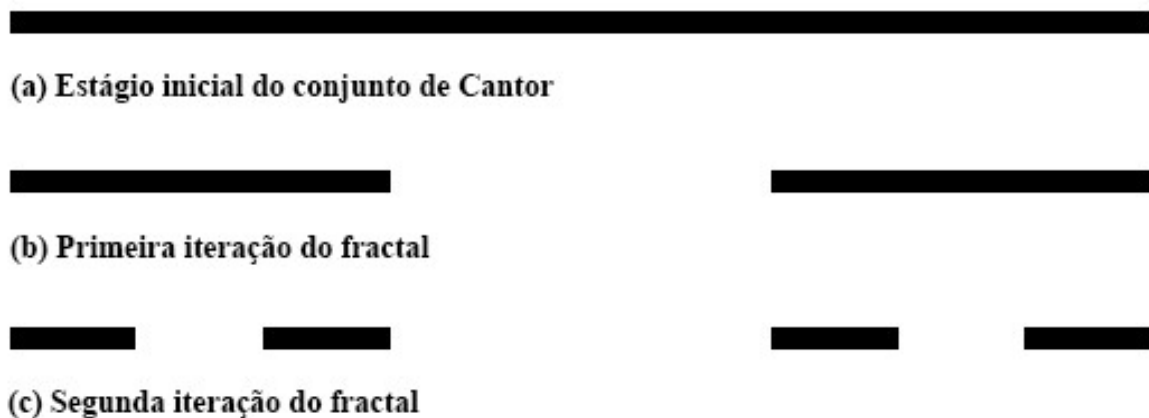


Figura 2 - Iterações do conjunto de Cantor

Por meio deste exemplo vemos que não importam quantas iterações façamos, uma parte sempre será semelhante ao todo, porém em menor comprimento. A denominação poeira de Cantor pode ser visualizada, pois a medida que novas iterações são feitas, o segmento inicial parece estar se desintegrando.

A curva de Koch assim como o conjunto de Cantor, é inicialmente definida por um segmento de reta. Dividimos o segmento em três partes iguais e substituímos a parte central por um triângulo equilátero sem base. As demais iterações são feitas da mesma maneira. Veja na Figura 3 os quatro primeiros níveis da curva de Koch.

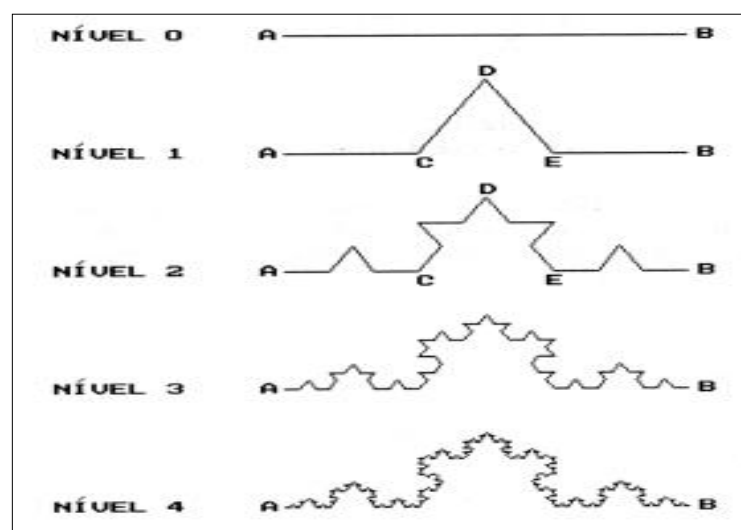


Figura 3 - As quatro primeiras iterações da curva de Koch.

Disponível em:

<<http://www.inf.ufsc.br/~visao/2000/fractais/image010.jpg>>

O triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica em que são evidenciadas as propriedades apresentadas de um fractal (autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão). Podemos obtê-la, inicialmente, com um triângulo equilátero. Em seguida, dos pontos médios de cada triângulo gerado na iteração anterior, criam-se quatro novos triângulos, onde a figura central deve ser retirada. O processo tende ao infinito, como pode ser visto na Figura 4.



Figura 4 - As quatro primeiras iterações do triângulo de Sierpinski

Disponível em:

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/64/Sierpinsky_triangle_%28evolution%29.png>

O conjunto de Mandelbrot é uma figura definida no plano complexo, nele estão presentes as propriedades dos fractais enunciadas anteriormente, uma vez que ao ampliarmos, este fractal, vemos sua autossimilaridade e complexidade infinita. A Figura 5 é a representação deste fractal:

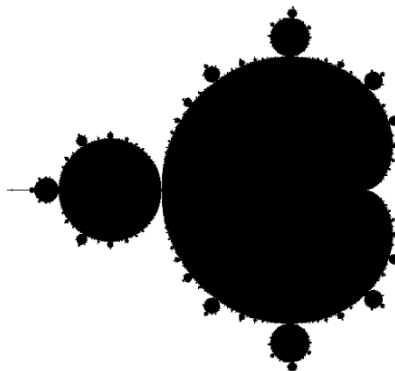


Figura 5 - Conjunto de Mandelbrot

O Romanesco^[6] é um tipo de brócolis onde se nota a propriedade fractal de autossimilaridade. Pode ser considerado um fractal natural. Pela Figura 5 podemos notar a autossemelhança do vegetal.



Figura 6 - Romanesco

Disponível em: <<http://littleaesthete.com/wp-content/uploads/2012/02/6.jpg>>

4.4 Analisando a dimensão fractal de imagens coloridas^[10]

O principal objetivo da geometria fractal é descrever uma forma regular ou fragmentada de um recurso natural como um objeto complexo em que a geometria euclidiana não consegue analisar.

A geometria fractal fornece um modelo matemático para muitos objetos complexos encontrados na natureza, sendo mais aplicada na análise de textura e segmentação. A dimensão fractal pode ser útil para classificação e análise de imagens.

Algoritmos fractais são utilizados principalmente para reduzir a diferença de irregularidade superficial entre projetos feitos pelo homem e sentidos naturais. Existem vários métodos propostos para estimar a dimensão fractal, merecendo destaque os de Pentlan, Gangepain e Roques-Carmes e ainda o método de Sarkar, que sugeriu o método box-counting diferencial. O box-counting é o método mais frequentemente usado para medições em vários campos de aplicação devido à sua simplicidade.

4.4.1 Cálculo da dimensão fractal para imagens em escala de cinza

A dimensão fractal das imagens é geralmente uma medida de irregularidade, indicando a diferença entre várias escalas de cinza que são encontradas na imagem. O método mais apropriado para isso é o box-counting diferencial. Este método leva em conta a diferença de caixas onde o nível de cinza máximo e mínimo diminui. Abaixo uma explicação mais detalhada:

Seja uma imagem de tamanho $M \times M$ pixels reduzida a um tamanho $l \times l$ onde $M/2 \geq l > 1$ e l é um número inteiro. Então, nós temos uma estimativa de $r = l/M$, onde r é a escala de redução. Consideramos essa imagem como um espaço tridimensional onde as coordenadas (x , y) correspondem a posição dos pixels da imagem e a terceira coordenada (z) representa o nível de cinza. O espaço (x , y) é particionado em quadrados de tamanho $l \times l$. Para cada quadrado há uma coluna de caixas de dimensão $l \times l \times l'$. Se o total de níveis de cinza é G , então $l' = l \times G / M$. Sendo p o nível de cinza mínimo e q o nível de cinza máximo, do quadro (i , j) da imagem, temos que:

$$N_r(i, j) = q - p + 1, \quad (3)$$

é a contribuição de N_r no quadro (i , j). E, tomando as contribuições de todos os quadros, teremos:

$$N_r = \sum_{i,j} n_r(i, j) \quad (4)$$

N_r é contado para diferentes valores de r , isto é, diferentes valores de l . Então, usando a equação (2), poderemos estimar a dimensão fractal, pelo ajuste linear dos mínimos quadrados de $\log(N_r)$ versus $\log(1/r)$ (que é igual a $\log s$).

4.4.2 Cálculo da dimensão fractal para imagens coloridas

Imagens digitais coloridas são similares em intensidade a imagens em escalas de cinza, na medida em que ambas são armazenadas em pixels dispostos em uma grade. Contudo, cada pixel tem mais que um simples valor de intensidade associado a ele. Os valores amostrados em um pixel correspondem a diferentes partes do espectro luminoso.

Ao exibir uma imagem com cores em uma tela de computador, esses valores amostrados serão usados para determinar a intensidade da cor dos componentes físicos dos pixels. Geralmente são usadas as cores primárias vermelho, verde e azul, visto que elas

correspondem as cores que o olho humano é capaz de enxergar. Mas, o número de amostras de cores por pixel não está limitado a estas três cores.

Mihai Ivanovici e Noel Richad propuseram um método para encontrar a dimensão fractal de imagens coloridas baseado na versão colorida do algoritmo probabilístico para o cálculo da dimensão fractal. Esse algoritmo considera a imagem como um conjunto de pontos S em um espaço Euclidiano de dimensão E . A disposição espacial do conjunto é descrita por uma matriz de probabilidade $P(m, \delta)$, que representa a probabilidade de m pontos estarem em uma caixa de tamanho δ . Se considerarmos que o número total de pontos na imagem é M , o número de caixas que contém m pontos é

$$N(m, \delta) = \frac{M}{m} p(m, \delta). \quad (5)$$

Assim, o número total de caixas necessárias para cobrir a imagem é:

$$\langle N(\delta) \rangle = \sum_{m=1}^N \frac{M}{m} p(m, \delta) = M \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} p(m, \delta), \quad (6)$$

que resulta em:

$$\langle N(\delta) \rangle = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} p(m, \delta) \propto \delta^{-D}, \quad (7)$$

Onde D é a dimensão fractal.

O algoritmo clássico de Voss usa caixas de tamanho variável centradas em cada pixel da imagem e conta o número de pixels que “caem” dentro da caixa. Isso foi generalizado de forma a contar os pixels $F = f(x, y, r, g, b)$ para os quais a distância da norma infinita de Minkowski até o centro do hipercubo é menor que δ .

4.4.3 Método uniforme proposto para imagens coloridas e em escala de cinza

Considere uma imagem colorida como uma “hiper-superfície” em um espaço com cores, como por exemplo o RGB: $f(x, y) = (r, g, b)$. Portanto, no caso de imagens coloridas lidamos com um hiperespaço Euclidiano pentadimensional e cada pixel pode ser visto com um vetor de cinco dimensões (x, y, r, g, b) . Então, descobriremos as diferenças entre os níveis de intensidade de cada canal vermelho, verde e azul. Aplicaremos a metodologia do algoritmo

Differential Box Counting em cada componente de cor e encontraremos os seus níveis médios de intensidade para estimar a dimensão fractal.

4.4.4 Resultados experimentais do método uniforme

No método proposto por Nayak, S. R.; Ranganath, A.; Mishra, J., a imagem (Figura 7) é decomposta em seus canais vermelho, verde e azul (Figura 8), para que o método DBC seja aplicado em cada um deles separadamente como imagens em escala de cinza.



Figura 7 - Imagem colorida



Figura 8 - Imagem 7 decomposta nos canais vermelho, verde e azul respectivamente

As tabelas 1, 2 e 3 contém as contagens de caixas dos canais vermelho, verde e azul respectivamente, da Figura 7.

Tamanho da caixa (L)	Total de caixas contadas (Nr)	Log-Log gráfico de Nr	Fator de redução
4	1223	7.1091	2.7726
8	227	5.4250	2.0794
16	45	3.8061	1.3863
32	8	2.0794	0.6931

Tabela 1 - Box Count no canal vermelho

Tamanho da caixa (L)	Total de caixas contadas (Nr)	Log-Log gráfico de Nr	Fator de redução
4	1370	7.2226	2.7726
8	313	5.7462	2.0794
16	57	4.0431	1.3863
32	8	2.0794	0.6931

Tabela 2 - Box Count no canal verde

Tamanho da caixa (L)	Total de caixas contadas (Nr)	Log-Log gráfico de Nr	Fator de redução
4	1027	6.9344	2.7726
8	232	5.4467	2.0794
16	49	3.8918	1.3863
32	8	2.0794	0.6931

Tabela 3 - Box Count no canal azul

Na tabela 4 estão representados os valores médios das três tabelas anteriores (colunas 2 e 3).

Tamanho da caixa (L)	Total de caixas contadas (Nr)	Log-Log gráfico de Nr	Fator de redução
4	1206.66	7.0956	2.7726
8	257.33	5.5504	2.0794
16	50.33	3.9186	1.3863
32	8	2.0794	0.6931

Tabela 4 - Média das tabelas anteriores

A dimensão fractal da Figura 7 chegou a 2,4122 através da melhor linha de ajuste (Figura 9), onde os valores foram obtidos da coluna fator de redução da tabela 4.

Nota-se que as imagens coloridas são mais ásperas que as imagens em escalas de cinza se tratando do espaço pentadimensional. Estimativas mais precisas da dimensão fractal precisam de uma análise mais abrangente, levando em consideração outras medidas.

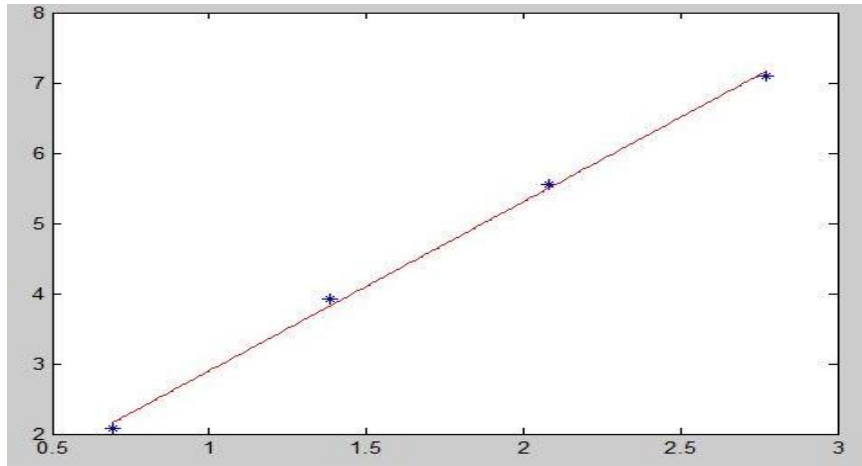


Figura 9 - Gráfico da melhor linha de ajuste

4.5 Uma variação do algoritmo Box-Counting aplicado a imagens coloridas^[11]

Mandelbrot^[10] definiu um conjunto como fractal se ele é a união de n diferentes subconjuntos, onde cada uma das cópias do original tem uma escala $r < 1$ em todas as coordenadas. Ele definiu a dimensão fractal D pela relação

$$1 = n \cdot r^D \quad (8)$$

Para calcular D , pode-se usar a seguinte equação:

$$D = \frac{\log n}{\log s} \quad (9)$$

onde $s = \frac{1}{r}$. Podemos aplicar o algoritmo Box-Counting para medir a dimensão fractal. Ele foi introduzido por Gagnepain e Roques-Carnes em 1986 como “contagem de células reticulares”. Ele trabalha lendo iterativamente o volume $L_x \times L_y \times L_z$ em que o conjunto está contido, com o tamanho da caixa $\varepsilon_x \times \varepsilon_y \times \varepsilon_z = \frac{L_x}{s} \times \frac{L_y}{s} \times \frac{L_z}{s}$ e contando o número de caixas não vazias. A leitura é realizada com caixas não sobrepostas para $s = 2^v$, onde v é o número de iterações e n é calculado para cada s . O procedimento termina quando ε é menor ou igual ao tamanho da estrutura onde o conjunto é construído. A dimensão fractal pode ser calculada a partir da inclinação do gráfico de $\log n - \log s$.

O método de distribuição em massa para a medição fractal foi apresentada por Voss em 1986 e implementado por Keller et al em 1989 para segmentação de imagem. Os valores de tamanho de caixa são, de acordo com esse método, sem um padrão, mas todos os possíveis

entre 1 e L . Além disso, a caixa não tem uma posição predeterminada na grade, mas ela centra em cada elemento de dado do espaço tridimensional. Para cada tamanho e posição de caixa, o número de elementos de dados m em cada caixa é contado (a massa). O número de caixas n em cada ε é calculado a partir da contagem de todas as caixas de tamanho ε com $m = 1$ pixel no interior, com $m = 2, 3, \dots, L^3$. Esse método é mais preciso e pode facilmente calcular a dimensão fractal local, mas ele requer muito mais poder de processamento.

A variação do Box-Counting denominada concatenação binária, foi proposta por Liebovitch e Toth em 1989 e é a seguinte: para cada elemento do conjunto, uma string (cadeia de caracteres) é criada pela concatenação das representações binárias das suas coordenadas normalizadas em todos os eixos do espaço. Para cada iteração, uma lógica “e” é feita com uma string formada por 1's para o primeiro $V_{\max} - V$ dígitos e 0's para o resto, onde V_{\max} é o total de iterações. Depois disso, esses números são ordenados e o número de mudanças entre eles é contado. A dimensão fractal é calculada como de costume.

O método da caixa deslizante introduzido por Allain e Cloitre em 1991 usa uma caixa de tamanho ε que é sucessivamente centrada em todas as posições de pixels. A massa m é medida e a distribuição de probabilidade $Q(m, \varepsilon)$ é obtida de forma que uma caixa deslizante de tamanho ε contenha uma massa m . Depois de calcular os momentos dessa distribuição, tanto D como a lacunaridade podem ser calculadas.

O método Box-Counting diferencial (DBC) apresentado por Sarkar e Chaudhuri em 1992 substitui o tempo consumido lendo o eixo vertical com uma simples subtração. Em vez de ler todo o espaço tridimensional onde o conjunto está contido em um cubo, uma leitura é feita no plano x,y com um quadrado e é medida a altura entre os valores máximo e mínimo no eixo z ; assumindo ser o número total de caixas encontradas acima do quadrado. Esse método funciona se o conjunto for denso e uniformemente distribuído no eixo vertical. Contudo, se, na mesma coluna, apenas as partições mais altas e mais baixas não forem vazias, o algoritmo DBC medirá L_z em unidades de caixa em vez de 2. Ele também não é expansível para mais de três dimensões; a implementação (supostamente possível) não valeria o esforço.

O algoritmo de particionamento sucessivo, apresentado por Molteno em 1993, consiste em dividir cada caixa em 2^E subcaixas, desconsiderando todas as caixas vazias pelo resto do processo, salvando tempo de processamento.

Um método de medição de dimensão fractal de imagens coloridas foi criado por Lindstrom, em 2008. O método utilizado é uma extensão do método de variação (é essencialmente um “Box-Counting diferencial deslizante”) em várias dimensões. Entretanto, o

método proposto precisa de mais que três canais de cores para ser preciso, os recursos computacionais necessários também são muito altos.

Uma extensão do método de distribuição de massa mencionado acima, no espaço colorido, tem sido feito recentemente em um trabalho não publicado de Ivanovici e Richard. Para um certo quadrado de tamanho ε , no plano x,y , eles contam o número de elementos de dados (pixels) que estão dentro de um cubo tridimensional de tamanho ε centrado no pixel atual.

4.5.1 Descrição do Método Fractal Multiescala e Multidimensional

O método proposto por Nikolaidis, N. S.; Nikolaidis, I. N.; Tsouros, C. C. inicia considerando que cada eixo da imagem é primeiramente particionado em S partições para criar uma grade E -dimensional,

$$S_{\max} = L_{\min} = \min(L_x \times L_y \times L_z). \quad (10)$$

As iterações ocorrerão para valores de $s = S_{\max}/2^v$, $v = v_{\max}, v_{\max}-1, \dots, 1$, onde

$$v_{\max} = \lfloor \log_2(L_{\min}) \rfloor \quad (11)$$

é o número máximo de iterações se reduzirmos pela metade as bordas ε da caixa em cada iteração de acordo com a relação:

$$\varepsilon = \frac{L}{s}, \quad (12)$$

para cada eixo.

O particionamento no eixo x , será determinado por:

$$t_x = \lfloor \frac{x}{\varepsilon_x} \rfloor = \lfloor \frac{xs}{Lx} \rfloor \quad (13)$$

onde x é a coordenada de um pixel qualquer na caixa e t_x é a coordenada da caixa. A mesma normalização se aplica a todos os eixos. Isso significa que, se nós conhecemos as coordenadas (x,y) do pixel, nós podemos encontrar a que caixa esse pixel pertence, tendo em mente que $z = f(x,y)$.

No Box-Merging, a primeira iteração é executada com o particionamento mais fino possível ($s = S_{\max}$). A ideia fundamental é que, se as posições dessas caixas não vazias são

conhecidas, elas pertencem imediatamente à partição inferior ($s_{\max}/2$), podendo ser encontradas sem leituras adicionais. Então, nós construímos uma tabela A com as coordenadas de todas as partições que contém pelo menos um elemento do conjunto de dados. A tabela da partição de uma nova iteração pode facilmente ser criada por uma divisão inteira por 2 de todo conteúdo de A e mesclando as linhas idênticas, não sendo necessárias novas leituras. O algoritmo é o seguinte (Figura 10):

```
s ← Lmin (5)
  Calcular ε para todos os eixos (7)
  PARA todos os pixels de coordenadas (x,y)
    Calcule as coordenadas da partição t (8)
    Insira os valores de t em uma nova linha na tabela de partição A
  FIM DO PARA
  Elimine as linhas iguais de A
  Armazene o número n de linhas de A e o valor atual de s
  Calcule o número máximo de iterações (6)
  PARA todas as iterações, exceto a anterior
    Divida os conteúdos de A por 2 e tome sua parte inteira
    Elimine linhas iguais para criar a nova tabela de partição A
    Armazene o número n de linhas de A
    Divida s por 2 e guarde o novo valor
  FIM DO PARA
  Calcule D (dimensão fractal) pelos valores armazenados de n e s (2 e 9)
FIM DO ALGORITMO
```

Figura 10 - Algoritmo Box-Merging

4.5.2 Cálculo da dimensão fractal pelo gráfico de $\log n - \log s$

A fim de obter uma melhor compreensão de como a forma do gráfico de $\log n - \log s$ afeta o cálculo de D , usaremos uma imagem com grande autossimilaridade e calcularemos os gráficos de $\log - \log$ em várias resoluções (Figura 11) e vários raios de desfocagem (Figura 12).

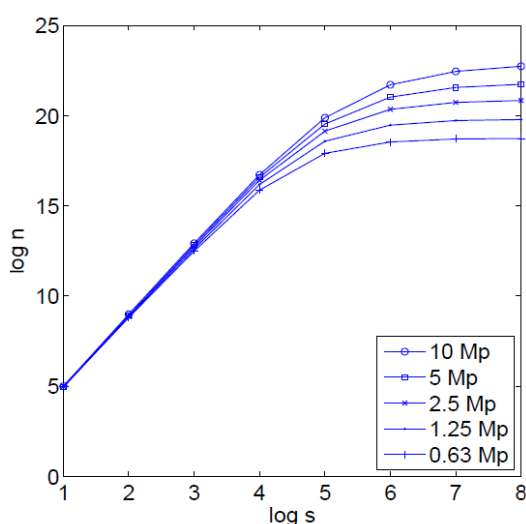


Figura 12 - Gráfico de $\log n - \log s$ com a resolução como parâmetro

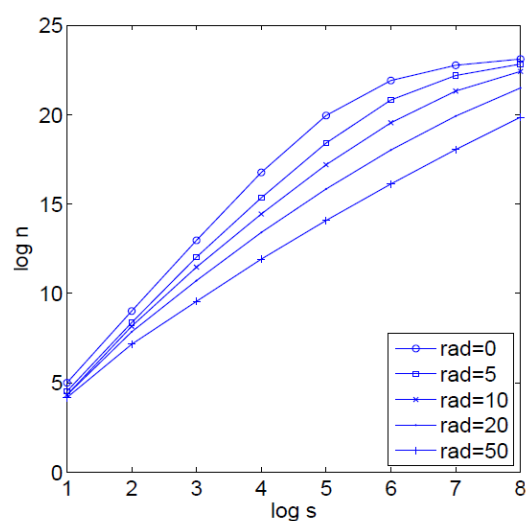


Figura 11 - Gráfico de $\log n - \log s$ com o raio de desfocagem como parâmetro

Nota-se que, quando a resolução diminui, D permanece praticamente constante, ao passo que ele diminui quando a imagem começa a ser desfocada. Quando a dimensão fractal é alta e o tamanho da imagem é limitado, o gráfico tende abruptamente à uma linha horizontal próxima a altura correspondente ao $\log_2(Lx Ly)$. Isto acontece porque a imagem só pode ser dividida um número finito de vezes; as caixas que o algoritmo conta nunca podem ser maiores que o total de pixels na figura. Assim, mesmo que o tamanho do gráfico aumente desde o início, há um corte em uma altura predeterminada. Se levarmos em conta esse corte no cálculo da dimensão fractal, ele produzirá resultados errados. Se a parte horizontal do gráfico corresponde ao logaritmo do tamanho, isso significa que esta imagem precisa de mais pixels para manifestar sua autossimilaridade. Em outras palavras, a imagem tem uma dimensão fractal muito alta para ser mantida nesse tamanho. Para compensar isso, decidiu-se que todos

os valores de $\log n$ aproximadamente iguais ao logaritmo do tamanho da imagem devem ser desconsideradas, ou seja:

$$(\log_2 n)_{max} = 0,9 \log_2(Lx Ly) . \quad (14)$$

O valor constante 0,9 foi determinado de modo a fornecer melhores resultados. A dimensão da caixa é calculada pela inclinação do ajustamento linear dos valores não rejeitados.

4.5.3 Avaliação do algoritmo

A imagem colorida é um mapeamento de um espaço bidimensional de posições de pixels para o espaço tridimensional do padrão de cores RGB. Como todo o quadro da imagem no plano x, y é usado, a dimensão fractal mínima será $D_{min} = 2$. A dimensão fractal será sempre menor que a dimensão Euclidiana do espaço onde o conjunto de dados está contido, o que significa que $D_{max} = 5$ (pois as dimensões são x, y, R, G, B). Para criar uma forma com uma dimensão fractal maior que 2, seria necessário um canal alfa que definiria alguns pixels como transparente, desconsiderando suas informações de cor. Nessa situação, a dimensão fractal da imagem colorida pode tornar-se tão pequena quanto 0.

Definiremos uma linha colorida com dimensão fractal 1 (Figura 9), onde todos os pixels que não pertencem a ela são transparentes; isso significa que a tabela da partição terá menos que $L_x \times L_y$ linhas (pixels). Para esta linha, o programa nos deu exatamente $D = 1$, como esperado.

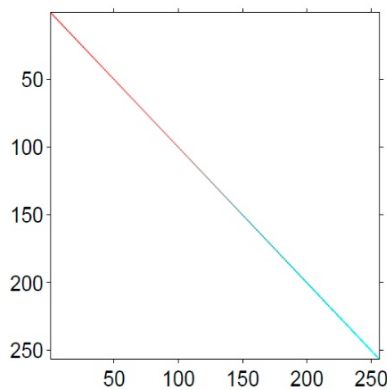


Figura 13 - Linha de dimensão fractal 1

As figuras 13, 14, 15 e 16 possuem tamanho de 256×256 pixels e dimensão fractal conhecida. Na primeira, vemos um fluxo de cores “limpo” onde cada pixel possui uma cor distinta, portanto a dimensão fractal é mínima. As imagens seguintes são cópias da primeira, porém com uma quantidade de números aleatórios cada vez maior em sua composição, isso fez com que a dimensão fractal aumentasse conforme esses números.



Figura 16 - Dimensão 2

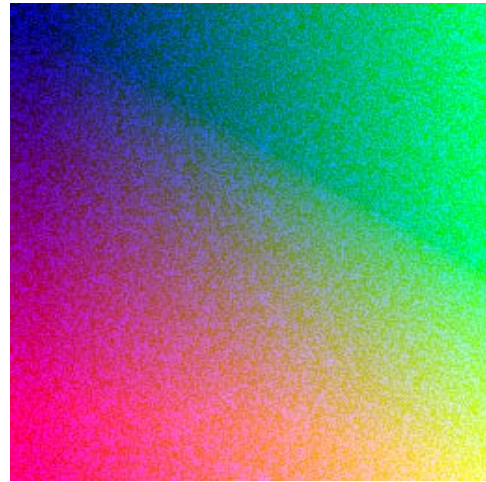


Figura 17 - Dimensão 3



Figura 14 - Dimensão 4

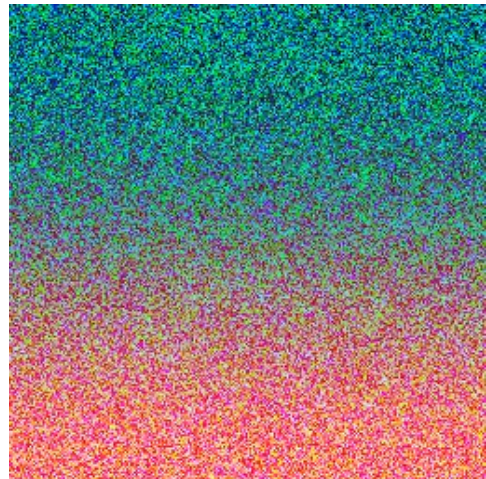


Figura 15 - Dimensão 5

Aplicando o algoritmo box merging, a dimensão fractal de várias pinturas famosas foi medida. A Figura 16 apresenta D pequeno, a Figura 17 D médio e a Figura 18 possui grande valor de dimensão fractal pois é notável sua autossimilaridade.



Figura 19 - Leonardo da Vinci $D = 2.45$



Figura 20 - Monet $D = 3.66$



Figura 18 - Pollock $D = 4.18$

A partir do modelo apresentado, Nikolaidis, N. S.; Nikolaidis, I. N.; Tsouros, C. C. concluíram que o algoritmo box merging foi baseado no box-counting, é rápido e facilmente aplicado a partir de uma a qualquer número de dimensões. O algoritmo tem quase todas as características do método box-counting, produzindo a mesma tabela $\log n - \log s$. Concluiu-se ainda pelo algoritmo, que as imagens coloridas possuem dimensão fractal entre 2 e 5, o que valida o algoritmo.

4.6 Detecção de câncer de próstata a partir de histopatologia usando cores fractais e modelos probabilísticos de Pairwise Markov [\[12\]](#)

O protocolo de triagem atual para o câncer de próstata (CaP) inclui um exame retal digital e um exame de antígeno específico da próstata. Se estes exames revelarem anormalidades, uma biopsia transuretral guiada por ultrassom é necessária para excisar o

tecido para um exame histológico. Se o exame revelar a presença de câncer, um cirurgião pode realizar uma prostatectomia radical (PR), excisando toda a glândula. Após a prostatectomia, a próstata é fatiada em cortes histológicos. Essas secções histológicas (SH) são tingidas com hematoxilina e eosina (H&E). A hematoxilina pigmenta o material nucleico de azul, enquanto a eosina colore as estruturas citoplasmáticas e a matriz extracelular de vermelho. A cor e textura dessa pigmentação fornecem informações valiosas para distinguir o tecido canceroso do benigno, uma vez que existe maior variação de cor em regiões cancerosas devido ao denso acondicionamento do núcleo.

Embora a classificação das SHs seja feita atualmente por médicos, existem várias vantagens que têm motivado o desenvolvimento de sistemas de diagnóstico assistido por computador (DAC) para a detecção do câncer de próstata em amostras histológicas. Entre elas temos: o DAC permite analisar a vasta quantidade de dados presentes nas SHs, uma tarefa que querer certo tempo e que é atualmente realizada por patologistas; extração de características quantitativas e reproduzíveis que podem reduzir a variabilidade inter-especialista na classificação do câncer de próstata; o DAC possibilita um diagnóstico rápido e mais preciso que pode influenciar potencialmente à tomada de decisões relacionadas ao tratamento.

O uso da dimensão fractal colorida (DFC) em secções histológicas permite que valiosas informações de cor sejam exploradas. Devido à conhecida diferença na intensidade da cor e textura entre o câncer e as regiões normais no SH, o valor obtido da dimensão fractal para os pixels na região do câncer é diferente dos pixels nas regiões normais. Ao impor certas restrições no algoritmo para calcular a DFC em uma base por pixel, pode-se determinar a probabilidade de câncer por pixel dado o valor da característica correspondente. A informação é incorporada ao modelo probabilístico de Pairwise Markov, a fim de obter um resultado mais preciso nos resultados. Ao final é produzida uma classificação que determinará se em cada pixel constitui uma área com câncer ou não.

4.6.1 Extensão do algoritmo de dimensão fractal colorida

O algoritmo de dimensão fractal colorida proposto por Ivanovici (item 4.5) será adaptado para a detecção do câncer de próstata. Para isso calcularemos a DFC em uma base por pixel, ou seja, a dimensão fractal será calculada para cada sub-imagem $L_x \times L_y$

centrada no pixel s atual. Ao invés de construir um hipercubo sobre o pixel central F^s , construiremos um hiper-retângulo que tem diferentes limites de tamanho L_x , L_y , L_R , L_G e L_B para cada canal de cor e dimensão espacial. Essa modificação é feita para adaptar a análise do corte histológico da próstata. Através da análise separada dos canais vermelho, azul e verde, o tamanho mais adequado do hiper-retângulo pode ser encontrado para cada canal.

Após calcularmos a dimensão fractal para cada pixel base, devemos fazer sua classificação Bayesiana. Para isso, uma mistura de distribuições gama é usada para modelar as funções de densidade de probabilidade (FDP) para os pixels que apontam câncer e para os benignos, o a função é dada por:

$$g(y, \theta, k, \alpha) = \alpha y^{k_1-1} \frac{e^{-y/\theta_1}}{\theta_1^{k_1} \Gamma(k_1)} + (1 - \alpha) y^{k_2-1} \frac{e^{-y/\theta_2}}{\theta_2^{k_2} \Gamma(k_2)}, \quad (15)$$

onde $y > 0$ é dimensão fractal colorida, $\alpha \in [0,1]$ é o parâmetro de mistura, $k_1, k_2 > 0$ são parâmetros da forma, $\theta_1, \theta_2 > 0$ são os parâmetros de escala, e Γ é a função gama. A probabilidade de cada pixel ser canceroso através da DFC é obtida pelo teorema de Bayes. Um exemplo de FDPs geradas para os grupos de câncer e benigno estão representados na Figura 21, onde a linha azul representa os pixels benignos e a vermelha os pixels malignos.

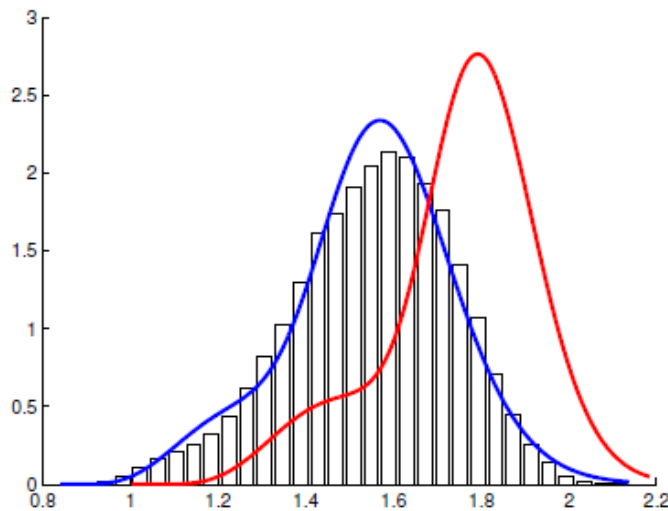


Figura 21 - Função gama de um pixel benigno e um pixel maligno

Visto que os pixels de câncer são mais propensos a estar ao lado de pixels de câncer, a incorporação de informação espacial contextual é essencial para detecções de CaP mais precisas. Essa informação contextual é inserida com a combinação da equação 15 e um modelo probabilístico de pares de Markov (MPPM), de modo a determinar a melhor classificação possível para cada pixel.

4.6.2 Avaliação do algoritmo

Para avaliar a capacidade de detecção do algoritmo, a DFC foi calculada para todos os pixels sobre 27 secções histológicas. Sete valores diferentes foram usados para o tamanho do hiper-retângulo: $L_x, L_y \in \{3, 5, 9, 17, 33, 65, 129\}$. Os canais vermelho, verde e azul tiveram valores limites de 13, 23 e 19, respectivamente.

O método de validação cruzada leave-one-out foi usado para classificar o treinamento e a avaliação. Primeiramente, foram obtidos os valores característicos para pixels de câncer e pixels benignos no conjunto de teste através das FDPs. Com essas distribuições, a probabilidade de cada pixel ser de câncer ou benigno é calculada para todos os pixels do corte. O processo foi feito para todos os cortes. Após ser feita a classificação com probabilidade Bayesiana gerada pelas informações de DFC separadas, incorporamos a informação espacial com um MPPM para obter a classificação final de pixel benigno ou maligno.

4.6.3 Resultados e discussão

As probabilidades Bayesianas calculadas com DFC para todos os pixels foram limiarizadas para obter uma curva característica. A área abaixo dessa foi de 0,790. Com a introdução do MPPM a área abaixo da curva aumentou para 0,831. Esse aumento indica que a inclusão do MPPM aumenta a precisão dos cálculos.

O exemplo seguinte permite um melhor entendimento do algoritmo. A Figura 22 representa duas secções histológicas com regiões de câncer.

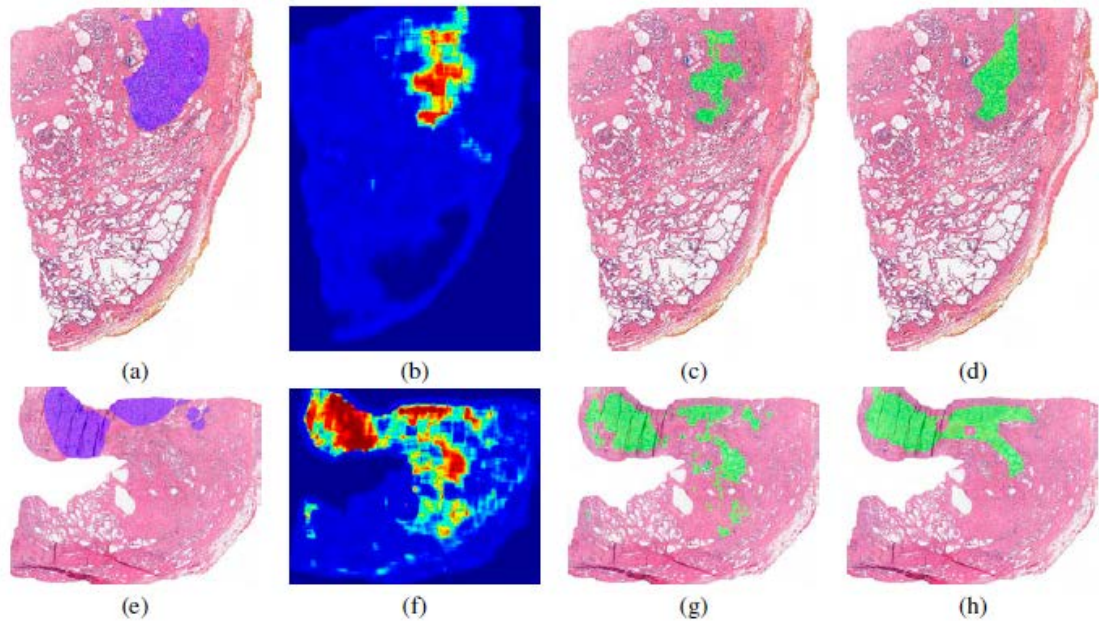


Figura 22 - Exemplo de duas secções histológicas com câncer

As figuras 22(a) e (e) têm marcações feitas por um especialista (em azul) das áreas de câncer. As figuras 4(b) e (f) representam o resultado da probabilidade Bayesiana usando a DFC. Nas figuras 22(c) e (g) vemos o resultado final da aplicação da probabilidade Bayesiana no ponto ideal. Por fim, as figuras 22(d) e (h) contém o resultado final do algoritmo, onde foi incorporada a informação especial pelo MPPM, nota-se que as classificações concordam muito bem com a marcação feita pelo especialista.

4.7 Aplicando o cálculo da dimensão fractal em imagens pulmonares

Os instrumentos da geometria fractal podem ser estendidos a situações em que ocorram alterações associadas a doenças e, portanto, contribuir para o entendimento de processos patológicos na medicina. A dimensão fractal em especial, pode ser aplicada para auxiliar no diagnóstico de certos tipos de doenças. Por meio dela, imagens médicas

podem ser classificadas de acordo com características que determinam se o paciente possui ou não enfermidade. [\[13\]](#)

Para verificar na prática como a dimensão fractal atua em imagens médicas, foi selecionado um conjunto de imagens pulmonares composto por radiografias reais e imagens simuladas, as imagens reais foram subdividas em normais e com doença, bem como as imagens simuladas.

Foram feitos recortes quadrados de 150 pixels dessas imagens, sobre eles aplicou-se o método para calcular a dimensão fractal proposto por Nikolaidis, N. S.; Nikolaidis, I. N.; Tsouros, C. C. A partir dos resultados obtidos, calculou-se a média aritmética, o desvio padrão e o intervalo de confiança (95%), visando representar os resultados de forma concisa e estatisticamente confiável. Eles estão dispostos nas tabelas 5 e 6, que representam as imagens sem doença e as imagens com doença respectivamente.

	Média aritmética	Desvio Padrão	Intervalo de confiança (95%)
Reais	1,87	0,02	0,009
Simuladas	1,83	0,01	0,005

Tabela 5 - Resultados para imagens normais

	Média aritmética	Desvio Padrão	Intervalo de confiança (95%)
Reais	1,91	0,04	0,008
Simuladas	1,86	0,02	0,005

Tabela 6 - Resultados para imagens com doença

Comparando os dados, nota-se que em ambas as tabelas as médias das dimensões fractais das imagens simuladas são menores que as reais, isso acontece porque

as imagens simuladas possuem menor riqueza de detalhes que as imagens reais. Isso as torna menos ramificadas, diminuindo o valor.

Na tabela 5, os valores das médias são menores que os valores da tabela 6. Como já era sabido quais eram as imagens que apresentavam doença ou não, pode-se dizer que elas terão um valor de dimensão fractal maior, com uma diferença de 0,04 para imagens reais e 0,03 para imagens simuladas. Essa diferença ocorre pelo fato das imagens com doenças terem maior ramificação, o que aumenta a dimensão fractal.

O desvio padrão e o intervalo de confiança mostraram-se relativamente baixos, comprovando que as dimensões fractais estão satisfatoriamente próximas da média e que os resultados são confiáveis.

Pode-se concluir que o método proposto para calcular a dimensão fractal é de fato eficaz, pois calculou dimensões fractais suficientemente precisas, tornando possível a classificação de imagens médicas através da geometria fractal.

REFERÊNCIAS

- [1] Wikipédia, **Geometria Euclidiana**. Disponível em:
<http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_euclidiana> Acesso em 31 de maio de 2015.
- [2] Info Escola, **Geometria Plana**. Disponível em: < <http://www.infoescola.com/geometria-plana/>> Acesso em 31 de maio de 2015.
- [3] Silva, Karolina Barone Ribeiro da. **Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais**. CRV, Curitiba, 2011. 114 p.
- [4] Barbosa, Ruy Madsen. **Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula**. Autêntica, Belo Horizonte, 2002. 142p.
- [5] Wikipédia, **Geometria não euclidiana**. Disponível em:
<http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_euclidiana> Acesso em 01 de junho de 2015.
- [6] Wikipédia, **Fractal**. Disponível em: < <http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>> Acesso em 01 de julho de 2015.
- [7] Mesquita, Alberto, **Fractais – A linguagem do caos**. Disponível em:
<<http://www.albertomesquita.net/am/fractais/fractais2.htm>> Acesso em 02 de junho de 2015.
- [8] SciELO, **Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais**. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005> Acesso em 01 de junho de 2015.
- [9] Nascimento, Maristel do. ET AL. **Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica**. Disponível em:
<<http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/08.pdf>> Acesso em 01 de julho de 2015.
- [10] Nikolaidis, N. S.; Nikolaidis, I. N.; Tsouros, C. C. **A Variation of the Box-Counting Algorithm Applied to Colour Images**. 2011. 10 p.
- [11] Nayak, S. R.; Ranganath, A.; Mishra, J. **Analysing Fractal Dimension of Color Images**. 2015. 4 p.
- [12] Yu, E. ET AL. **Detection of Prostate Cancer on Histopathology using Color Fractals and Probabilistic Pairwise Markov Models**. 2011. 4 p.
- [13] Migliolli, Neli. **Protótipo de um software para geração de imagens utilizando fractais**. Disponível em: < <http://dsc.inf.furb.br/arquivos/tccs/monografias/2000-1nelimigliolli.pdf> > Acesso em 14 de fevereiro de 2015.